INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse

Hasan Ademovski og Hatice Ademovski

Specialerapport

November 2009

IND's studenterserie nr. 14

Alle publikationer fra Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) er tilgængelige via hjemmesiden www.ind.ku.dk.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)

Abstract

Behovet for at ræsonnere proportionelt opstår og benyttes ofte i undervisningssammenhænge, men også uden for skolen, f.eks. i dagligdagen og arbejdslivet. Specielt er det at kunne ræsonnere proportionelt en central del af grundskolens matematik, idet det er grundlaget for f.eks. store dele af problemløsningen i algebra og geometri. Proportionalitet kan på skolens mellemtrin være et begreb, der forbinder og forener mange vigtige og komplekse matematiske emner. Samtidig med at proportionalitet er en vigtig del af matematikundervisningen, volder det eleverne vanskeligheder, hvilket mange undersøgelser har vist. Dette understøtter vores motivation for at vælge proportionalitet som emne til at designe et undervisningsforløb om.

Vi har med dette speciale tilrettelagt et to ugers undervisningsforløb, svarende til 8 lektioner, i en 6. klasse, hvor vi fokuserede på emnet proportionalitet. Specialets teoretiske del består af en stofdidaktisk analyse af det skolematematiske felt "proportionalitet" med udgangspunkt i udvalgte dele af den matematikdidaktiske litteratur herom. På basis heraf blev et undervisningsforløb designet inden for rammerne af teorien om didaktiske situationer (TDS).

I specialets empiriske del fik vi gennemført undervisningen af en matematiklærer, og vi har analyseret forløbet vha. TDS i forhold til elevernes strategier, udvikling af viden og didaktiske kontrakter på mikro -, meso - og makroniveau. Analysen er baseret på videooptagelse fra forløbet, vore egne notater samt de indsamlede kladdehæfter og opgaveark.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.

Resume

Behovet for at ræsonnere proportionelt opstår og benyttes ofte i undervisningssammenhænge, men også uden for skolen, f.eks. i dagligdagen og arbejdslivet. Specielt er det at kunne ræsonnere proportionelt en central del af grundskolens matematik, idet det er grundlaget for f.eks. store dele af problemløsningen i algebra og geometri. Proportionalitet kan på skolens mellemtrin være et begreb, der forbinder og forener mange vigtige og komplekse matematiske emner. Samtidig med at proportionalitet er en vigtig del af matematikundervisningen, volder det eleverne vanskeligheder, hvilket mange undersøgelser har vist. Dette understøtter vores motivation for at vælge proportionalitet som emne til at designe et undervisningsforløb om.

Vi har med dette speciale tilrettelagt et to ugers undervisningsforløb, svarende til 8 lektioner, i en 6. klasse, hvor vi fokuserede på emnet proportionalitet. Specialets teoretiske del består af en stofdidaktisk analyse af det skolematematiske felt "proportionalitet" med udgangspunkt i udvalgte dele af den matematikdidaktiske litteratur herom. På basis heraf blev et undervisningsforløb designet inden for rammerne af teorien om didaktiske situationer (TDS).

I specialets empiriske del fik vi gennemført undervisningen af en matematiklærer, og vi har analyseret forløbet vha. TDS i forhold til elevernes strategier, udvikling af viden og didaktiske kontrakter på mikro- meso- og makroniveau. Analysen er baseret på videooptagelse fra forløbet, vore egne notater samt de indsamlede kladdehæfter og opgaveark.

Abstract

The need to reason proportionally occurs and is often used in teaching contexts, but also outside school, in everyday life and work. To be able to reason proportionally is a central part of mathematics, because it is the basis for e.g. large parts of problem-solving in algebra and geometry. Proportionality can be, in primary schools, a concept that links and unites many important and complex mathematical topics. While proportionality is an important part of

mathematics teaching, the students would experience difficulties, as many studies have shown. This supports our motivation for choosing proportionality as issue to design a course.

With this thesis we organized a two-week course, equivalent to 8 lessons, in a 6^{th} grade, where we focused on the issue of proportionality. The theoretical part of the thesis consists of a didactic analysis of school mathematics field "proportionality" based on selected parts of the mathematics teaching literature. On this basis, we designed a course within the framework of the theory of didactical situations (TDS).

In the empirical part of the thesis, we implemented the teaching lessons by a math teacher. We have analyzed the course using TDS to evaluate the students' strategies, knowledge development and didactic contracts at the micro- meso- and macrolevel. The analyze is based on the video recording of the lessons, our own notes and the collected notebooks and worksheets.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning

Den teoretiske del

Behovet for at ræsonnere proportionelt opstår både i undervisningssammenhænge og uden for skolen herunder i dagligdagen og arbejdslivet. I undervisningen er proportionalitet ikke kun vigtigt i matematik, men også i andre fag, f.eks. i forbindelse med temperaturmålinger, økonomiske variable, kemiske sammensætninger, statiske analyser mv. I kemi er proportionelt ræsonnement vigtig for at balancere kemiske ligninger. Også i hverdagen er proportionalitet af stor betydning, f.eks. når man skal handle, og skal vurdere, hvad der er billigst i forhold til mængden. Typisk har man også brug for at ræsonnere proportionelt, når man skal i gang med en bageopskrift, som har en vis angivelse af mængden af hver ingrediens (f.eks. ¾ kop sukker, 2 ½ kop mel), og man vil opretholde disse proportioner, når man skal bruge en større eller mindre kage, f.eks. fordoble eller halvere mængden. Der er mange andre sammenhænge, hvor proportionalitet indgår i dagligdagen, og derfor er det vigtigt, at man kan ræsonnere proportionelt.

Hovedmotivationen i dette speciale drejer sig dog om, at det at kunne ræsonnere proportionelt er en central del af skolens matematik, idet det er grundlaget for f.eks. store dele af problemløsningen i algebra og geometri. Proportionalitet kan på skolens mellemtrin være et begreb, der forbinder og forener mange vigtige og komplekse matematiske emner. Proportionalitet som tema kan eksempelvis indgå i emner som decimaltal, rationale tal, procent, brøk, ligedannede figurer mm. I grundskolen lærer man faktisk om proportionalitet allerede i de mindste klasser. Når man lærer at gange og dividere, bliver man nemlig straks udsat for simple proportionalitetsopgaver, som fører til multiplikation, såsom: *"1 pakke vaskepulver koster 24 kr. Hvor meget koster 3 pakker?* (Sigma for tredje, 2006, s.25). Senere bliver opgaverne mere avancerede. Proportionalitet er et vigtigt emne i hele grundskolens matematik, jf. undervisningsministeriets læreplaner. Netop af denne grund har vi valgt dette emne, idet vi har designet et undervisningsforløb om det til brug i en 6. klasse.

Vores formål med specialet er ikke at lære eleverne i den valgte 6. klasse alle de strategier, som man benytter for at løse proportionalitetsopgaver, det er nemlig en langsom og krævende proces at beherske emnet i sin helhed. Vores formål er snarere at afprøve vores designede undervisningsforløb og vurdere samt analysere, hvorvidt dette design har hjulpet eleverne med at ræsonnere proportionelt, og samtidig beskrive elevernes faktiske strategier og ræsonnementer. Undervejs vil vi anvende didaktiske metoder (fra TDS, *teorien om didaktiske situationer*) til at analysere interaktionen mellem lærer og elever i lektionerne og vores stofdidaktiske oversigt til at analysere elevernes strategier.

Eleverne i den klasse vi skal have med at gøre, har tidligere haft om proportionalitet i mere basal form (jf. lærebøger for 4. og 5. klasse), og grunden til at vi har valgt netop en 6. klasse er bl.a., at proportionel tankegang især udvikles hos elever gennem 5.-8. klasse (Ben-Chaim et al. s.249).

Samtidig med at proportionalitet er en vigtig del af matematikundervisningen, volder det eleverne vanskeligheder, hvilket mange undersøgelser har vist. Dette understøtter vores motivation for at vælge proportionalitet som emne til at designe et undervisningsforløb for eleverne. For at kunne designe vores forløb, har vi brug for at vide mere om proportionalitet som stofdidaktisk fænomen. Altså at undersøge bl.a. hvilke overordnede definitioner der findes af proportionalitet, hvilke vanskeligheder der typisk opstår i forbindelse med opgaveløsninger, hvilke strategier elever benytter sig af, hvilke typer opgaver med relation til proportionalitet der findes osv. Vi sammenfatter svarene på disse spørgsmål om proportionalitet som et stofdidaktisk fænomen i afsnit 3.

Inden dette skal vi undersøge den historiske baggrund for emnet proportionalitet, som af en række grunde er relevant, når man giver sig ud i at designe et undervisningsforløb om dette emne. Vi kan nemlig i den historiske kontekst undersøge de første definitioner af proportionalitet samt nogle fundamentale sætninger herom (dette gennemgås i afsnit 2).

Samtidig har vi brug for at undersøge de lærebøger klassen benytter eller har benyttet, for at afklare elevernes baggrund inden for emnet. Dette har en vigtig betydning for designet af forløbet, idet vi skal arrangere situationer med en passende sværhedsgrad. Foruden om at undersøge lærebøgerne, er det også vigtigt at undersøge undervisningsministeriets læreplaner for 6. klassetrin. Vi vil nemlig ved at undersøge dette få information omkring, hvor meget eleverne i 6. klassetrin skal lære om proportionalitet og i hvilken form. Lærebøgerne og læreplanerne beskrives i afsnit 4.

Foruden at benytte den stofdidaktiske viden om proportionalitet, skal vi benytte teorien om didaktiske situationer (TDS) både til at designe vores undervisningsforløb med og til at analysere forløbet. Vi skal især have fokus på den *didaktiske kontrakt* i analysen af forløbet. Derfor vil vi kort beskrive TDS herunder den didaktiske kontrakt i afsnit 5.

Vi vil benytte metodologien *didaktisk ingeniørarbejde* til vores undervisningsforløb, idet vores teori vil være baseret på TDS. Didaktisk ingeniørarbejde betegner en forskningsbaseret systematisering af det arbejde, der er involveret i forberedelsen af undervisning. Derfor er det hensigtsmæssigt at omtale denne systematisering inden *a priori* analysen præsenteres. Det didaktiske ingeniørarbejde behandles i afsnit 6.

Vores *a priori* analyse af undervisningsforløbet bygger naturligvis på selve designet af forløbet. Forløbet er designet på baggrund af de foregående teoriafsnit. Afsnittet med *a priori* analysen er delt op således, at vi vil beskrive hver af de 8 lektioner for sig, hvor lektion 3 og 4 samt lektion 7 og 8 er sat sammen. 1. lektion har overskriften *"Samme form"*, 2. lektion *"Papirtykkelse*", 3. & 4. lektion *"Puslespil"*, 5. lektion *"Jættens øre"*, 6. lektion *"Hestemaleriet"* og 7. & 8. lektion har overskriften *"Blandede opgaver".* De sidste to lektioner er tænkt som en slags evaluering af elevernes kompetencer, med henblik på at kunne vurdere, hvorvidt forløbet har hjulpet eleverne med at ræsonnere proportionelt.

Den empiriske del

Den anden del af specialet består af en beskrivelse af det faktisk gennemførte undervisningsforløb samt en *a posteriori* analyse af dette. I analysen vil vi specielt rette vores fokus mod den didaktiske kontrakt, der som begreb defineres nærmere i afsnit 5.6. Vi vil samtidig analysere, hvordan undervisningssituationerne forløber i praksis i forhold til vores *a priori* analyse. Inden dette skal vi kort beskrive vores metodologi samt metode, hvilket gøres i afsnit 8. Dernæst vil der komme en systematisk analyse af de enkelte lektioner, hvor den didaktiske kontrakt analyseres med betragtning af kontraktens forskellige niveauer og dimensioner. Denne præsenteres i afsnit 9.

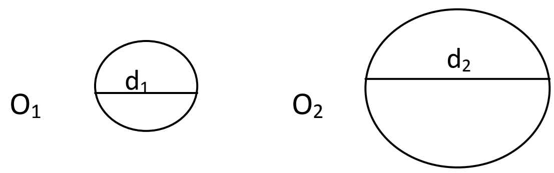
Afprøvningen af undervisningsforløbet fandt sted på Furesø Privatskole, en privat grundskole, hvor der næsten udelukkende er elever med anden etnisk baggrund. Der havde vi aftalt med en af skolens matematiklærere, som underviste i 6. klassetrin, at han skulle undervise efter vores design, hvor en af os to skulle fungere som kameramand og den anden som feltobservatør.

Klassen, som vi afprøvede undervisningsforløbet i, bestod af 20 elever, hvis niveau var meget forskelligt ifølge matematiklæreren, som vi har haft samtaler med før og efter forløbet. Det var en udfordring at afdække, hvorvidt designet stemte overens med, hvad det der i praksis skete. Omfangsmæssigt fik vi tildelt to ugers matematikundervisning, hvilket svarer til 8 lektioner á 45 minutter.

Specialet har vi valgt at skrive som et gruppespeciale, idet vi både ville fordybe os i den teoretiske og empiriske analyse af designet, hvilket også viste sig at være et stort stykke arbejde. Det har også været en fordel at samarbejde omkring selve undervisningsforløbet, både vedrørende designet og i indsamlingen af data. Specialet og det bagvedliggende design og datamateriale er udarbejdet i tæt samarbejde mellem os. Af hensyn til nødvendigheden af individuel bedømmelse har vi dog delt skrivearbejdet sådan, at Hatice har ansvaret for afsnit 2-4 samt afsnit 6-8, mens Hasan har ansvaret for afsnit 5 og 9-10. Vi har begge ansvaret for indledning, konklusion samt appendiks.

2 Historisk baggrund

Vi vil nu undersøge de første definitioner og anvendelser af forhold og proportionalitet i matematikkens historie. Allerede i antikken beregnede matematikerne forhold. Et meget kendt matematisk forhold som stammer fra den tid, er forholdet mellem omkredsen af en cirkel og cirklens diameter. Dette konstante forhold betegner vi i dag π . Grækerne vidste, at alle cirkler er ligedannede. Ved at betegne omkredsen af to cirkler henholdsvis O_1 og O_2 og deres diameter henholdsvis d_1 og d_2, vil denne ligedannethed udtrykke proportionaliteten, som vi kan skrive op som: $\frac{O_1}{O_2} = \frac{d_1}{d_2}$.



Figur 1

Brugen af proportionalitet kan føres tilbage til ca. 500 f.v.t., hvor matematikeren Thales brugte proportionalitet til at finde højden af en pyramide. Det han viste var, at forholdet mellem pyramidens højde og en arbejders højde var det samme som forholdet mellem deres skygger, grundet de to ligedannede trekanter, som fremkommer. Vi kan finde Thales' sætning i Euklids Elementer, som vi skal kigge nærmere på i det følgende.

Vi kan nemlig finde den første behandling af proportionalitet i historien i Euklids Elementer. Vi vil i det følgende undersøge Euklids definitioner, sætninger og beviser nærmere, da disse er grundlæggende for emnet proportionalitet. Vi møder ordet proportionalitet første gang i Euklids bog 5, hvor der forekommer en definition. Euklid benytter i sin definition af proportionalitet størrelser i stedet for tal. Før vi gengiver denne definition, vil vi forklare grunden til, at der bliver benyttet størrelser og ikke tal i definitionen.

2.1 Pythagoræerne

Det er pythagoræerne, der har udviklet den første teori om forhold. Deres teori om forhold siger, at forhold mellem størrelser er udtrykt ved forhold mellem tal. Da tal var begrænset til hele tal dengang, kunne denne teori ikke udføres på størrelser generelt, hvilket var intentionen (Sutherland, 2006, s. 536). Pythagoræerne betragtede nemlig tal som grundlaget for alt i universet, og derfor mente de, at alt var tælleligt, også længder. For at ”tælle” en længde har man brug for en enhed, og ifølge pythagoræerne var det altid muligt at finde sådan en enhed. De antog derfor også, at det var muligt at finde en enhed, som man kunne ”tælle” både sidelængden og diagonalen af et kvadrat med. Men sidelængden og diagonalen er inkommensurable i et kvadrat, hvor sidelængden er 1 og diagonalen så har længden kvadratrod 2, hvilket i dag bliver kaldt for et irrationalt tal, da det ikke kan skrives som en brøk. Tallene 1 og kvadratrod 2 er inkommensurable, idet der ikke findes en enhed, der kan måle begge. Pythagoræerne opgav derfor deres teori om, at grundlaget for alt er tal (Katz, 2004, s.32-33).

2.2 Euklids definition af proportionalitet

På grund af denne begrænsning har Euklid defineret proportionalitet ved at benytte størrelser og ikke tal. Hans definition lyder (definition 5 bog 5):

"Størrelser siges at være i samme forhold: den første til den anden som den tredje til den fjerde, når samme, men vilkårlige mangefold af den første og tredje enten begge to hver for sig er større end, eller begge to hver for sig er lig med, eller begge to hver for sig er mindre end henholdsvis samme, men vilkårlige mangefold af den anden og fjerde" (Euklid, 1904).

Vi kan se, at der ikke indgår tal til at udtrykke forhold i Euklids definition, og den kan derfor benyttes til inkommensurable størrelser (Sutherland, 2006, s. 537). Med moderne notation kan man skrive definitionen op ved, at de to forhold a:b og c:d er proportionale, hvis der for ethvert naturligt tal m, n gælder:

når ma = nc så er mb = nd,

når ma > nc så er mb > nd

når ma < nc så er mb < nd.

Da det er geometriske størrelser, som Euklid benytter, bliver han nødt til at skrive det op som ovenstående, og af denne grund benytter han ikke brøker. For man kunne have skrevet at de to forhold a:b og c:d er proportionale, når: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Men ovenstående skrivemåde svarer til:

$$\frac{a}{c} > \frac{n}{m} \to \frac{b}{d} > \frac{n}{m}$$

$$\frac{a}{c} < \frac{n}{m} \to \frac{b}{d} < \frac{n}{m}$$

Hvilket medfører:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Udover denne definition, lyder definition 6 i samme bog:

"Lad størrelser, som har samme forhold, blive kaldt proportionale" (Joyce, 1996).

Med denne definition kan vi se, at det der bliver beskrevet i definition 5, er proportionalitet. Yderligere bemærker vi, at Euklids definition af proportionalitet hviler på sammensætningen af størrelser og størrelsesrelationerne "lig med", "større end" eller "mindre end". Hans definition af proportionalitet kan indskrænkes, idet når en størrelse er "større end" en anden størrelse, kan det udtrykkes som, at den anden størrelse er "lig med en del af" den første størrelse. På samme måde kan "mindre end" udtrykkes.

2.3 Euklids definition af forhold

Vi vil nu se, hvordan Euklid har defineret et *forhold*. Et forhold defineres i definition 3 som:

"Et forhold er en slags relation med hensyn til størrelse mellem to størrelser af samme art"

(Joyce, 1996).

Euklids definition af forhold ligner den, som vi kender i dag. Det skal dog påpeges, at det er lidt farligt at kalde ovenstående en definition, idet Euklid beskriver det som *"en slags relation…"*. Euklid kræver yderligere, at størrelserne er af samme art. Han bruger betegnelsen *"af samme art"* i sin definition af forhold, hvormed han betegner de ting, som er i stand til at stå i forhold til hinanden. Han tænker formentlig på størrelser som linjer, arealer og tal (Sutherland, 2006, s.537). To linjer eller to arealer kan stå i forhold til hinanden, lige så vel som to tal kan stå i forhold til hinanden udtrykt ved en brøk. Men andre størrelser som vinkler eller vægt kan han også have tænkt på som størrelser. Det vil sige linjer er af samme art med andre linjer, arealer med andre arealer og tal med andre tal. Ud fra hans definition af forhold kan man sige, at da linjer f.eks. ikke er af samme art som arealer, kan de ikke stå i forhold til hinanden. Ej heller kan arealet af en cirkel stå i forhold til længden af radius.

2.4 Definitioner fra Euklids bog 6

Selvom de forskellige egenskaber af proportionelle størrelser bliver beskrevet i bog 5, er det hovedsageligt i bog 6, at Euklid behandler teorien i form af forskellige sætninger, der omhandler ligedannethed. Grundlaget for idéen om ligedannethed kommer nemlig fra proportionalitet, idet proportionalitet indgår i definitionen af ligedannethed:

"Ligedannede retlinjede figurer har ens vinkler, og siderne omkring de lige store vinkler er proportionale." (Joyce, definition 1 bog 6, 1996).

Denne definition indeholder to dele. For det første at vinklerne skal være ens, det vil sige der skal være det samme antal vinkler, og de skal stå i rækkefølge således, at de vinkler der har samme orden, skal være ens. For det andet skal siderne mellem vinkler med samme orden være proportionelle.

Bog 6 indeholder som omtalt mange resultater om ligedannethed, f.eks. lyder proposition 1 i bog 6:

"Trekanter og parallelogrammer som er lige høje, står i forhold til hinanden som deres grundlinjer"

(Joyce, 1996)

Man kan udtrykke dette mere moderne ved at sige, at forholdet mellem to trekanters arealer, betegnet med henholdsvis A_1 og A_2 med samme højde er lig med forholdet mellem deres grundlinjer g_1 og g_2. Dette kan skrives som: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{g_1}{g_2}$.

Der indgår også cirkler i Euklids Elementer, men da grækerne kun havde med hele tal at gøre, kan vi ikke i Euklids Elementer se, at f.eks. arealet af en cirkel med radius r er $\pi \cdot r^2$. I stedet for skriver Euklid f.eks. i bog 12:

"Cirkler står i forhold til hinanden som deres diameter i anden"

(Joyce, proposition 2 bog 12, 1996)

Dette kan udtrykkes som: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$.

Det indebærer altså indirekte, at der er en konstant k. Idet $A = k \cdot d^2$, (da $\frac{A}{d^2}$ er en konstant).

2.5 Sætninger fra Euklids bog 6

Vi har nu beskrevet nogle af Euklids definitioner, som er relevante at fremhæve i betragtning af emnet i vores speciale. Nu vil vi se nærmere på nogle af Euklids sætninger, idet vi kan se, at proportionalitet forekommer i geometriske sætninger, og at denne bliver udtrykt som ligedannethed.

2.5.1 Sætning 2

Sætning 2 i bog 6 drejer sig om proportionelle længder i en trekant. Den siger, at hvis en linje inde i trekanten er parallel med en af trekantens sider, vil denne linje skære de to andre sider proportionelt. Det omvendte gælder også. Mere præcist lyder sætningen:

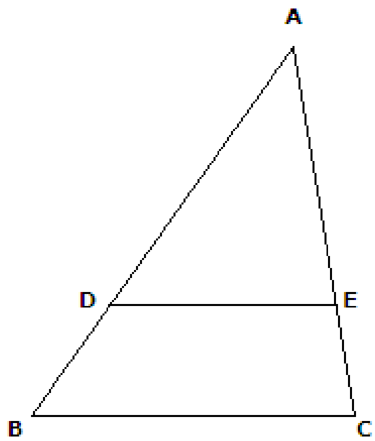
"Hvis en ret linje er trukket parallelt med en af siderne af en trekant, da skærer linjen trekants sider proportionelt, og hvis trekantens sider skæres proportionelt, da er linjestykket mellem de to skæringspunkter parallel med den resterende side af trekanten"(Joyce, 1996).

Sætningen er altså todelt. Først beviser Euklid den første del, hvorefter anden del vises som det omvendte af første del. Vi vil nu beskrive beviset for denne sætning.

Bevis:

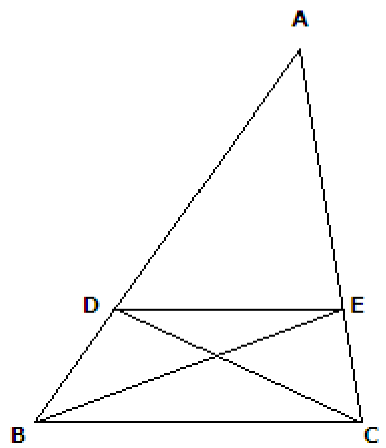
Hvis man kalder trekanten ABC og lader en linje DE inde i trekanten være parallel med siden BC, kan man altså ifølge sætningen sige, at DE skærer siderne AB og AC proportionelt. Det kan skrives således:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} \text{ hvis } DE \,||\, BC$$



Figur 2

Ved at tegne linjerne BE og CD, fremkommer tre nye trekanter: Trekant BDE, trekant CDE og trekant ADE.



Figur 3

Trekanter, som har samme grundlinje og samme højde, har samme areal. Dette benyttes i dette bevis. For trekanterne BDE og CDE har nemlig samme grundlinje DE og samme højde, og derfor har de samme areal.

Idet trekant BDE og trekant ADE har samme højde, vil trekanternes grundlinjers forhold være til hinanden som forholdet mellem trekanternes areal. Altså forholdet mellem AD og DB er det samme som forholdet mellem trekant ADE's areal og trekant BDE's areal, idet de to trekanter har den samme højde.

Vi har:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\Delta BDE}{\Delta ADE}$$

Trekant DCE og trekant ADE har også samme højde, og derfor gælder af samme grund at:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{\Delta CDE}{\Delta ADE}$$

Derfor er:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

fordi vi tidligere har vist, at arealet af trekant BDE og trekant CDE er ens.

Euklid viser også det omvendte, hvor den samme trekant benyttes, og man lader siderne AB og AC af trekant ABC blive skåret proportionelt af en linje DE, således at:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

Det skal her vises, at DE er parallel med siden BC. Det kan skrives ved:

DE || BC hvis $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$

Det antages, at:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

Som vist ovenfor, gælder:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\Delta BDE}{\Delta ADE}$$

og

$$\frac{CE}{AE} = \frac{\Delta CDE}{\Delta ADE}$$

derfor er:

$$\frac{\Delta BDE}{\Delta ADE} = \frac{\Delta CDE}{\Delta ADE}$$

Da trekanterne BDE og CDE har samme forhold til trekant ADE, har trekant BDE samme areal som trekant CDE, og de har samme grundlinje DE. Trekanter som har samme areal og samme grundlinje, har deres endepunkter som ikke er i grundlinjen gennem samme linjestykke, som er parallel med grundlinjen. Derfor er linjestykket DE parallel med linjestykket BC (Joyce, 1996). Sætning 2 er hermed bevist, og vi vil nu se nærmere på sætningerne 4 og 5 i bog 6, da sætning 2 benyttes i beviserne for disse.

2.5.2 Thales' sætning

Sætning 4 og 5 i bog 6 udgør tilsammen Thales' sætning, og denne lyder (Winsløw, 2006a, s.50):

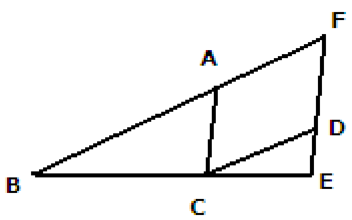
To trekanter er ligedannede hvis og kun hvis deres sidelængder er proportionale. Mere præcist, to trekanter ABC og A'B'C' er ligedannede hvis og kun hvis

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad og \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Vi vil nu gennemgå beviserne for sætning 4 og sætning 5.

Sætning 4:

"I ensvinklede trekanter er siderne omkring de lige store vinkler proportionale, og de sider er tilsvarende som ligger overfor de lige store vinkler"(Euklid, 1904).



Figur 4

Bevis:

Euklid benytter sætning 2 i beviset for denne sætning. Han starter med at lade de ensvinklede trekanter være trekant ABC og trekant DCE, hvor vinkel ABC er lig vinkel DCE, vinkel BAC er lig vinkel CDE og vinkel ACB er lig vinkel CED.

Der gælder altså ifølge sætningen, at i trekant ABC og DCE er siderne omkring de lige store vinkler proportionale, og dette skal vises. Først forlænges siden BC med siden CE, således at de to ensvinklede trekanters grundlinjer ligger på samme linje.

Idet summen af vinklerne i trekant ABC er 180 grader, er summen af vinklerne ABC og ACB mindre end 180 grader. Dermed er summen af vinklerne ABC og DEC også mindre end 180 grader, idet det blev antaget at vinkel ACB er lig vinkel DEC.

Det følger heraf, at linjestykkerne BA og ED mødes, når de forlænges, idet de ikke er parallelle. Det punkt som de mødes i bliver kaldt F.

Nu benyttes, at vinkel DCE er lig vinkel ABC, som ifølge sætning 28 i bog 1 medfører, at linjestykket BF er parallel med siden CD. Analogt haves, at da vinkel ACB er lig vinkel DEC, så må linjestykket AC være parallel med linjestykket FE.

Der fremkommer et parallelogram FACD, hvor siderne, som står over for hinanden, er lige lange ifølge en tidligere sætning (sætning 34 i bog 1), altså:

FA = DC og AC = FD.

Nu benyttes sætning 2, som er blevet vist ovenfor (se figur 2). Da linjen AC er parallel med siden FE i trekant FBE, gælder der ifølge sætning 2, at AC skærer de to andre sider i trekant FBE proportionelt. Det vil sige:

$$\frac{BA}{AF} = \frac{BC}{CE}$$

Altså er:

$$\frac{BA}{CD} = \frac{BC}{CE}$$

idet AF = CD. Og på tværs er:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DC}{CE} \quad (1)$$

Da endvidere linje CD er parallel med BF, så gælder ifølge sætning 2:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{FD}{DE}$$

Idet FD = AC, gælder:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DE}$$

og på tværs:

$$\frac{BC}{CA} = \frac{CE}{DE} \quad (2)$$

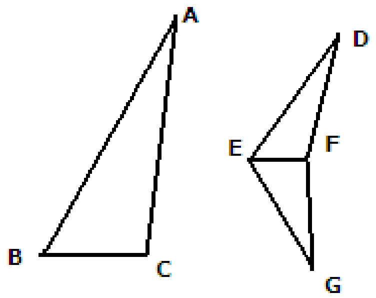
Da det er bevist, at (1) og (2) gælder, gælder det samtidig også at:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{CD}{DE}$$

Dermed konkluderes det, at i ensvinklede trekanter er siderne omkring de lige store vinkler proportionale, og tilsvarende gælder for de linjer, som ligger over for de lige store vinkler (Joyce, 1996). Hermed er sætningen bevist. I næste sætning viser Euklid det omvendte af sætning 4. Beviset for denne sætning vil vi også gennemgå, hvori der bliver benyttet sætning 4 samt sætning 2.

Sætning 5

"Når siderne på to trekanter er proportionale, da vil trekanterne være ensvinklede og have de vinkler lige store overfor hvilke de tilsvarende sider ligger"(Euklid, 1904).



Figur 5

Bevis:

Euklid lader ABC og DEF være to trekanter, hvor siderne er proportionale, altså:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad (3)$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{EF}{FD}$$

$$\frac{BA}{AC} = \frac{ED}{DF}$$

Det skal vises, at de to trekanter har samme vinkler. Altså at:

vinkel ABC = vinkel DEF

vinkel BCA = vinkel EFD

vinkel BAC = vinkel EDF.

Da det er muligt at konstruere en vinkel, som er lig med en given vinkel på en given linje og et punkt på denne linje ifølge sætning 23 i bog 1, benyttes dette til at konstruere vinkel FEG, som er lig med vinkel ABC, i punktet E på linjestykket EF, og på samme måde konstrueres vinkel EFG, som er lig med vinkel ACB, i punktet F på linjestykket EF. Dermed vil den sidste vinkel i trekant ABC, nemlig vinkel BAC, være lig med den sidste vinkel i trekant EFG, nemlig vinkel EGF. De to trekanter ABC og GEF er altså ensvinklede.

Nu benyttes sætning 4, for idet trekanterne ABC og GEF er ensvinklede, er siderne omkring de lige store vinkler proportionale i de to trekanter. Man kan altså skrive:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{GE}{EF}$$

Da det var antaget i begyndelsen af beviset, at (3) gælder, så må:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{GE}{EF}$$

Hver af linjerne DE og GE har altså samme forhold til EF, og derfor er:

DE = GE.

Af samme grund gælder:

DF = GF.

Da det nu er vist, at siderne er ens i trekanterne DEF og GEF, gælder der ifølge sætning 8 bog 1, at vinkel DEF er lige så stor som vinkel GEF. De øvrige vinkler, overfor hvilke de lige store sider ligger, vil også være lige store. Trekant DEF er altså ligedannet med trekant GEF.

Da vinkel DEF = vinkel GEF, og samtidig vinkel GEF = vinkel ABC, så er vinkel ABC = vinkel DEF. Af samme grund er vinkel ACB = vinkel DFE og vinkel BAC = vinkel EDF.

Altså har vi, at når to trekanter har proportionelle sider, da vil trekanterne være ensvinklede. Hermed er sætningen bevist (Joyce, 1996).

Begge beviser indgår i Euklids Elementer, og selvom der ikke er noget historisk belæg for at gøre det, tilskrives sætningen Thales (Winsløw, 2006a, s. 50). Det, vi får at vide i denne sætning, er, at hvis to trekanter skal være ligedannede, da skal forholdet mellem to par af ensliggende sider være det samme. Det vil sige, når man forstørrer figuren, skal man gange alle sidelængderne med den samme faktor. Dermed bliver forholdet mellem sidelængderne i den nye figur det samme som i den oprindelige figur.

Vi vil nu undersøge begrebet proportionalitet nærmere. Vi har set, hvordan Euklid har defineret og benyttet dette begreb, og vi skal nu se på, hvordan proportionalitet defineres i dag.

3 Stofdidaktisk *a priori* analyse

3.1 Proportionalitet

Vi vil i dette afsnit beskrive nogle forskellige definitioner af proportionalitet. En almindelig måde at tale om proportionalitet i matematik i dag, er en form for afhængighed mellem to variable x og y, altså en situation hvor vi har $y = k \cdot x$ for en konstant k, hvor den tilhørende graf er en ret linje gennem (0,0). Da vi her har et fast forhold mellem et input og et output, kalder vi dette en *dynamisk definition* af proportionalitet (Miyakawa & Winsløw, 2009, s.3). Den dynamiske definition er en slags formel eller regel, som kan benyttes.

En anden definition er, at der tænkes på proportionalitet som delmængder af R^n, der har formen $\hat{a}$={(sa_1, sa_2, ..,sa_n):s $\in$ R}, hvor a = (a_1, a_2,…,a_n) er fast. Hvis a, b $\in$ R^n/{0}, er a proportional med b hvis b $\in$ $\hat{a}$. Dette kalder vi en *statisk definition* af proportionalitet, da den definerer, hvordan to n-tupler af reelle tal skal være proportionelle (Miyakawa & Winsløw, 2009, s.3). Den statiske definition forekommer i typiske lærebogsopgaver, hvor der indgår konkrete tal, f.eks. i opgaver med en manglende ubekendt[1]. I grundskolen bliver denne definitions uformelle former benyttet. De opgaver, som vi skal stille i vores forløb, skal af denne grund hovedsageligt bestå af opgaver af denne definition.

Da vi nu har beskrevet to forskellige definitioner af proportionalitet, vil vi undersøge begrebet *proportionelt ræsonnement* nærmere, idet vi i vores forløb netop skal fokusere på elevernes beherskelse heraf. Men inden vi gør det, vil vi vise et eksempel på proportionalitet af Freudenthal (1905).

Freudenthal (1905) definerer proportionalitet ved at benytte eksemplet *"Inertiens lov"*. Denne lov kan udtrykkes som: a) *Lige afstande tilbagelægges på lige lang tid*, eller b) *Afstand er proportional med tiden*. Disse to sætninger er ækvivalente. Man kan også sige det samme på to andre måder: c) *Afstanden er en lineær funktion af tiden* eller d) *Hastigheden er konstant*. Freudenthal begynder med sætning a) og viser, at den er ækvivalent med de andre tre sætninger.

Freudenthal viser med sit eksempel, at de funktioner der har egenskaben $f(a + b) = f(a) + f(b)$,

[1] "Opgaver med en manglende ubekendt beskrives i afsnit 3.3.1.

er de lineære funktioner, det vil sige $f(a) = a \cdot f(1)$. Sætning a) *"Lige afstande tilbagelægges på lige lang tid"* medfører *"På dobbelt så lang tid, tilbagelægges dobbelt så lang afstand"*, hvis man blot fordobler de to variable afstand og tid. Mere generelt kan man skrive:

Lad s = f(t) være afstanden som en funktion f af tiden t. Så fås:

$$f(nt) = nf(t) \text{ for } n \in \mathbb{N}$$

grundet det generelle princip: "*På n gange så lang tid, tilbagelægges n gange så lang afstand*".

Hvis man erstatter t med $\frac{1}{n}t$, fås:

$$f(t) = nf\left(\frac{1}{n}t\right)$$

Hvilket medfører:

$$f\left(\frac{1}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(t) \qquad (1)$$

Her står altså: *På* $\frac{1}{n}$ *gange så lang tid, tilbagelægges* $\frac{1}{n}$ *gange så lang afstand*. Hvis man i (1) erstatter t med mt ($m \in \mathbb{N}$), fås:

$$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(mt) = \frac{m}{n}f(t)$$

For alle positive rationelle tal α gælder der derfor: *På* α *gange tid opnås* α *gange afstand*. For to tider t_0 og t_1, kan man sætte $\alpha = \frac{t}{t_0}$. Så fås:

$$f(t):f(t_0) = f(\alpha t_0):f(t_0) = \alpha f(t_0):f(t_0) = t:t_0$$

Dette er en matematisk måde at skrive sætning b) på. Den kan også skrives som:

$$f(t) = \left(\frac{f(t_0)}{t_0}\right)t$$

Hvilket er sætning c). Denne fører til sætning d), som er:

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t_0)}{t_0}.$$

Vi kan altså konkludere, at når man har betingelsen $f(nt) = nf(t)$ for n $\in$ N, så har man proportionalitet af de rationale tal, hvor f her er lineær på Q.

3.2 Proportionelt ræsonnement

Mange forskere har undersøgt og arbejdet med dette begreb, men de er ikke alle enige om, hvordan man skal definere proportionelt ræsonnement. Derfor virker definitionen af proportionelt ræsonnement uklart for os. Derfor vil vi se nærmere på tre udvalgte definitioner af proportionelt ræsonnement.

Karplus et al. (1983) definerer proportionelt ræsonnement som *”en benævnelse, der betegner ræsonnement i et system af to variable, hvor der eksisterer et lineært funktionelt forhold”* (s.219). Denne definition af proportionelt ræsonnement hænger sammen med den dynamiske definition af proportionalitet.

Behr et al. (1988) definerer proportionelt ræsonnement som *”en form for matematisk ræsonnement, som involverer en covariationssans og en sans for multiple sammenligninger, og evnen til at gemme og behandle mange stykker information”* (s.92). At det involverer en covariationssans betyder, at man fokuserer på ændringer af to variable. Et eksempel kan være, at man undersøger, hvad der sker med den anden variabel, når man ændrer lidt på den ene variabel. Denne definition hænger sammen med den statiske definition af proportionalitet.

Ben-Chaim et al.(1998) udtrykker, at den fundamentale udfordring ved proportionelt ræsonnement, er *”behovet for at tænke på en sammenligning af to tal som en enkel størrelse (et forhold eller en brøk), og at operere med to eller flere af disse sammenligninger samtidigt”* (s.262). Denne beskrivelse hænger ligeledes sammen med den statiske definition af proportionalitet.

Da Ben-Chaim et al.'s (1998) beskrivelse af proportionalitet og Behr et al.'s (1988) definition af proportionalitet hænger sammen med den statiske definition, vil vi benytte disse. Den statiske definition er nemlig mest relevant for os, idet det er denne definition, der bliver benyttet i lærebøgerne for grundskolen. Derfor vil vi have disse to nævnte proportionelle ræsonnementer i baghovedet, når vi skal analysere elevernes proportionelle ræsonnement i *a posteriori* analysen. Nu vil vi undersøge, hvordan proportionelt ræsonnement foregår.

Processen proportionelt ræsonnement foregår i disse 3 trin: *"(1) identifikation af to ekstensive variable".* Med de ekstensive variable menes variable som tid, længde eller vægt. *"(2) genkendelse af forholdet af intensive variable, hvis konstanthed bestemmer den lineære funktion".* De intensive variable udtrykker et konstant forhold, f.eks. fart. *"(3) udførelsen af de givne data og forhold for at finde a) en ny værdi for en ekstensiv variabel (opgaver med en manglende ubekendt) eller b)sammenligning af to værdier af de intensive variable, som er beregnet fra de givne data (sammenligningsproblem[2])"* (Karplus et al. 1983, s.219).

Ved proportionelt ræsonnement kan man f.eks. finde én af de ekstensive variable i opgaver med en manglende ubekendt, f.eks. at finde antallet af æg i en opgave som lyder:

"Man skal bruge 3 æg for at bage en kage. Hvor mange æg skal man bruge for at bage 5 kager?"

Man kan også i en sammenligningsopgave sammenligne to værdier af de intensive variable. F.eks. i en opgave som lyder:

"Hr. Nielsen har kørt 30 km på 25 minutter, og Hr. Olsen har kørt 47 km på 35 minutter. Har de kørt med den samme fart?"

Her kan man nemlig sammenligne deres fart i km pr. minut. Disse to opgavetyper vil vi beskrive nærmere i det kommende afsnit.

[2] Sammenligningsopgaver vil, ligesom opgaver med en manglende ubekendt, blive beskrevet i afsnit 3.3.1.

3.3 Proportionalitetsopgaver

3.3.1 Opgavetyper

Vi vil i det følgende undersøge nogle af de mest almindelige opgavetyper, som har til formål at lære eleverne om proportionalitet. I lærebøgerne bliver der benyttet forskellige typer opgaver i forbindelse med proportionalitet, men vi vil beskrive to af dem (Ben-Chaim et al., 1998, s.249-250).

Type 1: *Opgaver med en manglende ubekendt*: tre informationer bliver givet, og opgaven går ud på at finde det fjerde eller det manglede led. For eksempel opgaven:

"For 18 kr. kan man købe 3 blyanter. Hvor meget vil 7 blyanter koste?"

Her er der givet tre tal, og opgaven går ud på at finde det fjerde tal. Det kan man gøre ved at opstille $\frac{18}{3} = \frac{x}{7}$, og således finde x ved at isolere denne i ligningen.

Type 2: *Sammenligningsopgaver*: to forhold er givet, og der kræves ikke et numerisk resultat, men en sammenligning af forholdene. For eksempel opgaven:

"For 18 kr. kan man købe 3 blyanter i en butik. I en anden butik kan man købe 9 blyanter for 59 kr. Anna har brug for 9 blyanter. I hvilken butik er det mest økonomisk for hende at købe fra?"

Her er alle fire tal givet, og opgaven går ud på at identificere de ekstensive variable, og dernæst at opstille to forhold bestående af de intensive variable. Man kan løse opgaven ved at skrive $\frac{18}{3}$ og $\frac{59}{9}$, dernæst finde ud af om de er proportionelle.

Disse to opgavetyper kan indgå i forskellige opgavekontekster. Vi vil nu se nærmere på de forskellige slags kontekster i henhold til at benytte disse i designet af undervisningsforløbet.

3.3.2. Faglige kontekster

Man kan skelne mellem forskellige opgavekontekster svarende til matematisk kontekster, hvor proportionalitet optræder. Disse overordnede opgavekontekster kan hver især indeholde de to matematiske opgavetyper, som er blevet beskrevet i foregående afsnit. Vi vil benytte os af Douadys (1985) begreb *faglig kontekst*, som erstatning for ordet opgavekontekst. Douady (1985) benytter oprindeligt ordet *"setting"*, som vi har valgt at oversætte til faglig kontekst. Denne udgøres ifølge Douady (1985) af matematiske objekter, forholdet mellem disse, deres forskellige formuleringer og også af de mentale billeder man har i hovedet om netop disse matematiske objekter. Med matematiske objekter menes kulturelle objekter, der findes i matematik som et videnskabsfag, og som er kendetegnet ved deres definitioner og eksempler (s.35). Man kan opnå forskellige formuleringer af et matematisk problem ved at ændre den faglige kontekst, den befinder sig i. De nye formuleringer er ikke nødvendigvis magen til den første, og de giver dermed en ny indfaldsvinkel til problemet. De nye formuleringer vil også kunne indeholde nyt værktøj og nye metoder til at gribe problemet an på, noget man ikke kunne med den oprindelige faglige kontekst. Oversættelsen af problemet til en ny faglig kontekst vil ofte medføre ukendte resultater og nye teknikker (Douady, 1985, s.40).

Oversættelsen af problemet fra en faglig kontekst til en anden vil både kunne udføres af læreren og undervisningsdesigneren, men også eleverne kan oversætte problemet til en anden faglig kontekst, eksempelvis hvis de ikke kan løse opgaven i den faglige kontekst, den er givet i. I undervisningsforløbet vil vi benytte algebraiske kontekster, numeriske kontekster og geometriske kontekster. Disse er blevet beskrevet som (Douady, 1985):

Den *algebraiske kontekst*, hvor løsningen til problemet skal være i form af algebraiske formularer, udvikling i serier og hele udtryk.

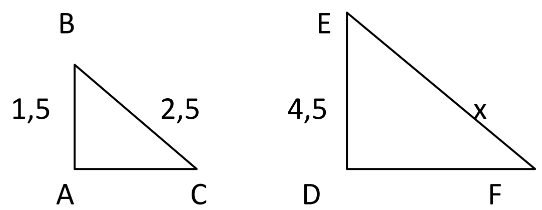
Den *numeriske kontekst,* hvor løsningen skal være en numerisk approksimation.

Den *geometriske kontekst*, hvor løsningen skal være i form af den topologiske karakterisering af mængden af løsningskurver, altså en løsning som er kvalitativ.

Man støder titpå proportionalitet i en geometrisk kontekst ved emnet *ligedannede figurer* i lærebøgerne (jf. afsnit 4.1). Da siderne i ligedannede figurer er proportionelle, kan man arbejde med ligedannede figurer under emnet proportionalitet.

I matematikkens historie kan man støde på ligedannethed i Euklids Elementer, nemlig Thales sætning, som er en fundamental viden om ligedannethed, og den siger i al sin enkelthed: ”*To trekanter er ligedannede hvis og kun hvis deres sidelængder er proportionale (eller de har samme vinkler”)* (jf. afsnit 2). Da polygoner i planen kan inddeles i trekanter, gælder sætningen også for polygoner. I 6.klassens lærebog kan vi finde en mere simpel definition: *”To figurer, som har samme form, men ikke nødvendigvis er lige store, kaldes ligedannede”* (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e, side)

De interne og eksterne variable, som er blevet beskrevet i afsnit 3.2, dukker også op, når man skal finde sider i ligedannede figurer. Eksempelvis hvis man har to ligedannede trekanter ABC og DEF:



Figur 6

Når man skal finde hypotenusen x i trekant DEF, kan man enten sammenligne de interne variable

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Altså:

$$\frac{1,5}{2,5} = \frac{4,5}{x}$$

Eller man kan sammenligne de eksterne variable:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Altså:

$$\frac{1,5}{4,5} = \frac{2,5}{x}$$

Man kan således også benytte de interne og eksterne variable til opgaver inden for en geometrisk kontekst. Nu hvor vi har set på de forskellige opgavetyper samt de forskellige faglige kontekster, vil vi gå i gang med at se på de forskellige måder at løse proportionalitetsopgaver på.

3.4 Løsning af proportionalitetsopgaver

Når man beregner proportionalitetsopgaver, skal man først og fremmest kende til forhold og dets udtryksformer, f.eks. som brøk eller som division. Man skal også vide, at alle forhold indeholder et multiplikativt forhold mellem dens to tal. Eksempelvis hvis man ganger det første tal i forholdet 2:10 med 5, vil man få det andet tal, og hvis det andet tal ganges med 1/5 fås det første tal. I nogle forhold er det nemt at se det multiplikative forhold som i det nævnte eksempel. Men i andre forhold bliver man nødt til at foretage beregninger for at kunne identificere forholdet mellem tallene. Eksempelvis i forholdet 8:36. Man skal her dividere 8 med 36 for at få 2/9, og omvendt dividere 36 med 8 for at få 9/2, som er de tal, der skal ganges med henholdsvis 36 og 8 for at få det andet tal.

Når to forhold er lig med hinanden, skal de multiplikative forhold inden for hvert forhold være ens. Eksempelvis ganges de første tal i forholdene 3:6 og 15:30 med 5 for at få det andet tal, og derfor er de to forhold ens. Eleverne kan benytte denne viden til f.eks. at løse opgaver med en manglende ubekendt. For at illustrere dette, vil vi give et eksempel på en opgave med en manglende ubekendt:

"3 æbler koster 18 kr. Hvor meget vil 6 æbler koste?"

Denne opgave kan løses ved at skrive denne ligning op:

1) $6/3 = x/18$

Eller denne ligning:

2) $18/3 = x/6$

Hvis man vælger at skrive 1), kan man dividere 6 med 3, og finde ud af at det multiplikative forhold i det første forhold er 2, og derfor må det multiplikative forhold i det andet forhold også være 2. Derfor ganges 18 med 2, og man får x = 36.

Hvis man vælger 2), kan man dividere 18 med 3, og finde ud af, at det multiplikative forhold i det første forhold er 6, og derfor må det multiplikative forhold i det andet forhold også være 6. Derfor ganges 6 med 6, og man får x = 36.

Den første måde at løse opgaven på er ved at sammenligne forhold med enheder af samme art, i dette tilfælde æbler. Man siger, at man bruger *interne forhold* eller *skalar metoden* (Tournaire & Pulos, 1985, s.185). Den anden måde at løse opgaven på, er ved at sammenligne forhold med enheder af forskellig art, i dette tilfælde æbler og kroner. Man siger, at man bruger *eksterne forhold* eller en *funktionel metode* (Tournaire & Pulos, 1985, s.185).

Hvis man altså har en opgave, hvor det manglende led skal findes i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kan man skrive ligningen op så enten forholdene på begge sider af lighedstegnet bliver *interne*, f.eks. to frugter a, b og to pengeværdier c, d, eller to veje på et kort a, b og to længder c, d. Eller at forholdene bliver *eksterne*, f.eks. to frugter a, c og to pengeværdier b, d, eller to veje på et kort a, c og to længder b, d. Det er opgavens sammenhæng, der har indflydelse på, hvilken type forhold man vælger til at løse opgaven. Det er nemlig nemmest at sammenligne de tal, hvor forholdet er lettest at beregne.

