IND’s skriftserie

IND’s skriftserie nr. 49

MatematikBroen - Fra Grundskole til gymnasium

UNIVERSITY OF COPENHAGEN
DEPARTMENT OF SCIENCE EDUCATION

MatematikBroen

Fra grundskole til gymnasium

Britta Eyrich Jessen, Christine Holm, and Carl Winslw

2017

Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

MatematikBroen

Fra grundskole til gymnasium

Gennemført med støtte fra A.P. Møller Fonden

Et tværregionalt samarbejde mellem
Silkeborg Kommune og Københavns Kommune
med deltagelse af Institut for Naturfagenes Didaktik (KU),
Gefion Gymnasium, Silkeborg Gymnasium,
VIA University College, Professionshøjskolen UCC
samt udvalgte grundskoler i Silkeborg og København.

Britta Eyrich Jessen
Christine Holm
Carl Winsløw

December 2016

Udgivet af Institut for Naturfagenes Didaktik,
Københavns Universitet, Danmark

E-versionen findes på http://www.ind.ku.dk/skriftserie
Printet af www.lulu.com

Denne udgivelse kan købes på markedspladsen på www.lulu.com

MatematikBroen – Fra grundskole til gymnasium, IND's skriftserie nr. 49. ISSN: 1602-2149

Sammenfatning

Vi præsenterer i denne rapport udvalgte metoder og resultater fra projektet *Matematikbroen*, som i årene 2015-2016 blev gennemført med støtte fra A.P. Møller-fonden i et samarbejde mellem Københavns Kommune, Silkeborg Kommune, Gefion Gymnasium, Silkeborg Gymnasium, Professionshøjskolen UCC, VIA University College, og Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet.

Projektet sigtede på at udvikle undervisningsmateriale med tilhørende efteruddannelsesaktiviteter for folkeskolens matematiklærere, som kan bidrage til at øge indsatsen i folkeskolens ældste klasser indenfor områder af matematikfaget, som i særlig grad vurderes at skabe problemer for eleverne når de starter i 1. G - specifikt, elementær algebra (bogstavregning, ligningsløsning etc.) og simpel matematisk modellering, herunder brug af matematik i andre sammenhænge.

Projektet er dels baseret på erfaringer fra Silkeborg kommune og Silkeborg Gymnasium, som gennem en del år har arbejdet med disse problemer, bl.a. i regi af netværk mellem grundskolens og gymnasiets matematiklærere - dels på et udvalg af matematikdidaktiske metoder og resultater, som er udviklet mhp. at skabe innovative løsninger og analyser af dem.

Projektet var organiseret i tre arbejdsgrupper: en styregruppe som planlagde og monitorerede projektet, en projektgruppe som udviklede undervisningsmaterialer og forestod efteruddannelsen, og en forskergruppe som bidrog med input til projektgruppen og stod for evaluering og afrapportering.

Resultaterne af projektet har mindst to sider: de konkrete produkter, som blev udviklet i form af materialer og formater til både grundskoleundervisning, lærernes efteruddannelse og vidensdeling, og redskaber til evaluering af resultaterne. Disse produkter er blivende og indgår allerede i nye initiativer, som omfatter flere skoler og kommuner end de oprindelige partnere.

En anden side af resultaterne er de erfaringer, som projektet har gjort med materialerne, både ift. lærernes udvikling og elevernes matematiske udbytte. For så vidt angår lærerne er erfaringerne overordnet set positive: samarbejdet har skabt nye og bedre relationer på tværs af skoleformerne, og vi har fået mere viden om, under hvilke betingelser lærerne kan lære af hinanden og ved fælles hjælp arbejde med overgangsproblemer i matematik. For så vidt angår eleverne var der bedre resultater i en test udført på 1.G-elever, hvis lærere havde deltaget i projektet, end i en kontrolgruppe; forskellen var dog kun signifikant i en af de to kommuner, hvilket kan skyldes det relativt beskedne datamateriale, som det var muligt at opnå indenfor projektets rammer. Vi har dog også andre og på sin vis mere substantielle grunde til at anbefale, at Matematikbroens produkter og metoder videreudvikles og udbredes.

December 2016,
Britta Eyrich Jessen, Christine Holm og Carl Winsløw

1. Indledning

Matematikbroen er et projekt, der søger at løfte overgangen fra grundskole til gymnasium i Silkeborg og Københavns kommuner. Projektet er støttet af A.P. Møller Fonden under den ekstraordinære bevilling til at styrke undervisningen i den danske folkeskole (http://www.apmollerfonde.dk/folkeskolen.aspx). Denne rapport er afrapporteringen af projektet til fonden og samarbejdspartnere. Hovedpunkter vil senere blive formidlet i en mere populær artikel. Materialer fra projektet kan findes på Matematikbroens hjemmeside: http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med grundskolen/matematikbroen/.

Formålet med projektet er på evidensbaseret grundlag at undersøge hvordan man kan reducere elevernes problemer i matematik – og til dels naturfag – ved overgangen fra grundskolen til en gymnasial uddannelse. Formålet er generelt at styrke elevernes matematiske kompetencer på grundskolens sluttrin og derved lette deres start i gymnasiet. Målgruppen for projektet er derfor i princippet alle elever i grundskolens ældste klasser. Derigennem kan man også bidrage til opfyldelse af nationale målsætninger om

- at øge elevernes udbytte af matematik i folkeskolen
- at have eller skabe sammenhæng i uddannelseskæden og mellem fagene
- at 95 % af en ungdomsårgang gennemfører en ungdomsuddannelse
- at reducere frekvensen af omvalg af ungdomsuddannelse
- at øge rekrutteringen til de teknisk-naturvidenskabelige studieretninger på de gymnasiale uddannelser (herunder naturligvis både HTX og STX)
- at fremme en elevaktiverende, anvendelsesorienteret og eksperimenterende matematikundervisning i grundskolen (og efterfølgende i de gymnasiale uddannelser)

Baggrunden for projektet er at overgangen i matematik fra grundskole til gymnasium giver anledning til særlige udfordringer, hvilket flere rapporter om overgange i uddannelsessystemet peger på (fx (Mathiasen et al., 2009) & (Ebbensgaard, Jacobsen & Ulriksen, 2014). En udfoldelse af baggrunden for projektet kan læses i afsnit 2. Fokus i projektet ligger på matematikundervisningen, og modellering blev udpeget som et af de særlige fokuspunkter. Med valget af dette emne understøtter projektet også naturfagsundervisningen.

1.1 Projektets deltagere og plan

Projektet er organiseret med en styregruppe, en projektgruppe og en forskergruppe fra Institut for Naturfagenes Didaktik. Styregruppen har løbende fulgt projektet og sikret sig, at de planlagte milepæle er blevet mødt på rimelig vis samt godkendt justeringer undervejs. Styregruppen består af:

Nanna Tolborg, konsulent, Silkeborg Kommune,
Christina Bundgaard, konsulent, Københavns Kommune,
Carl Winsløw, professor, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet,

Jacob Stubgaard, vicerektor, Gefion Gymnasium,
Brian Krog Christensen, uddannelseschef, Silkeborg Gymnasium.

Selve projektarbejdet med udformning og afholdelse af kurser er blevet varetaget af en projektgruppe bestående af:
Emmelie Kristina Pedersen, pædagogisk leder, Silkeborg Gymnasium,
Tina Bové Risgaard, pædagogisk leder, Silkeborg Gymnasium,
Michael Kjeldahl Møller, adjunkt, Silkeborg Gymnasium,
Helene Salvagni Binderup, lærer, Hvinningdalskolen Silkeborg,
Mads Alex Kallestrup Madsen, lærer, Fårvang Skole Silkeborg,
Niels Peter Hals, adjunkt, Gefion Gymnasium,
Birgitte Erskov Halland, lektor, Gefion Gymnasium,
Mads Erichsen, fagkonsulent i matematik, Sølvgade Skole København,
John Valskov Weichardt, fagkonsulent i matematik, Husum Skole København,
Karen Drejer, lektor, VIA University College, Læreruddannelsen i Silkeborg og
Thomas Kaas, lektor, Læreruddannelsen, University College Copenhagen.

I skoleåret '15/'16 var Emmelie Kristina Pedersen projektleder og varetog kommunikationen mellem projektgruppen og styregruppen samt al kommunikation til de deltagende grundskolelærer. I skoleåret '16/'17 varetages denne rolle af Tina Bové Riisgaard.

Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) har løbende fulgt og bidraget til projektgruppens arbejde ved at understøtte det med fagdidaktisk viden, og ved at observere og evaluere diverse aktiviteter. Endvidere har forskergruppen udviklet og analyseret resultaterne af a en test af deltagende elever med henblik på at opnå en kvantitativ indikator for resultater af projektets udmøntning. Dette arbejde er varetaget af professor Carl Winsløw, konsulent Christine Holm og ph.d.-studerende Britta Eyrich Jessen (IND-gruppen). En del af det indledende arbejde med udvikling af testen blev udført som del af et specialeprojekt af Caroline Sofie Poulsen under vejledning af Carl Winsløw og Britta Eyrich Jessen.

1.2 Projektets aktiviteter

Projektet indebar en række konkrete aktiviteter, som vi udfolder her, da der refereres til dem i det følgende:

1. **Workshops for projektgruppe**
   Der blev afholdt to workshops (to dages internater) for projektgruppen (se nedenfor), organiseret af styregruppen, med deltagelse og oplæg fra IND-gruppen. Disse workshops fungerede som forberedelse af de efterfølgende kurser for grundskolelærere. Udover praktiske rammer for projektet var de vigtigste emner på disse workshops:
   a. **Kendte problemer i matematik og naturfag ved overgangen mellem grundskole og gymnasium**
      Der blev præsenteret hovedpunkter af nyere undersøgelser på området, herunder undersøgelser gennemført af *Netværk for Matematiklærere i Silkeborgområdet.* Undersøgelsernes resultater blev konkretiseret og sammenholdt med deltagernes

praksiserfaringer, projektets udviklingsmål og læreplanerne for de involverede institutioner. Relevante dele af disse præsentationer gennemgås i afsnit 2.

b. **Didaktisk design**
En anden gruppe af oplæg præsenterede teori om og metoder til udvikling af undervisningsdesigns, der kan tage hånd om de kendte udfordringer ved overgangen fra grundskole til gymnasial uddannelse. Der blev herunder præsenteret materialer udviklet inden for to igangværende ph.d.-projekter om undersøgelsesbaserede designs (”Studie og forskningsforløb” og professionel udvikling af lærerkropset gennem ”Lektionsstudier”) i gymnasiet og grundskolen, samt materialer der er udviklet af *Netværk for Matematiklærere i Silkeborgområdet.* En kort beskrivelse af disse tilgange er givet i afsnit 2.

c. **Udvikling af undervisningsmaterialer, herunder materialekasser til anvendelsesorienteret matematik**
På workshoppen lagde projektgruppen sig fast på at udvikle et forløb i matematisk modellering gennem designformatet ”Studie- og forskningsforløb”. Der blev udviklet to forløb med tilhørende materialekasse samt et undervisningsmateriale, der forbereder lærerne til at anvende materialet og til at videreudvikle materialet selv.
Sideløbende blev der udarbejdet et materiale i skolealgebra, der gennem ”taltryllerier” og ”taltavler” understøtter elevernes selvstændige brug af aritmetik med generaliseringer til begyndende skolealgebra. Materialerne til disse to temaer er findes på Matematikbroens hjemmeside.

d. **Model for samspil mellem institutioner i udviklingsprojekter**
Der blev præsenteret hovedresultater af international forskning vedr. udfordringer og muligheder i didaktisk udviklingsarbejde i samspil mellem forskellige vidensinstitutioner, herunder ”didaktisk ingeniørarbejde” og ”lektionsstudier”, som allerede i et vist omfang praktiseres i grundskole og grundskolelæreruddannelse. På basis heraf fastlagde projektgruppen et første bud på rammerne for samarbejdet med grundskolerne omkring udvikling af overgangsforløb. Modellen inkluderer gensidige besøg ved undervisning på de involverede institutioner, fælles kompetenceudvikling, udvikling og brug af undervisningsmaterialer orienteret mod overgangen mellem grund- og gymnasieskoler.

2. **Kursus for matematiklærere på grundskolens sluttrin**
Projektgruppen udviklede og afholdt et 2 dages kursus for matematiklærere på grundskolens sluttrin, med fokus på kendte problemfelter i matematik ved overgangen mellem grundskole og gymnasium. Kurset sigtede også på at styrke lærernes undervisningsfaglige kompetencer inden for områderne tal og algebra samt matematisk modellering. På kurset deltog fra hver skole et team på cirka tre lærere. Kurset trak på projektgruppens deltagelse i den tidligere omtalte workshop og havde følgende elementer:

a. **Introduktion til kendte problemer i matematik og naturfag ved overgangen mellem grundskole og gymnasium**
Hovedpunkter af resultater fra workshoppen, som baggrund og problemfelt for det fælles udviklingsarbejde.

b. **Introduktion til matematik og brugen af matematik i naturfag på gymnasialt niveau**
Matematiklærere fra gymnasiet præsenterede eksempler på introducerende forløb i matematik på gymnasiet og gav konkrete eksempler på brugen af matematik i de naturvidenskabelige fag. Grundskolelærerne så en video af de deltagende læreres undervisning som derefter blev diskuteret i fællesskab. Desuden præsenteredes principper for og eksempler på designs af studie- og forskningsforløb.

c. **Introduktion til konkrete undervisningsmaterialer, der kan bruges til at udvikle forløb rettet mod overgangsproblemer**
Kursisterne blev præsenteret for konkrete materialer, og fik lejlighed til at arbejde med materialerne fra elevsynspunktet. På baggrund af kursisternes arbejde diskuteredes materialernes potentialer i den enkeltes klasserum. Herefter blev det fulde materiale udleveret i form af opgavesamlinger, forsøgsvejledninger, hjemmesider mv., der kan bruges til at udvikle forløb i den afsluttende del af grundskolen som forberedelse til gymnasiet. Der blev lagt vægt på at det udleverede materiale giver mulighed for undervisningsdifferentiering (så det er relevant for både klart gymnasieorienterede grundskoleelever og andre) og for en vifte af forskellige arbejds- og aktivitetsformer (fra traditionel opgaveregning til undersøgelsesbaserede forløb med mulighed for at kombination med andre fag). Det blev fremhævet at undervisningsmaterialerne understøtter en læringsmålstyret matematikundervisning i overensstemmelse med Forenklede Fælles mål, og specielt udvikler elevernes faglighed indenfor algebra og modellering.

d. **Introduktion til materialekasser, der kan danne grundlag for praktiske undersøgelser, der kombinerer matematik og naturfag**
Som en del af de i c. nævnte aktiviteter blev kursisterne præsenteret for en række virkelighedsnære og elevaktiverende forsøg (eksperimentelle undersøgelser), som med simple midler kan gennemføres i en matematiklektion. Det blev herefter demonstreret hvorledes man kvantitativt kan analysere forsøgsresultaterne ved brug af regneark o.l.
Kursisterne gennemførte selv forsøgene i forbindelse med kurset med henblik på at nedbryde velkendte barrierer hos nogle matematiklærere i forhold til praktiske undersøgelser.
Hver skole fik 3 materialekasser med indeholdende forsøgsmateriale, forsøgs- vejledning, opgavemateriale, ideer til undervisningsdifferentiering mv.

e. **Færdiggørelse af model for samarbejde mellem grund- og gymnasieskoler om overgangsproblematik**

Kursisterne blev introduceret til den model for samarbejde mellem grund- og gymnasieskoler, der blev udviklet i den første workshop, og den blev tilpasset deltagernes behov og ønsker, ligesom der blev truffet endelige aftaler om det videre forløb.
De tre kursusdage blev fulgt op af et besøg, hvor projektgruppen besøgte de enkelte kursister på deres skole og drøfter undervisningen baseret på kurset. Desuden afvikledes en opfølgningsdag, hvor alle kursister udvekslede erfaringer fra undervisningen.

3. **Implementering og fortsat samarbejde**
   En meget vigtig del af projektet var naturligvis afviklingen af undervisningsforløb i de deltagende folkeskoler, jf. pkt. 2e ovenfor og pkt. 4 nedenfor. Den planlagte observation af forløbene viste sig mere vanskelig at gennemføre som oprindelig planlagt, jf. afsnit 2.
4. **Følgeforskning og effektundersøgelse**
   a. De udviklede forløb blev observeret og dokumenteret med henblik på at identificere didaktiske udfordringer og potentialer i realiseringen og i samspillet mellem institutionerne, herunder i hvilket omfang kurser og udviklingsaktiviteter opleves som relevant af de involverede lærere, og om det i praksis har kunnet understøtte en ændret undervisningspraksis, fx gennem brug af designprincipper og materialer fra kurserne.
   b. Det blev undersøgt, om der kan påvises kvantitative forskelle i matematiske færdigheder (indenfor algebra og modellering) hos elever, hvis lærere har deltaget i projektet, og andre elever. I et forsøg på at få sammenlignelige elevgrupper blev testen gennemført med 1.G-elever fra de samme gymnasier men i to forskellige år (således at eleverne fra første år ikke havde deltaget i brobygningsforløb, mens eleverne fra andet år havde).

   Yderligere detaljer om denne aktivitet gives i afsnit 3.4.1.
5. **Videreudvikling og spredning**
   a. Efter afprøvning af de erhvervede kompetencer og af kursusmaterialerne afholdtes en opfølgningsdag for alle kursister, med udveksling af erfaringer og nye ideer til videreudvikling af praksis.
   b. På baggrund af en evaluering af det gennemførte forløb i Silkeborg Kommune og Københavns Kommune videreudvikles kursus og undervisningsmaterialer. Kurser og materialer udbydes allerede nu til en bredere kreds i såvel Silkeborg og Københavns Kommune som andre kommuner, og materialerne er gjort offentligt tilgængelige via Matematikbroens hjemmeside. Det er i forbindelse med spredningen en fordel, at projektet fra begyndelsen er repræsenteret i både Øst- og Vestdanmark, samt at projektet inddrager erfaringer fra overgangen til gymnasier med ganske forskellige socioøkonomiske profiler.
   c. Projektgruppemedlemmerne fra VIA University College og Professionshøjskolen UCC formidler materiale mv. til læreruddannelserne i hele landet.

2. Metoder til følgeforskning og effektevaluering

I afsnit 3 gennemgår vi resultaterne af de forskellige tiltag, der har været sat i værk under Matematikbroen.
Hvad angår *internaterne for projektgruppen* indskrænker vi os til en nærmere redegørelse for disses forløb, med et kort oprids af arbejdsgangen, herunder et kort oprids af de matematikdidaktiske begreber og redskaber som projektgruppen blev introduceret til.

Kurset for grundskolelærerne blev afviklet over én gang i Silkeborg og to gennemløb i København. I Silkeborg deltog 26 lærere og i København var antallet 57. Som metode til dokumentation af kursusafviklingen er der brugt observationsnoter foretaget af IND-gruppen ved det ene forløb i København samt egne noter fra projektgruppen ved de to andre afholdelser. En præsentation af disse observationer og refleksioner kan ses i afsnit 3.2.1. Projektgruppen foretog yderligere en mundtlig evaluering i slutningen af tredje kursusdag, og erfaringerne herfra er opsummeret i afsnit 3.2.2
Endvidere blev der efter tredje kursusdag udsendt et elektronisk spørgeskema til lærerne med relativt åbne spørgsmål. Svarene er efterfølgende blevet kategoriseret og analyseres i afsnit 3.3.

Det var kun i mindre omfang muligt at dokumentere deltagende læreres undervisning gennem observationer. Det viste sig meget svært at få koordineret kalendere, sådan at et projektgruppemedlem kunne observere grundskolelærernes undervisning. IND-gruppen har observeret en session i København samt besøgt en skole i Silkeborg. Baseret på observationsnoter samt lydoptagelse af refleksionsmøderne beskriver afsnit 3.4 eksempler på hvad vi, på denne spinkle basis, ved om hvordan Matematikbroens undervisningsmaterialer er blevet anvendt i praksis.

Endelig er der udviklet og gennemført en matematisk test af elever. Der er tale om en diagnostisk test (Brekke, 1996) baseret på prakseologisk analyse (Chevallard, 1999). En nærmere præsentation af testen samt dens resultater er givet i afsnit 3.5. Testen er udført to gange, med to forskellige elevgrupper. Den 5. nov. 2015 testede vi hhv. 22 og 20 elever i Silkeborg og København. Eleverne var tilfældigt udvalgt (randomiseret sample) til testen blandt hele 1.g årgangen - altså fx uafhængigt af studieretning og niveau af matematik i gymnasiet. Testen blev gennemført ved, at IND-gruppen besøgte de to gymnasier, der havde arrangeret lokale og sikret at de udvalgte elever var til stede. IND-gruppen udleverede testen og indsamlede elevernes svar. Testopgaverne blev ikke delt med hverken projektgruppe eller andre lærere i projektet. Testen blev afholdt under samme betingelser som delprøverne uden hjælpemidler ved studentereksamen: eleverne skulle aflevere mobiler og sad med afstand til hinanden. Det var kun tilladt at bruge papir, blyant og viskelæder.
Den 4. november 2016 blev 21 elever testet i hhv. Silkeborg og København med den samme test og under samme forhold som beskrevet ovenfor (idet testens praktiske afvikling i Silkeborg dog blev varetaget af et af projektgruppens medlemmer). Denne gang var eleverne tilfældigt udvalgt blandt elever, som i forrige skoleår havde deltaget i brobygningsforløb designet af Matematikbroen.

