INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel

Jonathan Barrett

Specialerapport

August 2011

IND's studenterserie nr. 25

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
Nr. 18: Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
Nr. 19: Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
Nr. 20: Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
Nr. 21: Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
Nr. 22: Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
Nr. 23: Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
Nr. 24: Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
Nr. 25: Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)

Abstract.

På baggrund af en undersøgelse af formelsamling og eksamensopgaver for faget matematik er opstillet en epistemologisk referencemodel for den undervisningsfaglige viden vedrørende trigonometriske funktioner. Kilderne taget i betragtning er det den officielle undervisningsfaglige viden, den etablerede model refererer til.
Den Antropologiske Teori for Didaktik og modellering af prakseologier ved matematiske organisationer er det teoretiske grundlag for den opstillede model. Der er nærmere redegjort for den metode, der er benyttet til at opstille modellen. På baggrund af de indledende undersøgelser af kilder, er der peget på tre relevante sektorer i forbindelse med stoffet. Beskrivelsen vha. matematiske organisationer af de tre sektorer, geometri, algebra og analyse, udgør referencemodellen.
Afslutningsvis findes de perspektiver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner, som den epistemologiske referencemodel giver anledning til. Et vigtigt perspektiv, som vil være interessant at undersøge nærmere, er at algebra-sektoren kan opfattes som en forbindelse mellem geometrisektoren og analyse-sektoren.

IND's studenterserie består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst

– en epistemologisk referencemodel

Jonathan Barrett

Speciale for cand.scient graden i matematik.

Institut for matematiske fag, Københavns Universitet

Thesis for the Master degree in Mathematics.

Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

Vejleder: Carl Winsløw, Institut for Naturfagenes Didaktik

Afleveret: den 01/08-2011

Resume

I dette speciale er emnet det matematiske stof vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet. På baggrund af en undersøgelse af formelsamling og eksamensopgaver for faget matematik er opstillet en epistemologisk referencemodel for den undervisningsfaglige viden vedrørende trigonometriske funktioner. Kilderne taget i betragtning er det den officielle undervisningsfaglige viden, den etablerede model refererer til.

Den Antropologiske Teori for Didaktik og modellering af prakseologier ved matematiske organisationer er det teoretiske grundlag for den opstillede model. Der er nærmere redegjort for den metode, der er benyttet til at opstille modellen. På baggrund af de indledende undersøgelser af kilder, er der peget på tre relevante sektorer i forbindelse med stoffet. Beskrivelsen vha. matematiske organisationer af de tre sektorer, geometri, algebra og analyse, udgør referencemodellen.

Afslutningsvis findes de perspektiver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner, som den epistemologiske referencemodel giver anledning til. Et vigtigt perspektiv, som vil være interessant at undersøge nærmere, er at algebra-sektoren kan opfattes som en forbindelse mellem geometri-sektoren og analyse-sektoren.

Abstract

Trigonometric functions in the upper secondary school system in Denmark constitute the theme of this dissertation. Based on an investigation of the existing formula collection and exam assignments for the subject mathematics, an epistemological reference model of the professional educational knowledge regarding trigonometric functions is established. Considering the sources, the model refers to the official educational knowledge.

The Anthropological Theory of Didactics and modelling of praxeologies within mathematical organisations establish the theoretical background for the model design. The method used in the making of the model is thoroughly explained. Based on initial research of sources, three sectors regarding the content are appointed. The description using mathematical organisations of the three sectors geometry, algebra and analysis constitutes the reference model.

Finally, the perspectives regarding trigonometric functions, which the epistemological reference model gives a background for, are described. An important perspective, which would be interesting to investigate further, is the fact that the algebra-sector can be seen as bridging the geometry-sector and the analysis-sector.

Indholdsfortegnelse

Forord

I en tale med titlen *The importence og Mathematics* ved Millennium Meeting 24. maj 2000 ved College de france i Paris postulerer Timothy Gowers (professor ved Cambridge universitet og Fields medal modtager i 1998) følgende: “Taken as a hole mathematic is undeniably important!”.[1]

Baggrunden for postulatet er at der findes matematiske resultater, som er til stor gavn for samfundet. Men der findes også områder af matematikken, som ikke har nogle anvendelser. Kunne man ikke som Gowers videre siger, “cut research funding to the useless arrays and just support teaching and the more practically oriented mathematics?”. Gowers redegør vha. talrige eksempler for, at man ikke kan forudsige hvilken matematik, der er anvendelig. Spørgsmålet er så, om man kan identificere dele af matematik, som er ubrugelig? eller om man kan identificere matematik der med stor sandsynlighed er ubrugelig? Gowers afviser muligheden for eksistensen af sådan indsigt, da “mathematics is very inter-connected, far more so than it apperas on its surface”.

Han viser på en overhead projektor et billede af et kort over matematik opdelt i områder der er anvendelige, potentielt anvendelige og områder der er ubrugelige. Dette kunne være den simple model for matematik, som en ”cost-cutting finance minister” kunne have i tankerne. Efterfølgende sammenligner han denne model med sin egen opfattelse af matematik ved at lægge en ny slide på projektoren oven på sliden med den simple model. Gowers model af matematik er en meget kompliceret graf med talrige forbindelser mellem de områder der ansås for anvendelige og for ubrugelige. Videre viser Gowers et billede af en simpel model for hvordan en arbejdende matematiker tænker. Gowers siger: ”Mathematics as a hole is a huge body of knowledge, a bit like an encyclopaedia, but with the difference that it has an enormous number of cross references!”, og videre: ”so any attempt to purge mathematics for its less useful parts will almost certain be damaging to the more useful parts as well”.

Analogt til Gowers måde at se på matematik, vil den model, jeg i de følgende vil give for gymnasiets matematik, blot være en simpel model, af en kompliceret virkelighed. Men i modsætning til den simple model Gowers taler om, vil min model forhåbentlig give anledning til dybere indblik emnet.

Jeg vil gerne takke men vejleder, Carl Winsløw, for at bevare roen i en til tider hektisk proces og forsyne mig med rigelige mængder af relevant læsestof. Tak til min skønne hustru for at bakke mig op i mit arbejde og passe vores datter. Tak til min far, min bror og min ven Morten for at hjælpe til med korrekturlæsning.

Jonathan Barrett

Juli 2011

1 Talen er at finde på youtube.comm, og transskribering er foretaget af forfatteren.

Indledning – den gymnasiale kontekst

I dag introduceres sinus og cosinus ifm. beregninger vedrørende retvinklede trekanter allerede i folkeskolen (Undervisningsministeriet 2009b, p. 60). I gymnasiet præsenteres sinus- og cosinusrelationer, der giver mulighed for at regne på vilkårlige trekanter, men i gymnasiet optræder trigonometriske funktioner også i en anden matematisk sammenhæng end denne, nemlig ifm. differential- og integralregning. Umiddelbart er der ikke en klar sammenhæng mellem anvendelsen af sinus og cosinus til at bestemme linjestykker i trekanter og at differentiere funktionerne f.eks. ved bestemmelse af monotoniforholdene for en funktion, hvis udtryk indeholder sinus eller cosinus. Det er ikke oplagt at de geometrisk definerede objekter, de trigonometriske funktioner udgør, samtidig er funktioner, som kan differentieres. At se sammenhæng mellem disse to aktiviteter kræver derfor et nærmere kendskab til trigonometriske funktioner.

Hvis man ser på gymnasielærebøger, finder man ikke altid, at der eksplicit peges på en erkendelsesmæssig sammenhæng i stoffet hvad angår trigonometriske funktioner, eller for den sags skyld sammenhæng i stoffet i det hele taget. Udvalget af emner begrundes sjældent, og en underliggende struktur for rækkefølgen af emner gives ikke (Howson 1996, p. 18). Ift. trigonometriske funktioner har jeg gennemgået et lærebogssæt og fundet at sinus og cosinus optræder ifm. ikke mindre end 7 forskellige overordnede emner fordelt på to bøger (se appendikset *Lærebog*).

Jeg vil i dette speciale forsøge at kortlægge det matematiske stof vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet. Trigonometriske funktioner er en obligatorisk del af pensum for faget matematik (kernestof), hvor de optræder i forskellige matematiske sammenhænge. Det er derfor interessant at undersøge, om der er sammenhæng i stoffet vedrørende trigonometriske funktioner, og se på dette stof i forhold til det øvrige faglige indhold af faget. Jeg vil opstille en epistemologisk referencemodel svarende til stoffet vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet, og vil efterfølgende give de perspektiver på stoffet, som modellen giver anledning til.

Ved at se på de trigonometriske funktioner som et selvstændigt emne, vil jeg derfor identificere matematisk stof og vha. Den Antropologiske Teori for Didaktik søge en underliggende struktur, der kan give overblik over og perspektiver på stoffet. Jeg er ikke bekendt med at der skulle eksistere arbejder med lignende tilgang til emnet trigonometriske funktioner på gymnasialt niveau og jeg har kun fundet frem til få videnskabelige arbejder vedrørende emnet (Bagni (1997), Grabovskij & Kotel'nikov (1971), Kendal & Stacey (u.å.) og Moore (2009)). Dette betyder dog ikke at emnet er banalt og uinteressant, som det vil fremgå af dette speciale.

Trigonometriske funktioner har vigtige anvendelser såvel inden for matematikken som uden for, og kan af den grund betragtes som et væsentligt matematisk emne. Det kan derfor synes rimeligt, at trigonometriske funktioner er en del af kernestoffet for faget matematik i gymnasiet, men hvilket stof dækker de trigonometriske funktioner egentlig over?

Det matematiske stof i gymnasiet er ikke fuldstændig fastlagt fra centralt hold (Undervisningsministeriet). Specielt gælder dette for stoffet vedrørende trigonometriske funktioner. Udover at ordene ”karakteristiske egenskaber ved … cosinus og sinus” (Undervisningsministeriet, 2010a, p. 130), ifm. beskrivelsen af kernestoffet i læreplanen for faget matematik, kræver en fortolkning, består en del af det faglige indhold af ikke fastlagt, supplerende stof. Det supplerende stof skal ”perspektivere og uddybe kernestoffet” (Undervisningsministeriet, 2010a, p. 130), og der er beskrevet visse forløb det skal omfatte, herunder forløb:

”med vægt på ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning samt deduktive forløb over udvalgte emner

– om differentialligningsmodeller …

– om matematik-historiske emner.” (Undervisningsministeriet, 2010a, p. 130).

Både ifm. ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning, og ved deduktive forløb om differentialligningsmodeller samt ifm. matematik-historiske emner, kan trigonometriske funktioner være relevante. Det ligger derfor ikke helt fast, hvad stoffet vedrørende trigonometriske funktioner dækker over. Jeg vil her fokusere på at beskrive kernestoffet, men også pege på muligt supplerende stof relevant for trigonometriske funktioner.

Ser man på trigonometriske funktioner som et emne, vil det gå på tværs af en klassisk opdeling af matematik i aritmetik, geometri, algebra, analyse mv. Dette betyder samtidig at trigonometriske funktioner vedrører forskellige matematiske teoridannelser (geometri, algebra og analyse), og at et indgående kendskab til funktionerne kan give indblik i forbindelser mellem matematiske emner inden for disse forskellige teoridannelser.

At kortlægge stoffet vedrørende trigonometriske funktioner kan tjene flere formål, da en model (eller et 'kort' om man vil) kan bruges i forbindelse med tilrettelæggelse af undervisning, design af undervisningsforløb, observation af evt. problematikker ift. stoffet og endog diskussion af indholdet af faget matematik.

For at en epistemologisk referencemodel er anvendelig kræves at den har forbindelse til forskellige former for viden (beskrevet i afsnittet *Den teoretiske ramme*). En referencemodel er ikke et færdigudviklet produkt, for som Bosch & Gascón (2006, p. 57) skriver: ”A reference model needs to be continuously developed by the research community and submitted to the proof of the facts.”. Det ligger ikke inden for rammerne af dette speciale at inddrage observation af undervisning, så den opstillede referencemodel er blot et første udkast til en videregående undersøgelse. Man kan i denne forstand knytte betegnelsen 'a priori' til den opstillede model, da den ikke baseres på observationer af undervisning. Modellen vil dog baseres på forskellige kilder, såsom formelsamling og eksamensopgaver, og kan således betragtes som refererende til den officielle viden, der skal undervises i.

Den opstillede epistemologiske referencemodel for den officielle viden, vedrørende trigonometriske funktioner, giver anledning til forskellige perspektiver, heriblandt at algebraen vedrørende trigonometriske funktioner kan være af kritisk betydning. Algebra anvendes inden for geometrien vedrørende trigonometriske funktioner, og samtidig er algebra med til at give grundlaget for de objekter, der behandles i analysen vedrørende de trigonometriske funktioner. Der er i det officielle stof vedrørende trigonometriske funktioner fokus på geometrien og analysen, mens algebraen fortoner sig i baggrunden.

Disse perspektiver kunne danne baggrund for at observere undervisning mhp. at undersøge om der kunne være epistemologiske forhindringer (jf. Sierpinska 1992) forbundet med manglende kendskab til algebraen, der vedrører de trigonometriske funktioner. Det vil imidlertid være overladt til fremtidige arbejder at undersøge dette. Det er hensigten med dette speciale at levere et bidrag i udviklingen af epistemologiske referencemodeller, der kan medvirke til at give indblik i de trigonometriske funktioner i en gymnasial kontekst.

Målet med specialet er altså at give et bidrag til udviklingen af epistemologiske referencemodeller, der kan medvirke til at give indblik i de trigonometriske funktioner i en gymnasial kontekst.

Oversigt over indholdet af specialet

Først vil jeg beskrive det teoretiske udgangspunkt for specialet i afsnittet *Den teoretiske ramme*, og på baggrund heraf gives en problemformulering. Jeg vil gerne undersøge stoffet vedrørende de trigonometriske funktioner, og jeg vil opstille en epistemologisk referencemodel svarende til dette stof samt beskrive de perspektiver denne model kan give på stoffet. I afsnittet *Metode til at lave en epistemologisk referencemodel* er beskrevet det empiriske grundlag for at opstille en sådan referencemodel. Dernæst vil der først være en beskrivelse af stoffet vedrørende trigonometriske funktioner baseret på formelsamling og eksamensopgaver (afsnittet *Trigonometriske funktioner i gymnasiet*) og bagefter er der en gennemgang af en referencemodel opstillet på baggrund af dette stof (afsnittet *Epistemologisk referencemodel*). Til sidst er beskrevet perspektiver de persepktiver på stoffet som modellen giver anledning til (afsnittet *Perspektiver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner*). Afslutningsvis er givet perspektiver på specialet samt en konklusion.

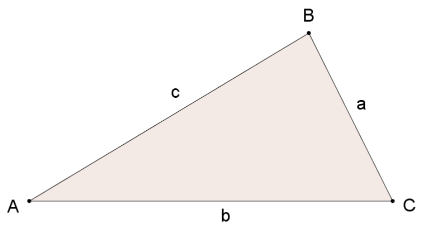
Den teoretiske ramme

Der vil løbende være definitioner af de begreber og betegnelser, som her bruges i en bestemt betydning, og som kan afvige fra brugen anden steds – f.eks. 'matematisk stof' og 'trigonometriske funktioner'.

I gymnasiet er der matematikfag på tre niveauer. Indholdet af fagene Matematik B og C er indeholdt i faget Matematik A. Bemærk at det dog ikke nødvendigvis forholder sig sådan, at det første års matematik af faget Matematik A svarer til Matematik C eller det første års matematik af Matematik B. Jeg vil, når andet ikke fremgår af sammenhængen, betragte 'matematik i gymnasiet', som det faglige indhold af faget Matematik A, og flere steder vil 'matematik' endog være udeladt som det f.eks. er tilfældet ifm. betegnelsen 'trigonometriske funktioner i gymnasiet'.

Der er i specialet en del interne henvisninger til figurer og afsnit, angivet ved henholdsvis nummerering og overskrift. Yderligere er der en del steder benyttet numre angivet i parentes, som repræsentanter for formler, der er nummeret i overensstemmelse med nummereringen på figur 8, side 20.

Ift. matematikken er der brugt den standard for notation, som er givet i matematisk formelsamling (Dejgaard & Schomacker 2007). Specielt vil jeg ifm. beskrivelse af opgavetyper bruge betegnelser for sider og vinkler i en trekant, som angivet på figur 1. Er der tale om en retvinklede trekant, vil 'C' betegne den rette vinkel og 'c' betegner dermed hypotenusen.



Figur 1: Vinkel- og sidebetegnelser for en trekant med arealet T.

Det er et mål med dette speciale at kortlægge stoffet vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet. For at redegøre for det teoretiske grundlag for specialet er det derfor nødvendigt at præcisere hvad begrebet 'stof' dækker over, og hvad kortlægning i denne forbindelse går ud på. Yderligere må der redegøres for hvordan specialet forholder sig til den gymnasiale kontekst.

Matematisk stof defineres her som *repræsentationer af matematisk viden, der giver mulighed for at formulere og løse matematiske opgaver.* Et eksempel på matematisk stof kunne være en formel. F.eks. vil formlen for arealet af en trekant repræsentere viden om hvordan arealet afhænger af højden og grundlinjen, og det er ud fra formlen muligt f.eks. at stille og løse opgaven: Find arealet af en trekant hvor højde og grundlinje er givet.

I det følgende vil jeg bruge 'stof' i denne forstand og brugen af ovennævnte definition vil vise sig at være hensigtsmæssig, da den definerer stof i forhold til viden og aktivitet. Løst sagt kan man betegne matematisk stof som konkretiseret matematisk viden og abstraheret matematisk aktivitet.

Matematisk viden og matematisk aktivitet i undervisningssammenhæng er to begreber, der eksisterer didaktisk teori for. Teorien om den didaktiske transposition beskriver undervisning i matematik, som en transposition af viden. Og i følgende afsnit vil det være beskrevet, hvad der mere præcist ligger i det. Efterfølgende vil Den Antropologiske Teori for Didaktik (ATD) være beskrevet; det er en teori, som beskæftiger sig med institutionaliseret matematisk aktivitet, og som muliggør modellering af matematisk praksis og teori.

Didaktisk transposition

Didaktik beskæftiger sig videnskabeligt med undervisning og læring. Didaktik er i høj grad en empirisk videnskab, da det er nødvendigt med observationer, for at få indblik i den faktisk underviste og lærte viden. For at kunne observere (og dermed forske) er det nødvendigt med en teoretisk model for det observerede. En model for hvad der foregår, når der undervises, er den didaktiske transposition. Ifølge denne model er den viden, der undervises i, en del af en større videnstransposition fra akademisk viden ("scholarly knowledge") til den viden, der skal undervises i (knowledge to be thaught), over i den viden der faktisk undervises i ("taught knowledge") og den tillærte viden ("learned, available knowledge) (se figur 2). I ordet transposition ligger, at der ikke blot er tale om overførsel af viden, men også om at viden skifter form, når der så at sige "flyttes" viden fra eksempelvis lærer til elev.

Bosch & Gascón (2006, p. 57) skriver om den didaktiske transposition:

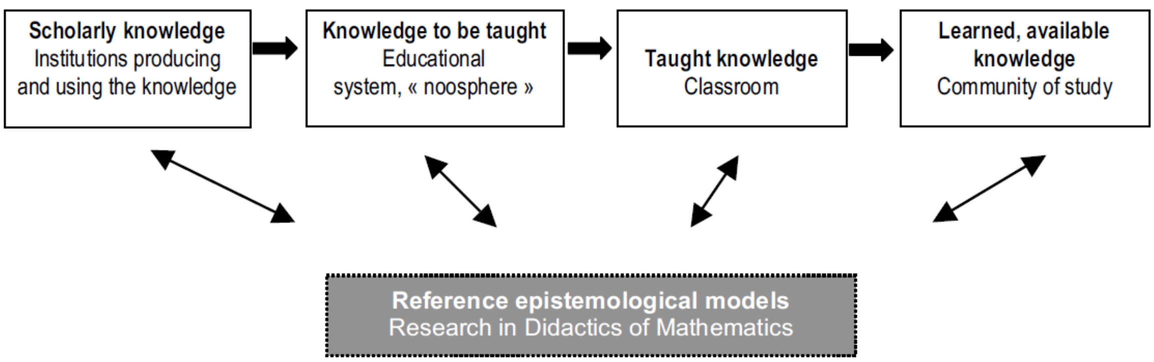
"considering the transposition process as a new object of study allows researchers in mathematics education to free themselves from spontaneous epistemological models that are implicitly imposed by the educational institutions to which we belong".

Den didaktiske transposition er altså mere end blot en naiv model for "viden der flyttes", men udgør et forskningsobjekt der repræsenterer en kompliceret proces, hvor viden omformes (Winsløw 2006, p. 19). Med friheden for epistemologiske modeller for den undervisningsfaglige viden, der implicit er givet, følger behov for konstruktion af en eksplicit epistemologisk model ifm. forskning. Bosch & Gascón (2006, p. 57) skriver videre:

"When looking at this new empirical object that includes all steps from scholarly mathematics to taught and learnt mathematics, we need to elaborate our own 'reference' model of the corresponding body of mathematical knowledge.".

Det er altså nødvendigt at udvikle en epistemologisk referencemodel, som kan danne grundlag for videre undersøgelse, der f.eks. kan indbefatte observation af undervisning. En epistemologisk referencemodel er en model for den matematiske viden, som transpositioneres. Bosch & Gascón (2006, p. 57) definerer en epistemologisk referencemodel, som en model der:

"constitutes the basic theoretical model for the researcher and can be elaborated from the empirical data of the three corresponding institutions: the mathematical community, the educational system and the classroom".



Figur 2: Den didaktiske transposition og epistemologiske referencemodeller (kilde: Bosch & Gascón 2006).

Den epistemologiske referencemodel, som vi i det følgende vil konstruere, kan i en forstand opfattes som en "a priori-model", da den ikke inddrager observation af undervisning.