Den funktionelle metode, hvor de eksterne forhold sammenlignes, er ikke en særlig gammel metode. Før i tiden benyttede man nemlig kun skalar metoden. Eksempelvis kan man kun se brugen af skalar metoden hos grækerne (Freudenthal, 1905, s. 184). Vi har set i Euklids definition af forhold, at det skal være størrelser af samme art, der skal skrives i et forhold (jf. afsnit 2.3).

De multiplikative forhold i forholdene kan enten give hele tal eller decimaltal. Det er en vigtig faktor for løsningen af en opgave, at der i det mindste er et forhold, der er hel, idet det vil gøre det nemmere at regne ud. Eksempelvis har problemet $\frac{2}{4} = \frac{12}{x}$ hele tal både inden for forholdet, $2 \cdot 2 = 4$, og mellem de to forhold, $2 \cdot 6 = 12.$ Forhold i et problem kan give decimaltal, når mindst et af de multiplikative forhold ikke er hel, altså enten inden for et forhold eller mellem to forhold. Eksempelvis har problemet $\frac{8}{5} = \frac{48}{x}$ hele tal mellem de to forhold, $8 \cdot 6 = 48$, mens den har et ikke-helt tal inden for forholdet, $8 \cdot \frac{5}{8}$ = 5 (Steinthorsdottir, 2006, s.2).

Ovennævnte opgave med æbler kan også løses på en tredje måde, nemlig ved at opskrive ligningen på en af måderne 1) eller 2), og dernæst gange over kors for at finde x i stedet for at betragte de multiplikative forhold. Denne teknik bliver kaldt for *gange-over-kors teknikken*, som vi skal se på i næste afsnit, og den er en blandt flere overordnede strategier til at løse proportionalitetsopgaver på.

3.4.1 Løsningsstrategier

Ifølge Tournaire & Pulos (1985) findes der i litteraturen to typer korrekte strategier til at løse opgaver omhandlende proportionalitet*: multiplikativ strategien* og *bygge strategien*. Multiplikativ strategien går ud på, at leddene i en brøk relateres multiplikativt. Relationen, som man får ud af det, udvides dernæst til en ny brøk. I de fleste tilfælde etableres et forhold mellem tællerne og nævnerne i brøkerne eller mellem tællerne og nævnerne på tværs af brøkerne. Bygge strategien går ud på at oprette en relation i en brøk og udvide denne til en ny brøk ved addition (Tournaire & Pulos, 1985, s.184). Derudover findes der endnu en korrekt strategi til at løse proportionalitetsopgaver, denne bliver kaldt *enhedsstrategien* (Singh, 2000, s.276). Denne går ud på at finde forholdet for én og gange med denne for at få forholdet for mange. Vi vil i dette afsnit også inddrage *gange-over-kors teknikken*, som er en meget anvendt teknik blandt grundskoleelever. Lad os nu se nærmere på nogle eksempler på de nævnte strategier:

Bygge strategien:

Et eksempel på bygge strategien kan ses i løsningen på en opgave, som lyder:

"3oo gr. sukker koster 4 kr. Hvor mange gram sukker kan købes for 10 kr.?"

Ved brug af bygge strategien vil eleven regne ud, at det dobbelte, dvs. 6oo gr. sukker, vil komme til at koste dobbelt så meget, altså 8 kr. 2 kr. mere er det samme som det halve af 4 kr., hvilket svarer til 150 gr. sukker. For 10 kr. kan der købes 600 + 150 = 750 gr. sukker. Der er mange måder at benytte bygge strategien på. Ligeså vel som det simple eksempel foroven, eksisterer der mere sofistikerede måder. F.eks. løsningen til et problem der lyder:

"Ål, der er 15 cm lange, spiser 9 gr. mad. Hvor meget mad vil en ål på 25 cm spise?"

kan ved hjælp af bygge strategien være: Da 25 er 10 mere end 15, og 10 er 2/3 af 15, så er 2/3 af 9 lig 6. Vi har altså, 10 + 15 = 25, og 9 + 6 = 15, så svaret er 15 gr. (Tournaire & Pulos, 1985, s.185).

Bygge strategien er et forsøg på at benytte viden om addition og subtraktion på forhold. Eleven ser et mønster inden for et forhold og bruger dette til additivt at bygge på det manglende led. Ved benyttelse af strategien for forhold, som giver et decimaltal, kan det medføre et ukorrekt resultat.

Bygge strategien benyttes på opgaver med en manglende ubekendt (jf. afsnit 3.3.1.), som eksemplerne foroven er.

Enhedsstrategien:

For at illustrere enhedsstrategien, starter vi med et eksempel på en opgave:

"3 appelsiner koster 12 kr. Hvor mange appelsiner kan man få for 36 kr.?"

Ved benyttelse af enhedsstrategien vil man regne ud, at 1 appelsin koster 4 kr., idet 12 kr. divideres med 3. Så vil man dividere 36 med 4, og få 9. Det vil sige man kan købe 9 appelsiner for 36 kr.

Enhedsstrategien er en metode som ifølge Ben-Chaim (1998) benyttes meget blandt elever, bl.a. fordi denne metode er meget intuitiv (s.263). Metoden er god at bruge, når enheden giver et helt tal, men når det giver decimaltal, er det mest praktisk at bruge en anden metode. Nogen elever bruger metoden så flittigt og fleksibelt, at de bruger den til alle proportionalitetsopgaver, også hvis enheden giver et decimaltal.

Et eksempel på dette kan ses i Singh (2000, s.283-284), hvor der til en opgave som lyder:

"Chin tjener $63 på 6 uger. Hvis han tjener den samme mængde penge hver uge, hvor meget kan han så tjene på 4 uger?",

regnes ud, at svaret er $43 ved at dividere 63 med 6 og få 10.5 og gange 10.5 med 4. Eleven bruger lang tid på at beregne algoritmisk, som slet ikke er formålet med denne opgave, idet der forventes at eleven bruger multiplikativ strategien, som er mest hensigtsmæssig i sådan en opgave. Enhedsstrategien benyttes på opgaver med en manglende ubekendt (jf. afsnit 3.3.1.).

Multiplikativ strategien:

Den multiplikative strategi kræver en koordination af to talrækker. For at en situation kan være multiplikativ, er det nødvendigt at kunne koordinere mindst to sammensatte enheder således, at den ene af de sammensatte enheder fordeler elementerne af den anden sammensatte enhed (Singh, 2000, s.273). Til en opgave, der lyder:

"Hvis der er 6 grupper med 4 blokke hver, hvor mange blokke er der så i alt?"

vil eleven tælle ved brug af multiplikativ strategien: *"1 gruppe er 4, 2 grupper er 8, 3 grupper er 12, 4 grupper er 16 og 5 grupper er 20"*(Singh, 2000, s.273). Eleven koordinerer altså to talrækker. Denne strategi benyttes ligeledes til opgaver med en manglende ubekendt.

Proportionelt ræsonnement udvikles fra kvalitativt tænkning til bygge strategien til multiplikativ strategien. Disse strategier repræsenterer forskellige grader af sofistikering i proportionelt ræsonnement, og den multiplikative strategi er således den mest sofistikerede og avancerede.

Gange-over-kors teknikken

Man lærer som regel at løse opgaver med en manglende ubekendt ved at opstille en ligning, f.eks.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

og løse denne. Ligningen kan løses ved at benytte *gange-over-kors* teknikken:

$$a \cdot x = b \cdot c$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Det eneste man skal tænke over, før man opstiller ligningen er, om værdierne i variablene forøges sammen, eller om den ene forøges, mens den anden formindskes. Hvis værdierne i begge variable forøges, skriver man ligningen op som ovenstående. Men hvis den ene forøges og den anden formindskes, skal c og x bytte plads, så ligningen bliver:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

Gange-over-kors teknikken er en algebraisk teknik, som sædvanligvis læres i grundskolen, men den er meget generel. Elever kan have svært ved at benytte denne teknik på ting fra dagligdagen eller eksperimenter.

Ifølge Behr et al. (1988) kan algoritmer som gange-over-kors teknikken hindre elever i at udvikle proportionelt ræsonnement, selvom teknikken er effektiv. Eleverne kan ikke forklare hvorfor teknikken er matematisk korrekt, og det kan skabe problemer, f.eks. kan de ende med at udføre samme algoritme til ikke-proportionelle opgaver. Samtidig er det som regel en teknik, der er blevet en form for ”udenadslære”, og derfor behøver man ikke at tænke over de forskellige tal i forholdene, blot man kan skrive tallene de rigtige steder.

Man kan stille spørgsmål til elever, mens de er i gang med at løse en proportionalitetsopgave, som vil hjælpe eleverne med at tænke over det underliggende forhold, som eksisterer i opgaven. Ved at stille disse spørgsmål, opmuntrer man eleverne til at stille sig selv spørgsmål om forholdene i en opgave, mens de løser opgaven. På denne måde vil de få udviklet deres proportionelle ræsonnement. Dermed vil de ræsonnere proportionelt, også når de benytter algoritmer som gange-over-kors teknikken.

Eleverne kan sagtens benytte gange-over-kors teknikken til at løse alle slags proportionalitetsopgaver med. Hvis det er denne teknik de har lært, er det sandsynligvis denne teknik, der vil blive benyttet. Men som nævnt før, er det ikke sikkert, at de samtidig kan ræsonnere proportionelt, og derudover kan det være svært for eleverne at argumentere for, at den er matematisk korrekt. Derfor er det at foretrække at benytte en af de andre løsningsstrategier, som vi har beskrevet.

Elever kan regne proportionalitetsopgaver forkert ved at benytte forskellige forkerte løsningsstrategier. Også de korrekte løsningsstrategier kan blive benyttet forkert. Det vil vi undersøge i det følgende.

3.4.2 Fejlstrategier

Elever kan benytte forkerte strategier for at løse proportionalitetsopgaver. En forkert løsningsstrategi, som er en af de fejlstrategier som ofte er blevet set, er, at nogle elever kun sammenligner nævnerne i to brøker, når de skal angive, om de er proportionale (Tournaire & Pulos, 1985, s.185). Dermed ignoreres dele af opgaven, nemlig tællerne. Et eksempel på dette kan ses i en opgave som:

”Hvis man kan købe 6 slikkepinde for 4 kr. Hvor mange slikkepinde kan man så købe for 10 kr.?”

Eleven kan f.eks. ignorere tallet 6 og svare ved at sammenligne 4 kr. med 10. kr. Da der er 6 kr. forskel mellem dem, kan eleven svare 6 slikkepinde.

En løsningsstrategi, som er meget almindelig til at løse proportionalitetsopgaver forkert på, er den *additive strategi*. Forholdet i brøkerne regnes ved at trække et led fra den anden og benytte forskellen på den anden brøk. Den bliver benyttet især som en fall-back strategi, det vil sige eleven kan benytte bygge strategien for hele brøker, og i tilfælde af brøker, som giver et decimaltal, benyttes den additive strategi (Tournaire & Pulos, 1985, s.186). Et geometrisk eksempel på hvorledes den additive strategi bliver benyttet, kan ses i følgende opgave:

"Find siden h således at de to rektangler får samme form".

Figur 7

Eleven vil sammenligne 15 cm og 8 cm, og da dette forhold ikke er et helt tal, vil eleven benytte den additive strategi og trække 8 cm fra 15 cm, som giver 7 cm, hvorefter 7 cm lægges til 6 cm, og svaret vil således være 13 cm, som er forkert.

Som nævnt foroven kan de korrekte strategier også blive benyttet forkert af elever. Det har man eksempelvis set i benyttelsen af *enhedsstrategien*. Elever kan bruge denne metode forkert ved enten at gætte på en enhed og benytte denne til at løse opgaven med. Eller de kan antage, at enheden er det tal, som står i opgaven, f.eks. ved en opgave:

"2 blyanter koster 8 kr., hvor meget koster x blyanter?"

kan eleven antage, at hver blyant koster 2 kr. (Tournaire & Pulos, 1985, s.186).

Der er forskellige faktorer, der spiller en rolle, når eleverne laver fejl som de ovenstående eksempler. Derfor vil vi nu diskutere de forskellige variable, der kan påvirke elevernes præstation, når det gælder løsning af proportionalitetsopgaver.

3.4.3 Variable som kan medføre fejlstrategier

Tournaire & Pulos (1985) deler disse variable i opgave-centrerede variable og elev-centrerede variable. Vi vil gennemgå de opgave-centrerede variable, idet det er disse, der er mest relevante i forhold til emnet i vores speciale. Under de opgave-centrerede variable findes bl.a. fire forskellige faktorer, som kan medføre vanskeligheder:

a) tilstedeværelsen af brøker, som giver et decimaltal

b) rækkefølge

c)numerisk kompleksitet

d)mængde.

Vanskeligheder der kan opstå ved at løse opgaver, hvor der indgår brøker, som giver et decimaltal, har vi omtalt før (se afsnit 3.4). Når der tales om rækkefølge, bliver der henvist til den placering, som det tal der skal findes har i forhold til de tre andre tal (i opgaver med en manglende ubekendt). Det har altså en betydning hvor det manglende led er i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Numerisk kompleksitet har at gøre med størrelsen af tallene, som bliver benyttet i opgaven og størrelsen af forholdene. For svære tal kan påvirke elevernes præstation, idet de så vil koncentrere sig om at udføre algebraiske beregninger. Det er også vigtigt at medtage mængden som en af de variable, der kan medføre vanskeligheder. F.eks. er tællelige objekter som penge nemmere at have med at gøre end kontinuerte objekter som tid.

Disse faktorer kan være medvirkende til, at elever beregner proportionalitetsopgaver forkert. Man skal som elev først vide, om opgaven overhovedet er en proportionalitetsopgave. For der kan dukke opgaver op, som ligner proportionalitetsopgaver, men som i virkeligheden ikke er det.

3.5 Ikke-proportionelle opgaver

Et problem er, at elever har svært ved at kunne ræsonnere proportionelt og løse proportionalitetsopgaver, et andet problem er at elevernes stigende kendskab og øvelse med proportionelle modeller, giver dem en følelse af, at modellerne kan bruges til alle numeriske forhold, som om de altid er proportionelle. Dette fænomen bliver i litteraturen omtalt som "*linear misconception*", "*linear obstacle*", "*linear trap*" eller "*linear illusion*" (Bock, Verschaffel & Janssens, 1998, s.65). Da elevernes linearitets tankegang bliver styrket ved en masse lejligheder i skolen, kan det medføre en tendens hos elever til at anvende den lineære model overalt.

For at undgå at eleverne udvikler en tendens til at overgeneralisere proportionalitetsmodeller, bliver man nødt til at inddrage ikke-proportionelle opgaver i undervisningen. Dette vil nemlig gøre eleverne opmærksomme på, at de ikke altid skal benytte proportionalitetsmodeller, og at de først skal tænke sig grundigt om. Når man taler om ikke-proportionelle opgaver, tænkes bl.a. på additive, affine og konstante opgaver.

Eksempel på en *additiv* opgave: *"To forskellige planter A og B vokser lige hurtigt i højden. Plante A er 100 cm høj og plante B er 120 cm høj. Når plante A bliver 200 cm høj, hvor høj er plante B så blevet?"* Her er det korrekte svar 220 cm, men et proportionelt svar er 240 cm.

Eksempel på en *affin* opgave: *"Louise har på 2 uger tjent 550 kr., hvoraf hun fik en én-gangs bonus på 300 kr. Hvad vil hun tjene på 4 uger?"* Det korrekte svar er 800 kr., mens et proportionelt svar er 1100 kr.

Eksempel på en *konstant* opgave: *"Mie sår 3 blomsterfrø. Efter 12 dage er de blomstret. Susan sår 6 af de samme blomsterfrø. Efter hvor mange dage vil de blomstre?"* Det korrekte svar er 12 dage, mens et proportionelt svar er 24 dage.

Der er også andre ikke-proportionelle opgaver f.eks. i forbindelse med geometri. Det er i dette område, at elever laver mest fejl, og derfor vil vi undersøge geometriske ikke-proportionelle opgaver nærmere.

3.5.1. Geometriske ikke-proportionelle opgaver

Det bedst kendte eksempel på elevernes uretmæssige brug af linearitet opstår i forbindelse med geometri, hvor de anvender linearitet ukorrekt i problemer omkring forholdet mellem længder og arealet eller rumfanget af figurer. De tror f.eks., at de kommer til at halvere arealet ved at halvere sidelængden i et kvadrat. Dette er udbredt blandt elever på tværs af klassetrinene (Bock, Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002, s.313).

Den ukorrekte brug af linearitet i ikke-lineære sammenhænge er en velkendt misforståelse. Det mest berømte eksempel på det i historien er fordoblingen af et kvadrat, som Sokrates får slaven Menon til at udføre. Slavens første forsøg består i at fordoble siden i kvadratet (Bock, Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002, s.312).

Når man har med længder og arealer af to af de samme geometriske figurer at gøre, er princippet, at man formindsker eller forstørrer med en faktor x ved at gange længder med x, gange arealer med faktor x^2 og gange rumfang med faktor x^3. For at forstå dette princip, skal man vide, at disse faktorer kun afhænger af, om det er en længde, areal eller rumfang, og ikke hvilken slags figur man har med at gøre, f.eks. om det er en cirkel eller et kvadrat. Man har vha. undersøgelser fundet ud af, at det er en langsom og krævende proces at forstå dette. Elever har meget svært ved at forstå dette princip, idet bl.a.*"..de fleste elever i 5.-8. klassetrin tror, at hvis siderne af en figur bliver fordoblet for at fremstille en figur med samme form, skal arealet og rumfanget også fordobles"* (Bock, Verschaffel & Janssens, 1998, s.66).

Da dette princip er vigtigt at lære i forbindelse med proportionalitet, vil vi medtage en opgave i undervisningsforløbet, hvor dette princip anvendes. Efterfølgende vil vi have flere ikke-proportionalitetsopgaver. Vi går ud fra, at eleverne får udviklet en relativ stærk lineær tankegang gennem forløbet, så de vil begå mange fejl ved ikke-proportionalitetsopgaverne.

Lineære forhold har fået en intuitiv karakter hos mange elever. Den forkerte brug af proportionalitet bliver oftest anset som korrekt uden yderligere forklaringer, idet mange har en stærk tillid til denne. Proportionalitet har en dyb placering i elevers intuitive viden og kan blive brugt på en spontan og ubevidst måde. I ikke-proportionelle opgaver hvor elever benytter proportionalitet, kan man høre, at de ikke kan argumentere for, hvorfor det er den rigtige måde at løse opgaven på (Bock, Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002, s.327).

4 Lærebogs- og læreplansanalyse

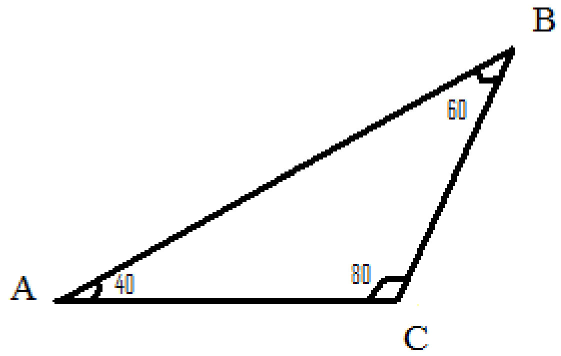
4.1 Lærebøger

Vi vil i dette afsnit undersøge lærebøgerne på den skole, hvor vi skal gennemføre vores undervisningsforløb. Det er især 6.klassens lærebog, som der skal ses nærmere på, men også lærebøgerne for 3., 4. og 5. klasse skal undersøges, idet vi så kan stifte bekendtskab med 6. klasse elevernes matematiske baggrund og forudsætninger, både hvad angår proportionalitetsopgaver, men også emner, som kan danne grundlag for proportionalitet.

6. klassens lærebog hedder *"Sigma for sjette"* (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e), og bogen er en almen anvendt lærebog i grundskolen.

Vi har undersøgt kapitlerne i lærebogen og fundet et kapitel, som hedder *"Thales"*, hvor Thales' sætning indgår. Sætningen står ikke i bogen, men der er nogle opgaver med trekanter, og man skal prøve at finde nogle sætninger for disse trekanter. En af opgaverne ser således ud (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e, s.30):

"Tegn trekant ABC.



Figur 8

a) Mål siderne AB og BC.

Tegn en ny trekant $A_1B_1C_1$, hvor A_1C_1 er 6 cm, og hvor vinkelmålene er de samme.

b) Mål igen siderne A_1B_1 og B_1C_1.

Tegn en ny trekant $A_2B_2C_2$, hvor A_2C_2 er 9 cm, og hvor vinkelmålene er de samme.

c)Mål igen siderne A_2B_2 og B_2C_2.

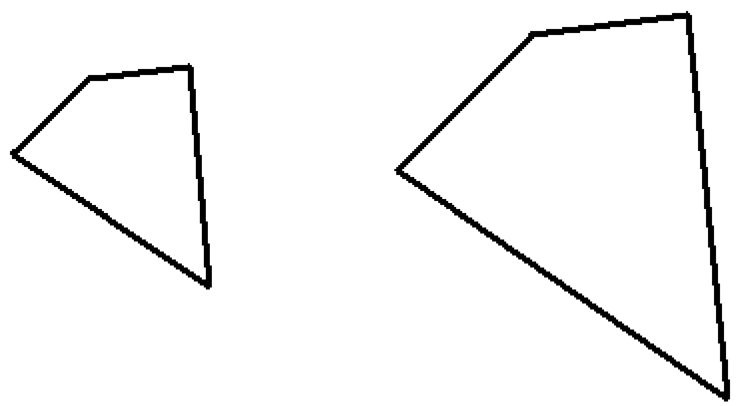
d) Hvad opdager I?"

Man skal begynde med at måle siderne AB og BC, så man senere kan sammenligne forholdet mellem siderne i den oprindelige trekant ABC og siderne i de nye trekanter $A_1B_1C_1$ og $A_2B_2C_2$. Vinklerne skal have samme mål i alle tre trekanter, mens sidelængderne bliver større. Eleverne skal komme frem til Thales' sætning, de skal altså kunne konkludere, at i trekanter med samme vinkelmål, er siderne proportionelle.

Efter denne opgave følger andre opgaver med samme problemstilling. I opgave 2 (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e) er en trekant ABC med sidelængder angivet. Her skal eleverne igen tegne trekanten i deres kladdehæfte med de rigtige mål og dernæst tegne en ny trekant $A_1B_1C_1$, hvor siderne er halvanden gange længere end i trekant ABC. Og så lyder opgaven, at de skal måle vinklerne i den nye trekant. Herefter skal endnu en trekant $A_2B_2C_2$ tegnes, hvor siderne er dobbelt så lange som i trekant ABC, og igen måles vinklerne. Eleverne skal igen komme frem til Thales sætning. Dernæst er der to opgaver, som næsten er magen til de forrige to opgaver, men hvor trekanten er en ligebenet trekant.

Det er morsomt, at temaet om Thales' sætning findes i vores 6. klasses lærebog, idet eleverne så har mere eller mindre kendskab til denne sætning. I lærebogen findes også et opslag, hvor ligedannede figurer står beskrevet. Betegnelsen "samme form" bliver også brugt i denne sammenhæng. Der står nemlig:

*"**Samme form**: To figurer, som har samme form, men ikke nødvendigvis er lige store, kaldes **ligedannede**. De to firkanter er ligedannede".* (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e, s.120)



Figur 9

I vores undervisningsforløb for 6. klasse, kommer eleverne i første lektion til at arbejde med en opgave, hvor de skal afgøre om to rektangler har samme form. Det kan godt være, at de allerede kender betydningen af "samme form", men vi regner ikke med, at de kan huske det fra deres lærebog. Vi tror heller ikke, at de vil tage deres lærebøger frem og kigge i dem, idet de ved, at de er i gang med et uafhængigt undervisningsforløb. Af denne grund går vi ud fra, at det ikke vil ødelægge situationen i undervisningsforløbet, at der indgår betegnelsen "samme form" i deres lærebog. I undervisningsforløbet kommer eleverne også til at arbejde med Brousseaus berømte puslespilssituation, hvor kendskab til Thales' sætning er en fordel. Dette kommer vi nærmere ind på i *a priori* analysen af forløbet.

I lærebogen for 6. klasse kan man ikke finde proportionalitet som et emne for sig selv, men der forekommer proportionalitetsopgaver i forbindelse med forskellige emner. F.eks. er der under emnet *cirklers areal* en opgave, som lyder:

"En 20 krone har en diameter på 26,75 mm, og diameteren på en 10 krone er 23 mm. Stemmer denne påstand: Arealet af en 20 krone er halvanden gange så stort som arealet af en 10 krone?" (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e, s.36).

I denne opgave indgår proportionalitet i form af, at eleverne skal finde arealet af en cirkel med diameter 26,75 mm og arealet af en cirkel med diameter 23 mm, altså henholdsvis arealerne: 562 mm^2 og 415,5 mm^2, hvorefter de skal finde ud af, om 562 er halvanden gange så stort som 415,5.

Brøker kan indgå i udtryk for proportionalitet, og derfor er det hensigtsmæssigt at undersøge det kapitel, der handler om brøker nærmere i 6. klassens lærebog. Elevernes viden om brøker går helt tilbage til 4. klasse, idet vi i lærebogen for denne klasse kan se en introduktion til brøker (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006c). I 6. klasse bliver opgaverne mere "avanceret" i form af:

"*Forlæng brøkerne med 5*" eller "*Hvilke af brøkerne kan forkortes til* $\frac{2}{3}$", hvor nogle udvalgte brøker er givet (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006e, s.47-48). Dette viser os, at eleverne nogenlunde har kendskab til, at selvom man f.eks. forlænger en brøk med 5 (ganger med 5) har vi den samme brøk. Det vil sige forholdet forbliver det samme. Dette er et eksempel på proportionelt ræsonnement.

Procenter og *decimaltal* er også måder at udtrykke proportionalitet på, idet en brøk, et decimaltal og et procenttal kan alle kan være betegnelser for samme talstørrelse blot skrevet på forskellige måder. Decimaltal er ligeledes et emne, der bliver behandlet tidligt, nemlig i 4. klassens lærebog, mens procenter først bliver behandlet i 5. klassens lærebog. I 6.klassens lærebog bliver der oftest stillet nogle opgaver, hvor man skal omskrive brøker, procenter og decimaltal til hinanden.

For at finde ud af hvad disse elever har lært om proportionalitet tidligere i deres skolegang, har vi også set på 3., 4. og 5. klassens lærebøger. Der indgår kun få simple proportionalitetsopgaver, især under emnerne gange og division. Eksempelvis er der i lærebogen for 5.klasse et tema, som handler om tid og fart, hvor man kan støde på simple proportionalitetsopgaver. Der er angivet hastigheder for forskellige ting, og man bliver stillet opgaver i forbindelse med disse. F.eks. er der en opgave, som lyder:

"*Skildpaddens hastighed: 70-250 m/t.* (Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I., 2006d, s.107)

Opgave 37. a) Hvor langt kan en hurtig skildpadde bevæge sig på ½ time?

b) på 3 timer?

c) Hvor langt kan en langsom skildpadde komme på 2 timer?"

5.klasse eleverne vil nok beregne opgaven ved at a) dividere 250 med 2, b) gange 250 med 3 og c) gange 70 med 2. De vil ikke nødvendigvis begynde at stille en ligning op.

Ved vores analyse af lærebogen for 6. klassetrin, kunne vi se, at de proportionalitetsopgaver der er, næsten udelukkende er opgaver med en manglende ubekendt. Vi kunne ikke se nogen sammenligningsopgaver i lærebogen.

4.2 Læreplaner

Vi vil nu undersøge undervisningsministeriets læreplaner for grundskolen, især med henblik på at afklare hvordan og i hvilket omfang emnet proportionalitet indgår. Under *"Arbejde med tal og algebra"* i læreplanerne for 4.-6. klassetrin kan vi se, at der ikke indgår arbejde med emnet proportionalitet, men til gengæld skal eleverne arbejde med brøker, decimaltal og procenter. Der står at *"decimaltal, brøker og procent skal for eleverne fremtræde som tre forskellige måder at angive samme forhold på"* (Undervisningsministeriet, 2009). Heri indgår ordet *"forhold"*, og den måde ordet forekommer i sætningen, tyder muligvis på, at de skal lære at omregne et forhold, som er angivet på en af de tre former til en anden af formerne.

Vi har i 6.klassens lærebog set, at der er et stort fokus på opgaver, hvor man skal omskrive brøk, decimaltal og procent til hinanden. De fleste af disse opgaver kræver, at man kan ræsonnere proportionelt. F.eks. at man er i stand til at vurdere, at selvom man ganger en brøk med 3 for at få en anden brøk, forbliver forholdet det samme i begge brøker.

I læreplanerne for 7.-9. klassetrin kan man under *”Arbejde med tal og algebra”* se, at elever skal introduceres til emnet proportionalitet i forbindelse med funktionsbegrebet. Både ligefrem proportionalitet og omvendt proportionalitet. Og under ”*Arbejde med geometri*” ses, at elever i disse klassetrin bl.a. skal arbejde med målestoksforhold, ligedannethed og kongruens (Undervisningsministeriet, 2009).

Betegnelsen ”proportionalitet” dukker altså først op i læreplanerne for 7.-9. klassetrin, men i 6.klassetrin skal elever ifølge læreplanen kunne udtrykke det samme forhold i brøker, decimaltal og procenter, hvilket er en del af det at kunne ræsonnere proportionelt.

Vi vil nu gå i gang med at beskrive den didaktiske teori vi gerne vil bruge til både at designe undervisningsforløbet med og til at analysere det, nemlig teorien om didaktiske situationer.

5 Teorien om didaktiske situationer (TDS)

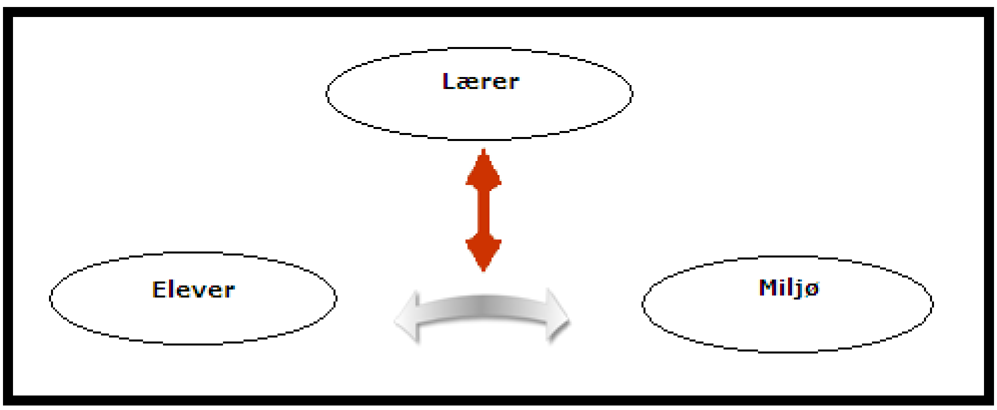
TDS er en fagdidaktisk teori, som franskmanden Guy Brousseau har udviklet. Teorien er udviklet på baggrund af studier af matematikundervisning, men kan også bruges i andre naturvidenskabelige fag. TDS bygger på idéer om, at elever bedst lærer ved at løse problemer, hvor de selv er ansvarlige for at konstruere deres viden for at løse problemet.

Vi vil bruge denne teori både som et værktøj til at designe vores undervisningsforløb og som model for analyse af dette forløb. Vi vil bruge TDS, idet den adskiller sig markant fra almindelig klasseundervisning, som oftest er lærerstyret. Faglig viden udvikles af forskere i en anden rækkefølge: man begynder med et problem, tilnærmelsesvise løsninger, diskussion blandt forskere, retfærdiggøre sin løsning, rette løsningen efter kritik osv. Dette oplever eleverne ikke på skolen. De opdager ikke ny viden, men bliver undervist i den officielle viden, som er den viden vi bl.a. har fra lærebøger. Grunden til, at man underviser på den måde, er bl.a., at man synes det er spild af tid at reproducere viden på ny. Men i virkeligheden opnår man ikke ret meget ved at blive undervist i den officielle viden, idet man ikke kommer til at undervise i faglig viden, men hvad loven foreskriver (Sierpinska, 1999a, s. 4). Det skal dog også påpeges, at man selvfølgelig ikke kan undervise alle emner i overensstemmelse med TDS, da man ikke vil have tid nok. Af denne grund skal underviseren overveje hvilke fagelementer vedkommende vil undervise på denne måde.

Forskellen mellem forskerens og elevernes arbejde med et problem er, at hos eleverne er undervisningen og problemet planlagt af læreren, som læreren også kender resultatet heraf.

Eleverne må ligesom forskeren tilegne sig den faglige viden ved at arbejde sig frem til den. Dette kan lade sig gøre i et *didaktisk miljø*, som læreren etablerer for at gøre det muligt for eleven at personliggøre den tilsigtede viden. I TDS taler man om at etablere det didaktiske miljø som et slags *spil*, og for at vinde dette spil skal man kende til *spillets regler* og udvikle strategier for at vinde spillet. Elevens opgave er at deltage i spillet, forstå spillets regler og udvikle vinderstrategier. Det didaktiske spil vindes, når eleverne lærer. Lærerens opgave er at planlægge og regulere spillet mellem eleven og det didaktiske miljø. Det didaktiske miljø skabes af læreren således, at den tilsigtede viden fremkommer som den mest hensigtsmæssige måde at forstå spillet. Når eleven så har opdaget en måde, hvorpå spillet kan vindes, opstår viden. Efter at eleverne har spillet, er det lærerens opgave at sørge for at vinderstrategierne fællesgøres.

Hvis eleven nægter at følge spillereglerne og ikke vil løse det af læreren stillede spørgsmål, må læreren gribe ind. Det er nemlig lærerens ansvar at hjælpe eleven (Winsløw, 2006b, s.75). Læreren er ansvarlig, hvis spillet tabes, det vil sige at eleven ikke får lært det tilsigtede. Derfor må læreren sikre, at eleven har de effektive midler for at lære, ellers må læreren acceptere konsekvenserne. Men eleven har selvfølgelig også et ansvar for ikke at have opfyldt det forventede (Brousseau, 1997, s.32). Vi skal se nærmere på fordelingen af ansvar mellem læreren og eleven i et kommende afsnit (afsnit 5.6), hvor begrebet "didaktisk kontrakt" beskrives.



Figur 10: Det didaktiske dobbeltspil

Læreren har, som beskrevet ovenfor, en dobbeltrolle i en undervisningssituation. For det første at gøre den tilsigtede matematiske viden personlig for eleven ved at oprette en miljø, der kan sørge for, at eleven kan finde denne matematiske viden. For det andet at forme den af eleven fundne matematiske viden, så den får karakter af officiel viden. I stedet for at gøre dette, kan læreren også vælge direkte at fortælle eleverne den officielle viden, som de uden videre tænkning skal acceptere. Eleverne kan få denne viden placeret et sted i deres hjerner, hvor bevarelsen af denne viden i sidste ende kommer til at afhænge af elevernes hukommelse. Men denne måde at undervise på, vil ikke gavne eleverne. Derfor må læreren konstruere et didaktisk miljø, som eleven skal placeres i, og dette er idéen i TDS.

Den faglige viden eksisterer på to måder: en officiel, der er eksplicit og fælles, og en personlig, der er uformel og implicit. Matematik i lærebøger er et eksempel på førstnævnte. Det er en viden, som er anerkendt af matematikersamfundet. Den personlige viden derimod er den viden, eleven har tilegnet sig, og som giver mening for vedkommende. Udfordringen ligger i at få eleverne til at tilegne sig den officielle viden og personliggøre den, samt sørge for at deres personlige viden afspejler den officielle. Elevernes interaktion med miljøet skulle gerne resultere i personliggørelse af den officielle viden. Det didaktiske miljø skal altså indeholde en modstand, som eleverne skal overkomme, hvilket foregår ved, at de finder en vinderstrategi, som gerne skulle afspejle den officielle viden, læringssituationen omhandler (Brousseau, 1997, s.23, 227).

5.1 Adidaktisk potentiale

I TDS er det essentielt, at det ikke er læreren, der skal afgøre, om elevernes løsninger er korrekte eller ej. Det didaktiske miljø bør være konstrueret således, at det selv viser det. For at eleverne kan arbejde med miljøet uafhængigt af læreren, skal det altså have et *adidaktisk potentiale*. Der er mange situationer i undervisningen, som har et adidaktisk potentiale. Disse situationer er indrettet således, at der er et miljø, som sørger for feedback af elevernes handlinger. Læreren må blande sig, hvis den feedback der er, er utilstrækkelig for at de kan fremstille ny viden. Så må læreren modificere miljøet. Læreren kan ignorere det adidaktiske potentiale og begynde at blande sig ved at evaluere elevernes svar, i stedet for at vente til eleverne reagerer på miljøets feedback. Hvis situationen ikke har sådan et feedback potentiale, er der ikke andet at gøre end at læreren må blande sig (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s.117). I TDS bliver undervisningen delt op i forskellige faser. Disse vil vi beskrive nu.

5.2 De fem faser

Det didaktiske spil udmunder sig i forskellige faser i undervisningen, som kan være didaktiske såvel som adidaktiske. Det didaktiske spils fem faser er følgende:

Devolution	Den første fase er en devolutionssituation, hvor læreren overgiver det didaktiske miljø til eleverne, præsenterer dem for opgaven og dens betingelser, afklarer spørgsmål og sætter dem i gang. Eleverne skal herefter kunne løse problemet enten ved kendte metoder eller metoder, som de kan udvikle. Devolutionsfasen er en didaktisk situation.
Handlingssituation	I handlingssituationen vil læreren forholde sig passivt og observere elevernes udforskning af miljøet. Da læreren ikke griber ind i denne fase, har vi en adidaktisk situation. Her skal eleverne finde en vinderstrategi for at vinde spillet. Men hvis forhindringerne bliver for store, kan læreren dog devoluere et modificeret miljø.
Formuleringssituation	I formuleringssituationen vil eleverne

	formulere og diskutere deres første hypoteser. Læreren organiserer denne fase ved at stille spørgsmål og bede eleverne om at præcisere deres formuleringer, så deres viden bliver fælles. Formuleringssituationen kan både være didaktisk og adidaktisk.
Valideringssituation	I valideringssituationen er miljøet en styret diskussion. Her vil eleverne bevise de hypoteser, som er opstået i formuleringssituationen. De fundne hypoteser bekræftes eller afvises. Dette gøres enten af læreren, eller det kan foregå ved en klassediskussion. Læreren vil som regel styre diskussionen, og derfor er denne fase didaktisk. Men læreren skal forsøge at blande sig mindst muligt.
Institutionalisering	Den sidste fase er en institutionaliseringssituation, hvor læreren præsenterer den officielle viden og sammenholder denne med den indvundne fælles viden. Denne fase er en didaktisk situation.

Læringen opstår primært i de faser, hvor eleverne selv arbejder med miljøet, og læreren ikke griber ind. Disse faser er i det ovenstående blevet betegnet som adidaktiske situationer, som især er handlings- og formuleringssituationerne. Løsning af hjemmeopgaver er ligeledes en adidaktisk situation. En didaktisk situation er derimod, når læreren griber ind i miljøet. Det sker, som nævnt i skemaet foroven, gennem devolution, validering og institutionalisering (Winsløw, 2006b, s. 71). På universitetet er institutionalisering den oftest forekommende fase, f.eks. er forelæsninger ren institutionalisering, idet de består i, at læreren præsenterer den officielle viden.

Adidaktiske situationer, som medfører personlig viden, der kan fællesgøres som den tilsigtede viden, når eleverne vinder spillet i det didaktiske miljø, kaldes *fundamentale situationer* (Brousseau, 1997, s.29).

De fem faser behøver ikke nødvendigvis at forekomme i den nævnte rækkefølge. Men nogle af faserne hænger alligevel sammen, eksempelvis er en devolution nødvendig for at en handlingssituation kan sættes i gang. Lærere og elever har altså forskellig grad af ansvarlighed i de forskellige faser af et didaktisk spil. Under devolution og institutionalisering har læreren hovedansvaret, mens eleverne har hovedansvaret i handlings- og formuleringssituationer. De roller henholdsvis læreren og eleverne har i de forskellige faser, kan ses i figur 11 (Winsløw, 2006b).

	Lærerens rolle	**Elevernes rolle**	**Miljø**
Devolution	Igangsætte Afklare	Modtage og forstå opgave	Etableres
Handling	Observere Reflektere	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskningsfelt
Formulering	Organisere Spørge	Formulere Præcisere	Åben diskussion
Validering	Lytte Evaluere	Argumentere Reflektere	Styret diskussion, bedømmelse
Institutionalisering	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutionel viden

Figur 11

Der kan være mange årsager til, at elever ikke lærer den tilsigtede viden. Vi vil nu gennemgå nogle mulige årsager til dette.

5.3 Didaktisk transposition

Hvis elever skal opføre sig som matematikere til undervisningen, altså at de gerne selv vil lære noget matematik ved at løse problemer, og at deres formål ikke er at tilfredsstille læreren, kan dette kun lade sig gøre, hvis matematikken de skal lære, har samme karakter som matematikeres viden. Da matematisk viden ændres i forbindelse med, hvilken sammenhæng den bliver brugt i, bliver elever ikke undervist i matematikernes viden, men i den matematiske viden, som har til formål at forberede dem til livet.

Man taler om *didaktisk transposition,* når den matematiske viden går fra en institution, som fremstiller matematik, til en institution, som underviser i matematik. Transpositionen kan have uheldige effekter, blandt andet at den matematiske viden, i håb om at gøre den lettere tilgængeligt for elever, ændres til noget helt andet. Dermed kan man ende med at have begreber i skolematematik, som matematikere slet ikke kender til.

Skolematematik adskiller sig også fra akademisk matematik på en anden måde, nemlig at en del af den generelle matematiske viden kan isoleres og gives et særligt navn, som var det et emne for sig selv. Vi ser mange eksempler på dette i grundskolen, f.eks. at løse ligninger. Ligningsløsning kan blive et særskilt emne, som elever skal trænes i, og når de til sidst kan løse ligningerne, afsluttes emnet. Men sådan gør en matematiker ikke. At løse ligninger er ikke et mål for matematikeren, men et redskab vedkommende kan bruge til dagligt.

Endnu en forskel er formålet med at ”lave” matematik. Matematikeren ønsker viden og bruger sine matematiske evner, f.eks. ligningsløsning, til at opnå dette. Elevernes formål er som regel at vise læreren, at de kan løse ligninger.

5.4 Lærerens epistemologi

Den matematiske viden på skolen er påvirket af lærerens viden om, hvordan man tilegner sig matematisk viden. Denne viden kaldes *lærerens epistemologi*. Læreren kan f.eks. forvente, at elever svarer på en måde, som er korrekt ifølge læreren. Man kan her også tale om lærerens personlige forhold til matematik, lærerens egne tanker om at undervise i og lære matematik (f.eks. når læreren er overbevist om, at han ikke må skrive falske udsagn på tavlen).

5.5 Lærerens rolle

En vigtig faktor i undervisningen er, hvordan læreren håndterer de forskellige situationer. Ifølge Arsac, Balacheff og Mante (1992, s.14-15) vil lærerens håndtering især afhænge af faktorerne *tid* og *lærerens epistemologiske ansvar*.

Der er en *tidsramme* for lektionerne på skoler på 45 minutter, som skal overholdes. Dette er med til at påvirke de valg, som læreren foretager i undervisningen. Læreren kan udelade noget eller vente med det til næste dag på grund af tidspresset. Men det er eksempelvis nødvendigt at have god tid til devolutionsfasen, hvor ansvaret gives til eleverne. Ligeledes skal eleverne have tid til selv at finde et svar, for hvis læreren f.eks. siger, at de ikke har så meget tid tilbage, og de hurtigt må finde et svar, antyder man eller minder dem om, at læreren kender løsningen, og at det er en velkendt løsning, som de skal finde.

Samtidig føler læreren, at det er nødvendigt at afslutte undervisningen med en acceptabel slutning. Spændingen mellem dette og ikke at blande sig for meget bliver kaldt for lærerens *epistemologiske ansvar*. Læreren vil før eller senere føle et ansvar for at rette elevernes fejl eller validere deres svar, for at eleverne opnår den tilsigtede viden.

5.6 Didaktisk kontrakt

Et fundamentalt begreb i TDS er den *didaktiske kontrakt*, hvilket er en uskreven kontrakt mellem lærer og elever, omhandlende hvad der forventes af begge parter. Begrebet didaktisk kontrakt stammer fra Brousseaus interviews med en dreng ved navn Gäel, som i en alder af 8,5 år havde vanskeligheder i skolens matematikundervisning. Den didaktiske kontrakt består i lærerens forventninger til elevens opførsel i undervisningen og samtidig også elevens forventninger til lærerens undervisningsvaner. Begrebet didaktisk kontrakt opstod som et nødvendigt teoretisk begreb, der skulle forklare vanskelighederne i elevernes læring (Brousseau, 1997, s.225). Hersant & Perrin-Glorian (2005) beskriver den didaktiske kontrakt som *"en måde at regulere lærerens og elevernes gensidige forventninger med hensyn til matematikken der bliver lært. Devolution og institutionalisering er to vigtige måder at regulere den didaktiske kontrakt"* (s.116).

Didaktiske situationer forudsætter kontraktens eksistens. Kontrakten er implicit, men ekspliciteres når den brydes, hvilket udgør betingelsen for læring. Eleverne forventes at acceptere det devoluerede miljø samt engagere sig i det. Læreren forventes at designe miljøet, så eleverne kan lære det ønskede. Vi ser hermed et paradoks, nemlig at de faglige opgaver der stilles, kender læreren løsningen på, og eleverne der søger løsningen på opgaverne ved også, at læreren kender disse. Men læreren må ikke fortælle dette, da det vil ødelægge elevernes mulighed for at finde løsningen. Det fundamentale paradoks består i, at hvis den didaktiske kontrakt ikke forsvinder, kan den ikke opfyldes. Fortæller læreren, hvad denne vil have eleverne til at gøre, kan dette ikke længere opnås (Brousseau, 1997, s. 31). *"Lærerens forventninger og intentioner kan aldrig blive helt usynlige, men jo mere eleven kan glemme disse, des mere vil læringen være personlig for eleven"* (Warfield, 2006, s. 32).

I devolutionsfasen er det altså lærerens opgave at fremkalde et ansvar hos eleverne, som får dem til at føle, at de må løse problemet. Denne fase er essentiel, men det er ikke sikkert, at den vil lykkes. Hvis den ikke lykkes og eleven ikke vil påtage sig dette ansvar, må læreren hjælpe til. Det er i devolutionsfasen, at den didaktiske kontrakt kommer på banen.

Den didaktiske kontrakt bringer både eleverne og læreren i et paradoks. Læreren ønsker at eleverne skal lære et matematisk begreb, men på den anden side må læreren ikke fortælle om dette begreb eller svaret på spørgsmålet, idet eleverne så ikke vil komme til at lære noget ved egen hjælp. Hvis eleverne accepterer, at læreren skal fortælle dem det hele, vil de ikke konstruere noget selv og dermed ikke lære noget. Hvis eleverne derimod ikke vil lytte til lærerens anvisninger, kan de ikke komme videre (Warfield, 2006, s.35).

Der kan i undervisningen ske et brud af den didaktiske kontrakt ved f.eks., at eleven har en forventning om, at læreren vil introducere og gennemgå et nyt begreb ved tavlen, og læreren så vælger at give eleven en opgave, hvor eleven selv skal komme frem til det nye begreb. Eleven kan opfatte denne handling som et brud på kontrakten.

5.6.1 Effekter af den didaktiske kontrakt

Hvis læreren vil opfylde sin del af kontrakten for enhver pris, kan dette have uønskede effekter for den didaktiske kontrakt. Disse problematiske effekter vil vi beskrive nærmere (Brousseau, 1997, s.25-29)

Topaze-effekten

En af de nævnte effekter er *Topaze-effekten*. Denne opstår, når læreren stræber efter at få opfyldt kontrakten og dermed forsøger at undgå, at eleverne laver fejl. Når læreren opdager, at eleverne har svært ved at løse opgaven, vil læreren gribe ind og overtage næsten hele ansvaret for opgaveløsningen. Læreren kommer så til at forære svaret til eleverne, og handlingssituationer forvandles til institutionalisering (Winsløw, 2006b, s. 76). Hermed kan den tilsigtede viden ikke opnås, idet eleven ikke selv vil komme til at bidrage med noget på grund af lærerens anvisninger.

Jourdain-effekten

Jourdain-effekten er en form for Topaze-effekt (Brousseau, 1997). Denne effekt handler om lærerens iver efter at konstatere en faglig indsigt hos eleven, som i virkeligheden ikke har lært noget, men blot har fulgt lærerens anvisninger. En del matematiske opgaver medfører elevernes formelle succes, når de kan finde ud af at løse dem. Men disse opgaver hjælper ikke med at opnå den tilsigtede viden. Læreren kan alligevel overbevise sig selv om, at eleverne har udført et godt stykke arbejde. Elevernes handlinger tolkes således ind i faglige sammenhænge, som de ikke behersker.

Metakognitivt skift

Metakognitivt skift opstår, når officiel viden erstattes af uformelle modeller af denne, da de er nemmere at forstå. Men det faglige indhold er ikke det samme. Er skiftet konsekvent, kan det føre til Jourdain-effekten, altså hvis elevernes succes med de uformelle modeller tolkes som selvstændigt arbejde med den officielle viden.

Misbrug af analoge miljøer

Misbrug af analoge miljøer er en effekt, som ses ret tit i undervisningen på grundskolen. Det er en indpakning af Topaze-effekten. Situationen opstår, når læreren løser en opgave på tavlen, som eleverne ikke kunne løse, og derefter stiller en opgave næsten magen til. Eleverne vil nu ikke søge at løse opgaven, men blot kopiere metoden og udføre den på den nye opgave.

Misforstået behov for variation

En *misforstået behov for variation* af en situation kan opstå, idet en didaktisk situation er vanskelig at gentage. Forskellige klasser og forskellige elever vil reagere forskelligt, og derfor vil resultatet blive noget andet. Læreren kan føle behov for variation, men det kan bevirke en reduktion af adidaktiske situationer og medføre trivialisering af handlings- og formuleringssituationer.