Resultatet af testen er blevet analyseret både ift. en sammenligning af de totale antal af rigtige svar, og ift. at afdække hvilke specifikke teknikker eleverne har problemer med at bruge korrekt. Testen er således ikke alene et forsøg på at måle effekter af Matematikbroens indsats, men også til at indkredse og måle specifikke overgangsproblemer ("hvad har eleverne særlig svært ved").

3. Resultater af projektet

I dette afsnit præsenteres resultaterne af Matematikbroens forskellige elementer: internaterne og udviklingen af kurserne, kursernes afholdelse, undervisningen i grundskolen samt diagnostiske tests af eleverne.

3.1 Internaterne for projektgruppen

Som beskrevet i indledningen består projektgruppen af grundskolelærere fra sluttrinene, gymnasielærere og to repræsentanter for læreruddannelserne. Begge internater var af to dages varighed og blev holdt i Middelfart.
Ved første seminar holdt IND-gruppen oplæg om overgangsproblematikker, hvorefter disse blev diskuteret i relation til, hvad Matematikbroens undervisningsforløb især skulle afhjælpe.
Herefter blev gruppen præsenteret for "den Antropologiske Teori for Didaktik" (ATD), herunder "prakseologibegrebet" og "Studie- og Forskningsforløb". Efterfølgende blev gruppen enige om at dele sig i to grupper der hhv. arbejdede med "modellering" og "tal og algebra". Gruppen, der arbejdede med tal og algebra indkredsede hurtigt deres interesse omkring taltryllerier eller taltricks. Denne tilgang tillader lærerne at styre hvilke teknikker eleverne udvikler. Modelleringsgruppen forsøgte at indkredse et godt spørgsmål, der kunne sikre, at eleverne kom til at arbejde med lineære sammenhænge ($y = ax + b$) gennem en eksperimenterende tilgang. Deres valg faldt på et spørgsmål om Barbie Bungee Jump og et projekt om at male fiktive papstjerner. En præsentation og analyse af de to gruppers materiale er givet i afsnit 3.1.3 og 3.1. De udviklede materialer findes på Matematikbroens hjemmeside (Matematikbroen, u.å.).

På andet internat gav IND-gruppen oplæg om hvilke algebraiske teknikker, der er i spil i overgangen fra grundskole til gymnasium (se evt. mere i Poulsen, 2015), evalueringstestens principper og der blev givet introduktion til lektionsstudier. En opsummering af det projektgruppen blev præsenteret for kan læses i hhv. afsnit 3.1.5 og 3.4.
Internatet fortsatte med gruppernes arbejde med udvikling af materialerne. Der blev lagt vægt på, at i det materiale som grundskolelærerne skulle have udleveret, var der klare angivelser af hvilke dele af Forenklede Fælles Mål materialet imødekommer og hvilke kompetencer der dækkes.

Projektgruppen lagde sig fast på at første kursus skulle vare to dage i stedet for de oprindelige tre. Det første kursus blev afholdt ultimo september 2015 og den tredje dag i januar 2016. Tredje dag fungerede som erfaringsudveksling og sparing omkring udvikling af yderligere materialer, der dog i vid udstrækning var forberedt af projektgruppen. Materialet fra tredje kursusdag er tilgængeligt på Matematikbroens projekthjemmeside. Den tredje kursusdag blev planlagt

separat i hhv. øst og vest. Endelig planlagde projektgruppen en halv evalueringsdag i april.
Observationen af projektgruppens internater viser en engageret gruppe, der gør en stor indsats for at tilegne sig og anvende de nye matematikdidaktiske redskaber.

I det følgende vil vi opsummere nogle af pointerne fra internaternes oplæg om overgangsproblematikker og matematikdidaktik.

3.1.1 Kendte overgangsproblematikker

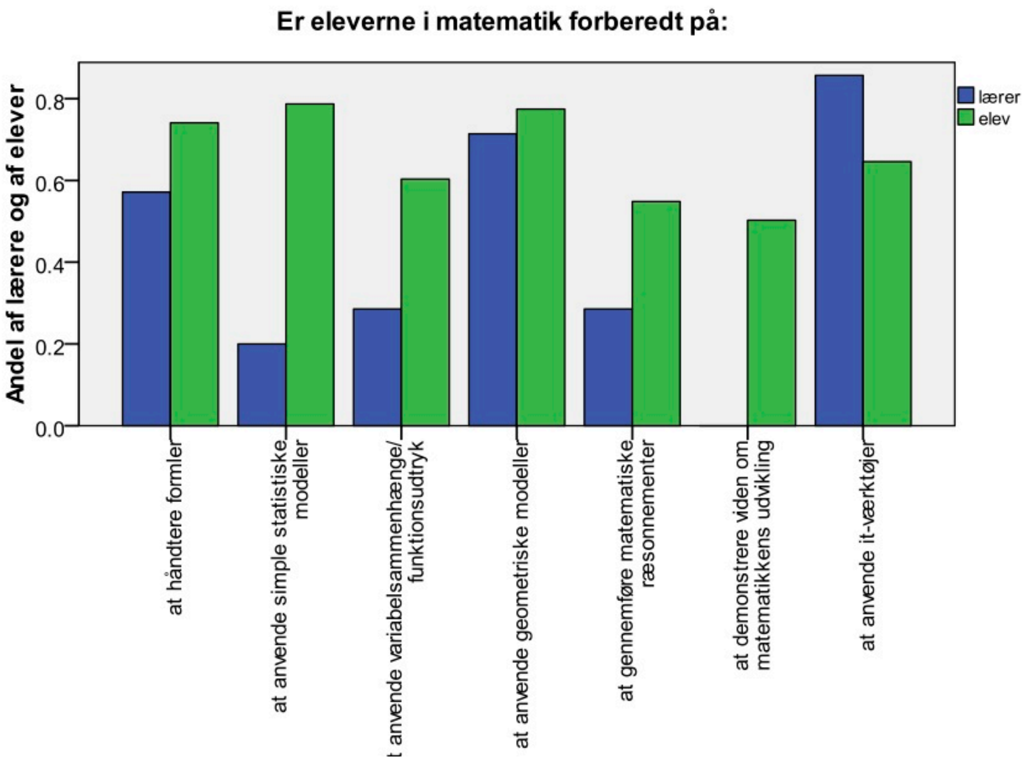
Baggrunden for Matematikbroen er bl.a. erfaringerne fra en række udrednings- og udviklingsprojekter, som på forskellige måder peger overgangen fra grundskole til gymnasium som en stor udfordring for mange elever, særligt i faget matematik. En pige, der er startet på et sjællandsk STX udtrykker det på følgende måde:

> *"Indtil videre synes jeg det hele er svært, jeg har altid haft svært ved matematik og at niveauet er blevet sat op har ikke hjulpet på det. Jeg synes, at der bliver stillet alt for høje krav, for dem der kan finde ud af det er det jo fint, men for dem som har svært ved det, er det ikke særlig godt. Plus den lærer vi havde i grundforløbet var forfærdelig for at sige det mildt. Hvis man ikke kunne finde ud af det, ville han ikke hjælpe en, og han var dårlig til at undervise, og det gjorde det endnu sværere at lære noget, og det er hovedsageligt grunden til, at jeg ikke lærte noget matematik i grundforløbet" (Ebbensgaard, Jacobsen & Ulriksen, 2014, s. 66).*

Citatet er taget fra en afslutningsrapport over et udviklingsprojekt, der netop skulle understøtte udviklingen af initiativer på gymnasierne som letter overgangen fra grundskolen.
Generelt peger Ebbensgaard, Jacobsen og Ulriksen (2015) på at mange elever oplever et stort spring fra grundskolens til gymnasiets matematikundervisning. Springet kan ikke forklares ved styredokumenterne alene (fagbilag, læreplaner, fælles mål) – i beskrivelsen af fagene er der relativt god sammenhæng. Rapporten peger på, at udfordringerne i højere grad handler om forskelle i konventioner og vaner på de to uddannelsestrin ift. hvordan matematikundervisningsrammerne fortolkes og forvaltes. Det anses for muligt at sætte ind på netop dette felt. Endvidere peger rapporten på at, de forudsætninger og oplevelser med faget, som eleverne har med, er afgørende for deres oplevelser af at starte på gymnasialt niveau. Nogle elever er allerede stået helt af inden de starter i gymnasiet, og de kan derfor være meget svære at hjælpe. Endelig nævner rapporten også indikationer af, at der eksisterer overgangsproblemer i folkeskolen, som også kan være væsentlige at adressere – det drejer sig om overgangene fra indskoling til mellemtrin og fra mellemtrin til udskoling.

Flere af ovenstående pointer stemmer med en tidligere undersøgelse af Lindenskov (2009), hvor der viser sig, at være en diskrepans mellem gymnasielærernes og elevernes opfattelse af, hvad eleverne kan, når de starter i gymnasiet. Generelt vurderer eleverne sig selv bedre på alle parametre end lærerne gør, jf. Figur 1. Kun i forhold til håndtering af IT-værktøjer vurderer lærerne eleverne bedre end de selv gør. Med hensyn til anvendelse af geometri er lærernes og elevernes vurdering relativt ens. Figur 1 indikerer, at eleverne har mangler i forhold til basal skolealgebra og modelleringsaspekter (når konteksten ikke er geometri).

Et udviklingsprojekt gennemført i forbindelse med et UVM- netværksprojekt om gymnasiefremmede elever, har dokumenteret, at mange elever har svært ved at læse og forstå lærebøgerne i matematik. Det anbefales blandt andet, at matematiklærerne i gymnasiet eksplicit gør deres undervisning mere ”forståelsesorienteret”, så eleverne kan forberede sig mere konstruktivt til undervisningen - konkret foreslås det at læreren omlægger hjemmearbejdet, gør brug af ordkendskabskort, læseøvelser i klasseundervisningen, samt computerbaseret begrebsindlæring (Stampe, Nielsen & Hjorth, 2012).



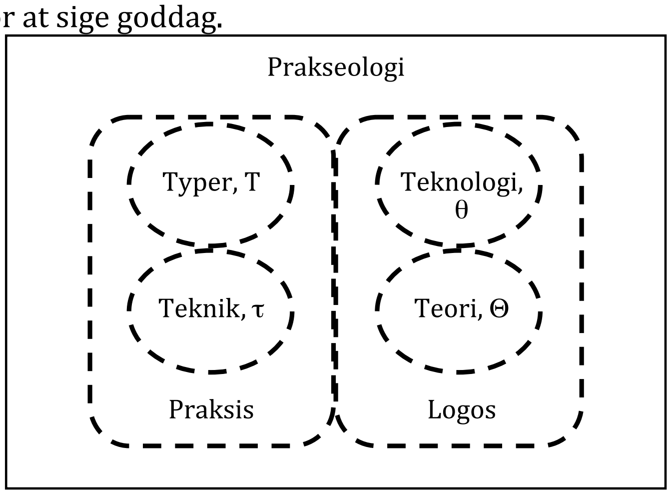
Figur 1: Diagrammet viser hhv. Elevernes og lærernes vurdering af, hvorvidt eleverne er forberedt på at starte i gymnasiet indenfor en række områder af matematikfaget (Lindenskov et al., 2009, s. 77)

I Matematikbroen er der ikke eksplicit fokus på læsestrategier, men i projektets teoretiske designformat (”Studie- og forskningsforløb”) er brugen af medier i undervisningen et punkt der adresseres eksplicit med henblik på læring. At læsningen er en udfordring bekræftes af en nyere undersøgelse, der viser, at op mod en tredjedel af gymnasielærerne opgiver at få eleverne til at læse matematiske tekster (Jessen, Holm & Winsløw, 2015, s. 17). Samme rapport peger på uhensigtsmæssig brug af computere, hvor skabelonbesvarelser og instrumenterede teknikker har en tendens til at overskygge læringen af matematikken selv (Jessen et al., s. 13f). Denne problematik har været kendt længe og italesættes fx af Mathiasen, Hansen og Kjær (1998) i en rapport, der undersøger den begyndende brug af computere og større lommeregnere i skolen. Der er således grund til bekymring for betydningen af indførelsen af computerprogrammer som Geogebra og lignende i grundskolen. De såkaldte CAS-værktøjer (Computer Algebra Systemer, der kan lave algebraiske manipulationer) kan løse de opgavetyper, der skal styrke og udvikle elevernes skolealgebra, og som er vigtige for at følge en matematisk argumentation. Dette er en af grundene til Matematikbroens fokus på tal og algebra. Den undersøgelsesbaserede tilgang til undervisningen, som modelleringsaktiviteterne bygger på, er tænkt som understøttende en mere konstruktiv brug af CAS-værktøjer og begrebsindlæringen omkring lineære sammenhænge.

Mathiasen og kolleger (2009) konkluderer generelt at " systemerne i uddannelsesforløbet lukker sig om sig selv i den forstand, at grundskolen, gymnasiet og universitetet opererer inden for deres egen selvforståelse uden i nævneværdig grad at kommunikere med naboniveauerne.[...]Den traditionelle brobygning kommer ikke 'ind i' fagene og skaber fælles begreber og metoder og det bliver derved stadig i høj grad den enkelte elevs egen opgave at konstruere en 'bro' ..." (Mathiasen et al., 2009, s. 165f). Det er denne brobygning som projektet Matematikbroen søger at skabe i selve faget.

3.1.2 Den antropologiske teori for didaktik

Det teoretiske grundlag for den undersøgelsesbaserede tilgang til matematikundervisningen er hentet i den Antropologiske Teori for Didaktik (ATD), der er en teori indenfor matematikdidaktisk forskning. ATD er grundlagt af den franske matematikdidaktiker Yves Chevallard (1999). Det designvæktøj, der knytter sig til teorien, Studie- og Forskningsforløb, baserer sig på prakseologibegrebet. Helt grundlæggende kan menneskelig aktivitet betragtes som prakseologier, der består af logos og praksis. Praksis dækker aktivitetens handleaspekt og logos er fornuftsovervejelserne og diskursen, der ligger bag handlingen. De to dele er uadskillelige i den forstand at "praksis [...] medfører logos, der til gengæld bakker op om praksis" (Chevallard, 2006, s. 3). Et eksempel kan være hvordan man siger goddag til et andet menneske, når man mødes. Handlingen kan være håndtryk, kram, kindkys eller andet og handlingen afhænger af aktørens kultur og tradition samt personernes relation til hinanden (Hansen, 2009, s. 47). Altså er der et samspil mellem logos og praksis ift. spillereglerne for at sige goddag.



Figur 2: En model over prakseologibegrebet og dets opdeling i opgavetype, teknik, teknologi og teori (Hansen, 2009, s. 48)

Taler vi om matematiske prakseologier deles logos og praksis yderligere, jf. figur 2. Praksis består af opgavetype og teknik. En opgavetype kan være, at eleverne skal bestemme overfladearealet af en cylinder, der er åben i begge ender. Den faktiske opgave vil rumme relevante mål for cylinderen. Teknikkerne, der kan løse opgaven er formlen for omkredsen af en cirkel samt arealet af et rektangel. Der kan selvfølgelig være flere teknikker til løsningen af en bestemt opgave. Logos består af teknologi og teori. Teknologi betyder ”diskurs om teknikker” og er altså noget andet end i hverdagssprogets brug af ordet. Teknologien for eksemplet med cylinderen kan være en forklaring af, hvordan man kan klippe en cylinder op således, at den bliver et rektangel - altså en ”forklaring og begrundelse” af teknikken. Teorien er grundlaget for denne ”forklaring” og kommer fra elementær plan- og rumgeometri. Nedenfor er eksemplet samlet i skematisk form.

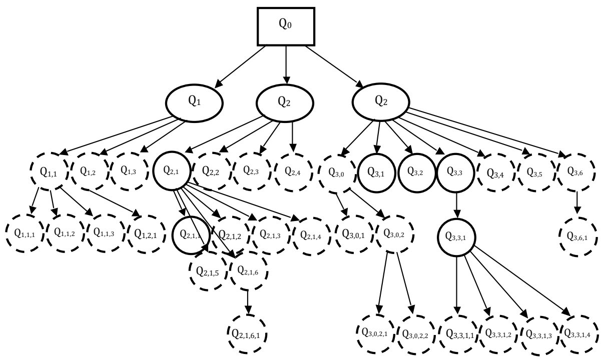
Type	Find arealet af en cylinder, der er åben i enderne (højde og radius af cylinderen er givne størrelser)
Teknik	Formler for areal af rektangel og omkreds en cirkel
Teknologi	Diskursen vedr. cylinderens opbygning som geometrisk figur og brugen af formlen for rektanglets areal og en cirkels omkreds
Teori	Geometriske figurer og deres mål

Prakseologibegrebet kan bruges på forskellige måder i matematikdidaktisk forskning og i undervisningsmæssig sammenhæng. Man kan analysere elevers arbejde i forhold til, hvilke prakseologier de aktiverer i besvarelse af opgaver (Hansen, 2009) & (Jessen, 2014), man kan bruge dem til at analysere sammenhænge eller mangel på samme i undervisning (Barbé et al., 2005) eller til udvikling af opgaver med henblik på læring af bestemte dele af matematikken (Chachoua, 2010). I Matematikbroen har prakseologierne være brugt til det vi kalder ”teknik-analyse” som en del af arbejdet med studie- og forskningsforløb og i forbindelse med skolealgebra. Denne form for analyse muliggør meget præcise formuleringer af, hvad eleverne har svært ved, og af læringsmålene for de enkelte aktiviteter.

3.1.3 Studie- og forskningsforløb

Studie- og forskningsforløb er et designværktøj, der er udviklet som en del af ATD. Tanken er, at man designer et såkaldt genererende spørgsmål Q_0. Dette spørgsmål skal være forståeligt for eleverne, men de skal ikke umiddelbart kunne svare på det. For at finde svaret skal eleverne engagere sig i en ”studie- *og* forskningsproces”. En studieproces karakteriseres ved, at eleverne studerer andres arbejde – det kan være lærebogen, hjemmesider, andre elevers arbejde eller andre former for præsentation af viden. Forskningsprocessen karakteriseres ved, at eleverne selv forsøger at kombinere deres allerede udviklede viden (altså deres prakseologier) med ny viden de har tilegnet sig gennem studieprocessen, og derved forsøger at løse det genererende spørgsmål eller (mere almindeligt) et heraf afledt spørgsmål. Denne forskningsproces foregår i et miljø bestående af elevens tidligere udviklede viden, medierne eleven studerer samt det spørgsmål, der søges udviklet et svar til (Chevallard, 2006 & 2015). Læringen opstår i dialektikken mellem studie- og forskningsprocesser, hvor viden de- og rekonstrueres undervejs (Winsløw, Matheron & Mercier, 2013, s. 269).

Når elever stilles et genererende spørgsmål som starten på en læringsproces er det også nødvendigt, at der er en vifte af mulige tilgange, veje eller forløb som eleverne kan forfølge i forsøg på at besvare spørgsmålet. Eleverne skal på baggrund af tidligere udviklet viden formulere en hypotese om et svar og et afledt spørgsmål Q_i. Svaret på det afledte spørgsmål kan så med videre studium og forskning være med til at besvare Q_0. Ofte kan det første afledte spørgsmål videre nedbrydes til mindre spørgsmål Q_{ij}, der til sidst vil ende i en simpel opgavetype, hvis svar kan karakteriseres som en prakseologi (Bosch & Winsløw, 2016, s. 350). På denne måde kan elevers arbejde analyseres vha. prakseologier og sammenhængen mellem de spørgsmål og svar et genererende spørgsmål giver anledning til, kan gengives i et trædiagram som vist i figur 3.



Figur 3: Et eksempel på et trædiagram, der viser sammenhængen mellem afledte og genererende spørgsmål (Hansen, 2009, s. 97).

Som det fremgår af figur 3, så er det her kun spørgsmålenes numre, der er angivet (de faktiske spørgsmål bag symbolerne specificeres selvfølgelig andre steder i en nærmere redegørelse for et sådant forløb). Nummereringen angiver relationen imellem de enkelte spørgsmål. Det er ikke kun elevers produktion i undervisningen, der repræsenteres vha. trædiagrammer. Når studie- og forskningsforløb bruges som designværktøj er det almindeligt at arbejde inden for rammerne af fagdidaktik som faglig designvidenskab (jf. Winsløw, 2013). En *a priori* analyse af det genererende spørgsmål udarbejdes ved at give et bud på hvilke regnemetoder, formler, CAS-værktøjer og skitser som eleverne kan aktivere i deres besvarelse af det genererende spørgsmål. Dette kombineres med afledte spørgsmål, der meningsfyldt kan stilles på baggrund af det genererende spørgsmåls matematiske indhold. Hermed vil man kunne undersøge om det åbne genererende spørgsmål på meningsfyldt vis kan forventes at dække nogle relevante fagområder (det være sig færdigheder, kompetencer eller vidensområder). Indenfor ATD kaldes dette de tilsigtede prakseologier. A priori analysen vil typisk også blive gengivet som et trædiagram i de tilfælde, hvor den skal deles med andre.