Udgangspunktet for modelleringsprocessen er den viden eller nærmere bestemt det stof, som repræsenterer den viden, det fra officiel side af er bestemt der skal undervises i. Ud over at gøre brug af officielle kilder vil undervisningsmateriale for gymnasiet og mere avanceret materiale, som er på akademisk niveau, blive inddraget (se afsnittet *Metode til at lave en epistemologisk referencemodel*, side 14). Det vil sige at modellen ikke udelukkende relaterer sig til den viden, der skal undervises i, men også har forbindelse til den faktisk underviste viden samt til akademisk viden.

Generelt kan man sige om legitimiteten af epistemologiske referencemodeller, at den ikke kan gives a priori, men at den følger af modellens anvendelighed ifm. videre forskning. Med anvendelig menes, at modellen giver anledning nye perspektiver, der kan udforskes, og sådanne perspektiver er forsøg beskrevet afslutningsvis i specialet.

ATD og prakseologier

Den didaktiske transposition gør det klart at vil man beskæftige sig med matematisk viden i gymnasiet bør der tages højde for den rekonstruktion af viden, som finder sted i gymnasiet og dermed for den matematiske videns institutionelle relativitet (Bosch & Gascón 2006, p. 56).

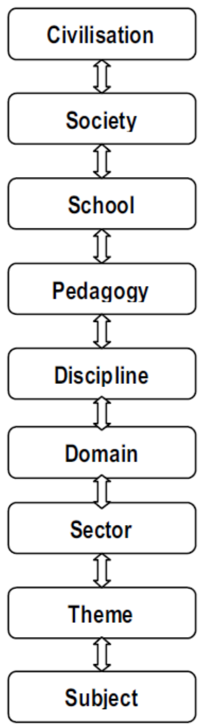
Ift. en kognitevistisk tilgang til forskning i matematik i gymnasiet vil den implicitte epistemologiske model, som er dominerende i en institution, ikke kunne diskuteres. Karakteristisk for en sådan tilgang er nemlig, at den antager den bestemte fortolkning af den matematiske viden, som er givet af den pågældende undervisningsinstitution (Gascón 2003, p. 49), og den tager altså ikke højde for den matematiske videns institutionelle relativitet.

En anden tilgang er den epistemologiske, som har matematisk aktivitet som primært forskningsobjekt. Den antropologiske teori for didaktik (ATD) – som repræsenterer en epistemologisk tilgang – kan ses som en naturlig konsekvens af den didaktiske transposition (Gascón 2003, p. 50).

Institutionaliseret matematisk aktivitet er det primære objekt for ATD. I den forbindelse er det nødvendigt med en generel model for institutionaliseret matematik og for institutionaliseret matematisk aktivitet.

Den version af ATD, som vi forholder os til her, benytter modellen med de didaktiske determinationsniveauer og modellering af prakseologier ved matematiske organisationer (MO). Matematik kan organiseres på flere niveauer, og man skelner mellem punkt-, lokal-, regional- og global-MO'er, som henholdsvis knytter sig til niveauerne *specifikt emne*, *tema*, *sektor*, og *domæne* (Bosch & Gascón 2006, p. 61). Der er i alt 9 didaktiske determinationsniveauer – som udover de nævnte er *fag*, *pædagogik*, *skolen*, *samfund* og *civilisation*. Man kan opdele de 9 niveauer i matematiske og pædagogiske niveauer svarende til henholdsvis de fire førstnævnte og de fem sidstnævnte.

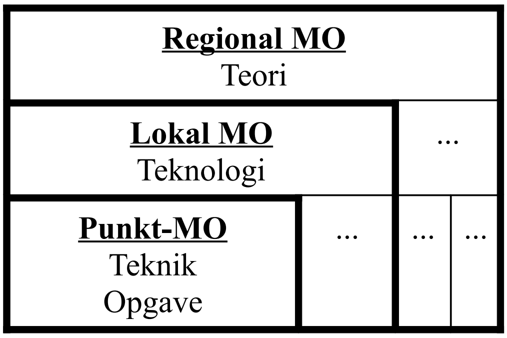
På figur 3 er vist de 9 determinationsniveauer, men der kan dog også være tale om et 0'te niveau, som er elevens personlige viden, der også er afgørende for den didaktiske transposition (Artigue & Winsløw 2010, p. 6). Niveauerne er codetermineret, hvilket på figuren er symboliseret ved dobbeltpile, og de skal følgelig ikke forstås hierarkisk.



Figur 3: 9 determinationsniveauer (kilde: Bosch & Gascón 2006).

På figur 4 er illustreret hvordan organisationsniveauer er ordnet i forhold til hinanden. En MO tager udgangspunkt i en opgavetype, som er hjemmehørende i en institutionel sammenhæng, og som består af to blokke, en *praksisblok* og en *teoriblok*. Praksisblokken består af to niveauer, *typer af opgaver* og *teknikker* til løsning af disse opgaver. Teoriblokken består også af to niveauer, nemlig *teknologi* – som er læren om teknikkerne der forklarer disse – og *teori* – som samler teknologien i en teoretisk ramme (denne model kaldes også 4T-modellen). Praksisblokken er egentlig i sig selv nok til, at der er tale om en aktivitet, men en teknologisk og teoretisk diskurs er et vigtigt element i en MO, for at der er tale om egentlig matematisk aktivitet.

De forskellige MO'er ordner sig i et hierarki. Til en regional MO hører en teori, der dækker over forskellige teknologier, hvortil de lokale MO'er svarer. Derved hører til en regional MO, en samling af lokale MO'er. Teknologien for en lokal MO beskriver en teknik der kan bruges til at løse en type af opgaver, hvortil svarer en punkt-MO. En *opgavetype* er defineret ved at være en generel formulering af en samling opgaver, som alle kan løses ved en fælles teknik, og forskellige opgavetyper adskiller sig ved at referere til forskellige teorier.



Figur 4: Hierarki af MO'er.

Et niveau der særligt er fokus på i dette speciale, er sektor-niveauet. MO'er gør det muligt at modellere praksis og teori inden for sektorer. En *sektor* er defineret ved at være en samling af prakseologier, der har en fælles teori. Matematisk stof svarer til noget teori og teknologi, og jeg vil i det følgende tale om en epistemologisk referencemodel, som svarer til noget stof, i den betydning at teoriblokken kan beskrives vha. stoffet.

Problemformulering

Trigonometriske funktioner er et vigtigt matematisk emne. Samtidigt er det obligatorisk stof i gymnasiet, hvor det optræder i forskellige sammenhænge. De trigonometriske funktioners rolle i gymnasiematematikken er ikke umiddelbart klar, og det kan derfor være værd at overveje følgende overordnede spørgsmål: *Hvilken rolle bør trigonometriske funktioner spille i gymnasiet*?

Dette er et komplekst spørgsmål, der, hvis overhovedet muligt, i hvert fald ikke umiddelbart kan besvares fyldestgørende. Først og fremmest er det nødvendigt at klarlægge spørgsmålene: *hvad dækker 'trigonometriske funktioner' over i en gymnasial kontekst?* og *hvad kan der menes med 'rolle' i gymnasiet?* Men specielt er den normative karakter af ordet 'bør' med til at komplicere sagen *– ud fra hvilket synspunkt "bør" trigonometriske funktioner spille en bestemt rolle i gymnasiet?*

Et er, hvilken rolle emnet er tænkt at skulle spille fra centralt hold – grunden til at det er del af pensum – noget andet er den faktiske rolle emnet spiller, og noget tredje er de muligheder, der er for en rolle. Stoffet, som trigonometriske funktioner dækker over, er af afgørende betydning for hvilke roller, de trigonometriske funktioner kan spille. Stoffet repræsenterer den undervisningsfaglige viden, som skal formidles, og angiver i den forstand mulighedsbetingelserne for undervisning i emnet. Jeg vil her se nærmere på det matematiske stof, som vedrører trigonometriske funktioner, for på den baggrund at danne et grundlag for en diskussion af de trigonometriske funktioners rolle i gymnasiematematikken.

Hvad dækker 'trigonometriske funktioner' over? Et simpelt svar kunne være: trigonometri og dertil knyttede funktioner. Selvom dette simple svar måske ikke er så langt fra at udtrykke noget virkeligt, vil jeg alligevel undersøge spørgsmålet nærmere. En generel men lidt mere præcis formulering, af det jeg gerne vil undersøge, er svaret på spørgsmålet: *Hvad er relevant stof vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet?*

Ud fra et matematisk synspunkt ses forskellige måder at definere de trigonometriske funktioner på. I gymnasiet benyttes enhedscirkelen til definere trigonometriske funktioner, men andre definitioner kan gives ud fra potensrækker, differentialligninger eller funktionalligninger (se figur 5).

DEFINITIONER AF SINUS OG COSINUS		
Potensrækker	*Differentialligninger*	*Funktionalligninger*
$\sin x \overset{\text{def}}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ og $\cos x \overset{\text{def}}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.	For differentialligningen $y''=-y$ er funktionen sin den unikke løsning, som opfylder initialbetingelserne $(y'(0), y(0))=(1,0)$, og funktionen cos er den unikke løsning, som opfylder initialbetingelserne $(y'(0), y(0))=(0,1)$.	Der eksistere netop et par funktioner sin og cos hvor følgende ligninger gælder for alle reelle tal: $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$ $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$ $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ med betingelsen $0<x\cos x<\sin x<x$ for $0<x<1$.

Figur 5: Forskellige definitioner af de trigonometriske funktioner sinus og cosinus (Wikipedia u.å.).

Disse tre andre definitioner må dog, sammen med det matematiske stof de giver anledning til, betragtes som for avancerede til gymnasie-niveauet. Det matematiske stof på videregående niveau kan struktureres som definitioner og aksiomer efterfulgt at sætninger, der bevises, og hvor der gives eksempler på anvendelse af sætningerne og stilles opgaver, hvori sætningerne skal bruges. Dette er ikke en gangbar struktur i gymnasiet, da den forudsætter en veludviklet matematisk forestillingsevne og en masse selvstændigt arbejde, som netop er det der skal udvikles i gymnasiet. Definitioner i gymnasiematematikken spiller ikke den afgørende rolle i forbindelse med undervisning. Selv ikke på videregående niveau kan dette siges at være tilfældet. Sat lidt på spidsen er det ikke begrebet, der er bestemt af definitionen, men snarere omvendt. Som Sierpinska (1992, p. 26) så udførligt udtrykker det i en sætning:

”It is only when we have seen instances and non-instances of the object defined, when we can say what this object is and what it is not, when we have become aware of its relations with other concepts, when we have noticed that these relations are analogous to relations we are familiar with, when we have grasped the position that the object defined has inside a theory and what are its possible applications, that we can say we understood something about it.”

For at finde frem til relevant stof vedrørende trigonometriske funktioner undersøges forskellige kilder. Den faktiske rolle, trigonometriske funktioner spiller i undervisning i gymnasiet, vil være styret af andet end den fra ministeriets side tænkte. Læreren er selvfølgelig af central betydning, men undervisningsmaterialet vil også i høj grad præge undervisningen.

Jeg vil i dette speciale fokusere på officielle kilder og identificere det relevante stof i den forbindelse (se næste afsnit). Nærmere bestemt vil jeg besvare følgende tre spørgsmål:

- ***Hvilke funktioner dækker betegnelsen trigonometriske funktioner over?***,

- ***Hvad er stoffet vedrørende disse funktioner set ud fra den matematiske formelsamling?***, og

- ***Hvilke opgaver vedrører dette stof?***

Svarene på disse spørgsmål giver materiale til modellering af teoriblokke og praksisblokke vedrørende trigonometriske funktioner, og det er derfor også relevant at stille spørgsmålet: ***Hvordan kan en epistemologisk referencemodel svarende til stoffet vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet se ud?***

Jeg vil besvare dette spørgsmål ved at opstille en model på baggrund af det materiale, der er fundet ved besvarelsen af de tre foregående spørgsmål. Præsentationen af en model leder igen til et nyt og afgørende spørgsmål: ***Hvilke perspektiver giver den opstillede model på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner?***

I besvarelsen af dette spørgsmål vil jeg både søge perspektiver på hvordan dele af stoffet forholder sig til hinanden, og perspektiver på hvordan stoffet vedrørende trigonometriske funktioner forholder sig til det resterende matematiske stof i gymnasiet. En fuldstændig besvarelse af spørgsmålene vil ikke kunne gives, det omfangsrige emne taget i betragtning. Da kilderne jeg benytter primært er officielle, vil perspektiverne jeg beskriver, kunne siges at vedrøre det officielle stof vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet.

Metode til at lave en epistemologisk referencemodel

Redegørelse for metoden til at nå frem til en model er vigtig for at modellen kan bruges videnskabeligt. I herværende sammenhæng vil jeg undersøge forskellige kilder og på baggrund heraf, med det teoretiske udgangspunkt, som er beskrevet ovenfor (afsnittet *Den teoretiske ramme*, side 8), opstille en epistemologisk referencemodel.

Med udgangspunkt i begrebet matematisk stof vil jeg forsøge at finde frem til det matematiske stof, som vedrører trigonometriske funktioner i gymnasiet. Der er forskellige kilder, der kan give indblik i hvilket stof, som vedrører trigonometriske funktioner. Jeg har ikke fundet litteratur der forsøger at kortlægge dette stof, men har i stedet primært beskæftiget mig med, hvad man kan kalde *officielle kilder*. Officielle kilder vedrørende faget matematik i gymnasiet (stx A) er læreplan, vejledning, skriftlige eksamensopgaver, formelsamling mv., som alle er at finde via Undervisningsministeriets hjemmeside. Dette materiale vil i det følgende blive betegnet som *curriculum*.

Undervisningsmateriale kan have stor betydning for undervisning, og det kan være en anden interessant kilde til stof. Lærebøger, som anvendes i gymnasiet, er typisk designet ud fra curriculum, men vil naturligvis indeholde mere konkrete beskrivelser af stoffet end curriculum, og vil ud over at dække kernestof også indeholde supplerende stof. Andre kilder kunne være lærebøger for undervisere på gymnasialt niveau eller andet videregående materiale samt forskellige hjemmesider, der måtte gøres brug af i forbindelse med undervisning.

Jeg vil primært benytte curriculum som kilde til matematisk stof, omend jeg også har benyttet andre kilder, f.eks. lærebøger for undervisere. Jeg vil give et overblik over stoffet og relevante opgaver vedrørende trigonometriske funktioner ved at se på formelsamlingen og eksamensopgaver. I læreplanens afsnit 2.2 og 2.3 er kernestof og supplerende stof defineret (Undervisningsministeriet 2010a, bilag 35). Kernestoffet er konkretiseret, mens det supplerende stof er beskrevet ved overordnet mål og eksempler på emner.

Kernestoffet for faget matematik er omend ikke juridisk fastlagt af formelsamlingen dog beskrevet der i form af ”et samlet overblik over de formler og dets symbolsprog, der knytter sig til kernestoffet” (Dejgaard & Schomacker 2007, p. 3). Efter reform 2005 er kernestof en mindre del af pensum end tidligere, så det kan også være relevant at se på den tidligere formelsamling (Clausen & Jensen 1998), da formler, som er udeladt i den nye, ikke nødvendigvis skal betragtes som irrelevant stof, blot fordi disse ikke er medtaget længere. Ifm. eksamensopgaver er det selvfølgelig også relevant at se terminsprøver, der er prøveeksamener.

Selvom formelsamlingen ikke definerer det relevante stof ifm. den skriftlige eksamen, er den lavet med henblik på denne, og det må derfor forventes, at eksamensopgaverne vedrørende trigonometriske funktioner modsvarer formlerne i formelsamling vedrørende trigonometriske funktioner.

Når man ser på kilder som skriftlige eksamensopgaver og formelsamling, må der tages det forbehold, at kernestof kun er en del af pensum, og at den skriftlige eksamen kun vedrører en del af den viden, elever skal besidde. Faget (Matematik A) afsluttes med både en skriftlig og mundtlig eksamen. Den mundtlige eksamen baseres på temaopgaver, som tidligere er udarbejdet ifm. undervisningen, og som dækker supplerende stof. Den mundtlige eksamen beskæftiger sig også med teoretiske redegørelser for formlerne, som anvendes ifm. den skriftlige eksamen.

Ved at vælge formelsamling og eksamensopgave som kilder, vil det stof der findes frem til kunne betegnes som det officielle stof vedrørende trigonometriske funktioner med fokus på skriftligt arbejde. For at finde stoffet vedrørende trigonometriske funktioner er det nødvendigt at vide, hvad man leder efter, og mine undersøgelser begynder med at afgrænse dette.

Helt konkret har jeg foretaget en emneafgrænsning ved at se på hvor symbolerne sin, cos og tan optræder. Jeg har identificeret de steder i formelsamlingen, hvor disse symboler optræder, og givet en oversigt over de emner, de præsenteres under. På baggrund af denne observation har jeg opstillet en emneliste over emner, som svarer til de forskellige formler i formelsamlingen. Herefter har jeg ved systematisk gennemgang af eksamensopgaver, identificeret opgaver hvor sin, cos eller tan optræder, eller hvor funktionerne er nødvendige ifm. en besvarelse. Ud fra disse opgaver har jeg opstillet forskellige kategorier, som opgaverne falder inden for, og som relaterer sig til forskellige formler, der anvendes ifm. en besvarelse. Disse undersøgelser betragtes efterfølgende i lyset af ATD. Ifm. opstillingen af emneliste over stoffet og kategorier af opgaver er observeret stof og opgaver, som vedrører geometri, algebra og analyse.

Den epistemologiske referencemodel er dannet ved at betragte tre sektorer og beskrive disses indhold med baggrund i de indledende undersøgelser af stof og opgaver. Den opstillede model kan betragtes som en referencemodel for officiel undervisningsfaglig viden om trigonometriske funktioner.

Trigonometriske funktioner i gymnasiet

I dette afsnit vil jeg beskrive, hvad 'trigonometriske funktioner' ift. gymnasiet dækker over. Jeg vil præcisere, hvilke funktioner der menes, når betegnelsen 'trigonometriske' benyttes og efterfølgende se nærmere på stoffet og opgaver vedrørende disse funktioner.

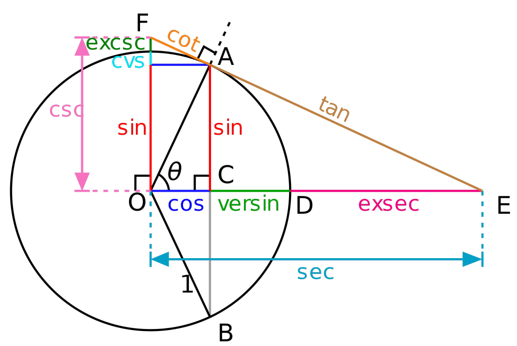
Beskrivelsen er givet med henblik på at give et udgangspunkt for at lave en epistemologisk referencemodel for viden vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet. Til at lave denne referencemodel benyttes ATD og modellering af prakseologier vha. MO'er (se afsnittet *Den teoretiske ramme*, side 8). Som nævnt ovenfor hører der til en organisering af prakseologier en praksisblok og en teoriblok, og derfor er det her valgt at beskrive opgaver og stof vedrørende de trigonometriske funktioner. Stof-begrebet ligner begrebet om teoriblokke i den forstand, at de begge dækker over en teoretisk diskurs. En teoriblok svarer til en teoretisk diskurs knyttet til specifikke opgavetyper, mens jeg med stof-begrebet mener teori og teknologi løsrevet fra specifikke opgavetyper.

I det følgende vil jeg forsøge at fremstille en overordnet struktur for stoffet vedr. trigonometriske funktioner. Først vil jeg i afsnittet *Afgrænsning af emnet* præcisere, hvilke funktioner der menes med 'trigonometriske funktioner' og derved afgrænse stoffet. Dernæst vil jeg i afsnittet *Stofoverblik* præsentere en liste over, hvad man kan kalde underemner til stoffet vedrørende trigonometriske funktioner. Listen er opstillet på baggrund af en undersøgelse af formelsamlingen. Herefter vil jeg i afsnittet *Opgaver vedrørende trigonometriske funktioner* undersøge eksamensopgaver og kategorisere dem i forhold til forudgående beskrevet stof. Jeg vil derefter beskrive opgaverne i de opstillede kategorier.

Afgrænsning af emnet

I dette afsnit vil jeg fastlægge, hvilke funktioner der i de følgende afsnit betegnes som trigonometriske. De trigonometriske funktioner er ikke en klasse af funktioner i samme forstand som eksempelvis lineære funktioner er det. Der findes ikke en bestemt type af algebraisk udtryk for trigonometriske funktioner – udtryk, som er en endelig kombination af konstanter og en variabel kombineret ved addition, subtraktion, multiplikation og division. Faktisk udmærker de trigonometriske funktioner sig ved, at de slet ikke kan beskrives ved algebraiske udtryk. Forskellige trigonometriske funktioner har forskellige funktionsegenskaber, nogle er begrænsede andre ubegrænsede, nogle overalt differentiable andre ikke, så periodicitet som fælles egenskab til trods, kan det umiddelbart være svært at se dem som en samlet gruppe.

Der er dog alligevel et fællestræk ved de funktioner som betegnes trigonometriske, nemlig deres forbindelse til (retvinklede) trekanter og mere generelt (enheds)cirklen. Det er karakteristisk for trigonometriske funktioner, at de kan defineres geometrisk ud fra cirklen, som bestemte linjestykkers forhold til radius – se figur 6.



Figur 6: Nogle trigonometriske funktioner ift. en enhedscirkel (kilde: Wikipedia (u.å.)).

Med baggrund i geometriske sammenhænge kan man ud fra én trigonometrisk funktion i princippet bestemme alle de andre, så umiddelbart er der ikke en trigonometrisk funktion, som er mere fundamental end en anden.