Når man planlægger en undervisning, hvor målet er at få eleverne til at lære noget matematik, vil TDS have en til at organisere det didaktiske miljø således, at den bedste måde eleverne kan håndtere miljøet på, skal være den tilsigtede viden, altså det stykke matematik, man vil lære dem. Men som vi lige har gennemgået, er det ikke altid lige let at nå dette mål, da der er mange uønskede effekter af den didaktiske kontrakt. Så man skal organisere det didaktiske miljø således, at man ikke havner i den fælde med at ville udføre ”jobbet” for enhver pris.

Et berømt fænomen, som illustrerer at elevers forhold til opgaver på en destruktiv måde kan være domineret af den didaktiske kontrakt, er fænomenet "Kaptajnens alder". Dette bygger på en opgave, som lyder: *"På et skib er der 26 får og 10 geder. Hvor gammel er kaptajnen?"*. Undersøgelser har vist, at de fleste elever svarer "36 år". Dette viser, at de fleste elever tilegner sig den didaktiske kontrakt så meget, at de ikke længere tænker over konteksten i opgaverne, men udelukkende ser på tallene (Winsløw, 2006b, s.76).

5.6.2 De fire dimensioner

Den didaktiske kontrakt kan opdeles i fire dimensioner: *det matematiske domæne*, *den didaktiske status af viden*, *karakteren af den didaktiske situation* og *fordeling af ansvar* (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s.118-119). Disse dimensioner er afhængige af hinanden. Fordelingen af ansvar af det matematiske domæne har en forbindelse med den didaktiske status af denne viden og karakteren af den didaktiske situation.

Det matematiske domæne

At placere et matematisk problem i et bestemt *matematisk domæne* eller felt forsikrer os om, at nogle bestemte teknikker vil være at foretrække frem for andre. Læreren kan bruge dette element til at trække nye matematiske områder på banen, som eleven ikke har tænkt på f.eks. ved at oversætte problemet til andre matematiske kontekster (jf. afsnit 3.5).

Denne dimension kan både fremkomme globalt, i form af f.eks. algebraisk eller geometrisk kontrakt, og den kan forekomme lokalt, f.eks. som ændringer i den matematiske kontekst.

Den didaktiske status af viden

Viden kan adskilles på tre måder. Der er den nye viden, som vi beskriver som den tilsigtede viden, der er den gamle viden, som allerede er etableret og ikke længere skal læres. Mellem de to er der en viden, som er i udvikling. Denne viden kan igen deles i tre: a) for nylig introduceret viden, b) viden som er i færd med at blive institutionaliseret og c) institutionaliseret viden.

Karakteren af den didaktiske situation

Denne dimension viser, hvilken fase man er i, i den didaktiske situation, og hvilken karakter den har (jf. afsnit 6.2). Den didaktiske kontrakt ændres alt efter hvilken didaktiske situation man er i, f.eks. om man er i en adidaktisk situation.

Fordeling af ansvar

Denne dimension vedrører fordelingen af ansvar mellem lærer og elever med hensyn til den tilsigtede viden. Normalt ser man, at læreren giver mere ansvar til eleverne i forbindelse med gammel viden, og selv tager ansvaret for ny viden. Læreren kan kun give ansvaret videre til eleverne i forbindelse med ny viden, hvis miljøet er indrettet således, at det kan give eleverne adidaktisk potentiale.

5.6.3 De tre niveauer

Herudover skelnes mellem tre niveauer af kontrakten: Makro-, meso- og mikro-kontrakten.

Førstnævnte vedrører formålet med undervisningen. Meso-kontrakten vedrører afviklingen af en aktivitet, f.eks. opgaveløsning. Denne er deduceret fra to dimensioner: eksistensen af et miljø med feedback potentiale og status af den pågældende viden. Mikro-kontrakten vedrører en episode som har fokus på en enkel del af det matematiske indhold i undervisningen, f.eks. et konkret spørgsmål i en opgave.

Nogle af de nævnte dimensioner forbliver stabile inden for hvert niveau, men alle fire dimensioner er kun stabile samtidig i mikro-niveauet. I makro-kontrakten er det matematiske domæne sjældent stabilt. Derfor vil udgangspunktet for en analyse af den didaktiske kontrakt være på mikroniveau, så på mesoniveau og til sidst på makroniveau (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s.119-120).

5.6.4 Kollektiv vs. individuel produktion

Læreren kan fordele ansvaret med hensyn til status af viden på to forskellige måder. Enten ved *kollektiv produktion* eller ved *individuel produktion*.

Hvis den pågældende viden er kendt af de fleste elever, har man en *mikrokontrakt af konsensus*. Det sker ved, at de fleste elever kan svare på lærerens spørgsmål, og klassen accepterer svaret efter nogle elever har udtrykt dette.

Hvis læreren spørger én bestemt elev for at tjekke vedkommendes viden, er der en *mikrokontrakt af individuel produktion*.

Hvis der er tale om en ny viden, og læreren beder eleverne forklare, er der en *mikrokontrakt af kollektiv produktion* (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 136).

6 Didaktisk ingeniørarbejde

Vi vil benytte metodologien didaktisk ingeniørarbejde til vores undervisningsforløb, idet vores teori vil være baseret på TDS. Didaktisk ingeniørarbejde betegner en forskningsbaseret systematisering af det arbejde, der er involveret i forberedelsen af undervisning. Begrebet opstod i starten af 1980'erne i Frankrig for at betegne en slags didaktisk arbejde, der kan sammenlignes med en ingeniørs arbejde. En ingeniør validerer sit design af f.eks. et højhus på basis af både forudsigelser vedrørende højhusets egenskaber såsom stabilitet, kapacitet osv., som kun kan udledes af matematiske og fysiske teorier samt realiseringen af designet, dvs. få bygget højhuset, hvorefter det kan tjekkes om forudsigelserne var korrekte (Sierpinska, 1999b, s.2). Ligesom ingeniøren skal læreren forberede undervisningen og den tilsigtede viden i overensstemmelse med TDS og derefter få udført undervisningen.

Når man vil ændre en eksisterende undervisningsform, er det vigtigt under ingeniørarbejdet, at man først analyserer det eksisterende for at afgøre dets utilstrækkelighed. Følgende typiske spørgsmål søges besvaret: Hvorfor skal det eksisterende ændres? Hvilke vanskeligheder kan forventes, og hvordan overkommes disse?

Når elever skal lære ny viden, må det foregå i overensstemmelse med den allerede etablerede viden, de besidder. Ellers kan den etablerede viden være en forhindring i at lære den nye viden. Derfor må man, i forbindelse med at lære ny viden, reorganisere eller generalisere den etablerede viden. Læreren kan ikke altid vide, hvordan den etablerede viden kan fungere som en forhindring i at lære ny viden.

Derfor må man under ingeniørarbejdet skelne mellem forskellige slags forhindringer. Artigue (1994) skelner mellem tre forhindringer: 1) *epistemologiske forhindringer*, som vedrører den matematiske viden, karakteristika for dens udvikling og dens nuværende funktion 2) *kognitive forhindringer*, som vedrører målgruppen, 3) *didaktiske forhindringer*, som vedrører den institutionelle funktion af undervisningen (s.32). Yderligere kan disse forhindringer karakteriseres som *eksterne forhindringer* eller *interne forhindringer*, hvor førstnævnte til en vis grad er uundgåelige (Artigue, 1994, s.32).

Om de kognitive forhindringer kan der generelt siges, at de er begrænsninger, et barn i forhold til sin alder har i at lære ny viden. Man kan nemlig kun tilegne sig ny, som passer til ens evner i et bestemt alderstrin. Man kan ikke begynde at lære en 8-årig om analysens fundamentalsætning. I forhold til vores undervisningsforløb, hvor den tilsigtede viden er emnet proportionalitet, kan man tale om en kognitiv forhindring, som er at vores målgruppe er en 6. klasse, dvs. 12-13-årige, som ifølge Piaget stadig er i den fase, hvor de er i færd med at udvikle deres proportionelle ræsonnement (Nunes et. al., 1993). Aldersmæssigt er de derfor ikke tilstrækkeligmodne til helt at forstå proportionalitet.

De didaktiske forhindringer opstår ved de valg, som skolesystemet eller læreren har taget. Man skal planlægge, hvad elever skal lære først, og hvad de skal lære senere i samme emne, således at den etablerede viden ikke kommer til at forhindre eleverne i at lære noget nyt. I forhold til emnet proportionalitet kan man tale om følgende to didaktiske forhindringer: (a) at eleverne vil benytte gange-over-kors teknikken i forbindelse med alle proportionalitetsopgaver, hvis denne teknik er blevet lært dem, (b) eleverne kan få udviklet deres proportionelle ræsonnement så godt, at de kan tro, at relationen også er lineær i ikke-proportionelle opgaver.

Epistemologiske forhindringer opstår ved de matematiske begrebers betydninger. I forhold til proportionalitet er en epistemologisk forhindring, at mange elever udfører den additive strategi, når de ser en proportionalitetsopgave.

Med hensyn til ingeniørarbejdet, skelnes mellem to typer valg: 1) makrodidaktiske eller globale valg, som styrer hele ingeniørarbejdet og 2) mikrodidaktiske eller lokale valg, der styrer den lokale organisering af ingeniørarbejdet, altså organisering af en lektion eller en fase (Artigue, 1994, s.34). TDS anvendes ved de lokale valg, som er underordnet de globale og derfor skal være forenelige hermed.

I vores undervisningsforløb har vi gjort en del overvejelser omkring de makrodidaktiske og mikrodidaktiske valg. De makrodidaktiske valg vi har foretaget, er følgende:

1. *Begrænse kompleksiteten*: Da vores forløb er relativt kort, vil vi ikke udsætte eleverne for opgaver, som forvirrer dem mere end nødvendigt. Vi skal bl.a. bruge tal der ”går op” i de fleste opgaver.
2. *Kendt viden bruges som grundlag for ny viden*: Vi vil medtage proportionalitetsopgaver inden for emner, som de allerede kender, f.eks. i geometri. Af denne grund skal vi f.eks. undgå at medtage proportionalitetsopgaver i sandsynlighed.
3. *Velkendte situationer*: Vi vil stræbe imod at lave opgaverne således, at konteksten er velkendt for dem. At samle et puslespil er f.eks. velkendt for dem, samtidig med, at de vil synes, det er sjovt.
4. *Spændende opgaver*: Vi vil benytte opgaver, som ikke er nogen almindelige regneopgaver fra lærebogen, men nogle opgaver som er gjort spændende. F.eks. får de en opgave hvor de skal finde en jættes højde ud fra en tegning af jættens øre.
5. *Variation*: Vi vil skabe meget variation i undervisningen. Både med hensyn til variation mellem bl.a. tavlegennemgang, diskussion i grupper og klippeopgaver, men også variation i de forskellige kontekster, som opgaverne bliver stillet i.

På det mikrodidaktiske niveau vil vi anvende TDS.

7 *A priori* analyse af undervisningsforløbet

I dette afsnit vil vi beskrive vores undervisningsforløb. Vi havde 4 lektioner til rådighed den første uge af forløbet (onsdag og torsdag), og i den efterfølgende uge havde vi igen 4 lektioner (onsdag og torsdag), altså designede vi et forløb til 8 lektioner. Vi brugte som omtalt TDS som et designværktøj til vores forløb. Af denne grund skulle eleverne tilegne sig viden gennem spil med det didaktiske miljø. Vi delte forløbet op således, at eleverne skulle arbejde med opgaver i forskellige faglige kontekster (jf. afsnit 3.5). Der blev således stillet opgaver i både geometriske, algebraiske og numeriske kontekster.

I første lektion skulle vi introducere eleverne til proportionalitet med en opgave, hvor de kom til at lære, hvad proportionelle størrelser vil sige i en geometrisk kontekst. Efterfølgende skulle Brousseaus papirtykkelsesopgave afprøves i en lidt anderledes version end Brousseaus. Denne lektion ville give eleverne mulighed for at beregne enheden. Dernæst skulle Brousseaus puslespilssituation afprøves i 3. og 4. lektion, eleverne ville bedre kunne håndtere denne efter at have lært at beregne enheden, da de skal benytte enhedsstrategien til denne situation. Den 5. lektion handlede om at sammenligne sit eget øre med jættens øre, som de fik udleveret af læreren, for derefter at finde jættens højde ved at måle egen højde. Der var altså tale om et problem med en manglende ubekendt.

Til sidst i forløbet udsatte vi eleverne for ikke-proportionelle opgaver. Vi fokuserede på en geometrisk ikke-proportionel opgave i 6. lektion, hvor et areal skulle forstørres ved at angive en sidelængde, idet mange elever generelt har problemer med dette. Derefter fulgte en lektion med blandede opgaver, hvor der både indgik proportionelle opgaver som sammenligningsopgaver, opgaver med en manglende ubekendt samt ikke-proportionelle opgaver, hvor der indgik en additiv, en konstant og en affin opgave samt geometriske opgaver. Disse blandede opgaver skulle samtidig fungere som en slags prøve til sidst i forløbet.

1. Lektion: Samme form.

<u>Formål:</u>

Vi vil med den første lektion introducere eleverne til proportionalitet. De skal arbejde med en geometrisk situation. Eleverne skal gøre overvejelser omkring hvad ”samme form” betyder, idet de skal betragte to rektangler, som henholdsvis har sidelængder 3 cm og 5 cm, og 5 cm og 7 cm. Den tilsigtede viden i denne lektion er at etablere en konflikt med den additive strategi.

Vi har valgt at begynde i en geometrisk kontekst, da eleverne på dette klassetrin har mere eller mindre kendskab til ligedannede figurer (jf. afsnit 4). Det er således en kendt viden, der bliver præsenteret for dem, men i en form, som de ikke er vant til. Klassen er nemlig vant til en undervisningsform, som ifølge matematiklæreren er mere lærebogsstyret.

<u>Skema:</u>

Vi vil for overskuelighedens skyld først vise lektionerne i skemaform, som er bygget op omkring faserne i TDS: Devolution, handling, formulering, validering og institutionalisering (jf. afsnit 5.2). Efterfølgende kommer en nærmere beskrivelse af lektionernes indhold.

Devolution	Det didaktiske miljø oprettes af læreren. Han begynder med at spørge: ”Er der nogen, der kan fortælle mig, hvad et kvadrat er”.
Formulering	Elever svarer.
Devolution	Læreren spørger: ”Hvad er et rektangel?”.
Formulering	Elever svarer.
Devolution	Læreren siger: ”Tegn et kvadrat med sidelængden 3 cm i kladdehæftet”
Handling	Elever tegner individuelt.
Devolution	Læreren siger: ”Tegn et kvadrat med sidelængden 5 cm i kladdehæftet”.
Handling	Eleverne tegner individuelt.
Devolution	Læreren spørger: ”Har de samme form?”
Formulering	Her svarer eleverne ”Ja”.
Institutionalisering	Læreren fortæller, at alle kvadrater har samme form.
Devolution	Nu beder læreren eleverne om at tegne to rektangler på henholdsvis 3 cm x 5 cm og 5 cm x 7 cm.
Handling	Eleverne tegner to rektangler efter de angivne mål.
Devolution	Læreren spørger: ”Har de samme form eller forskellig form?” ”Skriv ja eller nej i jeres kladdehæfter”.
Handling	Eleverne skriver enten ”ja” eller ”nej” i deres kladdehæfter. (Deres umiddelbare indtryk).
Devolution	Læreren tegner rektanglerne på tavlen, og siger ”Giv en begrundelse for jeres svar ved at bruge tallene”. Peger på tallene på tavlen.
Handling	Eleverne sidder i 5 min. og udarbejder en begrundelse i deres kladdehæfte. Læreren cirkulerer i klassen.

Formulering	Efter de 5 minutter er gået, udvælger læreren nogle af de elever, der har skrevet "ja" i deres kladdehæfte til at forklare deres udregninger. Dernæst vælger han nogle af dem, der har skrevet "nej". Her kan eleverne komme op til tavlen og skrive.
Validering	De forskellige strategiers gyldighed skal nu diskuteres i klassen ved, at eleverne forsøger at forsvare deres egen strategi ved at overbevise de andre om deres egen eller modbevise de andres.
Institutionalisering	Til sidst skal læreren institutionalisere den tilsigtede viden ved at vise et eksempel på tavlen: Et rektangel med sidelængderne 1 cm og 7 cm tegnes på tavlen. Der lægges 2 til sidelængderne, og det nye rektangel tegnes: sidelængderne bliver 3 cm og 9 cm. Man kan tydeligt se, at de ikke har samme form.

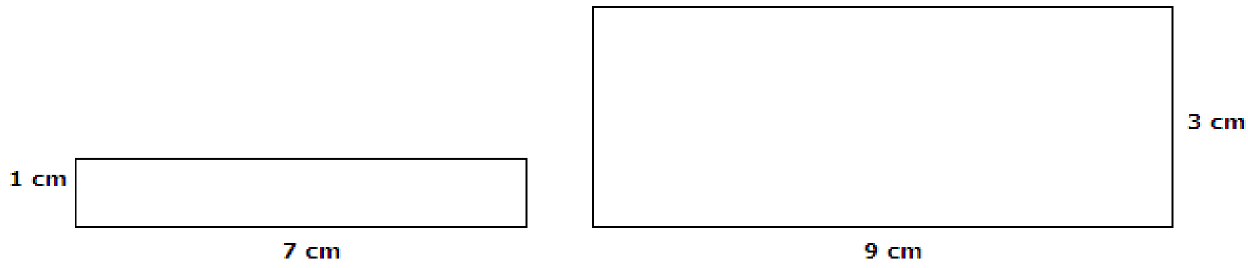
<u>Beskrivelse af skema for 1.lektion:</u>

Læreren skal uddele nye kladdehæfter til eleverne, som de skal bruge i løbet af forløbet, og fortælle dem, at de skal benytte kuglepen. De må ikke benytte lommeregnere til dette forløb. Derefter skal læreren spørge, om der er nogen, der kan forklare hvad et kvadrat og hvad et rektangel er, så eleverne kan blive mindet om dette, som for dem er en gammel viden. Herefter vil læreren bede dem om at tegne et kvadrat med sidelængden 3 cm og et kvadrat med sidelængden 5 cm, (imens vil læreren se på deres tegninger ved at gå rundt i klassen), og spørge *"Har de to kvadrater samme form?"*. Eleverne vil antageligt svare, at de har samme form. Dernæst vil læreren fortælle eleverne, at alle kvadrater, uanset hvilken sidelængde de har, har samme form. Eleverne skal selv sidde og tegne i deres kladdehæfter, idet de så vil måle med lineal og have rigtige mål, i forhold til hvis læreren havde tegnet på tavlen.

Læreren vil nu bede dem om at tegne to rektangler på næste side. Den ene skal have sidelængderne 3 cm og 5 cm, og den anden skal være på 5 cm og 7 cm. Eleverne skal nu skrive ned, om de synes, at de har samme form ved at skrive enten "ja" eller "nej". Her er det vigtigt, at vi får deres umiddelbare indtryk. Herefter vil læreren bede dem om at udarbejde en begrundelse ved at bruge tallene. For at være sikker på, at eleverne ikke sletter deres ”umiddelbare indtryk”, når de skal udarbejde begrundelsen, vil vi sørge for, at de benytter kuglepen, og at de kun skal strege over én gang, når de har skrevet noget forkert. Dette sikrer os, i vores analyse, at vi kan skelne mellem de forskellige besvarelser og evt. forklare grunden til ændringen af deres umiddelbare indtryk. Eleverne skal fortsat sidde alene og begynde at overveje begrundelser og skrive udregningen ned i kladdehæftet. Imens går læreren rundt i klassen og kigger på elevernes udregninger. Nu skal læreren tage over, og bede to af de elever, der har skrevet ”ja” om at forklare deres begrundelse evt. ved tavlen, og dernæst få forklaringer fra to af de elever, der har skrevet ”nej”. Læreren skal vælge elever med forskellige tilgange. Her vil de forskellige strategier komme frem, som vi har beskrevet nedenunder, især den additive strategi af de elever, der har skrevet ”ja” og den multiplikative strategi af de elever, der har skrevet ”nej”.

I diskussionsfasen vil læreren bede eleverne om at forsvare deres påstande ved at give andre eksempler eller modbevise de andres påstande. Hensigten med diskussionsfasen er at lade de elever, der har benyttet den multiplikative strategi, overbevise de andre om, at deres strategi ikke holder ved at give eksempler. Læreren skal blot styre diskussionen og prøve at undgå at blande sig. Vi kan på forhånd ikke vide, hvordan denne diskussion vil forløbe, og hvorvidt eleverne bliver overbevist om den multiplikative strategi i diskussionsfasen. Det kommer an på hvor mange elever, der benytter den. Det kan også være, at eleverne begynder at diskutere definitionen af ”samme form”.

Læreren skal til sidst institutionalisere den tilsigtede viden ved at vise et eksempel. Han skal tegne to rektangler med sidelængder 1 cm og 7 cm, og her vil det tydelig kunne ses, at den additive strategi er forkert. Idet hvis man lægger 2 til, fås et rektangel med sidelængderne 3 cm og 9 cm. Man kan tydeligvis se ud fra tegningerne, at de ikke har samme form.



Figur 12

<u>Forventede strategier:</u>

Nogle mulige strategier for at løse opgaven, enten korrekt eller forkert, kan være:

1. strategi: Man tegner diagonalerne og måler vinklerne af de trekanter, som fremkommer. Hvis begge trekanter har ens vinkler, har rektanglerne samme form. Denne løsningsstrategi er en mulighed, som fører til, at rektanglerne har forskellig form.

2. strategi: Den additive løsning, hvor man finder den samme differens (2 cm) af siderne. Dette fører til, at rektanglerne har samme form.

3. strategi: Perceptuel forskel, hvor man kan se, at det mindre rektangel mere ligner et kvadrat. Denne tankegang fører til, at rektanglerne har forskellig form.

4. strategi: Udregne værdien af forholdene, hvor man får henholdsvis (5/3) 1.7 og (7/5) 1.4 eller (3/5) 0.6 og (5/7) 0.7, og svaret fører til, at rektanglerne har forskellig form. Altså finder man her ud af, at idet kvotienterne ikke giver det samme resultat, betyder det at forholdet mellem længde og bredde ikke er den samme i de to rektangler.

5. strategi: Finde mindste fælles multiplum, således at 1. koordinaten bliver ens, og det skal undersøges om 2. koordinaten også bliver ens, idet rektanglerne så vil have samme form. F.eks. kan eleven gange rektanglet med sidelængder 3 cm og 5 cm med 5, hvorefter det nye rektangel vil få sidelængderne 15 cm og 25 cm. Det andet rektangel ganges med 3, så sidelængden 5 cm kan blive 15 cm, mens sidelængden 7 cm bliver 21 cm. Da denne side bliver 21 cm og ikke 25 cm, har

rektanglerne ikke samme form. Denne løsningsstrategi svarer til dels til 4. strategi uden lommeregner, idet: 5/3 = 25/15 ≠ 21/15 = 7/5.

Den første strategi er en korrekt måde at besvare opgaven på, men da læreren skal bede eleverne om at begrunde med tallene, burde denne strategi ikke fremkomme. Vores tilsigtede viden omfatter ikke denne strategi, og derfor vil vi undgå den, ved at eleverne skal begrunde med tallene.

Den anden strategi, altså den additive strategi, er en forkert måde at løse opgaven på. Vi har beskrevet denne strategi i teoriafsnittet som en strategi, der tit bliver benyttet af elever i forbindelse med proportionalitetsopgaver (se afsnit 3.4.3). Der er derfor en stor sandsynlighed for, at nogle elever kommer til at benytte den additive strategi. Læreren skal i institutionaliseringsfasen vise et eksempel, hvor det gøres klart for eleverne, at den additive strategi ikke er korrekt.

Den tredje strategi er heller ikke en ”korrekt” strategi, idet den først og fremmest ikke er matematisk begrundet. Vi forventer ikke, at denne strategi dukker op, idet eleverne bliver bedt om at begrunde med tallene.

Den fjerde strategi har med proportionalitet at gøre, og derfor antager vi, at eleverne benytter denne strategi, idet de skal bruge tallene. Der vil antagelig være elever, som prøver på en eller anden måde at sammenligne sidelængderne og komme frem til dette resultat.

Den femte strategi er ligeledes en korrekt strategi. Men vi er ikke ude efter denne strategi, og ”håber ikke”, at der er nogen elever, der begrunder på denne måde. Men hvis strategien dukker op, skal læreren fortælle, at man også kan løse opgaven på denne måde.

2. lektion: Papirtykkelse

Formål:

Denne lektion handler om at måle tykkelsen af et stykke papir af forskellige arter. Vi vil bruge papir af 4 forskellige tykkelser. Eleverne skal finde enheden ved at dividere tykkelsen af en bunke papir med antal papirer i bunken, det vil sige ved at benytte enhedsstrategien.

Den tilsigtede viden er, at eleverne finder ud af, at i tilfælde af ting hvor man ikke kan måle tykkelsen af et enkelt stykke, skal man måle tykkelsen af flere og dividere med antallet.

Skema:

Devolution	Læreren fortæller klassen, at denne lektion går ud på at måle, hvor tykt et stykke papir er.
Handling	Eleverne starter med at overveje mulige strategier. Efterhånden som de finder svaret, kommer de til tavlen og skriver gruppens bud på tykkelsen i tabellen på tavlen.
Formulering	En elev fra hver gruppe skal nu forklare deres metode til at måle et stykke papir på. Der vil nok mest være en strategi, hvor flere stykker papirer bliver målt, og der bliver divideret med antallet af papirer.
Institutionalisering	Læreren institutionaliserer, at man f.eks. kan tage 50 ark, måle deres tykkelse og dernæst dividere tykkelsen med 50, altså finde enheden. Hvis man skal måle eller veje et stykke af noget der er så tyndt eller småt, at det er svært at måle eller veje et enkelt stykke, kan man altså måle eller veje flere på en gang og dividere med antallet.

Beskrivelse af skema for 2.lektion:

Læreren vil indlede med at præsentere, hvad eleverne skal arbejde med i denne lektion. Han har på forhånd lagt 2 gange 4 bunker papirer af forskellig tykkelse på katederet, hvor der er forskellige antal og 100-150 stykker af hver. Grunden til, at der skal være så meget papir er, at omkring 100 stykker af den tyndeste art papir knap måler 1-1,5 cm. Hver art papir har sin farve, så der kan skelnes mellem de forskellige. Læreren ved ikke, hvad tykkelserne på papir arterne er, idet det ikke handler om at finde den korrekte tykkelse. Udover papirerne ligger der også linealer på katedederet. Læreren deler klassen i 8 grupper. Da klassen består af 20 elever, vil der være ca. 2 elever i hver gruppe. Læreren siger: *"I skal måle hvor tykt et stykke papir er af hver af de fire farver"*. Han giver et enkelt stykke papir til hver gruppe, og siger *"Jeg lægger resten her på katederet" "I må godt tage flere, hvis I vil"*. Det skal altså ikke røbes for eleverne, at de skal måle flere stykker papirer, men samtidig skal de være klar over, at de kan bruge flere papirer.

Herefter får grupperne tid til at måle tykkelsen af den farve papir, de har fået. Det er vigtigt, at de får god tid til det. Det er nok målingen af det første papir, der vil tage længst tid at måle, for det er her, at de finder en strategi, som de også kan udføre på de andre farver papirer. Når en gruppe har skrevet resultatet på tabellen, skal der gives en anden farve papir til gruppen. Det er ikke nødvendigt, at alle grupper måler alle 4 forskellige farver papirer, bare de finder på en strategi.

Vi skal før lektionen lave en tabel på tavlen, hvor hver gruppe er nummereret, og hver gang en gruppe har et bud på tykkelsen af papiret, vil en repræsentant fra gruppen gå op til tavlen og skrive gruppens bud i tabellen. Vi skal skrive millimeter i tabellen, så eleverne kan se, at de skal angive deres mål i millimeter. Tabellen kommer til at se således ud:

Grupper	**Hvid**	**Lilla**	**Linjeret**	**Blå**
1	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
2	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
3	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
4	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
5	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
6	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**

7	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
8	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**

Figur 13

Mens grupperne forsøger sig med forskellige metoder, vil læreren gå rundt og høre deres argumenter uden at røbe nogen former for korrekte strategier. Vi regner med, at de fleste elever vil komme med argumenter som: *"Det er meget mindre end en millimeter*", *"Findes der ikke nogen lineal, der viser en tiendedel millimeter?"* eller *"Det er så tyndt, at papiret ikke har nogen tykkelse*" eller *"Man kan ikke måle et stykke*". Forhåbentlig vil vi høre nogle elever spørge, om ikke de må måle flere stykker papirer på en gang. De kan prøve med f.eks. 2-3 stykker i første omgang og dernæst med f.eks. 5-10 stykker. Snart vil de opdage at f.eks. 10 stykker måler 1 mm, eller 75 stykker måler 9 mm.

Ved at skrive millimeter i tabellen fra start af, undgår vi forvirringer omkring, at de skal angive en talværdi og ikke f.eks. skrive:

A = meget tynd

B = tynd

C = tyk

D = meget tyk.

Når læreren kan se, at alle grupper har fundet en strategi, skal han lige få de sidste bud skrevet op på tavlen. Det kan godt være, at nogle grupper stadig mangler at få målt nogle forskellige farver papirer, men det gør ikke noget, idet det afgørende er, at grupperne har fundet en strategi. Vi regner med, at når en af grupperne har opdaget den korrekte metode, vil det brede sig ud til resten af klassen, og de øvrige grupper vil benytte sig af den samme metode.

Nu vil læreren bede grupperne om at forklare deres strategier til at måle et stykke papir. De forskellige strategier kan diskuteres. Herefter vil læreren institutionalisere ved at forklare, at man kan måle et stykke papir ved at måle flere og dividere med antallet. Han skal give eksempler på denne metode fra ting, der benyttes i dagligdagen, f.eks. forskellige typer af stof eller mønter, som man kan stable oven på hinanden og måle tykkelsen for derefter at dividere med antallet. Et andet eksempel kan være at veje meget små ting. Man kan f.eks. veje en knappenål ved at veje 100 knappenåle og dividere med 100 bagefter. Ligeledes kan et søm, et bolsje, en knap mm vejes på denne måde.

Forventede strategier:

1. strategi: give et ikke-numerisk resultat. F.eks. "*meget tynd*".

2. strategi: approksimere med linealen. F.eks. at svare "*en tiendedel af en millimeter*" ved at approksimere sin måling.

3. strategi: tage en bunke papir og måle tykkelsen på denne for derefter at dividere med antallet af papirer i bunken.

Den første strategi har vi prøvet at udelukke ved at skrive millimeter i tabellen, så eleverne kan se, at de skal angive deres svar i millimeter.

Den anden strategi vil nok være den strategi eleverne mest vil benytte, hvis de endnu ikke er kommet på den rigtige idé, altså den 3. strategi.

Den sidste strategi er den korrekte strategi, som eleverne forhåbentlig finder ud af hurtigt. Ved at benytte denne strategi vil eleverne kunne få indsigt i, hvordan man måler enheden.

3. og 4. lektion: Puslespil

Denne situation handler overordnet set om decimaltal (Winsløw, 2006a, s.51), men situationen kan bidrage med at udvikle elevernes viden om ligedannethed. Eleverne skal have en vis erfaring med praktisk-geometrisk arbejde herunder tegning og måling med lineal. De skal til en vis grad kende til brøker og decimaltal (Winsløw, 2006a, s.51). I og med at vi har med en 6. klasse at gøre, går vi ud fra, at de er veludrustede med den nødvendige viden (jf. afsnit 4).

Den tilsigtede viden er, at når man forstørrer et polygon, skal man gange alle delene med en fast faktor. Vi har afsat to lektioner til denne situation, idet det vil tage lang tid for eleverne at måle brikker, klippe dem og sætte sammen, endda måske flere gange, da de vil forsøge sig med forskellige strategier.

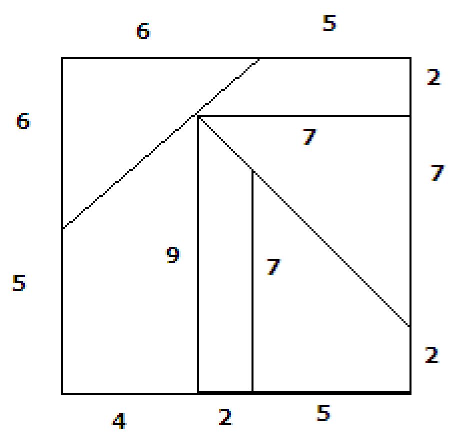
Skema:

Devolution	Læreren beder eleverne om at forstørre puslespillet således, at siden med 4 cm bliver til 7 cm.
Handling	Eleverne skal i grupper på 4 forsøge at forstørre hver sin puslebrik, hvor nogle elever får 2 brikker. Dernæst prøver de i gruppen at samle deres forstørrede puslespil.
Devolution	Læreren forsøger på tavlen at illustrere en del af puslespillet for at vise, at man ikke kan løse opgaven, hvis man blot lægger 3 cm til alle brikker. Derefter tegner han en tabel, som gør det muligt for dem at indse den korrekte strategi, nemlig enhedsstrategien.
Handling	Eleverne udfylder tabellen individuelt i deres kladdehæfter.
Formulering	Læreren vælger forskellige elever til at hjælpe med at udfylde tabellen på tavlen.

Devolution	Læreren beder eleverne om at forstørre puslespillet ved at bruge tabellen.
Handling	Eleverne forstørrer puslespillet. Denne gang vil det lykkes.
Institutionalisering	Læreren forklarer dem metoden til at finde det rigtige resultat. Dette er ved at gange alle de øvrige længder med 7/4 eller 1,75. Laver link til de forrige lektioner.

Beskrivelse af skema for 3. og 4.lektion:

Vi skal før lektionens start tegne puslespillet på tavlen (figur 14). Læreren begynder med at fortælle klassen, at de skal lave puslespil. Han fortæller klassen, at de vil blive inddelt i grupper, og at alle grupper får en kuvert, som indeholder brikkerne til puslespillet på tavlen med de rigtige mål. Han fortæller dem, at dette puslespil skal forstørres, og derfor vil enhver gruppe få uddelt sakse, linealer og papirer. Læreren viser en bestemt brik på tavlen. En af sidelængderne på denne brik er angivet både på tavlen og på de uddelte puslespil til at være 4 cm.



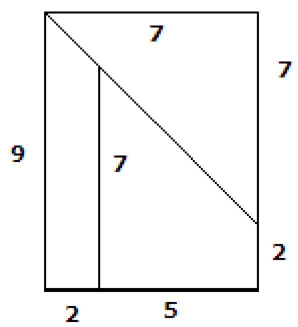
Figur 14

Han fortæller dernæst, at opgaven går ud på at forstørre puslespillet, således at den bestemte sidelængde på 4 cm bliver forstørret til 7 cm. Enhver elev i grupperne skal mindst forstørre et stykke af puslespillet, der er nemlig 6 brikker i puslespillet, mens grupperne består af ca. 4 elever, så der er nok til alle. Når alle brikker er blevet forstørret, skal brikkerne samles.

De får lov til at tale sammen i gruppen om, hvilke strategier de vil benytte. Imens vil læreren gå rundt og lytte til de forskellige gruppers planer. Nogen af grupperne kan komme med opgivende spørgsmål til læreren, som f.eks.: ”*Er du sikker på, at den kan løses?”* og ”*Er det lykkedes dig at lave den korrekt?*”

Eleverne skal have tid til at forsøge at løse opgaven på en additiv måde, altså ved at lægge 3 cm til alle puslebrikkerne, da differensen mellem 7 cm og 4 cm, er 3 cm. Der kan også være nogle, der benytter en anden strategi, nemlig at tage 1 cm mindre end den dobbelte sidelængde af puslebrikkerne, idet 7 cm er 1 cm mindre end det dobbelte af 4 cm. Men når de forsøger at samle puslebrikkerne, skal de indse, at begge strategier er forkerte.

Når alle grupper har prøvet mindst én af de to ovennævnte forkerte strategier, vil læreren bede om at få alles opmærksomhed på tavlen. Han vil hjælpe dem ved at foreslå, at de fokuserer på den del af puslespillet, som er vist på figur 15.



Figur 15

Han vil nemlig få dem til at indse, at deres additive tilgang ikke holder ved at fortælle, at den nedre side af rektanglet vil, ifølge deres strategi, blive forlænget med 6 cm, da de lægger 3 cm til henholdsvis 5 cm og 2 cm. Men den øverste del af rektanglet vil kun blive forlænget med 3 cm, idet den øvre del kun består af et tal, nemlig 7 cm. Så puslespillet vil ikke passe sammen.

Eleverne i klassen vil opdage, at opgaven nu alligevel ikke var så simpel, og at de har valgt en forkert tilgang. Læreren vil nu prøve at opstille en tabel på tavlen (figur 16) for at hjælpe dem i gang igen, efter at de har indset, at deres tilgang har været forkert.

Små brikker	**2 cm**	**4 cm**	**5 cm**	**6 cm**	**7 cm**	**8 cm**	**9 cm**
Store brikker		**7 cm**					

Figur 16

Eleverne skal sidde og prøve at udfylde tabellen i deres kladdehæfter, så hver elev får lov til at arbejde med at beregne disse. Hvis det skulle gøres på tavlen, ville et par dygtige elever sige de rigtige tal, og de andre ville ikke have mulighed for at tænke over, hvordan man kommer frem til disse tal. Da sidelængden på 4 cm er enheden på 1 cm ganget med 4, vil sidelængden på 7 cm være 4 gange forstørrelsen af enheden. Forstørrelsen af enheden er derfor 7/4 cm.

Derefter skal tabellen på tavlen udfyldes ved, at læreren vælger nogle elever. De får herefter lov til at sidde igen og forstørre puslespillet, som de antagelig vil få til at passe sammen denne gang. Afslutningsvis vil læreren formulere et generelt princip for forstørrelse. Når man forstørrer en genstand skal man gange alle siderne med en fast faktor. I dette tilfælde var det 1,75 eller 4/7. Eleverne i dette klassetrin har haft omskrivning fra decimaltal til brøk og omvendt (jf. afsnit 4), og derfor tror vi ikke, at det vil være et stort problem for dem at regne med disse. Læreren skal også lave et link til de forrige lektioner.

<u>Forventede strategier</u>:

1. strategi: Den additive strategi. Eleverne kan forstørre ved at lægge 3 cm til alle siderne, fordi 7 cm - 4 cm = 3 cm.

2. strategi: Eleverne kan tænke, at 7 er 1 mindre end det dobbelte af 4, så man skal blot tage 1 cm mindre end de dobbelte sidelængder.

3. strategi: Nogle kan forsøge, uden at måle og beregne, at klippe lidt i de nye brikker, så de bedre passer sammen.

4. strategi: Eleverne kan gange siderne med 7/4 eller med 1,75. Dette er den korrekte måde at gøre det på.

Den første strategi er den additive strategi, som er ukorrekt. Denne strategi forventes at være den mest almindelige blandt eleverne. Denne situation kan på en matematisk måde udtrykkes således: $f(x) = x + 3$, hvor x er sidelængden på puslebrikkerne. Men problemet er, at denne funktion ikke er lineær, idet $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$.

Den anden strategi kan også nemt opstå, idet det for eleverne vil være en logisk måde at beregne sidelængderne på. Matematisk svarer dette til at konstruere ved hjælp af funktionen: $f(x) = 2x - 1$, men her er igen $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$. Derfor er denne strategi også forkert.

Den tredje strategi kan også forekomme blandt eleverne, men de vil nok indse, at det er lidt snyd bare at klippe lidt ekstra.

Den fjerde strategi er den korrekte strategi, som vi ikke forventer, at eleverne vil benytte i starten af lektionen. Idéen vil opstå, når læreren viser dem tabellen på tavlen.

5. lektion: Jættens øre

Formål:

I denne lektion er formålet, at eleverne skal arbejde med proportionalitet ved at sammenligne deres eget øre med jættens øre. De skal nemlig ved at se på tegningen af jættens højre øre, kunne regne ud, hvor høj jætten er. Den tilsigtede viden er, at de skal finde et forhold mellem egen højde og eget øre, og benytte dette forhold på jættens øre for at finde ud af jættens højde.

Skema:

Devolution	Læreren begynder med kort at introducere nordisk mytologi og jætterne. Læreren siger, at de skal finde ud af, hvor høj jætten er ud fra jættens øre.
Handling	Eleverne skal nu i gruppen finde ud af, hvad de vil måle på tegningen eller på dem selv. De kan måle egen højde og eget øres længde og sammenligne dette forhold med jættens øre.
Formulering	Læreren spørger de enkelte grupper om deres resultater, hvilket han skriver i tabellen på tavlen.
Formulering	Nu skal en repræsentant fra hver gruppe forklare gruppens strategi.
Validering	Det diskuteres i klassen, hvorvidt gruppernes strategier er korrekte.
Institutionalisering	Læreren institutionaliserer, at han heller ikke kender til jættens højde, og at eleverne skulle beregne et forhold mellem menneskets øre og jættens øre, og bruge dette forhold til at beregne jættens højde.

Beskrivelse af skema for 5.lektion:

Læreren starter lektionen med at tale om nordisk mytologi for at vække elevernes interesse. Eleverne vil forhåbentlig være med til at forklare nogle ting, når læreren stiller dem spørgsmål omkring det. Læreren skal vise et billede af en jætte og spørge: *"Har I hørt om jætterne?"* Her kan eleverne hvis de ved noget om dem, forklare at de har været nogen kæmper, altså store mennesker. Ellers skal læreren forklare dette, og fortsætte: *"Arkæologer har fundet, at nogle vikinger har ridset en tegning af en jættes højre øre på en sten, idet det siges, at de har set jætten. I dag har jeg taget et billede af øret med, i dets rigtige størrelsesforhold".*

Læreren har seks A3-ark med, hvor jættens højre øre er tegnet på (figur 17), desuden har han målebånd med. Eleverne skal sættes i grupper på ca. 3, og deres opgave er at beregne jættens højde. De får ca. 20 minutter til at diskutere sammen i gruppen og skrive deres udregninger i deres kladdehæfter. De skal selv finde ud af, hvordan de vil gøre det. Læreren skal ikke blande sig, heller ikke hvis han kan høre forkerte fremgangsmåder. Da hver gruppe har fået et målebånd af læreren, må de kunne regne ud, at de skal måle noget.

Figur 17: Jættens øre, som uddeles til grupperne i en større udgave.

Hvis én af grupperne får idéen, og de begynder at måle hinandens højder og ører, vil de øvrige grupper også begynde at overveje den samme strategi. Nogle elever vil måske måle længden af jættens øre, mens andre vil måle bredden af øret og derefter sammenligne det med deres eget øre. Ved at måle deres egen højde og finde forholdet mellem deres højde og deres øres længde eller bredde, kan de beregne hvor høj jætten er, idet de kender tre led og mangler det fjerde. Derfor kan man få et problem med en manglende ubekendt ud af det. F.eks. kan der skrives:

eget øre/egen højde = jættens øre/jættens højde.

Når eleverne måler deres eget øre og egen højde, kan de godt få forskellige resultater og dermed lidt forskellige forhold. Der kan være andre strategier til at finde højden, f.eks. at måle egen højde vha. eget ørets længde som enhed, så man f.eks. får:

jættens højde = 30 x jættens ørelængde.

Når grupperne er færdige med at beregne jættens højde, skal læreren spørge de enkelte grupper om deres resultat og skrive det i tabellen på tavlen, som er tegnet før lektionen. Når resultaterne er blevet skrevet op, skal læreren bede én fra hver gruppe om at forklare gruppens strategi. Herefter skal der diskuteres om de forskellige strategier. Læreren afslutter lektionen med at fortælle, at det der var vigtigt, var at kunne beregne et forhold.

Forventede strategier:

1. strategi: gætte sig frem til jættens højde.

2. strategi: måle egen højde vha. eget ørelængde som enhed og sammenligne denne med jætten. F.eks.: egen højde = 30 x egen ørelængde, som medfører: jættens højde = 30 x jættens ørelængde.

3. strategi: måle eget øre og egen højde for derefter at finde forholdet mellem disse og bruge samme forhold til at finde ud af, hvor høj jætten er. F.eks. eget øre: 5 cm og egen højde: 145 cm. Beregne $\frac{145}{5}$ = 29. Jættens øre: 40 cm. Beregne: $40 \cdot 29 = 1160$ cm, altså 11,6 meter høj.

4. strategi: En additiv strategi, f.eks. ved at finde differensen mellem jættens øre og egen øre og lægge denne differens til deres egen højde.

Hvis eleverne ikke kommer på idéen om at måle eget øre og egen højde, kan der være nogle, der bare vil gætte på jættens højde, fordi de ikke synes, der er nogen måder at beregne det på. Den anden og den tredje strategi er korrekte strategier, som der antagelig er nogen, der finder på. Den fjerde strategi er ukorrekt, som vi tror, at nogle elever kommer til at benytte.

Det skal tages i betragtning, at eleverne får udleveret en tegning af jættens øre, det vil sige et todimensionalt øre, som de skal sammenligne med deres eget tredimensionelle øre. Vi kunne have taget et kæmpe tredimensionelt øre med, som måske ville være nemmere at sammenligne, men vi har valgt at have det med på papir af praktiske årsager.

6. lektion: Hestemaleriet

Formål:

Formålet med denne lektion er at lære eleverne, at alt ikke er proportionelt ved at udsætte dem for en ikke-proportionalitetsopgave. Vi går ud fra, at en stor del af eleverne vil beregne denne opgave forkert, idet de indtil nu i forløbet har haft proportionalitetsopgaver. Derudover er der mange undersøgelser der viser, at elever generelt har en tendens til at bruge proportionalitet i mange opgaver, også ikke-proportionalitetsopgaver (bl.a. Bock, Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002). For at gøre det nemmere for eleverne skal tegningerne hørende til opgaven være angivet i de rigtige mål. Den tilsigtede viden er, at mængden af maling ikke afhænger af højden som et fast tal ganget med denne.

Skema:

Devolution	Læreren stiller dem spørgsmålet: *"Til et hestemaleri, som er 7 cm høj, har maleren brugt 6 ml maling. Hvor meget maling skal han bruge til et maleri af samme motiv, som er 21 cm høj?"*, og uddeler hestemaleriet med højden 7 cm.
Handling	Eleverne bruger de første 10 minutter på at finde ud af svaret i grupperne. Læreren går rundt i klassen, mens de forsøger at finde svaret.
Formulering	Læreren spørger grupper om svaret på spørgsmålet.
Devolution	Da de fleste svar er lineære, vil læreren nu give dem endnu et ark. Læreren

	skal nu uddele det samme maleri, men hvor højden er 21 cm.
Handling	De får nu 5-6 minutter til endnu engang at overveje, om de har løst opgaven korrekt.
Formulering	Læreren spørger grupperne, hvad deres svar nu er.
Devolution	Læreren uddeler endnu et ark, hvor det store hestemaleri er inddelt i mindre rektangler. De skal finde ud af, hvor mange gange det store maleri er større end det lille maleri ved at klippe det lille og sætte det ind i det store.
Handling	Eleverne klipper og indser, at svaret er 9.
Formulering	Læreren beder grupperne om at formulere deres svar. De finder ud af, at der skal 9 gange mere maling til at male det store maleri. Arealerne af malerierne beregnes i fællesskab. Igen indses, at svaret er 9.
Institutionalisering	Læreren institutionaliserer, at mængden af maling ikke afhænger af højden som et fast tal ganget med denne. Han laver også en tabel for at illustrere dette, hvis der er tid tilbage.

<u>Beskrivelse af skema for 6.lektion:</u>

Læreren skal inddele eleverne i grupper på ca. 3 og nummerere grupperne. Hver gruppe får et ark med maleriet, hvor højden er 7 cm. Læreren fortæller dem, at en berømt maler har malet dette maleri af en hest, og at der er blevet brugt 6 ml maling. Maleren skal nu male det samme maleri. Men denne gang skal det være 21 cm højt. Læreren beder dem om, at finde ud af hvor mange milliliter maling maleren skal bruge til det forstørrede maleri.

Først får de ca. 10 minutter til at løse opgaven. Vi forventer, at de fleste elever vil bruge en lineær strategi for at løse opgaven, nemlig skrive 18 ml i deres kladdehæfter. Læreren skal cirkulere i klassen for at se de forskellige gruppers udregninger og bede dem om at svare.

Læreren skal nu uddele det samme maleri, hvor højden er 21 cm. De får nu 5-6 minutter til endnu engang at overveje, om de har løst opgaven korrekt. Her vil det være muligt for de fleste elever at se, at 3 gange mere maling måske er for lidt, da maleriet også bliver forstørret i bredden. Læreren skal stadig cirkulere rundt og lytte til gruppernes diskussioner og bede grupperne om at formulere deres svar.

For at gøre det klart for dem, at der skal 9 gange mere maling til, skal læreren uddele endnu et ark. Her er det store maleri inddelt i mindre rektangler. De skal finde ud af, hvor mange gange det store maleri er større end det lille maleri. Det vil ikke være så svært for eleverne at se, at det er 9 gange så stort. Men for at vise dette, skal læreren uddele sakse til grupperne og bede dem om at klippe den lille tegning ud og se, hvor mange gange den kan være i den store tegning.

Når de er færdige, skal læreren spørge hver gruppe, hvad de har fundet frem til, det vil sige hvor mange gange det store maleri er større end det lille maleri. De vil forhåbentlig svare 9. Så vil læreren spørge: *"Hvor mange gange mere maling tror I så, der skal bruges af maleren?"* De vil igen svare 9. Ved at stille disse spørgsmål, leder læreren eleverne frem til det rigtige resultat i fællesskab.

Han skal fortælle dem, at de i stedet for at klippe og sætte ind, kunne have beregnet maleriernes areal. Det skal de gøre i fællesskab, hvor de skal indse, at det store maleris areal er 9 gange så stort, og derfor skal der 9 gange mere maling til.

Læreren skal, hvis der er tid tilbage, institutionalisere yderligere ved at lave en tabel (figur 18), som skal udfyldes i fællesskab.

Højde	**7 cm**	**14 cm**	**21 cm**
Areal			
Maling	**6 ml**	**24 ml**	**54 ml**

Figur 18

Her vil eleverne se, at højde og millimeter maling ikke er proportionelle, men at areal og mængden af maling derimod er proportionelle.

Forventede strategier:

Strategier for at finde den lineære løsning:

1. strategi: Finde forholdet mellem højderne af malerierne (internt forhold): 21 cm/7 cm = 3 cm x 6 ml = 18 ml.