Når man har fundet et passende genererende spørgsmål, præsenteres det for eleverne. Der er forskellige tilgange i litteraturen til, hvor meget man skal guide elevernes arbejde skal være med de genererende spørgsmål. Spektret spænder fra, at de skal være helt frie til at de bliver styret gennem udlevering af medier, mulige afledte spørgsmål og klassekonferencer, hvor eleverne deler deres foreløbige resultater og bliver enige om, hvilket forløb der forekommer mest lovende ((García & Higueras, 2005), (Serrano, Bosch & Gascón, 2010), (Barquero, Bosch & Gascón, 2013), (Jessen, 2014) og (Rasmussen, 2016). Konteksten for disse eksempler på studie- og forskningsforløb dækker grundskolens sidste trin, gymnasieniveauet, starten af universitetsstudier i økonomi og tekniske fag til dansk læreruddannelse.
Afhængig af hvordan man opsamler viden om elevernes arbejde undervejs, dvs. hvilke spørgsmål de stiller og udvikler svar på, kan man lave en a posteriori analyse. Sammenlignes a priori og a posteriori analyserne får man et billede af kvaliteterne ved det genererende spørgsmål samt hvad eleverne har præsteret.
I Matematikbroen er studie- og forskningsforløb blevet brugt som didaktisk designværktøj for de dele af materialerne der har fokus på modellering.

3.1.4 Tal og algebra

Projektgruppen har ikke fået et oplæg i taltricks eller ”tænk på et tal” aktiviteter. Flere medlemmer af dels projektgruppen og dels IND-gruppen har tidligere haft berøring med emnet i forbindelse med andre projekter.

En del af inspirationen til de udarbejdede materialer er hentet i et kandidatspeciale af Brix (2015). Brix har designet en række opgaver til starten af gymnasiet, der skal støtte elevernes udvikling af basale algebraiske færdigheder. I specialerapporten gives der et bud på en definition af et taltrick som værende: ”en række af matematiske operationer udført på et eller flere tilfældigt valgte tal (fra en prædefineret mængde), arrangeret på en sådan måde at resultatet er et forudbestemt tal uanset valget af tal undervejs” (Brix, 2015, s. 36). Det skal dog bemærkes, at ordet ”trick” i denne sammenhæng kan være lidt misvisende, eftersom der ikke er noget fordækt i det det, der foregår. Derimod argumenteres der for, at taltricket gerne skal have en ”wow effekt”, der gør konklusionen på tricket effektfuldt. Det må gerne pirre elevernes nysgerrighed ift. konklusionen (Brix, 2015). Eksempler på sådanne tricks med effektfulde konklusioner kan findes blandt opgaverne i grundlæggende talteori hos Sultan og Artzt (2011, s. 17ff). Pointen med tal trick opgaverne er, at de i høj grad kan varieres og på den måde kan de designes så bestemte teknikker (i ATD betydningen) bliver trænet.

Et eksempel på et taltrick, der er udviklet på internaterne er følgende: tænk på et tal, læg 5 til tallet, gang resultatet med to, træk to fra, divider med to og træk 4 fra. Ved at bede eleverne om at følge denne opskrift et par gange vil eleverne opdage, at resultatet bliver det tal de startede med at tænke på (Tænk på et tal-opgaven kan findes på Matematikbroens hjemmesiden). Til sidst bliver de bedt om, at omsætte instrukserne til algebraiske udtryk, der derefter kan bruges til at begrunde, at eleverne ender med udgangspunktet. At kunne fuldføre dels udregningerne og dels den efterfølgende begrundelse trækker på regningsarternes hierarki og den distributive lov. Designet i den enkelte opgave varieres således, at det er bestemte dele af regneregler eller love der testes. Prakseologier og ”teknikanalyse” støtter lærerne i at blive præcise og eksplicitte omkring, hvad den enkelte opgaves delelementer understøtter udviklingen af.

På denne måde har flere af opgaverne visse fællestræk med såkaldte diagnostiske opgaver. Diagnostiske opgaver er dog langt simplere opgaver der stilles med det formål at undersøge om elever begår en bestemt fejl, der kan knyttes til en given misforståelse (Winsløw, 2006, s. 123ff). Opgaverne vil typisk blive brugt til at målrette den videre undervisning og er dermed være af en formativ karakter. Mere konkret kan man undersøge elevers forståelse af decimaltal ved at bede dem regne med disse. Her vil opgaven $\frac{0,12}{2}$ være en bedre opgave end $\frac{0,24}{2}$, da sidste opgave kan besvares korrekt ved brug af elevens forståelse af hele tal. Dette er derimod ikke tilfældet med den første. På tilsvarende måde er det en bedre opgave at bede eleverne ordne tallene 0,62; 0,236 og 0,4 end fx at liste 0,23; 0,62 og 0,42 (Brekke, 1996, s. 17ff). Ved at tænke i mulige teknikker til løsning af givne opgaver, kan man designe opgaver, der understøtter det som lærerne ønsker at styrke hos eleverne.

Undervisningsmaterialet rummer forskellige taltricksopgaver. Opgaverne spænder fra dem, der giver alle kommandoerne, over opgaver der kun har bogstavudtrykkene (hvor eleverne laver kommandoerne) til de helt frie skemaer, hvor eleverne udfordrer hinanden. De sidste giver naturligvis ikke læreren mulighed for at påvirke valget af teknikker.

Desuden er der udviklet en række opgaver, der udnytter taltavler som vist på figur 4 (jf. også Henriksen, 2016).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	...	

Figur 4: Et eksempel på to talkryds i en taltavle, der kan manipuleres som med taltricks.

Et eksempel på en opgave der gør brug af taltavlen i figur 4 er følgende: ”Prøv i et af talkrydsene at beregne summen af de to røde tal og summen af de to blå tal. Beregn derefter forskellen mellem de to summer. Prøv det samme i det andet talkryds. Hvad opdager I?
Taltavlen fortsætter i det uendelige. Gælder jeres opdagelse for ethvert talkryds i taltavlen? Kan I bevise det?” (Taltavle-opgaverne kan findes på Matematikbroens hjemmeside)
Igen leder opgaven eleverne hen på to algebraiske udtryk for hhv. De røde og de blå tal: $(n-10)+(n+10)=2n$ og $(n-1)+(n+1)=2n$ som skal trækkes fra hinanden. På denne måde får eleverne en enkel indgang til generalisering af matematiske operationer, og de trænes i at gå fra det konkrete til abstrakte ift. matematisk argumentation. Igen sikres det, at eleverne arbejder med nogle helt bestemte algebraiske teknikker, der frit kan varieres.

3.1.5 Fællesgørelse af matematiklæreres professionsviden i åbne lektioner

I Matematikbroen valgte IND-gruppen at give projektgruppen en præsentation af den japanske model for professionel udvikling gennem det, der kaldes ”Lesson Study” eller ”lektionsstudier” på dansk. Der har de senere været udført flere store forskningsprojekter i grundskolens matematikundervisning, som netop baserer sig på denne tilgang (se fx (Rasmussen, 2016a), (Østergaard, 2016), (Bahn, 2015)). Projektet Matematikbroen omfatter ikke deciderede lektionsstudier, men modellen for refleksionslektionen efter en lektion baseret på et undervisningsmateriale som lærerne deler, kan med fordel bruges, når lærerne på de enkelte skoler skal støtte hinandens brug af Matematikbroens materialer og tankegods.

Formålet med Matematikbroen er at skabe en bro til eleverne mellem grundskolens og gymnasiets matematikundervisning. Dette kræver en "bro til lærerne" i form af samarbejdsformer, der går under overfladen og forholder sig til didaktisk viden – dvs. viden om faktisk undervisningspraksis i konkret matematikfagligt indhold. I dette afsnit præsenteres kort generelle problemer vedr. matematiklærerviden og deling heraf, og derpå gives et indblik i en succesfuld delingspraksis fra Japan, kaldet åbne lektioner, der er en del af lektionsstudier. Hovedpointen til lærerne her er: åbn undervisningslokalerne for hinanden, fokuser på elevernes matematiske aktivitet ("læring"), og del derefter jeres refleksioner over observationerne (Miyakawa & Winsløw, 2013).

Når der tales om professionsviden, tænkes denne knyttet til en funktion i en institution. En "funktion" kan fx være at undervise en elevgruppe i matematik. En "institution" kan være grundskolen, som er underlagt ministerielle reguleringer som forenklede fælles mål og afgangsprøverne, der medbestemmer indhold og form på undervisningen samt mange andre forhold omkring undervisningen (tidsrammer, fysiske rammer etc.). Utallige forskningsarbejder peger på, at matematikkomponenten af matematiklærerviden er uadskillelig fra resten. Matematiklærerviden handler om en virksomhed, der ofte er individuel (forberedelse, lektion, rettearbejde, ...), hvorimod fællesgørelsen ofte kun vedrører mere overfladiske og organisatoriske sider af funktionen indenfor samme institution. Dette leder til det man kan kalde "delingsproblemet" for hvordan fællesgør og udvikler man kernen af sin viden som matematiklærer, når den hovedsageligt udøves individuelt? Og ydermere, hvordan kan dette gøres på tværs af forskellige institutioner som grundskole og gymnasium?
Det er væsentligt er at bemærke, at det ikke kun drejer sig om pædagogik, men også om fagdidaktik, dvs. viden om undervisning i bestemt indhold. Matematiklæreres didaktiske viden inkluderer al den viden om matematik, som de bruger i forbindelse med undervisning. Dermed kan delingsproblemet siges at handle om at fællesgøre og udvikle lærerviden om matematik.

Et bud på en model for løse delingsproblemet er "åben lektion" (fra japansk: "koukai-jyugyou"). Formålet med en åben lektion er netop at udvikle matematiklærerviden gennem observation og refleksion. Formen på en åben lektion er dels en offentlig lektion, hvor en lektionsplan udleveres til observatørerne på forhånd, efterfulgt af et refleksionsmøde umiddelbart efter. I Japan afholdes åbne lektioner på flere niveauer, fx indenfor skolen (hvor observatører er kolleger, forældre, etc.), på kommune- og regionsniveau samt nationale "lektionsfestivaller".

På internat nummer to blev projektgruppen præsenteret for et eksempel på en åben lektion. Lektionen er nummer 16 i en række på 17 og hedder Sukkiri – "når vi tegner". Idéen med forløbet er, at eleverne skal løse en opgave og lave en tegning, der illustrerer, hvad der giver dem klarhed over opgaven og dens løsning.
På seminaret diskuterede projektgruppen sammen med IND-gruppen hvilken matematisk viden, der var i spil i lektionen. Hvilke undervisningsmæssige "teknikker" bruger læreren og hvorfor? Hvilke ræsonnementer og teknikker udvikler eleverne?

Projektgruppen så både videoklip fra den åbne lektion og fra det efterfølgende refleksionsmøde, der typisk varer en time. Ved festivaller kaldes sådanne møder for "forskningsmøder" (japansk "kenkyukai"). Forskningsmøderne består af en diskussion med et panel der ledes af en ordstyrer, en lærer fra en anden skole, underviseren selv samt en "knowledgeable other". Sidstnævnte er typisk en matematikdidaktiker. Resten af den deltagende forsamling består af lærere, lærerstuderende, skoleledere, universitetsforskere, lærebogsforfattere m.fl. Efter den anden videosekvens diskuterede projektgruppen og IND-gruppen, hvordan sådanne møder kan understøtte delingen af lærerviden samt forankre den professionelle udvikling af lærerkropset.
Oplægget om åbne lektioner blev brugt som introduktion på kurserne for grundskolelærerne som en model for at dele og udvikle hinandens undervisning i retning af de teorier, lærerne ellers blev præsenteret for ved lærerkurserne og grundlaget for det udleverede undervisningsmateriale.

3.2 Observation og evaluering af kursusaktiviteter

Som nævnt er kurserne blevet observeret af IND-gruppen og dokumenteret i dagbogsnoter fra projektgruppen. Dette præsenteres i det følgende afsnit og derefter giver vi resultatet af lærernes evaluering af kurset fra det elektroniske spørgeskema.

Programmet for de to første kursusdage handlede dels om at introducere grundskolelærerne til de kendte overgangsudfordringer der eksisterer ift. matematik, dels om at sætte dem i stand til at afprøve nye undervisningsmaterialer, til selv at udvikle sådanne og til at reflektere over egen praksis, gerne i fællesskab med kolleger. Første dag startede med en velkomst og præsentation af målsætningen med kursusforløbet. Herefter blev der holdt et oplæg med titlen "Dokumenterede overgangsproblemer i matematik", baseret på præsentationsmaterialet fra internaterne. I Silkeborg blev der også lagt vægt på Silkeborg Gymnasiums erfaringer med brobygning mellem grundskoler og gymnasium (Christensen, 2012). I København udviklede projektgruppen et materiale, der præsenterede deres elevers profil ift. matematikundervisning - det skal her noteres, at karaktergennemsnittet fra grundskolens matematik er væsentlig højere for eleverne på Silkeborg Gymnasium end for eleverne på Gefion Gymnasium.

Resten af formiddagen var dedikeret til at give grundskolelærerne et billede af matematikfaget i starten af 1.g. Undervisningen på gymnasierne blev præsenteret gennem video fra projektgruppemedlemmers eget klasserum. Efter videoen var der lagt op til diskussion af forskelle og ligheder mellem 9. klasse og 1.g. Herefter blev der givet en præsentation af den skriftlige dimension af faget. Dette blev bl.a. gjort gennem præsentation af brobygningsopgaver udviklet på Silkeborg Gymnasium. Her har man med udgangspunkt i grundskolens afsluttende prøver, omformuleret opgaverne i forskellige udgaver, dels som man ville stille dem i starten af 1.g i gymnasiet, og dels som de ville være formuleret i slutningen af 1.g (Silkeborg Gymnasium, u.å.). Samtidig blev lærerne præsenteret for en rettet matematikaflevering fra starten af 1.g og bedømmelseskriterierne.

Dette skulle til sammen danne grundlaget for en diskussion af forskelle og ligheder mellem praksis i de to skoleformer.

Efter frokost blev lærerne præsenteret for dele af ATD og de didaktiske redskaber som lærerne skulle blive i stand til at bruge. Workshoppen ”Systematisk tilgang til undersøgelsesbaseret undervisning” dækkede dels en præsentation af begrebsapparatet, dels indlagte mindre øvelser, hvor lærerne selv skulle lave små analyse opgaver. Opgaverne bestod af spørgsmål, hvor lærerne skulle lave ”teknik analyse” af mulige måder at besvare disse opgaver.

Dag to startede med en fælles introduktion til materialekasser og inddeling i workshopgrupper. Holdene blev delt i to, hvoraf den ene gruppe arbejdede med materialet om tal og algebra om formiddagen og modellering om eftermiddagen. Den anden gruppe tog de to workshops i modsat rækkefølge. De to workshops fungerede på den måde, at lærerne blev bedt om at lave en *a priori* analyse af opgaverne fra det udviklede undervisningsmateriale. Efter en kort gennemgang af analyserne, skulle de diskutere i mindre grupper, hvordan de helt konkret ville planlægge deres undervisning opbygget omkring de udviklede materialer. Herunder skulle de formulere, hvilke afledte spørgsmål, der kan guide eleverne videre i den åbne og undersøgelsesbaserede undervisning. Hver aktivitet blev afrundet med en opsamling, hvor idéer og tanker blev delt.

Som afslutning på dag to blev de to grupper samlet og de blev præsenteret for, hvad der skulle ske fremover, dvs. tredje kursusdag, den opsamlende eftermiddag samt forsøge at lægge en plan for observation af hinandens undervisning i regi af Matematikbroen. Endelig fik hver skole koblet et projektmedlem til sig, som ville forsøge at besøge skolen, observere undervisning og fungere som sparringspartner for den enkelte skoles lærergruppe.

3.2.1 Projektgruppens og IND's observationer

IND-gruppen observerede kursusafholdelsen i København den 5. og 6. okt. 2015. I København var det projektgruppens grundskolelærere der introducerede projektet samt planen for kursusaktivitet og undervisning. Det blev understreget at projektet også var tænkt som støtte til de elever, der ikke skal videre på en gymnasial uddannelse. Undervisningsmaterialet retter sig ikke specifikt mod folkeskolens afsluttende prøver og deres opgavetyper, men skal mere alment give eleverne et stærkere fundament i nogle centrale matematiske områder.

Gymnasielærerne præsenterede herefter de kendte overgangsproblematikker, gymnasiets undervisning samt gymnasiets arbejde med skriftlighed. Diskussionen af disse oplæg rettede sig mod en undren over, at gymnasiet var meget fokuseret på, at eleverne formulerer sig på en helt bestemt måde, uden at prøve at forstå elevernes udsagn. Dette peger på en forskellig fagdiskurs i de to institutionelle rammer. Grundskolelærerne mener, at de underviser mere helheds- og kompetenceorienteret og gør eleverne alment dannede, hvilket ikke kan måles med screeningstests. Andre kunne ikke forstå, hvorfor gymnasierne ikke bare får adgang til enkeltelevers præstation ved grundskolens afsluttende prøver, og bruger den information i deres undervisning. Endelig var der kommentarer om, at når gymnasierne lukker elever ind med 4 eller derunder i matematik fra grundskolen, så kan det ikke undre, at det giver vanskeligheder på gymnasierne. I det skriftlige arbejde blev der fundet mange ligheder, men det blev også anført at grundskolelærerne ikke har samme tidsmængde til at rette elevernes opgaver, som man har i gymnasiet.

Herefter præsenterede projektgruppens grundskolelærere de didaktiske redskaber for Matematikbroen. Dette førte til en samtale om, at selvom gymnasiets undervisning ikke generelt er baseret på ATD, så giver teorien stærke værktøjer ift. at stille skarpt på og styrke de faglige kompetencer, som eleverne mangler ved afslutningen af grundskolen.

Da lærerne selv skulle i gang med egentlige ”teknikanalyser” af matematikopgaver, opstod der forvirring om ”teknikkers” status i forhold til mere velkendte begreber som kompetencer, færdigheder, forståelse og viden. Det viser sig dog vanskeligt, at formulere helt skarpe definitioner af alle disse begreber. Lærerne får efterfølgende lavet fornuftige bud på løsninger af den konkrete opgave. Løsningerne kobles til en diskussion af muligheder og begrænsninger, hvis et CAS-værktøj er til rådighed.

Efterfølgende præsenteres grundskolelærerne for et åbent spørgsmål, der er designet som introduktion til eksponentialfunktioner i gymnasiet (Jessen, 2015). Det vil sige at spørgsmålet kan besvares vha. teknikker, som eleverne har til rådighed fra grundskolen. Lærerne var dog meget delte i deres vurdering af, om de kunne bruge et sådant spørgsmål som udgangspunkt for elevernes læring. Mange mente, at eleverne bør introduceres til emne og begreber, før de får stillet spørgsmålet.

På dag to følges først præsentationen af modelleringsmaterialet og dernæst gives gode råd til brugen af det. Det anbefales at klassen deles i 3-mandsgrupper, at grupperne præsenterer deres arbejde 2 gange på en 45 minutters lektion, samt at eleverne i løbet af processen skal kunne støtte sig til et ressourcerum (materialesamling), som lærerne selv skal være med til at lave.

Den del af modelleringsmaterialet, der præsenteres, er ”Barbie Bungee Jump” (jf. materialerne på projektets hjemmeside). Det anbefales, at lærerne finder en passende højde et sted på skolen, hvor eleverne skal konkurrere om at lave det bedste bungee jump. Herefter får lærerne at vide, at tænkningen i vellykket arbejde med de åbne spørgsmål kræver, at lærerne har afsøgt de mulige tilgange eleverne kan tage ift. at løse opgaven. Lærerne har svært ved at se det nye i projektet, indtil de bliver mindet om teknikkerne fra dagen før og analysearbejdet med aktiviteten.

Kursisterne deles i mindre grupper for at kortlægge, hvilke ”veje” eller løsningsmetoder, deres elever ville kunne tænkes at følge i Barbie Bungee Jump opgaven. Herefter skal grupperne identificere de matematiske teknikker, der trækkes på i de enkelte veje. Den analyse skal grupperne bruge til at formulere guidende, afledte, spørgsmål, som lærerne kan bruge i undervisningen. Lærerne var engagerede i hele den eksperimentelle del, men ved planlægningen af egen undervisning blev de igen bekymrede for den meget åbne proces.