I gymnasiet præsenteres man for sinus, cosinus og tangens samt evt. cotangens (på figur 6 er benyttet betegnelserne sin, cos, tan og cot). Sinus og cosinus kan opfattes som de mest basale trigonometriske funktioner, da tangens er defineret ved forholdet mellem sinus og cosinus. Cotangens nævnes, da det er forholdet mellem cosinus og sinus, og dermed er reciprok til tangens.

Mange steder taler man om 6 trigonometriske funktioner[2] som er de fire ovenfor nævnte sammen med sekant og cosekant (på figur 6 er benyttet betegnelserne sec og csc), der kan defineres som forholdet mellem hypotenuse og den hosliggende hhv. modstående kartete. Ser man på disse 6 trigonometriske funktioner kan de siges at udgøre en velafgrænset mængde af funktioner i den forstand, at mængden svarer til mængden af alle de mulige forhold der er mellem siderne i en retvinklet trekant. Der synes dog ikke at være nogen grund til at begrænse brugen af betegnelsen trigonometriske funktioner til disse 6.

Tværtimod har man historisk set hverken set sinus som mest central, eller har afgrænset 'trigonometriske funktioner' til at betegne de 6 ovenfor nævnte funktioner. Brugen af trigonometriske funktioner er oprindeligt opstået i forbindelse med astronomi og beregning i forbindelse med trekanter i oldtidens Babylon. Sfæriske trekanter var lige så vigtige som plane trekanter på grund af jordens tilnærmelsesvise kugleform. Forskellige trigonometriske funktioner anvendes i forbindelse med forskellige praktiske problemer inden for bl.a. astronomi, navigation, landmåling og bygningskonstruktion.

F.eks. har funktionen versin været en meget diskuteret funktion før udregninger kun udføres vha. computere, funktionen haversin kan bruges til at finde korteste vej mellem 2 punkter på en sfære funktionen, funktionen exsec har været vigtig ifm. landmåling og astronomi, og funktionerne sekant og cosekant er blevet brugt ifm. navigation (O'Connor & Robertson (u.å.)).

I moderne tid er disse forskellige andre trigonometriske funktioner (andre end de 6) ikke lægere så vigtige, da computere har overflødiggjort deres anvendelse i forbindelse med tabelgenerering og regnemetoder. Set ift. matematik i gymnasiet vil funktionerne være interessante ifm. matematik-historie.

I de følgende undersøgelser har jeg valgt at fokusere udelukkende på sinus, cosinus og tangens, og vil med betegnelsen *trigonometriske funktioner* mene netop disse tre funktioner. Cotangens optræder i formelsamlingen for matematik i gymnasiet, men jeg har valgt at lade denne funktion ude af betragtning, da jeg ikke er stødt på opgaver, der vedrører cotangens. De inverse trigonometriske funktioner og harmoniske funktioner vil også nævnes, men med 'trigonometriske funktioner' menes udelukkende sinus, cosinus og tangens, og altså ikke funktioner der udtrykkes ved kombinationer af disse.

På figur 7 er vist en kort oversigt over hvor de trigonometriske funktioner optræder i matematik-historien. Når jeg i det følgende bl.a. gerne vil finde frem til steder hvor de trigonometriske funktioner eksplicit optræder, er det mange steder symbolerne for disse funktioner (sin, cos og tan), som optræder, og ikke funktionernes navne. Historisk set begyndte man eksempelvis først at benytte symbolet 'sin' i bøger fra begyndelsen af 1600-tallet (Hérigone i 1634 som den første). På dette tidspunkt benyttede forskellige forfattere forskellige symboler for de trigonometriske funktioner, men det er altså symbolerne sin cos og tan, som i dag benyttes (O'Connor & Robertson (u.å.). Det skal hertil siges, at man ikke skal så langt tilbage i tiden for at symbolet 'tg' for tangens blev brugt så dette kan være et symbol man skal se efter, hvis man f.eks. vil identificere gamle eksamensopgave – et eks. af ældre dato er Geometrisk opgave i Afgangseksamen fra 1869 (Petersen & Vagner 2003, p. 78).

2 Følgende er et par, ud af talrige eksempler på websteder hvor der nævnes de 6 trigonometriske funktioner: *http://people.hofstra.edu/Stefan_Waner/trig* og *http://www.clarku.edu/~djoyce/trig*.

TRIGONOMETRISKE FUNKTIONERS HISTORIE	
Person *(nationalitet) år*	*Matematik*
Hipparchus (græker) 140 f.v.t.	Første værk om trigonometriske funktioner; 12 bøger med tabeller over størrelsen af korder i en cirkel
Menelaus (græker) 100 e.v.t.	Tabeller og sfærisk trigonometri
Potelemæus (græker) ca. 100-170	Kendte formler udtrykt ved korder svarende til: $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$ $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ approksimation af korden svarende til 1º
Aryabhata (inder) 500	Første tabel for sinus til en vinkel (½ korde)
(Araberne) o. 860	Studerer skygger (tangens)
Abu'l-Wafa (araber) 980	Formlen: $\sin 2\mathrm{x}=2\sin x\cos x$ (følger af formlen for sinus til en vinkelsum hvor $x=y$)
Kopernikus (polak) 1542	Sinus og dens inverse
Viète (franskman) 1540-1603	Formlerne: $\sin 3\mathrm{x}=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$ og $\cos 3\mathrm{x}=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$
Leibniz (tysker) 1682	Publiseret et arbejde der beviste at $\sin x$ ikke er en algebraisk funktion.
Euler (schweizer) 1748	Eulers formel; forbindelsen til komplekse tal

Figur 7: Historisk oversigt over opdagelser vedrørende trigonometriske funktioner.

Stofoverblik

I dette afsnit vil jeg med udgangspunkt i *Matematisk formelsamling stx A* opstille en liste over emner, som dækker stoffet vedr. trigonometriske funktioner. Den tidligere formelsamling, *Matematisk Formelsamling* – Gymnasiet Matematisk linje 3-årigt forløb til A-niveau er også indkluderet i den følgende undersøgelse. Meningen med en emneliste er få et overblik over stoffet, som kan være udgangspunkt for de videre undersøgelser. Et *emne* skal her forstås som en afgrænset mængde af stof. Et emne kunne f.eks. være gymnasiematematik, forstået som det matematiske stof der er grundlaget for undervisning i gymnasiet. I denne forstand vil indholdet af formelsamlingen tilhøre emnet gymnasiematematik, og det jeg her søger, er at beskrive indholdet af emnet trigonometriske funktioner, der er en delmængde af gymnasiematematikken. I foregående afsnit har jeg afgrænset betegnelsen 'trigonometriske funktioner' til at betyde sin, cos og tan, og jeg vil her bruge 'emnet trigonometriske funktioner' om det stof, hvori de trigonometriske funktioner optræder.

Det skal inden gennemgangen nævnes, at der i formelsamlingen ikke er beskrevet betingelserne for, at formlerne gælder, og at disse betingelser i det følgende betragtes som underforstået.

Først vil jeg identificere de steder i formelsamlingen, hvor trigonometriske funktioner optræder.

Formelsamlingen er opdelt i afsnit, hvoraf et hedder trigonometriske funktioner. Hvis man ser på hvor sin, cos og tan optræder, er det i mange forskellige afsnit, og på figur 8 (se følgende side) er vist en oversigt over disse afsnit og de tilhørende relevante formler. På figuren er både medtaget formler fra formelsamlingen fra 2007 og fra 1998. Jeg har nummereret formlerne, så det er lettere at henvise til dem, og jeg vil i vid udstrækning i resten af teksten benytte disse numre i stedet for at skrive formler helt ud.

Ud af i alt 172 formler er der 24 formler hvor sin, cos eller tan optræder, og 7 formler er nævnt ifm. den afsluttende del Matematiske standardsymboler. Denne opgørelse gælder for formelsamlingen fra 2007, mens der for formelsamlingen fra 1998 er 13 formler ud over de 24, som vedr. trigonometriske funktioner. Én formel går igen to steder. Dette er formlen $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos v$, som både gælder for vektorer i planen og vektorer i rummet (formel (7) og (11)). Dvs. at der egentlig er tale om to forskellige formler, som blot ligner hinanden, da der bruges de samme symboler for 2 og 3 dimensionelle vektorer.

Der er kun ubetydelige tilføjelser i formelsamlingen fra 2007 ift. formelsamling fra 1998. Formlerne $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\mathrm{ab}}$ og $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ er direkte omformuleringer af henholdsvis formlerne (4) og (5) og formlerne (37)-(39) vedrørende de inverse trigonometriske funktioner kan betragtes som underforstået i formelsamlingen fra 1998, da de er nødvendige for at løse de eksamensopgaver, som formelsamlingen var tænkt som hjælp til at løse. Formlerne (40)-(42) må også betragtes som underforståede, da de er direkte konsekvenser af tabellen over eksakte værdier, der er med i formelsamlingen 1998. Denne reduktion i antal formler til trods må trigonometriske funktioner siges at udgøre en betydelig del af stoffet i Matematisk formelsamling.

OVERSIGT OVER FORMLER I FORMELSAMLING HVOR SIN, COS OG TAN OPTRÆDER*

Retvinklet trekant

(1) $\sin A = \frac{a}{c}$

(2) $\cos A = \frac{b}{c}$

(3) $\tan A = \frac{a}{b}$

Vilkårlig trekant

(4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

(4a) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(5) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

(5a) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

(6) $T = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ab\sin C$

Vektorer i planen

(7) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$

(8) $det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$

Linje i planen

beskrevet ved hældningskoefficient

(9) $a = \tan v$

Cirkel

(10) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

Vektorer i rummet

(11) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$

(12) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$

Trigonometriske funktioner

Enhedscirkel med sin, cos og tan

(13) $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

(14) $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

(15) $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

(16) $\cos(-x) = \cos(x)$

(17) $\sin(-x) = -\sin(x)$

(18) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

(19) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(20) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

(21) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

(22) $\tan(-x) = -\tan(x)$

(23) $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

Grafer for sin, cos og tan

Tabel over sin, cos og tan for 0º, 30º, 45º, 60º og 90º

Afledet funktion (Differentialregning) og **Stamfunktion**

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$
(24) $\sin(x)$	$\cos(x)$	(27) $-\sin(x)$
(25) $-\cos(x)$	$\sin(x)$	(28) $\cos(x)$
(26) $-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\tan(x)$	(29) $\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
	$(\cos(x))^2$	(30) $\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cdot\cos(x))$
	$(\sin(x))^2$	(31) $\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cdot\cos(x))$
	$(\tan(x))^2$	(32) $\tan(x) - x$

Harmonisk svingning

(33) $y = A\cdot\sin(\omega t + \phi)$

Graf for harmonisk svingning

Differentialligninger

Ligning	*Løsning*
(34) $\frac{d^{2y}}{dx^2} = -k^{2y}$	$y = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx) = A\cdot\sin(kx+\phi)$ hvor $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$

Matematiske standardsymboler

(35) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	**(37)** $\arcsin(y) = x \Leftrightarrow \sin(x) = y$	**(40)** $\arcsin(0{,}5) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$
	(38) $\arccos(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y$	**(41)** $\arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$
(36) $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	**(39)** $\arctan(y) = x \Leftrightarrow \tan(x) = y$	**(42)** $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

* Både formler fra Matematisk Formelsamling fra 1998 og Matematisk formelsamling fra 2007 er i oversigten. Nummerering er forfatterens egen. Nummer i **fed** betyder at formlen kun er i 2007-versionen og baggrundsfarve betyder at formlen kun medtaget i 1998-versionen.

Figur 8: Indhold i formelsamling som vedrøre trigonometriske funktioner.

Afsnittet Matematiske standardsymboler er det eneste sted i formelsamlingen fra 2007 tan er nævnt ud over $\tan A = \frac{a}{b}$ (formel (3)). Hvilket vil sige at tan lader til at udgøre en ubetydelig del af stoffet og derfor vil vi i det følgende typisk nøjes med at nævne sin og cos når jeg taler om trigonometriske funktioner. I det følgende vil 'formelsamlingen' betyde formelsamlingen fra 2007 medmindre andet er nævnt.

På baggrund af oversigten (figur 8) vil jeg opstille en emneliste med fokus på de trigonometiske funktioner. Jeg har valgt her at skelne mellem de emner, jeg ser som *kerneemner*, som er emner der er vigtige for opfattelsen af, hvad sin og cos er, og emner hvor sin og cos optræder, men hvor der er tale om *anvendelser* af kerneemner. Emnerne skal opfattes som underemner til emnet trigonometriske funktioner, og vil, deres generelle betegnelser til trods, altså kun dække stof inden for emnet trigonometriske funktioner. Jeg vil forsøge, at opstille listen over kerneemner i en rækkefølge som afspejler en faglig progression, og vil nedenfor kort gøre rede for en sådan progression.

Der kan være forskellige måder at tilgå trigonometriske funktioner på. Ser man på forskellige gymnasielærebøger vil det være forskelligt, hvordan de trigonometriske funktioner indføres. Sinus og cosinus i forbindelse med retvinklede trekanter, er blevet obligatorisk i folkeskolen med Fællesmål 2009 (Undervisningsministeriet 2009b), men der er gymnasielærebøger, der først beskriver sinunus og cosinus ved enhedscirklen, og dernæst redegører for formlerne gældende for retvinklede trekanter (f.eks.Carstensen, Frandsen & Studsgaard (2005)). Af ældre dato findes også eksempler på at sinus og cosinus introduceres ifm. vektorregning (Kristensen & Rindung 1975).

<table>
<tr><th colspan="2">EMNELISTE</th></tr>
<tr><th>Kerneemner</th><th>Anvendelser</th></tr>
<tr><td>- Retvinklede trekanter
- Arcsin mv.
- Vilkårlige trekanter
- Enhedscirkel
- Identiteter
- Grafer for sin, cos og tan
- Eksakte værdier
- Harmoniske funktioner
- Differentialregning
- Integralregning
- Differentialligninger</td><td>- Hældningskoefficient for linje
- Vinkel mellem vektorer/linjer/planer
- Cirkel-parametrisering</td></tr>
</table>

Figur 9: Oversigt over emner som vedrører trigonometriske funktioner.

I min liste over kerneemner (figur 9) har jeg valgt udgangspunktet til at være *retvinklede trekanter* svarende til formlerne (1)-(3). De trigonometriske funktioner har ift. retvinklede trekanter domænet]0;90[, regnet i grader, og i følgende emner vil dette domæne udvides.

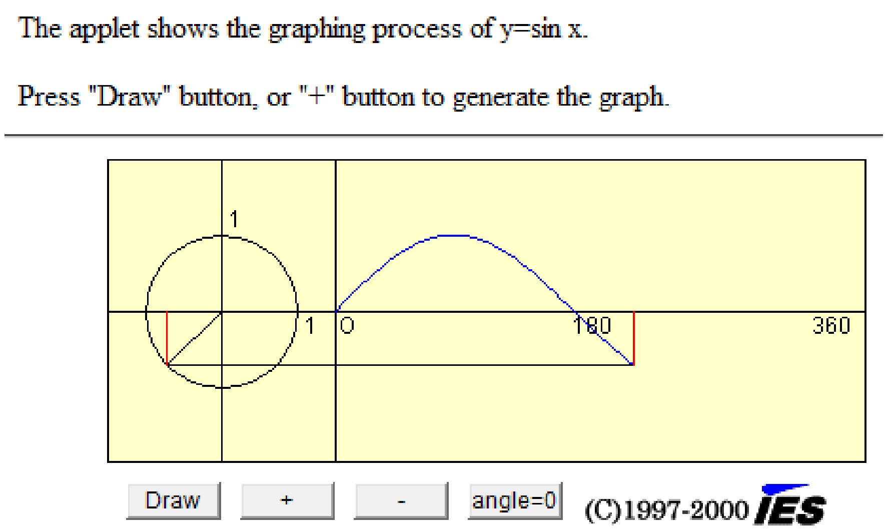
Ifm. opgaver vedrørende retvinklede trekanter benyttes de inverse trigonometriske funktioner arcsin, arccos og arctan til at løse ligninger opstillet på baggrund af formlerne (1)-(3). Jeg har valgt at lade *arcsin mv.* være det andet emne på min liste, som svarer til formlerne (37)-(39).

I emnet *vilkårlige trekanter* er sin, cos og tan udvidet til at være defineret i intervallet]0;180[regnet i grader (tan er dog ikke defineret for 90º, hvor cos er 0). Stoffet inden for dette emne svarer til formlerne (4)-(6).

Ved *enhedscirklen* udvides domænet for de trigonometriske funktioner yderligere. Ud fra enhedscirklen er det muligt at definere de trigonometriske funktioners domæner til at være alle reelle tal (tan er dog ikke defineret for $\frac{\pm n\cdot\pi}{2}$ hvor *n* er et ulige naturligt tal, regnet i radiantal). Der er i formelsamlingen formler for omregning mellem grader og radianer, men disse er ikke medtaget her, da de ikke direkte vedrører trigonometriske funktioner. Der er i formelsamlingen en tegning af enhedscirklen, hvorpå sin og cos er angivet.

Ud fra enhedscirklen kan der udledes en række af trigonometriske formler, og en del af disse er formlerne (13)-(23). Jeg har valgt at kalde emnet, svarende til disse formler, for *identiteter.*

Enhedscirklen gør det også muligt at konstruere *grafer for sin, cos og tan*, og grafer er også med i formelsamlingen. På figur 10 er vist, hvordan dette kan gøres ved hjælp af et program.



Figur 10: Program som tegner graf ud fra enhedcirkel (kilde: http://www.ies.co.jp/math/products/trig/applets/graphSinX/graphSinX.html).

Ved enhedscirklen, og formler der kan udledes af denne, er det muligt at finde *eksakte værdier* for de trigonometriske funktioner. I formelsamlingen fra 1998 er medtaget en tabel over eksakte værdier af de trigonometriske funktioner og formlerne (40)-(42) giver eksakte værdier for de inverse trigonometriske funktioner.

Grafer giver mulighed for at visualisere *harmoniske funktioner,* som er et emne svarende til formel (33) (se også afsnittet *Analyse-sektor*).

De næste to emner på listen er *differentialregning* og *integralregning* svarende til henholdsvis formlerne (27)-(32) og formlerne (24)-(26). Selvom det ikke er oplagt ud fra det foregående stof, er sin, cos og tan funktioner, der kan differentieres og integreres, hvilket kræver lidt arbejde med grænseværdier og anvendelse af trigonometriske formler.

Afslutningsvis på listen er emnet *differentialligninger,* svarende til formel (34), som bygger på differentialregning.

I tillæg til disse kerneemner er der tre emner, som jeg har valgt betegne som 'anvendelser'. Emnet *hældningskoefficient for linje* svarer til formlen (9), der kan udledes af formel (3). Emnet *vinkel mellem vektorer/linjer/planer* svarer til formlerne (7), (8), (11) og (12) som bl.a. bygger på formel (4). Det sidste emne *cirkel-parametrisering* svarer til formel (10), og er en konsekvens af at sin og cos er koordinaterne til et punkt på enhedscirklen.

Man kunne godt have valgt en anden emneopdeling end ovenstående, men dette er ikke af afgørende betydning, da formålet blot er at give et overblik over stoffet vedrørende trigonometriske funktioner. Emnerne i min opdeling er indbyrdes disjunkte og de dækker alt stoffet vedrørende trigonometriske funktioner i formelsamlingen på nær formlerne (35) og (36). Disse formler kan betragtes som definitioner af henholdsvis tan og cos. Man kunne godt have medtaget et emne, som kunne kaldes definitioner af trigonometriske funktioner, men et sådan emne ville gå på tværs af min opdeling, da eksempelvis formel (3) også kan opfattes som en definition af tan – i formelsamlingen fra 1998 er tan også givet ud fra enhedscirklen.

Efter at have givet dette overblik over stof vedrørende trigonometriske funktioner, vil jeg nu se nærmere på opgaver, som relaterer sig til dette stof.

Opgaver vedrørende trigonometriske funktioner

I dette afsnit vil jeg se nærmere på centralt stillede opgaver vedrørende trigonometriske funktioner. Jeg vil opstille kategorier, som opgaverne kan siges at falde inden for, på baggrund af de formler som benyttes ved løsning af opgaverne. I de følgende underafsnit vil jeg for hver kategori give et eksempel på en eksamensopgave og beskrive løsningen af denne.

Jeg har gennemgået alle de 28 centralt stillede eksamenssæt, som er lavet på baggrund af gymnasiereformen fra 2005. Dvs. jeg har set på eksamenssæt for B-niveau siden 2007 og for A-niveau siden 2008 frem til skrivende stund. Jeg har identificeret de forskellige opgaver hvor sin, cos eller tan indgår i opgaveformulering, eller er nødvendige for besvarelsen af opgaven. I hvert sæt var der mindst en opgave omhandlende de trigonometriske funktioner, hvilket understreger at trigonometriske funktioner er obligatoriske i gymnasiet.

Der er 15 B-niveau-sæt og 13 A-niveau-sæt for den nye ordning efter reformen, som hver indeholder mellem 13 og 17 opgaver. Der er i alt 45 opgaver vedrørende sin, cos eller tan, hvoraf 2 opgaver går igen på både A- og B-niveau og der er yderligere 2 opgaver, hvor forskellen på A- og B-niveau blot er at der på B-niveau er tilføjet en skitse. Dvs. at der egentlig er 41 forskellige opgaver.