2. strategi: Finde mængden af maling der skal bruges til at male 1 cm af maleriet (enhedsstrategien): 6 ml maling for 7 cm, derfor 0,857 ml for 1 cm. Og så fås: 0,857 x 21 cm= 18 ml.

3. strategi: Finde forholdet mellem mængden af maling og højden af hesten (eksternt forhold): 6/7 = 0,857 ml/cm. Derfor 0,857 ml/cm x 21 cm = 18 ml.

Strategier for at finde den ikke-lineære løsning (korrekte løsning):

4. strategi: Hvis hestemaleriet bliver 3-doblet i højden, må den også 3-dobles i bredden. Så man skal gange 6 ml maling med $3 \cdot 3 = 9$. Dvs. $9 \cdot 6 = 54$ ml maling.

De første tre lineære strategier kan nemt forekomme i starten af timen, hvor læreren blot har givet en tegning af det mindre maleri og har stillet opgaven. Vi tror ikke, at der i 6. klassetrin kan være elever, der allerede tænker på det ikke-lineære resultat, især ikke efter, at de har haft med proportionelle opgaver i forløbet indtil nu. Læreren skal ved at uddele den store tegning og senere det samme inddelt i mindre rektangler få dem til at finde den ikke-lineære løsning.

7. og 8. Lektion: Blandede opgaver

Formål:

I denne lektion skal der stilles blandede opgaver til eleverne, både proportionelle og ikke-proportionelle, så de kan skelne mellem disse to slags opgaver. Formålet er, at eleverne skal trænes i at løse forskellige slags opgaver, både proportionelle og ikke-proportionelle. Vi får desuden med denne lektion lov til at undersøge elevernes strategier nærmere, idet vi skal indsamle opgavehæfterne, hvor de skal skrive deres udregninger.

Indhold:

Læreren skal dele et opgavehæfte ud til eleverne, hvor der både skal være lineære og ikke-lineære opgaver. Eleverne skal løse opgaverne individuelt, men det er tilladt at snakke sammen med sidemanden. De får den ene lektion til dette. I næste lektion skal læreren vælge nogle elever, som skal vise deres løsninger på tavlen. Efter hver opgave spørger læreren klassen, om der er andre, der har fået samme resultat, men har benyttet en anden metode. Hvis der er nogle, skal de forklare deres metode evt. ved tavlen. På denne måde vil vi sørge for, at de forskellige løsningsstrategier bliver gennemgået på tavlen eller bliver forklaret. Læreren kan efter hver opgave starte en lille diskussion om, hvilken af strategierne der er nemmest at bruge. Men det vil ikke være nødvendig med sådan en diskussion efter alle opgaver.

De opgaver som skal være på hæftet, har vi lavet på grundlag af vores teoriafsnit. Der er således opgaver fra alle tre faglige kontekster, som vi har beskrevet, nemlig algebraiske, numeriske og geometriske kontekster (jf. afsnit 3.5). Der skal indgå sammenligningsopgaver, hvor to forhold er givet, og man skal finde ud af, om de er proportionale. Desuden skal der være opgaver med en manglende ubekendte, hvor tre tal er givet, og man skal finde det fjerde tal ud fra de to forhold.

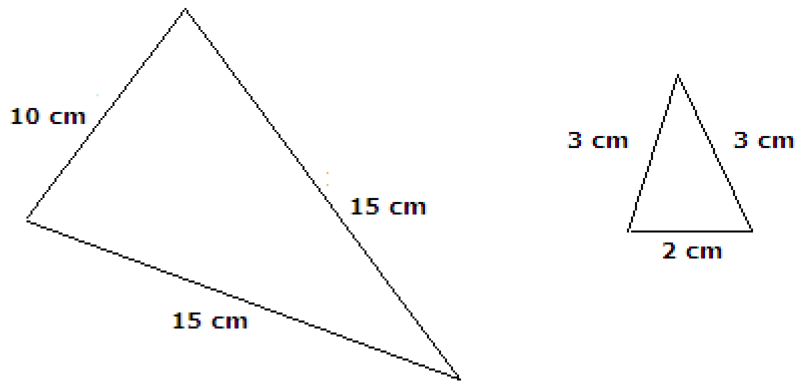
Vi skal også tænke over de forskellige tilgange, eleverne kan løse opgaverne på, f.eks. om de vil sammenligne de interne eller eksterne forhold. Og de forskellige korrekte eller ukorrekte strategier de kan benytte, såsom enhedsstrategien, multiplikativ strategien, bygge strategien, additiv strategien osv.

Vi skal have opgaver af forskellige sværhedsgrad. Det skal vi gøre ved f.eks. at lave nogle opgaver, hvor forholdet giver et decimaltal, da dette kan få dem til at opgive enhedsstrategien og benytte multiplikativ strategien, for det kan blive svært at regne med decimaltal. Vi vil også til nogle af opgaverne benytte store tal for at gøre det lidt sværere.

I selve opgavehæftet skal der være plads til elevernes besvarelser, idet vi skal indsamle opgavehæfterne efter lektionerne, så vi kan bruge dem til vores *a posteriori* analyse. Læreren skal huske at sige til eleverne, at der ikke må bruges lommeregnere til opgaverne. For så vil de i de opgaver, hvor forholdet giver et decimaltal, benytte lommeregneren til hurtigt at besvare opgaven. Udover det, skal han også fortælle dem, at de ikke skal begynde at rette deres besvarelser i hæftet efter at opgaverne bliver gennemgået. Men de må gerne skrive det ned i deres egen kladdehæfte. Hvis de begynder at rette, vil det ødelægge vores analyse af elevernes strategier.

Nu vil vi gennemgå opgaverne, som vi vil have med på opgavehæftet. Den nummerering opgaverne får nu, bliver ikke det samme som i opgavehæftet, som eleverne kommer til at få (se Appendiks A.2)

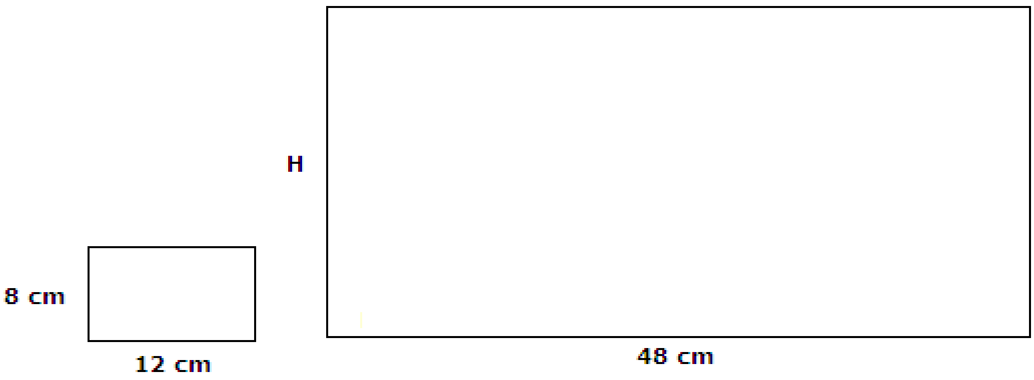
1. Opgave: Se på disse to trekanter. Har de samme form?



Figur 19

Vi vil begynde med en opgave om ligedannethed, som foregår i en geometrisk kontekst. Vi har valgt en forholdsvis nem opgave til at starte med, så den kommer til at virke som en ”opvarmning”. Tallene er nemlig ikke så ”store”, og de ”går op”, så det vil forhåbentlig ikke være så svært at finde ud af, at da 10 cm/2 cm = 5 og 15 cm/3 cm = 5, har de to trekanter samme form. Vi regner med, at næsten alle elever kan løse denne opgave. Der vil derfor ganske vist ikke være en diskussion efter at en elev har løst opgaven på tavlen. Opgaven er en sammenligningsopgave, hvor alle tal er givet i de ”to forhold”, og man skal finde ud af, om de er proportionelle. Selve det at få idéen med at opstille de to forhold, 10 cm/2 cm og 15 cm/3 cm, burde nemt kunne gøres af 6. klasse elever. Der kan ligeledes være andre metoder der fremkommer, f.eks. at nogle elever siger, at når man ganger 2 med 5 og 3 med 5, får man henholdsvis 10 og 15.

2. Opgave: Disse to rektangler har samme form. Find H.



Figur 20

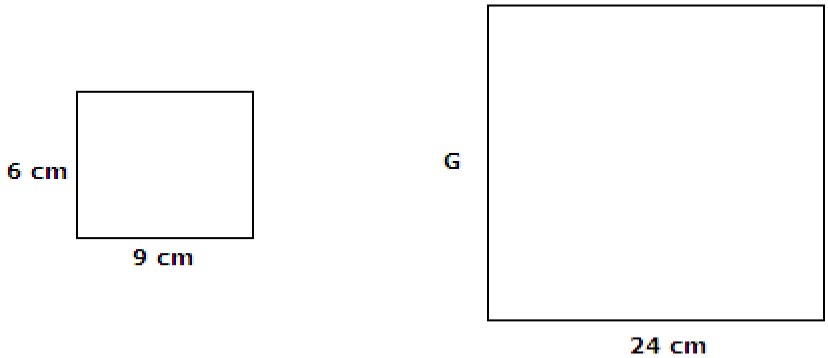
Denne opgave ligner den forrige opgave, men i modsætning til den, er denne opgave ikke en sammenligningsopgave, hvor alle tal er givet, men en opgave med en manglende ubekendt. Opgaven går nemlig ud på at finde H i: a) 8 cm/12 cm = H/48 cm eller i: b)12 cm/8 cm = 48 cm/H, men det kan også være, at de stiller ligningen op således: c) 12 cm/48 cm = 8 cm/H eller d) 48 cm/12 cm = H/8 cm.

Hvis de benytter a) får de et decimaltal ud af forholdet 8 cm/12 cm, nemlig 0,66, som godt kan være svært at regne med. Hvis b) benyttes, får de igen et decimaltal, men denne gang et endeligt decimaltal, 1,5. Også forholdet i c) giver et endeligt decimaltal, 0,25. Hvis de derimod benytter d) giver forholdet 48 cm/12 cm = 4, som ganske vist er den nemmeste opstilling og er den metode, hvor tallene "går op". Det skal nævnes, at det ikke er sikkert, at de overhovedet vil skrive forholdene op på denne måde. Det kan være, at de slet ikke skriver ligninger eller måske blot formulerer det i ord. Det kan også være, at nogle elever benytter en multiplikativ strategi ved at koordinere to talrækker samtidigt i form af: 12 cm til 8 cm, 24 cm til 16 cm, 36 cm til 24 cm, 48 cm til 32 cm. Sidelængden H er altså 32 cm.

Efter at have løst opgaven på tavlen, kan klassen diskutere de forskellige strategier, herunder hvilken, der er nemmest at bruge.

I tilfælde af at eleven benytter en additiv strategi og f.eks. skriver: da 24 cm - 9 cm = 15 cm, fås 6 cm + 15 cm = 21 cm, skal læreren spørge klassen, om alle er enige, og han skal så bede én af de elever, der er uenige, om at komme til tavlen og forklare. Efter institutionaliseringen i 1. lektion ”Samme form”, regner vi ikke med, at der er nogen elever, der vil benytte den additive strategi, men den kan dog forekomme.

3. Opgave: Disse to rektangler har samme form. Find G.



Figur 21

Den 3. opgave er ligeledes en opgave med en manglende ubekendt. Forskellen mellem 2. opgave og 3. opgave er, at i 3. opgave går 9 ikke op i 24, (eller 6 går ikke op i 9), og derfor kan de blive nødt til at regne med decimaltal. For ikke at regne med decimaltal, vil det være mest oplagt at benytte en multiplikativ strategi, altså f.eks. at tænke på 3, 6, 9 som en talrække og 8, 16, 24 som en anden talrække og derved finde ud af, at G = 16 cm. Det kan godt være, at nogle elever hellere vil benytte enhedsstrategien, selvom det giver et decimaltal. I dette tilfælde kan de opskrive: 24 cm/9 cm = G/6 cm eller 9 cm/24 cm = 6 cm/G eller 9 cm/6 cm = 24 cm/G eller 6 cm/9 cm = G/24 cm, hvor alle fire forhold giver decimaltal. Dernæst kan de evt. benytte gange-over-kors teknikken. Begge strategier er korrekte, men læreren skal understrege, at enhedsstrategien kan være svær at benytte i sådanne tilfælde, så man skal også lære den multiplikative strategi og benytte denne, når den er mest oplagt.

Hvis eleven på tavlen benytter den additive strategi i denne opgave, skal læreren foretage samme handling, som beskrevet under 2.opgave.

4. Opgave: For 4 kr. kan du købe 6 stykker slik. Hvad kan du få for 10 kr.?

Vi er nu gået væk fra opgaver i en geometrisk kontekst til opgaver i en numerisk kontekst. Denne opgave er også en opgave med en manglende ubekendt, hvor tre tal er givet, og man skal finde det fjerde. Det er af afgørende betydning i sådanne formuleringsopgaver, at eleven forstår spørgsmålet korrekt. Da det er en velkendt situation for eleverne at købe slik, har vi valgt dette.

I denne opgave kan eleverne opstille ligningen: a) 4 kr./6 = 10 kr./x, b) 6/4 kr.=x/10 kr., c) 10 kr./4 kr.= x/6 eller d) 4 kr./10 kr.= 6/x. Det vil sige eleven enten kan benytte interne forhold eller eksterne forhold, hvor a) og b) er eksterne og c) og d) er interne.

Ved at benytte enhedsstrategien vil eleven regne ud, hvad 1 stykke slik koster, eller hvor mange slik man kan få for 1 kr. For at regne ud, hvad 1 stykke slik koster benyttes a), mens b) benyttes for at regne ud hvor mange slik, man kan få for 1 kr.

Da alle forhold i a), b), c) og d) giver decimaltal, er det nemmere at benytte bygge strategien. Eleven kan f.eks. beregne, at for 4 kr. kan man købe 6 stykker, for 8 kr. kan man købe 12 stykker, for 12 kr. kan man købe 18 stykker. Da 10 ligger mellem 8 og 12, regner eleven ud, at 15 ligger mellem 12 og 18. Så svaret vil være 15 stykker slik.

5. Opgave: For at bage 18 kager skal man bruge 45 æg. Hvor mange æg skal der bruges til 12 kager?

Vi har igen en opgave med en manglende ubekendt, hvor tallene igen ikke ”går op”. Denne gang har vi benyttet lidt større tal. Vi kan forvente at se nogle ligninger med eksterne forhold: a) 18 kager/45 æg = 12 kager/x eller b) 45 æg/18 kager = x/12 kager og nogle ligninger med interne forhold: c) 18 kager/12 kager = 45 æg/x eller d) 12 kager/18 kager = x/45 æg.

Eleven kan benytte enhedsstrategien ved at beregne, hvor mange æg der skal til en kage, altså b), eller hvor mange kager, der kan bages med 1 æg, altså a). Det skal siges, at det lyder mere ”logisk”, og dermed også er mere sandsynligt, at beregne hvor mange æg, der skal til en kage. Da alle forholdene giver decimaltal i denne opgave, er det nemmere at bruge multiplikativ strategien, altså at dividere 45 med 3 og få 15. Og dividere 18 med 3 og få 6. Altså 6 kager med 15 æg, 12 kager med 30 æg, 18 kager med 45 æg. Der skal altså 30 æg til at bage 12 kager.

6. Opgave: Jesper har cyklet 12 km på 36 minutter, og Hans har cyklet 54 km på 162 minutter. Har de cyklet med den samme fart?

Vi er stadig i gang med numeriske opgaver, men denne gang er det en sammenligningsopgave, hvor alle fire tal er givet i de to forhold. Opgaven går ud på at sammenligne de to drenges fart. Eleverne skal altså have kendskab til, at farten er afstand pr. tid altså i dette tilfælde km pr. minut.

Man kan sammenligne disse på to måder: a) 36 min/12 km= 162 min/54 km eller b)12 km/36 min= 54 km/162 min. I den første lighed giver forholdene 3, altså 3 km. pr. min, som er deres fart. Den anden lighed giver 0,33, altså 0,33 min. pr. km. Begge strategier giver det korrekte resultat, men da spørgsmålet var, at finde farten, skal læreren i tilfælde af at b) fremkommer, understrege at a) angiver farten.

7. Opgave: Man kan købe en kanelsnegl, der vejer 250 gr. fra en bager A. Der er 30 gr. sukker i denne kanelsnegl. I en anden bager B kan man købe en kanelsnegl på 100 gr. med 12,5 gr. sukker i. Er andelen af sukker i kanelsneglene den samme?

Dette er igen en sammenligningsopgave, hvor forholdene ikke giver det samme, altså er andelen af sukker ikke ens. Eleverne kan ligesom i forrige opgave sammenligne på disse måder: a) 250 gr./30 gr. = 100 gr. /12,5 gr. eller b) 30 gr./250 gr. = 12,5 gr./100 gr. og finde ud af, om lighederne er sande. Det kan godt være, at der er nogle elever, som sammenligner de interne forhold: 250 gr./100 gr. = 30 gr./12,5 gr. eller 100 gr./250 gr.= 12,5 gr./30 gr.

8. opgave: Søren og Anders er brødre, og de har fødselsdag samme dag. Søren er 3 og Anders 5. Når Søren bliver 15, hvor gammel bliver Anders så?

Denne opgave, som bliver kaldt en additiv opgave (jf. afsnit 3.6), er et af de ikke-proportionelle opgaver, vi også vil stille eleverne. Der kan være nogle elever, der løser denne opgave proportionelt, altså svarer: $\frac{15}{3} = 5$ og $5 \cdot 5 = 25$ år. Men det korrekte ikke-lineære svar er: 17 år.

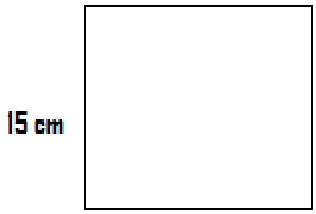
9. Opgave: Louise hænger 3 håndklæder til tørre udenfor. Efter 12 timer er de tørre. Anna hænger 6 håndklæder til tørre. Efter hvor lang tid vil de blive tørre?

Dette er ligeledes en ikke-lineær opgave, men der kan være nogle elever, der svarer lineært i form af: 3 håndklæder på 12 timer, 6 håndklæder på 24 timer, fordi 6 er det dobbelte af 3. De vil altså svare 24 timer. Det korrekte svar er 12 timer. Denne type opgaver bliver kaldt for konstante opgaver (jf. afsnit 3.6).

10. Opgave: Et togs lokomotiv er 12 m langt. Hvis der er 4 vogne forbundet til lokomotivet, er toget 52 m langt. Hvor langt er toget, hvis der er 8 vogne forbundet til lokomotivet?

Denne opgave er igen en ikke-proportionel opgave. Et proportionelt svar vil være: 104 m, idet 4 vogne giver 52 m, og 8 vogne må give 104 m. Mens det korrekte svar er: 92 m. Denne opgavetype bliver kaldt affine opgaver (jf. afsnit 3.6).

11. Opgave: Nedenfor er der vist et kvadrat. Tegn et andet kvadrat, der har det dobbelte areal, ved først at finde sidelængden.

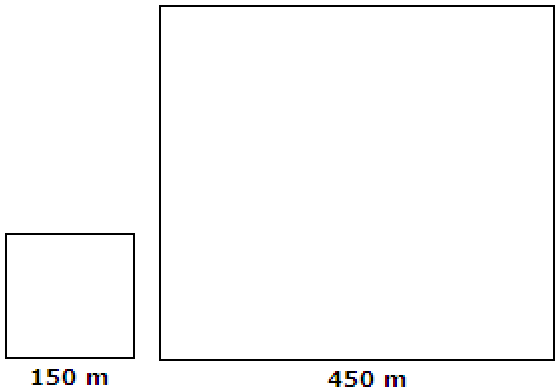


Figur 22

Her har vi igen en ikke-proportionel opgave, men denne gang foregår den i en geometrisk kontekst. Der kan være en tendens til, at eleverne løser opgaven ved at fordoble sidelængden af dette kvadrat og beregne arealet, altså: 30 cm x 30 cm = 900 cm^2. Men det korrekte svar er at finde arealet og gange med 2, det vil sige: 15 cm x 15 cm = 225 cm^2. Dernæst 225 cm^2 x 2= 450 cm^2. Ergo er sidelængden på det nye kvadrat: kvadratrod 450 cm, som giver 21,2 cm. Eleverne skal altså finde sidelængden i det nye kvadrat og tegne kvadratet i deres kladdehæfte.

Hvis eleven ved tavlen løser opgaven ved at fordoble sidelængden og beregne arealet, skal læreren vise, at det ikke stemmer ved at bede eleven om at beregne arealet af de to kvadrater og se om det er fordoblet. 15 cm x 15 cm= 225 cm^2, mens 30 cm x 30 cm= 900 cm^2 og 900 er ikke det dobbelte af 225. Når eleven har gjort dette, indses at metoden har været forkert. Derefter kommer en anden elev, som har fået det rigtige resultat, til tavlen.

12. Opgave: En landmand har brug for 8 timer til at så græs på et kvadratisk landområde med sidelængden 150 m. Hvor lang tid har han brug for, for at så græs på et andet kvadratisk landområde med sidelængden 450 m?



Figur 23

Denne opgave er ligeledes ikke-proportionel. Nogle elever kan løse opgaven proportionelt ved at sige, at 450 m/150 m= 3, og derfor skal han bruge 3 x 8 timer= 24 timer. Eleverne kan komme frem til det rigtige svar ved 3 måder:

1. Ved at ”belægge” det store kvadrat med det lille kvadrat, og derefter konkludere, at landmanden vil have brug for 9 gange 8 timer, altså 72 timer. Denne metode er ifølge Bock, Verschaffel & Janssens (1998) *“..en meget nem, intuitiv metode, som kun kræver lidt sofistikeret matematisk viden”* (s.78).
2. Ved at beregne arealerne af begge kvadrater, og dermed finde: 150 m x 150 m= 22.500 m^2 og 450 m x 450 m= 202.500 m^2 og dividere: 202.500:22.500 = 9. Altså skal landmanden bruge 9 gange 8 timer, det vil sige 72 timer.
3. Ved at benytte det generelle princip ”side gange x, derfor areal gange x^2”. Idet 150 m gange 3 giver 450 m, skal tiden ganges med 3^2=9, så vi får 72 timer.

Efter at opgaven er blevet gennemgået af en elev, skal læreren, som med de andre opgaver, spørge klassen om der er nogle, der har løst opgaven på en anden måde og bede dem om at forklare deres metoder. Hermed kan de fleste af ovennævnte strategier blive gennemgået og diskuteret i klassen.

8 Metodologi

Vi har fået gennemført vores undervisningsforløb af en matematiklærer på Furesø Privatskole. Undervisningsforløbet fandt sted i juni måned, det vil sige måneden inden elevernes sommerferie.

Eleverne havde altså snart været igennem 6.klassens pensum. Det er vigtigt at være klar over, om eleverne lige er begyndt i 6.klasse, er i midten af 6.klasse, eller om de snart påbegynder 7.klasse for at kunne sige noget om, hvor meget eleverne ved. Dette vil vi medtage i vores overvejelser til *a posteriori* analysen af forløbet.

Selve forløbet foregik ved, at klassens matematiklærer gennemførte forløbet, som han forinden havde fået en undervisningsmanual til (Appendiks A.1). Den ene af os (Hatice) sad i et hjørne af klasserummet bag eleverne og tog notater, mens den anden (Hasan) styrede kameraet. Vi hjalp begge læreren med de praktiske ting, f.eks. når der skulle uddeles papir til eleverne. Dette gjorde vi, så der ikke blev brugt unødvendig lang tid på disse praktiske ting, idet der var en del papirer, som skulle deles ud til eleverne. Ud over dette forsøgte vi ikke at blande os i undervisningen, så det kunne foregå så naturligt som muligt. Dog har der været enkelte tilfælde, hvor læreren ikke kunne handle, som det var beskrevet i undervisningsforløbet, og derfor undrende så på en af os to, så vi blev nødt til at nikke eller ryste på hovedet. Læreren ville have vores accept til at fortsætte, som han gjorde. Vi har desuden også været med til at pege på nogle elever, som læreren kunne vælge, idet vi har været rundt og se i deres kladdehæfter, mens de arbejdede i grupper eller alene.

Samtaler med læreren

Vi mødtes to gange med læreren før undervisningsforløbet. Formålet med disse møder var at introducere selve forløbet og den teoretiske baggrund, nemlig TDS. Derudover at vise læreren at det kan gavne læreren og eleverne, at vi udfører dette forløb, idet læreren kan lære nye metoder at kende med hensyn til, hvordan man skal undervise, som han senere kan bruge.

A priori har vi overvejet de vanskeligheder, der ville opstå, når læreren skulle gennemføre forløbet. Både vanskeligheder hvad angår den anderledes måde at undervise på, da læreren ikke er vant til denne, og vanskeligheder ved at læreren godt kunne blive nødt til at tage nogle beslutninger i de særlige tilfælde, som ikke var blevet forudset. Læreren ville naturligvis ikke tage beslutningerne tilfældigt, men med tanke på hvad der ville være bedst at gøre, for at undervisningsforløbet kunne lykkes. Disse beslutninger ville også være baseret på lærerens personlige idéer om lærerens rolle og elevernes læring i undervisningen. Ligeledes kunne der være vanskeligheder ved, at lærerens og vores formål og planer ikke er det samme. Lærerens ønske er, at eleverne lærer noget (lærerens epistemologiske ansvar), og vores første ønske er at få forløbet til at fungere.

Til vores første møde med læreren præsenterede vi TDS samt forklarede de første fire lektioner af forløbet. Anden gang forklarede vi de sidste fire lektioner af undervisningsforløbet. Begge gange diskuterede vi forløbet med læreren for at høre hans kommentarer og tage dem til os hvis nødvendigt. Gennem læreren fik vi et indblik i, hvordan klassen var, hvilke lektioner der kunne være vanskelige for eleverne, hvad de havde lært om proportionalitet indtil nu osv. Efter forløbet talte vi igen kort med læreren om, hvordan forløbet gik. Samtalerne med læreren vil ikke blive beskrevet specifikt, men der har været nogle vigtige aspekter, som vi vil inddrage i vores analyse af forløbet.

I samtalerne med læreren, lagde vi især vægt på følgende:

1. At han skulle prøve at undgå at blande sig efter at have sat eleverne i gang med situationen.
2. At han skulle give dem god tid til at udtrykke deres tanker og finde på idéer.
3. At han skulle følge vores undervisningsmanual så godt som muligt.
4. At han skulle få så mange elever som muligt med i diskussionsfasen.
5. At tidsangivelserne er vejledende.
6. At der ikke er nogle korrekte strategier, for det kan være, at eleverne finder på nogle anderledes strategier, som også kan være en form for proportionelt ræsonnement.

Lærerens forventninger og opfattelse af undervisningsforløbet kom til udtryk gennem interviewene. Vi fik et indtryk af, at læreren var lidt nervøs over, hvordan eleverne ville tage imod den nye undervisningsform, idet han flere steder påpegede, at den pågældende metode ville være svært for eleverne at komme frem til, eller at de ikke ville kunne finde ud af det.

Datamateriale

Det er nødvendigt at observere undervisningen for at kunne undersøge de forskellige situationer herunder de didaktiske og adidaktiske situationer samt den didaktiske kontrakt. Man kan observere ved at sidde som tilskuer, men for at få mere ud af observationen kan man også optage det på mange måder, så man kan se og høre interaktionen i klassen igen og igen. Den didaktiske kontrakt forekommer implicit i undervisningen, og derfor er det nødvendigt at se eller høre interaktionerne mange gange. Desuden afspejles den didaktiske kontrakt også i elevernes skriftlige arbejde, som det er nødvendigt at analysere efterfølgende.

Vi videofilmede undervisningen, og kameraet blev stillet bagerst i klassen for at undgå at eleverne blev påvirket af dette. Desuden stillede vi en diktafon hos læreren, så den kunne bruges som en back-up i tilfælde af, at man ikke kunne høre tydeligt fra kameraet, eller hvis kameraets disk blev opbrugt. Vi havde nemlig kun halv-timers diske til rådighed, og derfor foretog vi bevidst nogle valg under undervisningen med hensyn til, hvornår vi skulle stoppe kameraet. Det blev for det meste under gruppearbejdet, hvor man alligevel ikke kunne transskribere samtalerne, da der under gruppearbejde var for meget støj i klassen. Diktafonen var af samme grund ubrugelig under gruppearbejder igen på grund af støjen. Vi har derfor været nødsaget til at tage notater under gruppearbejder. Optagelsen af de 8 lektioner gav mange timers optagelse, som skulle transskriberes.

Årsagen til, at vi har valgt at benytte videooptagelse, er at vi mener, at det er relevant at have elevernes ageren med og ikke kun være bundet til den mundtlige kommunikation. Man har et bedre helhedsbillede og overblik over de forskellige situationer i forløbet, når man har datamaterialet i både lyd og billede. Dernæst er det svært, hvis man udelukkende har optaget det på diktafon, at vide, hvad læreren egentlig er i gang med at skrive eller tegne på tavlen. Vi oplevede vanskeligheder ved at transskribere 1. og 2. lektion, da disse kun var på diktafon. Selvom vi havde taget notater i undervisningen, var det nogle gange svært at vide, hvad eleven eller læreren talte om.

Specielt i et undervisningsforløb, hvor tavlen bliver brugt relativt meget, er det relevant at have situationen i billedform. Da har man også lettere ved at se, når der er nogle elever, der besvarer spørgsmål ved en ”non verbal kommunikation” f.eks. ved at pege på tavlen eller ved at benytte gestik og mimik. Yderligere er det nemmere at afgøre, hvad der bliver sagt, og hvem det er, der siger det, i tilfælde af at de taler lavt eller utydeligt.

Vores egne notater skal være en hjælp til at udvælge de interessante situationer. Især de situationer, der ud fra et didaktisk synspunkt kan være interessant efterfølgende at analysere nærmere, skal vi være ekstra opmærksomme på. F.eks. skal vi bemærke, om den didaktiske kontrakt bliver overholdt, og de uheldige effekter af kontrakten skal også tages i betragtning.

Det datamateriale som vi vil benytte til vores *a posteriori* analyse, er primært vores videooptagelse af forløbet. Dernæst har vi transskriptionen af det, der er optaget på en diktafon i tilfælde af, at man ikke kan høre stemmerne i videooptagelsen, samt de notater som vi, som observatører, har skrevet ned. Udover disse har vi også indsamlet elevernes kladdehæfter og opgaveark (fra 7. og 8. lektion). Da vi ikke har transskriptioner fra elevernes samtaler under gruppearbejdet, vil vi tage udgangspunkt i deres kladdehæfter, hvor man kan se, hvorledes de har løst opgaverne. Ud fra disse kan vi få et indblik i elevernes proportionelle ræsonnement.

9 *A posteriori* analyse af undervisningsforløbet

9.1 Struktur

Analysen af forløbet ud fra TDS kunne påbegyndes efter transskriptionen. Der blev indledt med lokale analyser af lektionerne, jf. Hersant & Perrin-Glorian (2005). Denne analyse deles op i forhold til de 6 forskellige lektioner. Hver af disse analyser indledes med et kort resume af det, der blev observeret ud fra videooptagelserne, dette gøres så objektivt som muligt. Lydoptagelserne blev benyttet de steder, hvor man ikke kunne høre fra kameraet, især til 1. lektion og 2. lektion, hvor der ingen videooptagelse er.

Dernæst følger en mere dybdegående analyse i hver af de forskellige lektioner. Disse er blevet beskrevet ud fra de skriftligt afleverede opgaveark og kladdehæfter samt transskriptionerne, hvor samtaler mellem elever og lærer blev betragtet. Det har nemlig ikke været muligt at transskribere samtalen eleverne imellem, idet der var for meget støj i klassen. Men vi har taget notater under gruppearbejdet, som kan benyttes. Disse samtaler er relevante i forbindelse med beskrivelsen af såvel mikro- som mesokontrakten, for de er med til at vise, hvordan eleven forholder sig til de enkelte dele af det matematiske indhold. Samtalerne spiller også en vigtig rolle i at undersøge eventuelle effekter af den didaktiske kontrakt. I analysen af lektionerne kommer vi til at beskrive mikro- samt mesokontrakterne i hver lektion. Ud fra disse beskrives også den generelle makrokontrakt der har været i hver lektion, og dennes bidrag diskuteres i forhold til den overordnede makrokontrakt af hele undervisningsforløbet.

Efter de lokale analyser følger en generel analyse jf. Hersant og Perrin-Glorian (2005). Denne analyse indeholder f.eks. beskrivelse af nogle forhindringer for gennemførelse af forløbet, som vi iagttog under forløbet. Desuden beskrives afvigelser, der er mellem undervisningsmanualen og lærerens undervisning og hans valg, samt elevernes afvigelser fra det, som vi havde forventet af dem. Vi har valgt at nummerere replikkerne i transskriptionen, og den samme nummerering vil blive benyttet foran replikkerne i analysen.

9. 2 Resume af 1. lektion

Læreren begynder med at dele kladdehæfter ud til alle elever. Mens han beder dem om at skrive deres navne på dem, giver han nogle praktiske oplysninger om forløbet. Dernæst spørger han, om der er nogen, der kan fortælle ham, hvad et kvadrat er. Enkelte elever rækker hånden op og forsøger at forklare det.

Et par elever forsøger at forklare med deres egne ord, hvad et kvadrat er. De har fat i nogle rigtige punkter. Læreren fortsætter med at spørge, om der er nogen, der kan fortælle, hvad et rektangel er. Igen er der nogle elever, der svarer på spørgsmålet. Efterhånden som flere elever svarer på spørgsmålet, bliver det mere klart, hvad et rektangel er, idet de komplementerer hinandens svar.

Dernæst beder læreren alle elever om at åbne deres kladdehæfter og tegne to kvadrater. Det ene skal have sidelængen 3 cm og det andet 5 cm. Læreren spørger, om de to kvadrater har samme form. Dertil svarer alle elever ja. Dernæst beder han dem om at tegne to rektangler, det ene med sidelængderne 3 cm og 5 cm, og det andet med sidelængderne 5 cm og 7 cm. Han skriver på tavlen, hvad de skal gøre, mens han siger det. Så spørger læreren, om de to rektangler har samme form. Dertil svarer næsten alle elever ja. Der fremkommer to metoder. a) Da både længden og bredden af det lille rektangel er forstørret med 2 cm, har de samme form. b) Da 5 cm indgår i begge rektangler, har de samme form. En elev forklarer den multiplikative metode.

Læreren prøver at få klassen til at overveje deres argumenter ved at tegne et rektangel på 1 cm x 7 cm. Dernæst lægger han 2 cm til begge sider, og det bliver til et rektangel på 3 cm x 9 cm. Læreren forklarer, at det med at lægge 2 til, ikke holder, idet man på det nævnte eksempel tydeligt kan se, at rektanglerne har forskellig form.

9.3 Analyse af 1. Lektion

Episode 1.1:

Idet læreren starter med at fortælle praktiske ting om forløbet, f.eks. at de skal benytte kuglepen, skal skrive minus ude ved siden af det, som de har skrevet forkert, og at de ikke må bruge lommeregnere, lyder det for eleverne som om, at de får en prøve. Vi hører nemlig en elev spørge:

3.*"Er det en prøve?".*

Når læreren spørger eleverne: 5.*"Er der nogle der kan forklare, hvad et kvadrat er?"*, opstiller han en mikrokontrakt om, at nogle elever skal sige det, de ved om kvadrater. Vi forventede, at det ville være helt klart for en 6. klasses elev, hvad et kvadrat er. For denne viden er gammel viden, som eleverne burde have personliggjort og fællesgjort i de foregående skoleår. Det har de måske også, men de har svært ved at formulere sig på en faglig præcis måde, hvilket resulterer i, at læreren spørger flere elever.

Denne devolution vedrører elevernes gamle viden, og derfor er ansvaret overladt til eleverne. Kvadrat som fænomen er nemlig kendt viden for eleverne, og derfor kommer de med nogle forskellige nødvendige betingelser for et kvadrat. Læreren vil opstille en mikrokontrakt, som omhandler, at en eller flere elever skal sige noget om kvadrater. For læreren siger ikke noget om, at de skal give en nødvendig og tilstrækkelig definition. Man kan ikke forvente, at de skal kunne give en præcis matematisk definition af et kvadrat, idet en sådan ikke er kendt viden for dem. Der er en mikrokontrakt af konsensus, fordi få elever taler og det bliver accepteret i klassen. Det primære formål i denne episode er altså at genopfriske elevernes gamle viden om, hvad et kvadrat er.

1. elev svarer: 6.*"Alle sider er lige lange".*

Idet eleven tegner et kvadrat i luften med fingrene, tyder det på, at han godt ved, hvad det er. Denne elev besvarer spørgsmålet ud fra en mikrokontrakt om, at det er tilladt at tegne noget i stedet for at formulere det med ord. Læreren modificerer denne mikrokontrakt ved at spørge, om der er nogen, der kan forklare det bedre. Læreren giver altså mere ansvar til eleverne og strammer samtidig opgaven. Læreren kunne måske få det mere nøjagtigt ud af den pågældende elev, hvis han havde bedt om en uddybende forklaring. En anden elev vil opfylde lærerens forventninger og dermed mikrokontrakten, ved at svare på følgende måde:

2. elev svarer: 10*."Det er en firkant, og alle sider er lige lange".*

Læreren siger herefter, at denne forklaring er korrekt. Der er nemlig et fremskridt fra den 1. elevs svar til den 2. elevs svar. Men de nævnte betingelser er ikke tilstrækkelige til at definere et kvadrat.

3. elev svarer: 12.*"Alle vinkler i kvadrater er 90 grader".*

Eleven har ret, men det er ikke en tilstrækkelig beskrivelse af et kvadrat i sig selv. Måske er det en tilføjelse til de andre elevers svar. Vi kan se, at mikrokontrakten er i forhandling, og der er et spil i gang, hvor det handler om at sige, det som læreren forventer. Det er måske nok for læreren, idet han ser det som, at hver elev tilføjer noget til definitionen, men det er ikke sikkert, at eleverne har forstået det. Læreren kunne så institutionalisere, hvad et kvadrat er, ved at udtrykke det klart for eleverne, at både 2. elevs svar og 3. elevs svar er nødvendige og tilsammen tilstrækkelige for et kvadrat. Men i stedet siger læreren: 13.*"Ja, det er også korrekt, men ikke nok".* Men det gør ikke noget for det didaktiske miljø, idet der er en mesokontrakt om, at gammel viden ikke er fokus i denne episode.

I forhold til mesokontrakten sker der efter 3. elevs svar en direkte feedback fra lærerens side, men der sker ikke en institutionalisering af, hvad et kvadrat er. Den gamle viden som burde re-institutionaliseres, bliver der ikke gjort noget ved. I denne episode har viden den status, at det er gammel viden, som er i færd med at blive institutionaliseret, men ikke bliver institutionaliseret alligevel. I denne episode er der en devolutions- og en formuleringsfase, som finder sted. Formuleringsfasen udfyldes ikke af eleverne, som læreren havde forventet det.

Episode 1.2:

Læreren stiller følgende spørgsmål: 14.*"Er der nogen, der kan forklare mig, hvad et rektangel er?".* Læreren vil i denne episode opstille en mikrokontrakt, som handler om, at nogle elever skal sige noget om et rektangel. Formålet er igen at genopfriske den gamle viden om, hvad et rektangel er. Det er ligesom episode 1.2 en række forskellige nødvendige betingelser for et rektangel, som eleverne opremser. Af hensyn til det didaktiske miljø gør det ikke noget, at eleverne blot siger disse betingelser, idet formålet med denne og forrige episode ikke er, at eleverne skal lære at definere henholdsvis et kvadrat og et rektangel. Der er igen en mikrokontrakt af konsensus, som finder sted.

1. elev svarer: 15.*"Siderne er ikke lige lange".*

Eleven giver blot en nødvendig betingelse for et "ikke-kvadrat". I stedet for at validere elevens svar, spørger læreren en ny elev, hvilket signalerer, at svaret er forkert. Elevens svar kan også opfattes som værende delvis rigtig, fordi eleven stadig kan have de tre betingelser fra episode 1.1 i hovedet, og derfor kun nævner den ene betingelse, som ikke gælder for et rektangel.

2. elev svarer: 16.*"To af siderne er lige lange, og de andre to er også lige lange".*

Men denne besvarelse tilfredsstiller heller ikke læreren, idet det også er gældende for et kvadrat, hvorfor han spørger en ny elev.

3. elev svarer: 18.*"Det er en firkant, hvor to af siderne er lige lange og de andre to er også lige lange, men de er bare kortere end de to andre".*

Den sidste elevs forklaring tager ikke kvadrater med, og den er heller ikke tilstrækkelig, idet der ikke er blevet sagt noget om, at vinklerne skal være rette. Læreren glemmer igen at nævne, at vinklerne skal være rette både i et kvadrat og et rektangel, da det ellers kan være henholdsvis en rombe og et parallelogram.

Denne devolution vedrører den gamle viden, nemlig hvad et rektangel er, og ansvaret er derfor overladt til eleverne. Der er derfor en mikrokontrakt af konsensus.

I forhold til mesokontrakten er der igen tale om gammel viden, og episoden foregår i en devolutions- og handlingsfase. Episoden starter med et ønske om at re-institutionalisere den gamle viden, men dette bliver ikke gjort ordentligt.

Episode 1.3:

Læreren vil i denne episode oprette en mikrokontrakt ved, at han siger: 20.*"Nu skal I åbne jeres hæfter. Så skal I tegne et kvadrat med sidelængden 3 cm".* Vi kan høre en elev fra klassen spørge: 21.*"Alle siderne?".* Årsagen til elevens spørgsmål kan være, at eleven ikke har hørt efter, eller at eleven stadig hænger fast ved episode 1.2 om rektangler. Det er tydeligt at se, at denne elev er ivrig at forstå spillereglerne, idet det først nu er gået op for ham, at der foreligger et ansvar hos ham, nemlig at forstå hvad der skal laves.

Der er en mikrokontrakt af individuel produktion. At tegne et kvadrat med en given sidelængde er kendt viden for eleverne, og derfor er ansvaret overladt til eleverne. Denne episode består af en devolution af læreren samt en handlingsfase.

Episode 1.4:

Læreren beder dem om at tegne det andet kvadrat: 22.”*I skal nu tegne et kvadrat med sidelængde 5 cm”.* Igen er der tale om gammel viden. Der er en mikrokontrakt af individuel produktion, hvor læreren overgiver ansvaret til eleverne. Denne episode består ligeledes af en devolutions- og en handlingsfase.

Episode 1.5:

Læreren stiller nu spørgsmålet: 29.*”De to kvadrater I har tegnet, har de samme form?”*, hvilket alle elever er enige om. Der er en mikrokontrakt af konsensus. Eleverne har en intuitiv forståelse af, hvad samme form er, idet de har hørt denne betegnelse f.eks. i daglig tale. Ansvaret bliver derfor overført til eleverne, og de påtager sig det uden problemer. Dette bliver institutionaliseret af læreren, idet han slår fast, at alle kvadrater har samme form uanset sidelængde.

Med hensyn til mesokontrakten foregår denne episode i en devolutions-, formulerings- samt institutionaliseringsfase. Læreren og eleverne institutionaliserer i fællesskab, at kvadraterne har samme form. Viden udvikles derfor fra at være viden, som er i færd med at blive institutionaliseret til institutionaliseret viden.

Episode 1.6:

Læreren søger at etablere en mikrokontrakt om, at eleverne skal tegne to rektangler med de givne sidelængder, samt hver for sig skrive, om de har samme form eller ej. Men en elev bryder mikrokontrakten og svarer: 45.*”Ja, de har samme form”*. Mikrokontrakten var nemlig, at de skulle skrive svaret ned i kladdehæftet. Med elevens svar sker der en flytning fra individuel produktion til kollektiv produktion.

Læreren svarer: 46.*"Nej nej. Det har jeg ikke spurgt om endnu".* Elevens svar er et brud på de gældende spilleregler, for svaret kan påvirke de andre elever.

Ansvaret er igen overført til eleverne, idet at tegne rektangler ud fra de givne sidelængder er gammel viden. I episoden udvikles en kontrakt for, hvad det vil sige, at have samme form. Med hensyn til mesokontrakten foregår episoden i en devolutions- og handlingsfase.

Episode 1.7:

Læreren vil oprette en mikrokontrakt om, at eleverne skal begrunde deres svar ved at bruge tallene. Det at der bliver sagt, at de skal bruge tallene, er en vigtig detalje, idet fokus flyttes lidt mere til et aritmetisk domæne, som peger på, at eleverne skal regne noget ud. Hvis ikke dette var blevet fortalt, kunne de ligeledes udforme korrekte begrundelser ved f.eks. at måle vinklerne af de to trekanter, som hvert af rektanglerne kan deles i. Det adidaktiske potentiale begrænses altså, idet tallene skal benyttes. Ansvaret er overladt til eleverne i handlingsfasen, idet læreren har devolueret, hvad de skal gøre, og det har de tilstrækkelig viden til at kunne.

Episode 1.8:

Læreren spørger, hvem der har svaret "ja" og "nej" og vælger nogle elever til at begrunde. Læreren opretter altså en mikrokontrakt, som handler om, at eleverne ved hjælp af korrekte matematiske argumenter skal forklare læreren og klassen, hvad de har skrevet i deres kladdehæfter. Igen er der en kollektiv produktion. Vi kan se i elevernes kladdehæfter, at alle elever har skrevet "ja" på nær tre elever. Først vælger læreren tre af de elever, der har skrevet "ja" til at begrunde deres svar. Dernæst vælger han én elev, der har skrevet "nej", da der kun er én, der melder sig. Hvis læreren havde været rundt i klassen, og havde set de to andre elever, der havde skrevet "nej", kunne han også inddrage deres metoder. Der dukker 2 forskellige strategier op blandt dem der har skrevet "ja".

1. elev: 49.*"Ja, de har samme form, fordi 3 og 5 er plusset med 2, så 2 bliver til 5, og 5 bliver til 7".*

Denne metode er den forudsete additive metode.

2. elev: 51.*"Ja, de har samme form, fordi to af siderne er lige lange, og begge er et rektangel".*

Lærer: 52."*Er lige lange?"*

2. elev: 53.*"Ja, det er fordi der er 5 og 5".*

Elevens formuleringer påpeger, at da 5 cm indgår i begge rektangler, tænker han, at de må have samme form. Den tredje elevs metode er næsten den samme som denne. Denne metode er dukket op, idet vi har valgt den samme sidelængde 5 cm i begge rektangler. Vi kunne have undgået situationen ved at vælge rektangler, hvor ingen af siderne har samme sidelængder. Det kunne eksempelvis være et rektangel med sidelængder 3 cm x 4 cm, og det andet rektangel med sidelængder 5 cm x 6 cm.

Kun én elev rækker hånden op, da læreren spørger, hvem der har skrevet "nej".

63.*"Jeg har taget de her to tal og divideret med hinanden (peger på 3 cm og 5 cm i det ene rektangel), og så har jeg taget de her to tal og divideret (det andet rektangel). Det her giver 1,66 og den her giver 1,20"*

Eleven har fundet forholdet mellem siderne i begge rektangler, som giver forskellige tal, men ordet "forhold" bliver ikke nævnt hverken af eleven eller af læreren. Det skal bemærkes, at eleven har udregnet 7/5 forkert, idet han har fået det til 1,20. Læreren retter ikke på dette, måske fordi han har fokus på noget andet, og derfor ikke bemærker, at der er en fejl.

I nedenstående dialog mellem den pågældende elev og læreren, kan man se, at eleven ikke udtrykker det, som læreren vil have ham til at sige, og derfor ender det med, at læreren overtager ansvaret i dimensionen fordeling af ansvar i mikrokontrakten ved selv at institutionalisere. Man kan tyde, at fra elevens synsvinkel handler mikrokontrakten om at bruge tallene til at komme frem til et resultat. Eleven vil altså gerne hen til et aritmetisk domæne i dimensionen matematisk domæne i mikrokontrakten. Man kan her tale om fænomenet "Kaptajnens alder", idet tallene bliver brugt uden en fuld forståelse for konteksten.

Elev: 69.*"Det giver 1,20".*

Lærer: 70.*"1,20. Og hvad er det?"*

Elev: 71.*"Og så har jeg så fundet ud af, at de ikke er af samme form."*

Lærer: 72.*"Du har sagt længde divideret med bredde. Det giver et tal. Og så har du sagt længde divideret med bredde i denne rektangel giver et andet tal. Og så siger du hvad?"*

Elev: 73.*"At de ikke har samme form".*

Lærer: 74.*"Ok".*

Episoden foregår i en formuleringsfase, hvor ansvaret til dels er overført til eleverne, idet der vælges nogle elever, som begrunder deres svar ved tavlen. Men i ovenstående samtale kan vi se, at læreren har mere ansvar end eleven. Alle elever opfylder mikrokontrakten om at benytte tallene, men de gør det uden at besvare spørgsmålet korrekt og måske endda uden at overveje svaret ligeså meget som selve udregningerne.

Efter ovenstående samtale, kan man høre eleverne spørge læreren: 75.*"Hvad for en var rigtig?".* Dette viser, at eleverne, som følge af den didaktiske kontrakt, forventer en validering af læreren. Men læreren siger ikke noget, idet han vil opretholde kontrakten af kollektiv produktion.

Episode 1.9:

Læreren vil have, at eleverne skal overbevise hinanden om deres metoder. Mikrokontrakten handler altså om, at eleverne skal bruge deres udregninger til at argumentere for, at de har ret eller at modparten ikke har ret. Læreren prøver ihærdigt at få en diskussion i gang, men det lykkes ikke. Det eneste der kommer ud af det, er, at to elever gentager de samme to metoder. Eleverne fralægger sig altså ansvaret, som den didaktiske kontrakt indebærer ved at forholde sig passive. Grunden til at eleverne er tilbageholdende med at diskutere, skal diskuteres i afsnit 10.1. Derfor beslutter læreren sig for at gå videre til institutionaliseringen, i stedet for at modificere den gældende kontrakt. Vi hører endnu en gang en elev spørge, hvad for en metode der er rigtig.

Læreren prøver altså i denne episode at fralægge sig ansvaret, så de i fællesskab kan institutionalisere den tilsigtede viden, men det lykkes ikke.