Lærerne ser umiddelbart hurtigere potentialerne i materialet om tal og algebra. Igen får lærerne en kort introduktion til materialerne, men det meste af tiden dedikeres til lærernes eget arbejde med opgaverne og formulering af potentialer i det de præsenteres for. Nogle lærere var udfordret i forhold til at formulere sig i termer af ”teknikker” om, hvad de enkelte opgaver styrker hos eleverne.

I Silkeborg er det projektgruppen selv, der har observeret og taget noter til de to første kursusdage. I Silkeborg havde de lidt udfordringer i starten af kursusdag 1, da det for nogle grundskolelærere kom til at fylde meget, at det alene var dem, der var på kursus. De havde hellere set, at både grundskolelærere og gymnasielærere var på kursus, – og helst begge grupper sammen. Denne problemstilling var både projekt- og styregruppe bekendt med, men det var et grundvilkår for Matematikbroen, da det kun var muligt at bruge fondsmidler til efteruddannelse af grundskole lærere. Projektgruppens refleksioner peger i retning af, at man fremover vil anbefale, at kurser for grundskolelærerne introduceres af projektgruppens grundskolelærere. Dette gjorde man i København med succes. Ydermere vil man i Silkeborg fremover understrege, at samarbejdet på tværs af institutionelle skel allerede finder sted i Silkeborgs matematiklærernetværk (se (Christensen, 2012), Netværket for Matematiklærere i Silkeborgområdet).

I Silkeborg havde de ikke haft grundskolelærerne inddraget i formuleringen af introduktionen til ATD og “teknik analysen” på kursusdag 1. Dette gjorde det vanskeligt for grundskolelærerne at udarbejde a priori analyserne til modelleringsopgaven med Barbie Bungee Jump. Grundskolelærerne havde svært ved at holde fokus på refleksionerne om, hvad eleverne lærte i undervisningsvideoerne, men var ”fejlfindingsorienterede”. Det overraskede projektgruppen, at refleksionerne var svære at få frem. Den mindre gode stemning prægede ligeledes punktet om skriftlighed i gymnasiet. Projektgruppen mener, at hvis de er mere klare omkring formålet med punktet, så ville det fungere bedre.

Stemningen var vendt på dag to, hvor grundskolelærerne engagerede sig i de to workshops og kunne se meningen med de udarbejdede materialer. I emnet om tal og algebra bød grundskolelærerne konstruktivt ind med idéer til udviklinger, der kunne rumme de svageste grundskoleelever. Med modelleringsopgaven gik det godt med grundskolelærernes egen afprøvning og udvikling af a priori analyse over mulige veje og strategier. Denne del af aktiviteten vurderes som essentiel af projektgruppen, da grundskolelærerne var meget famlende over for opgaven og måden at tænke undervisning på.

I Silkeborg havde de ved slutningen af kursusdag 2 den udfordring, at flere lærere var nødt til at forlade kurset, før det var færdigt. Det betød, at de aldrig fik informationen om vidensdeling, og praksisudvikling gennem gensidige observationer. Dette bekymrede projektgruppen, og fik projektleder til at sende mail med information til de involverede grundskolelærere i begge byer.

3.2.2 Kursusdag 3

Kursusdag 3 blev afholdt den 21. og 22. januar 2016. Projektgruppens medlemmer i hhv. Silkeborg og København planlagde lokalt hver deres kursusdag. Der var konsensus om, at grundskolelærerne skulle have mulighed for at erfaringsudveksle på tværs af skoler omkring deres erfaringer med at bruge materialet og teorierne fra kursusdagene i september. Derudover havde flere af grundskolelærerne ønsket at opleve gymnasiets matematikundervisning i virkeligheden, og de efterspurgte i vid udstrækning flere materialer.

I København startede dagen med velkomst og erfaringsudveksling i mindre grupper omkring brugen af det udviklede undervisningsmateriale. Lærerne skulle eksplicit diskutere, hvordan de havde brugt materialet: Som forløb eller mindre elementer i den daglige undervisning. De skulle også diskutere tegn på elevernes læring samt evt. erfarede faglige udfordringer ift. eleverne. Endelig skulle lærerne diskutere hvordan de ville bruge materialet fremover. Projektgruppens grundskolelærere var tovholdere på disse diskussioner. Herefter skulle lærerne observere en gymnasieklasses matematikundervisning. Grundskolelærerne blev bedt om, at holde fokus på følgende: hvordan reagerer eleverne på undervisningen? hvad er svært for eleverne? - hvordan reagerer læreren på det? Samt bemærke: tempoet, sprogbrugen og lærer-elev-relationen eller hvis noget undrer? Der blev samlet op ved et fælles refleksionsmøde, hvor gymnasielærerne var ordstyrere. Eftermiddagen blev brugt på en workshop med videreudvikling af gamle og nye opgaver, guidet af projektgruppens medlem fra læreruddannelsen. Materialerne fra workshoppen forefindes på Matematikbroens hjemmeside. Nogle materialer er inspireret af (Afzelius et al., 2007), andre dele af arbejdet med grundskolens matematikundervisning og læreruddannelsen. I det nye materiale om modellering har projektgruppen valgt at trække på mere klassiske fremstillinger af modelleringsprocessen som transponering mellem et virkelighedsproblem, et matematisk problem gennem opstilling af en matematisk model, løsningen af det matematiske problem, en tolkning af det matematiske svar i relation til virkelighedsproblemet (Se Clausen, Schomacker & Tolnø, 2012, s. 95). Det fremgår ikke klart, hvordan projektgruppen har relateret denne modelleringstilgang til de første udviklede materialer. I forskningslitteraturen betragtes disse som væsentligt forskellige og den sidste tilgang har ikke det samme epistemologiske sigte som den ”teknik analyse”, grundskolelærerne blev præsenteret for ved de to første kursusdage. For en diskussion af forskellene på de to modelleringstilgange se (Jessen, Kjeldsen & Winsløw, 2015).

I Silkeborg kørte projektgruppen to parallelle sessioner om formiddagen. Den ene halvdel arbejdede med undervisningsobservation og refleksion, mens den anden gruppe deltog i workshoppen ”Andengradspolynomiet; et overgangsemne i matematik fra 9. klasse til 1.g”. Der er ikke noget materiale til denne workshop på hjemmesiden, men de øvrige materialer kan findes på Matematikbroens hjemmeside.

Erfaringerne fra Silkeborg var generelt positive fra kursusdag 3. Denne gang var det særlig projektgruppens grundskolelærere som var tovholdere og *primus motor* på aktiviteterne. Konklusionen i Silkeborg på undervisningsobservationen var grundskolelærernes overraskelse over, at eleverne oplever overgangsproblemer, da de primært fandt ligheder mellem undervisningen i de to skolesystemer. Grundskolelærerne var begejstrede for de nye materialer, som de mener er lige til at printe fra matematikbroen.dk. Dog er særligt projektgruppen bekymret for, at undervisningsmaterialerne og projektet bliver et ”quick fix”. Lærerne beretter om manglende tid til at afprøve materialerne og få dem implementeret efter retningslinjerne fra de første to kursusdage. Undervisningsmaterialet bliver brugt ”som brandslukning i et enkelt, løsrevet modul” – som det er formuleret i opsamlingen fra projektgruppen i Silkeborg.

Erfaringerne fra København var i tråd med Silkeborgs. Derudover kom følgende pointer frem: materialerne motiverede eleverne til at være undersøgende, nye elever bliver pludselig gode, fordi de kan noget andet, nogle synes at det er ”fedt at gå fra tal til algebra”. Eleverne bliver mere opmærksomme på parenteser, regningsarternes hierarki, at man ikke kan dividere med nul; men Barbie-opgaven er lidt svær som en første undersøgende opgave, da en del elever ikke var trænet i at arbejde undersøgende. Endelig skriver Københavns projektgruppe, at det ikke var gruppens indtryk, at det teoretiske arbejde bag den undersøgelsesbaserede undervisning blev brugt på skolerne. Der var heller ikke rapporter fra Silkeborg om grundskolelærernes arbejde med ”teknik-analyser”, hverken i egen undervisning eller på kursusdag 3.

3.2.3 Sidste eftermiddag i kursusregi

Projektgrupperne i hhv. København og Silkeborg mødtes en sidste gang en eftermiddag i foråret 2016. Det var dog kun ca. halvdelen af grundskolelærerne der dukkede op til denne eftermiddag begge steder. Dem der dukkede op, var dog enige om, at de ikke var klar til at afslutte projektet, men gerne ville fortsætte med at få input til deres undervisning, samt have et forum for diskussion af udviklingen af deres undervisning.

Eftermiddagen blev brugt på tre kursistoplæg, hvor grundskolelærerne præsenterede deres eget videre arbejde med at udarbejde forløb og undervisningsmaterialer på baggrund af oplægget fra Matematikbroen. Kvaliteten af dette arbejde var generelt god. Endelig havde nogle kursister medbragt elevrapporter over Barbie Bungee Jump, hvilket blev grundlaget for en diskussion om mulig elevproduktion i regi af Matematikbroen. Lærerne undersøger om de gode eksempler kan deles på projekthjemmesiden. Endelig fremhæver grundskolelærerne deres praksisfællesskab på skolerne som noget særligt positivt, og som noget der med fordel kan bredes ud til hele matematikfaggruppen.

I København blev der dog sporet en form for skepsis i forhold til om tiltagene i Matematikbroen virker, da der kun er udviklet relativt få materialer. Dog vurderer lærerne, at materialerne fra Tal og Algebra har styrket elevernes skriftsprog. Modelleringsopgaverne vurderes primært at styrke elevernes mundtlige formuleringer i matematik; men opgaverne er svære at løse, selv for gode elever.

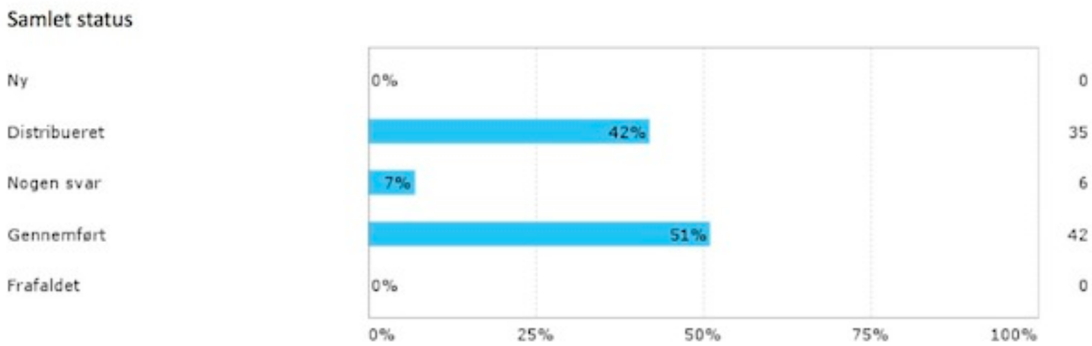
Undervisningsmaterialernes forskelligartethed vurderes at styrke eleverne i at udvikle et mere varieret fagsprog. Med et enkelt bogsystem vænner eleverne sig til netop dette systems formuleringer. Det betyder mindre fokus på det matematiske indhold. Det vurderes i København, at udfordringen med at tilpasse sig Matematikbroens måde at arbejde med undervisning og de dertilhørende materialer, er en lige så stor udfordring for lærerne som for eleverne.

Grundskolelærerne kom til sidst med opfordringer til videreførelsen af Matematikbroen. Særligt ønsker de sig, at kursusaktiviteterne også var for gymnasielærere, således at lærerne fra de to skoleformer kunne sparre med hinanden, og at "broen mere reelt bygges fra begge sider". Grundskolelærerne ser spændende perspektiver i at udvikle materialer på grundlag af idéerne fra Matematikbroen (beskrevet i afsnit 3.1) til at dække hele 9. klasse og starten af 1.g. Ydermere mener lærerne, at denne måde at tænke undervisning på, kan bruges allerede fra mellemtrinnet og frem. Dette er på linje med de forskningsaktiviteter, der foregår i udlandet og er nævnt i afsnit 3.1.3. Som minimum vurderes kursusaktiviteten under Matematikbroen relevant for alle matematiklærere i udskolingen.

3.3 De deltagende læreres skriftlige evaluering af kurserne

IND-gruppen udsendte i umiddelbar forlængelse af tredje kursusdag et elektronisk spørgeskema til de deltagende lærere. Deltagerne havde 14 dage til at besvare skemaet og der blev udsendt rykker efter en uge til dem, der endnu ikke havde besvaret.

Lærerspørgeskemaet består af en række fritekstspørgsmål om udbytte, relevans og anvendelighed af kurset. Undersøgelsen blev gennemført i perioden 22. januar – 5. februar 2016. Spørgeskemaet blev udsendt til 83 respondenter, heraf 57 som deltog i kurset i København og 26 fra kurset i Silkeborg.
I alt har 48 svaret på skemaet (32 fra København og 16 fra Silkeborg). 42 har svaret på hele skemaet, 6 har kun svaret delvis. Besvarelsesprocenten er samlet på 58%, (61% for Silkeborg og 56% for København). De, der har besvaret skemaet, repræsenterer alt fra få til mange års erfaring med undervisning i matematik i udskolingen. Af figur 5 fremgår svarprocenter.



Figur 5: Figuren viser hvor mange, der har svaret helt eller delvist, eller blot modtaget det elektroniske spørgeskema.

Spørgeskemaet er opbygget med følgende spørgsmål:

1. Hvor mange års erfaring har du med at undervise i matematik i udskolingen?

2. Hvad er dit generelle udbytte af de tre kursusdage? Begrund dit svar
3. Hvor direkte anvendelig anser du det udviklede materiale for at være ift. din egen undervisning - dvs. hvilke elementer gør det anvendeligt eller svært at bruge?
4. Hvor relevant anser du materialet for at være ift. dine egne hold - dvs. anser du materialet som værende noget der styrker elementer af matematikfaget, der ellers ikke dyrkes i så høj grad? Dyrker det elementer af matematikfaget, hvor du anser dine elever for at være mindre stærke?
5. På hvilken måde har kurset styrket din viden om udfordringerne for elevers overgang fra grundskole til gymnasial uddannelse?
6. Hvilke idéer angående undervisningspraksis fra kursusdagene vil du implementere i din undervisning fremadrettet og hvorfor?
7. Hvilke idéer forudser du, at du vil bruge i mindre grad og hvorfor?
8. Hvis du skulle give gode råd til evt. ændringer af kurset inden endnu en gennemførelse, hvad skulle det så være?

Generelt angiver respondenterne i den skriftlige evaluering, at de har været meget tilfredse med kurserne og har oplevet dem som meget inspirerende. Der fremstår ikke umiddelbart nogen markante forskelle mellem svarene fra Silkeborg og svarene fra København. Kursene blevet oplevet som inspirerende og materialet opleves som meget konkret og let anvendeligt, enten direkte eller i tilpasset form. Materialet opleves dog som særligt anvendeligt til de matematikstærke elever. Lærerne oplever at få et støre udvalg af materiale, som de kan plukke fra, og mange udtrykker tilfredshed med materialet som idebank. De har været glade for at udveksle erfaringer med kolleger i grundskole og gymnasium.

Et mål for kurset var også at introducere deltagerne til at designe og redesigne undervisningsmateriale i lyset at de matematikdidaktiske teorier, som blev præsenteret. Disse aktiviteter bliver ikke nævnt i nogen særlig udstrækning i kommentarerne, og skal nok udvikles yderligere. Nogle lærere nævner at de gerne ville have arbejdet mere med udvikling af materiale i fællesskab, da det er det, de vil kunne bruge videre frem.

Enkelte angiver at kurset opleves som for langt, og at særligt de to første dage virkede lange. Nogle af lærerne i afgangsklasserne oplever at være i et stort tidspres, og at det kan være vanskeligt at implementere erfaringer fra kurset med så kort varsel. Det nævnes at kurset måske med fordel kunne ligge tidligere i udskolingen end på sidste år.
Lærerbesøg og observation af undervisning nævnes som noget af det, som man gerne vil have endnu mere af. Nogle af kommentarerne adresserer, at kurset med fordel kunne have mere ligevægt mellem grundskole og gymnasium, så det var begge sider af overgangen man havde fokus på, og så gymnasielærerne ikke alene fremstod som undervisere på kursusdagene. Denne problemstilling har man fra projektledelsen været opmærksom på, men det har været et grundvilkår for projektet, da det er støttet af A.P. Møller Fondens bevilling til styrkelse af undervisningen i grundskolen.

I det følgende gennemgås de vigtigste af undersøgelsens enkelte spørgsmål. De overordnede linjer sammenfattes, og der vises udvalgte eksempler på kommentarer, som illustrerer bredden og karakteren af svarene. Kommentarerne citeres ordret, dvs. eventuelle slåfejl er ikke rettet.

3.3.1 Det generelle udbytte af kurserne

I skemaet stilles fritekstspørgsmålet: ”Hvad er dit generelle udbytte af de tre kursusdage? Begrund dit svar”**. (**44 svar).

samlet - generelt udbytte 44 svar	Godt - ingen forbehold	Nogenlunde - OK - nogle forbehold	ringe/sparsomt - mange forbehold
Antal	33	9	2
Procentvis fordeling	75%	20%	5%

Langt de fleste deltagere er altså positive over for kurserne. 75% udtrykker sig positivt uden forbehold og yderligere 20% er positive i lidt mindre grad. Kun 2 deltagere giver udtryk for et decideret sparsomt udbytte. 3 deltagere angiver at de ikke har deltaget i hele forløbet, og det naturligt indflydelsen på udbyttet. Mange omtaler kurset som ”inspirerende”, og at det er godt at få fokus på hvordan man kan forberede eleverne til gymnasiet. Det praksisnære (for lærerne) og mange materialer, som direkte kan anvendes, fremhæves som positivt. Ikke mindst fremhæves muligheden for at erfaringsudveksle med kolleger fra både grundskole og gymnasium.

Eksempler på positive kommentarer:

- "Det har været et supergodt kursus, inspirerende, spændende og lærerigt.
  Jeg bliver mere bevidst om:
  -Hvilke problemer i matematik kommer mine elever til at oplever ved overgangen fra folkeskolen til gymnasiet?
  -Hvad jeg/vi kan gøre i min/ vores praksis for at reducere problemerne og for at skabe sammenhæng i matematik undervisningen mellem folkeskolen og gymnasiet"
- Det udleverede materiale er til stor nytte + at vi fik tiden til at fordybe os i materialet. Indblik i overgangen fra folkeskole til gymnasiale uddannelser. Fokus på IT-værktøjer.
- Det var en øjenåbner at se, at matematikundervisningen på gymnasiet ikke har ændret sig, siden jeg selv gik der.
- Jeg fik meget godt konkret materiale med. God undervisning er undersøgende og kan have flere svar. Det fik jeg bekræftet på kurset (det mener gynmasielærere også)
- Meget fint udbytte. De udleverede og afprøvede opgaver var rigtig fine. Desuden er det altid berigende at erfaringsudveksle med kolleger både fra folkeskolen og gymnasiet.

De forbehold, der kommer til udtryk hos nogle af respondenterne, handler mest om at kurset opleves som for langt. Men at det var fint nok med nogle øvelser og indsigt i gymnasiets krav.

Eksempler på mere forbeholdne svar:
- Det kunne være klaret på een dag. Gode opgaver, men da de først var blevet præsenteret, kunne det fint være stoppet der.
- 3. dagen var bedst. Her fik jeg noget, som jeg kunne tage direkte med ind i min undervisning. Det synes jeg ikke der var helt så meget af de første 2 dage.

3.3.2 Anvendeligheden af den udviklede materiale

Spørgsmål: ”Hvor direkte anvendelig anser du det udviklede materiale for at være ift. din egen undervisning - dvs. hvilke elementer gør det anvendeligt eller svært at bruge?” (43 svar)

Vi har opdelt kommentarerne efter, hvor direkte anvendeligt materialet opleves:

samlet anvendelighed 43 svar	Direkte anvendeligt for egne hold	Anvendeligt på andre hold / senere i forløbet	Anvendeligt efter tilpasning	forbehold andre	ved ikke/svarer ikke
antal	29	1	8	2	3
	67%		19%		

Det fremgår at langt de fleste vurderer materialet som fint anvendeligt, evt. med lidt tilpasning. En del angiver at de allerede har brugt flere elementer med succes. Andre ser det mest som en idebank, fx som noget der giver bedre muligheder for at udfordre de stærke elever. Flere nævner, at det vil kræve en del tilpasning at gøre materialet relevant for alle elever. 4 kommentarer giver udtryk for at materialet er på et (for) højt niveau, mens en enkelt synes niveauet er for lavt. Nogle kommentarer er inde på at nogle af øvelserne kræver mere forberedelse, og at det kan være et problem i forhold til anvendelsen af materialet.

Eksempler på svar:
- Super og anvendelig materiale. Den undersøgende tilgang, arbejdesform og modellering kompetancer bag materialet giver os mulgiheder for at synliggør progression mellem den konkreteog den abstrakte matematik.
- Meget anvendelig. Jeg har allerede brugt flere ideer som grundlag for min egen undervsining
- Materialet er grundigt beskrevet og derfor nemt at gå til
- Der er flere opgaver, jeg kan bruge. Især dem, der har en mere praktisk og undersøgende tilgang. Det er vigtigt for mig, at undervisningen ikke kun er målrettet elever, der skal på gymnasiet.