Selvom formelsamlingen ikke er definerende for stoffet til den skriftlige eksamen svarer formlerne i det store og hele til de formler, som benyttes ved løsning af eksamensopgaverne. Det er derfor på baggrund af benyttede formler muligt at opstille forskellige kategorier af opgaver. Som vist på figur 11 har jeg valgt fire kategorier som tilsammen indeholder alle opgaverne (eksamensopgaverne på nær vinkelberegninger står i appendikset *Centralt stillede opgaver*). Der er opgaver, hvor man skal lave trekantsberegninger, såsom at finde vinkler eller sider i en givet trekant og hvor formlerne (1)-(6) benyttes. Sådanne opgaver har jeg valgt at kalde *trekantsberegninger.* Der er også andre opgaver, som går ud på at beregne vinkler, nemlig vinkler mellem vektorer, og hvor formlerne (7), (8), (11) og (12) benyttes. Disse opgaver betegnes som *vinkelberegninger*. Til denne kategori hører også opgaver hvor vinkel mellem linjer og mellem planer samt mellem linje og plan skal findes, da disse opgaver benytter samme formler.

Forskellen på trekantsberegning og vinkelberegning er udover de anvendte formler at trekantsberegninger er geometri-opgaver i den forstand, at de vinklerstørrelser, som er opgivet henholdsvis skal findes, er vinkler i geometriske figurer såsom trekanter eller andre polygoner. Opgaver i kategorien vinkelberegning vedrører vektorer og andre objekter fra analyse såsom linjer og planer. Så selvom beregning af vinkler i en hvis forstand altid vedrører trekanter, er det i praksis ikke svært at skelne mellem de to kategorier.

Udover trekantsberegninger og vinkelberegninger er der opgaver, hvor man skal differentiere eller integrere udtryk indeholdende trigonometriske funktioner, og disse opgaver har jeg placeret henholdsvis i kategorierne *differentialregning* og *integralregning*. Formler der benyttes her er henholdsvis (24) og (25) samt (27) og (28).

EKSAMENSOPGAVER FOR STX A OG B (2007-2011) VEDR. SIN, COS OG TAN*		
Kategorier	*Antal*	*Bemærkning*
Trekantsberegninger	26	Specielle: opgave 17, aug 2009 A-niveau opgave 16b, aug 2007 B-niveau
Vinkelberegninger (kun opgaver på A-niveau)	12	Mellem to vektorer: 3 opg. Mellem to linjer: 1 opg. Mellem plan og linje: 5 opg. Mellem to planer: 3 opg.
Differentialregning (kun opgaver på A-niveau)	2	opgave 12, dec 2008 A-niveau opgave 12, maj 2011 A-niveau
Integralregning (kun opgaver på A-niveau)	1	opgave 14, maj 2010 A-niveau
* Alle opgaver er fra delen med hjælpemidler. Der er forudsat internetadgang ved eksamen i maj 2010 og ved alle eksamenerne i 2011.		

Figur 11: Eksamensopgavers fordeling på forskellige kategorier.

Der er i alt 26 opgaver inden for trekantsberegninger og 12 inden for vinkelberegning, mens der kun er 2 som i kategorien differentialregning og 1 i integralregning. Det skal her nævnes, at der på B-niveau kun er opgaver inden for trekantsberegninger, og at dette er grunden til, at antallet af disse opgaver er så stort, men under alle omstændigheder er det værd at bemærke, at der fra centralt hold næsten udelukkende stilles opgaver inden for trekantsberegning og vinkelberegning. Kun få opgaver vedrørende trigonometriske funktioner stilles inden for differential- og integralregning.

Opgaver i trekantsberegning

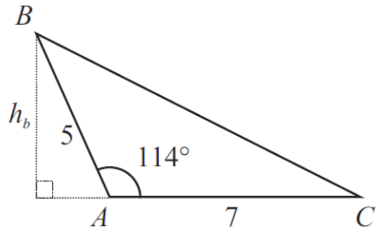
Et eksempel på en opgave i trekantsberegning er vist på figur 12, og vi skal her se lidt nærmere på hvad det vil sige at løse denne opgave.

Skriftlig eksamensopgave 9 fra maj 2009, B-niveau*

Opgave 9 I trekant ABC er $|AB| = 5$, $|AC| = 7$ og $\angle A = 114°$.

a) Bestem $|BC|$ og $\angle B$.

b) Bestem højden h_b, og bestem arealet af trekant ABC.



Evalueringskommentar for A-niveau	Evalueringskommentar for B-niveau
Tegne skitse af trekant (behøver ikke at være retvisende!). Identificere adspurgte stykker på figur. Benytte <u>cosinusrelation</u> til bestemmelse af modstående side. Benytte <u>sinusrelation</u> til bestemmelse af vinkel. Benytte retvinklet trigonometri til bestemmelse af højde. Indsætte det fundne i arealformel og beregne værdi.	Ud fra retvisende figur med stykkeangivelser og betegnelser. **a)** Indsætte i cosinusrelation med stumpvinkel. Løse den herved fremkomne ligning i <u>CASværktøj</u> (valg af rad/deg) fx "fsolve(bc^2=5^2+7^2-2*5*7*cos(114/180*Pi);". Dette kræver ikke kendskab til kvadratrødder. Opstille relevant sinusrelation til bestemmelse af vinkel. Løse denne ligning i CASværktøj. **b)** Identificere udenforliggende højde som modstående til supplementvinkel. Benytte retvinklet trigonometri til bestemmelse af højde, nu opfattet som katete.

* Opgaven er magen til opgave 9 fra maj 2009, A-niveau, hvor skitsen ikke er medtaget.

Figur 12: Eksempel på eksamensopgave i trekantsberegning.

Opgaven er typisk i den forstand, at der er opgivet nogle størrelser for en trekant, og at man så skal finde ubekendte størrelser. Spørgsmål a) vedrører en vilkårlig trekant, mens spørgsmål b) kan besvares ved at se på en retvinklet trekant. Det er værd at bemærke de evalueringskommentarer, der er givet til opgaven i et dokument fra Undervisningsministeriet (Undervisningsministeriet 2009a). Kommentaren til opgaven på B-niveau kan opfattes som en præcisering af punkterne i kommentaren til opgaven på A-niveau.

Ud fra kommentaren for A-niveau ses at opgave a) involverer cosinus- og sinusrelation (formlerne (4) og (5)), som har med vilkårlige trekanter at gøre, og at opgave b) involverer retvinklet trigonometri. Som forudsætninger for at opgaven er løst tilfredsstillende, skal der tegnes en skitse hvor ud fra "adspurgte stykker" kan identificeres, og der skal redegøres for de mellemregninger der benyttes for at komme frem til størrelsen af disse stykker. Dette fremgår også af en indledning til opgavesættet, opgaven stammer fra, hvor det er beskrevet, at bl.a. følgende skal indgå i bedømmelse af opgavebesvarelsen:

"– en dokumentation ved et passende antal mellemregninger

– en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder

– en brug af figurer og illustrationer

– en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer" (Undervisningsministeriet u.å.a).

En tilfredsstillende opgavebesvarelse indbefatter altså både nogle geometriske betragtninger og noget algebra samt redegørelse for brugen af instrumenter, som eksempelvis CAS-værktøjer. I kommentaren til opgaven på B-niveau nævnes ifm. opgave a) ”cosinusrelation med stumpvinkel” og ”opstille relevant sinusrelation”, som henviser til algebraisk aktivitet. Ifm. løsning af opstillede ligning vha. CAS-værktøj nævnes ”valg af rad/deg” og en kommando-streng, hvilket antyder at et CAS-værktøj ikke bare løser en opgave, men at der er tale om en instrumenteret teknik. Under b) nævnes, at man skal ”Identificere udenforliggende højde som modstående til supplementvinkel” hvilket er en geometrisk betragtning.

Det skal nævnes, at opgaven også kan løses vha. programmer, der specifikt er designet til at løse opgaver i trekantsberegning. På hjemmesiden cossincalc.com er der et sådan program, der kan bruges online eller downloades. Med indførslen af digitale eksamensopgaver med netadgang til eksamen gældende fra 2011 er et program som dette et muligt værktøj. I appendikset *CosSinCalc* er vist hvordan der indtastes opgivne størrelser, og hvilket resultat programmet giver. Selvom det vha. cossincalc er nemt at indtaste de opgivne sider og vinkler og få opgivet de ubekendte størrelser samt visse mellemregninger, er der ikke tale om, at programmet kan løse opgaven. Der gives kun mellemregninger for hvordan side og vinkler er fundet, og altså ikke for hvordan højden findes, og arealet af trekanten udregnes ikke.

De to delspørgsmål i opgaven er uafhængige af hinanden, og er hver især typiske opgaver i trekantsberegning. Eksamensopgaver består typisk af flere delspørgsmål, som kan opfattes som selvstændige opgaver, og selv inden for et delspørgsmål vil man kunne tale om at der er flere delopgaver. F.eks. i delspørgsmål a) i opgaven ovenfor er der en opgave, som går ud på at finde et linjestykke og en opgave, som går ud på at finde en vinkel. I min kategorisering af eksamensopgaverne, har jeg fokuseret på de delopgaver, som vedrører trigonometriske funktioner. Lader man delopgaver, som ikke vedrører trigonometriske funktioner, ude af betragtning, vil alle eksamensopgaverne i kategorien trekantsberegning være opgaver i retvinklede trekanter eller opgaver i vilkårlige trekanter eller en blanding heraf. På figur 13 er illustreret hvad der menes med opgaver i retvinklede trekanter og opgaver i vilkårlige trekanter.

<table>
<tr><th colspan="3">Retvinklede trekanter</th></tr>
<tr><td>Opgave</td><td colspan="2">Givet visse størrelser. Find ubekendte (sider, vinkler mv.).</td></tr>
<tr><td>Teknik</td><td>Identifikation af efterspurgte størrelser (skitse). Identifikation og anvendelse af formel (evt. mnemoteknik og manipulation).
Hjælpemidler: lommeregner, http://cossincalc.com/ mv.</td><td>Anvendelige formler:
$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$
$\arcsin(y) = x \Leftrightarrow \sin(x) = y$
$\arccos(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y$
$\arctan(y) = x \Leftrightarrow \tan(x) = y$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Vilkårlige trekanter</th></tr>
<tr><td>Opgave</td><td colspan="2">Givet visse størrelser. Find ubekendte (sider, vinkler mv.).</td></tr>
<tr><td>Teknik</td><td>Identifikation af efterspurgte størrelser (skitse). Identifikation og anvendelse af formel (evt. manipulation og løsning af andengradsligning).
Hjælpemidler: lommeregner, http://cossincalc.com/ mv.</td><td>Anvendelige formler:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\text{ab} \cos C$
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
$T = \frac{1}{2} a\, b \sin C$</td></tr>
</table>

Figur 13: Opgaver i kategorien trekantsberegning.

Opgaverne i trekantsberegning er pakket ind på forskellige vis, og som eksempler herpå kan nævnes opgave 17 fra august 2009 (A-niveau). Opgaven er stillet som en modelleringsopgave, og går ud på at redegøre for at et udtryk med sin og cos, som beskriver en kanals tværsnit. Et andet eksempel er opgave 16b fra august 2007 (B-niveau), hvor en trekants sidelængder er givet ved x, $\frac{x}{3}$ og $\frac{3x}{4}$, og man så skal finde en vinkel. I afsnittet *Geometri-sektor* (side 31) vil jeg nærmere beskrive opgaver i trekantsberegning.

Opgaver i vinkelberegning

Et eksempel på en eksamensopgave i vinkelberegning er vist på figur 14. Der er kun medtaget spørgsmål b) og det af evalueringskommentaren, som knytter sig til dette spørgsmål, da resten af opgaven ikke vedrører trigonometriske funktioner. Opgaven er typisk for kategorien i den forstand, at løsningen indebærer at man skal finde frem til vektorer, hvor vinklen mellem disse svarer til den efterspurgte vinkel.

Skriftlig eksamensopgave 6, spørgsmål b), fra maj 2009, A-niveau
Opgave 6 I et koordinatsystem i rummet har en kugle centrum i $C(0,0,5)$, og punktet $P(2,-1,7)$ ligger på kuglen. En tangentplan α til kuglen er givet ved ligningen $x + 2y - 2z + 1 = 0$. b) Bestem den spidse vinkel mellem α og linjen gennem C og P.
Evalueringskommentar
Identificere adspurgt vinkel mellem linje og plan på figur. Opstille udtryk for vinkel ved hjælp af skalarprodukt og trigonometri. Bestemme vinkel (vs. komplementærvinkel/supplementvinkel)

Figur 14: Eksempel på eksamensopgave i vinkelberegning.

Opgaven kan løses ved at finde en normalvektor til tangentplanen og finde vinklen mellem denne og vektoren $\overrightarrow{CP}$. Dette kan gøres ved at benytte formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$. Herefter findes komplementærvinklen til denne vinkel. Er den fundne komplementærvinkel stump, er den efterspurgte vinkel supplementvinklen til denne.

På figur 15 er illustreret opgaver i vinkelberegning.

Vinkel mellem vektorer		
Opgave	Givet visse objekter (linjer, planer mv.). Find vinklen mellem to vektorer!	
Teknik	Identifikation af efterspurgt vinkel (figur). Identifikation af vektorer og anvendelse af formel.	Anvendelige formler: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$ (vektorer i plan og rum) $det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$ (vektorer i plan) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$ (vektorer i rum)

Figur 15: Opgaver i kategorien vinkelberegning.

Jeg vil i det følgende ikke se nærmere på opgaver inden for denne kategori, da jeg vil fokusere på opgaver som vedrører kerneemner (se figur 9). Denne kategori af opgaver vedrører anvendelser og er medtaget her for at gennemgangen af eksamensopgaverne er systematisk.

Opgaver i differentialregning

Det skal bemærkes at det empiriske grundlag for denne kategori kun består af 2 opgaver (se figur 11). I den ene opgave skal man finde *x*'er for hvilke den afledte af funktionen *f*, givet ved $f(x)=x+2\sin x$ defineret for $x\in[0;2\pi]$, er 0 (se figur 16), og i den anden opgave skal man finde værdien af den afledte til funktionen *f*, givet ved $f(t)=6{,}61\cdot\sin(0{,}0167t-1{,}303)+12{,}2$ defineret for $0\leqslant t\leqslant 365$, i et punkt (opgave 12, maj 2011, A-niveau). Disse to opgaver ligner andre eksamensopgaver, hvor blot funktionsudtrykket ikke indeholder trigonometriske funktioner, og kan betragtes som almindelige eksamensopgaver i den forstand at der i et eksamenssæt (A-niveau) typisk er en lignende opgave.

For at løse ligningen $f'(x)=0$ er det nødvendigt først at differentiere funktionen $f(x)$. Dette kan gøres enten ved hjælp af CAS-værktøj eller ved at benytte formler for de afledte trigonometriske funktioner og regneregler for differentialkvotienter. I en besvarelse vil der altså enten skulle redegøres for brugen af CAS-værktøj eller for udledning af udtrykket for den afledte på mere traditionel vis. Udtrykket for den afledte indeholder cos, så at løse ligningen er egentligt også en opgave vedrørende trigonometriske funktioner. Jeg har valgt ikke at lave en særskilt kategori for sådanne opgaver, da de optræder i tilknytning til opgaver inden for en af de opstillede kategorier.

Skriftlig eksamensopgave 12 fra december 2008, A-niveau
Opgave 12 En funktion f er bestemt ved $$f(x)=x+2\sin x,\quad x\in[0;2\pi].$$ a) Løs ligningen $f'(x)=0$, og gør rede for monotoniforholdene for f.

Figur 16: Eksempel på eksamensopgave i differentialregning.

Opgaver i differentialregning kan være formuleret i forskellige sammenhænge, som eksempelvis opgave 12 maj 2011 hvor den omhandlende funktion repræsenterer en model for lænden af dagen et givet sted.

Opgaver i differentialregning vedrører typisk monotoniforhold for en funktion og på figur 17 har jeg illustreret sådanne opgaver.

Monotoniforhold		
Opgave	Find monotoniforhold for en funktion hvis udtryk indeholder trigonometiske funktioner.	
Teknik	Differentier funktionsudtrykket. Løs $f'(x)=0$ og find fortegnet for $f'(x)$ i intervallerne mellem løsningerne. Evt. brug af CAS.	Formler: $f(x)$ → $f'(x)$ $\cos(x)$ → $-\sin(x)$ $\sin(x)$ → $\cos(x)$

Figur 17: Opgaver i kategorien differentialregning.

Opgaver i integralregning

Som for kategorien differentialregning er det empiriske grundlag for kategorien tyndt, da der kun er én opgave i integralregning vedrørende trigonometriske funktioner i eksamenssættene. Ser man på terminsprøver (Undervisningsministeriet u.å.c), er der dog yderligere 2 opgaver inden for denne kategori (vist i appendikset *Centralt stillede opgaver*). Typisk er der en opgave i hvert eksamenssæt, som ligner en opgave i denne kategori, men hvor udtrykket for funktionen, som skal integreres, ikke indeholder trigonometriske funktioner.

På figur 18 er vist eksemplet på en integralregningsopgave.

Skriftlig eksamensopgave 14 fra maj 2010, A-niveau

Opgave 14 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + 1 + \sin(x) \qquad \text{og} \qquad g(x) = -x + 2 - \cos(x).$$

Graferne for de to funktioner afgrænser sammen med linjen med ligningen $x = 2\pi$ et område M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

Den lodrette linje med ligningen $x = c$ deler M i to punktmængder, der har samme areal.

b) Bestem værdien af c.

Figur 18: Eksempel på eksamensopgave i integralregning.

For at besvare del-spørgsmålet a) vil bestemte integraler fra 0 til 2π skulle udregnes, og ifm. b) skal en ligning løses. Jeg vil dog ikke give nærmere beskrivelse ligningsløsningsopgaven. På figur 19 er illustreret opgaver i integralregning.

<table>
<tr><th colspan="3">Areal under graf</th></tr>
<tr><td>Opgave</td><td colspan="2">Find arealet afgrænset af funktioner hvis udtryk indeholder trigonometriske funktioner.</td></tr>
<tr><td>Teknik</td><td>Integrer funktioner og udregn bestemte integraler. Evt. brug af CAS.</td><td>Formler:<table><tr><th>$f(x)$</th><th>$\int f(x)\,dx$</th></tr><tr><td>$\cos(x)$</td><td>$\sin(x)$</td></tr><tr><td>$\sin(x)$</td><td>$-\cos(x)$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Figur 19: Opgaver i kategorien integralregning.

Hermed er beskrivelsen af stof og eksamensopgaver slut, og jeg vil nu på baggrund af dette materiale opstille en epistemologisk referencemodel.

Epistemologisk referencemodel

I det foregående har jeg beskrevet stoffet vedrørende de trigonometriske funktioner ved bl.a. at opstille en emneliste (se figur 9, side 21). Jeg har også opstillet kategorier for forskellige opgaver, som vedrører trigonometriske funktioner (se figur 11, side 24). Disse forudgående arbejder er udgangspunktet for dette afsnit, men jeg vil her, i modsætning til i det foregående, se på stoffet og opgaver vedrørende de trigonometriske funktioner i lyset af ATD. I dette afsnit vil jeg pege på tre sektorer, som stoffet vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet kan siges at ligge inden for, og i følgende underafsnit vil jeg præcisere, hvad hver af disse sektorer dækker over, bl.a. ved at beskrive tilhørende opgavetyper. Denne beskrivelse vil udgøre den epistemologiske referencemodel.

Ser man på emnelisten, så vedrører emnerne forskellige slags objekter (se afsnittet *Stofoverblik*, side 18). Man kan sige, at emnerne *Retvinklede trekanter*, *Vilkårlige trekanter* og *Enhedscirkel* vedrører geometriske objekter (linjestykker og vinkler), emnerne *Arcsin mv.*, *Identiteter* og *Eksakte værdier* vedrører algebraiske objekter (formler), og emnerne *Grafer for sin, cos og tan*, *Harmoniske funktioner*, *Differentialregning*, *Integralregning* og *Differentialligninger* vedrører analytiske objekter (funktioner). Det er måske ikke oplagt at emnerne *Arcsin mv.* og *Eksakte værdier* omhandler algebraiske objekter, men man skal huske på, at de inverse trigonometriske funktioner bruges til at løse ligninger, og at eksakte værdier findes ved at bruge forskellige formler, så emnerne kan således betragtes som omhandlende algebraiske objekter.

Disse betragtninger vedrørende emnerne giver anledning til at betragte tre sektorer; en *geometri-sektor*, en *algebra-sektor* og en *analyse-sektor*. Disse tre sektorer skal forstås ift. matematik i gymnasiet, og er altså ikke identiske med hvad man forstår ved de tre matematiske discipliner på videregående niveau. En sektor er defineret som en samling af prakseologier med en fælles teori (se mere herom i afsnittet *Den teoretiske ramme*, side 8). Matematikken i en sektor kan organiseres vha. MO'er, hvilket gør det muligt at konkretisere teoriblokken og praksisblokke i sektoren.

For at det er klart, hvad en sektor dækker over, er det ikke nok at pege på noget teori; praksisblokke teorien tilhører må også klarlægges. Dette vil jeg gøre ved at beskrive opgavetyper, der kan ligge til grund for teorien.

Til at beskrive opgavetyper inden for de tre sektorer vil undersøgelsen af skriftlige eksamensopgaver være en hjælp (afsnittet *Opgaver vedrørende trigonometriske funktioner*, side 23). Opgaverne i kategorien *trekantsberegning* kan opfattes som opgaver inden for geometri-sektoren. Opgaverne i kategorierne *differentialregning* og *integralregning* kan opfattes som opgaver inden for analyse-sektoren. Der er ikke i forbindelse med undersøgelsen af eksamensopgaver fundet opgaver, som ligger inden for algebra-sektoren. Gennemgangen af eksemplet på en opgave i trekantsberegning antydede dog, at brug af algebra var nødvendig for at besvare opgaven tilfredsstillende. Samtidig vil erfaring med algebra være en forudsætning for teorien for løsning af vinkelberegningsopgaver samt differential- og integralregningsopgaver – f.eks. bruges cosinusrelationen i forbindelse med beviset for formlen $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$, og formlen for sinus af en vinkelsum, $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, benyttes i beviset, for at den afledte funktion af sinus er cosinus.