Episode 1.10:

Som beskrevet i undervisningsmanualen, tegner læreren de to rektangler på tavlen, og spørger om de har samme form. Mikrokontrakten er af kollektiv produktion. Alle elever er enige om, at rektanglerne ikke har samme form. Men en elev svarer:

Elev: 91.*"Ja, fordi at der er igen plusset med 2 på begge sider. Så de har samme form".*

Lærer: 92.*"Men synes du det ser ud som om, at de har samme form? Jeg beder ikke om en udregning".*

Elev: 93.*"Nej".*

Lærer: 94.*"Nu er I vist alle enige om, at de to ikke har samme form. Men I kan se, at der er blevet lagt to til begge sider. Altså 1 plus 2 er 3, og 7 plus 2 er 9".*

Eleven der svarer ja, fokuserer stadig på tallene og ikke på formen af figurerne. Idet læreren beder ham om at se på rektanglernes form, erklærer han straks, at de ikke har samme form. Elevens svar afhænger altså af, hvilke spilleregler der er gældende i miljøet. Når læreren siger, at han ikke vil have en udregning, svarer eleven noget andet. Den sidste sætning kunne uddybes lidt mere af læreren, for det er uvist, om eleverne har forstået pointen. Men da det ringer ud, kan der ikke nås mere. Læreren burde tydeliggøre vinderstrategierne, så eleverne kan personliggøre den tilsigtede viden, idet vi gang på gang hører elever spørge, hvilken metode der er rigtig.

I denne lektion bidrager mesokontrakterne til en makrokontrakt på den måde, at den tilsigtede viden bliver at etablere en konflikt med den additive strategi. Men desværre bliver eleverne ikke konfronteret med, at den additive strategi ikke holder. Makrokrontakten bliver altså ikke opfyldt i denne lektion. Det, der er skyld i, at makrokontrakten ikke bliver opfyldt, er de små beslutninger, der bliver foretaget i lektionen. Hvis læreren f.eks. havde været rundt i klassen og set de andre elever, der har svaret ”nej”, kunne han inddrage deres metoder i episode 1.8, hvilket kunne føre til en konflikt mellem de to synspunkter. Dette kunne bidrage til at få opfyldt makrokontrakten.

9.4 Resume af 2. lektion

På lærerens kateder ligger der 4 forskellige typer papirer. Der bliver lavet 8 grupper, og hver gruppe får et stykke papir, som de skal beregne tykkelsen af. Eleverne får at vide, at alle elever skal skrive deres argumenter og udregninger ned i deres kladdehæfter. Efter at have målt den ene slags udveksler de papirark med en anden gruppe. De grupper der har et bud på tykkelsen, går op til tavlen og skriver deres bud. Læreren begynder at spørge de enkelte grupper, hvilken metode de hver især har brugt til at beregne tykkelsen af papirerne. Visse grupper bliver bedt om at forklare deres metode på tavlen. Til sidst institutionaliserer læreren ved at give et eksempel om en nål, som vejer så lidt, at det er svært at veje den præcist, derfor skal man tage flere stykker og veje, og derefter dividere vægten med antallet af nåle.

9.5 Analyse af 2. Lektion:

Episode 2.1:

Læreren ønsker at oprette en mikrokontrakt om, at grupperne skal finde en metode til at beregne tykkelsen af et enkelt stykke papir af de fire forskellige papirer, og derefter skal de skrive deres resultat i millimeter i tabellen på tavlen.

95.*”Vi har blåt, linjeret papir, og så et lidt lillaagtigt papir, og så hvidt. De er af forskellige farver. De har også forskellige tykkelser. I får nu, hver gruppe får blåt papir, og så skal I finde ud af, hvor tykt det her er [..].Men når jeg har delt f.eks. det her blåt til jer, når I skal måle, så lægger jeg resten på bordet. Hvis I får brug for flere papirer, så må I gerne komme op og tage flere stykker. Altså hvis det bliver til en hjælp til jer”.*

Eleverne accepterer mikrokontrakten og går i gang med at måle. Læreren har ansvaret i denne fase, og han prøver at overføre ansvaret til eleverne, så de kan gå i gang.

100.*"Fordi med lineal er det lidt svært at måle. I må gerne bruge flere af dem her, hvis I får brug for det. Jeg siger ikke, at I skal måle det. I skal finde frem til en metode til at finde, hvor tykt det her er".*

Vi kan se, at læreren ønsker at gøre det klart for eleverne, at de ikke kan bruge linealen til at måle et enkelt stykke papir, og at de skal finde en metode. Selvom det virker som om, at læreren fortalte eleverne mere end han burde, var der mange grupper, der først gik i gang med at måle tykkelsen af et enkelt stykke papir med en lineal. Men lidt senere begyndte de at tage lidt flere papirer fra katederet. Eftersom enkelte grupper begyndte at tage flere papirer, tog resten af grupperne også flere. Grupperne skrev resultaterne op i tabellen på tavlen, efterhånden som de fandt ud af det. Denne episode er en devolutions- samt handlingsfase.

Episode 2.2:

I denne episode vil læreren oprette en mikrokontrakt om, at en elev fra hver gruppe mundtligt skal forklare deres metode til at komme frem til resultatet på tavlen. Eleverne accepterer denne mikrokontrakt, og en elev fra hver gruppe forklarer gruppens metode. Der er en mikrokontrakt af kollektiv produktion, som finder sted.

Da vi kun har lydoptagelserne til 6., 7. og 8. gruppes svar, starter vi med 6.gruppe. Eleven fra gruppe 6 svarer:

104. Egon: *"Vi har målt bredden med lineal, og det blev til 0,1 mm".*

105.Lærer*: "Hvordan har I gjort det, er det for et stykke papir eller for ti stykker papir, eller 100 stykker papirer?"*

106.Egon: *"Enkelt papir".*

107.Lærer*: "Et enkelt stykke papir. I har taget et enkelt stykke papir, og målt det med en lineal. Var det ikke svært?"*

108.Egon: *"Jo"*

109.Lærer: *"Det er meget svært, og det er sikkert meget upræcist".*

Gruppen har målt bredden af et enkelt stykke papir. Lærerens reaktion på dette vil få gruppen til at indse, at metoden ikke var det, som læreren forventede. Læreren fortsætter straks til næste gruppe og spørger om deres metode, men denne gang vil læreren oprette en ny mikrokontrakt ved at få eleven til at vise udregningen på tavlen. Eleven skriver op, mens hun forklarer:

113. *"Vi har ti stykker papirer. Og så har vi målt dem, og det giver 0,3 cm. Så dividerer vi det, og det bliver 0,03. Og det er cm, så skal vi gøre den til mm. Så ganger man med ti. Og det giver 0,3 mm".*

114.Lærer: *"Det er en mulighed".*

Eleven accepterer mikrokontrakten ved at komme til tavlen og forklare, mens hun skriver. Metoden er den korrekte metode, som vi beskrev i *a priori* analysen af forløbet. Lærerens reaktion kan få eleven samt gruppen til at tro, at metoden er forkert. Læreren spørger dernæst den næste gruppe, som svarer:

116.Hans: *"Vi tager 20 stykker papirer. Der får vi det til 0,2 mm. Og så har vi taget 10 stykker. Det giver 0,1 mm. Så har vi taget 5 stykker. Det giver 0,05mm. Og så dividerer vi med 5, som giver 0,01 mm".*

Denne gruppe benytter ligeledes den korrekte metode. Efter gruppens svar fortsætter læreren til institutionaliseringen uden at validere gruppens svar.

De andre gruppers metoder kan vi analysere ud fra deres kladdehæfter.

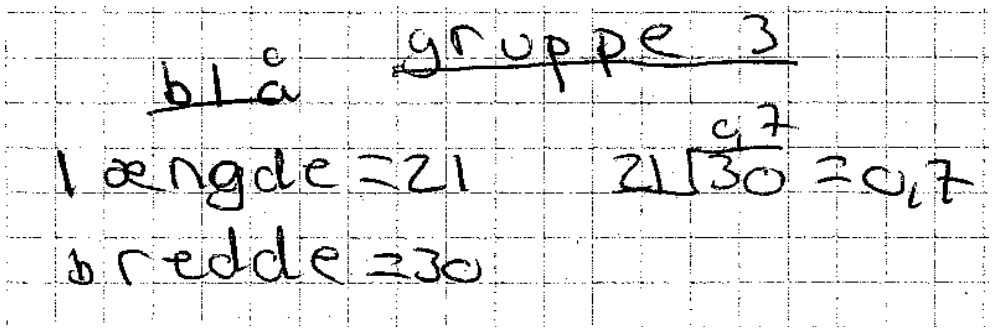
<u>1. Gruppe:</u> Vi kan se, at disse elever har taget 10 stykker papirer af hver farve og 100 stykker af det linjerede papir og målt disse i centimeter. Derefter er der blevet divideret med antallet, og ganget med 10 for at få resultatet i millimeter. Grunden til, at der bliver taget 100 af det linjerede papir er nok, at papiret var så tyndt, at det har været svært at måle kun 10 stykker. Metoden er korrekt. Eksempelvis har de skrevet:

"Blåt papir: 0,3 cm/10 = 0,03 x 10 = 0,3 mm"

2. Gruppe: Denne gruppe har ligeledes benyttet den korrekte metode. Denne gruppe har valgt at skrive metoden med ord. Eksempelvis følgende, hvor eleven mener tykkelsen af papirerne i stedet for bredden:

"Hvidt papir: Vi har taget 7 hvide papirer og målt bredden, og det blev 1,1 mm og så dividerede vi 1,1 med 7 og det blev 0,12 (Egon)".

3. Gruppe: Denne gruppe har ikke kunnet finde den rigtige metode med at måle tykkelsen af flere papirer og dividere med antallet. De har i stedet beregnet forholdet mellem længde og bredde af et stykke papir, og angivet dette forhold som resultat. Man kan her se en form for fænomen "Kaptajnens alder", idet eleverne vil angive et svar ved at benytte noget de kan måle, som i dette tilfælde er længden og bredden af papiret. Grunden til, at de har brugt denne metode kan også være, at de er blevet påvirket af 1. lektion, hvor en elev udregnede forholdet mellem siderne i rektanglerne. Idet deres resultat også giver et decimaltal mindre end 1, ligesom de andre gruppers, antager de, at de er på rette spor. Eksempelvis har de skrevet følgende:



Figur 24

4. Gruppe: Denne gruppe påstår, at de har målt et enkelt stykke papir præcist med lineal. Dette får de bekræftet ved at folde samme papir 10 gange og måle tykkelsen og dividere med antal foldninger. Det de mener med foldninger er harmonikafoldninger, idet vi så dem gøre det under

handlingsfasen. I stedet for at folde det samme papir 10 gange, kunne de sagtens have taget 10 stykker papirer og målt tykkelsen af disse. Det følgende eksempel viser elevernes udregning og argumenter:

"Linjeret papir: Vi har målt det via lineal og fandt ud af at det giver 0,1mm. Ved at folde det stykke papir 10 gange gav det 1 mm, så vi dividerede det med 10 og det gav 0,1 mm".

<u>5. Gruppe:</u> Denne gruppe har foldet papiret og målt tykkelsen, dog er det ikke harmonikafoldninger. De har nemlig foldet papiret to gange, hvor der så kommer 4 lag, som de dividerer med. Grunden til, at de vælger at folde det to gange, er nok, at de ikke kan måle en tykkelse, der er mindre end 1 millimeter med lineal. Gruppens metode er altså korrekt. De kunne have benyttet 4 stykker papirer i stedet for at folde papiret. Eksempelvis har de skrevet følgende:

"Lilla papir: Vi har bøjet papiret to gange og vi fik 1 mm. og det har vi så divideret med 4, fordi vi har bøjet det to gange".

Episode 2.3:

Læreren vælger direkte at gå videre til institutionaliseringen uden at forklare eleverne hvilken metode, der er korrekt og hvorfor.

118.Lærer: *"Konklusionsmæssigt. Hvad har I lært nu? Vi har generelt den samme metode. Vi er ikke ude efter et forkert eller rigtigt resultat. Det er hvilken metode I har brugt, og om metoden er rigtig eller forkert. Hvad kan man sige generelt? F.eks. hvis I skal veje en nål, hvordan ville I gøre det?".*

119.Betina: *"Man kan tage de der, man vejer med i køkkenet. Så kan man tage 10 af dem".*

120.Lærer: *"Ja præcis. Man kan måle 10 af dem, og så dividere det med 10 for at få hvad en nål vejer. Når man skal måle eller veje små ting, bruger man denne metode. Det er umuligt at måle det her papir med lineal. Der findes noget papir, der er meget meget tyndere. Så tager man 100 stykker, 500 stykker, 10 stykker. Så kan i måle dem til 1 cm, 0,5 cm osv. Så kan I dividere med antal stykker I har taget. Forstået? Godt".*

Læreren institutionaliserer ved at give et eksempel. En nål er så lille, at det er svært at veje den præcist, og derfor skal man tage flere stykker og måle og derefter dividere med antallet.

I denne lektion bidrager mesokontrakterne til en makrokontrakt på den måde, at den tilsigtede viden bliver, at når man skal måle eller veje noget, der er meget tyndt eller meget lille, skal man måle eller veje flere, og dividere med antallet. De grupper, der ikke har benyttet den korrekte metode, bliver ikke konfronteret med, at deres metoder er forkerte. Læreren burde i formuleringsfasen stille disse grupper yderligere spørgsmål ved at benytte det adidaktiske potentiale, så grupperne kunne indse, at deres metoder er forkerte.

9.6 Resume af 3. og 4. lektion:

Disse to lektioner handler om puslespilssituationen. Inden det ringer ind til time, har vi tegnet en skitse af puslespillet på tavlen. Efter at have inddelt eleverne i grupper af 3-5 begynder han at forklare, hvad spillet går ud på og hvilke spilleregler, der er gældende. Puslespillet i kuverten skal forstørres således, at den sidelængde der er 4 cm i det nye puslespil skal være 7 cm. Ligeledes skal de øvrige sidelængder forstørres. Han påpeger, at alle elever i hver gruppe mindst skal forstørre en puslespilsbrik.

Han sætter gruppearbejdet i gang. Eleverne går først i gang med at samle de udleverede små puslebrikker. Så forstørrer eleverne de øvrige brikker. Dog er der ingen af grupperne, som forstørrer brikkerne multiplikativt, de gør det udelukkende additivt. De tager altså forskellen mellem 4 og 7 som udgangspunkt og lægger 3 til alle de øvrige brikker. Der går ikke lang tid, før man ser undrende elever. De kan ikke rigtigt forstå, hvorfor brikkerne til det nye puslespil ikke passer. *"Har vi nu målt forkert?"* spørger de hinanden og forsøger igen. Når alle grupper har forsøgt sig mindst én gang med at lave det nye puslespil, tager læreren over og fortæller med et eksempel på tavlen, at den additive strategi ikke er den korrekte. Her kan eleverne godt se, at strategien ikke er korrekt, men hvad alternativet er, er der ingen, der har et bud på. Herefter tegner læreren en tabel på tavlen (se figur 25) og spørger, hvad 8 cm bliver til i det forstørrede puslespil. Efter at have udfyldt tabellen, virker det lige ud af landevejen for eleverne at forstørre brikkerne.

Til sidst institutionaliserer læreren ved at fortælle eleverne, at når man skal forstørre eller formindske en genstand, skal det hele forstørres eller formindskes med en fast faktor.

Små brikker	1 cm	2 cm	4 cm	5 cm	6 cm	7 cm	8 cm	9 cm
Store brikker	1,75 cm	3,5 cm	7 cm	8,75 cm	10,5 cm	12,25cm	14 cm	15,75cm

Figur 25

9. 7 Analyse af 3. og 4. lektion

Episode 3.1:

Vi har for at gøre analysen nemmere nummereret grupperne således, at der er 5 grupper i alt. Læreren søger at etablere en mikrokontrakt ved at sige: 121.*"Det (puslespillet) skal så forstørres sådan, at den her 4 cm skal blive til 7 cm"*. Der bliver altså opstillet en mikrokontrakt om, at ved at benytte det viste eksempel, skal eleverne forstørre de øvrige brikker af puslespillet i grupperne.

En elev vil have klare regler for, hvad der skal gøres, og spørger straks: 124.*"Skal den forstørres med 3?".* Elevens spørgsmål er en forhandling af spillereglerne. Denne elev bryder mikrokontrakten, og derfor sker der herefter en flytning fra individuel produktion (i grupper) til kollektiv produktion. Lærerens reaktion på dette spørgsmål er at ignorere det og gentage spillereglerne. Dette kan i klassen opfattes som en bekræftelse af, at eleven har svaret rigtigt, men at læreren blot ikke ønsker at røbe det.

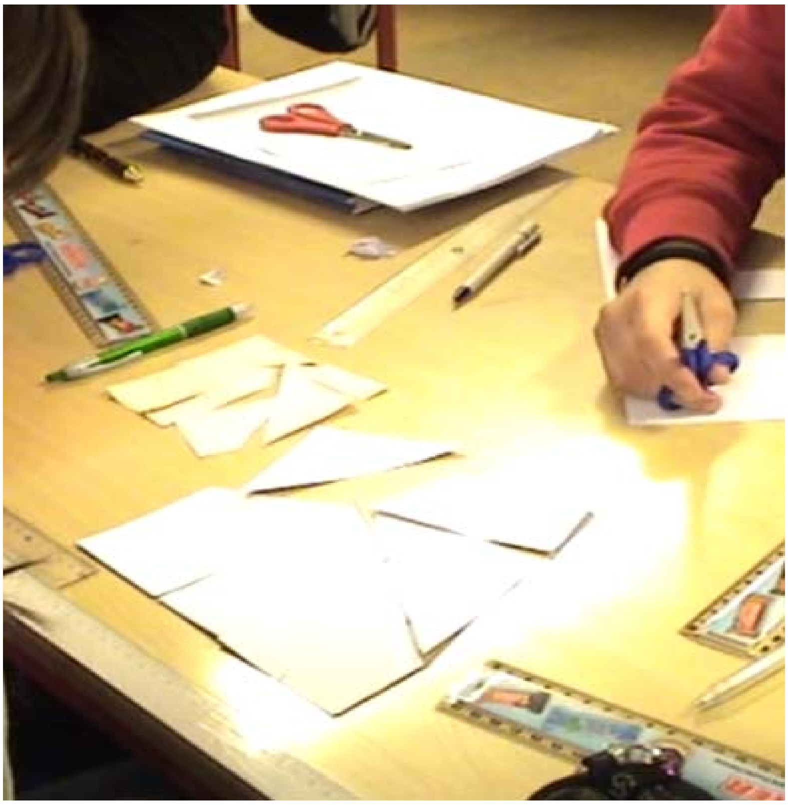
Måden læreren devoluerer på, når han siger: 125.*"Det her 4 skal blive til 7",* kan opfattes af eleverne som om, at de blot skal lægge 3 til. I devolutionsfasen bliver mikrokontrakten etableret, men den er ikke stabil nok. Det primære formål i denne episode er, at eleverne benytter den additive strategi og indser, at den ikke holder.

Læreren kunne have devolueret på en anden måde for at undgå dette. Han kunne eventuelt i starten udtage to sidelængder, f.eks. 4 cm og 5 cm, og fortælle at 4 cm bliver til 7 cm, og 5 cm bliver til 8,75 cm. Men dette ville så forhindre grupperne i at starte med den additive strategi. Selvom den additive er en forkert strategi, er det vigtigt, at den ikke på forhånd udelukkes, for at eleverne kan indse, at metoden ikke er rigtig.

Læreren kunne også have devolueret ved at tegne en større udgave af puslespillet, uden angivelser af tal på begge puslespil, og pege på sidelængden på 4 cm i det ene puslespil og sidelængden på 7 cm i det andet puslespil. Dette kunne være en god idé, da eleverne så ikke ville kunne se tallene og fokusere på disse. Men dette burde vi have tænkt på, for det er os, der har tegnet puslespillet på tavlen inden lektionen.

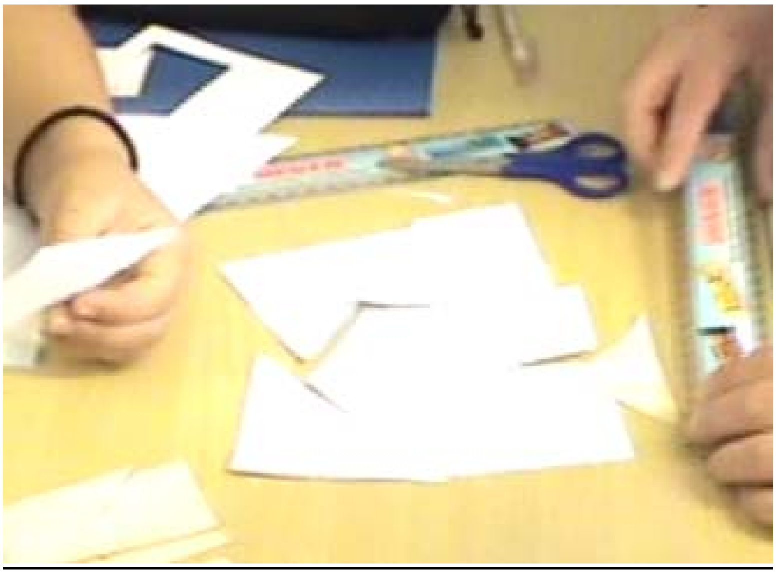
Eleverne udfører den additive strategi i handlingsfasen. Det er muligvis klart for alle elever, at det er den strategi, der skal benyttes, men det kan også have en betydning, at eleven i devolutionsfasen spurgte højlydt: 124.*"Skal den forstørres med 3?".* Da læreren har ignoreret elevens spørgsmål i devolutionen, kan det forstås som om, at det er en rigtig metode. Derfor er mikrokontrakten fra elevernes side, at forstørre hele puslespillet ved at lægge 3 cm til siderne og få det til at passe sammen.

Efter at grupperne har klippet ud i henhold til den additive strategi, indser de, at brikkerne ikke passer. For at gøre det nemmere for dem selv, har en af grupperne nummereret brikkerne, så de kan finde rundt i, hvilke brikker de har, og hvilke de mangler. Dette er en god måde at sætte orden i brikkerne. Måske skulle vi have gjort det på forhånd. Når eleverne ser, at puslespillet ikke passer, tror de i nogle grupper, at de har målt eller beregnet forkert og går i gang med at lave det om igen med samme metode. I andre grupper måler de igen med lineal for at se, om de har målt rigtigt. Men det passer stadig ikke. Eleverne er altså overbeviste om, at puslespillet skal passe, men at det er dem, der har beregnet forkert. De er nemlig overbeviste om, at mikrokontrakten går ud på, at lægge 3 cm til alle siderne. Derfor prøver de ihærdigt at vinde spillet altså at få puslespillet til at passe sammen.



Figur 26 viser handlingsfasen i episode 3.1.

Læreren venter til alle grupper mindst én gang har prøvet den additive strategi. Da de i nogle grupper begynder at lave puslespillet igen, fordi de tror, at de har målt forkert, tager denne episode længere tid, end vi havde forventet. Det primære formål i denne episode er, at eleverne får prøvet den additive strategi og indser, at den er forkert. Ny viden introduceres og overlades til eleverne, som skal komme frem til et svar, og ansvaret er derfor overført til eleverne. Episoden finder sted i en devolutions- samt en efterfølgende handlingsfase.



Figur 27 viser handlingsfasen i episode 3.1

Episode 3.2:

Læreren vil oprette en mikrokontrakt, hvor eleverne kan indse, at deres additive strategi er forkert. Dette sker ved følgende samtale i klassen:

126.Lærer: *"Og så kan jeg se, alle grupper, alle medlemmer af grupperne har sagt, at der skal lægges 3 til. I har sagt 4 plus 3 det giver 7. Og så har I lagt 3 til alle siderne. Hvad har I så fundet ud af"*

127.Elev: *"At det ikke passer".*

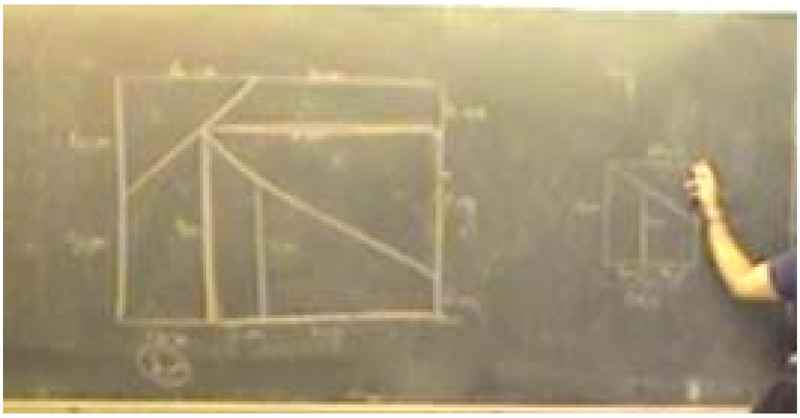
128.Lærer*: "Det passer ikke. Så det at lægge 3 til alle sider det passer ikke".*

Vi kan høre, at eleverne er enige om, at puslespillet ikke passer. Men det er læreren, der fortæller dem, at det er selve strategien, der er noget galt med. Hvis ikke læreren havde fortalt dem dette i denne episode, ville eleverne stadig holde fast ved, at den korrekte strategi er den additive, for hvad skulle det ellers være? Da læreren påpeger, at alle grupper ikke kunne få puslespillet til at passe sammen, har eleverne en forventning om, at læreren nu skal fortælle dem den korrekte strategi i forhold til mesokontrakten i dimensionen fordeling af ansvar.

I denne episode bliver viden udviklet fra at være viden, som er i færd med at blive institutionaliseret til institutionaliseret viden. For nu har eleverne fået at vide, at den additive strategi er forkert, og dette var den tilsigtede viden i episode 3.1. Læreren fører ordet i denne episode, og det er ham, der har ansvaret. Der sker en institutionalisering i form af en kollektiv produktion af, at den additive strategi er forkert.

Episode 3.3:

Mikrokontrakten handler her om, at det udsnit af puslespillet, som læreren viser dem, bliver forstørret ved at lægge 3 cm til siderne. Efter at det er blevet forstørret i fællesskab, påpeger læreren fejlen, og ved at vise dette ønsker læreren, at eleverne bliver overbeviste om, at metoden er forkert. Der er en kollektiv produktion, som finder sted i denne episode, men læreren har ansvaret.



Figur 28 viser episode 3.3

Episode 3.4:

I denne episode viser læreren dem en ny metode til, hvordan de skal lave puslespillet. Mikrokontrakten fra lærerens side går ud på, at de skal udfylde tabellen, som bliver tegnet på tavlen af læreren. Men eleverne forstår ikke i første omgang, hvordan tabellen skal udfyldes, og de ønsker klarere spilleregler. Der sker dermed et brud på mesokontrakten i dimensionen fordeling af ansvar, idet eleverne forventer klarere regler for, hvad der skal gøres f.eks. nogle eksempler, mens læreren har en forventning om, at eleverne godt selv kan udfylde de tomme felter.

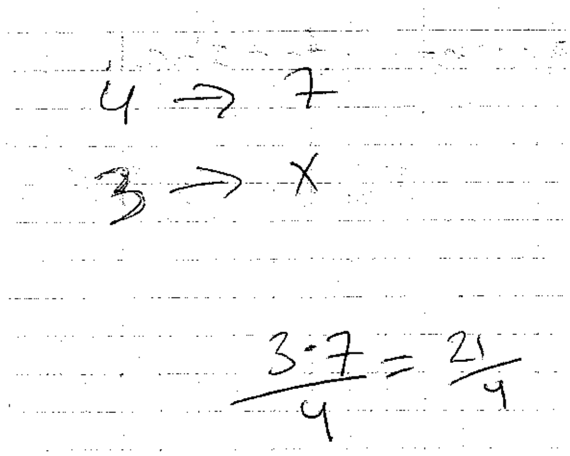
Da læreren spørger, hvad 8 cm bliver til i de store brikker, er der en elev, der igen forsøger sig med den additive strategi og svarer 144.*"11"*. Dette viser, at netop denne elev ikke har forstået, at den additive strategi ikke holder. Læreren vælger at ignorere hans svar og skriver 14 på tavlen, som en anden elev svarer efterfølgende. Vi kan her se en form for Topaze-effekt, idet læreren vil undgå, at eleverne laver fejl og derfor ignorerer den første elevs svar.

Læreren spørger ikke eleven om, hvordan den anden elev har fundet svaret 14, men vælger selv at forklare tankegangen bag: 148.*"… 8 er det dobbelte af 4, så må det her også være det dobbelte af 7."* Læreren kunne udnytte det adidaktiske potentiale og bede eleven om en forklaring.

Efter dette har alle elever bemestret regneteknikken, og de giver sig hen med at udfylde tabellen i deres kladdehæfter. Miljøet har et adidaktisk potentiale, som eleverne kan benytte sig af. I forhold til mesokontrakten er der en formuleringsfase, der finder sted.

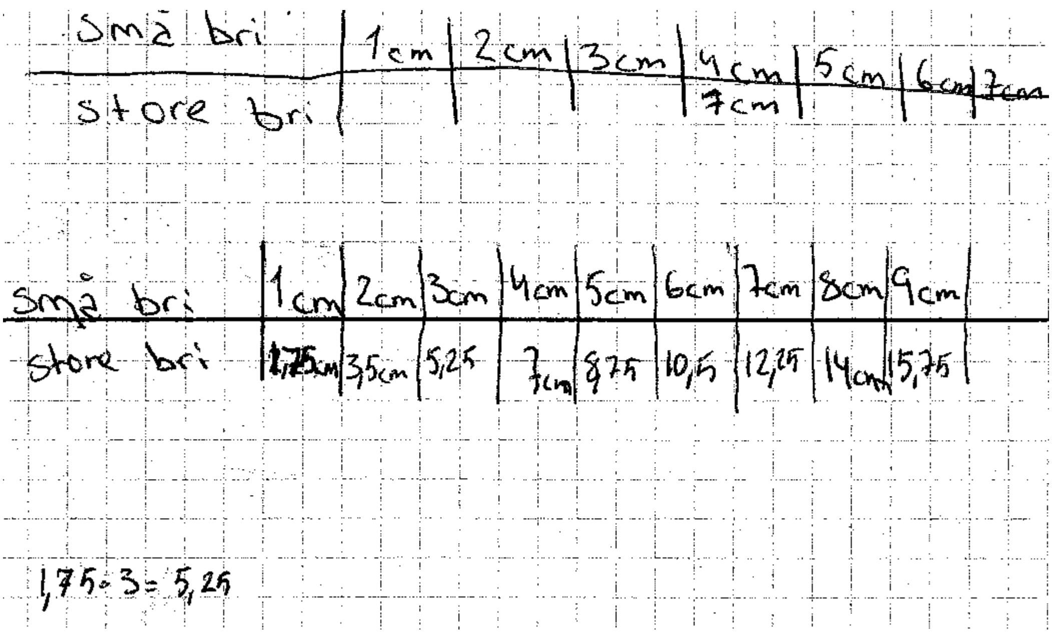
Ved gennemgang af kladdehæfterne har vi set, at alle elever har udfyldt tabellen korrekt. Vi kan skelne mellem tre metoder til at udfylde tabellen i kladdehæfterne:

1. Metode (Frederik):



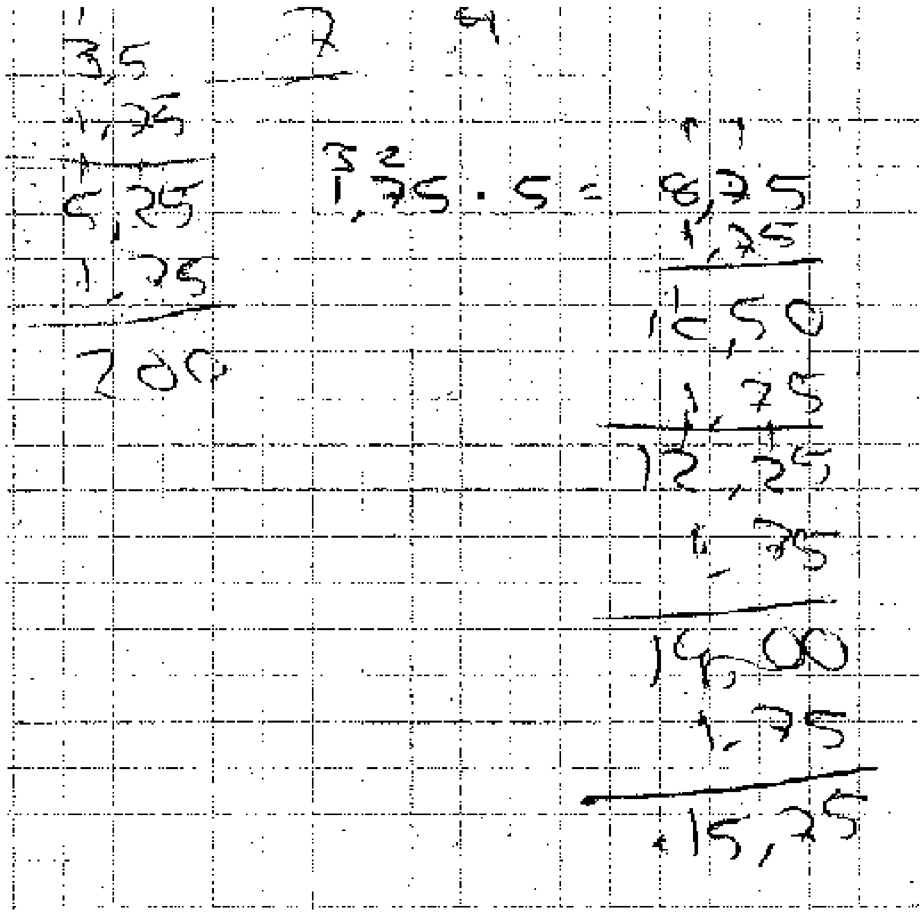
Figur 29

2. Metode (Michelle):



Figur 30

3. Metode (Betina):



Figur 31

Vi kan se, at der bliver benyttet forskellige metoder til at udfylde tabellen. 1. metode er en form for gange-over-kors teknik, 2. metode er at finde enheden 1,75 og gange med denne faste faktor, det vil sige enhedsstrategien, mens eleven som har benyttet 3. metode, har lagt 1,75 til i hvert skridt, altså en form for bygge strategi. Metode 2 og metode 3 ligner hinanden ved, at enheden 1,75 bliver brugt. At benytte disse metoder er gammel viden, og det har eleverne klaret fint.

Den 1. elev skriver gange-over-kors teknikken på en bemærkelsesværdig måde. Da vi spurgte læreren efter forløbet, forklarede han, at de i denne klasse brugte denne teknik. Læreren har lært eleverne, at når der er en opgave med 3 tal og man skal finde det manglende, nemlig den type opgave som vi kalder opgaver med en manglende ubekendt, skal man først skrive hvad det ene tal svarer til. F.eks. 3 æg til 5 kager eller 2 bolde til 10 kr. i form af:

1.eksempel: 3 æg = 5 kager

2.eksempel: 2 bolde = 10 kr.

Det tredje tal, som er givet i opgaven, kan skrives nedenunder. F.eks.:

1.eksempel: 3 æg = 4 kager

x = 8 kager

2.eksempel: 2 bolde = 10 kr.

8 bolde = x

Så ganges tallene henholdsvis 3 og 8, og 8 og 10, og derefter divideres med henholdsvis 4 og 2. Resultatet bliver så i 1.eksempel:

$$\frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$

I 2.eksempel:

$$\frac{8 \cdot 10}{2} = 40$$

Det vil sige, i stedet for at betragte de interne eller eksterne forhold, som man gør normalt i gange-over-kors teknikken, som vi har beskrevet, har disse elever lært en generel algoritme. Dette kan have alvorlige konsekvenser, blandt andet kan fænomenet "Kaptajnens alder" nemt forekomme.

Læreren tillader sig at institutionalisere, at 1,75 er i dette tilfælde den faste faktor, som tallene i de oprindelige puslespil skal ganges med. Det gør han efter at have spurgt hvad 1 cm svarer til i de store brikker. Han kunne sagtens til sidst, altså efter at have udfyldt tabellen sammen med eleverne, spørge dem om man kan få de øvrige tal ved kun at benytte 1,75. Man kan f.eks. se i 2. metode og 3. metode, at disse elever har været velvidende om, at tallet 1,75 har været den faste faktor mellem det oprindelige puslespil og det nye.

Episode 3.5:

I denne episode er der en handlingsfase, hvor mikrokontrakten fra lærerens side går ud på, at eleverne tegner puslespilsbrikkerne med de størrelser, de har regnet sig frem til. Dette accepteres af eleverne. Mesokontrakten indeholder en automatisering af den stillede opgave. Ansvaret overlades til eleverne, idet det ikke er svært at tegne nogle brikker efter givne mål. Der sker en individuel produktion.

Episode 3.6:

Læreren institutionaliserer ved at fortælle, at forstørrelser og formindskelser altid sker med en fast faktor, for at figuren kan bevare formen. At 1,75 er en fast faktor bliver fortalt af læreren.

Mesokontrakterne i denne lektion konvergerer mod en makrokontrakt i form af, at den additive strategi ikke holder, samt at når man forstørrer et polygon, skal man gange alle siderne med en fast faktor.

9.8 Resume af 5. lektion

Læreren begynder denne lektion med at spørge, om der er nogle elever, der har hørt noget om nordisk mytologi. Der er ikke rigtig nogen elever, der svarer på det. Når læreren kommer ind på, at det var noget vikingerne troede på, er der en elev, der nævner Odin. Dernæst fortæller læreren meget kort om Odin, Tor, Freja og kommer ind på jætterne. Han beskriver, hvordan en jætte så ud, og fortæller at arkæologer har fundet en sten fra vikingetiden, hvorpå der er ridset et øre af en jætte. Ud fra dette billede skal eleverne fremproducere metoder til, hvordan man kan beregne jættens højde. Inden han sætter dem i gang, fortæller han, at han også har taget 1 meters målebånd med, og at de kan bruge det, hvis behovet skulle opstå.

Han inddeler klassen i fem grupper, hver bestående af 3-4 personer. Der går ikke mere end et par minutter, før eleverne begynder at måle deres gruppekammeraters højde og deres ørelængde. Én efter én går en repræsentant fra hver gruppe op til tavlen, og skriver gruppens bud på jættens højde i en tabel, som læreren har lavet inden timen startede (se figur 32). Tre ud af de fem grupper kommer med bud, der er tæt op ad hinanden. De øvrige to gruppers bud er henholdsvis 2 og 5 gange større end de øvrige gruppers.

Efter at alle grupper har skrevet deres bud på tavlen, får læreren med elevernes hjælp skrevet dem alle i meter i stedet for centimeter, da det virker mere overskueligt. Dernæst forklarer hver gruppe deres metode til at finde jættens højde på. Næsten alle grupper har fat i den korrekte strategi, altså det med at udregne forholdet mellem øre og krop.

Læreren udvælger to elever fra to forskellige grupper (gruppe 3 og 5), som skal vise deres metode på tavlen. Gruppe 3 har fået 35,8 m, mens gruppe 5 har fået 7,83 m. De skal nu overbevise hinanden om, hvis metode der er den korrekte. Repræsentanten for gruppe 3 (Michael) har svært ved at forklare, hvorfor de har gjort, som de har gjort. Repræsentanten for gruppe 5 (Betina) forklarer deres metode på en matematisk måde ved at opstille en ligning.

Til sidst forklarer læreren den korrekte metode, Betinas metode, ved at sige at man går ud fra, at forholdet mellem menneskets krop og øre er det samme som forholdet mellem jættens øre og krop. Derfor ganges længden af jættens øre med den samme faktor, og dermed findes jættens højde.

Gruppe 1	756 cm	7,56 m
Gruppe 2	1429 cm	14,29 m
Gruppe 3	3520 cm	35,20 m
Gruppe 4	810 cm	8,1 m
Gruppe 5	783 cm	7,83 m

Figur 32: Gruppernes resultater på tavlen.

9.9 Analyse af 5. lektion

Episode 5.1:

Læreren introducerer det didaktiske miljø ved at fortælle om nordisk mytologi. Da der ikke er nogen elever, der ved hvad en jætte er, bliver læreren nødt til at udtrykke det meget klart, jætter var af menneskeskikkelse. I denne episode forventer læreren, at eleverne skal fortælle det, de ved om nordisk mytologi. Mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden indeholder fra lærerens side en forventning om, at eleverne har kendskab til de forskellige karakterer i nordisk mytologi. Det primære formål i denne episode er, at genopfriske hvad en jætte er, og hvordan den ser ud. For de elever der tidligere har stiftet bekendtskab til jætterne, kan det være nemmere at få et mentalt billede af, hvordan en jætte ser ud. Altså et almindeligt menneske bare i større format. For de elever der hører det første gang, kan der være mulighed for, at de forestiller sig jætten som en anden slags skabning, og dermed vil have svært ved at komme i tanker om at sammenligne eget øre og krop med jættens. Læreren opretter en mikrokontrakt af konsensus, da han har en forventning om, at de fleste kender til jætter. Men mikrokontrakten opfyldes ikke af eleverne, og derfor oprettes en mikrokontrakt i klassen om, at det er læreren, der skal fortælle dem, hvad en jætte er. For der er en mesokontrakt gældende i klassen om, at hvis ingen kender svaret på lærerens spørgsmål, må læreren tage over. Derfor institutionaliserer læreren hvad en jætte er, idet det er vigtigt for eleverne at få denne viden personliggjort, før de kan gå i gang med næste episode.

Eleverne spørger igen og igen, hvad en jætte er, hvilket muligvis er årsagen til, at læreren bliver nødt til at forklare det meget nøje. F.eks. udtrykker han:

173.*"Jætter de var nogle kæmper"*

175.*"Sådan nogle kæmpe store mennesker"*

177.*"Jætter var nogle kæmpe store mennesker af menneskeskikkelse".*

De sætninger læreren har brugt er formuleret på en måde, så det er nærmest oplagt for eleverne, hvad de skal gøre. Samtidig nævner læreren, lige inden de begynder, at de har målebånd til rådighed. Dette kan muligvis også have været en hjælp for dem, idet at benytte målebånd indikerer, at de skal måle noget ”stort”.

Episode 5.2:

I denne episode er der en mikrokontrakt fra lærerens side om, at grupperne skal finde på en metode til at beregne, hvor høj den omtalte jætte er. Læreren forventer, at størstedelen af grupperne opdager, at de kan sammenligne deres egen krop med jættens krop.

Grupperne begyndte straks at måle hinandens ører og højder, som tyder på, at læreren har oplyst for meget i devolutionsfasen. Eleverne skrev deres resultat i tabellen på tavlen efter de fandt ud af svaret. Den 1. gruppe skrev det i cm, og så begyndte de andre grupper også at skrive højden i cm.

Figur 33 viser en af grupperne, som måler højden af en elev

Figur 34 viser en af grupperne, som måler øret på en elev

Det var ikke hensigten i denne lektion, at eleverne skulle skrive deres resultater på tavlen. Men da vi havde tegnet tabellen på tavlen før lektionen startede, og de samtidig havde prøvet at skrive deres svar op i tabellen på samme måde i 2. lektion, var det oplagt for eleverne at komme til tavlen og skrive deres svar. Hensigten var, at læreren skulle spørge dem om deres resultat i formuleringsfasen og skrive dem på tavlen, således at de ikke blev påvirket af hinandens resultater. Men vi kan se, at der er kommet forskellige resultater, så grupperne har nok ikke været påvirket af de andre gruppers resultater.

Ved hjælp af eleverne omskrives tallene fra centimeter til meter, for eleverne har skrevet deres resultat i centimeter, selvom de ikke er blevet bedt om det. Der blev altså oprettet et mikrokontrakt i klassen om, at man skal komme til tavlen og skrive jættens højde i centimeter, når gruppen har fundet svaret. Denne episode foregår i en handlingsfase, hvor viden er under udvikling, den skal først institutitonaliseres i de kommende episoder. Det er dermed eleverne, der har ansvaret i denne episode.

Episode 5.3:

I denne episode oprettes en mikrokontrakt af læreren om, at en elev fra hver gruppe mundtligt skal forklare, hvordan de har regnet længden på jættens øre ud. Episoden foregår i en formuleringsfase, hvor en grupperepræsentant forklarer deres metode. Der er en mikrokontrakt af kollektiv produktion.

1. gruppes resultat: 7,58 m. Ud fra det de har sagt og deres udregninger i kladdehæfterne, kan vi se, at de har fat i den rigtige metode. Metoden kan kort skrives som:

(jættens øre x elevs højde)/elevs øre = jættens højde.

2. gruppes resultat: 14,29 m. Deres metode er det samme som 1. gruppes metode. Men vi kan se i deres kladdehæfter, at de har lavet regnefejl, når de skulle gange 159 cm med 29 cm. Og derfor afviger deres resultat en del fra de andres.

3. gruppes resultat: 35,2 m. De bruger en forkert metode, idet de prøver at finde differensen mellem eget øres længde med jættens øres længde, og de begår i øvrigt en regnefejl. Derefter ganges denne differens med egen højde for at finde jættens højde. Det resultat, som denne gruppe fik, burde give dem en mistanke om, hvorvidt de har fundet den rigtige højde af jætten, for den afviger en del fra de andre gruppers resultater. Deres metode er den nævnte additive metode, som vi beskrev i *a priori* analysen, bortset fra at de ikke lægger differensen mellem eget øres længde og jættens øres længde til egen højde, men de ganger denne differens med egen højde. Eleverne har altså arbejdet ud fra en mikrokontrakt om, at man skal sammenligne noget med højder og ørelængder.

Lærerens kommentar på det er: 204.*"Det er lidt voldsomt, men måske har I lavet nogle regnefejl".* Læreren røber altså ikke i formuleringsfasen, at metoden er forkert. Dette gøres muligvis for at give dem en chance for selv at indse det, når de ved tavlen skal forklare metoden.

4. gruppes resultat: 8,1 m. Deres metode er også korrekt, men en anden. De tæller nemlig, hvor mange gange elevens eget øre kan være i jættens øre og bruger dette tal til at gange egen højde med for at finde jættens højde. Dette kan vi se i gruppemedlemmernes kladdehæfter, men de

bliver lidt forvirrede i klassen og siger noget andet til læreren. Denne metode er en forudset metode, som vi beskrev i *a priori* analysen.

Da eleven fra denne gruppe begynder at forklare deres metode, afbryder læreren og siger, at han ikke skal bruge tal. Dette kan have forvirret eleven, idet han begynder at mumle til sidst og vi ikke rigtig kan høre, hvad han siger. Læreren har ikke sagt dette til de forrige grupper, selvom de også har benyttet tal i deres forklaringer. Grunden til, at læreren vælger at sige dette kan være, at han vil have, at de skal skynde sig, fordi han godt kan se, at tiden er knap. Læreren opretter altså her en ny mikrokontrakt om, at forklaringen skal foregå uden at benytte tal. Dette accepteres af eleven, som var i gang med at forklare metoden.

5. gruppes resultat: Denne gruppe har målt alle 3 gruppemedlemmers højde og ørelængde og taget gennemsnittet i modsætning til de andre grupper, som har valgt én ud og målt ham/hende. De finder forholdet mellem højde og øre på dem selv, og ganger dette tal med jættens øre for at finde jættens højde.

Med hensyn til den didaktiske kontrakt forventer eleverne i denne formuleringsfase, at læreren fortæller dem, om deres resultat eller metode er rigtigt eller forkert, idet det har været den måde eleverne er vant til. De er ikke vant til, at læreren bare spørger og ikke kommenterer, men bare går videre til næste gruppe.

En ting man skal tage i betragtning i elevernes metoder er, om de har sammenlignet jætten med en elev fra gruppen, taget gennemsnittet af gruppemedlemmerne eller sammenlignet jætten med et voksent menneske. Vi kan se, at gruppe 1, 2 og 4 har målt en elev fra gruppen, mens gruppe 3 er gået ud fra en ”menneskekrop”, som de udtrykker det. Gruppe 5 har derimod taget gennemsnittet af alle tre gruppemedlemmers højder og ørelængder.

En anden ting som kan få eleverne til at ræsonnere proportionelt er, hvorvidt tegningen af øret har været realistisk. Var f.eks. forholdet af bredden og længden af det skitserede øre det samme som menneskeøret? Hvis ikke eleverne så denne tegning som et realistisk øre, kan det have påvirket dem til at ræsonnere proportionelt.

I denne episode er viden under udvikling, eleverne forklarer og lytter til forskellige strategier til at finde jættens højde. I forhold til mesokontrakten får alle grupper hermed en idé om, at spørgsmålet handler om at finde forhold og sammenligne dem. Ansvaret er her overladt til eleverne, men de forventer en validering af læreren.

Episode 5.4:

I denne episode udvælges to elever fra to forskellige grupper, de skal gennemgå deres metoder ved tavlen. Mikrokontrakten fra lærerens side går ud på, at disse to elever først skal forklare deres metoder og dernæst overbevise hinanden og klassen om deres resultater, så der kan komme en diskussion i gang. Læreren siger nemlig:

216.*"Betina du starter med at forklare. Du skal ikke forklare det til mig, du skal forklare det til klassen og til Michael. Du skal overbevise Michael, og Michael skal prøve at overbevise dig".*

Valget af netop disse to grupper, 3. gruppe og 5. gruppe, kunne tænkes at være fordi, at den eneste gruppe, der har lavet opgaven forkert er 3. gruppe. 5. gruppes metode er derimod én blandt de øvrige korrekte metoder. Det kunne tænkes, at eleven fra 3. gruppe skal have feedback af miljøet for at indse sin fejl. Læreren vælger Betina til at forklare sin metode først, men hendes metode er den korrekte metode, så det ville være mere oplagt at vælge Michaels metode først. Eleverne accepterer mikrokontrakten og går i gang med at forklare deres metoder igen ved at skrive på tavlen. Der er en mikrokontrakt af kollektiv konsensus.

Betina prøver at forklare ved at gøre sin metode generel:

217.*"…det er sådan en formel, øre divideret med højde er lig med forhold. Og så når man rykker øret over på den anden side så bliver det gange".*

Hun finder forholdet mellem eget øre og egen højde og ganger dette forhold med jættens øre. Hun udtrykker, at det med at finde forholdet af højde og øre er en formel. Det er bemærkelsesværdigt, at hun benytter begrebet "forhold", som ikke er blevet benyttet før i vores forløb.