- Godt at få noget konkret materiale med sig. Det var gode opgaver, som man selv kan omforme, så de passer til såvel 5.klasse som 10.klasse.
- Tal og algebra materialet ser jeg som det mest anvendelige. Modellering den tredje gang var også godt, hvis man kan få eleverne til at anvende tingene til det de skal anvendes til (kaste ærteposerne i beholdere og ikke efter hinanden)
- Udemærket. Fedt at man selv kan tilpasse det.
- Meget anvendelig materiale, men en del af det kræver, at der bruges tid på forforståelse. Ligeledes lidt omformulering, hvis hele klassen skal få en positiv oplevelse
- Det var dejligt anvendeligt, da materialet var lige til at gå til, og kun krævet få justeringer til den elevgruppe jeg skulle bruge det til, da størstedelen af eleverne er klar til en gymnasiel uddannelse. Det vil nok kræve tilpasning til andre elevgrupper og slet ikke relevante for nogle.
- Rimelig anvendeligt i forhold til de elever som allerede synes matematik er svært i folkeskolen. Lige lovlig lavt niveau (og svært at ændre på i niveau) for den store gruppe dygtige elever, som går på min skole.
- Det meste. Vi er dog presset på forberedlelsestiden, så der hvor der kræves mange konkrete materialer, står jeg måske af.
- Er jeg ikke klar over endnu.

3.3.3 Relevans af materialet

Spørgsmål: "Hvor relevant anser du materialet for at være ift. dine egne hold - dvs. anser du materialet som værende noget der styrker elementer af matematikfaget, der ellers ikke dyrkes i så høj grad? Dyrker det elementer af matematikfaget, hvor du anser dine elever for at være mindre stærke?" (43 svar)

Kommentarerne er søgt kategoriseret efter om deltagerne synes at materialet er relevant for deres egne hold, eller om de har nogle forbehold:

samlet relevans 43 svar	relevant for egne hold	forbehold	ikke relevant	ved ikke/svarer ikke
Antal	32	8	0	3
	74%	19%		7%

74% angiver at de oplever materialet som relevant for egne hold. En del nævner, at de ser materialet som et godt supplement til det materiale de i forvejen bruger. Der er en del overlap med de foregående kommentarer om anvendelighed og krav om tilpasning.

Eksempler på svar om relevans:

- Materialet har bevirket, at vi har kunnet lægge et øget fokus på et område, der er vigtigt, men måske ikke er blevet arbejdet med så systematisk tidligere, - i hvert fald ikke set fra elevernes perspektiv. Jeg tænker egentligt, at mine elever er relativt stærke også på dette område, men området er blevet gjort mere tilgængeligt og fremstår tydeligere som et område for eleverne med dette materiale.

- Det er et fint supplement til de materialer vi har i forvejen. for de svagere elever kan der godt komme udfordringer, men tænker at noget af det kan være brygbart. Især opgaverne med modellering styrker alle elever i forskellige grader.
- Materialet om algebra er meget relevant i forhold til mit hold. Jeg har fået større fokus på det matematiske sprog og eleverne kan se meningen med at bliver mere præcise i deres sprogbrug.
- Det styrker den sproglige behandling
- Generelt deler jeg oplægsholdernes vurdering af, at det er algebra som er svært. Der støtter materialet ganske fint, dog uden at komme med de HELT nye idéer
- Absolut relevant: indeholder elementer, som jeg ellers ikke naturligt ryster ud af ærmet. Kan desuden være sjove, -og det er jo ikke at kimse ad.
- Svært spørgsmål - da vi jo har en meget stor spredning i vores klasser, så er det vigtigt at tilpasse og udvælge stoffet så det passer til den enkelte. Jeg mener vi dyrker elementerne i rimelig høj grad, men måske er vi ikke så gode til at udfordre de stærke matematikelever. Her er der en del af materialet der kan bruges direkte som det er.
- Hvis man er vant til at sammensætte eget materiale i stedet for at undervise alene efter grundbog, virker det godt. Det har i hvert fald fungeret fint for mine elever.
- "Både og. Jeg kunne godt tænke mig at man tænkte lidt udfra en kobling mellem bogsystemerne i folkeskolen og gym. Andengradspolynomierne kan jeg direkte bruge - og det ser jeg frem til. Jeg ville gerne være med til at se på de koblinger, der ligger fra gym. bogsystemet og til folkeskolens bogsystemer. Det tror jeg er vejen frem."

3.3.4 Viden om udfordringerne for eleverne i overgangen

Spørgsmål: "På hvilken måde har kurset styrket din viden om udfordringerne for eleverne i overgangen fra grundskole til gymnasial uddannelse?" (42 svar).

Kommentarerne er søgt kategoriseret efter i hvilken udstrækning, de giver udtryk for at viden om overgangen opleves som styrket:

samlet om styrkelse af viden om overgang 43 svar	Ja viden styrket	i mindre grad / bekræftet min viden	Ikke rykket/skuffet over indsigt	ved ikke /svarer ikke	uklart svar
antal	21	8	8	2	3

Ca. halvdelen af respondenterne giver udtryk for at have fået styrket deres viden om overgangen. En del svarer, at de har fået større viden om kravene i gymnasiet. Nogle fremhæver det matematiske sprog, som noget det har fået mere fokus på. En del kan ikke rigtig sætte ord på det, eller de anfører at deres viden ikke er blevet rykket/styrket så meget, men at de er blevet bekræftet i deres forestillinger om gymnasiets undervisning. Enkelte stiller også spørgsmål til, hvad overgangsproblemerne egentligt bunder i, og anfører at der er andet på spil end det som kurset har fokuseret på.

Eksempler på svar:

- Jeg har primært fået indblik i hvor store forskelle der er i præsentationen af faget på hhv. folkeskole- og gymnasie-niveau. Der ligger to udfordringer i det:
  1 - folkeskolen har et bredt væld af elever som alle skal undervises sammen, hvilket betyder at de matematisk interesserede/begavede, ikke nødvendigvis opnår det højeste niveau de kan.
  2 - forskellen i undervisningsstile og metoder mellem folkeskole og gymnasie, er nogen der bør udforskes i højere grad, så der skabes forståelse fra begge lejre i begge retninger. Dette vil kunne hjælpe med til at udviske forskellene.
- Jeg er blevet mere bevist om de krav eleverne bliver mødt med, men undres også over hvor lidt afgangsprøven bruges.
- Er blevet bevidst om skriftligheden samt de mundtlige krav der stilles på gymnasiet. Samtidig har det givet et bedre vurderings grundlag for hvad der kræves for en 9. Klasses elev når han/hun skal direkte videre på gymnasiet
- Føler jeg er mere klar over hvilke krav der stilles i gymnasiet, så man kan forsøge at støtte op på udviklingen af det matematiske sprog i den retning
- Undervisnigen vi observerede på Gefion lignede den undervisning jeg selv modtog i 90'erne; høj faglighed, minimum pædagogik.
- Ikke det store. Jeg tror også, der er mange problemfelter i overgangen, som I ikke har taget højde for.
- "Al overgang er svær - specielt efter en sommerferie + læseferie = 10 uger uden reel undervisning. Der smutter en del evner i det tidsrum for eleverne. Kunne godt tænke mig at følge konkrete elever, for at observer, hvad der sker med dem. Lidt ala ""Årgang 0"" fra tv..."

3.3.5 Hvilke ideer fra kursusdagene vil deltagerne implementere?

I spørgeskemaet spørges der både til hvilke ideer, deltagerne regner med at implementere, og hvilke de ikke vil bruge – og hvorfor.

Spørgsmål: ”Hvilke idéer angående undervisningspraksis fra kursusdagene vil du implementere i din undervisning fremadrettet og hvorfor?” (42 svar)

samlet gode	ved ikke	bestemte	generelt	gør det i	ingen	uklart

ideer 42 svar.		ideer		forvejen		svar
antal	6	22	10	1	0	3

Ca. halvdelen fremhæver konkrete ideer, fx modellering, tal og algebra, sprog eller den undersøgende arbejdsform. Mange har ikke så klare svar på hvordan de vil ændre praksis, udover at lade sig inspirere af nyt supplerende materiale og forløb.

Eksempler på svar:

- Jeg vil fokusere mere på overgangen fra det specifikke til det generelle - og det matematiske sprog - algebraen. Fokus på matematiksproget i andvendelse, både skriftligt og mundtligt.
- "1. Styrke det fagsproglige
  2. Ideer i forhold til konkrete opgaver mht modellering
  Jeg var ikke imponeret af undervisnings praksis"
- flere af tingene i fht. algebra. Der kom flere ting som jeg umiddelbart hurtigt og nemt kan bruge fremover.
- Undersøgende og eksperimentelt arbejde kommer til at rykke fremad mod højsædet. Dette kommer også til at ske i forbindelse med tværfaglig undervisning, hvor især naturfagene er skønne som understøttende fag til algebraisk læring og fortolkning.
- Vil arbejde mere målrettet med algebra samt prøve at få modellering mere med ind. Kan se vigtigheden af at de dygtigste elever bliver præsenteret noget mere for algebra. Modellering åbner op for nogle gode "anderledes" opgaver der også giver god mening i den nye folkeskole reform
- Så mange som muligt. De er jo lige til at gå til og det er altid skønt at bevæge sig uden om bogsystemet en gang i mellem.
- som sagt ikke rigtig nogen. Jeg vil anvende det udleverede materiale, men har i forvejen meget fokus på den undersøgende, problemløsende matematik i min undervisning. Men øvelserne er et rigtigt godt supplement til de øvelser/opgaver, som jeg i forvejen anlægger for eleverne

Spørgsmål: ”Hvilke idéer forudser du, at du vil bruge i mindre grad og hvorfor? ”(42 svar)

samlet om ideer der vil blive brugt i mindre grad 42 svar	ved ikke	ingen / materialet er generelt anvendeligt	bestemte ideer	uklart svar
antal	17	8	13	4

Kun ca. en tredjedel giver bud på ideer, som de ikke regner med at ville bruge i så høj grad. Tavleundervisning er en af ting, som nævnes flere gange, selvom det vel ikke kan kaldes en ide fra kurset. Det er måske en praksis, som deltagerne har oplevet ved besøg på gymnasierne. Modelleringsopgaverne nævnes også af flere, og nogle begrunder det med, at disse opgaver kræver meget forberedelsestid. En hel del svarer ”pas”, ”ved ikke” eller lignende. Mange skriver at de ikke synes der er grund til at udelukke nogle af ideerne på forhånd.

Eksempler på svar:

- Jeg ser ikke nogen grund til at udelukke nogen af de foreslåede idéer - men modelleringsopgaverne tager lang tid og vil nok blive anvendt i mindre grad
- Jeg synes modelleringsopgaverne er svære i forbindelse med forberedelse, så dem vil jeg i første omgang ikke benytte mig, men dog er planen at de skal med, på et senere tidspunkt.
- Kun mangel på forberedelsestid som begrænser
- Der er umiddelbart ikke lige noget jeg
- Jeg har ikke tænkt at lægge så stor vægt på tavle eksersits
- Den forelæsende undervisning, hvor alt for mange bliver hægtet af.
- Det algebra materiale vi blev præsenteret for på kursusfagene nummer tre var alt for svært for mine elever
- Idéen om at alle folkeskoleelever skal være på højt algebraisk niveau, kommer jeg ikke til at benytte mig af. Der er så store forskelle på eleverne, at de på ingen måde kan eller vil opnå de samme niveauer i de samme fag. Derfor er jeg tvunget til at undervise mindre målrettet end nogen videregående uddannelse kunne ønske, altså kommer vi til at ofre specialiseringen til fordel for generaliseringen. Grundtanken at vi ikke må/bør opdele eleverne efter evner og interesser i folkeskolen, er dermed en hæmsko for specialiseringen, men en absolut fordel for den almene dannelse.

3.3.6 Forslag til ændringer af kurset

Spørgsmål: Hvis du skulle give gode råd til evt. ændringer af kurset inden endnu en gennemførelse, hvad skulle det så være? (42 svar)

samlet om forslag til ændringer af kurset 42 svar	ved ikke	alt godt	konkrete forslag
	18	4	20

Ca. halvdelen har råd at give, ellers svares der ”ved ikke” eller at alt var fint. Forslagene spreder sig over mange forskellige emner. Det forslag som går igen flest gange, er mere lærerbesøg og observationer af undervisning, som indgår i ca. 5 af kommentarerne. Et andet principielt forslag, som fremføres af et par stykker er, at der burde være mere ligevægt og ligeværdighed mellem folkeskole og gymnasium, når man vil sætte fokus på overgangen. Det bør ikke alene være gymnasielærere, der er undervisere, og folkeskolelærere, som skal på kursus. Disse kommentarer falder fint i tråd med observationerne fra Silkeborg, hvor denne oplevelse af mangel på balance, blev en udfordring særligt på den første kursusdag. Nogle problematiserer kursets længde og tidsforbrug, da lærerne 9. årgang allerede har meget at se til. En enkelt foreslår at man bruger mere tid på at udarbejde materiale i fællesskab.

Eksempler på svar:

- Mere lærerbesøg og observationer af undervisning
- Har ikke lige umiddelbart noget, jeg synes det har været virkelig godt, og det har været dejligt at kunne sparre med en gymnasielærer.
- Ikke så mange lærer fra den samme skole men fra flere forskellige. lidt mindre tid til vi selv skal lave elev opgave men muligvis kunne vi i fællesskab udarbejde noget mere materiale da det er det vi kan bruge videre
- som sagt. Lad os få mere fokus på praksis forskelle. Lad være med at lade gymnasielærerene fremstå som undervisere i kursussammenhængen. For mig at se, har de mindst lige så meget at lære af os, som omvendt. Lad os få italesat den fundamentale forskel i målet for undervisningen
- Deltagelse i undervisningen i gymnasiet kunne jeg godt være foruden, men tror også det var den klasse som jeg så. Mere vidensdeling mellem skolerne, måske krydret med aktionslæring, hvor lærerne også kom på besøg.
- "- hvordan arbejder man undersøgende (hvordan ændres kulturen)
  - mere fokus på IT-værktøjer (evt. kursus)"
- Jeg synes, alt i alt det har været godt og udbytterigt, særligt fordi vi har været afsted hele lærergruppen omkring 9. årgang og sammen har kunnet afprøve og drøfte materialet.
- Drop 1. Kursusdag.
- Evt inddrage elevinput - invitere få elever til at belyse overgangen
- "Kurset skal bredes langt mere ud. Det skal helst foretages for matematiklærere midt i mellemtrinnet op til og med starten af udskolingen.
- Det er noget rod at kaste alle disse ting efter lærere med 9.-klasser, da både lærerne og klasserne allerede har rigeligt på bordet. Dette er en udvikling og ændring som kommer til at kræve tid og den tid opstår ikke fordi man ønsker det."
- Mindre tid! 9. klasse er ikke lige tidspunktet at være væk tre dage!!

3.4 Undervisningen i udskolingsklasserne

Der blev observeret undervisning den 9. december på Sølystskolen i Silkeborg, og den 11. december på Den Classenske Legatskole i København.
Formålet med observationen var at få indblik i hvordan de to første kursusdage, og undervisningsmaterialet herfra, blev brugt i praksis. Det var tanken at repræsentanter fra projektgruppen, der har undervist på kurserne, skulle ud og observere en undervisningsgang og efterfølgende tale med de pågældende lærere om det. Det har vist sig svært at få koordineret kalendere under projektet, hvorfor kun få observationer og fælles refleksioner er blevet afholdt. De to skoler, der er blevet valgt er ligeledes blev valgt fordi der ellers stort set ingen observation havde været, og for at dække både Silkeborg og København.

3.4.1 Besøget i Silkeborg

Sølystskolen havde arrangeret et møde på skolen kl. 15-17. Det startede med en kort rundvisning i den del af skolen, der rummede udskolingen. Skolen har i udskolingen 4 spor: 2 almene samt 2 idrætsspor. I de to sidste spor er undervisningen tilrettelagt således, at eleverne kan passe evt. sportsaktiviteter, der dyrkes på højt plan med fx morgentræningspas.

Skolen havde i alt 6 matematiklærere tilknyttet Matematikbroen, hvoraf de fem deltog i mødet. Én af lærerne underviser dog ikke i 9./10. klasse. De andre havde afholdt undervisning baseret på kursusmaterialet i større eller mindre omfang. De havde dog valgt at gøre det inden projektgruppen og IND kom på besøg, og uden at have hinanden med til at observere den afholdte undervisning. Refleksionen omkring elevernes læringsudbytte er altså her baseret på lærernes egne udsagn om hvordan undervisningen er gået. Undervisningsmaterialerne om tal og algebra, ”Barbie Bungee Jump” og ”Mal en stjerne”, der henvises til i følgende, kan findes på Matematikbroens hjemmeside

Samtalen med lærerne var organiseret som semistruktureret gruppeinterview baseret på følgende spørgsmål:

1. Hvordan har I gennemført jeres undervisning? Slavisk efter instrukserne i Matematikbroen-kompendiet, eller har I lavet ændringer - og i så fald, hvilke?
2. Kan I give eksempler på hvordan I guidede eleverne i deres arbejde?
3. Hvordan arbejdede eleverne med stoffet? Kan I give eksempler på hhv. velfungerende og dårligt fungerende sekvenser fra undervisningen? Og endelig, hvad gør at I vurderer, at de fungerer/ikke fungerer?

Med hensyn til hvordan lærerne havde håndteret materialet, så var der en klar opdeling i klasserne. I almenklasserne var der den særlige udfordring, at en stor del af eleverne ikke skulle i gymnasiet. Lærerne vurderede derfor at Matematikbroens materialer var mindre relevante. Derfor havde almenklassernes lærer udviklet et projekt om tennisbolde i papkasser, så ”eleverne kunne komme ind i tænkningen med beregn, gør, mål, brug net osv.” Herefter gik den dygtigste halvdel af klassen i gang med Barbie-Bungee-Jump-projektet. Den anden halvdel gennemførte den normale undervisning. I idrætsklasserne var de gået i gang med Barbie-Bungee-Jump-projektet mere direkte efter materialet, og havde bagefter dyrket tal og algebra, hvilket de derefter havde gjort til et fast 10 min. element af den daglige matematikundervisning. I starten blev eleverne helt ”rundforvirrede” af ”gæt et tal” og forløbet havde demonstreret, hvor dårligt styr de havde på tal, algebra og specielt arbejde med ubekendte.
Generelt melder lærerne fra idrætsklasserne om irritation over tidsaspektet med modelleringsmaterialet - de kunne bruge den dobbelte tid. Det er ”træls”, at skal stoppe undervisningen midt i en god faglig diskussion fordi de 5 kvarter er gået. Oplæggene vurderes her til at være rigtig gode ift. at igangsætte gode faglige samtaler om regneregler og variabelsammenhænge (begge samlinger af materialer). Det vurderes også, at der er et fint link mellem talpyramiden og nogle tilsvarende materialer i lærebogen.

I forhold til at gå i gang med at bruge materialerne direkte viser det sig, at eleverne mangler meget at lære ift. kommunikationskompetencen og undersøgende arbejde med matematikken.
Lærerne giver endvidere udtryk for, at de med Matematikbroens materialer ikke kun arbejder hen mod de mål, som er fastsat i læreplanen. De påpeger, at de i deres arbejde føler sig bundet af, at bøgerne og folkeskolen generelt forventer, at man i matematik kan sætte to streger under et facit, samt at eleverne skal lære at være systematiske.

Eleverne er ikke vant til at tænke ud af boksen, være undersøgende eller kommunikere omkring hypoteser. Det fører videre til andet spørgsmål om, hvordan lærerne så guidede deres elevers arbejde. Almenklassernes lærer fortæller, at de særligt i deres eget tennisboldeforløb lod eleverne arbejde med, hvad de kalder ”ført hånd” og brugte sætninger som ”prøv lige at…”
I idrætsklasserne startede eleverne ud med at bevæge sig ud i alle grene af trædiagrammet, hvilket betød, at én gruppe gik direkte til systematisk at generere data til en tabel. Lærerne justerede så det genererende spørgsmål for at sikre, at alle kom til at arbejde med tabel-tilgangen.

I algebra opgaverne har lærerne ikke oplevet samme behov for at guide. Nogle elever fandt opgaverne spændende og udvidede dem til også at dække negative tal og decimaler, hvilket førte til snak om generelle regler og videre til beviser. Dette opfattes som en succesoplevelse, hvor eleverne selv udtrykte sig om, at de kunne begrunde deres handlinger med noget, de havde lært tidligere. I almenklasserne oplevede flere elever, at der var noget de kunne og at de kunne lege sig ind i stoffet, så de mod sædvane gik fra timen med armene over hovedet – også de mindre stærke elever. Der var dog også nogle af de svage elever, der brugte helt andre strategier end lærerens og stadig kom frem til det rigtige svar. Under interviewet blev det ikke helt klart hvordan, og om, der blev samlet op på dette i undervisningen.