Altså er det, til trods for at der ikke er fundet opgaver, som kan opfattes som tilhørende en algebra-sektor, tilsyneladende relevant med sådanne opgavetyper.

I det følgende vil jeg opstille MO'er inden for de tre sektorer for at tydeliggøre stoffet. Beskrivelsen af stoffet vedrørende de trigonometriske funktioner dækker ikke nødvendigvis alt relevant stof. Der kan eksempelvis være relevant stof, som ikke er repræsenteret i de anvendte kilder, og der kan endog være andre sektorer, end de tre nævnte, som er i spil. F.eks. kunne de trigonometriske funktioner siges at vedrøre en aritmetik-sektor, ved at de kan bruges til at bestemme det transcendente tal π – en sådan sektor vil dog ikke referere til noget kernestof, og er ikke medtaget i overvejelserne her.

Selvom det ikke er muligt at give en model, som er fuldstændig dækkende, og som udtømmende beskriver stoffet, kan en model være med til at belyse problemstillinger ift. det eksisterende pensum.

Dette speciale har en pragmatisk tilgang til modelleringen, og jeg vil derfor ikke blive fokuseret på at lave et fuldstændigt udtømmende MO-hierarki (se afsnittet *Den teoretiske ramme*, side 8). Detaljeringsgraden af beskrivelserne varierer ift. hver sektor, således at det er forskelligt hvor repræsentative de nævnte opgaver er for alle relevante opgaver. Beskrivelser af henholdsvis opgave, teknik, teknologi og teori vil heller ikke være lige detaljerede. Specielt er teknologi og teori ikke uddybet nærmere.

I det følgende er afsnittet om geometri-sektoren delt op i *retvinklede trekanter* og *vilkårlige trekanter* samt *enhedscirklen*, som også er behandlet i dette afsnit. I afsnittet om algebra-sektoren er de trigonometriske formler beskrevet og disse anvendelse ifm. at finde *eksakte værdier* af de trigonometriske funktioner. Afsnittet om analyse-sektoren beskriver den harmoniske funktion og differential- og integralregning samt nævner differentialligninger. I afsnittet *Andet stof* er der beskrevet et emne, som kan være relevant stof, men som ikke er placeret i en af de tre sektorer.

Der vil ikke her gives en samlet oversigt over sektorene men i det efterfølgende, afsnittet *Perspektiver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner,* vil jeg se på sektorernes indbyrdes forhold, og beskrive perspektiver modellen giver anledning til. Der vil i det følgende være en del steder, hvor der er henvist til formler ved at opgive det nummer, som de har fået ifm. oversigten over formelsamlingen (figur 8, side 20).

Geometri-sektor

I dette afsnit vil jeg beskrive geometri-sektoren ift. trigonometriske funktioner og se nærmere på opgavetyper inden for denne sektor.

Med *geometri* menes her plan-geometri, for selvom trigonometriske funktioner historisk set er tæt forbundet med den sfæriske geometri, er dette ikke en fast del af pensum. Sfærisk geometri kunne tænkes inddraget i undervisningen i gymnasiet, som forløb baseret på supplerende stof, der kan være grundlaget for udarbejdelse af temaopgaver til den mundtlige eksamen, men jeg vil ikke komme nærmere ind på dette emne.

Opgavetyper inden for geometri-sektoren omhandler geometriske objekter, og ser man på opgaver vedrørende de trigonometriske funktioner, er det primært trekanter, som opgaverne drejer sig om.

Forudsætningen for at de trigonometriske funktioner er veldefinerede ift. trekanter, er sætningen om, at de tilsvarende sider i ensvinklede trekanter er proportionale. I modsat fald ville eksempelvis formlen $\sin A = \frac{a}{b}$ ikke kunne gælde for alle retvinklede trekanter. En anden interessant sætning er sætningen om trekanters kongruens (i det følgende *kongruenssætningen*). Sætningen lyder:

To trekanter er kongruente hvis ét af følgende er tilfældet:

I) tre sider er parvis lige store,

II) en vinkel og de hosliggende sider er parvis lige store,

III) to vinkler og den mellemliggende side er parvis lige store, eller

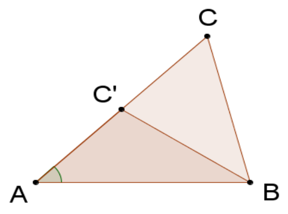
IV) to vinkler og en ikke-mellemliggende side er parvis lige store.

Da kongruens mellem to trekanter betyder at sider og vinkler er parvis lige store, udtrykker sætningen samtidig, hvornår en trekant er fastlagt op til kongruens – dvs. på nær translation, drejning eller spejling – ud fra information om sidelængder og vinkelstørrelser (se under afsnittet *Vilkårlige trekanter*). Det interessante i denne forbindelse er, at vha. de trigonometriske funktioner er det muligt at finde længden af alle siderne og størrelsen af vinklerne i en trekant, når der er givet tilstrækkelig med sidelængder og vinkelstørrelser til at trekanten er fastlagt.

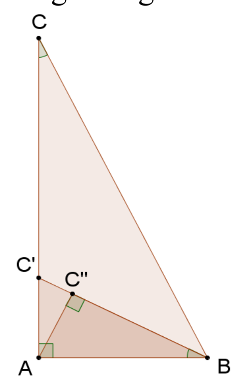
Bemærk, at hvis størrelsen af en vinkel, og længden af en hosliggende og en modstående side, er angivet vil en trekant generelt ikke være fastlagt, da der kan være to mulige trekanter som opfylder denne betingelse (se figur 20, venstre del). Er størrelsen af vinklen A givet, og længden |AB| samt længden af den til A modstående side, kan der være tale om de to forskellige trekanter; Δ ABC og Δ ABC', da |BC|=|BC'|.

MULIGE TREKANTER UD FRA VISSE ANGIVNE STØRRELSER

Én vinkelstørrelse samt hosliggende og modstående sidelængder er givet



To vinkelstørrelser og en sidelængde er givet:



Figur 20: Mulige trekanter i forskellige situationer.

Bemærk også, at man ikke ud fra III) og IV) kan slutte, at en trekant er fastlagt, når størrelsen af to vinkler, og længden af en side, er fastlagt – informationen, om hvilken side der er tale om, er nødvendig for, at trekanten er fastlagt. I dette tilfælde kan der være tre mulige trekanter, som opfylder betingelsen (se figur 20, højre del). Er sidelængden |AB| givet samt størrelsen af to vinkler, kan der være tale om de tre forskellige trekanter: Δ ABC, Δ ABC' og Δ ABC''. Disse trekanter har en side til fælles, og er ensvinklede (∠CAB=∠C'AB=∠BC''A og ∠ACB=∠ABC'=∠ABC''), så de opfylder derfor betingelsen.

Kongruenssætningen betyder, at der er en velafgrænset mængde af opgavetyper vedrørende trigonometriske funktioner i forbindelse med trekanter. Disse opgavetyper kan opdeles i to tilfælde; et hvor trekanten er retvinklet, og et andet hvor trekanten er vilkårlig. I de følgende to afsnit vil jeg nærmere beskrive disse opgavetyper. Opgaverne i trekantsberegninger, som er illustreret ved figur 13 (side 26), er formuleret lidt mere generelt, da de også omhandler andre størrelser end sidelængder og vinkelstørrelser, men jeg vil nedenfor blot nævne disse andre opgavetyper.

De trigonometriske funktioner har også forbindelse til et andet geometrisk objekt nemlig enhedscirklen. Trigonometriske funktioner kan fastlægges ud fra enhedscirklen, og der er en geometrisk sammenhæng mellem de trigonometriske funktioner og enhedscirklen. Sammenhængen kan også ses ud fra et analytisk perspektiv, men jeg har her valgt at give en samlet beskrivelse af enhedscirklen ift. trigonometriske funktioner og at medtage den ifm. geometri-sektoren i afsnittet *Enhedscirkel* nedenfor. Der er ikke, på sammen måde, som for trekanters vedkommende, en mængde af opgaver tilknyttet enhedscirklen, og jeg vil ikke redegøre for en egentlig MO.

Retvinklede trekanter

Med til beregning af sidelængder og vinkelstørrelser i retvinklede trekanter hører et velafgrænset opgaveområde. For de følgende beskrevne opgavetyper er udgangspunktet de allerede beskrevne opgaver under afsnittet *Opgaver i trekantsberegning* (side 24), samt det vedrørende stof, formlerne (1)-(3) og (37)-(39). Jeg vil her nærmere beskrive de opgavetyper vedrørende sider og vinkler i retvinklede trekanter, som er illustreret på figur 13, side 26.

Ift. opgaver inden for trekantsberegning er det afgørende, hvornår der er givet nok oplysninger til, at en trekant er fastlagt. *Kongruenssætningen* (jf. foregående afsnit) giver svaret på hvornår, der er opgivet tilstrækkeligt med vinkelstørrelser og sidelængder, til at en trekant er fastlagt.

I de følgende opgavetyper er der forudsat kendskab til Pytagoras's sætning, der gør det muligt at finde længden af den sidste side i en retvinklet trekant, når længden af to sider er kendt. Der er også forudsat kendskab til, at vinkelsummen i en trekant er 180°, som giver, at når størrelsen af to vinkler er kendt, er det muligt at finde størrelsen af den sidste vinkel – bemærk at en vinkelstørrelse her altid er givet, da det er retvinklede trekanter vi ser på. Der hvor de trigonometriske funktioner gør sig gældende er, at de angiver sammenhængen mellem sidelængder og vinkelstørrelser i en trekant. Faktisk er det muligt vha. trigonometriske funktioner at løse alle mulige opgaver, der går ud på at finde de ukendte størrelser, når der er givet tilstrækkelig med sidelængder og vinkelstørrelser til at trekanten er fastlagt.

Der er overordnet set følgende fire mulige opgavetyper svarende til punkterne I)-IV) i kongruenssætningen (jf. side 32, øverst). Ifm. retvinklede trekanter kan disse fire punkter beskrives ved følgende to punkter:

i) Givet længderne af to sider. Find ubekendte størrelser (sidelængder, vinkelstørrelser m.v.).

ii) Givet størrelsen af en vinkel (ikke-ret) og længden af en side. Find ubekendte størrelser (sidelængder, vinkelstørrelser m.v.).

Punkt i) svarer til punkt I) og II) i kongruenssætningen, og punkt ii) svarer til punkterne III) og IV) i kongruenssætningen.

Ift. punkt i) vil man, vha. Pytagoras's sætning, kunne finde længden af den ukendte side, så om der er to eller tre sidelængder som er angivet er ikke afgørende, og derfor svarer dette punkt til både I) og II). Ved brug af sin cos og tan (formlerne (1)-(3)) kan størrelsen af alle vinkler findes (evt. først finde størrelsen af én ikke-ret vinkel og dernæst bruge sætningen om vinkelsum til at finde størrelsen af den sidste vinkel). Her er det selvfølgelig underforstået, at det er opgivet, hvilke sider der er tale om. At vide om der enten er tale om to kateter eller om en hypotenuse og en katete er tilstrækkelig information til, at en trekant er fastlagt – en trekant fastlagt ved siden a og c er kongruent med en trekant fastlagt ved siden *b* og *c* når $a=b$.

Ift. punkt ii) – der svarer til III) og IV) i kongruenssætningen, da én vinkel er ret – er der to forskellige vinkler, størrelsen kan være opgivet af. Det er dog nok at betragte tilfælde ift. den ene af disse vinkler – en trekant, som er fastlagt ved vinkel *A* og en side relativ til denne, er kongruent med en trekant, som er fastlagt ved vinkel *B* og en tilsvarende side relativ til *B*. Her er det også underforstået, at det er givet hvilke sider, der er tale om – om det er en hosliggende eller modstående side, samt om det er en katete eller en hypotenuse.

På figur 21 er vist en oversigt over opgavetyperne ifm. retvinklede trekanter. I tilfældet hvor længderne af to sider er angivet (punkt i)), og de ubekendte skal findes, er der tre interessante opgavetyper, hvor det går ud på at finde størrelsen af en vinkel. Er der givet én katete og hypotenusen, kan man enten finde den mellemliggende vinkel eller den til kateten modstående vinkel. Er der givet de to kateter vil det iht. symmetribetragtninger være nok at se på en vinkel. De resterende ukendte vinkelstørrelser og sidelængder kan findes vha. Pytagoras's sætning og vinkelsummen.

OVERSIGT OVER OPGAVETYPER VEDRØRENDE RETVINKLEDE TREKANTER	
Givet to sider	
Opgavetype	*Teknik (lommeregner)*
Givet *a* og *c* find *A*	$A=\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$
Givet *a* og *c* find *B*	$B=\arccos\left(\frac{a}{c}\right)$
Givet *a* og *b* find *A*	$A=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$
Givet en vinkel og en side	
Opgavetype	*Teknik (lommeregner)*
Givet *A* og *a* find *c*	$c=\frac{a}{\sin A}$
Givet *A* og *a* find *b*	$b=\frac{a}{\tan A}$
Givet *A* og *b* find *c*	$c=\frac{b}{\cos A}$
Givet *A* og *b* find *a*	$a=b\cdot\tan A$
Givet *A* og *c* find *a*	$a=c\cdot\sin A$
Givet *A* og *c* find *b*	$b=c\cdot\cos A$
Forudsat stof: $a^2+b^2=c^2$, $A+B+C=180^\circ$ og $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$ samt formlerne (1)-(3)	

Figur 21: Opgavetyper inden for geometrisektoren.

I tilfældende hvor størrelsen af en ikke-ret vinkel og en sidelængde (a, b eller c) er givet, vil der være en opgavetype for hver af de ukendte sider, hvilket giver seks tilfælde. Igen er den ukendte, ikke-rette vinkel fundet ud fra kendskab til vinkelsummen i en trekant, så de seks opgavetyper kan siges at repræsentere alle opgaverne vedrørende sider og vinkler under punkt ii) ovenfor.

Opgavetyper ifm. retvinklede trekanter kan også vedrøre andre størrelser end vinkler og sider. Opgivne og efterspurgte størrelser kan være længden af højder, medianer eller vinkelhalveringslinjer. Disse andre linjestykker kan dog opfattes som sider i andre trekanter, og i den forstand vil disse andre størrelser ikke give anledning til andre opgavetyper, end hvad der er beskrevet i dette og det følgende afsnit.

Man kan også forestille sig opgavetyper, som vedører andre størrelser end vinklerstørrelser og sidelængder. F.eks. hvor værdien af en trigonometrisk funktion er givet samt længden af en bestemt side, og man så skal finde de resterende sider og vinklerne. Arealet af en trekant er en anden størrelse, som kan give anledning til opgaver i denne sammenhæng. Det er måske trivielt, at finde arealet af en retvinklet trekant, hvor sidelængderne er kendte, ud fra formlen $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$, men mindre trivielle er de opgaver, hvor arealet er blandt de opgivne størrelser, og man så skal finde sidelængder og vinkelstørrelser. Jeg vil dog ikke komme nærmere in på disse andre opgavetyper.

Teknikker til løsning af opgaverne er på figur 21 repræsenteret ved en løsningsformel, som ved udregning på lommeregner vil give den efterspurgte størrelse. Det skal dog bemærkes, at selvom det ved den skriftlige eksamen er tilladt at benytte CAS-værktøjer, som kan hjælpe til med finde løsningsformlen, er det nødvendigt også at redegøre for udledning af formlen, hvilket i de fleste tilfælde kræver arbejde med formler – de tilfælde hvor der ikke direkte benyttes en formel fra formlesamlingen (se afsnittet *Opgaver i trekantsberegning*). Der kan være mange måder at løse opgaverne på vha. forskellige formler, og den angivne formel er blot hvad forfatteren betragter som den mest simple. Opgaverne vil i høj grad dreje sig om at identificere opgivne og efterspurgte størrelser, evt. huske formler vha. mnemoteknik (Kendal & Stacey u.å., p. 1).

Ser man på teoriblokken til opgavetyperne, så vil formlerne (1)-(3) kunne bevises ud fra enhedscirklen, eller de vil kunne opfattes som definitioner af sin, cos og tan. Teknologien omhandler ligningsmanipulation og samspillet mellem formler, hvilke formler kan anvendes og hvor anvendelige er de enkelte formler. Til teorien hører at kongruenssætningen fastlægger en velafgrænset mængde af opgaver, og proportionaliteten af de tilsvarende sider i ensvinklede trekanter medfører, at trigonometriske funktioner er veldefinerede. Endvidere er der brug for at kende til de inverse trigonometriske funktioner, selvom kendskab til disse kan være begrænset til, at de er omvendte og så at sige ophæver henholdsvis sin, cos og tan. De benyttes, når man, ud fra kendskab til værdien af en trigonometrisk funktion, vil finde den tilsvarende vinkel.

Vilkårlige trekanter

Ift. vilkårlige trekanter kan man, ligesom for de retvinklede, tilgå opstilling af opgavetyper ud fra kongruenssætningen for trekanter. En vilkårlig trekant er fastlagt op til kongruens, som en direkte konsekvens af kongruenssætningen, når et af følgende er kendt:

ι) længderne af tre sider,

ιι) størrelsen af en vinkel og længderne af to hosliggende sider,

ιιι) længden af en side og størrelserne af to hosliggende vinkler, eller

ιν) længden af en side og størrelsen af en hosliggende og størrelsen af en modstående vinkel.

Sinus- og cosinusrelationerne (formlerne (4) og (5)) giver mulighed for at finde de ubekendte sidelængder og vinkelstørrelser, når trekanten er fastlagt. I tilfældet ι) hvor længderne af tre sider er kendt, kan man finde størrelserne af vinklerne ved at gøre brug af en passende cosinusrelation. Det samme gør sig gældende i tilfældet ιι) hvor størrelsen af en vinkel og længderne af to hosliggende sider er kendt. Her kan man vha. en passende cosinusrelation først finde længden af den ukendte side og derefter størrelserne af vinklerne (evt. vha. sinusrelationen). Er længden af en side og størrelserne af to hosliggende vinkler kendt, tilfældet ιιι), vil størrelsen af den sidste vinkel være at finde ud fra vinkelsummen i en trekant, og vha. en passende sinusrelation kan længderne af de ukendte sider så findes. Alternativt kan først længden af en side findes ved en sinusrelation, og længden af den sidste side findes ved en cosinusrelation. I tilfældet ιν) findes først længden af en side vha. sinusrelation, og derefter findes de resterende sidelængder og vinkelstørrelser ligesom beskrevet under ιιι) ovenfor.

På figur 22 er vist de tre opgavertyper som repræsenterer disse tilfælde. Der er ikke medtaget en opgavetype svarende til tilfældet ιιι), da en sådan kan opfattes som repræsenteret ved den nederste opgavetype i tabellen, ved at størrelsen af den ukendte vinkel findes ud fra vinkelsummen i en trekant.

LISTE OVER OPGAVER VEDRØRENDE VILKÅRLIGE TREKANTER	
Givet trekant ud fra sider og vinkler	
Opgavetype	*Teknik (lommeregner)*
Givet a, b og c find A	$A = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$
Givet a, b og C find c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$
Givet a, A og B find b	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$

Figur 22: Opgavetyper for vilkårlige trekanter.

Sinusrelationen kan bruges til at finde størrelsen af en vinkel, når længderne af to sider og størrelsen af en vinkel, som er modstående til en af siderne, er angivet. Arcsin er defineret i intervallet [–1;1] svarende til værdier i intervallet [–90º;90º]. Når man bruger arcsin ifm. sinusrelationen vil det altid være til et positivt tal. En omformulering af sinusrelationen vha. arcsin giver følgende formel for vinkel B: $B = \arcsin\left(\frac{b \sin A}{a}\right)$. Tallet, $\left(\frac{b \sin A}{a}\right)$, er positivt da a og b er sidelængder og størrelsen af vinkel A tilhører intervallet]0º;180º[. Dette betyder, at arcsin kun antager værdier i intervallet]0º;90º[. De trekanter, der her betragtes, er vilkårlige, så alle vinkler i intervallet]0º;180º[er mulige løsninger. Afhængig af om den pågældende vinkel er spids eller stump findes størrelsen af vinkelen enten direkte ved arcsin eller ved at trække værdien af arcsin fra 180º.

Selvom størrelsen af en vinkel samt længderne af en hosliggende side og en modstående side er givne, så er trekanten ikke nødvendigvis fastlagt. Generelt vil der være to mulige trekanter som opfylder disse betingelser (jf. figur 20, venstre del). Denne situation giver anledning til opgavetyper, som er vist på figur 23.

Til opgavetypen, hvor det er længden af den ukendte side, som skal findes, hører en teknik, der går ud på at løse en 2.-gradsligning, som opstilles ud fra cosinusrelationen.

Givet en vinkelstørrelse samt længderne af hosliggende og modstående side	
Opgavetype	*Teknik*
Givet a, b og A, find mulige c	$c^2-2bc\cos A-a^2+b^2=0$
Givet a, b og A, find mulige B	$B=\arcsin\left(\frac{b\sin A}{a}\right)$ (spids) og $B=180^\circ-\arcsin\left(\frac{b\sin A}{a}\right)$ (stump)

Figur 23: Opgavetyper når trekanten ikke er fastlagt.

Ligesom ifm. beskrivelsen af opgavetyper vedrørende retvinklede trekanter er teknikker repræsenteret på figurerne ved formler til at udregne den efterspurgte størrelse. I forbindelse med vilkårlige trekanter skal man dog være opmærksom på at arcsin ikke nødvendigvis giver den efterspurgte vinkel, da der også er stumpe tilfælde.

Ift. teoriblokken for opgavetyperne vil formlerne (4)-(6) kunne bevises ud fra geometriske betragtninger og formlerne (1) og (2). Teknologien omhandler ligningsmanipulation, samspil mellem formler og hvornår den enkelte formel kan anvendes.