Michael forklarer igen sin metode, som han forklarede den under formuleringsfasen. Han finder altså differensen mellem jættens øre og eget øre, hvilket er en forkert fremgangsmåde. Læreren retter hans formulering, som vi kan se i følgende samtale:

218.*"Jeg har taget jættens øre, det var 29. Menneskeøret er 6 cm. Så har jeg sagt hvor meget er der fra 6 op til 29. Og der er 22".*

219.*"Når du siger op til så tænker man division. Hvor mange gange går 6 tabellen op til 29. Dvs. du har sagt 29 minus 6 og det giver…?"*

220.*"22"*

I iveren efter at rette elevens formulering, glemmer læreren at rette på elevens forkert udførte minusstykke. Når begge elever er færdige med deres forklaringer, vil læreren oprette en ny mikrokontrakt om, at de nu skal overbevise hinanden og klassen om deres metoder. Han siger nemlig:

223.*"Ok, overbevis hinanden nu. Hvorfor er det rigtigt?"*

En elev fra klassen siger:

224.*"Det er Betinas, der er rigtigt."*

At eleven siger dette, er ikke nødvendigvis et udtryk for, at han har forstået Betinas metode og er overbevist om den. Idet Betina er en af de kloge elever i klassen, stoler de mere på hendes metode.

Betina forsøger igen at forklare sin metode for at overbevise de andre om den. Men denne gang bliver hun forvirret, og kan ikke gøre sine sætninger færdige. Læreren prøver at hjælpe hende. Michael stiller hende spørgsmål undervejs, som gør hende endnu mere forvirret. Hun bytter om på tæller og nævner, når hun skal forklare det anden gang og skrive imens, for hun skriver: øre/højde = forhold, som hun ganger med jættens øre. I starten havde hun sagt højde/øre, som hun fik 27 ud af. Det kan være, at hun skriver noget andet på tavlen på grund af forvirringen, der opstår ved tavlen. Det kan være, at læreren har set det som noget irrelevant og ikke rettet på hende af denne grund. Eleven har fralagt sig det ansvar, som mikrokontrakten indebærer. I stedet modificerer hun mikrokontrakten, som er at forklare metoden igen. Læreren accepterer denne mikrokontrakt og hjælper eleven med at forklare metoden igen.

Idet læreren hjælper eleven så meget og forklarer metoden sammen med eleven, accepteres det af klassen som udtryk for, at denne elevs metode er den rigtige metode. I forhold til mesokontrakten er viden nu i færd med at blive institutionaliseret, idet eleven forklarer metoden i samarbejde med læreren. Ansvaret er til dels overladt til eleverne. I starten af episoden er ansvaret mere hos eleverne, mens den i slutningen af episoden er hos læreren.

Episode 5.5:

Læreren institutionaliserer ved at forklare Betinas metode endnu en gang, så alle er med på, at det er den metode, der er rigtig. Der siges ikke noget om de øvrige gruppers metoder, enten fordi fokus har været på de to gruppers metoder, eller fordi det snart ringer ud, så læreren skynder sig. Læreren burde have inddraget de andre gruppers metoder i valideringsfasen. For nu har klassen kun fået set, at gruppe 5's metode er rigtigt, mens de endnu ikke ved, om deres egen metode er rigtig eller forkert, da de havde andre metoder. Det kunne være interessant at vide, at der er flere måder at beregne jættens højde på, specielt gruppe 4's metode kunne være interessant at gennemgå. Selvom læreren inddrager gruppe 4's metode i institutionaliseringen, f.eks. ved at sige: 250.*"Hvor mange gange kan jættens øre være i hans krop",* kunne det være interessant at gennemgå metoden for sig selv. Læreren slutter sin institutionalisering ved at sige:

250.*"Og så siger hun, at det bliver 7, 66 meter høj, og det passer meget fint, fordi de er i forhold til hinanden".*

Det kan blandt eleverne forstås som om, at læreren kender jættens virkelige højde, fordi han siger, at det passer meget fint.

Mesokontrakterne har i denne lektion ført frem til en makrokontrakt, hvor Betinas metode er blevet til den tilsigtede viden. Desuden indgår den tilsigtede viden for denne lektion, som vi beskrev i *a priori* analysen, også i denne metode, nemlig at den faste faktor der er i forholdet mellem et menneskes krop og øre er den samme i forholdet mellem en jættes krop og øre.

9.10 Resume af 6. lektion

Inden lektionen begynder, tegner vi en tabel på tavlen, som senere vil blive brugt af eleverne til at skrive deres resultater op. Læreren begynder med at fortælle, at en kendt maler har malet et hestemaleri, han har brugt 6 ml maling til det, og nu vil maleren male et maleri magen til, dog i større format.

Han tegner et rektangel på tavlen, hvor han angiver højden til at være 7 cm og bredden til 9,3 cm, og et andet rektangel med højden 21 cm. Mens han deler en kopi af hestemaleriet ud til grupperne, fortæller han yderligere, at opgaven går ud på at finde ud af, hvor mange milliliter maling maleren har brugt til det store hestemaleri på 21 cm.

Efter et stykke tid har alle grupper et bud. Dog er der ingen af grupperne, der er kommet frem til det rigtige resultat, idet de kun har fokuseret på, at højden er blevet 3 gange større, og derfor må der også have været brugt 3 gange mere maling, altså 18 ml. Der er lavet fem grupper á 3-4 personer. To af grupperne svarer 12 ml og de øvrige svarer 18 ml.

Efter at alle grupperne har fremlagt deres resultater, siger læreren, uden at røbe det korrekte resultat, at de nu vil få endnu en kopi af maleriet, og at der lige skal tænkes lidt mere over opgaven. Han uddeler det nye ark. Dette er hestemaleriet i stort format. Efter at eleverne har siddet med begge malerier i et stykke tid, foretager læreren endnu et spørgerunde i klassen.

Denne gang er der, på nær gruppe 2, ændringer i alle gruppernes resultater. Dog er det kun gruppe 4 og 5 der svarer korrekt, altså 54 ml. Gruppe 4 er kommet frem til resultatet ved at klippe det lille billede og sætte det i det store billede. Da det lille billede var 9 gange mindre end det store billede, er de dermed kommet frem til, at der er blevet brugt 54 ml maling. Gruppe 5 er kommet frem til deres resultat ved at beregne arealet af begge billeder, og dermed opdaget at det lille billedes areal er 9 gange mindre end det stores.

Læreren uddeler nu en sidste gang et billede til grupper. Denne gang er det store hestebillede blevet delt op i tern, og størrelsen af hvert tern svarer til størrelsen af det lille hestebillede. Hermed er det blevet nemmere for alle grupper at se, at det store er 9 gange større end det lille, og at der derfor skal bruges 9 gange mere maling, det vil sige 54 ml.

Læreren tager nu igen over og institutionaliserer ved at fortælle, at opgaven kan løses på to forskellige metoder. Den ene er at klippe det lille billede ud og se, at det kan være i det store billede 9 gange. Det andet er, at man udregner arealerne for begge billeder, og ud fra det finder frem til, at det lille billedes areal er 9 gange mindre end det store billedes, og derfor må der være anvendt 9 gange mere maling.

9.11 Analyse af 6. Lektion:

Vi er ved en fejltagelse kommet til at skrive bredden af det lille hestemaleri på papirerne, som eleverne fik udleveret. Det var ikke meningen, at de skulle få bredden at vide, kun højden. Vi vil undersøge, om det har haft en betydning for lektionens udfald.

Episode 6.1:

Formålet med 6. lektion er at danne en konflikt med den proportionelle tankegang. Læreren devoluerer det didaktiske miljø ved at udtrykke, at højden er 7 cm, mens bredden er 9,3 cm på det lille maleri, og at der er blevet brugt 6 milliliter maling til dette. Det store maleris bredde nævner han ikke, kun højden, hvilket kan have påvirket eleverne. Læreren opstiller en mikrokontrakt, som går ud på, at eleverne skal beregne det antal milliliter maling, der skal bruges til det store maleri. Læreren overfører herefter ansvaret til eleverne. Eleverne accepterer mikrokontrakten og går i gang med at beregne det ønskede i grupperne.

Vi så, at de fleste grupper i handlingsfasen begyndte med at beregne bredden på det store maleri, da den ikke var givet som det lille maleris bredde. Dette tyder på, at der eksisterer en mesokontrakt om, at det som læreren ikke har angivet, skal de selv regne ud.

Episode 6.2:

Mikrokontrakten i denne episode er, at eleverne skal forklare, hvilket resultat de er kommet frem til og hvordan. Dette foregår ved, at én elev fra hver gruppe forklarer. Mesokontrakten for fordelingen af ansvar overlader alt ansvaret til eleven, hvilket accepteres af klassen. Der er en mikrokontrakt af kollektiv produktion i denne episode.

Gruppe 1: Svarer 12 ml, og én elev fra gruppen begrunder med at sige: 256.*"Jeg har bare gættet lige nu".* Gruppen har altså ikke fundet en metode endnu.

Gruppe 2: Svarer 18 ml. Hvorefter én elev fra gruppen forklarer:

259.Elev*: "Vi har sagt 6 gange 3"*

260.Lærer: *"I har sagt 6 gange 3, hvorfor 3?"*

261.Elev: *"Fordi 7 og 21 er 3-dobbelt".*

Gruppen har benyttet den forudsete proportionelle metode.

Gruppe 3: Har endnu ikke noget svar, fordi de stadig er i gang.

Gruppe 4: En elev fra gruppen svarer 18 ml, mens en anden elev fra gruppen retter og siger, at det er 12 ml. Han forklarer sin metode ved:

265.Elev: *"Nej jeg siger, at det er 12. Fordi hvis du siger, at det er 3 gange så gør du sådan her. For (…) ml det giver, så bruger han næsten 2 liter maling på en stor hest, så jeg vil gerne sige det er 12, så bruger han…"*

Det er for os uforståeligt, hvordan han er kommet frem til det resultat, idet metoden ikke giver mening ud fra det, man kan høre. For eleven mumler en del, så man ikke kan høre, alt det han har sagt.

Gruppe 5: Svarer 18 ml. Det er her læreren, der forklarer, hvordan de er nået frem til 18 ml, idet læreren tror, at det er samme metode som gruppe 2.

Idet læreren ikke giver respons, men blot spørger næste gruppe efter at have hørt gruppernes svar og metoder, kan det godt være, at eleverne bliver lidt forvirrede. F.eks. kan vi høre et gruppemedlem fra gruppe 4, som ændrer gruppens svar til 12 ml. Det kan være en konsekvens af, at læreren ikke siger, at svaret er rigtigt, når eleven fra gruppe 2 samt gruppe 4 svarer 18 ml. Derfor accepteres det af eleven, som om svaret 18 ml er forkert, og derfor prøver han at give et andet svar, som kan være rigtigt. Men læreren kommenterer heller ikke hans svar og fortsætter blot. Der sker altså et brud på mesokontrakten, idet eleverne opfatter episoden som en valideringsfase, mens læreren ser episoden som en formuleringsfase.

Eleverne har en kendt viden bl.a. fra puslespilssituationen om, at når der skal forstørres figurer, skal man benytte en fast faktor. I denne episode kan vi se, at eleverne har fokuseret på den faste faktor i forholdet mellem højden af det lille og det store maleri. Derfor tyder det på, at de grupper der har svaret 18 ml har personliggjort denne viden og benyttet den i denne episode. Men de anvender den nu ikke blot på siderne, men også på arealerne. Der sker altså en slags overgeneralisering.

Episode 6.3:

Læreren deler et nyt maleri ud i denne korte episode og siger:

269.*"I får et nyt maleri. Det kan måske hjælpe lidt mere til at forstå det. Det her.. der skal lige tænkes lidt mere over det (uddeler hestemaleri som er 21 cm høj). Det er den med 21 cm. "*

Hans formulering i denne devolutionsfase kan få eleverne til at tro, at deres svar har været forkert. Han burde måske have formuleret sig på en mere neutral måde. Selve det, at dele et nyt maleri ud, kan også være et tegn på, at deres svar har været forkerte, og at de har behov for ekstra redskaber. Eleverne har efter episode 6.2 en forventning om, at læreren skal forklare resultatet i henhold til mesokontrakten i dimensionen fordeling af ansvar, men læreren giver blot et nyt stykke papir til grupperne. Der er en underforstået mikrokontrakt om, at det er samme spørgsmål som i episode 6.1, læreren forventer et svar til.

Episode 6.4:

I denne episode er der en mikrokontrakt om, at en elev fra hver gruppe skal forklare læreren, hvad deres resultat nu er, og hvordan de er kommet frem til det. De fleste grupper har ændret deres svar, sammenlignet med episode 6.2, idet de er indforstået med, at læreren har en forventning om at få andre svar denne gang. Derfor prøver de på at opfylde mikrokontrakten ved at give andre svar. Der er en mikrokontrakt af kollektiv produktion.

Gruppe 1: Svarer 8,15. Deres metode forklarer eleven ved:

277. Erik:*" Fordi det er ganget med 3, så ganger vi det her med 3 og det giver 27,9. 21 plus 27,9 det er 48,9. Og vi dividerer med 6 (ml)".*

Metoden giver ikke mening, da han lægger højden og bredden sammen af det store maleri, og dividerer med 6. Vi kan her se fænomenet "Kaptajnens alder", idet eleverne har benyttet tallene i opgaven uden at tænke på konteksten. Da vi ved en fejltagelse er kommet til at skrive bredden i det udleverede materiale, kan det være en grund til forvirring hos gruppe 1, idet de måske har troet, at de skal bruge begge tal til noget, altså både bredden og højden. Denne gruppe vil gerne hen til et aritmetisk domæne i henhold til mikrokontrakten i dimensionen matematisk domæne. Der er fremskridt i denne gruppe, da de i episode 6.2 blot havde gættet på et svar, mens de nu har prøvet at beregne noget ved at bruge tallene i opgaven. De har altså fundet ud af, at læreren har en forventning om, at man ikke bare skal gætte på et svar, men regne noget ud.

Gruppe 2: Svarer 18 ml. De siger, at det er ligesom første gang. Læreren går videre til næste gruppe uden at kommentere deres svar. Det tyder på, at gruppen er overbevist om, at dette svar må være det rigtige svar, idet de har benyttet kendt viden fra forrige lektioner.

Gruppe 3: Svarer 4,1 ml. En elev fra gruppen forklarer metoden ved:

291.*"3 gange 7. Det giver 21. Det er bredden. 9,3 gange 3 det er 27,9 divideret med 6, det er 4,1".*

Læreren siger, at det er samme metode som gruppe 1, men det eneste der er tilfælles er, at de også dividerer med 6. Gruppe 3 lægger ikke højden og bredden sammen, de ganger det lille maleris bredde med 3 og dividerer det med 6, hvilket giver 4,1. Det burde være klart for dem, at til et større maleri vil der blive brugt mere maling, men deres resultat 4,1 ml maling er mindre end 6 ml. Ligesom hos gruppe 1 kan vi også her se fænomenet ”Kaptajnens alder”, fordi de benytter tallene i opgaven til at lave en beregning uden at tænke over konteksten.

Gruppe 4: Svarer 54 ml. Deres metode er følgende:

295. E:*” Vi har klippet den her ud (lille hestemaleri) og sagt hvor mange gange kan den være i den store hest. Det kan den være 9 gange. Og så var der 6 ml i denne her (lille hestemaleri), og 6 gange 9 giver 54”.*

Denne gruppe har løst opgaven rigtigt på en praktisk måde. I *a priori* analysen af forløbet, skrev vi, at vi ikke forventede, at nogle elever skulle klippe ud allerede i denne fase eller beregne rigtigt. Det skulle foregå i næste fase, hvor læreren uddelte det store hestemaleri opdelt i tern.

Gruppe 5: Svarer 54 ml. De påpeger allerede i starten, at de har fået samme resultat, men ikke har benyttet samme metode som gruppe 4, for de har nemlig beregnet begge maleriers arealer og sammenlignet. Under deres forklaring af metoden, blander læreren sig:

304.Betina:*”Milliliter. Og så har vi sagt den stores areal svarer til et eller andet ml. Og så har vi så gjort…”*

305.Lærer: *”Kryds-over-metoden. Hvad giver det sagde du?”*

306.Betina: *”54”.*

Læreren benytter betegnelsen ”kryds-over-metoden”, som vi kalder gange-over-kors teknikken.

Man kan se, at læreren ikke giver eleven mulighed for at forklare sin metode, nemlig at det er ”kryds-over-metoden”, men han siger det selv. Her er der en Jourdain-effekt, hvor læreren ønsker at konstatere en faglig indsigt hos eleven.

Episode 6.5:

Denne episode er meget kort, idet den består af følgende:

309.Lærer*: "Godt. I får lige det sidste billede. Og så kan I lige prøve igen".*

310.Elev: *"(fra gruppe 4)Det er rigtig vores. Nu får vi dem i tern".*

Lærerens formulering gør måske, at gruppe 4 og gruppe 5 bliver forvirrede, idet de allerede har besvaret rigtigt. Da de skal prøve igen, kan de tro, at de skal gøre noget andet. Men gruppe 4 kan se, at det sidste billede de vil få, er det som er opdelt i tern, hvilket overbeviser dem om, at deres metode er den rigtige. Vi havde i vores beskrivelse af forløbet ikke forventet, at arealmetoden skulle dukke op i klassen, altså den gruppe 5 har benyttet. Derfor kan det forvirre den gruppe, at de nu får billedet i tern. De kan komme til at tro, at man kun kan svare rigtigt ved at benytte det ternede papir. Denne gang strammer læreren spørgsmålet yderligere ved at uddele det ternede papir, som hentyder, at de skal benytte dette til at finde svaret. Læreren vil altså i denne episode oprette en mikrokontrakt om, at det ternede papir skal benyttes til at finde svaret. Dette accepteres af alle grupper på nær gruppe 1, som ikke får lavet særlig meget i handlingsfasen. Gruppe 2, 3 og 5 benytter det ternede papir til at komme frem til det korrekte svar. Idet gruppe 4 fandt ud af denne metode allerede i episode 6.4, laver de ikke noget i handlingsfasen.

Episode 6.6:

Mikrokontrakten er her, at et gruppemedlem forklarer gruppens svar samt metode. Alle grupper har klippet det lille maleri og sat det på det store, på nær gruppe 1. I denne formuleringsfase vælger læreren kun at høre de grupper, som fik et forkert resultat i de forrige formuleringsfaser, det vil sige gruppe 1, 2 og 3, men læreren springer gruppe 1 over. Det skyldes, at vi i deres kladdehæfter kan se, at de ikke har gjort fremskridt. De har lavet en masse udregninger og er igen kommet frem til 8,15 ml igen.

Gruppe 2: Svarer 54 ml, da de har ganget 6 ml med 9, fordi det lille maleri kan være 9 gange i det store. Læreren lader ikke eleven tale færdig og forklarer det selv, måske fordi han vil have, at det skal gå hurtigere.

Gruppe 3: Gruppen forklarer ikke, men siger blot:

322.Ole*: "Vi har lavet den samme metode".*

323.Lærer: *"Dvs. tage det lille billede og overføre det til det store billede".*

Læreren tager ordene fra elevens mund. Det kan kritiseres, at læreren ikke spørger dem hvordan de har gjort, men selv forklarer metoden igen meget kort. Der er en mikrokontrakt af kollektiv produktion i denne episode.

En af eleverne fra gruppe 2, 3 eller 4, som har benyttet samme metode, burde gennemgå metoden grundigere ved tavlen, så gruppe 1 kunne have mulighed for at være med. Læreren fortæller, at der er 2 korrekte metoder til at beregne, hvor mange ml maling der skal bruges til det store maleri ved at sige:

325.*"Dvs. der er kommet to metoder frem og to metoder der er vidt forskellige. Det lille maleri med hesten kan være 9 gange. 9 gange. I har klippet og prøvet at gøre det. Dvs. der kan være 9 gange mere, så må malingen også være 9 gange så stor. 6 gange 9, det er så?"*

Han nævner ikke, at de to metoder der er kommet frem, er korrekte. Den ene metode forklarer han endnu en gang, og han vil have en fra gruppe 5 op til tavlen til at forklare den anden metode. Betinas metode ved tavlen er at beregne de to maleriers arealer, og dernæst benytte gange-over-kors teknikken til at finde mængden af maling til det store maleri. Men eleven benytter den gange-over-kors teknik, som de har lært i klassen, og som er beskrevet under episode 3.4. Nedenstående udregninger er det, som eleven skrev på tavlen:

A= h x b	A= h x b
A= 9,3 x 7	A= 27,9 x 21
A= 65,1 cm^2	A= 585,9 cm^2

65,1 – 6 ml

585,9 – x

585,9 x 6 ml = 3515,4/65,1 = 54.

Episode 6.7:

Læreren når ikke at institutionalisere på en ordentlig måde, idet det ringer ud, lige efter at Betina har forklaret sin metode. Han prøver stadig at holde eleverne på plads bare for at gentage Betinas metode kort. Det kan godt være, at han ville have sagt mere, men han kan se, at eleverne er utålmodige efter at gå ud af klassen, og derfor vil det ikke nytte noget at forklare dem noget lige der, for de kommer garanteret ikke til at høre efter. Hvis der havde været tid, kunne læreren som beskrevet i beskrivelsen af forløbet, have fortalt dem, at mængden af maling ikke afhænger af højden som et fast tal ganget med denne, samt at arealfaktoren altid er lig med sidefaktoren i anden. Dernæst kunne de udfylde tabellen, som er blevet vist i beskrivelsen af forløbet.

Lektionen bringer mesokontrakterne til en makrokontrakt i form af, at det med at bruge en fast faktor, som næsten alle grupper gjorde i episode 6.2, ikke altid er korrekt. Vi tror, at eleverne har personliggjort den tilsigtede viden i denne lektion, måske på nær 1. gruppes gruppemedlemmer.

9.12 Resume af 7. og 8. lektion.

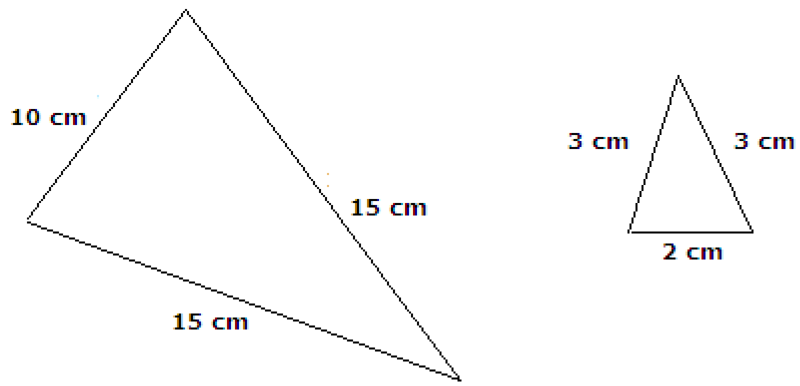
I 7. lektion bliver opgavehæfterne delt ud til eleverne, og de får at vide, at de har 45 minutter til at løse opgaverne. Der bliver brugt en time i alt på denne lektion, og derfor bliver der kun 30 minutter til 8. lektion. I 8. lektion bliver opgaverne gennemgået ved tavlen af forskellige elever. Den første opgave bliver løst af Rasmus, som løser den korrekt. Læreren spørger, om de alle er enige. Der er en elev, der er uenig, så denne får lov til at forklare sin metode, som læreren viser ikke er korrekt. Den anden opgave bliver først løst af Rasmus, som har benyttet en forkert metode, dernæst af Betina som har gjort brug af en anden forkert metode. Jens forklarer den rigtige metode til sidst, men han bliver rettet lidt på af læreren. Den tredje opgave bliver først vist af Ole, som løser opgaven forkert. Dernæst kommer Betina til tavlen og forklarer en rigtig metode. En anden elev, Frederik, har fået det samme resultat, men på en anden måde, som han gennemgår. Den fjerde opgave bliver løst korrekt af Mogens, og alle elever er enige om resultatet. Den femte opgave bliver løst korrekt af Ole. Den sjette bliver først gennemgået af Betina, som har en korrekt metode, og dernæst af Morten, som har en anden korrekt metode.

9.13 Analyse af 7. og 8. lektion:

I denne lektion er der ikke de samme faser som i de tidligere lektioner i forløbet. Denne lektion var planlagt som en tavlegennemgang af opgaverne. Dette afsnit opdeles således, at vi analyserer alle opgaverne hver for sig. Dernæst opdeler vi hver opgave i tavlegennemgang og opgaveark og analyserer dem begge. Der er en mikrokontrakt om, at eleven der kommer til tavlen, gennemgår sine noter trin for trin. Mesokontrakten for fordelingen af ansvar overlader alt ansvaret til eleven, hvilket accepteres af klassen. Når eleven er færdig med sin gennemgang af opgaven, validerer læreren ved at spørge klassen, om der er nogen, der har svaret noget andet.

Opgave 1.

”Se på disse to trekanter. Har de samme form?”



Figur 35

Tavlegennemgang

Første opgave bliver løst på tavlen af Rasmus. Han svarer ”ja” til at de har samme form. Først forsøger han at forklare det med ord, men læreren vil have, at han løser opgaven på tavlen. En anden elev påstår, at trekanterne har samme form, fordi de er ligebenede. Idéen om at argumentere ved at sige, at trekanterne er ligebenede, er en logisk måde at besvare en opgave på.

Det kan nemlig tænkes, at eleven kunne se, at begge trekanter er ligebenede og har samme form, og af denne grund konkluderede, at årsagen til at de har samme form må være, at de er ligebenede.

Denne påstand bliver modbevist af læreren ved følgende modeksempel:

342.Lærer*: ”Begge to er ligebenede. Du mener, at de to trekanter har lige lange ben, ikke? (peger på trekanterne på tavlen). De har samme form, ja. Det er rigtigt. Men du siger, at de har samme form, fordi at de er ligebenede. Ud fra ligebenede trekanter kan man ikke konkludere, at de har samme form. Alle ligebenede figurer har ikke samme form. For eksempel (tegner to ligebenede trekanter på tavlen) de her to trekanter (ryster på hovedet). Ud fra ligebenede trekanter kan man ikke konkludere, at de har samme form. Man er nødt til at finde ud af, hvor mange gange den her side bliver fordoblet (peger på siden på 3 cm), og hvor mange gange den her side (peger på siden på 2 cm) bliver fordoblet. Og hvis de har samme, fælles faktor, så er det fint nok”.*

Det skal nævnes, at læreren her begår en sproglig fejl, idet han siger ”fordoblet” i stedet for ”forstørret”. Men det så ud til, at denne fejl ikke påvirkede eleverne.

Han modbeviser elevens påstand ved at tegne to trekanter på tavlen, hvor det er tydeligt at se, at de ikke har samme form, selvom de er ligebenede. Vi havde ikke regnet med, at denne påstand ville fremkomme. Læreren har tacklet denne situation ved hurtigt at finde et eksempel, hvor det er tydeligt at se, at påstanden ikke holder. Men man kan så diskutere, hvorvidt eleverne har accepteret, at et modeksempel er nok til at vise, at noget er forkert. Eleverne i klassen sad stille og nikkede efter lærerens modeksempel. Derfor så det ud til, at de havde accepteret det. Måske er det en metode, som læreren har benyttet før i sin undervisning, og derfor kan det være, at eleverne er vant til det.

Opgaveark

Alle eleverne havde besvaret denne opgave korrekt på nær 2 elever. Vi kan kategorisere to forskellige metoder:

1. Den rigtige metode, hvor den lille trekants sidelængder bliver ganget med 5 for at få den store trekants sidelængder.
2. Den forkerte metode, hvor argumentationen er at trekanterne er ligebenede.(Kun to elever)

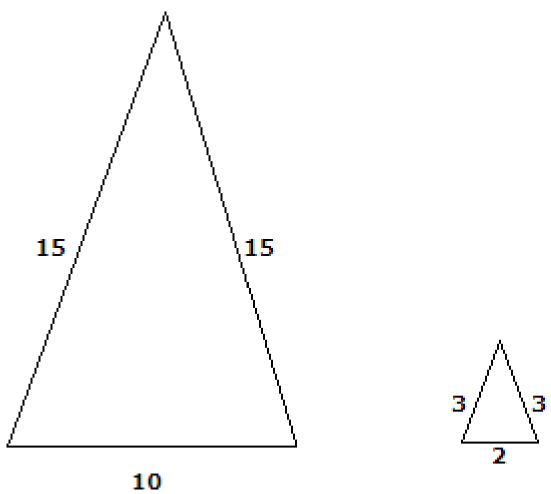
Eksempler på første metode:

"Ja, fordi den store er fem gange større end den lille"(Mogens)

"Ja, fordi 2 går op i 10, 5 gange, og 3 går op i 15, 5 gange"(Benny)

"Ja, fordi den lille er blevet fordoblet fem gange, og den store er bare drejet rundt, så den vender nedad."(Egon)

Der er ingen, elever som har skrevet det op som brøk, som vi beskrev i *a priori* analysen. Det sidste udsagn er interessant, fordi vi kan se, at elevens proportionelle ræsonnement er baseret på idéen om, at to figurer som er ligedannede, skal være tegnet således, at hvis man tager den ene figur og ligger det på den anden i den forstørrede/formindskede udgave, så skal de dække hinanden. Trekanter i denne opgave ville altså se således ud:



Figur 36

I denne opgave er det multiplikative forhold mellem ensliggende sider et helt tal, hvilket har gjort det nemt for eleverne at regne ud. Men hvis de havde taget det multiplikative forhold mellem to sider i samme trekant, ville de få et ikke-helt tal.

Opgave 2.

"Jesper har cyklet 12 km på 36 minutter, og Hans har cyklet 54 km på 162 minutter. Har de cyklet med den samme fart?"

Tavlegennemgang

Der er tre elever, der får gennemgået deres metode. Den første elev Rasmus svarer "nej", og argumenterer ved at skrive følgende på tavlen:

$$42 + 12 = 54$$

$$42 + 54 = 96$$

Eleven har fået 42 ved at trække 12 fra 54. Dette tal benyttes så til at lægge sammen med henholdsvis 12 km og 54 km, som giver forskellige tal. Vi kan se, at eleven har brugt en form for additiv strategi.

Idet læreren kan se, at elevens metode er forkert, vælger han en ny elev til tavlen. Læreren burde have spurgt eleven om f.eks. hvordan han har fundet 42. Og måske lede ham frem til, at hans metode ikke giver mening ved at benytte det adidaktiske potentiale.

Den næste elev Betina, skriver:

36 min + 12 km= 48

54 min +162 km = 216

48/2 = 24

216/2= 108

Metoden forklarer hun ved:

355.*"Først har jeg fundet Jespers gennemsnitsfart. Det er jo om det er samme fart. Også har jeg så også fundet det samme ved Hans. Også har jeg så fundet ud af at Jesper han kører på 24 i gennemsnit og Hans på 108. Og 24 den går ikke op i 108".*

Hun tror altså, at det er gennemsnitsfart hun finder ved at lægge f.eks. 36 min til 12 km og dividere resultatet med 2. Man kan se fænomenet "Kaptajnens alder". Eleven tænker proportionelt, da 24 ikke går op i 108, så er de ikke proportionelle og har derfor ikke samme fart. Eleven har sandsynligvis fundet på denne metode ud fra en mikrokontrakt om, at hun skal benytte tallene i opgaven og benytte noget med forhold.

Idet læreren kan se, at denne metode også er forkert, vælger han ikke at rette på Betina, men at spørge klassen, om der er andre, der har gjort det på en anden måde. Læreren vil høre Jens' metode. Jens har løst opgaven korrekt. Han forklarer sin metode i følgende dialog med læreren.

371.Jens: *"Går 12 op i 36?"*

374.Lærer: *"Det vil sige 36 delt med 12 km (skriver 36/12 på tavlen), ikke?"*

375.Jens: *"Ja"*

376.Lærer: *"Hvad har du mere sagt?"*

377.Jens: *"Det samme med 54 op i 162."*

383.Jens*: "Så har jeg sagt hvor mange gange går 12 op i 36. Det gør den 3 gange. Så har jeg sagt 54 op i 162, det gør den også 3 gange. Så har jeg sagt ja det er de. De har samme fart."*

Vi kan gennem deres dialog se, at Jens har svaret rigtigt ved at stille tallene 36/12 og 162/54 op i brøkform. Dernæst har han fundet frem til at begge brøker giver 3, og dermed har de haft samme fart. Men eleven har ikke tænkt særlig meget over konteksten i opgaven, for fart defineres ikke som tid/afstand.

Efter elevens forklaring, kommer læreren ind på, hvordan fart defineres. Han siger nemlig:

384.Lærer: *”Du skal tænke på.. Når man snakker om fart, ikke? Så snakker man om afstand pr. tid. Det vil sige, nu har han sagt tid delt med afstand. Man snakker om afstand pr. tid. Det vil sige kilometer og antal minutter ikke?”*

385.Elev: *”De kan ikke sættes sammen, kan de?”*

386.Lærer: *”Afstand pr. tid det kan man godt. Altså jeg kører med 10 km i så lang tid. Så det skal stå omvendt. For eksempel 12 km 36 min, 54 km og det var 162 min (skriver 12/36 = 54/162). Nu kan vi se hvor meget det her giver. Det giver 0,33 km pr. minut. Nu er vores enhed, den passer også med afstand pr. tid. Afstand kilometer pr. tid som er i minutter. Er I med?”*

Læreren retter altså elevens svar ved at skrive det korrekt op. Dette skyldes hans epistemologiske ansvar, idet læreren ikke vil have, at eleverne lærer noget forkert, selvom definitionen af fart ikke har relevans for vores emne.

Opgaveark

Eksempler på besvarelse fra opgavearket:

”Nej, de har ikke den samme fart, men Hans har nået lang nok på længst tid og Jesper har nået 12 km på kort tid”(Ole)

”Nej, fordi Hans har cyklet mere end Jesper. F.eks. Hans har kørt 54 km på 162 og Jesper har kørt 12 km på 36 minutter”(Frederik)

”Nej, fordi minutterne og km går ikke op i hinanden”(Mogens)

Den første besvarelse er interessant, idet han svarer nej. Men hans besvarelse er formuleret på sådan en måde, at man umiddelbart ville tro, at han tænker proportionelt. Det vil sige at Hans cykler langt på lang tid, og Jesper cykler kort på kort tid.

Den anden besvarelse er baseret på en af de typiske fejlmetoder, som vi har beskrevet i teoriafsnittet. Han ser blot på afstanden og ser bort fra tiderne og derfor sammenligner han kun afstandene, hvilket han bygger sin besvarelse på.

I den tredje besvarelse har eleven svaret nej, idet 12 km ikke går op i 54 km, og 36 min ikke går op i 162 min. Han kan være påvirket af opgave 1 i arket, hvor sidelængderne skulle være proportionelle.

OPGAVE 3

"For at bage 18 kager skal man bruge 45 æg. Hvor mange æg skal der bruges til 12 kager?"

Tavlegennemgang

I denne opgave, som er en opgave med en manglende ubekendt, kommer der tre elever op til tavlen og forklarer deres metoder. Den første elev er Ole, som skriver følgende på tavlen:

12 op til 18 = 6

45:6=7,5

45-7,5= 38,5.

392.Ole:*"det er..jeg har sagt 12 op til 18 det er 6. 6 divideret med 45 det er 7,5. Så minusser jeg med 45 og det giver 38,5."*

Det vi kan se ud fra hans beregninger er, at han er ude efter at finde forholdet mellem kagerne og benytte samme forhold til at beregne antal æg, der skal bruges. Altså har han fat i en korrekt tankegang. Dog skulle han dividere 18 med 12 og ikke subtrahere dem. Derfor får han et forkert resultat. Læreren kunne måske have været lidt mere behjælpelig, mens eleven forklarede sin metode, nemlig ved at benytte det adidaktiske potentiale, der ligger i miljøet. I stedet vælger læreren straks at tage en ny elev op til tavlen. Lærerens reaktion viser eleverne indirekte, at resultatet er forkert. Det er problematisk, at læreren ignorerer elevens fejl, for det er vigtigt, at eleven kan få feedback fra miljøet.

Den næste elev er Betina. Hun skriver følgende:

18 kager → 45 æg

12 kager → x æg

12 x 45 = 540/18 = 30 æg.

Hun bruger gange-over-kors teknikken, hvilket er helt korrekt. Læreren spørger ud til klassen, om der er andre metoder, uden at sige noget om hendes metode er korrekt eller forkert.

En ny elev kommer til tavlen, Frederik. Så snart han starter med at skrive sin metode op på tavlen siger læreren:

418.”*Det er den samme metode, men du skriver bare omvendt ikke?”*

Frederik skriver følgende på tavlen:

45 æg → 18 kager

X æg ← 1 kage

45 x 1= 45/18 = 2,5 x 12 = 30

Dette forklarer han ved:

424.Frederik: *”Gange tværs. 1 gange 45 det er så 45, og så skal jeg dividere det med det der (18). Det giver 2,5 og så var der 12 kager gange de der to (12 og 2,5,)og så giver det 30 æg”.*

Her kan man se at hans strategi er enhedsstrategien, og derfor er det ikke den samme som Betinas metode. Læreren prøver at få det ud af ham, at det er ”enheden” han finder ved at spørge:

425.Lærer: *”Frederik hvor kommer de 2,5? Hvad betyder det? De 2,5 hvad betyder det?”*

426.Frederik: *”Det er 45 divideret med 18”.*

Frederik ser det bare som et tal, men læreren vil have, at han skal sige, at det er det antal æg, der skal bruges til 1 kage. Da der ikke kommer noget ud af ham, spørger læreren klassen og en elev svarer.

Læreren institutionaliserer denne opgave ved at genfortælle Frederiks enhedsstrategi. Han peger på Betinas og Frederiks metoder på tavlen og siger, at begge er rigtige. Men der nævnes ikke noget om Oles metode, så det er underforstået, at hans resultat er forkert.

Opgaveark

Eksempler på besvarelser:

Der er to metoder i opgavebesvarelserne, nemlig gange-over-kors teknikken og enhedsstrategien. Kun tre elever har fået et forkert resultat. Den ene af de elever, der har fået et forkert resultat er Anne.

"til 12 kager skal man bruge 36 æg. 12 x 3= 36" (Anne)

"45 æg/18 kage = 2,5 æg = hvor meget æg der er i en kage.

2,5 æg x 12 kager = 30 æg. Jeg ganger det med 12 for at finde hvor mange æg der er i en kage" (Gitte)

Vi kan ikke se, hvorfor eleven ganger med 3 i første sætning. Hun har måske hurtigt indført en forkert hovedregning og fået, at 45 divideret med 18 giver 3. Den anden sætning er en måde at skrive enhedsstrategien op på.

Opgave 4

"*Søren og Anders er brødre, og de har fødselsdag samme dag. Søren er 3 og Anders 5. Når Søren bliver 15, hvor gammel bliver Anders så?"*

Tavlegennemgang

Denne opgave er ikke proportionel og blev valgt netop for at forvirre eleverne lidt. Men til vores overraskelse, har alle elever, på nær én, besvaret denne opgave rigtigt, hvilket vi har set i deres opgavebesvarelser. Eleven som kommer til tavlen har også en korrekt besvarelse. Det der går tid med her, er at læreren vil have, at eleven skal skrive noget på tavlen, som eleven nægter at gøre. Da det er en forholdsvis kort opgave, er der faktisk ingen grund til at skrive noget ned, da det kan gøres mundtligt. Derfor forstår vi ikke lærerens iver at få ham til at skrive noget.

Opgaveark

"20 år, fordi 3+12= 15+5 = 20"(Egon)

"Der er kun 2 år imellem dem. Så når Søren bliver 15 bliver Anders 17 år" (Else)

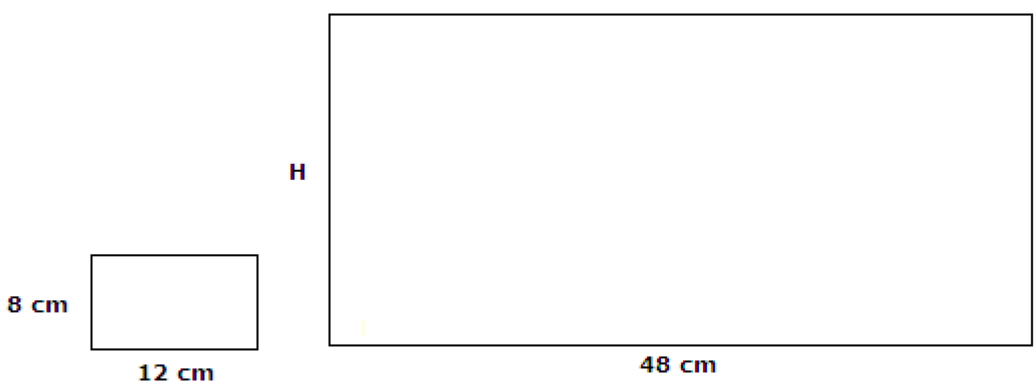
"12+3 = 15 og 12 +5 = 17" (Rasmus)

Det første eksempel er det eneste svar, som er forkert. Det er ikke fordi, at eleven har tænkt proportionelt, at han har fået et forkert resultat. Han har måske misforstået opgaven.

Vi har set forskellige måder at besvare denne opgave på, enten med ord eller blot vist i en hurtig beregning som i sidste eksempel.

Opgave 5

"Disse to rektangler har samme form. Find H."



Figur 38

Tavlegennemgang

Denne opgave bliver gennemgået af Ole ved tavlen. Han har opstillet følgende:

Finde H. 48:12 = 4. 12 x 4= 48. 8 x 4 = 32

Han benytter forholdet mellem siderne og dette er helt korrekt. Læreren institutionaliserer metoden ved at gentage metoden med sine egne ord. Eleven har altså sammenlignet de eksterne forhold i denne opgave med en manglende ubekendt.

Opgaveark

"Hvor mange gange går 12 op i 48. det gør den 4 gange. Så skal 8 ganges med 4 og så bliver H 32.(Jens)."

"H bliver 32cm, fordi de andre er fordoblet med 4" (Egon)

"12 x 3 = 48 og 8 x 3 = 24"(Betina).

Alle eleverne har besvaret opgaven korrekt, undtagen en enkel elev, som har lavet en regnefejl (sidstnævnte eksempel). Idet vi har valgt tal der går op, har der ikke været nogen problemer med denne opgave.

OPGAVE 6

"For 4 kr. kan du købe 6 stykker slik. Hvad kan du få for 10 kr.?"

Tavlegennemgang

Til denne opgave, som er en opgave med en manglende ubekendt, kommer der to elever op til tavlen. Den første løser opgaven således:

4 kr. → 6 ss

10 kr. → X ss.

10 x 6 = 60/4 = 15 ss.

Altså ser vi endnu en gang gange-over-kors teknikken. Opgaven blev besvaret korrekt.

Den næste elev er Morten, som skriver følgende på tavlen:

4 kr. = 6 stykker

4 kr. = 6 stykker

2 kr. = 3 stykker.

I alt: 10 kr. = 15 stykker

Morten benytter sig af bygge strategien, som ligeledes er en korrekt metode. Læreren institutionaliserer ved at forklare, at begge metoder er korrekte, dog er Mortens metode noget hurtigere. Da det ringer ud til pause, får læreren ikke mulighed for at spørge, om der er andre elever der har løst opgaven på en anden vis. Men vi kan ud fra deres opgave ark se, at der fremkommer endnu en korrekt metode til at løse denne opgave på, nemlig enhedsstrategien.

Opgaveark

"1 = 1,5 og 1,5 x 10 = 15"(Rasmus)

"4 → 6 ss

10 → 14 ss"(Anne)

Den første metode er et eksempel på enhedsstrategien. Denne elev begynder med at beregne hvor mange stykker slik man kan få for 1 kr. Dernæst ganger han det med 10.

Den eneste forkerte besvarelse til opgave 6 er det sidste angivne eksempel. Anne har forsøgt at benytte byggestrategien, dog på en ukorrekt måde. Tankegangen bag hendes beregning kan være, at det dobbelte af 4 kr. er 8 kr. Mens det dobbelte af 6 stykker slik er 12 stykker slik. Da der spørges hvad man kan få for 10 kr. og 10 kr. – 8 kr. = 2 kr. lægger hun 2 kr. til 12 kr. for at få 14 kr.

Herefter bygger vi vores analyse på opgave arkene, da de 8 lektioners undervisningsforløb sluttede med denne opgave.

OPGAVE 7

"Louise hænger 3 håndklæder til tørre udenfor. Efter 12 timer er de tørre. Anna hænger 6 håndklæder til tørre. Efter hvor lang tid vil de blive tørre?"

Opgaveark

Denne opgave er en ikke-proportionel opgave. Der er dog mange af eleverne, som har besvaret denne proportionelt.

Eksempler på elevernes besvarelser:

"Det er 24, fordi det er det dobbelte" (Benny)

”12 + 12 = 24 timer” (Michelle)

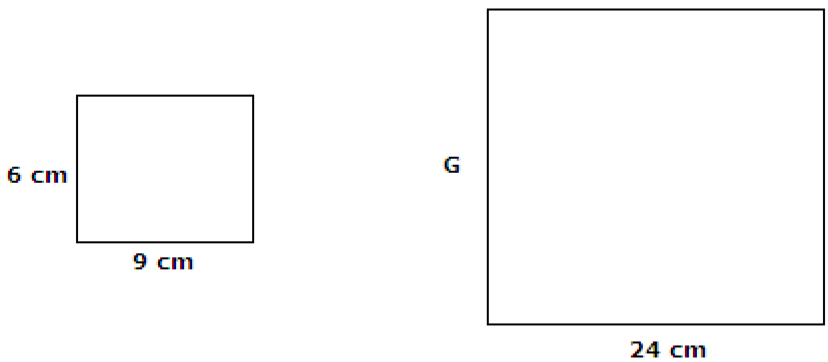
”Det er 24 timer, fordi 3 x 2 = 6 og 12 x 2 = 24” (Frederik)

”Efter 12 timer, fordi at det er lige meget, hvor mange håndklæder man sætter til tørre. Det tager lige så lang tid”(Jens)

De første tre eksempler er forskellige måder at skrive det proportionelle svar på. Fordi de har haft proportionalitetsopgaver gennem næsten hele forløbet, havde vi forventet at de fleste ville svare proportionelt.

OPGAVE 8

”Disse to rektangler har samme form. Find G.”



Figur 39

En fejl vi har lavet er, at rektanglerne i denne opgave ikke ligner rektangler, men nærmere kvadrater, som man kan se foroven. Af denne grund er det oplagt, at der ikke kun findes et korrekt svar, men to korrekte svar nemlig G = 16 eller G = 36.

Eksempler:

”6 x 4 = 24 cm og 9 x 4 = 36 cm” (Frederik)

”24/9 = 2,66”(Else)

”6/9 = G/24”

Det første eksempel er korrekt, da eleven sammenligner de tal, der går op i hinanden (6 og 24). Det var ikke hensigten, at opgaven skulle være så nem. Men da vi som omtalt ovenfor ikke fik tegnet rektanglerne tydeligt, kunne eleverne bytte om på længden og bredden, som de havde lyst. Eleven har benyttet de eksterne forhold af siderne i rektanglerne.

I det næste eksempel har eleven divideret 24 med 9, men da det giver et decimaltal, har det bragt hende vanskeligheder, og hun har derfor ikke skrevet andet.

I det sidste eksempel har eleven opskrevet en korrekt ligning, men mangler at finde resultatet. Denne elev har benyttet de interne forhold af siderne.

OPGAVE 9

”Et togs lokomotiv er 12 m langt. Hvis der er 4 vogne forbundet til lokomotivet, er toget 52 m langt. Hvor langt er toget, hvis der er 8 vogne forbundet til lokomotivet?”

Denne opgave er en ikke-proportionel opgave. Som forventet tænker eleverne proportionelt, og derfor er der ingen, der har lavet denne opgave rigtigt.

Eksempler på proportionelle svar:

”Jeg har bare taget det dobbelte af 4 og toget er 104 langt”(Else)

”52 m → 4 vogne

X m ← 1 vogn

52 x 1 = 52/4 = 13 m

8 x 13 = 104 m langt"(Betina)

Eksempler på andre typer svar:

"52 + 12 = 64 og 52 + 64 = 116 m langt" (Gitte)

"60 m langt. Der kommer 8 ekstra på" (Sara)

Det første eksempel er et ukorrekt svar og omhandler den metode, vi beskrev i *a priori* analysen.

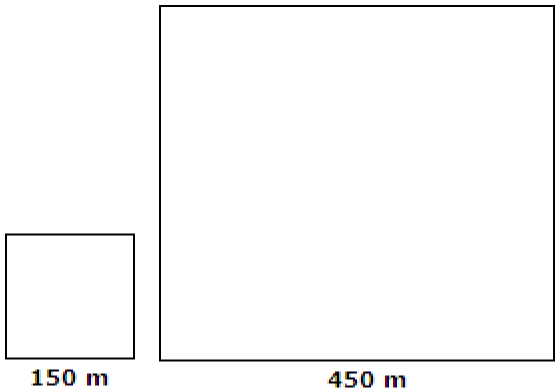
I det andet eksempel har eleven benyttet enhedsstrategien og brugt gange-over-kors teknikken til at finde længden af 1 vogn. Dette svar havde vi ikke forventet, men det er et oplagt svar.

I det tredje er det uvist, hvorfor hun først lægger 12 til 52 og dernæst lægger 64 til. I dette tilfælde må hun tro, at kun de fire vogne er 52 m langt. Dertil tilføjer hun lokomotivet på 12 m. Til sidst lægger hun 4 vogne til på 52 m, som i alt giver 116 m. Altså er hendes fejl, at hun i starten ikke har trukket lokomotivet fra, men lagt det til. Det er en misforståelse af opgaveformuleringen.

I det sidste eksempel lægger han blot 8 til 52 uden at tænke over benævnelsen. Han har ikke læst opgaven ordentlig og har kun fokuseret på tallene.

OPGAVE 10

"En landmand har brug for 8 timer til at så græs på et kvadratisk landområde med sidelængden 150 m. Hvor lang tid har han brug for, for at så græs på et andet kvadratisk landområde med sidelængden 450 m?"



Figur 40

Denne opgave er en geometrisk ikke-proportionel opgave. Igen har alle de elever, der har løst opgaven, løst den proportionelt som forventet.