Lærerne deler den erfaring, at gruppesammensætningen er afgørende for hvorvidt dynamikken fungerer, så de ikke føler sig nødsaget til at blande sig eller guide med ført hånd. Almenklasserne havde eksperimenteret med grupper på tværs af parallelklasserne for at sikre grupperne havde sammenlignelige faglige niveauer. Disse fungerede for det meste godt.

Lærerne havde svært ved at beskrive konkrete situationer fra undervisningen, da det for flere af dem var noget tid siden, de havde haft hele moduler med materialet. Lærerne kunne altså ikke blive meget mere præcise end det ovenstående.

Adspurgt om nogle af lærerne havde brugt materialet modelleringsforløbet ”Mal en stjerne”, hvor eleverne skal finde ud af hvor mange irregulære stjerner, der kan males med en halv liter guldmaling, var svaret nej, da lærerne mente det var for svært (materialet til forløbet ”Mal en stjerne” kan ses på Matematikbroens hjemmeside). De svageste elever ville have brug for at kunne konstruere og male dem i virkeligheden. En lærer mente, at det var en unødig hindring at den ene stjernetak ikke er en ”pæn geometrisk figur”, da man ikke kan dække stjernen med trekanter og firkanter for at svare på spørgsmålet. At dette ville ødelægge opgavedesignet, der kræver eleverne arbejder med lineære variabelsammenhænge, blev opfattet som underordnet, da det blev vurderet, at eleverne slet ikke kunne komme i gang med opgaven.

Lærerne var enige om, at det generelt var sjovest for eleverne med sådanne forløb, hvis de mundede ud i et slutprodukt. Men da de ikke har den fornødne tid til at rette skriftligt arbejde blev det helt korte mundtlige præsentationer.
Dette blev dog også vurderet som positivt, da ”det mundtlige er vigtigt i 9. da de risikerer prøve. Vi andre er glade hvis de kan regne”.

Resten af interviewet handlede om ønsker til tredje kursusdag. Alle lærere var enige om, at de ønskede flere materialer til alle udskolingens klassetrin i stil med de første. Adspurgt om de kunne tænke sig at medbringe egne materialer og blive assisteret i at redesigne dem, således at de kom ind i ”mind set'et” bag de første materialer, var svaret negativt. De mente, at det var alt for tidskrævende både på kurset, men i høj grad også efterfølgende, hvis de selv skulle udvikle materialer. Vidensdelingen var god, men de kunne ikke se sig selv bruge designværktøjerne.
De ønskede heller ikke at se yderligere gymnasieundervisning, da de gennem flere år har haft lejlighed til det via tidligere initiativer fra gymnasiet side.

3.4.2 Besøg i København

På skolen i København havde to af lærerne været på de to første kursusdage. De havde arrangeret en fælles undervisning i en klasse, hvor de brugte i materialet med Barbie Bungee Jump. Den ene lærer var klassens matematiklærer, den anden havde dem i fysik/kemi. Lærerne ønskede, at eleverne skulle gå systematisk til opgaven og arbejde ”systematisk-deduktivt”, da det er, hvad de mener vægter i matematik og naturfagsundervisningen generelt i folkeskolen. I nedenstående er der medtaget et resumé af observationsjournalen fra den observerede time.

Timen starter med at matematiklæreren siger ”I skal arbejde med at modellere bungee jumpet, kan I huske hvad det er?” Han får ikke mange svar og efter kort tid viser han videoen af et jump samt billede af elever, der laver Barbie jump. Eleverne får at vide, at målet for timen er, at de skal have formuleret en hypotese, hvor de skal skrive, hvilken matematik de vil beskæftige sig med, og få problemet afgrænset. Det foreslås, at de laver et mindmap over deres tanker, der kan give en ”opskrift” til løsning af opgaven. Ydermere siger fysik/kemi-læreren, at de skal have dette arbejde godkendt, inden de kan få udleveret Barbiedukker og elastikker. Og skriver eleverne, at de vil bruge statistik, kan de ikke få godkendt deres hypotese. Endelig siger matematiklæreren, at efter 20 min. skal enkelte grupper præsentere deres arbejde.

Grupperne har forskellige strategier. En enkelt gruppe begynder at bladre i formelsamlingen, men uden klart mål, viser deres snak. Andre grupper mener, at de er nødt til at vide noget om jumpet, inden de kan lægge sig fast på matematikken, dvs. den endelige faldhøjde og elastikkers udstrækning. Endelig er der en gruppe, som husker, at de for nylig har haft om kraftbegrebet i fysik,

luftmodstand osv. Gruppen har dog svært ved at koble det til spørgsmålet på en konkret måde.
Lærerne gør eleverne opmærksomme på, at godt må tænke materialer til noget praktisk arbejde ind i deres hypoteser og at de har elastikker, dukker, vægte og målestokke til deres rådighed. Lærerne prøver at få eleverne til at tegne og skrive noget ned, men eleverne bliver ved med at tale om, hvilke mål de har brug for. Efter at eleverne har fået overbevist lærerne om, at de har en idé om, hvad de skal måle og hvorfor (uden lineære sammenhænge er nævnt nærmere end noget med en funktion), får eleverne lov til at bruge materialerne. Dette fører til diskussioner om elastikkers udstrækning, behovet for en prøve-højde, opmåling af samlet højde, samt ren "trial-and-error" eller afprøvning på en prøvehøjde. Lærerne spørger ind til elastikker, knudetyper og betydningen af Barbies stød mod gulvets ift. det perfekte Jump. Det leder videre til forskellige afprøvninger og justeringer af eksperimentet samt variabelkontrol. Endelig spørger matematiklæreren en gruppe, om de kan svare på, hvor langt Barbie falder med 6 elastikker, når de ved hvor langt hun faldt med 3. Først mener gruppen ikke at de kan svare på det, da antallet af elastikker betyder noget for udstrækningen. En anden gruppe overhører det og får idéen om mere systematisk afprøvning, hvor de skriver tal ned for at se efter et mønster.

Lærerne spiller en langt mere tilbagetrukket rolle nu og alle grupper arbejder flittigt med at afprøve og systematisere. Ingen arbejder på rigtige tabeller, men alle på nær én gruppe ser på tallene for at skyde sig ind på korrekte tal på deres valgte prøvehøjde.
Ved opsamlingen efter godt 25 minutter spørger matematiklæreren en gruppe: "hvor langt er I?". Gruppen svarer at de er i gang med at finde ud af, hvor mange elastikker der skal til for at få det perfekte spring på én meter, "og så vil vi gange med 4 og så mangler vi bare de 83". Gruppen er kommet frem til at "konkurrencehøjden" er 4,83m (altså den faldhøjde for Barbie-dukken, der er fastsat til det endelige bungee jump).
Læreren spørger, hvad de kan ændre for at komme nærmere svaret, og at de har skrevet noget ned med 7,5. Eleverne svarer "Jah, vi ved ikke om de strækker sig mere ved større højde…". I virkeligheden har de fundet, at hver elastik giver 7,5 cm længde på springet, når dukken blot lader sig falde ud over en kant. Det svarer til, at de har fundet hældningskoefficienten for den lineære sammenhæng mellem antal elastikker og hvor langt Barbie-dukken falder. De har dog ikke lavet regression. Fysiklæreren spørger, hvorfor de har hentet en vægt, hvilket fører til uro i klassen og forvirring omkring, om vægten kan bruges til noget, og i givet fald til hvad. Småsnakken fører til at grupperne arbejder videre med deres idéer. Efter i alt 40 minutter stopper fysiklæreren klassen og beder dem omskrive deres hypoteser til et svar og en fremadrettet strategi for deres arbejde, samt sikre, at de har skrevet alle de tal ned, som, de har målt i grupperne. Årsagen er, at de skal bruge det til at arbejde videre med næste gang, og at eleverne altid glemmer deres arbejde til næste gang.
Matematiklæreren tager en hurtig runde til grupperne og spørger, hvad de er kommet frem til; med variationer er de cirka samme sted som ved den ovenfor nævnte opsamling, dog med forskellige prøvehøjder og udstrækninger. Læreren spørger om eleverne har en idé om, hvilket matematisk område de kan bruge til at løse opgave. De svarer alle nej. Flere grupper er dog på sporet af lineære

sammenhænge, andre mener, at det bare er ”regneudtryk”, der kan give dem svaret.

Efter undervisningen har lærerne et kvarters pause, hvor vi kan tale om undervisningen. De udtrykker frustration over de upræcise formuleringer fra elevernes side på den indledende øvelse om at skrive en hypotese. Ligeledes er de frustrerede over, at eleverne ikke er kommet i gang med at bruge det de har lært om lineære funktioner og regression endnu.
Adspurgt om hvorfor lærerne insisterer på elevernes hypoteseformulering og at tænke sig ind på problemet fra start, svarer lærerne, at det er forventningen til, hvordan eleverne skal lære at arbejde med stoffet i folkeskolen i dag.

Repræsentanten for projektgruppen og repræsentanten for IND-gruppen udtrykker begejstring for elevernes arbejde, da problemet blev givet helt frit, og for hvor hurtigt de kom i gang med at prøve sig frem og opdage, at det ikke var præcist nok til at formulere sig om, at man skal være mere systematisk og se mønster i data. At det var godt arbejde med problemet. Herefter gik snakken om læringsudbyttet, og at dette kan understøtte elevernes viden om, hvad regression er og kan – samt om at modeller er tilpassede beskrivelser af virkeligheden. Endelig blev der talt om fordele og ulemper ved ”bare” at lade eleverne gå direkte i gang med opgaven, ud fra et læringsmæssigt synspunkt.

Resten af samtalen gik med ønsker til sidste kursusdag, særligt materialer, der dyrker elevers præcision i arbejdet med og deres kommunikation om matematik. De efterlyste også viden om, hvorvidt dette er måden at gøre tingene på i gymnasiet – deres indtryk af gymnasial undervisning var anderledes. De ønskede at se gymnasieundervisning for at kunne linke egen undervisning hertil. De havde ikke rigtigt fået brugt materialet om tal og algebra endnu. De havde en relativ deduktiv tilgang til undervisningen og ønskede at undervise eleverne i stoffet inden de skulle bruge det på opgaver. Den netop observerede undervisning viste ganske vist, at den undersøgende tilgang fungerede godt i klassen, når lærerne slap tøjlerne en smule – men lærernes egen opfattelse var dog det modsatte. På den måde kan man argumentere for, at der også er en tilvænning for lærerne ift. at gøre og tænke undervisningen anderledes. Derfor er det også godt at se, at de til sidst i forløbet underviste mere efter Matematikbroens intentioner.

3.4.3 Sammenfattende om besøgene

Fra de to besøg er det tydeligt at lærerne forvalter og udmønter forløbene forskelligt. Fælles for lærerne er det dog, at de ikke er trygge ved at slippe tøjlerne i modelleringsforløbene, hvilket kan mindske læringspotentialerne i forløbene; der er utvivlsomt behov for mere systematisk indføring i ræsonnementerne bag de udleverede designs. Omvendt kan der ikke ud fra en enkelt observation og mødet med Silkeborglærerne konkluderes noget definitivt om, hvordan dette behov kan opfyldes.
Tal og algebra opgaverne synes at fungere godt både som træning til vedligeholdelse af teknikker, men også som medium til læring af teknikkernes generelle værdi, baseret på elevernes egne hypoteser. Dette er meget positivt.

Særligt hvis aktiveringen af teknikkerne kan kobles med brugen i andre kontekster – både rent algebraiske og i andre fagområder.

3.5 Evalueringstesten

Det står som et selvstændigt punkt i projektets initiativer, at de elevernes udbytte skal evalueres gennem en test. Den test, som er blevet brugt til at evaluere elevernes udbytte af undervisningen, er baseret på ”teknik-analyse”. I nedenstående gives en præsentation af dens tilblivelse, samt analysen af elevernes præstationer. Til sidst gives resultaterne af testen samt en vurdering af hvorvidt, der er en forskel at spore mellem de elever, der har modtaget undervisning baseret på Matematikbroens materialer, og dem som ikke har. Vi må dog understrege, at resultatet af testen ikke alene kan sige noget om Matematikbroens succes. Vi udfolder den fulde diskussion af dette forbehold og Matematikbroens øvrige resultater i afsnit 4.

3.5.1 Tilblivelse og analyse af testen

Da testen skulle vise resultatet af Matematikbroens initiativer blev det besluttet at gennemføre en pre-test af elever, der ikke havde modtaget undervisning baseret på Matematikbroens materialer, i efteråret 2015. Hermed sikres at de testede 1.g-elever var færdige med grundskolen, før deres lærere kom på kursus. På denne måde sikredes det, at de testede elever i 2015 ikke kan være påvirket af initiativerne i Matematikbroen.
De lærere, der har været på kursus, har afleveret lister over deres elever til projektgruppen i foråret 2016. Herefter har IND-gruppen i august 2016 fundet alle de nye 1.g'ere, der har været undervist i grundskolen af en lærer, der har deltaget i Matematikbroen. Blandt disse elever blev 25 tilfældigt udvalgt til test.

Selve udarbejdelsen af testen, samt en kortlægning af hvilke algebraiske teknikker, der er i spil i overgangen fra grundskole til gymnasium, blev gennemført som led i et specialeprojekt af Caroline Sofie Poulsen, Københavns Universitet. Caroline arbejdede som årsvikar på Solrød Gymnasium sideløbende med afslutningen af sin uddannelse. Arbejdet som gymnasielærer havde givet hende interesse for at beskæftige sig med overgangen fra grundskole til gymnasium.

For at få kortlagt hvilke algebraiske teknikker, der er i spil i overgangen fra grundskole til gymnasium, er der blevet anvendt prakseologisk analyse (som beskrevet i afsnit 3.2.1) på en lang række opgaver. Helt konkret har Poulsen (2015) analyseret:

- alle opgaverne i 9.klasses afsluttende prøver fra sommer og vintertermin i 2013 og 2014
- to matematik C niveau grundbøger med tilhørende arbejdsbøger (Clausen, Schomacker & Tolnø, 2005) og (Carstensen, Frandsen & Studsgaard, 2005)
- screeningstesten fra ”Netværket for matematiklærere i Silkeborg-området” (testen kan findes på netværkets hjemmeside). I hvert materiale blev de opgaver udvalgt og analyseret, der kan karakteriseres som hørende til basal skolealgebra. Definitionen af en sådan opgave er følgende:

*"En opgave er at betragte som hørende til basal skolealgebra, hvis en ubekendt størrelse optræder i opgaven **og** hvis den ubekendte har en betydning (af mere end pladsholder) i løsningen af opgaven"* (Poulsen, 2015, s. 33). Der gives (ibid, 2015, s. 31ff.) konkrete eksempler på til- og fravalg af opgaver ud fra definitionen. Dette arbejde førte til at 10 opgaver fra screeningstesten, 50 opgaver fra 9. klasses prøverne og mere end 100 opgaver fra hver af de to bogsystemer blev analyseret mht. opgavetyper og teknikker, der løser dem. Dette arbejde har ført til en epistemologisk referencemodel, der er vist i Bilag A.
Ud fra referencemodellen er der blevet designet opgaver, der trækker på de teknikker som er identificeret i både de afsluttende prøver (i bilaget kaldet FSA), screeningstesten (ST) samt i matematik C niveau bøgerne (STX). Opgaverne er designet efter principperne ved diagnostiske tests (jf. afsnit 3.1.4). Flere af opgaverne kan løses på mere end én måde. Variationen i de i alt 42 delspørgsmål fordelt på 22 opgaver er imidlertid så stor, at teknikkerne, der er i spil i overgangen med rimelighed kan siges at være testet, hvilket bekræftes af analysen af besvarelser

Et eksempel på en opgave er løsningen af følgende ligning mht. x:

$$\frac{3x+6}{4} = 3$$

Denne opgave tester følgende teknikker:
τ_7: $+, -, \cdot, :$ udføre samme operation på begge sider af et lighedstegn ifm. ligningsløsning
τ_{38}: Multiplikation med brøk, $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
τ_{41}: Multiplikation med brøk, $\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$
τ_{42}: Addition/subtraktion i brøker, $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
τ_{44}: Brøkers division, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

A priori analysen af opgaven giver eksempler på, hvordan den kan besvares forkert:

$$i) \; \frac{3x+6}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + 6 = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -3 \Leftrightarrow x = -3 \cdot \frac{4}{3} = -4$$

$$ii) \; \frac{3x+6}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{6}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

I i) handler misforståelsen sig om τ_{42} og at begge led udtrykket skal deles med divisoren. I ii) handler misforståelsen om τ_{44}(forkert brug af brøkers division).

De elevbesvarelser, der er blevet indsamlet, er alle blevet rettet af IND-gruppen. I første omgang er alle besvarelser blevet rettet i forhold til om den enkelte opgave er korrekt (k), ubesvaret (u) eller forkert besvaret. Efterfølgende er alle besvarelser blevet gennemgået igen, hvor de forkerte svar er blevet analyseret som i eksemplet ovenfor, hvor den problematiske teknik er blevet listet. I eksemplet med ii) ovenfor, ville opgaven blive markeret med 44. Hvis der er flere teknikker, som ikke er blevet brugt korrekt er de blevet listet som fx: 7,42,44. I nogle tilfælde beror fejlen på basale regnefejl: addition (sum), subtraktion (sub), produkt (prod) og division (div).
Den måske mest brugte markering af fejl i opgaverne er "gæt". En del elever har på trods af opfordring til at skrive mellemregninger og argumenter (også gerne

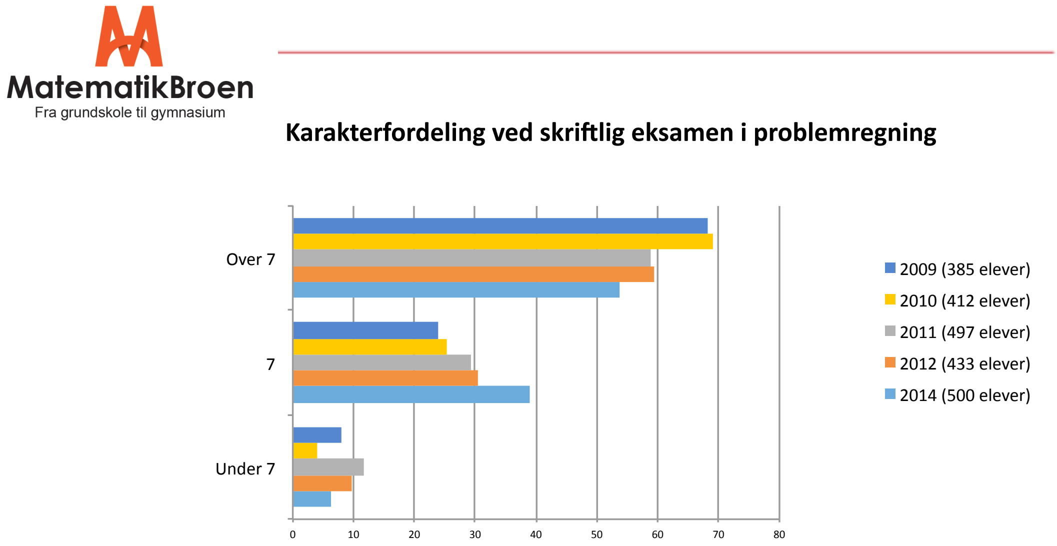
på kladdepapir, der afleveres), afleveret et svar uden andet. Her er det svært at vide, hvorvidt svaret er et tilfældigt gæt, begrundet i elevens hoved eller afluret hos en fjern sidemakker.

3.5.2 Resultatet af de to testrunder.

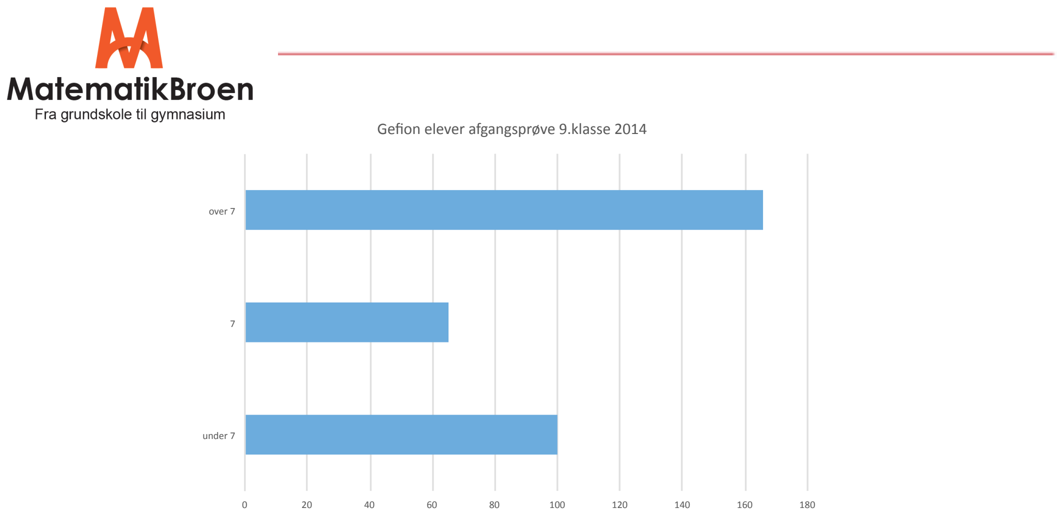
Den 5. november 2015 blev der afholdt screeningstest af elever på hhv. Gefion Gymnasium i København og Silkeborg Gymnasium. For at sikre, at et tilstrækkeligt antal elever blev testet (minimum 20) var 25 elever udtrukket til testen på hvert af gymnasierne. I København mødte 20 elever op og i Silkeborg 22. Fraværet skyldtes sygdom. Udvælgelsen af eleverne foregik ved at samtlige 1.g-elever fik tildelt et nummer, hvorefter 25 tilfældige blev trukket på vha. en "tilfældighedsalgoritme" i programmeringssproget R. I Silkeborg var det nødvendigt lave enkelte udskiftninger grundet skematekniske udfordringer.