Enhedscirkel

Med enhedscirklen udvides domænerne for de trigonometriske funktioner fra at være begrænsede til at være ubegrænsede. Ved at se på sinus og cosinus ud fra enhedscirklen er det muligt, at alle reelle tal kan være argumenter. I den foregående beskrivelse af indholdet af geometri-sektoren blev de trigonometriske funktioner først forbundet med retvinklede trekanter, og var altså kun definerede i intervallet]0º;90º[. Derefter blev domænet for sinus og cosinus udvidet ifm. vilkårlige trekanter til at være intervallet]0º;180º[. I det følgende vil sinus og cosius være defineret for alle vinkler, og jeg vil visse steder benytte radianer i stedet for vinkler, hvor det er passende.

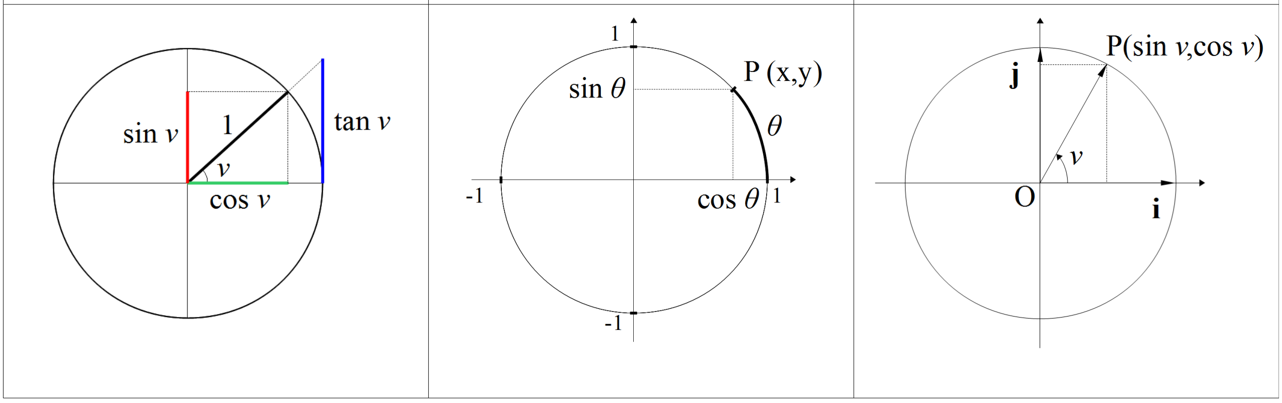
Der er forskellige måder at opfatte sinus og cosinus på ud fra enhedscirklen: som længden af linjestykker, som koordinater eller som vektorprojektioner. Til hver af disse forskellig måder, at tilgå stoffet på, hører hver sin definition af de trigonometriske funktioner. På figur 24 er vist tre enhedscirkler som illustrerer disse tilgange. Mens definitioner generelt i gymnasiematematikken ikke spiller en afgørende rolle, vil enhedscirklen i forbindelse med de trigonometriske funktioner spille en vigtig rolle ved at anskueliggøre funktionerne.

En en rent geometrisk tilgang er mulig, hvor de trigonometriske funktioner er fastlagt af bestemte geometriske størrelser (se figur 24, venstre del). Til enhver vinkel svarer der, for hver af de trigonometriske funktioner, et linjestykke. Ser man geometrisk på enhedscirklen, er sin, cos og tan fastlagt som længden af bestemte linjestykker for en given vinkel. Man kan ud fra proportionalitet af ensvinklede trekanter vise formlen $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$, der ifm. de andre tilgange til enhedscirklen vil være en definition af tangens.

En anden og mere analytisk tilgang er, hvor sinus og cosinus af radiantal defineres som koordinater til det tilsvarende punkt på cirklen (figur 24, midterste del). Enhedscirklen i formelsamlingen udtrykker denne definition. Her vil formlen $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ være en definition af tangens.

En tredje måde at se på enhedscirklen er ved at se på mængden af alle enhedsvektorer og beskrive denne ved at se på en roterende enhedsvektor $\overrightarrow{OP}$. Sin og cos kan så defineres som længden af projektioner af denne vektor på henholdsvis $\vec{j}$ og $\vec{i}$, der er enhedsvektorerne i henholdsvis y- og x-retning (se figur 24, højre del).

FORSKELLIGE MÅDER AT DEFINERE SIN OG COS PÅ UD FRA ENHEDSCIRKLEN		
Linjestykker	*Koordinater*	*Vektor*



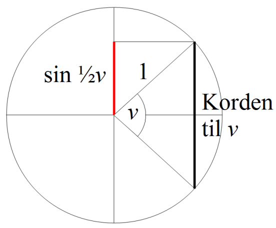
Figur 24: Sinus og cosinus givet ved enhedscirklen.

At se på enhedscirklen udelukkende ud fra et syntetisk geometrisk perspektiv vil ikke være hensigtsmæssigt, da sinus og cosinus i vid udstrækning optræder i mere analytiske sammenhænge.

At definere sin og cos som vektorprojektioner er nok heller ikke hensigtsmæssigt i første omgang da det kan opfattes som kompliceret, da vektorer typisk vil opfattes som et mere avanceret emne end trigonometriske funktioner (vektorer kun obligatorisk stof for matematik på A-niveau). Der er dog eksempler på at sin og cos introduceres ved vektorer, godt nok af ældre dato, så det er ikke en mulighed, som a priori kan udelukkes (se f.eks. Kristensen & Rindung 1975, p. 105f.).

Enhedscirklens bidrag ifm. trigonometriske funktioner er, at den fastlægger værdierne af de trigonometriske funktioner på en overskuelig måde. Samtidig vil visse egenskaber for og sammenhænge mellem de trigonometriske funktioner være åbenlyse, hvilket jeg vil fokusere på i næste afsnit. Ift. enhedscirklen er der ikke tilknyttet et velafgrænset mængde af opgavetyper, som vi så det ifm. trekanter, så der nævnes blot nogle opgaver, som man kan forestille sig i forbindelse med enhedscirklen.

Opgaver ifm. enhedscirklen kunne direkte vedrøre fastlæggelsen af de trigonometriske funktioners værdier, f.eks. at finde værdimængde for en trigonometrisk funktion restringeret på et interval, eller at finde originalmængden for en given værdi (at finde eksakte værdier er beskrevet i afsnittet Algebra-sektor nedenfor). Opgaver kunne også være mere generelle som f.eks.: Hvad er fortegnet for udtrykket $\sin(x)\cos(x)$ i hver af de 4 kvadranter? Der kan også være opgaver hvor sammenhæng mellem de trigonometriske funktioner og andre geometriske størrelser skal findes f.eks.: Givet en korde og den tilsvarende vinkel. Hvordan kan kordens længde udregnes vha. sinus? (se figur 25).



Figur 25: Længden af korden i en enhedscirkel til en vinkel svarer til det dobbelte af sinus til den halve vinkel.

Vi vil ikke her nærmere beskrive enhedscirklen og praksisblokke i denne forbindelse, men vil i næste afsnit se nærmere på nogle af de formler, der kan argumenteres for geometrisk ud fra enhedscirklen.

Algebra-sektor

I dette afsnit vil jeg beskrive algebra-sektoren ift. trigonometriske funktioner, og se nærmere på opgavetyper inden for denne sektor.

Algebra-sektoren beskæftiger sig med algebraiske udtryk og formler. Med *algebraiske udtryk,* menes udtryk som består af endelige kombinationer af symboler for tilladte størrelser (f.eks. konstanter og en variabel) med kompositionerne addition, subtraktion, multiplikation og division samt roduddragning. Med betegnelsen a*lgebraiske formler* vil her forstås ligninger bestående af to algebraiske udtryk, der er sat lig med hinanden. Jeg vil i det følgende betragte *trigonometriske formler*, der er defineret som algebraiske formler hvor, der i udtrykkene er tilladt konstanter samt funktionerne $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$. Yderligere er der tilladt at argumenter er algebraiske udtryk af konstanter og en variabel.

De trigonometriske formler optræder i forbindelse med opgaver, hvor det er nødvendigt at kunne manipulere dem, så de giver det ønskede resultat, opstilling af en løsningsformel, som det er beskrevet i forgående afsnit. Ifm. eksamensopgaver i både differentialregning og integralregning var der ligninger der skulle løses (jf. side 28f.).

De trigonometriske formler optræder også i høj grad i mere teoretiske sammenhænge, nemlig i forbindelse med beviser. Jeg vil i det følgende præsentere elementære trigonometriske formler og beskrive anvendelsen af trigonometriske formler til at finde eksakte værdier for de trigonometriske funktioner.

Opgaver inden for denne sektor vil typisk vedrøre omskrivninger af udtryk, men det kunne også være at se på sammenhængen mellem formler som f.eks. at se på hvilke formler, som kan genereres ud fra andre. Jeg vil fokusere på formler, som er oplagte ud fra betragtning af enhedscirklen.

Den nok mest oplagte trigonometriske formel, når sin og cos er givet som koordinater til et punkt på enhedscirklen, er formlen $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$, da den gælder ud fra definitionerne af sin og cos, når cirklen er kurven beskrevet ved $x^2+y^2=1$. Formlen giver en sammenhæng mellem sin og cos, så når værdien af den ene funktion er kendt, er det muligt at finde den numeriske værdi af den anden funktion. Formlen er vigtig, da den indgår i omskrivninger ifm. beviser. Eksempelvis indgår formlen i beviset for, at den afledte funktion til tan er $\frac{1}{(\cos x)^2}$.

Der er en række af trigonometriske formler, som via geometriske betragtninger følger af enhedscirklen. Ser man på enhedscirklen, er der to symmetriakser ift. sinus og cosinus. En symmetri svarende til x-aksen, hvor argumentet $x=0$, hvilket leder til formlerne $\cos(-x)=\cos(x)$ og $\sin(-x)=-\sin(x)$, der samtidig udtrukker at cos er en lige funktion, og sin er en ulige funktion. En anden symmetri svarende til y-aksen, hvor argumentet $x=\frac{\pi}{2}$, hvilket leder til formlerne $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ og $\sin(\pi-x)=\sin(x)$. Der er også en symmetri mellem sinus og cosinus nemlig linjen $x=y$, hvor argumentet $x=\frac{\pi}{4}$, som leder til formlerne $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$ og $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$.

En anden oplagt og vigtig egenskab ved de trigonometriske funktioner, når de er givet ud fra en cirkel, er at de er periodiske, hvilket udtrykkes ved formlerne $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ og $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$.

Bemærk at fomlerne $\cos(-x)=\cos(x)$ og $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$ tilsammen giver $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin(x)$, hvilket betyder at grafen for sin er magen til grafen for cos blot med en vandret forskydning af længde $\frac{\pi}{2}$.

Som eksempler på andre trigonometriske formler skal nævnes formler for trigonometriske funktioner til den dobbelte vinkel og mere generet generelt til en sum af vinkler (disse nævnes ifm. eksakte værdier nedenfor. Opgavetyper i denne sammenhæng vedrører altså at omskrive, reducere og simplificere udtryk ved hjælp af trigonometriske formler.

Eksakte værdier

Da der ikke er algebraiske udtryk (hvor tilladte størrelser er konstanter og en variabel) for de trigonometriske funktioner, må de eksakte værdier findes ud fra enhedscirklen. Det er ikke muligt at finde eksakte værdier for alle vinkler. Der findes ingen algoritme der generelt giver de eksakte værdier, men der findes algebraiske udtryk for alle rationale multipla af π. (Olmsted 1945)

På figur 26 er illustreret opgaver hvor den eksakte værdi af sinus til forskellige vinkler skal findes.

EKSAKTE VÆRDIER FOR SINUS		
Værdi	*Opgave*	*Teknik*
sin (45º)	Find den eksakte værdi af sin (samme som cos (45º))	Pytagoras's sætning
sin (30º)	Find den eksakte værdi af sin 30º (svarer til cos (60º))	Spejl den retvinklet trekant i x-akse og konstatér ud fra den ligesidede trekant at værdien er $\frac{1}{2}$.
sin (60º)	Find den eksakte værdi af sin 60º (svarer til cos 30º)	Brug sammenhængen mellem sin og cos, formlen $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$, og sin(30º) samt Pytagoras's sætning til at finde den sidste side i trekanten.
sin (105º)	Find værdi sin 105º	Formlen for vinkel sum (bemærk at 105=45+60): $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

Figur 26: Forskellige opgaver ifm. eksakte værdier.

Opgaven omhandlende sin(105º) kan gøres til genstand for en opgavetype. Vha. formlen for vinkelsum og -differens kan tabellen over eksakte værdier udvides – en opgavetype i eksakt ekstrapolation og interpolation.

Arbejde med trigonometriske formler giver mulighed for at finde eksakte værdier, så man kan plotte grafer for funktionerne, men at opfatte sin og cos som egentlige funktioner, og at funktioner i sig selv kan være objektet for opgaver, ligger uden for både geometri- og algebra-sektoren, men tilhørerer i stedet en analyse-sektor.

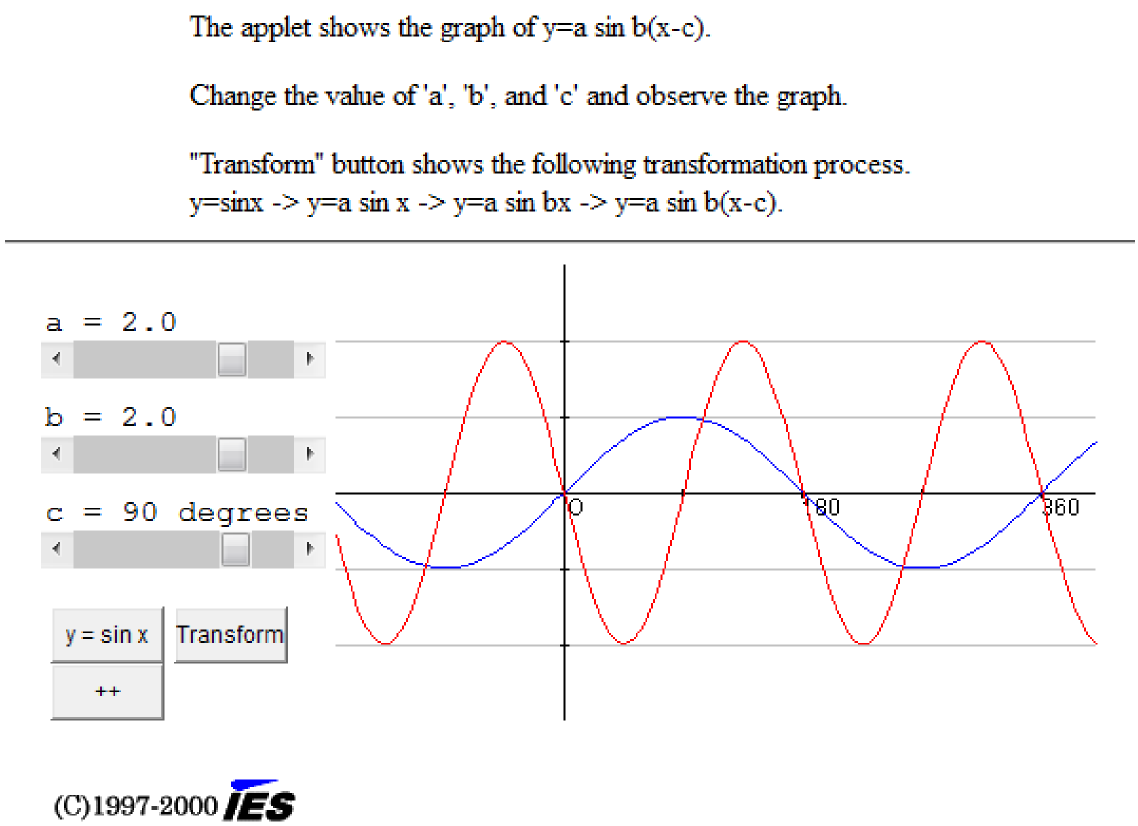
Analyse-sektor

I dette afsnit vil jeg beskrive analyse-sektoren ift. trigonometriske funktioner og se nærmere på opgavetyper inden for denne sektor. I analyse-sektoren er fokus rettet på de trigonometriske funktioner som egentlige funktioner. Et er at sin og cos er funktioner, som kan repræsenteres ved en graf, der enten er konstrueret geometrisk ud fra enhedscirkel eller plottet pba. eksakte værdier (og approksimationer), noget andet er, at de udtryk hvor sin og cos optræder, også er funktioner, og at trigonometriske funktioner er objekter, man kan underkaste nærmere analyse, og betragte tilhørende afledte og stamfunktioner.

Harmoniske funktioner er eksempler på funktioner, hvis udtryk indeholder sin. Betegnelsen 'den harmoniske funktion' henviser ikke til én funktion, men er betegnelsen for de uendeligt mange funktioner udtrykket: $y=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$, dækker over. Harmoniske funktioner anvendes inden for fysik ifm. modellering af periodiske fænomener. Selvom den harmoniske funktion ikke er medtaget i formelsamling 2007, må det i høj grad antages at være relevant stof i kraft af forbindelsen til gymnasiefysikken.

At se på grafer for harmoniske funktioner er en oplagt måde at introducere disse på, da man får visualiseret betydningen af ændring af parametrene i udtrykket for den harmoniske funktion.

Der er talrige eksempler på programmer, som kan hjælpe en til at indse parametres betydning for grafens forløb. På figuren 27 nedenfor er vist et eksempel.



Figur 27: Eksempel på program hvor harmoniske funktioner kan tegnes (kilde: http://www.ies.co.jp/math/products/trig/applets/graphSinX/graphSinX.html).

To vigtige begreber ifm. harmoniske funktioner er *amplitude* og *periode*, som forbindes til henholdsvis *a* og *b* i udtrykket for funktionerne. Opgavetyper i forbindelse med harmoniske funktioner kan både vedrører grafiske og algebraiske aspekter. F.eks. kunne en opgave gå ud på at tegne graferne for $2\sin(x)$ og $\sin(2x)$ uden brug af CAS, eller en opgave kunne være at besvarer spøgsmålet: Hvordan fremkommer grafen for funktionen h(x) = 3sin(4x –8) +1 ud fra grafen for f(x) = sin(x)? Algebraisk orienterede opgavetyper kunne eksempelvis vedrøre summen af sinussvingninger, som det f.eks. er beskrevet i Carstensen, Frandsen & Studsgaard (2006, p. 230).

Centrale emner ift. analyse-sektoren er differential- og integralregning. Ifm. differential- og integralregning gøres brug af grafer. Selvom den afledte i et punkt og bestemte integraler, ud fra grafen for funktionen, kan opfattes geometrisk, vil graferne for den afledte og stamfunktionen til en funktion ikke umiddelbart kunne opfattes som havende geometrisk forbindelse til grafen for funktionen. En sammenhæng findes ved at sammenholde udtrykkene for de afledte funktioner og stamfunktioner med funktionsudtrykket. Der kan gives geometriske redegørelser for udtryk for differentialkvotienter, men det vil involvere trigonometriske formler.

Ifm. differentialregning vil opgavetyper vedrøre differentiering af funktioner, med et udtryk hvori trigonometriske funktioner optræder. Sådanne opgavetyper leder til nærmere analyse af trigonometriske funktioner ved at se på begreber som hældning, vendetangent og monotoniforhold. En opgave kunne eksempelvis være at argumentere for, at funktionen: f(x) = − 3x + 2cos(x) er monoton.

Ifm. integralregning vil opgavetyper vedrøre integrering af funktioner, med et udtryk hvori trigonometriske funktioner optræder. Opgavetyper i denne forbindelse indbefatter udregning af den eksakte værdi af bestemte integraler. Ift. de tidligere undersøgte eksamensopgaver vedrørende trigonometriske funktioner er der ikke opgaver af typen, hvor bestemte integraler skal udledes. Dog er der eksempler på opgaver i eksamenssættene, hvor bestemte integraler skal udledes, men der indgår ikke trigonometriske funktioner i udtrykkene. På figur 28 er vist et eksempel på en eksamensopgave fra før reformen i 2005, hvor et bestemt integral af funktion med udtryk indeholdende trigonometriske funktioner skal findes eksakt. Integration anvendes i forbindelse med eksamensopgaver til at finde arealet af områder afgrænset af kurver.

Opgave 4 Beregn ved hjælp af stamfunktioner den eksakte værdi af følgende integraler:
(ca. 15 point)

$$\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})\,dx \ , \quad \int_0^3 15x\sqrt{x+1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{(\cos x)^2}\,dx \,.$$

Figur 28: Eksempel på eksamensopgave i bestemte integraler (kilde: Eksamenssættet 2008-8-5, matematik, højt niveau).

Sinus og cosinus optræder også i forbindelse med differentialligninger. Et eks. er differentialligningen $\frac{d^{2y}}{dx^2}=-k^{2y}$, som har løsningen $y=c_1\cos(kx)+c_2\sin(kx) = A\cdot\sin(kx+\phi)$. Der er også eksempler på differentialligninger, som ikke er helt så komplicerede som denne og som udmærket kan være en del af gymnasiematematik. I Sloth (2006b) beskrives en differentialligning hvis løsning vedrører trigonometriske funktioner, og på figur 29 er vist et eksempel på en eksamensopgave fra før reformen i 2005, hvor en differentialligning med et udtryk, hvor cos indgår, skal løses.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Bestem hvert af integralerne

$$\int 5xe^{-x}dx \quad \text{og} \quad \int 2x\cos(x^2+\pi)\,dx.$$

Bestem en forskrift for den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot 2x\cos(x^2+\pi)\,,$$

hvis graf indeholder punktet $P(0,1)$.

Figur 29: Eksempel på eksamensopgave i integralregning og differentialligninger (kilde: Eksamenssættet 2008-8-5, matematik, højt niveau).