Eksempler på besvarelser:

"150 m → 8 timer

450 m → X timer

450 x 8 = 3600 / 150 = 360/15 = 24 timer"(Betina)

"450/150 = 3 x 8 = 24 timer skal han for at slå det græs"(Ole)

"24 timer skal han bruge, fordi 8 er ganget med 3 og 150 er ganget med 3. Så det bliver 150 x 3 = 450"(Egon)

I det første eksempel er gange-over-kors teknikken benyttet, mens det andet og tredje er besvarelser, som vi forventede. Forskellen er bare, at den ene har skrevet det med tal og den anden beskrevet det med ord.

OPGAVE 11

"Man kan købe en kanelsnegl, der vejer 250 gr. fra en bager A. Der er 30 gr. sukker i denne kanelsnegl. I en anden bager B kan man købe en kanelsnegl på 100 gr. med 12,5 gr. sukker i. Er andelen af sukker i kanelsneglene den samme?"

Eksempler på besvarelser:

"Nej det passer ikke, fordi der er mest sukker i A"(Benny)

"A = 250 – 30 = 220 gr.

B = 100 – 12,5 = 87,5 gr.

Nej, fordi at der er mange flere gram i A end B, så det er mit svar"(Ole)

"250 / 30

12,5/ 100 = 0,12 "(Anne)

"Nej fordi det går ikke op. 100 gr. går ikke op i 250 gr. og 12,5 gr. sukker kan ikke blive til 30 gr."(Egon)

Benny ser bort fra en del af opgaven i det første eksempel og betragter kun sukker andelen. Derfor får han et forkert resultat.

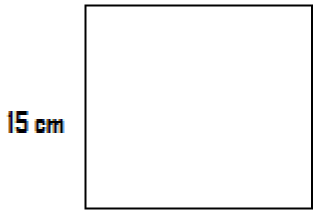
I det andet eksempel bliver der tænkt additivt. I stedet for at kigge på forholdet mellem kanelsneglens vægt og sukkerandel, trækker han de to fra hinanden.

Det tredje eksempel er et forsøg på at lave opgaven rigtigt, idet vi kan se at hun prøver at finde forholdene. Dog har hun svært ved at regne videre, da det er decimaltal.

I det sidste eksempel er eleven på vej mod det rigtige svar. Men da han ikke udfører regnestykkerne, kan han ikke se, at sukkerandelen ikke er ens.

OPGAVE 12

"Nedenfor er der vist et kvadrat. Tegn et andet kvadrat, der har det dobbelte areal ved at finde sidelængden først."



Figur 41

Eksempler på besvarelser:

"Eleven har tegnet et kvadrat med sidelængden 30 cm" *(Jens)*

"A = l x b

A = 15 x 15

A = 225 cm^2

225 x 2 = 450 cm^2"(Betina)

"Eleven har målt sidelængderne på kvadratet til 3 cm og tegnet det store kvadrat med sidelængden 6 cm" (*Maria)*

Den første metode er noget, som vi havde forventet. Altså har han fordoblet sidelængden af kvadratet i håb om at fordoble arealet.

Anden metode er rigtig. Men hun mangler at beregne sidelængden af det nye kvadrat for at kunne tegne det.

Den tredje elev har set bort fra den angivne sidelængde på 15 cm og selv målt med lineal. Derfor får hun også et forkert svar.

10 Generel analyse

10.1 Forhindringer for gennemførelse af forløbet

Nogle faser i lektionerne tog længere tid, end vi havde regnet med, og derfor var der tidspres, da lektionen skulle afsluttes, når det ringede ud. Dette tidspres var skyld i, at der f.eks. ikke var så meget diskussion i klassen, og at nogle ting blev sprunget over af læreren.

Da eleverne ikke havde prøvet at blive videofilmet til undervisningen, var de fleste elever tilbageholdende med at sige noget og med at komme til tavlen og forklare. Dette havde læreren også givet udtryk for i det efterfølgende interview med ham om, hvordan forløbet var gået. Han syntes nemlig, at hans elever ikke sagde så meget, som de normalt siger til hans undervisning, og at det nok var på grund af kameraet og os to, der observerede. Derfor var det mere eller mindre de samme elever, der besvarede lærerens spørgsmål eller kom til tavlen. Vi havde troet, at de elever der deltog, var dem der var de fagligst stærkeste i klassen. Men læreren har i interviewet påpeget, at der også sad andre dygtige elever, men som nok var for generte til at deltage. Han ville ikke presse dem til at sige noget, da han var klar over, at det var på grund af kameraet og de observerende.

Vi kunne i gruppearbejdsfaserne observere, at læreren en gang imellem hjalp eleverne, måske lidt mere end blot at sætte dem i gang. Dette kan skyldes, at læreren har følt et epistemologisk ansvar for, at de skal lære noget, når de kommer i skole.

10.2 Afvigelser fra det designede forløb

Nu skal vi undersøge, hvilke afvigelser der fandt sted i forhold til vores designede forløb. Vi vil dele dette afsnit i to, først vil vi beskrive lærerens afvigelser fra manualen, som han har fået af os, og dernæst følger en beskrivelse af elevernes afvigelser fra det, som vi havde forventet af dem.

Lærerens afvigelser fra det forventede

Vi har flere gange set, at læreren har valgt at gøre noget andet i lektionerne, end det vi havde skrevet i undervisningsmanualen og forklaret ham. Vi skal nu beskrive disse afvigelser nærmere ved at kategorisere dem i forskellige overskrifter.

- Afvigelser vedr. gruppefordeling, skrive på tavlen i stedet for kun af sige det osv.

I første lektion så vi f.eks., at læreren valgte at tegne kvadraterne og rektanglerne på tavlen samtidig med eleverne. Desuden skrev han på tavlen, hvad eleverne skulle gøre. Læreren brugte altså tavlen mere, end vi havde forestillet os, men det har ikke påvirket vores forløb negativt. Højst sandsynligt har læreren valgt at skrive det op for at undgå spørgsmål som *”Hvad skulle vi?” ”Hvor mange centimeter var det?”* osv.

Læreren valgte at sætte eleverne i de samme grupper i de sidste par lektioner, da han syntes, at det ville være nemmere. Dette ville have været en god idé at gøre igennem hele forløbet. Dels fordi der ville bruges mindre tid på at lave nye grupper hver gang, og dels fordi det kunne gøre vores analyse nemmere. Derfor ville det være oplagt at vælge samme antal elever i grupperne igennem hele forløbet, i stedet for forskellige antal som vi havde skrevet i undervisningsmanualen.

- Tidsmæssigt

Der var generelt et problem med at bruge tiden effektivt. Der blev brugt unødvendigt lang tid på ting, som vi ikke anså for vigtige, men som måske var vigtige i lærerens øjne. Derfor blev der for det meste brugt meget lidt tid på institutionaliseringen, som er en ret vigtig fase. F.eks. i 6. lektion, hvor læreren ikke nåede at lave den sidste tabel, som viste at højden af maleriet ikke var proportionel med det anvendte milliliter maling. Eller at der i 1. lektion ikke blev institutionaliseret ordentligt. Derudover valgte læreren f.eks. at kalde flere elever op til tavlen for at gennemgå samme opgave i 8.lektion, og derfor nåede de kun at gennemgå seks opgaver ud af tolv. Effekterne af de manglende eller halve institutionaliseringer kan være, at eleverne gik ud af klassen med en følelse af, at de var usikre for, f.eks. hvilke metoder der var korrekte, og hvilke der var ukorrekte i lektionen.

- Hvor læreren fortæller mere end nødvendigt

Nogen gange syntes vi, at læreren fortalte eleverne mere end nødvendigt. Han kunne udnytte det adidaktiske potentiale i miljøet og stille eleverne spørgsmål, så de selv kunne komme frem til svaret. Eksempelvis beskrev læreren, i starten af 5. lektion flere gange, hvordan en jætte ser ud, hvilket resulterede i, at alle grupper med det samme gav sig hen med at måle højde og ørelængde på dem selv. De var altså blevet helt overbeviste om, at det var den metode, de skulle benytte.

Elevernes afvigelser fra det forventede

Vi vil nu sammenligne vores forventninger af eleverne, som beskrevet i *a priori* analysen af forløbet med elevernes faktiske handlinger. Disse stemte ikke altid overens. Herunder skal vi sammenligne de forventede strategier og elevernes faktiske strategier under opgaveløsningerne. Vi vil gøre dette systematisk ved at tage de enkelte lektioner for sig.

I 1. lektion havde vi forventet, at der skulle være en mere heftig diskussion i klassen blandt eleverne, hvor de hver især prøvede at overbevise de andre om, at deres egen strategi var den korrekte. Under forløbet oplevede vi ingen lange diskussioner. Desuden skulle der vælges to elever til at forklare den multiplikative strategi, men der var kun én elev, der rakte hånden op, selvom vi senere i kladdehæfterne kunne se, at der var tre elever, der havde benyttet den multiplikative strategi.

I 2. lektion havde vi ikke forventet, at nogle elever ville måle papirtykkelsen ved at folde et stykke papir et vist antal gange og så dividere det med det antal lag, der var. Men denne metode er en oplagt mulighed. Derudover havde vi forventet, at den "rigtige metode" ville sprede sig ud i klassen, men vi så en gruppe, som udregnede noget helt andet. De dividerede nemlig længde og bredde af papiret for at finde tykkelsen, som peger hen mod fænomenet "Kaptajnens alder". Denne strategi havde vi heller ikke beskrevet.

I 3. og 4. lektion havde vi ikke forventet, at en elev højlydt ville spørge læreren, om ikke de bare skulle lægge 3 cm til alle brikkerne. Dermed havde vi ikke forberedt læreren på, hvad han skulle svare, eller hvordan han skulle reagere i sådan en situation. Der var ikke nogen elever, der opgivende spurgte læreren om, det overhovedet var muligt at sætte puslespillet sammen. Eleverne regnede stadig med, at det var dem, der sikkert havde lavet noget forkert, indtil læreren fortalte dem, at det ikke kunne løses ved at lægge det samme tal til. Desuden benyttede alle elever den additive strategi og ingen benyttede den strategi, hvor man tager det dobbelte af tallet og trækker 1 cm fra.

I 5. lektion havde vi en forventning om, at eleverne havde bedre kendskab til nordisk mytologi. Dette ville være med til at vække yderligere interesse hos dem, idet de skulle finde højden på en jætte. Desuden var der ingen grupper, der målte bredden af øret, alle elever målte højden af øret.

I 6. lektion overraskede eleverne os, idet en gruppe tidligt i lektionen fandt ud af, at de kunne klippe det lille hestemaleri og tælle hvor mange gange, det kunne være i det store maleri. Derudover havde en anden gruppe beregnet maleriernes arealer og fundet det rigtige svar. Denne metode skulle læreren først få dem til i slutningen af lektionen. Nogle af de beskrevne strategier dukkede ikke op, f.eks. var der ingen grupper, der benyttede enhedsstrategien.

I 7. og 8. lektion nåede alle elever ikke at lave alle opgaver på opgavearket, selvom der blev afsat yderligere 15 minutter. Måske burde vi have givet færre opgaver. Under hver af de gennemgåede opgaver har vi set nogle metoder, som vi ikke havde forudset. For eksempel dukker der i 1. opgave en forkert strategi op, som vi ikke havde forventet. Det var at argumentere for opgaven ud fra, at trekanterne er ligebenede. Disse afvigelser og den nærmere analyse af elevernes strategier er blevet beskrevet mere udførligt i analysen af de enkelte lektioner.

11 Konklusion

Det har været interessant, både for os og for matematiklæreren, at få gennemført vores undervisningsforløb i praksis. Samtidig var det en lærerig proces af personlig interesse for os, idet vi begge arbejder på en grundskole. Det har både været spændende og udfordrende at arbejde med TDS i praksis, da vi tidligere mest havde beskæftiget os med det som et teoretisk felt.

I første del af specialet beskrev vi den stofdidaktiske teori om proportionalitet samt TDS for at kunne benytte disse til at designe vores undervisningsforløb med og som redskab til *a posteriori* analysen af forløbet. Vi indledte med en historisk baggrund for emnet proportionalitet, hvor vi fordybede os i Euklids Elementer, som indeholder den første systematiske teori om forhold og proportionalitet. Matematikeren Thales har dog også benyttet proportionalitet til bl.a. at finde højden af pyramiderne. Euklid definerer proportionalitet med størrelser og ikke med tal, fordi mange naturligt forekommende proportioner er irrationale størrelser, som grækerne ikke anerkendte som tal. Han har benyttet proportionalitet i mange af sine sætninger, af hvilke vi har gennemgået nogle få stykker.

Dernæst beskrev vi to forskellige definitioner af proportionalitet, nemlig den dynamiske definition og den statiske definition, samt tre forskellige beskrivelser af proportionelt ræsonnement. I næste afsnit undersøgte vi to af de mest almindelige opgavetyper, som har til formål at lære eleverne om proportionalitet, nemlig opgaver med en manglende ubekendt samt sammenligningsopgaver. Derudover så vi på de forskellige strategier, som man kan benytte for at løse disse opgaver, bl.a. enhedsstrategien, gange-over-kors teknikken, multiplikativ strategien og bygge strategien. Der er også forskellige tilgange til at sammenligne forholdene i proportionalitetsopgaver, f.eks. kan man enten sammenligne de interne eller de eksterne forhold. Foruden de korrekte strategier er der også nogle typiske fejlstrategier, som elever benytter i forbindelse med proportionalitetsopgaver, såsom den additive strategi. Vi har endvidere nævnt, at når elever får styrket deres lineære tankegang, kan det også få uheldige konsekvenser i form af at benytte proportionalitet til ikke-proportionelle opgaver. Især de geometriske ikke-proportionelle opgaver kan give problemer, hvor et velkendt eksempel på dette er Menons fordobling af et kvadrat.

Efter det stofdidaktiske afsnit beskrev vi *a priori* analysen af undervisningsforløbet. Her gjorde vi overvejelser omkring bl.a., hvordan den tilsigtede viden skulle opbygges gennem hele forløbet, hvordan vi kunne bruge principperne fra TDS i designet, hvordan lektionerne skulle opbygges og hvilke løsningsstrategier vi forventede, at der ville dukke op. Til hver lektion har vi lavet et skema, som viser lektionens opdeling i forhold til TDS' fem faser. Samtidig med *a priori* analysen har vi også lavet en undervisningsmanual til læreren (Appendiks A.1), så han kunne benytte den under forløbet.

I anden del af specialet har vi beskrevet og analyseret vores undervisningsforløb (som fandt sted i juni 2009), og som vi efterfølgende transskriberede optagelserne fra (Appendiks A.3). Vi var på forhånd meget spændte på, hvordan forløbet ville udarte sig, f.eks. om eleverne ville finde emnet interessant, om de ville have svært ved at løse opgaverne, og hvorvidt læreren ville følge manualen, hvordan han ville tackle situationer, som ikke var beskrevet i manualen osv. Vi fandt ud af, at undervisningsforløbet i praksis ikke blev helt det samme som i designet. Afvigelserne skyldtes dels eleverne, dels læreren og dels andre faktorer såsom tiden. Bl.a. tidspresset var skyld i, at nogle vigtige detaljer blev sprunget over af læreren f.eks. institutionaliseringerne. Derudover glemte læreren undertiden at bede om begrundelser fra eleverne, eller han lod dem ikke formulere metoderne selv.

Vores formål var at designe og afprøve et undervisningsforløb i 6. klasse om emnet proportionalitet, hvilket vi fik gjort. Vi ønskede at opnå elevernes aktive deltagelse igennem hele forløbet. Men det kunne til tider være svært for læreren at få en diskussion frem i klassen. Vi mener, at dette bl.a. skyldtes tilstedeværelsen af kameraet og os to, det kunne have gjort eleverne nervøse. Der har derfor været mange faktorer, som var skyld i, at den tilsigtede viden i hver lektion ikke blev personliggjort af eleverne i det tilsigtede omfang. Vi syntes, at selvom alt ikke gik, som vi havde forventet det, fik både vi, eleverne og læreren et godt udbytte af forløbet. Eleverne gav udtryk for, at det var spændende at arbejde på denne måde. Læreren var også tilfreds, selvom han syntes, at det var svært at få eleverne til at diskutere bl.a. på grund af kameraet.

Det er for os svært at vurdere, hvorvidt dette design har hjulpet eleverne med at personliggøre proportionalitet og proportionelt ræsonnement, idet vi ikke har udformet en rigtig test, som kan måle dette. Men besvarelserne af de blandede opgaver, som skulle virke som en slags test, har givet os et indtryk i, at eleverne har forstået hovedpointen bag den proportionelle tankegang.

Hvis vi skulle gennemføre det samme forløb i en anden 6.klasse, ville vi for det første afsætte mere tid til hver af lektionerne, så læreren bl.a. kan udnytte de adidaktiske potentialer bedre. For det andet ville vi ikke optage det på video, idet det sandsynligvis forhindrede eleverne i at være mere aktive og engagerede i bl.a. diskussioner. Det kunne overvejes, at en af os skulle undervise, mens den anden observerede. Bl.a. fordi læreren ikke havde lang tid til at sætte sig ind i den teoretiske baggrund for designet, som vi jo har fordybet os i, og derfor ville det være en mulighed at en af os underviste. Men så ville der være en observatør mindre, og det ville være mindre klart, at det var designet, og ikke os, som blev afprøvet.

12 Litteraturliste

Arsac, G., Balacheff, N. & Mante, M. (1992). *Teacher's Role and Reproducibility of Didactical Situations.* I: Educational Studies in Mathematics **23**, s.5-29. Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1994). *Didactical Engineering as a Framework for the Conception of Teaching Products.* I: Biehler, Rolf (Editor): Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Kluwer Academic Publishers. Secaucus, NJ, USA.

Behr, M., Lesh, R. & Post, T. (1988). *Proportional Reasoning.* I: Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Reston, s. 93-118.

Ben-Chaim, D., Fey, J.T., Fitzgerald, W.M., Benedetto, C. & Miller, J. (1998). *Proportional Reasoning Among 7th Grade Students With Different Curricular Experiences.* I: Educational Studies in Mathematics **36**, s.247-273. Kluwer Academic Publishers.

Bock, D.D., Dooren, W.V., Janssens, D. & Verschaffel L. (2002). *Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors.* I: Educational Studies in Mathematics 50, s. 311-334. Kluwer Academic Publishers.

Bock, D.D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). *The Predominance of the Linear Model in Secondary School Students' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures.* I: Educational Studies in Mathematics **35**, s. 65-83. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Douady, R. (1985). *The Interplay Between Different Settings. Toll-Object Dialectic in the Extension of Mathematical Ability*. I: Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the

Psychology of Mathematics Education (9th). Volume 1, s.33-52.

Euklid (1904). *Euklids Elementer bog 1-6 oversat af Thyra Eibe*. Gyldendalske boghandel. Nordisk forlag, København.

Freudenthal, H. (1905). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. s.178-210.Kluwer Academic Publishers Group.

Hersant, M. & Perrin-Glorian M. (2005). *Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations.* I: Educational Studies in Mathematics **59**, s.113-151.

Joyce, D. E. (1996). *Euclid's Elements. Book VI*. I: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/bookVI.html

Karplus, R., Pulos, S. & Stage E. K. (1983). *Early Adolescents' Proportional Reasoning on "Rate" Problems*. I: Educational Studies in Mathematics **14**, s. 219-233.

Katz, V. J. (2004). *A History of Mathematics*. Brief Edition. Pearson Education, Inc.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). *Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation"*. I: Educational Studies in Mathematics **72.**

Nunes, T., Schliemann A. D. & Carraher D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambrudge University Press.

Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I. (2006a). *Sigma for tredje. Elevbog A*. Forlag Malling Beck A/S og forfatterne.

Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I. (2006b). *Sigma for tredje. Elevbog B*. Forlag Malling Beck A/S og forfatterne.

Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I. (2006c). *Sigma for fjerde. Elevbog*. Forlag Malling Beck A/S og forfatterne.

Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I. (2006d). *Sigma for femte. Elevbog*. Forlag Malling Beck A/S og forfatterne.

Schultz, H., Syberg, B. & Christensen, I. (2006e). *Sigma for sjette. Elevbog*. Forlag Malling Beck A/S og forfatterne.

Sierpinska, A. (1999a). *Theory of Situations*. Lecture 1. I: http://www.asjdomain.ca/TDSLecture%201.pdf

Sierpinska, A. (1999b). *Theory of Situations*. Lecture 6. I: http://www.asjdomain.ca/TDSLecture%206.pdf

Singh, P. (2000). *Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students.* I: Educational Studies in Mathematics **43**, s. 271-292. Kluwer Academic Publishers.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). *Proportional Reasoning: Variable Influencing the Problems Difficulty Level and One's Use of Problem Solving Strategies.* I: Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 5, s. 169-176. Prague: PME.

Sutherland, D. (2006). *Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions*. I: Journal of the History of Philosophy, vol. 44, no. 4, s. 533-558.

Tourniaire, P. & Pulos, S. (1985). *Proportional Reasoning: A Review of the Literature.* I: Educational Studies in Mathematics **16**, s. 181-204. D. Reidel Publishing Company.

Undervisningsministeriet (2009). *Trinmål-matematisk-synoptisk*. I: http://www.uvm.dk/service/Publikationer/Publikationer/Folkeskolen/2009/Faelles%20Maal%202009%20-

%20Matematik/Trinmaal%20-%20matematik%20-%20synoptisk.aspx?faellesmaal=1

Warfield, V. M. (2006). *Invitation to Didacttique*. University of Washington. Seattle, Washington.

Winsløw, C. (2006a). *Didaktiske miljøer for ligedannethed*. I: MONA 2006-2, s. 47-62.

Winsløw, C. (2006b). *Didaktiske Elementer*. Biofolia.

Appendiks A.1: Undervisningsmanual til læreren

1. Lektion: Onsdag d. 10/06/09 kl. 8.15-9.00

<u>8.15-8.25:</u> 10 minutter

Præsentere os for eleverne og fortælle, at vi skal observere forløbet, som skal vare 8 lektioner. *"I skal benytte kuglepen, og I må ikke bruge jeres lommeregnere"*. Uddele nye kladdehæfter. *"I skal bruge dette kladdehæfte til forløbet, og I skal skrive alle jeres udregninger heri. Lad være med at strege over, hvis I skriver noget forkert. Skriv det nedenunder eller på næste side, der er masser af plads i hæftet".*

"Er der nogen, der kan fortælle mig, hvad et kvadrat er ". Elev svarer. *"Er der nogen, der kan fortælle mig, hvad et rektangel er ".* Elev svarer. *"Tegn et kvadrat med sidelængden 3 cm i jeres kladdehæfte og et kvadrat med sidelængden 5 cm".* De tegner i kladdehæftet. Læreren går rundt i klassen. *"Har de samme form?".* Ja. *"Alle kvadrater har samme form uanset deres sidelængde".*

<u>8.25-8.28:</u> 3 minutter

"Tegn et rektangel med sidelængder 3 cm og 5 cm, og et rektangel med sidelængder 5 cm og 7 cm i jeres kladdehæfter". De tegner i kladdehæftet.*"Har de samme form eller forskellig form? Skriv ja eller nej i jeres kladdehæfter".* Eleverne skriver enten "ja" eller "nej" i deres kladdehæfter. Det er vigtigt, at de skriver deres umiddelbare indtryk uden forklaringer. Imens tegnes disse to rektangler på tavlen og sidelængderne angives.

<u>8.28-8.32:</u> 4 minutter

Der peges på tallene på tavlen. *"Lav en begrundelse for jeres svar ved at bruge tallene".* Eleverne sidder og laver en begrundelse i deres kladdehæfter. Imens cirkulerer læreren i klassen for at se, hvad eleverne gør, uden at blande sig. Dette vil hjælpe med at vælge to elever med forskellige strategier til næste fase.

<u>8.32-8.50:</u> 18 minutter

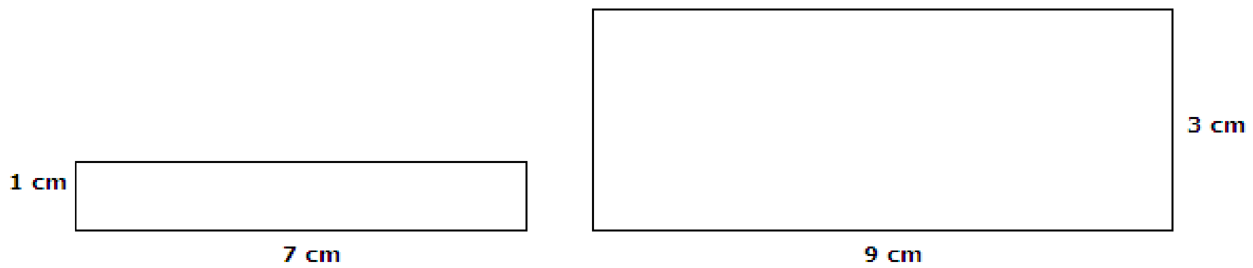
Bede 2 af de elever, der har skrevet ”ja” i deres kladdehæfte, om at forklare deres udregning på tavlen. Det skal helst være 2 elever med forskellige tilgange. F.eks. at finde den samme differens 2 cm, som medfører, at de har samme form.

Dernæst vælges 2, der har skrevet ”nej”, igen helst 2 elever med forskellige tilgange. F.eks. at beregne forholdet mellem siderne, dvs. (5/3 =)1.7 og (7/5 =)1.4, som medfører, at de har forskellig form.

Der opstår en diskussion i klassen om de forskellige strategier. Hvis ikke, skal den startes ved at spørge: *”Hvilken af strategierne tror I er korrekt, og hvorfor?””Prøv at overbevise hinanden om jeres påstande eller vis, at de andres er forkert”.* Der diskuteres i klassen. Læreren styrer, men skal prøve at undgå at blande sig i diskussionen.

<u>8.50-8.55:</u> 5 minutter

Slutte med at tegne et rektangel med sidelængderne 1 cm og 7 cm på tavlen. Der lægges 2 cm til sidelængderne og den nye rektangel tegnes: sidelængderne bliver 3 cm og 9 cm. Man kan tydelig se, at de ikke har samme form. *”I kan se, at man ikke får to rektangler af samme form ved at lægge samme tal til begge sider”.*



2. Lektion: Onsdag d. 10/06/09 kl. 9.00-9.45

9.00-9.05: 5 minutter

Begynde med at vise papirerne og sige: *"Her kan I se 4 slags papirer i forskellige farver. Der er noget andet, der adskiller dem foruden om farverne. De har nemlig også forskellige tykkelser. I skal finde ud af, hvor tykt hvert af de 4 papirer er".* Klassen deles i 8 lige store grupper (ca. 2 elever i hver gruppe), og der tildeles numre til grupperne. Der gives et enkelt stykke papir af forskellige farver til hver gruppe og nogle linealer. *"Jeg lægger resten af papirerne her på katederet" "I må godt tage flere hvis I vil" "I skal i jeres kladdehæfter skrive ned, hvordan I fik resultatet". "En fra hver gruppe skal skrive gruppens resultater i tabellen på tavlen".*

9.05-9.25: 20 minutter

Grupperne får lidt tid til at måle tykkelsen af det første farve papir, de har fået. Det er vigtigt, at de får god tid til det. Når en gruppe har skrevet resultatet på tabellen, skal der gives en anden farve papir til gruppen. Igen kun et stykke papir. Det er ikke nødvendigt, at alle grupper måler alle 4 forskellige farver papirer.

Grupper	Rød	Gul	Grøn	Blå
1	mm	mm	mm	mm
2	mm	mm	mm	mm
3	mm	mm	mm	mm
4	mm	mm	mm	mm
5	mm	mm	mm	mm
6	mm	mm	mm	mm
7	mm	mm	mm	mm

8	mm	mm	mm	mm

Læreren går rundt og lytter til deres argumenter uden at røbe nogen former for korrekte strategier. Hvis nogle elever spørger, om ikke de må måle flere stykker papirer på en gang, skal læreren svare ”ja”.

<u>9.25-9.43:</u> 18 minutter

Læreren vil få de sidste bud skrevet op på tavlen. Det kan godt være, at nogle grupper mangler nogle farver papirer. *”En fra hver gruppe skal nu forklare gruppens metode til at måle et stykke papir”.* Eleverne forklarer forhåbentlig enhedsstrategien. Der kan diskuteres om gruppernes strategier.

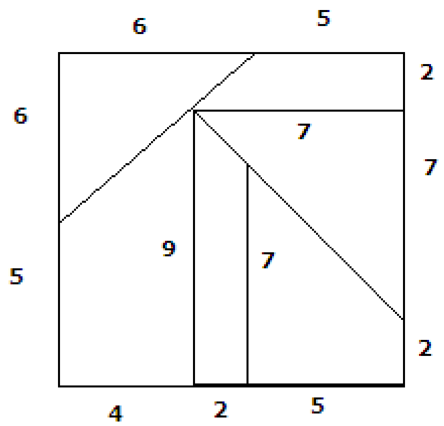
<u>9.43-9.45:</u> 2 minutter

Slutte med at sige: *”Man kan måle et stykke papir ved at måle flere og dividere med antallet. Hvis man skal måle eller veje et stykke af noget der er så tyndt eller småt, at det er svært at måle eller veje et enkelt stykke, kan man altså måle eller veje flere på en gang og dividere med antallet. Denne metode kan man benytte til f.eks. at måle tykkelsen af forskellige typer af stof eller mønter, som man kan stable oven på hinanden og måle tykkelsen af, for derefter at dividere med antallet. Eller f.eks. til at veje knappenåle, knapper, søm eller bolsjer ved at veje flere på en gang og dividere med antallet ”.*

3. & 4. Lektion: Torsdag d. 11/06/09 kl. 8.15-9.45

<u>8.15-8.20:</u> 5 minutter

"I dag skal vi lave puslespil". Der peges på puslespillet på tavlen, hvor sidelængderne er angivet, mens der fortælles: *"Jeg skal inddele jer i grupper, og hver gruppe får en kuvert, som indeholder brikkerne til dette puslespil"."Dette puslespil skal forstørres, og derfor vil enhver gruppe få uddelt sakse, linealer og papirer."* Pege på brikken med siderne 4 cm, 5 cm og 9 cm. *"I skal forstørre hele puslespillet, således at denne sidelængde på 4 cm bliver forstørret til 7 cm"*. *"Enhver elev i grupperne skal mindst forstørre et stykke af puslespillet, der er nemlig 6 brikker i puslespillet, mens grupperne består af ca. 4 elever, så der er nok til alle. Når alle brikker er blevet forstørret, skal brikkerne samles."* Grupperne laves. Uddeling af sakse, papirer og linealer samt kuverterne med puslespillet.



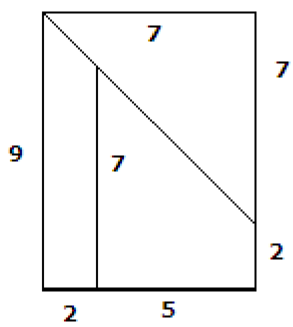
<u>8.20-8.50:</u> 30 minutter

Eleverne taler sammen i grupperne. Læreren cirkulerer i klassen. Nogle af grupperne kan komme med opgivende spørgsmål som f.eks.: *"Er du sikker på, at den kan løses?"* og *"Er det lykkedes dig, at lave den korrekt?*". Der må ikke hjælpes, bortset fra hvis de ikke har forstået opgaven.

Eleverne skal have tid til at forsøge at løse opgaven på en additiv måde, altså ved at lægge 3 cm til alle puslebrikkerne, da differensen mellem 7 cm og 4 cm, er 3 cm. Nogle grupper vil måske benytte en anden strategi, at tage 1 cm mindre end den dobbelte sidelængde af puslebrikkerne, idet 7 cm er 1 cm mindre end det dobbelte af 4 cm. Eleverne forsøger at samle puslebrikkerne. De skal indse, at begge strategier er forkerte.

8.55-9.00: 5 minutter

"Må jeg bede om alles opmærksomhed". "Jeg kan se, at de fleste af jer benytter en strategi, hvor I lægger 3 cm til puslebrikkerne". Pege på den del af puslespillet som er vist nedenfor. *"Den nedre side af rektanglet vil, ifølge denne strategi, blive forlænget med 6 cm, da der lægges 3 cm til henholdsvis 5 cm og 2 cm. Mens den øverste del af rektanglet kun vil blive forlænget med 3cm, idet den øvre del kun består af et tal, nemlig 7 cm. Så puslespillet vil derfor ikke passe sammen."* Eleverne indser at metoden er forkert.



9.00-9.02: 2 minutter

Nedenstående tabel tegnes på tavlen. *"Nu tegner jeg en tabel på tavlen, som vil gøre det nemmere at beregne de andre sidelængder. Kan I hjælpe mig med at udfylde tabellen?". "I får lige lidt tid til selv at udfylde tabellen i jeres kladdehæfter".*

Små brikker	**1 cm**	**2 cm**	**4 cm**	**5 cm**	**6 cm**	**7 cm**	**8 cm**	**9 cm**
Store brikker			**7 cm**					

<u>9.02-9.12:</u> 10 minutter

Eleverne sidder og beregner de manglende tal i deres kladdehæfter. Dette foregår individuelt.

<u>9.12-9.17:</u> 5 minutter

Tabellen på tavlen udfyldes ved, at læreren spørger forskellige elever.

Små brikker	**1 cm**	**2 cm**	**4 cm**	**5 cm**	**6 cm**	**7 cm**	**8 cm**	**9 cm**
Store brikker	**1,75 cm**	**3,5 cm**	**7 cm**	**8,75 cm**	**10,5 cm**	**12,25cm**	**14 cm**	**15,75cm**

"I skal nu bruge denne tabel til at forstørre puslespillet".

<u>9.17-9.27:</u> 10 minutter

Eleverne sidder igen og forstørrer puslespillet, som de forhåbentlig vil få til at passe sammen denne gang.

<u>9.27-9.45:</u> 18 minutter eller mindre

Afslutningsvis vil læreren formulere et generelt princip for forstørrelse. *"Når man forstørrer en genstand skal man gange alle siderne med en fast faktor. I dette tilfælde var det 1,75 eller 4/7".*

Lav link tilbage til 1. lektion. *"Kan I huske at vi i første lektion af forløbet skulle finde ud af, om to rektangler havde samme form. De havde siderne: 3 cm og 5 cm, og 5 cm og 7 cm."* Rektanglerne tegnes*."Hvis de havde samme form, ville man gange siderne med en fast faktor, men dette var ikke tilfældet her. Idet fra 3 cm til 5 cm ganges med 3/5 og fra 5 cm til 7 cm ganges med 7/5. Så det er forskellige tal man ganger siderne med".*

5. Lektion: Onsdag d. 17/06/09 kl. 8.15-9.00

<u>8.15-8.25:</u> 10 minutter

"Er der nogen af jer, der kender til nordisk mytologi?" Eleverne forklarer. *"Er der nogen af jer, der har hørt om Odin og Thor?"* Eleverne forklarer. *"Der var en anden slags væsener i nordisk mytologi, som vikingerne også troede på. De hed nemlig jætter.""Her kan I se et billede af en jætte".* Billedet vises*. "Har I hørt om jætterne?"* Her kan eleverne, hvis de ved noget om dem, forklare at de har været nogle kæmper, altså mennesker i stort format. Ellers skal læreren forklare dette, og fortsætte:

"Arkæologer har fundet, at nogle vikinger har ridset en tegning af en jættes højre øre på en sten, idet det siges, at de har set jætten. I dag har jeg taget et billede af øret med, i dets naturlige størrelse". Billedet vises. *"I skal finde ud af, hvor høj jætten er".* 6 grupper laves med ca. 3 elever i hver gruppe, og grupperne bliver nummereret. Målebånd og tegninger udleveres til grupperne. *"I skal skrive jeres udregninger ned i jeres kladdehæfter" "Alle i gruppen skal skrive".*

<u>8.25-8.45:</u> 20 minutter

Eleverne snakker sammen i grupperne og måler og beregner. De får idéer ved at se på de andre grupper. Læreren skal ikke hjælpe med mindre, at de ikke har forstået opgaven.

8.45-8.47: **2 minutter**

Grupperne spørges om deres resultat, og resultatet skrives i tabellen på tavlen af læreren.

Gruppe 1	
Gruppe 2	
Gruppe 3	
Gruppe 4	
Gruppe 5	
Gruppe 6	

8.47-8.58: 11 minutter

"En fra hver gruppe skal nu forklare gruppens metode til at finde deres løsning". Eleverne forklarer. F.eks. kan en metode være: en elevs ørelængde er blevet målt og højden af eleven er blevet målt. Forholdet er blevet fundet. Dette forhold bruges på jættens øre for at finde højden af jætten.

"Hvilken strategi synes I er mest korrekt og hvorfor?" Der diskuteres kort om de forskellige strategier.

8.58-9.00: **2 minutter**

Afslutte lektionen med at fortælle: *"Jeg kender heller ikke den rigtige højde af jætten" "For det der var vigtigt i denne time var at kunne beregne et forhold mellem jeres egen højde og øre og bruge dette forhold på jættens øre".*

6. Lektion: Onsdag d. 17/06/09 kl. 9.00-9.45

9.05-9.10: **5 minutter**

"I dag skal vi arbejde med en tegning af et hestemaleri". Vise hestemaleriet. Inddele eleverne i grupper på ca. 3 og nummerere grupperne. Hver gruppe får et ark med problemet og hestemaleriet, hvor højden er 7 cm. *"En berømt maler har malet denne hest, og der er blevet brugt 6 ml maling til maleriet. Maleren skal nu male den samme hest. Men denne gang skal maleriet være 21 cm højt. Hvor mange ml maling skal han bruge til maleriet af den forstørrede hest?"*

"I skal snakke sammen om det i gruppen, men skal skrive jeres beregninger og jeres resultat ned i jeres egne kladdehæfter".

<u>9.10-9.20:</u> 10 minutter

Eleverne diskuterer i grupperne. Læreren går rundt og lytter. Læreren må ikke hjælpe. Vi forventer, at de fleste grupper vil bruge en lineær strategi for at løse opgaven og få resultatet 18 ml. Når alle mere eller mindre har fundet et resultat, vil læreren høre alle gruppers resultater og metoder.

<u>9.20-9.26:</u> 6 minutter

"I får nu et andet ark med hesten på 21 cm". Uddeler det andet ark til grupperne. *"I får nu lidt mere tid til at overveje opgaven".* Læreren skal gå rundt og lytte og kigge. Dernæst skal læreren høre gruppernes resultater og metoder igen.

<u>9.26-9.36:</u> 10 minutter

"I får nu et ark, hvor det store maleri er inddelt i rektangler". Uddeler endnu et ark til grupperne. *"I skal finde ud af, hvor mange gange det store maleri er større end det lille maleri". "I får også nogle sakse, så I kan klippe det lille maleri ud og sætte det i det store".* Uddeler sakse.

<u>9.36-9.40</u>: 5 minutter

"Har I fundet ud af, hvor mange gange det store maleri er større end det lille maleri?" Ja. Hver gruppe siger deres svar. 9. *"Hvor mange gange mere maling tror I så, at der skal bruges af maleren?"* 9. *"I stedet for at klippe, kunne vi også have beregnet arealet af malerierne".* Beregner arealerne i fællesskab. Arealet af det lille hestemaleri: 9,3 x 7 cm = 65,1 cm^2 og arealet af det store hestemaleri: 27,9 x 21 cm = 585,9 cm^2. *"Det store maleris areal er altså 9 gange så stort. Derfor skal der 9 gange mere maling til".*

<u>9.40-9.45:</u> 5 minutter

Slutter med: *"Vi har nu set, at mængden af maling ikke afhænger af højden, som et fast tal ganget med denne". "Det er arealet af maleriet, som mængden af maling afhænger af".*

Hvis der er tid tilbage laves nedenstående tabel på tavlen, og udfyldes i fællesskab:

Højde	**7 cm**	**14 cm**	**21 cm**
Areal	**65,1 cm^2**	**260,4 cm^2**	**585,9 cm^2**
Maling	**6 ml**	**24 ml**	**54 ml**

7. & 8. Lektion: Torsdag d. 18/06/09 kl. 8.15-9.45

<u>8.15-9.00:</u> 45 minutter

Uddeler opgavehæftet til eleverne (Appendiks B). *"I skal arbejde alene i denne time" "I skal løse opgaverne i dette hæfte, hvor I også skal skrive jeres udregninger ned". "I må gerne diskutere med sidemanden om opgaverne".* Eleverne sidder og løser opgaverne, mens læreren går rundt og kigger, så det bliver nemmere at vælge nogle elever med interessante løsninger til næste lektion.

<u>9.00-9.45:</u> 45 minutter (ca. 3-4 minutter til hver opgave).

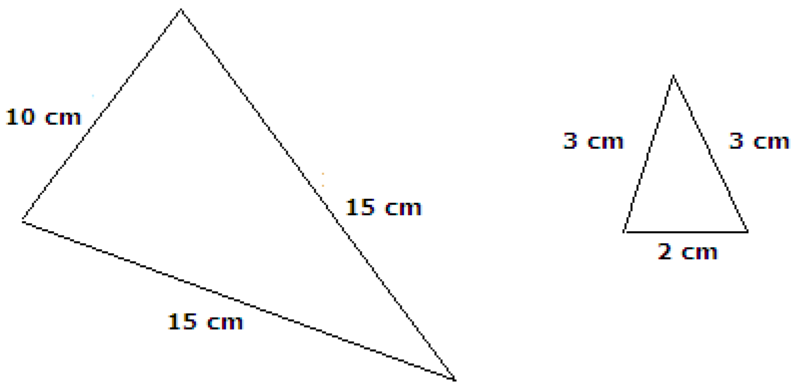
”Nu skal opgaverne gennemgås ved tavlen” ”Jeg vil bede jer om ikke at rette i jeres opgavehæfter”. Til hver opgave vælges en elev, som skal gennemgå besvarelsen på tavlen. Efter hver opgave spørges klassen: ”*Er der andre, der har fået samme resultat, men har benyttet en anden metode?”.* Hvis der er nogle, skal de forklare deres metode evt. ved tavlen.

Hvis eleven der gennemgår opgaven, har lavet opgaven forkert, skal læreren spørge klassen: *”Er alle enige med x?”* En af de elever der er uenige bedes komme op til tavlen og forklare sin besvarelse. Igen spørges: ”*Er der andre der har fået samme resultat, men har benyttet en anden metode?”.* Hvis der er nogle, skal de forklare deres metode, evt. ved tavlen.

Der kan efter hver opgave startes en lille diskussion om, hvilken af strategierne der er nemmest at bruge. Men det vil ikke være nødvendig med sådan en diskussion efter alle opgaver.

Appendiks A.2: Opgaveark til eleverne

Opgave: Se på disse to trekanter. Har de samme form?



Opgave: Jesper har cyklet 12 km på 36 minutter, og Hans har cyklet 54 km på 162 minutter. Har de cyklet med den samme fart?

Opgave: For at bage 18 kager skal man bruge 45 æg. Hvor mange æg skal der bruges til 12 kager?

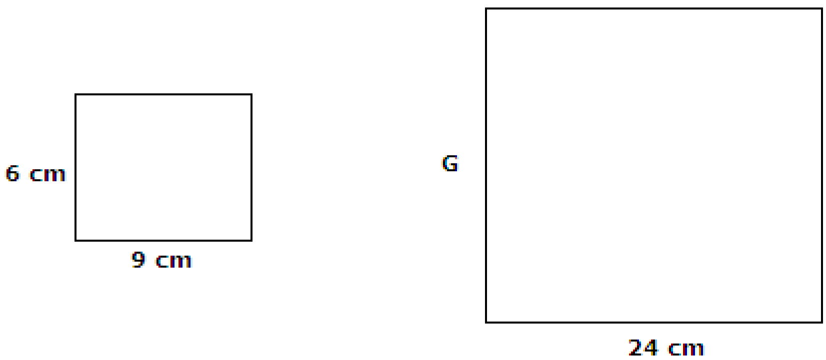
Opgave: Søren og Anders er brødre, og de har fødselsdag samme dag. Søren er 3 og Anders 5. Når Søren bliver 15, hvor gammel bliver Anders så?

Opgave: Disse to rektangler har samme form. Find H.

Opgave: For 4 kr. kan du købe 6 stykker slik. Hvad kan du få for 10 kr.?

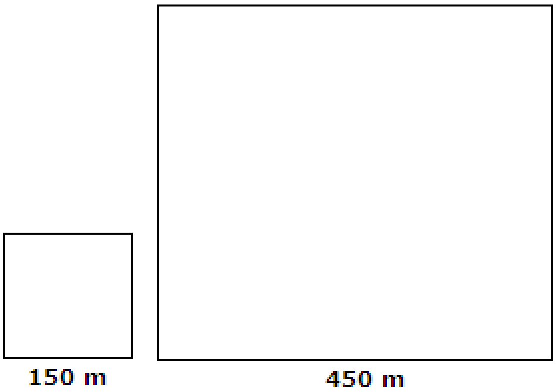
Opgave: Louise hænger 3 håndklæder til tørre udenfor. Efter 12 timer er de tørre. Anna hænger 6 håndklæder til tørre. Efter hvor lang tid vil de blive tørre?

Opgave: Disse to rektangler har samme form. Find G.



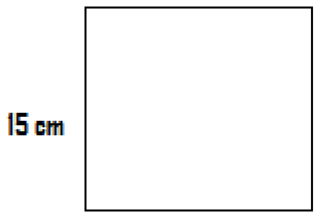
Opgave: Et togs lokomotiv er 12 m langt. Hvis der er 4 vogne forbundet til lokomotivet, er toget 52 m langt. Hvor langt er toget, hvis der er 8 vogne forbundet til lokomotivet?

Opgave: En landmand har brug for 8 timer til at så græs på et kvadratisk landområde med sidelængden 150 m. Hvor lang tid har han brug for, for at så græs på et andet kvadratisk landområde med sidelængden 450 m?



Opgave: Man kan købe en kanelsnegl, der vejer 250 gr. fra en bager A. Der er 30 gr. sukker i denne kanelsnegl. I en anden bager B kan man købe en kanelsnegl på 100 gr. med 12,5 gr. sukker i. Er andelen af sukker i kanelsneglene den samme?

Opgave: Nedenfor er der vist et kvadrat. Tegn et andet kvadrat, der har det dobbelte areal, ved først at finde sidelængden.



Appendiks A.3: Transskription

Vi har i transskriptionen valgt at bruge følgende notationer:

() For det der er blevet skrevet på tavlen eller det der bliver peget på tavlen eller handlinger.

(…) Når vi ikke kan høre, hvad der bliver sagt.

1. Lektion (Samme Form)

(Læreren har introduceret os og vores undervisningsforløb dagen inden. Derfor går han straks i gang).

Episode 1.1:

1.Lærer: Skriv jeres navne og klasse på hæftet.

2.Lærer: Mens I skriver er der nogle ting, jeg skal fortælle jer. I skal bruge kuglepenne. I må ikke slette noget af det I har skrevet. Hvis I skriver noget forkert, så lav et minus ude ved siden eller streg over en gang. Jeg skal ikke svare på spørgsmål, jeg skal kun føre diskussionen.

3.Elev: Er det en prøve?

4.Lærer: Nej slet ikke. I får ikke karakter. Optagelsen bliver ikke vist til jeres forældre. Godt. Flere spørgsmål. Nej. Lad os gå i gang så. Jeg kan ikke huske om jeg har fortalt det, men I må heller ikke bruge lommeregner. Men I skal bruge linealer. Jeg sagde i går, at I skulle huske jeres linealer. Tag dem frem nu. Ok.

5.Lærer: Er der nogle der kan forklare, hvad et kvadrat er?

6.Mogens: Alle sider er lige lange. (imens ”tegner” han et kvadrat i luften med fingrene).

7.Lærer: Alle sider er lige lange. Er der andre, der kan forklare det lidt bedre?

8.Rasmus: Det er en firkant.

9.Lærer: Firkant?

10.Rasmus: Det er en firkant, og alle sider er lige lange.

11.Lærer: Ja, det er korrekt. Erik, hvad siger du?

12.Erik: Alle vinkler i kvadrater er 90 grader.

13.Lærer: Ja, det er også korrekt, men ikke nok.

Episode 1.2:

14.Lærer: Er der nogen der kan forklare mig hvad et rektangel er? Rektangel… Rasmus?

15.Rasmus: Siderne er ikke lige lange (mens den tegnes i luften med fingrene).

16.Elev: To af siderne er lige lange og de andre to er også lige lange.

17.Lærer: Er der nogle der kan forklare det lidt bedre?

18.Hanne: Det er en firkant hvor to af siderne er lige lange og de andre to er også lige lange, men de er bare kortere end de to andre.

19.Lærer: Ja, kortere eller længere. Korrekt.

Episode 1.3:

20.Lærer: Nu skal I åbne jeres hæfter. Så skal I tegne et kvadrat med sidelængden 3 cm. I skal tegne et kvadrat med sidelængden 3 cm. (Læreren skriver opgaven på tavlen).

21.Elev: Alle siderne?

Episode 1.4:

22.Lærer: I skal nu tegne et kvadrat med sidelængde 5 cm. (Igen skriver læreren opgaven på tavlen)

23.Lærer: Ja præcis…. Korrekt… (Læreren cirkulerer rundt blandt eleverne)

24.Lærer: Er der nogle der har ekstra linealer? (Hasan giver nogle linealer)

25.Lærer: Hvem manglede lineal?

26.Elev: Jeg mangler.

27.Lærer: Ok. (Giver lineal). Er I færdige?

28.Elev: Yes

Episode 1.5:

29.Lærer: De to kvadrater I har tegnet, har de samme form?

30.Elev: ja

31.Elev: ja

32.Lærer: Hans?

33.Hans: Ja

34.Lærer: Hanne?

35.Hanne: ja

36.Lærer: Egon?

37.Egon: ja

38.Lærer: Er der nogle der siger, at de ikke har samme form? Nej. Det er rigtigt. Alle kvadrater har samme form. Lige meget hvad sidelængde de har.

Episode 1.6:

39.Lærer: Nu skal I tegne noget andet. I skal tegne et rektangel med sidelængde 3 og 5 cm. (Skriver opgaven på tavlen)

40.Lærer: Når I er færdige, skal I tegne et andet rektangel ved siden af med sidelængde 5 og 7 cm. (Skriver opgaven på tavlen. Cirkulerer så rundt i klassen).