I 2016 blev elevlisterne fra de grundskolelærere, der havde været på matematikbroens kurser sammenholdt med 1.g-listerne fra de to gymnasier. I Silkeborg blev der fundet 34 elever og i København 29. Som i 2015 udvalgte vi 25 tilfældige elever. I 2016 mødte 21 elever op på begge gymnasier. Årsagen til fraværet var sygdom. Altså er der i alt testet 42 elever i 2015 og igen i 2016.

Resultatet af 2015-testen viser, at eleverne i København svarede korrekt på 25% af de stillede spørgsmål, i Silkeborg var det 40% af delspørgsmålene. Ser vi på hvilke karakterer de to skolers elever kommer med fra grundskolen er dette resultat ikke overraskende, da størstedelen af Silkeborgs elever har mindst karakteren 7 i matematik fra grundskolen, hvor situationen på Gefion er langt mere blandet (se figur 6, som opsummerer det tilgængelige talmateriale fra gymnasierne).



Figur 6a. Silkeborg Gymnasium: Antallet af elever, der under karakteren 7, 7 eller over 7 i den afsluttende prøve i matematik i 9. klasse. Diagrammet er i den form, som blev anvendt på kurset for folkeskolelærere i Silkeborg.

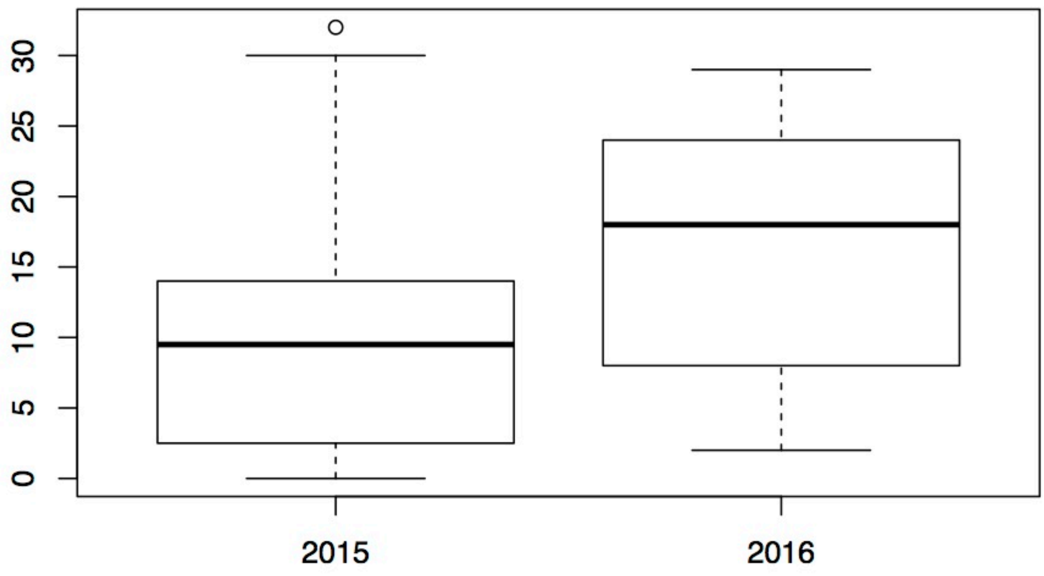


Figur 6b. Gefion Gymnasium: Antallet af elever, der under karakteren 7, 7 eller over 7 i den afsluttende prøve i matematik i 9. klasse. Diagrammet er i den form, som blev anvendt på kurset for folkeskolelærere i København.

Flere af grundskolelærerne, der har deltaget i kursusaktiviteterne under Matematikbroen, har om ovenstående tal ytret, at udfordringerne i gymnasiets matematikundervisning ikke undrer. Grundskolelærerne mener, at elever med karakteren 4 ikke er gode til basal skolealgebra. Men det er da rigtigt, at resultatet af 2015-testen ikke er prangende på nogen af de to gymnasier.

Ved 2016-testen var andelen af korrekte besvarelser på Silkeborg Gymnasium 8,3 procentpoint højere end i 2015, dvs. i gennemsnit har Silkeborgs elever svaret rigtigt på 48,3% af spørgsmålene. For Gefion er forbedringen på 13 procentpoint, hvilket betyder at eleverne her i gennemsnit har svaret rigtigt på 38% af spørgsmålene. For at undersøge nærmere, hvad denne forskel betyder statistisk set er der blevet lavet T-test i programmet R. Her er de to datasæt fra Silkeborg og Gefion blevet skrevet op som matricer, hvor et 1 tal markerer et korrekt svar fra en given elev. Et 0 markerer at en given elev har svaret forkert eller ikke besvaret et givent spørgsmål. Laves der en T-test, der sammenholder resultatet af de 42 elever, der blev testet i 2015, med de 42 der blev test i 2016, så viser ændringen sig ikke at være signifikant. Ser vi isoleret på resultaterne fra Gefion, så er forskellen signifikant, mens det ikke er tilfældet for elevgrupperne i Silkeborg.

I et projekt som Matematikbroen er det imidlertid lige så interessant at se på hvilke specifikke teknikker som forskellene i performance angår, og på forandringer i fordelingen af elever på antal korrekte svar. I figur 7 ses en sammenligning af det samlede pointantal (dvs. summen af antallet af korrekte svar) for eleverne på Gefion Gymnasium:



Figur 7. Boksplots over antallet af point som eleverne på Gefion Gymnasium samlede i hhv. 2015 og i 2016.

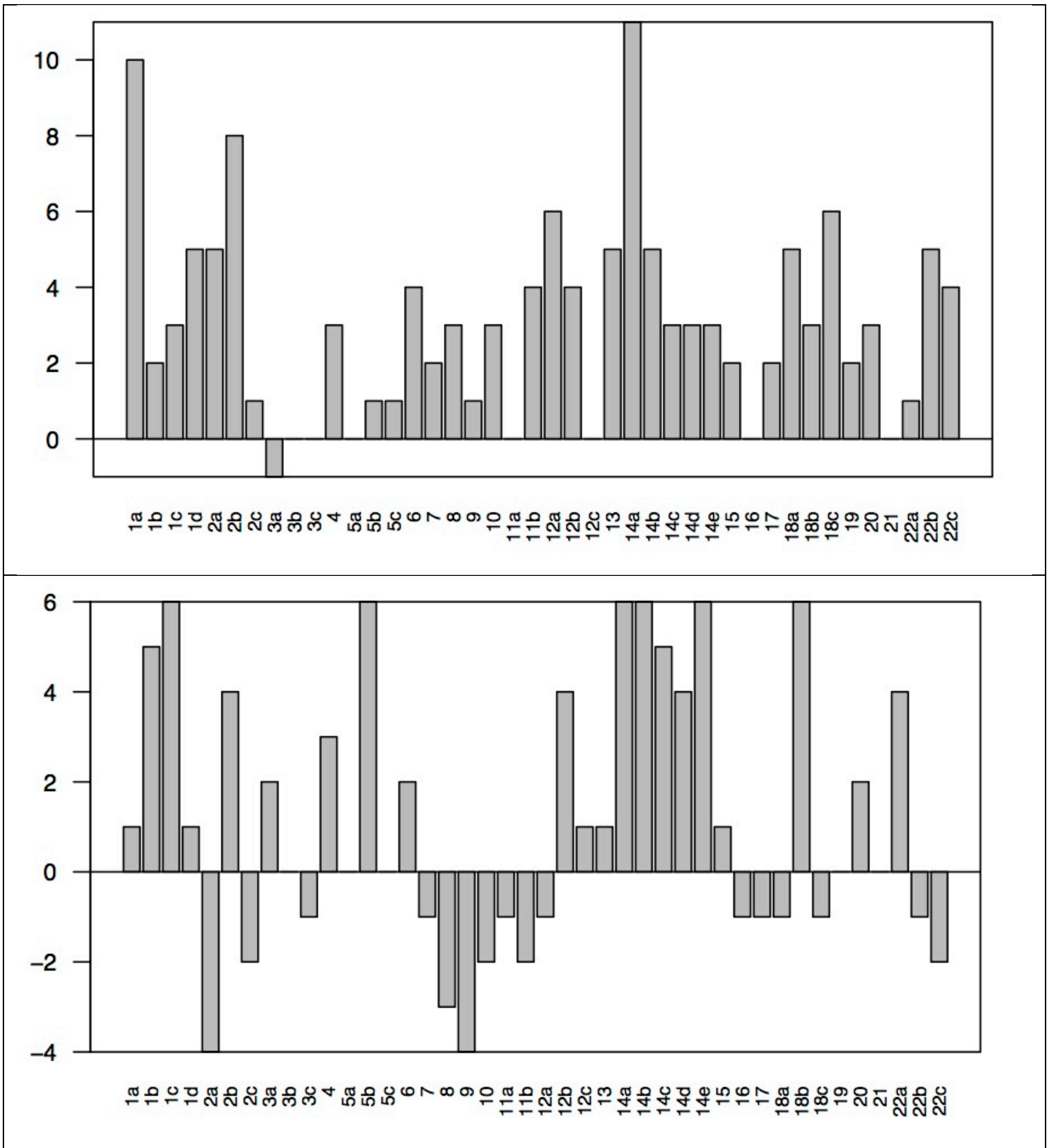
Som det fremgår af de to boksplot i figur 7, så har den bedste elev på Gefion Gymnasium i 2015 klaret sig bedre end den bedste fra 2016. Tilsvarende var der elever i 2015 som slet ikke fik point i testen, mens det ikke var tilfældet i 2016. Medianen rykket sig fra 9,5 point til 19, hvilket betyder at halvdelen af eleverne på Gefion får 19 point eller mere i deres test i 2016. De tre nedre kvartiler er blevet spredt mere ud i 2016 end i 2015. Dette antyder et generelt løft på nedre og middel niveauer. Den øvre kvartil ikke tydeligt forbedret.

Laver man en tilsvarende sammenligning af resultaterne fra Silkeborg Gymnasium får man de to boksplot, der er vist i figur 8.

Figur 8. Figuren viser to boksplot over antallet af point som eleverne på Silkeborg Gymnasium samlede i hhv. 2015 og i 2016.

Af de to boksplots fra Silkeborg Gymnasium i figur 8 fremgår, at medianen er gået fra 19 rigtige svar i 2015 til 22 i 2016. Ser man på største og mindste værdi ligner det resultaterne fra Gefion. Mindste værdi er gået fra 1 til 3 og største værdi er faldet fra 35 til 32 ud af 42 mulige. Nedre kvartil er blevet mere langstrakt, hvilket kunne tolkes sådan, at nogle af de svageste elever er svære at løfte. I de to midterste kvartiler kunne tallene indikere en mere generel gavnlig effekt, i det omfang forskellene skyldes Matematikbroen. Årsagerne til en mulig mindre effekt i enderne af skalaen bliver diskuteret i afsnit 4.

Ligesom det er interessant, at se på hvilke elevgrupper, der kan have haft gavn af Matematikbroens indsats, er det også interessant at se på, hvilke specifikke opgavetyper og teknikker, der ses forskelle i fra 2015 til 2016, og hvor der ikke er markant forskel. For at illustrere dette, er antallet af rigtige svar talt op for hvert delspørgsmål i hhv. 2015 og 2016. Herefter er 2015 tallene trukket fra 2016 tallene, hvorved en positiv forskel repræsenterer en forbedring og en negativ repræsenterer en dårligere svarprocent i 2016. Dette er afbildet som et søjlediagram nedenfor i figur 9.



Figur 9. Øverste diagram viser ændringen i Gefion elevernes performance på de enkelte delspørgsmål;nederste diagram viser de tilsvarende tal for Silkeborg

Når vi ser på diagrammerne i figur 9 vil vi minde om, at Silkeborg Gymnasium i begge år besvarede testen bedre en Gefion Gymnasiums elever. Laver man χ^2-test, goodness of fit, hvor 2015 fordelingerne sammenlignes med 2016 fordelingerne af rigtige svar på de enkelte spørgsmål, så præsterer den samlede elevgruppe i 2016 ikke signifikant bedre end elevgruppen fra 2015. Det betyder, at forskelle mellem de to år ikke signifikant er sket på enkelte opgavetyper eller teknikker.
Med forbehold for dette og for det overordnet set lille talmateriale, noterer vi ikke desto mindre fra Figur 9 at der er moderate tegn på ”forbedring” i visse opgaver. Fx er der i delspørgsmål 1a), 1d), 2a), 2b), 12a), 13), 14a), 14b), 18a), 18c), 22b) og 22c) mindst 5 flere elever på Gefion Gymnasium har besvaret spørgsmålene korrekt i 2016, sammenlignet med 2015.

Disse delspørgsmål samt de teknikker, der hos andre elever har givet fejl (disse er beskrevet i Bilag A), ses i tabel 1 nedenfor.

Spg	Opgaven	Teknikker, der giver fejl
1a)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $x \cdot (3 + x) - 3x$	τ_3, τ_{58}
1d)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $5x + 2x^2 - (x - 3x^2)$	τ_{58}, τ_{64}
2a)	Hæv parenteserne ved at udregne nedenstående: $(a + 2)(2 + a)$	τ_{58}, τ_{64} evt. τ_{67}
2b)	Hæv parenteserne ved at udregne nedenstående: $(x + 1)(x - 1)$	τ_{70} evt. $\tau_{58},\ \tau_{64}$
12a)	Reducer brøkerne: $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$	τ_{37}
13)	I de følgende omskrivninger er der én fejl. Find denne fejl, og markér den ved, at sætte en ring rundt om det lighedstegn, som ikke gælder. Skriv på linjen under, hvad der burde have stået efter det markerede lighedstegn: $a)\ 2(a + 2b) + (a - b) = 2a + 4b + a - b = 3a + 3b$ $b)\ 3(s + 8) - (2s - 5) = 3s + 8 - 2s + 5 = s + 13$ $c)\ x(x - 2y) - x^2 + yx = x^2 - 2xy - x^2 + yx = -yx$	τ_3 Afslørede en række andre misforståelser
14a)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $5a + 5b$	τ_{56}
14b)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $2xz + 6xy$	τ_{56}, τ_{57}
18a)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $(4 + x) \cdot x - 4x$	$\tau_3 b, \tau_{58}$
18c)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $\frac{a^3 \cdot b^5}{a \cdot b}$	τ_{37}, τ_{47}
22b)	Løs ligningerne: $3x + 15 = x + 9$	τ_7, τ_{58}
22c)	Løs ligningerne: $2 \cdot (x + 3) = 5x + 6$	$\tau_3, \tau_7, \tau_{12}, \tau_{58}$

Tabel 1: De delopgaver og problematiske teknikker som eleverne på Gefion Gymnasium klart har forbedret sig i fra 2015 til 2016.

Som det fremgår af tabel 1, så er der i 2016 mindst 5 flere respondenter på Gefion Gymnasium, som er sikre i at bruge teknikken τ_{58}, saml og reducer ens størrelser. Desuden er eleverne bedre til at bruge den distributive lov: τ_3, τ_{56} $(ab + ac) = a(b + c)$, og den relaterede teknik $\tau_{64}(-(a + b) = -a - b)$. Positivt og lidt overraskende har en del flere elever styr på τ_{12}, dvs. nulreglen $(a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$.

For Silkeborg Gymnasium er der i testgruppen fra 2016 mindst 5 flere rigtige svar på de delspørgsmål, der er listet i nedenstående tabel 2:

Spg	Opgaven	Teknikker, der giver fejl
1b)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $\frac{x \cdot 9}{3} - x + 10$	τ_{41}, τ_{58}
1c)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $\frac{3}{2x} + \frac{5}{6x}$	$\tau_{34}, \tau_{36}, \tau_{58}$
5b)	Løs ligningerne: $x^3 - 3 = 27$	τ_7, τ_{15}
14a)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $5a + 5b$	τ_{56}
14b)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $2xz + 6xy$	τ_{56}, τ_{57}
14c)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $x - xy$	$\tau_{56}, \tau_{57}, \tau_{61}$
14e)	Omskriv de følgende udtryk ved at sætte alle fælles faktorer udenfor parentes: $ab - ay + az$	τ_{57}
18b)	Reducer følgende udtryk mest muligt: $\frac{x}{2} + 5(x + 3)$	$\tau_3, \tau_{41}, \tau_{58}$ evt. τ_{60}

Tabel 2: De delopgaver og problematiske teknikker som eleverne på Silkeborg Gymnasium klart har forbedret sig i fra 2015 til 2016.

Tabel 2 viser, at mindst 5 flere respondenter i 2016 bruger den distributive lov korrekt til at sætte en faktor udenfor parentes, τ_{56}. Der er tilsvarende mindst 5 flere besvarelser som viser sikkerhed i at arbejde med ligningsudtryk, der rummer brøker, svarende til teknikkerne τ_{34}, τ_{36}, τ_{41}.

På begge gymnasier er der også teknikker, som lidt færre elever bruger korrekt i 2016 end i 2015. Forskellene er her ret små.

Når man ser på elevernes besvarelser, er det også interessant at hæfte sig ved hvilke større grupper af teknikker der særlig volder eleverne besvær.

Forskellige afskygninger af den distributive lov voldte eleverne problemer i 2015, og der er stadig i 2016 en del fejl baseret på denne regel hos dem, der præsterer i den lave ende. Reglen kan bruges til at gange ind i en parentes, til at trække en fælles faktor ud foran parentesen og endelig kan faktoren skrives foran eller bag parentesen. Nedenfor er de fire muligheder listet:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$
$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$
$$ac + bc = (a + b) \cdot c$$

Den første lighed bruger mange korrekt (især fra venstre til højre) men de sidste tre oftere giver problemer. Og kombineres de med en enkelt anden teknik, har endnu flere elever svært ved at løse opgaven.

En anden interessant observation fra begge år vedrører opgave 5, der handler om at løse simple 2. og 3.-grads ligninger. Eleverne løser tredjegradligningerne bedre end andengradsligningen. Af besvarelserne fremgår det, at de fleste ved tredjegradsligningerne har prøvet sig frem med hele tal (τ_{16}) i b) og c), men i a)

forsøger de at løse opgaven algebraisk. Mange glemmer at der er to løsninger ($x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$).
De opgaver, der ellers driller, er dem med teknikker, der relaterer sig til brøkregning, særligt forlæng, sæt på fælles brøkstreg og forkort en brøk er vanskeligt for mange.
Endelig er det bemærkelsesværdigt, at der ikke synes at være bedre resultater i 2016 for så vidt angår de opgaver der vedrører enkel modellering og regning med funktioner: opgave 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 20 og 21.
Et eksempel er opgave 15:

En funktion N er givet ved $N(t) = 3t + 5$. Bestem $N(14)$.

Mange elever springer opgaven over, hvilket kan være fordi de ikke forstår den. De elever, der går i gang med den, men ikke løser den korrekt, starter med at skrive: $14 = 3t + 5$. Det tyder på, at eleverne endnu ikke har en korrekt læsning af notationen $N(t)$. Det ville have været naturligt at komme omkring i de afledte spørgsmål i forløbene om "Barbie Bungee Jump" og "Mal en stjerne" (se undervisningsmaterialerne på Matematikbroens hjemmeside).
Tilsvarende er det kun de færreste elever, der har styr på to-punktsformlerne for lineære funktioner, τ_{85} og τ_{86}:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ og } b = y_1 - a \cdot x_1$$

- altså formlerne for hhv. hældningskoefficienten for grafen for en lineær funktion samt grafens skæring med y-aksen.
Nogle af eleverne havde problemer med at plotte punkter og tegne grafer for lineære funktioner. Her er det interessante ikke, at nogle er udfordret i forhold til disse teknikker, det interessante er, at modelleringsmaterialerne ikke synes at have haft nogen effekt på disse udfordringer, mens der i det mindste er spage tegn på fremskridt i de teknikker der vedrører simplere algebraiske regler.