Der er opgaver i differentialligninger i eksamenssættene efter reformen, men de vedrører ikke trigonometriske funktioner. I formelsamlingen er ikke medtaget differentialligninger som vedrører sin og cos (i den tidligere formelsamling fra 1998 er der medtaget den ovenfor nævnte differentialligning). Opgavetyper omhandlende simple differentialligninger vedrørende trigonometriske funktioner er dog en mulighed i gymnasiet.

Andet stof

Ud over at der i de foregående beskrivelser er talrige punkter, der kunne præciseres yderligere og mulige opgavetyper, som ikke er nævnt, er der også relevant stof, som endnu ikke er nævnt. Jeg tænker her primært på komplekse tal, der er et emne, hvortil der er udarbejdet vejledende eksamensopgaver og tilhørende forberedelsesmateriale (foråret 2011). I forberedelsesmaterialet er der stof, som vedrører trigonometriske funktioner, bl.a. anvendelsen af disse i forbindelse med konvertering mellem cartesiske og polære koordinater, og Eulers formel er nævnt i en øvelse. Det kunne være interessant at se nærmere på dette stof ifm. referencemodellen.

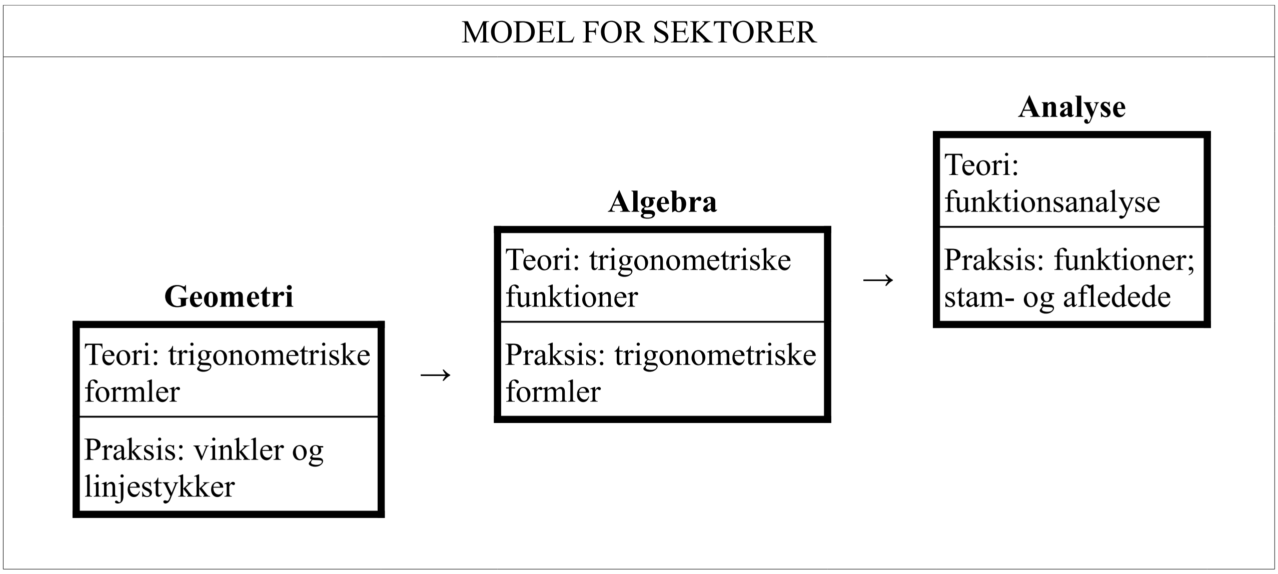
Perspektiver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner

Efter at have præsenteret de tre sektorer, som udgør den epistemologiske referencemodel, er det interessant, at se på hvilke perspektiver modellen giver på stoffet vedrørende trigonometriske funktioner. Modellen er ment som et første udkast i en modelleringsprocess, så den er langt fra dækkende for alt relevant stof, men kan stadigvæk give interessante perspektiver på stoffet.

Ifm. geometri-sektoren blev en velafgrænset mængde af opgavetyper vedrørende vinkelstørrelser og sidelængder i trekanter beskrevet. At være bevidst om de mulige opgavetyper er af interesse for den som designer og stiller opgaver, men det kan også være af interesse for elever, der skal løse opgaverne. Et er, at man ved at kende til mulige opgavetyper kan gøre sig klart, om en mængde af opgaver er dækkende for det pågældende emne, noget andet er at kendskab til de mulige opgavetyper giver overblik over hvad en teknologi rummer af muligheder. Ifm. vinkelstørrelser og sidelængder i trekanter vil det i gymnasiet (i modsætning til hvad der er realistisk i folkeskolen) være muligt vha. kongruenssætningen at give elever et overblik over de mulige opgavetyper. Teknikker til at løse opgavetyper i geometri-sektoren involverer algebra, og det indikerer, at der også er en algebra-sektor, som vedrører trigonometriske funktioner.

Ifm. algebra-sektoren er der peget på tre sammenhænge, hvor brug af algebra optræder: ved ligningsløsning, til at finde eksakte værdier af trigonometriske funktioner og ifm. forskellige beviser. Der blev ved gennemgangen af eksamensopgaver ikke fundet decideret opgaver svarende til opgavetyper i algebra-sektoren, men dette betyder ikke, at arbejde med trigonometriske formler er irrelevant i gymnasiet.

Den sidste sektor i modellen er analyse-sektoren, hvor de trigonometriske funktioner bliver opfattet som egentlige funktioner, der kan differentieres og integreres. For at finde frem til de afledte til de trigonometriske funktioner, er det nødvendigt at anvende algebra. Algebra-sektoren kan altså opfattes som liggende imellem geometri-sektoren og analyse-sektoren i den forstand, at teoriblokken for geometri-sektoren og praksisblokkene for analyse-sektoren vedrører algebra (se figur 30).



Figur 30: Forbindelse mellem sektorerne geometri, algebra og analyse i forhold til trigonometriske funktioner.

Der er også peget på stof og opgaver, som ikke er placeret i de tre sektorer. At klarlægge dette andet modelleringsmateriale vil kræve yderligere undersøgelse af kilder og nærmere beskrivelse af sektorene.

Undervises der ikke i trigonometriske formler, er der en risiko for at geometri-sektorens teoriblok ikke er fuldstændig, og samtidig vil praksisblokke i analyse-sektoren mangle et grundlag. Brugen af CAS-værktøj, ifm. løsning af opgaver, kunne tænkes at forstærke en tendens til ikke at beskæftige sig med trigonometriske formler. Det kunne være interessant at undersøge, om der er et fravær af undervisning i trigonometriske formler, og om dette evt. fravær giver anledning til epistemologiske forhindringer ifm. analysen vedrørende trigonometriske funktioner.

Rækkefølgen sektorene blev præsenteret i var ikke tilfældig. Den afspejler en vis faglig progression i stoffet, som det er beskrevet i forbindelse med den opstillede emneliste (figur 9, side 21). Denne progression i stoffet kunne ses ift. en kognitiv udvikling og ud fra de begreber Tall bruger om en sådan. Den kognitive udvikling af matematisk tænkning beskriver han som en ”transition from a conceptual-embodied world to a proceptual-symbolic world and then to a formal-axiomatic world” (Vandebrouck u.å., p. 2). Disse tre verdener vil i en hvis forstand svare til de tre sektorer; geometri, som den mest intuitive sektor, algebra-sektoren, som er meget regneteknisk, og analyse-sektoren, som de trigonometriske funktioner netop som funktioner. Omend sammenhængen måske kan siges at være søgt, er der en pointe i at angribe stoffet vedrørende trigonometriske funktioner fra en mere kognitiv synsvinkel.

Et er de perspektiver, der kan gives på selve stoffet, noget andet er at se på stoffet ift. resten af matematikken i gymnasiet. Ud over at skabe sammenhæng i det matematiske stof vil nærmere kendskab til trigonometriske funktioner give mulighed for, at de kan spille en positiv rolle i forbindelse med læring af mere generel matematik. Trigonometriske funktioner i analyse-sektoren udgør eksempler, som beriger funktionsbegrebet. Trigonometriske funktioner er eksempler på og ikke-algebraiske funktioner, og vil kunne give et indblik i verdenen af funktioner, som ikke kan udtrykkes algebraisk. Trigonometriske funktioner kunne f.eks. også være relevante i forbindelse med talbegrebet, da tallet π er trancedent, og funktionerne kan bruges ifm. bestemmelse af π.

Trigonometriske funktioner er således et righoldigt emne, der ud over at udgøre en del af kernestoffet, også vil kunne udgøre en betydelig del af det supplerende stof. Således vil der kunne laves forløb i matematik-historie samt forløb ”med vægt på ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning” (Undervisningsministeriet 2010a, bilag 35, afsnit 2.3) og forløb om differentialligningsmodeller – tre i læreplanen nævnte forløb.

Den opstillede referencemodel refererer, i kraft af de anvendte kilder, til officiel viden vedrørende trigonometriske funktioner, og det må derfor forventes at modellen stemmer overens med lærerplanen for faget og vejledningen til denne.

Gymnasiets formål er at være almendannende og studieforberedende, og for faget matematik betyder det at:

”Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement.”. Ift. studieforberedelse ”skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.” (Undervisningsministeriet 2010a, bilag 35, afsnit 1.2).

Til dette er blot at sige, at trigonometriske funktioner udspringer af en vekselvirkning mellem

”kultur, videnskab og teknologi”, og udgør et vigtigt stykke matematik. Emnet berører ”forskellige fagområder”, har talrige anvendelser, og giver derved anledning til ”indsigt i matematisk ræsonnement”. Trigonometriske funktioner optræder ikke mindst på videregående uddannelser men er også i anvendelse i visse grunduddannelser og i de dertil hørende professioner.

Perspektivering af speciale

Jeg vil her afslutningsvis reflektere over specialet og give kritiske perspektiver på indholdet. Først og fremmest kan man stille sig kritisk over for udgangspunktet; at det er værd at se nærmere på det stof, som vedrører trigonometriske funktioner i gymnasiet. I henhold til emnets righoldighed, og dets status i gymnasiet, samt mangel på arbejder der fyldestgørende beskriver emnet, synes det imidlertid godtgjort, at en klarlæggelse af stoffet er en opgave, som det er værd at beskæftige sig med. Spørgsmålet er så, om dette speciale giver et rimeligt bidrag i den forbindelse.

Grundlæggende kan man hertil spørge, om specialets teoretiske grundlag er velvalgt. Den didaktiske transposition er en model, der er simpel og let at beskrive, for hvad der sker i undervisning. Men, den dækker i virkeligheden over noget komplekst og er tilsvarende svær at konkretisere. ATD, og modellering af prakseologier ved MO'er, giver derimod mulighed for at pege på konkret matematik der er del af den undervisningsfaglige viden. Min tilgang til matematik i gymnasiet har haft udgangspunkt i begrebet 'matematisk stof', som er et begreb, der kan bruges ifm., at identificere hvad emner i matematik i undervisningssammenhæng dækker over. Kombinationen af disse tre teoretiske elementer, – den didaktiske transposition, ATD og begrebet stof – synes at udgøre et brugbart teoretisk grundlag for en undersøgelse af trigonometriske funktioner i gymnasiet – det må være op til læseren at bedømme om grundlaget her er udnyttet hensigtsmæssigt.

Et andet kritisk punkt for specialet er valget af kilder og behandlingen af disse. Jeg har set på formelsamling og eksamensopgaver og den opstillede model må derfor opfattes som refererende til officiel undervisningsfaglig viden. Formelsamling og eksamensopgaver definerer ikke kernestoffet i gymnasiet, da faget også har en mundtlig dimension, og da selve undervisningen ikke udelukkende determineres af eksamen. Det må derfor forventes at den opstillede model vil skulle korrigeres ifm. videregående undersøgelser af trigonometriske funktioner i en gymnasial kontekst.

Et sidste perspektiv er om hvorvidt specialets metode er videnskabelig. At den opstillede model har baggrund i primære kilder og videnskabelig teori er ikke i sig selv nogen garanti herfor. Min afgrænsning af trigonometriske funktioner til sinus, cosinus og tangens er, om ikke objektiv, dog i den valgte gymnasiale kontekst rimelig, da der ikke er observeret andre trigonometriske funktioner i de anvendte kilder. Undtaget herfra er formel (36), som ikke kan betragtes som ikke en del af kernestoffet. Den opstillede emneliste og de opstillede opgavekategorier er ikke eneste mulige måder at give et overblik over stof og eksamensopgaver, men dette er ikke nødvendigvis af afgørende betydning for specialet, da hensigten med disse er at kunne opstille en model, der giver anledning til interessante perspektiver. Valget af sektorerne geometri, algebra og analyse er heller ikke nødvendigvis *måden* at se på stoffet på, men igen er dette ikke afgørende såfremt denne måde giver anledning til relevante perspektiver.

Referencemodellen kunne godt være mere udførligt beskrevet ved at konkretisere teoriblokken, og afsnittet *Andet stof* vil med fordel kunne uddybes. Det har dog været muligt at give visse perspektiver og om de er relevante i en gymnasial kontekst vil kræve videre studier.

Konklusion

Det fremgår klart af det ovenstående, at trigonometriske funktioner er en fast del af stoffet i matematik i gymnasiet. For at finde frem til og afgrænse stoffet vedrørende trigonometriske funktioner, var det først nødvendigt at bestemme hvilke funktioner, der faktisk menes med de trigonometriske. Efter at have indskrænket betegnelsen trigonometriske funktioner til at dække sinus, cosinus og tangens har jeg ud fra kilder identificeret stof vedrørende disse funktioner. Jeg har systematisk gennemgået formelsamlingen for faget matematik, og har identificeret de steder hvor symbolerne sin, cos og tan optræder. På baggrund af denne observation har jeg, for at få et overblik over det identificeret stof, opstillet en oversigt over emner, der dækker stoffet.

Efterfølgende har jeg systematisk gennemgået de centralt stillede eksamensopgaver efter gymnasiereformen i 2005 og identificeret de opgaver, som vedrører trigonometriske funktioner. Med udgangspunkt i observationen af eksamensopgaver har jeg opstillet kategorier for disse opgaver svarende til forskellige dele af stoffet identificeret i formelsamlingen.

Disse to indledende øvelser – opstilling af emneliste og opgavekategorier – er gjort mhp. opstilling af epistemologisk referencemodel for matematisk viden vedrørende trigonometriske funktioner i gymnasiet. På baggrund af det identificerede stof og de identificerede opgaver har jeg peget på tre relevante sektorer: en geometri-sektor, en algebra-sektor og en analyse-sektor. Disse sektorer er efterfølgende beskrevet nærmere ved beskrivelse af bl.a. tilhørende opgavetyper. Således er det i slutningen af indledningen (side 6) formulerede mål med specialet, om at yde et bidrag til opstilling af epistemologiske referencemodeller omfattende trigonometriske funktioner blevet opfyldt.

Til sidst er givet de perspektiver, den opstillede epistemologiske referencemodel giver anledning til efterfulgt af perspektiver på selve specialet. Der peges bl.a. på, at at en algebra-sektor er vigtig for at der er sammenhæng i stoffet vedrørende de trigonometriske funktioner. Ud fra centralt stillede opgaver at dømme er der ikke direkte fokus på algebra ifm. trigonometriske funktioner. Er dette helt korrekt – hvilket yderligere kræver nærmere undersøgelser af eksempelvis den mundtlige dimension af faget – vil der være baggrund for at undersøge, om der i kraft af fraværet af en algebra-sektor, vil være epistemologiske forhindringer, der kunne overkommes ved en mere eksplicit tilstedværelse af algebra-sektoren. I modsætning til dette perspektiv vil de trigonometriske funktioner kunne være med til at berige analysen i gymnasiet ved at være eksempler på funktioner, der bl.a. kan belyse selve funktionsbegrebet.

Hvis målet også var at give et grundlag for en diskussion af trigonometriske funktioners rolle i gymnasiet, er målet er nok ikke nået fuldt ud, men et skridt på vejen derhen er taget. Den epistemologiske referencemodel kunne beskrives mere udførligt, og den mundtlige side af faget matematik undersøges nærmere, men modellen har givet anledning til perspektiver, som det er værd at undersøge nærmere.

Litteratur

Figurer i teksten, som ikke er angivet med kildehenvisning (på nær eksamensopgaver, som er kopieret fra de pågældende opgavesæt), er lavet af forfatteren ved brug af OpenOffice eller GeoGebra. Nedenfor er opgivet anvendte kilder.

Artigue, M., & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches* en *Didactique des Mathématiques,* 31(1), pp. 47-82.

Biehler, R. (1996). Reconstruction of meaning as a Didactical Task: The concept of Function as an Example. I: Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., & Valero, P. (Red.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). New York: Springer.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-65.

Bagni, G. T. (1997). Trigonometric functions: learning and didactical contract. I: D'Amore, B., & Gagatsis, A. (Red.), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, Thessaloniki, 3-10.

Carstensen, J., Frandsen, J., & Studsgaard, J. (2005). *MAT A1 stx*. Århus: Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J., & Studsgaard, J. (2006). *MAT A2 stx*. Århus: Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J., & Studsgaard, J. (2008). *MAT A3 stx*. Århus: Systime.

Clausen, F., & Jensen, S. T. (Red.) (1998). *Matematisk Formelsamling: Gymnasiet matematiske linje 3.-arigt forløb til A-niveau*. København: Matematiklærerforeningen.

Dejgaard, J., & Schomacker, G. (Red.) (2007). *Matematisk formelsamling stx A*. København: Matematiklærerforeningen.

Frigg, R, & Hartmann, S. (2009). Models in Science. I: Zalta, E. N. (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/models-science/

Gascón, J. (2003). From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes. *For the Learning of Mathematics*, 23, 2.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. I: Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Red.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Grabovskij, M. A., & Kotel'nikov, P. M. (1971). The use og kinematic models in the study og trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 147-160.

Howson, G. (1996). ”Meaning” and school mathematics. I: Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., & Valero, P. (Red.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 17-38). New York: Springer.

Kendal, M., & Stacey, K. (u.å.). *Teaching trigonometry*. Lokaliseret d. 10. februar 2011 på: http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/publications/1997/KendalStacey-Trig.pdf

Kristensen, E., & Rindung, O. (1975). *Matematik 1*. København: G.E.C. Gads Forlag.

Moore, K. C. (2009). Trigonometry, technology, and didactic objects. I: Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Red.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (u.å.). *History topic: The trigonometric functions*. Lokaliseret den 10. Juni 2011 på: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html

Olmsted, J. M. H. (1945). Rational Values of Trigonometric Functions. *The American Mathematical Monthly*, 52(9), 507-508.

Petersen, P. B., & Vagner, S. (2003). *Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991*. København: Matematiklærerforeningen.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. I: Harel, G., & Dubinsky, E. (Red.) (1992), *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes (28).

Sloth, H. (2005). *TRIP's matematiske GRUNDBOG.* Egtved: Forlaget TRIP.

Sloth, H. (2006a). *TRIP's matematiske BOG 2.* Egtved: Forlaget TRIP.

Sloth, H. (2006b). *TRIP's matematiske BOG 3*. Egtved: Forlaget TRIP.

Sultan, A., & Artzt, A. F. (2011). *The mathematics that every secondary school math teacher needs to know*. New York: Routledge.

Undervisningsministeriet (u.å.a). *Matematik A: Studentereksamen*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Proever%20og%20eksamen/Tidligere%20skriftlige%20opgavesaet%20stx%20og%20hf.aspx

Undervisningsministeriet (u.å.b). *Matematik B: Studentereksamen*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Proever%20og%20eksamen/Tidligere%20skriftlige%20opgavesaet%20stx%20og%20hf.aspx

Undervisningsministeriet (u.å.c). *Terminsprøve*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Fagenes%20sider/Fag%20L-R/Matematik%20-%20stx.aspx

Undervisningsministeriet (2009a). *Evaluering af de skriftlige prøveri matematik på stx og hf ved sommereksamen 2009*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Fagenes%20sider/Fag%20L-R/Matematik%20-%20stx.aspx

Undervisningsministeriet (2009b). Fælles mål 2009. *Undervisningsministeriets håndbogsserie,* 12(14). Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/service/Publikationer/Publikationer/Folkeskolen/2009/Faelles%20Maal%202009%20-%20Matematik.aspx

Undervisningsministeriet (2010a). Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen). *Lovtidende A*, (692).

Undervisningsministeriet (2010b). *Matematik A - Stx: Vejledning / Råd og vink*. Gymnasieafdelingen. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Fagenes%20sider/Fag%20L-R/Matematik%20-%20stx.aspx

Undervisningsministeriet (2011). Forberedelsesmateriale til stx-A-Net MATEMATIK. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://da.cms.uvm.dk/sitecore/shell/Controls/Rich%20Text%20Editor/~/media/Files/Udd/Gym/PDF11/110698_Forberedelse.ashx

Usiskin, Z., Peressini, L. A., & Marchisotto, E. (2002). *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective*. Virginia: Pearson Education.