41.Lærer: Er I ved at være der? Godt. Nu skal I skrive i jeres kladdehæfte. De to rektangler som I har tegnet, har de samme form? Ja eller nej. Det skal I skrive ned. Ingen siger noget til hinanden. I skal skrive ned, det I synes første gang I kigger på rektanglerne.

42.Elev: Samme form?

43.Lærer: Samme form. Ja, de har samme form eller nej, de har ikke samme form. Det er rektanglerne jeg spørger til. Kvadraterne er vi færdige med. (Læreren tegner rektanglerne på tavlen).

44.Lærer: Ja så har I alle skrevet jeres svar ned.

45.Elev: Ja de har samme form.

46.Lærer: Nej nej. Det har jeg ikke spurgt om endnu.

Episode 1.7:

47.Lærer: Nu skal I begrunde jeres svar. Altså hvis I har skrevet ja de har samme form, skal I forklare med de her tal (peger på tallene på tavlen) at de har samme form. Hvis I har skrevet nej de har ikke samme form, skal I forklare ved at bruge disse tal, at de ikke har samme form. Det har ikke noget med areal, omkreds og vinkler at gøre. Kig på tallene. I skal skrive ned med en sætning. I skal lave en udregning med tallene og skrive det ned.

Episode 1.8:

48.Lærer: Nu skal jeg høre… Hvem har skrevet ja og begrundet? (elever rækker hånden op). Egon kan du forklare din begrundelse?

49.Egon: Ja de har samme form, fordi 3 og 5 er plusset med 2, så 2 bliver til 5 og 5 bliver til 7.

50.Lærer: Godt. Egon du siger, at der er blevet lagt 2 til. Yes. Det er en mulighed. Er der andre der har skrevet ja de har samme form med en anden mulighed? Jens? (imens skriver læreren mulighederne på tavlen).

51.Jens: Ja de har samme form, fordi to af siderne er lige lange og begge er en rektangel.

52.Lærer: Er lige lange?

53.Egon: Ja, det er fordi der er 5 og 5.

54.Lærer: Prøv at komme til tavlen og forklar.

55.Egon: Nej, ok. (kommer til tavlen og peger på siderne i det store rektangel (3 x 5 cm)). De her er lige lange og de her er lige lange.

56.Lærer: Ok. (skriver det på tavlen) Ole?

57.Ole: De har samme form, fordi at den første har den samme længde og den anden har en anden bredde…

58.Lærer: Kan du ikke forklare det her oppe.

59.Ole: (peger på 5 cm og 5 cm på tavlen). De har den samme bredde… begge to.

60.Lærer: Ok. Hvem har skrevet nej, de har ikke samme form? (Kun en elev rækker hånden op). Hans? Hvad siger du?

61.Hans: Nej de har ikke samme form fordi i et rektangel, hvad hedder det nu? Øh…

62.Lærer: Hans, prøv at forklare det her.

63.Hans: Jeg har taget de her to tal og divideret med hinanden (peger på 3 cm og 5 cm i et rektangel) og så har jeg taget de her to tal og divideret (det andet rektangel). Det her giver 1,66 og den her giver 1,20.

64.Lærer: Du fortæller, at du har divideret. Prøv at skrive det op som brøk.

65.Hans: (skriver 5/3 og udfører divisionsstykket) Hvor mange gange går 3 op i 5, det gør den 1 gange. Så siger jeg 3 gange 1 det er 3, og 2 i rest. Der er ikke flere tal, så sætter jeg komma. Og nul her. Hvor mange gange går 3 op i 20. Det gør den 6 gange. Og så 6 gange 3 det er 18. Og så siger jeg… Det er 18 igen. Og så 2 i rest igen og så sætter jeg nul igen. Og så giver det 66. Ja. Så har jeg lavet sådan her. Hvad hedder det nu (skriver 5/7)

66.Lærer: Du behøver ikke vise divisionsstykket. Du skal bare sige, at du har divideret.

67.Hans: Så siger jeg 7 divideret med 5 (prøver at udføre stykket.)

68.Lærer: Du skal bare sige, hvad det giver.

69.Hans: Det giver 1,20.

70.Lærer: 1,20. Og hvad er det?

71.Hans: Og så har jeg fundet ud af at de ikke har samme form.

72.Lærer: Du har sagt længde divideret med bredde. Det giver et tal. Og så har du sagt længde divideret med bredde i denne rektangel giver et andet tal, og så siger du hvad?

73.Hans: At de ikke har samme form.

74.Lærer: Ok. (skriver metoden på tavlen). Nu er vi færdige med at begrunde.

75.Elever: Hvad for en var rigtigt?

76.Lærer: Egon du sagde ja, og viste plus to metoden. Nu skal du forklare Hans, hvorfor din metode er rigtig. (Stilhed.) Er der nogle andre der kan prøve?

77.Elev: Hvad?

78.Lærer: Egon har sagt, at man lægger to til og derfor har de samme form. Hans sagde, at man skal dividere længder og bredder, som giver forskellige tal. Derfor har de ikke samme form.

Episode 1.9:

79.Lærer: Nu skal I overbevise hinanden om, hvilken der er rigtig. Jeg siger ikke noget. Betina?

80.Betina: Den med plus to. For de korte af siderne, den ene er på 3 cm og den anden på 5. Så der er 2 cm igen eller der er plusset med 2.

81.Lærer: Ja 3 er plusset med 2.

82.Betina: Og så den anden, de lange linjer. Den ene er på 5 og den anden er på 7. Så 5 er også blevet plusset med 2.

83.Lærer: Ja, det var den ene mulighed. Men hvilken er rigtig? I skal overbevise hinanden. I skal være stærke i jeres argumenter. Hans?

84.Hans: Det er min der er rigtigt, fordi jeg har divideret og så har jeg fået resultatet.

85.Lærer: Overbevis de andre. Overbevis Betina. Hun siger det er den her. (Stilhed)

86.Lærer: Så er denne diskussion færdig.

87.Elev: Kan du sige, hvad for en der var rigtig?

88.Lærer: Nej det kan jeg ikke.

Episode 1.10:

89.Lærer: Men nu skal jeg vise jer noget. (tegner de to rektangler på 1 cm x 7 cm og 3 cm x 9 cm). Har de to rektangler samme form?

90.Elever: Nej!

91.Elev: Ja fordi at der er igen plusset med 2 på begge sider. Så de har samme form.

92.Lærer: Men synes du det ser ud som om, at de har samme form? Jeg beder ikke om en udregning.

93.Elev: Nej.

94.Lærer: Nu er I vist alle enige om, at de to ikke har samme form. Men I kan se, at der er blevet lagt to til begge sider. Altså 1 plus 2 er 3 og 7 plus 2 er 9.

(Det ringer ud).

2.lektion.

Episode 2.1:

95.Lærer: Nu skal I lave gruppearbejde. Gruppe 1 Gitte, gruppe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Godt. Det I skal gøre nu, er at jeg har fire forskellige papirer. Vi har blåt, linjeret papir, og så et lidt lillaagtigt papir, og så hvidt. De er af forskellige farver. De har også forskellige tykkelser. I får nu, hver gruppe får blåt papir, og så skal I finde ud af, hvor tykt det her er. I skal skrive udregningerne ned i jeres hæfte. Og ikke sådan noget med at de her, de er i samme gruppe og så det er kun Hanne der skriver ned. Nej, alle skriver ned. Alle udregningerne, hvordan I har fundet frem til resultatet skrives ned. Hvordan I har målt eller beregnet. Når I er færdige, så må I gerne bytte mellem jer. Men når jeg har delt fx det her blåt til jer når I skal måle, så lægger jeg resten på bordet. Hvis I får brug for flere papirer, så må I gerne komme op og tage flere stykker. Altså hvis det bliver til en hjælp til jer.

96.Maria: Skal vi gøre det med alle papirerne eller kun det blå?

97.Lærer: Alle papirerne. I bytter mellem jer.

98.Lærer: Alle grupperne skal igennem alle farver. I har fået lilla, i har fået blå, og så er der nogen, der har fået linjeret papir.

99.Elev: Vi har ikke fået noget.

100.Lærer: I får en hvid. For eksempel, når Hanne jeres gruppe, I har målt det her ikke? Og I var gruppe hvad? 7. Så kommer I op så skriver I, at I har målt lilla og så skriver I hvor tykt det er. Og så bytter I med andre der er færdige og så går I i gang med det. I hæftet skal I skrive udregninger til, hvordan I har fundet denne tykkelse. Fordi med lineal er det lidt svært at måle. I må gerne bruge flere af dem her, hvis I får brug for det. Jeg siger ikke, at I skal måle det. I skal finde frem til en metode til at finde, hvor tykt det her er. Det er det I skal arbejde med i gruppen. I får ca. 20 minutter til det. Arbejd sammen. Jeg skal nok gå rundt.

(Gruppearbejde).

Episode 2.2:

Vi har ingen transskriptioner til starten af denne episode.

101.Lærer: Ok, gruppe 6, hvordan har I gjort det? Hvordan har I målt hvidt?

102.Egon: Lilla?

103.Lærer: Lilla ja…

104.Egon: Vi har målt bredden med lineal, og det blev til 0,1 mm.

105.Lærer: Hvordan har I gjort det, er det for et stykke papir eller for ti stykker papir, eller 100 stykker papirer?

106.Egon: Enkelt papir.

107.Lærer: Et enkelt stykke papir. I har taget et enkelt stykke papir, og målt det med en lineal. Var det ikke svært?

108.Egon: Jo

109.Lærer: Det er meget svært, og det er sikkert meget upræcist.

110.Lærer: Gruppe 7. Hvordan har i målt blåt papir?

111.Betina: Vi tog ti stykker papir af det blå.

112.Lærer: Kom lige op til tavlen og vis det. Du må også lave udregningen på tavlen.

113.Betina: Vi har ti stykker papirer, og så har vi målt dem, og det giver 0,3 cm. Så dividerer vi det, og det bliver 0,03. Og det er cm, så skal vi gøre den til mm. Så ganger man med ti. Og det giver 0,3 mm.

114.Lærer: Det er en mulighed.

115.Lærer: Hans, hvad er jeres metode til at beregne det?

116.Hans: Vi tager 20 stykker papirer. Der får vi det til 0,2 mm. Og så har vi taget 10 stykker. Det giver 0,1 mm. Så har vi taget 5 stykker. Det giver 0,05mm. Og så dividerer vi med 5, som giver 0,01 mm.

117.Lærer: Ok.

Episode 2.3:

118.Lærer: Konklusionsmæssigt. Hvad har I lært nu? Vi har generelt den samme metode. Vi er ikke ude efter et forkert eller rigtigt resultat. Det er hvilken metode I har brugt, og om metoden er rigtig eller forkert. Hvad kan man sige generelt? F.eks. hvis I skal veje en nål, hvordan ville I gøre det?

119.Betina: Man kan tage de der, man vejer med i køkkenet. Så kan man tage 10 af dem.

120.Lærer: Ja præcis. Man kan måle 10 af dem, og så dividere det med 10 for at få, hvad en nål vejer. Når man skal måle eller veje små ting, bruger man denne metode. Det er umuligt at måle det her papir med lineal. Der findes noget papir, der er meget meget tyndere. Så tager man 100 stykker, 500 stykker, 10 stykker. Så kan i måle dem til 1 cm, 0,5 osv. Så kan I dividere med antal stykker I har taget. Forstået? Godt.

3. og 4. lektion: Puslespillet

(Lektionen startes med at læreren laver grupper, og eleverne rykker rundt til deres gruppemedlemmer).

Episode 3.1:

121.Lærer: I sidder i grupper. Nu skal I lave et puslespil. Hvor mange brikker er der. 1, 2, 3, 4, 5, 6 forskellige brikker (tæller på figuren), og I er max 5 i en gruppe, så alle har et lille brik, som de kan forstørre. Det her puslespil I får (tager et lille brik af puslespillet ud af konvolutten og viser denne) fx har I den her del, ikke? Det er nok det der lille stykke (viser den tilsvarende brik på tavlen). Det skal forstørres. Det skal så forstørres sådan, at den her 4 (peger på tavlen) skal blive til 7 cm. (skriver 7 cm på tavlen). Er I med?

122.Elev: Ja.

123.Lærer: Det skal forstørres…

124.Elev: Skal den forstørres med 3?

125.Lærer: Shhh. Det ved jeg ikke. Det her puslespil skal forstørres. I får papir, sakse så I kan klippe klistre osv. Det her 4 skal blive til 7. Hvad de andre bliver, det siger jeg ikke noget om endnu. I prøver lige. Ok? Efter 20 minutter siger I om det passer eller om det ikke passer. Spørgsmål? Nej. Men I har alle sammen forstået at det her 4 skal blive til 7 (peger på figuren). Men I skal huske en ting, der er flere brikker så alle i grupperne... Hans hør lige efter… der er flere brikker, 6 brikker i alt, så nogle, i jeres gruppe fx skal nogle forstørre to brikker (peger på en gruppe) og jeres gruppe (peger på en anden gruppe) skal nogle forstørre 3 brikker måske. Men alle skal forstørre en lille puslespilsbrik, ok? I får lige jeres brikker (deler konvolutterne ud samt papir og sakse).

(Gruppearbejde).

Episode 3.2:

126.Lærer: I har fået puslespillet og jeg har sagt 4 bliver til 7. Og så kan jeg se, alle grupper, alle medlemmer af grupperne har sagt, at der skal lægges 3 til. I har sagt 4 plus 3 det giver 7. Og så har I lagt 3 til alle siderne. Hvad har I så fundet ud af?

127.Elev: At det ikke passer.

128.Lærer: Det passer ikke. Så det at lægge 3 til alle sider det passer ikke.

Episode 3.3:

129.Lærer: Lad os kigge på den her side nu. Kan I se den her firkant. Nu skal jeg lige tegne den lidt bedre (markerer et stykke af puslespillet). Kig lige på denne her. Den samme har jeg tegnet ved siden af. Det her 2, hvis jeg nu bruger jeres metode og lægger 3 til. 2 bliver til hvad?

130.Elever: 5

131.Lærer: 5 (skriver) Hvad bliver det her? Det er 5, men jeres metode siger, at der skal lægges 3 til.

132.Elever: 8

133.Lærer: 8 cm (skriver). Det her giver?

134.Elev: 5. 10. 10.

135.Elev: Der står også 2 jo.

136.Lærer: Hvor? Jamen denne her 2 giver 5. Læg mærke til en ting. Kan I se fejlen her? Prøv at lægge de to tal sammen, hvad giver det?

137.Elev: 13.

138.Lærer: Den her side er på 10. Så det er umuligt at det kan passe. Jeres metode at lægge 3 til, den virker ikke. Det er derfor, at I har fået, at det ikke passer. Det bliver skævt. Godt.

Episode 3.4:

139.Lærer: Nu skal jeg vise en anden metode til at hjælpe jer. Så skal I bruge den. Ja I skal lave videre ja. Metoden kommer automatisk frem. Til sidst skal vi runde af med at sige, hvordan I gør det normalt. Jeg skal skrive noget på tavlen. Det jeg skriver ned, skal I skrive ned i jeres hæfte med kuglepen selvfølgelig. Og det er alle.

140.Elev: Hvad står der?

141.Lærer: Små brikker og store brikker. De små brikker er de orange, som I fik udleveret i kuverterne. De store brikker er dem, som I selv skal tegne.

(Elever tegner i hæftet, mens læreren cirkulerer rundt i klassen)

142.Lærer: I er ved at være der, kan jeg se. Prøv lige at høre med Rasmus. Nu skal I hver af jer, I må gerne snakke lidt sammen, udfylde den her tabel. Når I har gjort det, så kan I tegne meget præcis de store brikker. 4 bliver til 7. 4 i de orange brikker bliver til 7 cm. Resten skal I udfylde i jeres hæfter. Det kan I godt ikke?

143.Elever: Nej.. jo.. nej..

144.Lærer: Prøv lige at kigge. 4 bliver til 7 hvad bliver f.eks. 8 til?

145.Elev: 11?

146.Elev: 14?

147.Lærer: (skriver 14). Det vil sige 8 blev ikke hvad?

148.Elev: 11

149.Lærer: Det blev ikke 11. Det blev 14. Nu har I forstået det, ikke? 4 bliver til 7 cm, så sagde Michael, jamen 8 er det dobbelte af 4, så må det her også være det dobbelte af 7.

150.Lærer: Nu må I gerne fortsætte.

(Elever udfylder tabellen mens læreren cirkulerer rundt i klassen).

151.Lærer: Nu skal vi udfylde tabellen. Hvad bliver 1 cm til?

152.Elev: 1,75

153.Lærer: Faktisk, er det her det vigtigste (1,75 cm). For hvis man kan det her, så kan man bare gange det op.

154.Elev: 5,25

155.Lærer: Hvad siger du?

156.Elev: 5,25.

157.Elev: 8,75

158.Elev:10,5

159.Elev: 12,25

160.Elev: Den sidste er 15,75

Episode 3.5:

161.Lærer: Nu skal I igen tegne puslespilsbrikkerne med de her størrelser. 5 cm bliver til 8,75 cm. 8 cm bliver til 12,25 cm. Nu har I ca. 25 min.

(Gruppearbejde).

Episode 3.6:

162.Lærer: Jeg kan se, at alle nu har tegnet rigtigt. Det er rigtig fint. Når man skal forstørre en genstand fx borde, billeder, malerier al mulig ting eller formindske dem, skal de alle sammen forstørres med en fast faktor. Fx kig på tabellen, hvis 4 bliver 7. Og jeg sagde hele tiden, at det der var vigtigt var at finde, hvad 1 cm svarer til. Det her har I fundet ud af (peger på 1,75), det er en fast faktor. Dvs. 1 cm svarer til 1,75 i de store brikker.

5. Lektion: Jættens øre

Episode 5.1:

163.Lærer: Har I hørt om mytologier? For eksempel i dansktimerne eller af Gülten (religionslærer) i religionstimerne? Har I hørt noget om det i jeres gamle skoler?

164.Elever: Nej

165.Elever: Ja

166.Egon: Det er græsk mytologi.

167.Lærer: Græsk mytologi, det kan det være. Hvad kender I der?

168.Egon: Det er de der tal.

169.Lærer:Det er romertal, det er ikke det. I har slet ikke hørt noget om mytologier?

170.Ole: Jo det er græsk mytologi, guderne og sådan noget.

171.Lærer: Jo der er guder

172.Ole: Så er der deres religion og sådan noget

173.Lærer: Gamle vikinger, de troede på forskellige mytologier, fx Odin, Thor. Odin var gudernes gud. Thor fx, Thor var tordenens gud. Så er der solguden, der er krigsguden. Frihedsgudinden Freja. Og så er der også noget der hedder jætter. Jætter de var nogle kæmper.

174.Elev: Hvad er det?

175.Lærer: Sådan nogle kæmpe store mennesker. Arkæologer har fundet, at vikingerne har ridset en jættes øre på en sten. Det her(viser øret) det er denne her, der er ridset på en sten. De siger at de har set den og ridset den. Det her øre er den rigtige størrelse, den naturlige størrelse der er blevet ridset. Om lidt får hver gruppe sådan en. Ud fra dette øre, skal I finde ud af, hvor høj jætten er.

176.Elev: Hvad er jætten?

177.Lærer: Jætte det er noget der eksisterede i mytologiernes tid. Der er deres overtro, hvor man siger, at der var nogle guder og så var der jætter, der var alfer. Jætter var nogle kæmpe store mennesker af menneskeskikkelse. De var nogle kæmper. Men hvor høje de var, ved vi ikke.

Episode 5.2:

178.Lærer: Det skal vi så beregne i dag. Men de var meget høje faktisk. I får dette billede som er jættens øre, der er blevet ridset på en sten. Ud fra det skal finde ud af, beregne, hvor høj jætten kan være. Jeg forklarer ikke, hvordan i skal gøre det. Det eneste jeg kan sige er, at der er målebånd her.

179.Ole: Hvor lang er målebåndet?

180.Elev: En meter.

181.Lærer: Det er en meters målebånd. Men det får i også til hver gruppe. Så kan I finde nogle tricks, strategier, metoder til at finde ud af, hvor høj jætten kan være ud fra jætten venstre øre.

182.Elever: Det ligner dit øre.

183.Lærer: Spørgsmål? Og inden i går i gang, alle udregningerne skriver I i jeres hæfter. Og det er ikke en fra hver gruppe der skriver, men alle deltagere i grupperne skriver udregninger

(Gruppearbejde, hvor læreren cirkulerer rundt og hjælper grupperne)

Til sidst ser tabellen på tavlen således ud:

Gruppe 1	756 cm	7,56 m
Gruppe 2	1429 cm	14,29 m
Gruppe 3	3520 cm	35,20 m
Gruppe 4	810 cm	8,1 m
Gruppe 5	783 cm	7,83 m

Episode 5.3:

184.Lærer: Der er fem grupper. I har alle sammen regnet ud. I har fået disse resultater (peger på tabellen på tavlen). Det er nemmere at snakke om det, når vi har det i meter. De er nogle høje tal. Hvor mange meter giver det her Egon (peger på gruppe 1's resultat)?

185.Egon: 7 meter og 58 cm.

186.Gruppe 2: 14,29 m.

187.Gruppe 3: 35,2 m.

188.Gruppe 4: 8,1m.

189.Gruppe 5: 7,83m.

190.Lærer: Vi starter lige med gruppe 1. Hvordan har I regnet det ud? I andre venter så skal I diskutere om det er rigtigt eller forkert. Jeg skal ikke sige noget. For at kunne sige noget, skal I høre efter. Erik eller Benny?

191.Erik: Først har vi målt jættens øre. Den er 29 cm lang. Så har vi målt Frederik. Han er 1,67 cm, nej, 1, 67 m høj.

192.Lærer: Ja

193.Erik: Så har vi ganget de to med hinanden. Så har vi målt Frederiks øre. Så har vi divideret med det resultat vi fik ved at gange 29 med 167.

194.Lærer: Gruppe 2.

195.Signe: Vi har målt jættens øre. Og så har vi målt Annes højde og øre. Og så Annes højde ganget med jættens øre. Øh…

196.Lærer: Nej nej, det er rigtigt, fortsæt.

197.Signe: Og så dividerede vi med 4.

198.Lærer: Dvs. Annes højde gange jættens øre delt med 4.

199.Signe: Ja

200.Lærer: Hvad er 4?

201.Anne : Det er mit øre.

202.Lærer: Det er Annes øre. Det ligner lidt jeres (peger på gruppe 1). Michael jeres gruppe, hvad har I?

203.Michael: Vi har taget jættens øre. Det var 29 cm. Så har vi taget vores eget øre, 6 cm. Så har vi sagt 6 op til 29 det er 22. Og egen højde det var 160. Så har vi sagt 160 gange 22. Og det er lig med 3520cm.

204.Lærer: 35 meter høj og de har fået omkring 7 meter. Det er lidt voldsomt, men måske har I lavet nogle regnefejl. Hans hvad har I lavet? Kan du forklare det?

205.Hans: Vi målte min højde. Den var 162.

206.Lærer: Bare lad vær med at bruge tal.

207.Hans: Så målte jeg mit øre. Så tog jeg jættens øre og så talte jeg hvor mange gange mit øre kunne være i jættens øre. Øret kunne være fem gange.

208.Lærer: Dvs. dit øre op til jættens øre

209.Hans: Ja, der kunne den være fem gange.

210.Lærer: Ja

211.Hans: Så tog vi min højde gange med øret og så divideret med ...og så fik vi resultatet.

212.Lærer: Ja, Betina jeres…

213.Betina: Vi målte vores alles øre og højde, så har vi så sagt, så har vi så sagt højde divideret med vores øre. I centimeter. Der er så et fælles forhold på 27. Så har vi så sagt jættens øre ganget med de der 27. Og så har vi så fundet dens højde.

214.Lærer: Godt.

Episode 5.4:

(Læreren vælger Betina og Michael til at forklare deres metoder ved tavlen. De skriver op).

215.Lærer: I andre må også gerne sige noget til sidst.

216.Lærer: Betina du starter med at forklare. Du skal ikke forklare det til mig, du skal forklare det til klassen og til Michael. Du skal overbevise Michael og Michael skal prøve at overbevise dig.

217.Betina: Elses øre er 6 cm og hendes højde er 162. Så dividerer vi hendes højde med øret. Og det bliver så 27 cm. Og det har vi også gjort med Michelles og min, og det blev også noget med 27. Så siger man så jættens øre ganget med resultatet, 27, og det blev… det er sådan en formel, øre divideret med højde er lig med forhold. Og så når man rykker øret over på den anden side så bliver det gange.

217.Lærer: Du finder forholdet (sletter cm på tavlen) Yes. Michael hvad har du gjort?

218.Michael: Jeg har taget jættens øre, det var 29. Menneskeøret er 6 cm. Så har jeg sagt hvor meget er der fra 6 op til 29. Og der er 22.

219.Lærer: Når du siger op til så tænker man division. Hvor mange gange går 6 tabellen op til 29. Dvs. du har sagt 29 minus 6 og det giver…

220.Michael: 22.

221.Lærer: 22, ja.

222.Michael: Og så har jeg taget menneskets krop, det giver 160. Og så har jeg sagt 160 gange 22, og det giver det her.

223.Lærer: Ok, overbevis hinanden nu. Hvorfor er det rigtigt?

224.Elev: Det er Betinas der er rigtigt.

225.Betina: Jeg skal finde dens højde, ikke? Vi har jo øret som… jættens øre. Så…

226.Lærer: Ja du har jættens øre Betina, ja det er rigtig nok.

227.Betina: Så måler vi vores egen og så skal vi så finde dens højde. Så måler vi vores egen..

228.Michael: Hvordan finder man…

229.Betina: Ja,

230.Lærer: Forklar hvordan du har gjort det Betina. Du har din højde og dit øre.

231.Betina: Ok, for at finde dens forhold ikke? Så måske er det så... ej, jeg kan ikke forklare.

232.Lærer: Du har din højde.

233.Betina: Ja når man har højden og øret ikke? Og når man dividerer det finder man forholdet mellem…

234.Lærer: Forholdet mellem…

235.Betina: Forholdet mellem højde og øre.

236.Lærer: Godt.

237.Betina: Og så det skal man også gøre med jættens øre og dens højde. Så for at finde dens højde så dividerer vi og så får vi 27.

238.Michael:…

239.Betina: Det er lige meget. Det er bare 27. Det gjorde vi med os alle sammen. Og så tilfælles var der et tal, der var 27, ikke? Så for at finde den, sagde vi så jættens øre ganget med forholdet, ikke? Så får man højden, dvs. en formel.

240.Lærer: Du kan skrive det.

241.Betina: Øre divideret med [øre/højde = forhold]

242.Michael: Hvilket øre? Er det menneske øre eller hvad?

243.Betina: Det er bare en formel. Øre divideret med højde er lig med forhold. Dvs. det vi har gjort med jættens øre, ikke? Vi har sat, vi har taget øret over på den anden side, så det bliver gange med øre. Og så er det er lig med højde. Har du forstået?

244.Lærer: Prøv lige at vise det. Prøv lige at lave en pil.

245.Betina: Så tager vi den der over i den anden side [øre over på den anden side af lighedstegnet]

246.Lærer: I andre følger med, ikke?

247.Betina: Det bliver til… og så er det lig med højden. Kan du forstå det? [forhold x øre = højde]

248.Lærer: Skriv en ny linje med øret.

249.Betina: [skriver noget på tavlen]

Episode 5.5:

250.Lærer: Godt. (Eleverne sætter sig ned) Det vi kan sige nu herover, det som Betina har fundet ud af. Det er Elses øre og det er Elses højde (peger på tallene på tavlen, som Betina har skrevet op). Så har de fundet ud af at forholdet mellem de to, Elses krop og Elses øre. Elses øre er 27 gange mindre end hendes egen krop. Det er forholdet. Så siger hun, at så må jættens øre også være i forhold til jættens krop. Hvor mange gange kan jættens øre være i hans krop. Og så har hun fundet forholdet og ganget med jættens øre. Og så siger hun, at det bliver 7, 66 meter høj, og det passer meget fint. Fordi de er i forhold til hinanden.

251.Elever: Ja.

6. Lektion

Episode 6.1:

252.Lærer: En kendt maler har malet denne hest (viser maleriet). Maleren har brugt, lad mig lige tage et kridt, (tegner et rektangel på tavlen). Vi har det her hestemaleri. Højden er 7. Bredden er 9,3. Det står herover. Maleren har brugt 6 ml maling. Nu vil han gerne tegne den i større format. Det skal være på, det var (kigger i sine papirer). Det skal være på 21 cm (tegner den store rektangel). Spørgsmålet er, hvor mange ml maling skal han bruge? Jeg siger ikke andet. I får lige jeres heste. Udregningerne skrives ned i jeres hæfte.

(Gruppearbejde)

Episode 6.2:

253.Lærer: Hvad har I fundet ud af? (peger på gruppe 1)

254.E: 12.

255.Lærer: Hvad har I lavet?

256.Erik: Jeg har bare gættet lige nu.

257.Lærer: Ok. Hvad siger jeres gruppe? (peger på gruppe 2)

258.Elev: 18

258.Lærer: Hvordan har I gjort det? Else?

259.Else: Vi har sagt 6 gange 3

260.Lærer: I har sagt 6 gange 3, hvorfor 3?

261.Elev: Fordi 7 og 21 er 3-dobbelt.

262.Lærer: Ok. Hvad siger I? (gruppe 3)I er stadigvæk i gang. I siger (peger på gruppe 4)?

263.Elev: 18

264.Lærer: Dvs. I siger også at 21 er 3 gange..

265.Elev: Nej jeg siger at det er 12. Fordi hvis du siger at det er 3 gange så gør du sådan her. For ... ml det giver, så bruger han næsten 2 liter maling på en stor hest, så jeg vil gerne sige det er 12, så bruger han…

266.Lærer: Du siger 12 ml i alt. Hvad siger I(gruppe 5)?

267.Betina: Vi siger 18.

268.Lærer: I siger også 18. I siger at 21 er 3 gange større end 7, så må malingen være 3 gange så meget, ikke? Så er det ligesom gruppe 2.

Episode 6.3:

269.Lærer: I får et nyt maleri. Det kan måske hjælpe lidt mere til at forstå det. Det her... der skal lige tænkes lidt mere over det (uddeler hestemaleri som er 21 cm høj). Det er den med 21 cm.

(Gruppearbejde)

Episode 6.4:

270.Lærer: Gruppe 1, hvad har I fundet?

271.Erik: Skal jeg bare sige resultatet eller skal jeg forklare?

272.Lærer: Sig resultatet og forklar bagefter.

273.Erik: Vi fik det til 8,15

274.Lærer: 8,15. Hvordan har I lavet det?

275.Erik: Det der det giver jo 21 cm.

276.Lærer: Ja

277.Erik: Fordi det er ganget med 3, så ganger vi det her med 3 og det giver 27,9. 21 plus 27,9 det er 48,9. Og vi dividerer med 6.

278.Lærer: Dvs. du lægger højden og bredden sammen, ikke?

279.Erik: Ja.

280.Lærer: Du lægger højde og bredde sammen, og hvad siger du så mere?

281.Erik: Jeg dividerer med 6.

282.Lærer: Og så deler du med 6, fordi du har 6 i det første. Og resultatet siger du?

283.Erik: 8,15.

284.Lærer: 8,15. Gruppe 2, hvad har I lavet? Hvad har I fået?

285.Else: Vi har fået 18.

286.Lærer: I har fået 18. Forklar hvorfor?

287.Elev: Vi har sagt 9,3 gange 3. Det giver 27,9. Det er ligesom første gang.

288.Lærer: Gruppe 3. Hvad har I lavet?

289.Elev: Vi har sagt 7 gange 3 det giver 21.

290.Lærer: …

291.Elev: 3 gange 7. Det giver 21. Det er bredden. 9,3 gange 3 det er 27,9 divideret med 6, det er 4,1.

292.Lærer: Dvs. jeres metode er det samme som Eriks og Bennys metode.

293.Elev: Ja.

294.Lærer: Ok. Hvad har I lavet (peger på gruppe 4)?

295.Elev: Vi har klippet den her ud (lille hestemaleri)og sagt hvor mange gange kan den være i den store hest. Det kan den være 9 gange. Og så var der 6 ml i denne her (lille hestemaleri), og 6 gange 9 giver 54.

296.Elev: Så vi har fået det til 54 ml maling.

297.Lærer: Ok. Hvad har I lavet (gruppe 5)?

298.Elev: Vi har lavet…

299.Lærer: Hvad har I fået?

300.Elev: Vi har fået 54. Men det er ikke som dem (peger på gruppe 4).

301.Lærer: Ok. Hvad har I lavet?

302.Betina: Det lille billede. Vi har fundet dens areal. Og så har vi fundet den stores areal. Og så har vi sagt det lille billede svarer til 6 millimeter.

303.Lærer: Maling?

304.Betina: Milliliter. Og så har vi sagt den stores areal svarer til et eller andet ml. Og så har vi så gjort…

305.Lærer: Kryds over metoden. Hvad giver det sagde du?

306.Betina: 54.

307.Lærer: I fik også 54, ikke? (peger på gruppe 4)

308.Elev: Ja.

Episode 6.5:

309.Lærer: Godt. I får lige det sidste billede. Og så kan I lige prøve igen.

310.Elev: (fra gruppe 4)Det er rigtig vores. Nu får vi dem i tern.

(Gruppearbejde)

Episode 6.6:

311.Lærer: Yes vi fortsætter, gruppe 2 hvad har I fået?

312.Elev: 54.

313.Lærer: 54 hvad?

314.Elev: Milliliter.

315.Lærer: Milliliter maling. Hvordan har I gjort det?

316.Elev: Vi har sagt 6 gange med 9.

317.Lærer: Du har sagt, hvad?

318.Elev: 6 gange 9.

319.Lærer: Hvorfor siger du 6 gange 9?

320.Elev: Det er den her (lille hestemaleri). Den kan være 9 gange.

321.Lærer: Det lille hest kan være 9 gange på det store. Det er ligesom Mogens' metode (gruppe 4). Ole hvad har I lavet?

322.Ole: Vi har lavet den samme metode.

323.Lærer: Dvs. tage det lille billede og overføre det til det store billede.

324.Ole: Ja.

325.Lærer: Dvs. der er kommet to metoder frem og to metoder der er vidt forskellige. Det lille maleri med hesten kan være 9 gange. 9 gange. I har klippet og prøvet at gøre det. Dvs. der kan være 9 gange mere, så må malingen også være 9 gange så stor. 6 gange 9, det er så?

326.Elev: 54.

327.Lærer: Godt. Men Betina har brugt en anden metode. De har regnet det ud. De har ikke brugt den her med at tage det lille hest og sætte det op 9 gange. Betina prøv lige at komme op og forklare eller Else eller Michelle.

(Betina kommer til tavlen og skriver):

A= h x b	A= h x b
A= 9,3 x 7	A= 27,9 x 21
A= 65,1 cm^2	A= 585,9 cm^2

65,1 – 6 ml

585,9 – x

585,9 x 6 ml = 3515,4/65,1 = 54.

328.Betina: Det her er den lille figurs areal og det er den stores. Så gør man… 65,1 svarer til 6 ml, og så den stores areal svarer til et eller andet ml. Og så ganger man og dividerer.

(Det ringer ud).

Episode 6.7:

329.Lærer: Hør lige efter i 2 minutter. Det her det er areal for det lille maleri og det er for det store maleri. Udmærket. Forholdet mellem de her to er 9 gange. Så må malingen der er blevet brugt til maleriet også være 9 gange mere. Også får man 54 ml maling. Tak for i dag.

8.lektion

OPGAVE 1

330.Lærer: Hvem vil gerne komme til tavlen og gennemgå den(1.opgave)? Rasmus.

331.Rasmus: Må jeg gerne tage mit papir med?

332.Lærer: Ja det må du gerne

333.Rasmus: Jeg har skrevet ja

334.Lærer: Du har skrevet ja

335.Rasmus:…

336.Lærer: Rasmus prøv lige at vende dig om og snak til klassen.

337.Rasmus: Jeg har sagt ja, fordi de har samme form. Fordi hvis man ganger 2 med 5 giver det 10, og hvis man ganger 3 med 5 giver det 15. Så er de meget…

338.Lærer: Prøv lige at vise det på tavlen.

339.Rasmus: (tegner de to trekanter på tavlen)hvis man fordobler den der (3 cm) op til den der (15 cm) så er det 5 gange. Og hvis man ganger den der (2 cm)med 5, så giver det det der (10 cm).

(Skriver): 3 x 5 = 15

2 x 5 = 10

340.Lærer: ja, er der nogen der siger noget andet, eller har en anden metode til det? Betina.

341.Betina: Jeg har også skrevet ja, men jeg har så skrevet at begge to er ligebenede.

342.Lærer: Begge to er ligebenede. Du mener at de to trekanter har lige lange ben ikke? (peger på trekanterne på tavlen). De har samme form ja. Det er rigtigt. Men du siger at de har samme form fordi at de er ligebenede. Ud fra ligebenede trekanter kan man ikke konkludere, at de har samme form. Alle ligebenede figurer har ikke samme form. For eksempel (tegner to ligebenede trekanter på tavlen) de her to trekanter (ryster på hovedet). Ud fra ligebenede trekanter kan man ikke konkludere, at de har samme form. Man er nødt til at finde ud af hvor mange gange den her side bliver fordoblet (peger på siden på 3 cm)og hvor mange gange den her side (peger på siden på 2 cm)bliver fordoblet. Og hvis de har samme.. fælles faktor så er det fint nok. Opgave 2. Er der andre end Rasmus eller skal jeg bare vælge en? Rasmus. (kommer til tavlen) Hvad siger du Rasmus?

OPGAVE 2

343.Rasmus: Jeg har sagt nej, de har ikke cyklet med samme fart, fordi de….

Skriver: 42+ 12 = 54

42+54 = 96

344.Lærer: Prøv lige at forklare lidt mere Rasmus. Der er garanteret andre der har løst den på en anden måde, ikke?

345.Rasmus: Jesper har cyklet 54 km, og …

346.Lærer: Er der andre der gerne vil løse den? Betina? Skriv bare på venstre side.

347.Betina: (skriver 36)

348.Lærer: Prøv lige at skrive enhederne op?

349.Betina: Hvad?

350.Lærer: Er det æbler? Bananer?

351.Betina: Jamen jeg skal jo plusse

(skriver 36 min + 12 km= 48 og 54 min +162 km = 216. 48/2 = 24 og 216/2= 108).

352.Lærer: Betina prøv lige at forklare det til klassen. Hvad har du lavet?

353.Betina: jeg har fundet at de ikke er det samme fart, fordi jeg har fundet det gennemsnitlige fart også..

354.Lærer: Prøv lige at sige det igen.

355.Betina: Først har jeg fundet Jespers gennemsnitsfart. Det er jo om det er samme fart. også har jeg så også fundet det samme ved Hans. Også har jeg så fundet ud af at jesper han kører på 24 i gennemsnit og Hans på 108. Og 24 den går ikke op i 108.

356.Lærer: Spørg klassen. Hvad siger I? Benny.

357.Benny: det er næsten det samme.

358.Lærer: det er næsten det samme. Er du sikker?

359.Benny:…

360.Lærer: Er der andre der har løst den med en anden metode? Har alle løst på den her måde?

361.Elev: Nej

362.Lærer: Nej. Hvad har du gjort Jens?

363.Jens: …

364.Lærer: Det kan du ikke vide. Prøv lige at forklare det. Hvad har du fået?

365.Jens: Jeg gider ikke.

366.Lærer: Jo, kom nu.

367.Jens: Nej

368.Lærer: Den her metode(peger på det Rasmus har skrevet på tavlen) det går ikke. Den her (peger på Betinas metode) det går heller ikke. Hvorfor gør de ikke det? Kom nu. Jens?

369.Jens:…

370.Lærer: Ja prøv at fortælle hvordan du har gjort.

371.Jens: Går 12 op i 36.

372.Lærer: Hvad har du sagt?

373.Jens: Går 12 op i 36.

374.Lærer: Det vil sige 36 delt med 12 km (skriver 36/12 på tavlen), ikke?

375.Jens: Ja

376.Lærer: Hvad har du mere sagt?

377.Jens: Det samme med 54 op i 162.

378.Lærer: Prøv at sige det højt igen.

379.Jens: Så har jeg sagt det samme 162 minutter.

380.Lærer: Og 54 i tælleren ikke?

381.Elev: Var det ikke omvendt?

382.Lærer: (skriver 162/54)

383.Jens: Så har jeg sagt hvor mange gange går 12 op i 36. Det gør den 3 gange. Så har jeg sagt 54 op i 162, det gør den også 3 gange. Så har jeg sagt ja det er de. De har samme fart.

384.Lærer: Du skal tænke på.. Når man snakker om fart ikke? Så snakker man om afstand pr. tid. Det vil sige, nu har han sagt tid delt med afstand. Man snakker om afstand pr. tid. Det vil sige kilometer og antal minutter ikke?

385.Elev: De kan ikke sættes sammen, kan de?

386.Lærer: Afstand pr. tid det kan man godt. Altså jeg kører med 10 km i så lang tid. Så det skal stå omvendt. For eksempel 12 km 36 min, 54 km og det var 162 min (skriver 12/36 = 54/162). Nu kan vi se hvor meget det her giver. Det giver 0,33 km pr. minut. Nu er vores enhed, den passer også med afstand pr. tid. Afstand kilometer pr. tid som er i minutter. Er I med?

386.Elev: Ja

OPGAVE 3

387.Lærer: Godt… Opgave 3. Ole opgave 3. Kom Ole. Du skal forklare det. Prøv at læse spørgsmålet op. Hvad er det du skal finde?

388.Ole: Jeg skal finde hvor mange æg der bruges til 12 kager.

389.Lærer: Så viser du hvordan du har lavet. Så kan nogle fra klassen hjælpe.

390.Ole: (skriver 12 op til 18 = 6 og 45:6=7,5 og 45-7,5= 38,5.

391.Lærer: Forklar klassen..

392.Ole: det er..jeg har sagt 12 op til 18 det er 6. 6 divideret med 45 det er 7,5. Så minuser jeg med 45 og det giver 38,5.

393.Lærer: Det vil sige 38,5 æg. Hvad siger nogle, andre? Hvad siger du Else?

394.Else: Hvor kommer 6 fra?

395.Ole: det er ..

396.Lærer: Prøv at sige det højere igen. Hvorfor det? Forklar. Hvorfor har du divideret?

397.Ole: Prøv at se, jeg fik 6 fra: jeg sagde 12 op til 18 det er 6. Der fik jeg 6.

398.Lærer: Du siger 12 tabellen op til 18?

399.Ole: Nej, hvor meget er der fra 12 op til 18.

400.Lærer: Det vil sige du har talt 13, 14, 15, 16…

401.Ole: Ja

402.Lærer: Det vil sige du har brugt en additiv metode, hmm. Else prøv lige at komme op og vis din metode.

403.Else: Nej jeg kommer ikke op.

404.Lærer: Else kom nu op.

405.Else: …

406.Lærer: Betina? Prøv lige at komme op og vise det. Bare skriv det nedenunder.

Betina: (skriver: 18 k → 45 æg

12 k → x æg

12 x 45 = 540/18 = 30 æg.

407.Lærer: Prøv lige at forklare det til klassen.

408.Betina: Ja. Der er 18 æg og der skal man bruge 45 æg.

409.Lærer: 18 æg?

410.Elev: 18 kager.

411.Betina: for 18 kager bruger man 45 æg. Og så skal jeg finde ud af for 12 kager hvor mange æg man bruger.

412.Lærer: Ja

413.Betina: Ja så ganger du det der.

414.Lærer: Du ganger 12 med 45, 540 delt med 18 det giver 30 æg.

415.Betina: Ja

416.Lærer: Det er din metode. Er der en anden metode? Rasmus? Frederik?

417.Lærer: Du skriver på venstre side (af tavlen). Metode 1 (skriver 1 ud for Oles metode) metode 2 (skriver 2 ud for Betinas metode) og du har metode 3.

Frederik: (skriver: 45 æg → 18 kager)

418.Lærer: Det er den samme metode, men du skriver bare omvendt ikke?

419.Frederik: Øh.

420.Lærer: Du skriver 45 æg svarer til 18 kager, hvor meget svarer 12 kager til.

(Frederik kigger undrende).

421.Lærer: ok, fortsæt.

422.Elev: Det er det samme.

Frederik: (skriver: 45 æg → 18 kager

X æg ← 1 kage)

Vi ganger på tværs.

(skriver: 45 x 1= 45/18 = 2,5 x 12 = 30)

423.Lærer: Prøv lige at forklare det til klassen. Det er noget helt andet. Det er samme metode, men han bruger noget helt andet.

424.Frederik: Gange tværs 1 gange 45 det er så 45 og så skal jeg dividere det med det der (18) det giver 2,5 og så var der 12 kager gange de der to (12 og 2,5)og så giver det 30 æg.

425.Lærer: Har I spørgsmål? Frederik hvor kommer de 2,5? Hvad betyder det? De 2,5 hvad betyder det?

426.Frederik: Det er 45 divideret med 18.

427.Lærer: Jo men hvad betyder 2,5? Else?

428.Else: Er det ikke æg for 1 kage? Hvor meget han skal bruge..

429.Lærer: Ja og 1 kage hvor mange æg bruges der til det? 2,5 æg, ikke? Og han har 12 kager gange med 12 det giver 30 æg. Ok. Begge metoder er rigtige (peger på Betina og Frederiks metoder). Det Frederik bruger er enhedsstrategi, dvs. han sætter det til et stykke og så ganger han op med antal stykker kager. Begge metoder er lige gode. Tak Frederik.

OPGAVE 4

430.Lærer: Næste opgave. Opgave 4. Skal jeg vælge en eller rækker I fingrene op? Når jeg vælger så skal I op. Vil du gerne op Ole? Vil du gerne op?

431.Ole: Nej

432.Lærer: Mogens? Mogens det er her det foregår.

433.Mogens: Jeg gider ikke.

434.Lærer: Du skal ikke være nervøs. Vi skal ikke sætte det på youtube.

435.Mogens: (kommer til tavlen) jeg fortæller.

436.Lærer: Du skriver lige op. Forklar hvad du skal gøre.

437.Mogens: Jeg skal fortælle hvor gammel Anders er.

438.Lærer: Du skal fortælle det til klassen. Du skal finde hvor gammel Anders er.

439.Mogens: Ja. Hvis Søren bliver 15 år ikke?

440.Lærer: Prøv lige at skrive.

441.Mogens: Jeg gider ikke.

442.Lærer: Du skal ikke være bange for at skrive. Jamen så forklar klassen. Prøv at skrive det op så vi kan følge med. Kom nu.

443.Mogens: Jeg gider ikke.

444.Lærer: Du skal bare skrive et tal op.

445.Mogens: (skriver 15 på tavlen).

446.Lærer: Forklar det.

447.Mogens: Søren og Anders er brødre ikke? De har fødselsdag den samme dag. Søren var 3 år og Anders var 5 år. Søren han bliver 15 år, hvor gammel må Anders blive.

448.Lærer: Hvor gammel er Anders?

449.Mogens: 17.

450.Lærer: Hvordan har du gjort det?

451.Mogens: Der var 2 år forskel.

452.Lærer: Ja. Er det rigtigt hvad han siger?

453.Elever: Ja.

454.Lærer: Tak Mogens.

OPGAVE 5

455.Lærer: Næste opgave. Opgave 5. Skal jeg vælge en? Ole? (Ole kommer til tavlen)Forklar hvad du skal gøre.

456.Ole: Først finder jeg hvor mange gange 12 går op til 48.

457.Lærer: Ole tegn lige rektanglerne op. Så vi kan følge med. (Ole tegner). Hvad skal du finde Ole? (Ole skriver: Finde H. 48:12 = 4. 12 x 4= 48. 8 x 4 = 32) Vend dig lige om og forklar hvad du gør.

458.Ole: Jeg har først sagt 12 divideret med 48 (peger på 48). Og det giver 4. Så har jeg sagt 4 gange med 12 det giver 48. Det er det samme. Så siger vi 4 gange 8, det giver 32. Så har vi fundet H.

459.Lærer: Er der andre der siger noget? Det er rigtigt. Han finder først forholdet mellem 48 og 12. Det giver 4. Så må den her side (peger på siden på 8 cm) og den her side (peger på siden H) forholdet også være 4. Så ganger han det med 4. Og det giver 32. Udmærket.

OPGAVE 6

460.Lærer:Næste opgave. Betina?

Betina: (kommer til tavlen og skriver:

4 kr. → 6 ss

10 kr. → X ss.

10 x 6 = 60/4 = 15 ss.

461.Lærer: Prøv at forklare klassen.

462.Betina: Ja, der står at man kan få 6 stykker slik for 4 kr. og så skal vi så finde ud af hvor mange stykker slik man kan få for 10 kr.

463.Lærer: Og så har du krydset over.

464.Betina: Ja.

465.Lærer: Godt. Er der andre der siger noget? Morten du har en anden metode. Prøv lige at komme op og forklare det. Jo kom nu jeg kan godt huske det. Du må gerne tage dit papir til at kigge på.

466.Morten: (kommer til tavlen). Det er. Det er 4 kr. det der ikke også?

467.Lærer: Ja.

468.Morten: Så er der det dobbelte.

469.Lærer: Sig det til klassen. Bare skriv det op.

470.Morten: (skriver: 4 kr. = 6 stykker) så har jeg sagt det samme igen (skriver igen: 4 kr. = 6 stykker). Det dobbelte så er der 2 kr. tilbage fordi der skal være 10.

471.Lærer: Ja fortsæt.

472.Morten: (skriver: 2 kr. = 3 stykker. I alt: 10 kr. = 15 stykker)

473.Lærer: 15 stykker slik ikke? Du må gerne sætte dig ned på din plads. Begge metoder er rigtige. Hvilken skal man vælge? Det kommer an på jeres tid for eksempel hvis I er til eksamen eller til en prøve så kan I tage denne metode (Mortens metode) så I ikke skal regne så meget ud. Det er meget logisk. 4 kr. 6 stykker slik. 4 kr. mere 6 stykker mere. Så har jeg 4, 8. Jeg har 10 kr. i alt så jeg skal have 2 kr. mere. 2 kr. er halvdelen af det her, 3 stykker slik. det giver 10 kr. 15 stykker. Det giver også 15 stykker (peger på Betinas metode). Begge to er det samme. Yes. (Det ringer).