4. Sammenfattende diskussion

I dette afsnit samles der op på projektet Matematikbroen i den form det er blevet udmøntet, samt hvilke resultater det har givet anledning til.
Det er som altid svært at udtale sig om kausale effekter, men der er alligevel grund til forsigtig glæde over at elevernes testresultater, når vi sammenligner 2015 med 2016, viser forbedring af antallet af rigtige svar på godt 8 procentpoint i Silkeborg og 13 procentpoint i København. Med et større talmateriale kunne man selvfølgelig have set en signifikant forskel også i Silkeborg; at forskellen her er mindre kunne fx skyldes, at resultaterne overordnet set er bedre, og at der erfaringsmæssigt er sværere at forbedre gode resultater. Der kan selvfølgelig også være faktorer i udmøntningen af projektet, som spiller ind, i det omfang projektets indsats har bidraget til de bedre resultater.

Det er uomtvisteligt positivt, at lærerne vurderer Matematikbroen som et tiltag, de ønsker at holde fast i, hvilket tyder på, at projektgruppen har fået designet et for grundskolelærerne brugbart efteruddannelseskoncept. Den uddannelsesmæssige baggrund for projektgruppens gymnasielærere forbereder dem imidlertid ikke til et fagdidaktisk arbejde af denne slags, og de er derfor blevet budt en stejl læringskurve i processen. Tilsvarende var der ingen af

grundskolelærerne eller repræsentanterne fra læreruddannelsen, der til daglig arbejdede med paradigmestærk matematikdidaktik, som ATD må siges at høre til. Projektgruppen har arbejdet hårdt på at få principperne for "teknik-analyse" i spil i de udviklede undervisningsmaterialer samt på at få dem gjort operationelle for de grundskolelærere, der har været på kursus i Matematikbroens regi. Forskning fra udlandet peger på en række vanskeligheder som knytter sig til det at designe efteruddannelseskurser for lærere, der gør dem i stand til at basere deres praksis på ATD, studie- og forskningsforløb samt prakseologibegrebet (Barquero, Bosch & Romo, 2015). Lærerne engagerer sig i a priori analyser og tilegnelsen af nye matematikdidaktiske redskaber, men det repræsenterer en solid udfordring for dem at navigere i de åbne processer, der følger med undervisning baseret på studie- og forskningsforløb. Lærerne har en tendens til at holde fast i vante mønstre for deres undervisning (Barquero et al., 2015, s. 813). Dette blev bekræftet dels i observation og refleksion med lærerne, dels i projektgruppens erfaringer fra kursusdag 3 og den sidste eftermiddag. Endvidere er det ikke tydeligt, i hvilken grad ATD og specielt de teknikker som Matematikbroens undervisningsmaterialer skulle rette sig mod, er medtænkt i de ekstra materialer, der blev produceret til aktiviteterne for grundskolelærerne i foråret 2016. Særligt kan der være udfordringer ved at blande tilgangene til undervisning i matematisk modellering, hvis ikke det ekspliciteres, hvilke forbindelser der er tænkt mellem modelleringscirklen og studie- og forskningsforløb.
Der er altså fortsat god plads til forbedringer og her kan et skarpere fokus på teknikker og refleksion vha. "teknik-analyse" formentlig hjælpe lærerne til at blive endnu skarpere i deres håndtering og analyse af elevernes aktiviteter og læring.

Af projektgruppens og IND-gruppens observationer og erfaringsopsamlinger fremgår det, at et forhold, der udfordrer lærerne i ændring af deres praksis, er de eksisterende rammer for grundskolens matematikundervisning. Som det nævnes af de lærere der blev observeret i København, så findes der nogle relativt faste forventninger til hvad matematikundervisning kan og skal være både i skolesystemet og fra samfundet. Dette repræsenterer en særlig udfordring ift. implementeringen af tiltag som studie- og forskningsforløb (for spanske erfaringer, se (Barquero, Bosch & Gascón, 2013)). Det er dog et forhold, der har været kendt længe som særligt problematisk ift. implementeringen af reformer. Webb (1992) påpeger fx at samfundet generelt er resistente over for større reformer af undervisningen, og i øvrigt ikke mindre ved ændringer af eksamensformerne.

Men ud over de ydre forventninger til matematikundervisningen, der kommer fra skolesystem og samfund, kan man både i samtaler med lærerne og med projektgruppen få indikationer på udfordringer i selve undervisningen. Den ATD-baserede undervisning udfordrer det, der kaldes den didaktiske kontrakt. Dette er et begreb, der er udviklet af Guy Brousseau, der karakteriserer denne som "lærerens (specifikke) vaner, der er forventede af eleverne og elevernes handlinger, der er forventet af læreren" (Brousseau, 1997, s. 225). Altså ligger der både hos eleverne og læreren nogle gensidige forventninger omkring, hvordan en undervisningstime i matematik skal forløbe og ikke mindst, hvilke former for ansvar, der påhviler hhv. læreren og eleverne (se evt. mere i (Winsløw, 2006, kap. 7)). I matematik er der ofte en forventning om, at læreren stiller spørgsmålene, eleverne svarer og læreren validerer svarene. I undervisningsmaterialerne i kompendiet er der i høj grad lagt op til, at eleverne selvstændigt kan validere deres svar gennem matematikken selv. Desuden forventes eleverne selv at stille en del af de spørgsmål, som de skal besvare. Dette kan være genererende for væsentlige læreprocesser i et undersøgelsesorienteret matematikfag, men opleves - når det er nyt - måske også som "generende". Dermed repræsenterer udrulningen af undervisningsmaterialet et brud med den klassiske didaktiske kontrakt, hvilket vil give tilpasningsproblemer for både lærer og elever, og for nogle opleves som frustrerende. At tilpasse sig en ny didaktisk kontrakt kan tage tid, hvorfor det på længere sigt giver mening at efterkomme lærernes ønske om flere materialer, der evt. kan dække hele eller store dele af 9. klasses undervisningen, ledsaget af en grundigere træning i at arbejde med materialerne. Derigennem kan både lærere og elever vænne sig til undervisningsformen, og mere ud af den.

Sammenholdes erfaringerne fra kurserne, lærerevalueringen og undervisningsobservationen, stemmer de overens med testresultaterne, i det omfang de sidstnævnte er signifikante. Lærerne vurderer generelt materialet om tal og algebra som det lettest tilgængelige, det kan inddrages i alle undervisningsmoduler, fx som små 10 minutters opstartsøvelser. Eleverne som testes i 2016, performer bedre i netop de opgaver, der kræver teknikkerne fra materialet om tal og algebra.

Der har været store udfordringer med at få implementeret modelleringsmaterialet, hvilket til en vis grad er konsistent med at de opgaver i den diagnostiske test, der kræver teknikker fra modelleringsmaterialet, ikke besvares bedre i 2015 end i 2016. På en vis måde giver det faktisk nærmest grund til at betragte Matematikbroens initiativer som værd at hold fast i og videreudvikle. Specielt er det klart, at der skal udvikles mere effektiv og omfattende støtte til lærerne i forhold til at nå målene indenfor modellering og lineære sammenhænge.

For at støtte lærerne i implementeringen af den anderledes undervisning, vil det give mening at udvide det lærersamarbejde, der er blevet oparbejdet. Erfaringerne fra aktiviteterne i foråret peger på, at lærerne efterspørger flere ressourcer til praksisudvikling i de lærerfælleskaber, som de har opbygget gennem Matematikbroen, gerne med inddragelse af hele deres faggruppe på skolerne. Praksisfællesskabernes arbejde kunne oplagt styrkes med en ressourceperson, der kan støtte lærerne i arbejdet med "teknik-analyser" og den videre udvikling af undervisningsmaterialer og lektionsplaner – i stil med de lektionsstudie-projekter, der er i gang andre steder.
De generelt bedre resultater fra Gefion Gymnasium i testen kan have forskellige årsager. Vi har allerede nævnt at denne gruppe elever ift. resultater fra folkeskolen havde et svagere udgangspunkt end eleverne på Silkeborg Gymnasium i 2015. Det skal også nævnes, at der blev rapporteret om en større åbenhed hos grundskolelærerne i København. Årsagen til dette mener projektgruppen kan ligge i, at de i Silkeborg fik lavet en start på kursusdagene,

som primært blev styret af gymnasielærerne. Det kan have signaleret til grundskolelærerne, at gymnasielærerne mente, at overgangsudfordringerne var grundskolens problem – som gymnasiet kunne ”ordne”. Der blev forsøgt taget hånd om dette løbende i resten af projektforløbet. En anden (modsatrettet?) årsag kan være, at der -som nogle Silkeborg-lærere pegede på, allerede var et netværk med gymnasiet, hvorfor Matematikbroen ikke i samme grad skabte en ny mulighed hos dem (Netværk for matematiklærere i Silkeborgområdet). Endelig skete der det uheldige, at en stor del af lærerne i Silkeborg forlod anden kursusdag inden de blev præsenteret for modellen for lærersparringen og den professionelle udvikling inspireret af lektionsstudier. Det har måske medvirket til, at observation og refleksion over den afholdte undervisning ikke blev prioriteret lige så højt i Silkeborg.

5. Referencer

De hjemmesider vi linker til i listen, er siderne som de var tilgængelige pr.1. december 2016.

Bahn, J. F. (2015). Undersøgelsesbaseret matematikundervisning og lektionsstudier. Ph.d.-projekt, Københavns Universitet. http://www.ind.ku.dk/projekter/undersoegelsesbaseret-matematikundervisning-og-lektionsstudier/

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. In *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 235-268). Springer US.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascon, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques 33*(3), 307-338.

Barquero, B., Bosch, M., Romo, A. (2015) A study and research path on mathematical modelling for teacher education. I K. Krainer & N.Vondrová (Eds.). Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. pp.809-815. https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWG06/hal-01287246v1

Bosch, M. & Winsløw, C. (2015). Linking Problem Solving and Learning Contents: The Challenges of Self-Sustained Study and Research Processes. *Recherces en Didactique des Mathématiques, 35*(2), 357-399.

Braad, K. B. (2008). *Er teori praksis?: en historisk undersøgelse af teori, praksis og praktik i læreruddannelsen, med særlige nedslag i læreruddannelserne fra 1894 og 1966*. Ph.d.-afhandling, København: Danmarks Pædagogiske Universitets Forlag.

Brekke, (1996) *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Nasjonalt lærermiddelsenter.

Brix, A. (2015). Number tricks as a didactical tool for teaching elementary algebra. Specialerapport: København, Københavns Universitet. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie41/Thesis.Asger.Brix.pdf

Brousseau, G. (1997). The Didactic Contract: The Teacher, The student and the Milieu. In N. Blacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of didactical situations in mathematics* (pp. 226-249). Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves.* Ph.d.-afhandling, Grenoble: Université de Grenoble. Chevallard, Y. (1999).

L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* s. 21-30.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.) *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 173-187. Springer International Publishing.

Christensen, B. K. (2012). Brobygning i Silkeborg. *LMFK-Bladet*, 1, s. 4-9.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2012). *Gyldendals Gymnasiematematik, Grundbog B2*. Copenhagen: Gyldendal.

Ebbensgaard, A. H. B., Jacobsen, J. C., & Ulriksen, L. (2014). *Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk*. IND's Skriftserie; Nr. 37, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet, http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2014-37/

García, F. J. G., & Higueras, L. R. (2005). Mathematical ologies of increasing complexity: variation systems modelling in secondary education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1645-1654).

Hansen, B. (2009). *Didaktik på tværs af matematik og historie: en prakseologisk undersøgelse af de gymnasiale studieretningsprojekter*. Specialerapport, Københavns Universitet, Institut for Naturfagenes Didaktik. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie10/

Henriksen, A. (1999). *Pattern analysis as an entrance to algebraic proof situations at C-level.* Specialerapport, Københavns Universitet, Institut for Naturfagenes Didaktik. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie48/

Isoda et al. : Japanese Lesson Study in Mathematics (2007)

Jessen, B. E. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 19, 199-224.

Jessen, B. E., Holm, C., & Winsløw, C. (2015). Matematikudredningen. IND's Skriftserie; Nr. 42, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet, http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2015-42/Matematikudredningen-web.pdf

Lauritsen, H. (2015). Åben lektion inviterer til videndeling i matematik. *Folkeskolen*. http://www.folkeskolen.dk/575682/aaben-lektion-inviterer-til-videndeling-i-matematik

Mathiasen, H., Hansen, G., & Kjær, A. (1998). *Den elektroniske skole*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet

Mathiasen, H. (2009). *Overgangsproblemer som udfordring i uddannelsessystemet*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet.

Lindenskov, L., Enggaard, K., Andersen, A. M., & Sørensen, H. (2009). Case 2: Progression i matematik og naturvidenskab fra grundskole til stx – hvordan kan det blive helt forkert i gymnasiet at bruge det, man har lært? I Mathiasen, H. (Ed.) *Overgangsproblemer som udfordring i uddannelsessystemet*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet.

Matematikbroen – projektets hjemmeside, her kan de forskellige undervisningsmaterialer findes: http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med-grundskolen/matematikbroen/

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education 16*, 185-209.

Netværket af matematiklærere i Silkeborgområdet (Matbid-projektet): http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med-grundskolen/matematiklaerer-netvaerk/

Poulsen, C. S. (2015). *Basic algebra in the transition from lower secondary school to high school*. Specialerapport, København: Københavns Universitet. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie44/CP-Speciale.pdf

Rasmussen, K. (2016a). ologies and Institutional Interactions in the Advanced Science Teacher Education. Ph.d.-afhandling, København: Københavns Universitet. http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/44/44-Klaus_Rasmussen.pdf

Rasmussen, K. (2016b). The direction and autonomy of interdisciplinary study and research paths in teacher education. *Journal of Research in Mathematics Education*, 5(2), 158-179.

Serrano, L., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. and Arzarello, F. (Eds.) *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2-185).

Silkeborg Gymnasium, (u.å.). *Brobygningsopgaver – Opgavesamling primært til brug i første del af gymnasieforløbet*. http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med-grundskolen/matematiklaerer-netvaerk/til-laerere/brobygningsopgaver/

Stampe, S. B., Nielsen, H. V., & Hjorth, M. S. (2012). Læsning af matematikfagtekster i gymnasiet-Identificering af gymnasiefremmede elevers læsevanskeligheder og udvikling af metoder til forbedring af læsestrategier. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (1).

Sultan, A., & Artzt, A. F. (2010). *The mathematics that every secondary math teacher needs to know*. Routledge.

Webb, N. L. (1992). Assessment of students' knowledge of mathematics: Steps toward a theory. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 661-683.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske Elementer – En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Frederiksberg: Forlaget Biofolia.

Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics* 83 (2), 267-284.

Winsløw, C. (2013) Fagdidaktik som faglig designvidenskab. I Damberg, E., Dolin, J., Ingerslev, G.H. (Eds.) *Gymnasiepædagogik*, 2. udg. s. 257-266. København: Hans Reitzels Forlag

Østergaard, K. (2016). Teori-praksis-problematikken i matematiklæreruddannelsen. Ph.d.-afhandling, Roskilde: Roskilde Universitet. https://rucforsk.ruc.dk/ws/files/57258425/Teori_praksis_problematikken_i_matematikl_reruddannelse_Kaj_stergaard_Phd_afhandling_RUC.pdf

Bilag A.: Prakseologisk referencemodel (Poulsen, 2015, pp. 64-66).

Categorization	Techniques	FSA	ST	stx
Laws	τ_1: Associative law for multiplication	X	X	X
	τ_2: Commutative law for multiplication	X	X	X
	τ_3: Distributive law $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	X	X	X
Hierarchy	τ_4: $\cdot$ and : before $+$ and $-$	X	X	X
	τ_5: Roots and powers before $+, -, \cdot, :$	X	X	X
	τ_6: Brackets before all other arithmetic operations	X	X	X
Equation solving	τ_7: $+, -, \cdot, :$ on both sides of the equality sign	X	X	X
	τ_8: Multiply crosswise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$			X
	τ_9: Set two expressions equal to each other	X		X
	τ_{10}: Subtract two equations from each other	X		X
	τ_{11}: Substitution of algebraic expression	X		X
	τ_{12}: Zero-divisor law $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$			X
	τ_{13}: Take logarithm on both sides of $=$			X
	τ_{14}: Multiply crosswise reverse $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$			X
	τ_{15}: $x^n = c \Rightarrow x = \sqrt[n]{c},\ n \in \mathbb{R}$	X		X
Guess	τ_{16}: Try different values for the unknowns in equations	X	X	X
	τ_{17}: Guess at different factorizations		X	X
Substitute	τ_{18}: Substitute number	X	X	X
Graphic	τ_{19}: Draw straight line in coordinate system	X	X	X
	τ_{20}: Read x-value for given y-value	X	X	X
	τ_{21}: Determine intersection between lines	X	X	X
	τ_{22}: Read y-value for given x-value		X	X
	τ_{23}: Plot and connect points to a straight line	X	X	X
	τ_{24}: Read Δy			X
	τ_{25}: Draw line through point			X
	τ_{26}: Draw best straight line			X
	τ_{27}: Intersection with the y-axis	X	X	X
	τ_{28}: Slope of a straight line	X	X	X
	τ_{29}: Intersection with the x-axis			X
	τ_{30}: Coordinates on line	X	X	X
	τ_{31}: Min/max in endpoints			X
	τ_{32}: If a point is on a straight line			X
	τ_{33}: If 3 points is on the same straight line			X

Categorization	Techniques	FSA	ST	stx
Fractions	τ_{34}: Addition $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	X		X
	τ_{35}: Subtraction $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$	X		X
	τ_{36}: Extend $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$	X	X	X
	τ_{37}: Shorten	X	X	X
	τ_{38}: Multiplication $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$	X	X	X
	τ_{39}: Multiplication $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	X		X
	τ_{40}: Multiplication $\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$	X	X	X
	τ_{41}: Multiplication $\frac{ab}{c}=a\cdot\frac{b}{c}$	X		
	τ_{42}: Addition/subtraction $\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$	X		X
	τ_{43}: Division $a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$			X
	τ_{44}: Division $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$			X
	τ_{45}: Division $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$			X
Exponents	τ_{46}: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$		X	X
	τ_{47}: $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$		X	X
	τ_{48}: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$		X	X
	τ_{49}: $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$			X
	τ_{50}: $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$		X	X
	τ_{51}: $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$			X
	τ_{52}: $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$			X
Signs	τ_{53}: $(-)\cdot(+)=(-)$, $(+)\cdot(-)=(-)$, $\frac{(-)}{(+)}=(-)$, $\frac{(+)}{(-)}=(-)$	X	X	X
	τ_{54}: $(-)\cdot(-)=(+)$, $-(-a)=a$, $\frac{(-)}{(-)}=(+)$	X	X	X
	τ_{55}: $(-)\cdot(+)=(+)\cdot(-)$			X
Factorize	τ_{56}: $ab+ac=a(b+c)$	X	X	X
	τ_{57}: Resolve number into factors		X	X
Simplify	τ_{58}: Collect and reduce like terms	X	X	X
	τ_{59}: Cancel common factors	(X)	X	X
Rewrite	τ_{60}: Number to fraction $a=\frac{ab}{b}$	X		X
	τ_{61}: $x=1\cdot x$		X	X
	τ_{62}: $\frac{a}{c}=\frac{1}{c}\cdot a$	X		X
	τ_{63}: $a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$			X
Brackets	τ_{64}: Remove negative bracket $-(a+b)=-a-b$	X	X	X
	τ_{65}: Multiply 2 brackets $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	X	X	X
	τ_{66}: Remove bracket in bracket			X
Squares	τ_{67}: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$			X
	τ_{68}: $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$	X		
	τ_{69}: $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$		X	X
	τ_{70}: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$			X

Categorization	Techniques	FSA	ST	stx
Rules for logarithm	τ_{71}: $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$			X
	τ_{72}: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$			X
	τ_{73}: $\log(a) - \log(b) = \log(\frac{a}{b})$			X
Reading	τ_{74}: a and b from $y = ax + b$	X	X	X
	τ_{75}: b as initial value		X	X
	τ_{76}: y-value for $x = 0$ in table	X		
Size factor	τ_{77}: Determine the size factor			X
Sketch	τ_{78}: Draw a sketch			X
'Proportions calculations'	τ_{79}: Proportionality between quantities			X
Standard formulas	τ_{80}: Use formulas for area, circumference, volume, surface, speed, average, Pythagoras	X		X
Figure	τ_{81}: Divide figure into squares, rectangles, and triangles	X		
	τ_{82}: Count sides on the figure	X		
Rules for square roots	τ_{83}: $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	X		X
	τ_{84}: $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$			X
Formulas for line equation	τ_{85}: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	X	X	X
	τ_{86}: $b = y_1 - a \cdot x_1$	X	X	X
	τ_{87}: $y_2 = y_1 + a \cdot \Delta x$, $x_2 = x_1 + \frac{\Delta y}{a}$, $\Delta y = a \cdot \Delta x$			X
Compare	τ_{88}: Compare values for slopes			X
Missing brackets	τ_{89}: Discover missing brackets	X		