Vandebrouck, F. (u.å.). *Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university*. Lokaliseret den 25. august 2011 på: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/14/CERME7-WG14-Paper---Vandebrouck-REVISED-Dec2010.pdf

Wikipedia (u.å.). *Trigonometric functions*. Lokaliseret d. 10 februar 2011 på: http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions

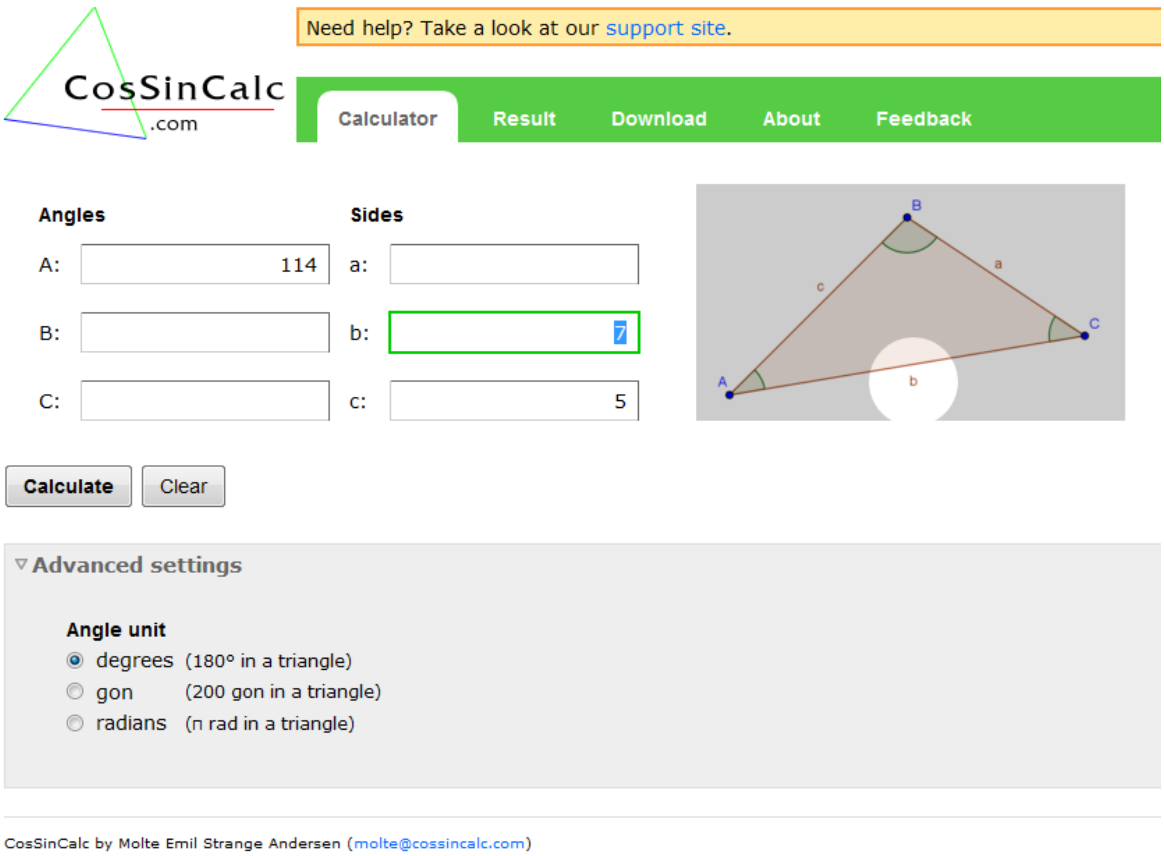
Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. København: Forlaget biofolia.

Appendikser

CosSinCalc

Nedenfor er vist dialogboks, som programmet CosSinCalc benytter, og hvilket resultat programmet giver ifm. løsning af den skriftlig eksamensopgave 9 fra maj 2009 (se afsnittet *Opgaver i trekantsberegning*). Programmet er tilgængeligt på www.CosSinCalc.com.

Online kan man indtaste de opgivne størrelser i dialogboks med tilhørende skitse, og man kan selv vælge om vinkler skal opgives i grader eller radianer:



Hvis programmet downloades kan resultatet fås i følgende pæne form – se næste side:

CosSinCalc Calculation Results

Calculated by the CosSinCalc Triangle Calculator

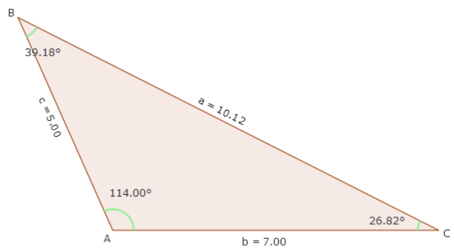
July 12, 2011

Angles	Sides	Altitudes	Medians	Angle bisectors
$A = 114.00°$	$a = 10.12$	$h_A = 3.16$	$m_a = 3.37$	$t_A = 3.18$
$B = 39.18°$	$b = 7.00$	$h_B = 4.57$	$m_b = 7.18$	$t_B = 6.31$
$C = 26.82°$	$c = 5.00$	$h_C = 6.39$	$m_c = 8.34$	$t_C = 8.05$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)} = \sqrt{7.00^2 + 5.00^2 - 2 \cdot 7.00 \cdot 5.00 \cdot \cos(114.00°)} = 10.12$$

$$B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = \arccos\left(\frac{10.12^2 + 5.00^2 - 7.00^2}{2 \cdot 10.12 \cdot 5.00}\right) = 39.18°$$

$$C = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) = \arccos\left(\frac{10.12^2 + 7.00^2 - 5.00^2}{2 \cdot 10.12 \cdot 7.00}\right) = 26.82°$$

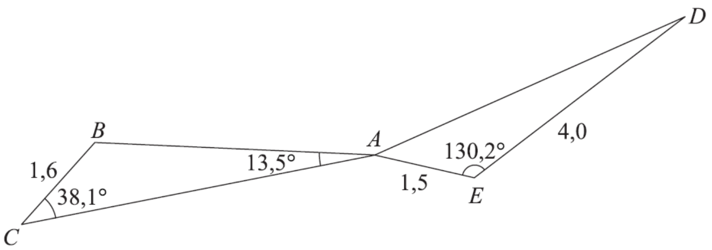


1

Centralt stillede opgaver

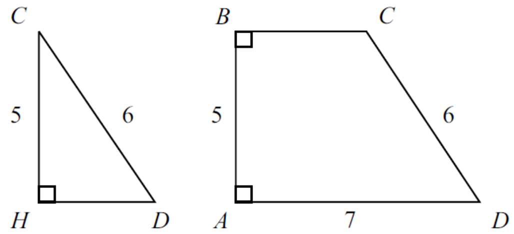
I det følgende er vis alle centralt stillede skriftlige eksamensopgaver stx A- og B-niveau 2007-2011 ny ordning samt opgaver fra terminsprøver vedr. sin og cos og tan. Vinkelberegningsopgaver er dog ikke medtaget (se afsnittet *Opgaver vedrørende trigonometriske funktioner* for en beskrivelse af disse opgaver).

Alle opgaver er på A-niveau medmindre andet er anført, og alle opgaver er fra del-prøven med hjælpemidler. Opgaverne er tilgængelige via Undervisningsmisteriets hjemmeside.

EKSAMENSOPGAVER	
2007	
Maj (B-niveau)	**Opgave 7** I trekant ABC er $\angle A = 72°$, $b = 4{,}1$ og $c = 3{,}8$. a) Tegn en model af trekanten, og beregn længden af siden a. b) Beregn længden af højden på siden b.
August (B-niveau)	**Opgave 7**  En gymnasieklasse løber orienteringsløb i en skov. Alle mødes ved post A, og pigerne løber ruten $ABCA$, mens drengene løber ruten $ADEA$. På figuren er angivet nogle vinkler og afstande (målt i km) for de to løberuter. a) Hvor langt løber pigerne? b) Hvor meget længere løber pigerne end drengene?
	Opgave 16b I en trekant ABC er $\|AB\| = x$, $\|BC\| = \frac{x}{3}$ og $\|AC\| = \frac{3x}{4}$. a) Bestem $\angle A$. b) Bestem x, når arealet af trekanten er 13. (valgfri)
December (B-niveau)	**Opgave 12** I en trekant ABC er $a = 6{,}7$, $\angle A = 56°$ og $\angle B = 43°$. a) Bestem c samt arealet af trekanten. b) Bestem længden af medianen m_a.

<table>
<tr><td colspan="2">2008</td></tr>
<tr><td>Maj</td><td>

Opgave 6



Ovenfor ses en skitse af trekant CDH og firkant $ABCD$.

a) Bestem $\angle D$ i trekant CDH.

b) Bestem $|BD|$ og $|AC|$ i firkant $ABCD$.

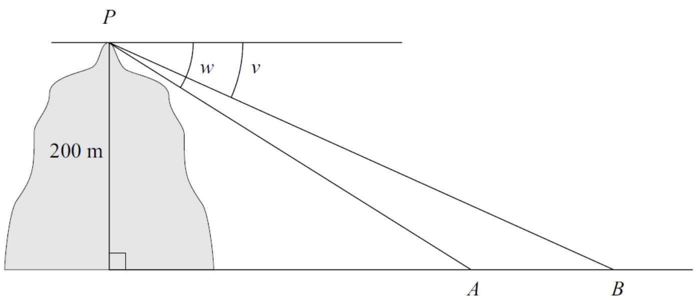
(magen til B-niveau)
</td></tr>
<tr><td>August</td><td>

Opgave 7 I trekant ABC betegnes skæringspunktet mellem siden a og vinkelhalveringslinjen v_A med D. Det oplyses, at $\angle A = 66^\circ$, $c = 4,7$ og $v_A = 3,9$.

a) Tegn en model af trekanten, og bestem $|BD|$.

b) Bestem $\angle B$ og $\angle C$.
</td></tr>
<tr><td>(B-niveau)</td><td>

Opgave 8



Fra et punkt P på en 200 m høj klippe observeres to skibe på havet. Skibene befinder sig henholdsvis i positionerne A og B. Vinklen mellem vandret og sigtelinjen fra P til A og mellem vandret og sigtelinjen fra P til B måles til henholdsvis $w = 32^\circ$ og $v = 24^\circ$.

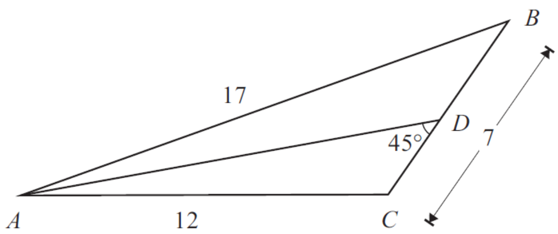
a) Bestem afstanden fra A til B.
</td></tr>
<tr><td>December</td><td>

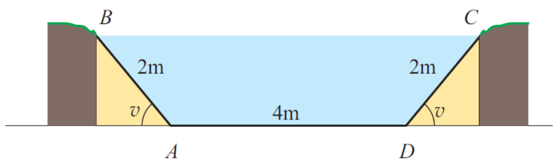
Opgave 7 I trekant ABC er $a = 10$, $b = 15$ og $c = 21$.

a) Bestem $\angle A$, og bestem arealet af trekant ABC.

b) Bestem længden af medianen m_b.

(på B-niveau er der en skitse)
</td></tr>
</table>

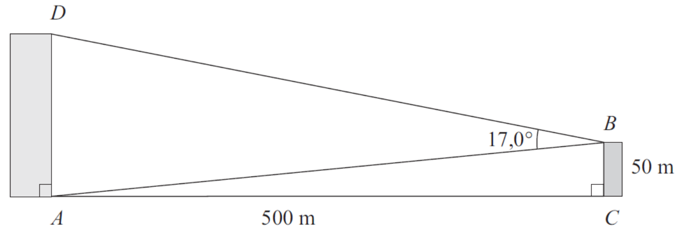
<table>
<tr><td></td><td>Opgave 12 En funktion f er bestemt ved
$$f(x) = x + 2\sin x, \quad x \in [0; 2\pi].$$
a) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og gør rede for monotoniforholdene for f.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2009</td></tr>
<tr><td>Maj</td><td>Opgave 9 I trekant ABC er $|AB| = 5$, $|AC| = 7$ og $\angle A = 114°$.
a) Bestem $|BC|$ og $\angle B$.
b) Bestem højden h_b, og bestem arealet af trekant ABC.
(på B-niveau er der en skitse)</td></tr>
<tr><td>August</td><td>Opgave 7 I trekant ABC er $a = 7$, $b = 12$ og $c = 17$.
a) Bestem $\angle C$.
Punktet D ligger på BC, så vinkel D i trekant ADC er 45° (se figuren).


b) Bestem $|AD|$.</td></tr>
<tr><td></td><td>Opgave 17 Figuren viser et lodret snit $ABCD$ gennem en kanal, hvis tværsnit har form som et trapez.


Arealet af kanalens tværsnit er en funktion T af vinklen v, hvor v måles i radianer og $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$.
a) Gør rede for, at
$$T(v) = 8\sin v + 4\sin v\cos v,$$
og bestem v, så arealet af kanalens tværsnit bliver størst mulig.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>(B-niveau)</td><td>

Opgave 10



Fra et punkt *B* på toppen af et 50 m højt hus iagttages et højhus, der ligger 500 m væk. Sigtelinjerne *BA* og *BD* fra *B* til henholdsvis bunden og toppen af højhuset danner en vinkel på 17,0°.

a) Bestem længden af sigtelinjen *BA* samt vinkel *A* i trekant *ABC*.

b) Bestem højden *AD* af højhuset.

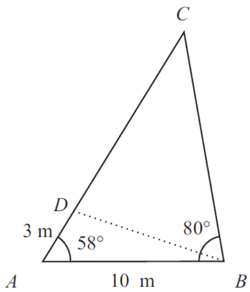
</td></tr>
<tr><td>December</td><td>

Opgave 10 På figuren ses en skitse af en stålkonstruktion bestående af fire stålstænger. I trekant *ABC* er $\angle A = 58°$ og $|AB| = 10$ m. Stålstangen *BC* danner en vinkel på $80°$ med *AB*.

a) Bestem længden af *BC*.

Stålstangen *BD* er fastgjort i *D*, således at afstanden fra *A* til *D* er 3 m.

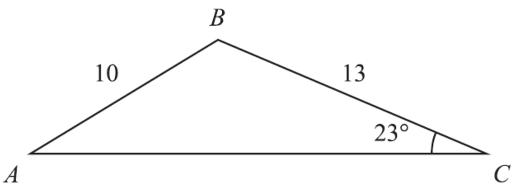
b) Bestem længden af *BD*.



(magen til B-niveau)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">2010</td></tr>
<tr><td>Maj</td><td>

Opgave 8



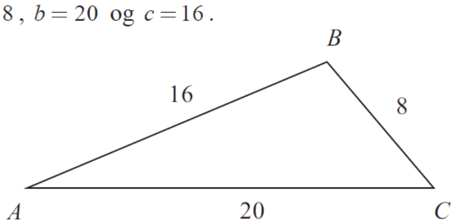
I trekant *ABC* er $a = 13$, $c = 10$ og $\angle C = 23°$. Det oplyses, at $\angle A$ er spids.

a) Bestem $\angle A$.

b) Bestem b.

</td></tr>
<tr><td>(B-niveau)</td><td>

Opgave 10 I trekant ABC er $a = 8$, $b = 20$ og $c = 16$.



a) Bestem $\angle A$.

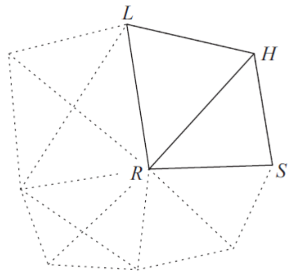
b) Bestem arealet af trekant ABC.

</td></tr>
</table>

(digital prøve)

Opgave 10 På toppen af bjerget Rigi i Schweiz er der en tavle (figur 1), som viser information om stedet. På figur 2 ses en geometrisk model af denne triangulering.

Figur 1.



Figur 2.

Afstanden fra R til L er målt til 49 km. Vinklen mellem sigtelinjen RL og sigtelinjen RH er målt til $51{,}6°$, mens vinklen mellem sigtelinjen LR og sigtelinjen LH er målt til $68{,}0°$.

a) Bestem afstanden fra R til H.

Afstanden fra R til S er målt til 41 km, og afstanden fra H til S er målt til 37 km.

b) Bestem vinklen mellem sigtelinjen RH og sigtelinjen RS.

Opgave 14 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=\tfrac{1}{2}x+1+\sin(x) \qquad \text{og} \qquad g(x)=-x+2-\cos(x).$$

Graferne for de to funktioner afgrænser sammen med linjen med ligningen $x=2\pi$ et område M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

Den lodrette linje med ligningen $x=c$ deler M i to punktmængder, der har samme areal.

b) Bestem værdien af c.

Juni

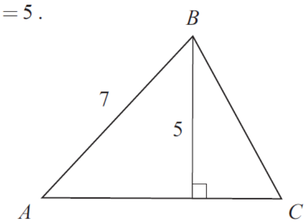
Opgave 10 I trekant ABC er D skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjen for vinkel B og siden AC. Det oplyses, at $\angle A=70°$ og $|AB|=|BD|=5$.

a) Tegn en skitse af trekant ABC, og bestem $\angle ADB$ samt $|AD|$.

b) Bestem $|BC|$.

(B-niveau)

Opgave 9 På figuren ses trekant ABC, hvor $|AB|=7$ og højden $h_b=5$.



a) Bestem $\angle A$.

Arealet af trekant ABC er 25.

b) Bestem $|AC|$.

c) Bestem omkredsen af trekant ABC.

<table>
<tr>
<td>August</td>
<td>

Opgave 7 I trekant ABC er $a = 7{,}1$, $b = 8{,}5$ og $c = 5{,}9$.

a) Bestem $\angle A$ og $\angle B$.

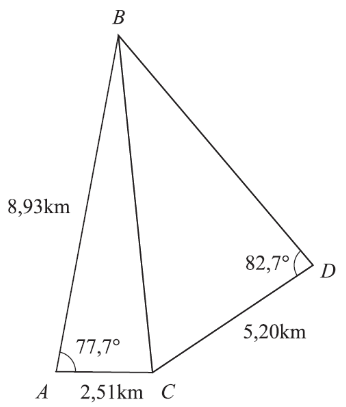
b) Bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_A.

</td>
</tr>
<tr>
<td>(B-niveau)</td>
<td>

Opgave 10 På figuren ses fire byer A, B, C og D. På figuren er angivet nogle vinkler og afstande. Det oplyses, at $\angle B$ i trekant BCD er spids.

a) Bestem afstanden mellem B og C.

b) Bestem $\angle B$ i trekant BCD.



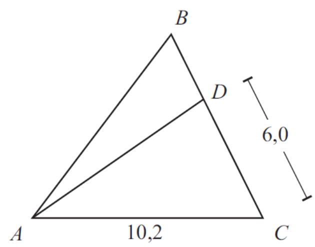
</td>
</tr>
<tr>
<td>December</td>
<td>

Opgave 9 I trekant ABC er $\angle A = 54°$, $|AC| = 10{,}2$ og $|BC| = 9{,}1$. Det oplyses, at $\angle B$ er spids.

a) Bestem $\angle B$.

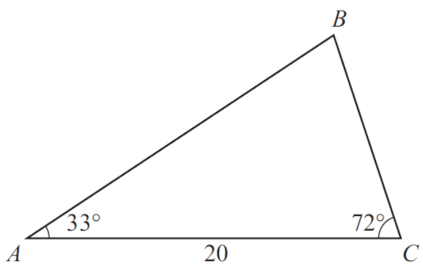
Punktet D ligger på siden BC, således at $|DC| = 6{,}0$.

b) Bestem $|AD|$.



</td>
</tr>
<tr>
<td>(B-niveau)</td>
<td>

Opgave 7 I trekant ABC er $\angle A = 33°$, $\angle C = 72°$ og $|AC| = 20$.



a) Bestem $|AB|$.

Skæringspunktet mellem siden AC og medianen fra B kaldes M.

b) Bestem arealet af trekant ABM.

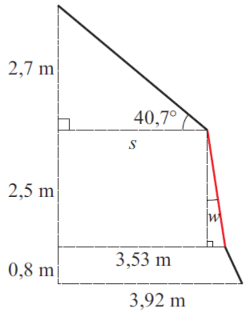
</td>
</tr>
</table>

2011

18. maj (digital med netadgang)

Opgave 9

Foto: Opgavekommissionen



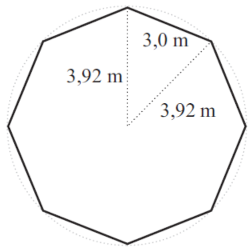
Figur 1

Billedet ovenfor viser et ottekantet fiskerhus. På figur 1 ses et lodret tværsnit gennem fiskerhusets tagspids, hvor nogle af husets mål er angivet.

a) Bestem længden af linjestykket s, og bestem vinkel w.

På figur 2 ses fiskerhusets grundflade, der har form som en regulær ottekant.

b) Bestem arealet af fiskerhusets grundflade.



Figur 2

Opgave 12 I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6,61 \cdot \sin(0,0167t - 1,303) + 12,2 \,, \quad 0 \le t \le 365,$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a) Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska til tidspunktet $t = 100$.

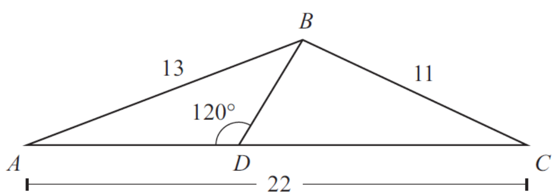
b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

c) Bestem $f'(100)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

Kilde: http://aa.usno.navy.mil

(B-niveau)

Opgave 7 På figuren ses en trekant ABC, hvor $|BC| = 11$, $|AC| = 22$ og $|AB| = 13$.

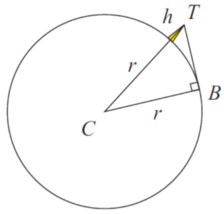
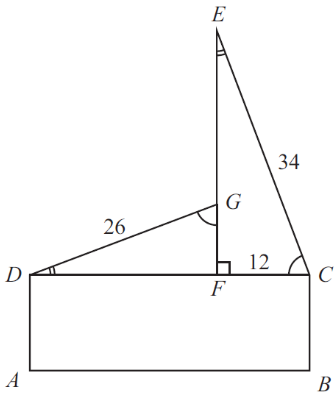


a) Bestem vinkel A i trekant ABC.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

Punkt D ligger på AC, således at $\angle ADB = 120°$.

c) Bestem $|BD|$.

24. maj (digital med netadgang)	**Opgave 8** Højden h af verdens højeste bygning er 0,828 km. Sigtelinjen fra toppen T af bygningen til horisonten tangerer jorden i punktet B. Jordens radius r er 6371 km. Centrum af Jorden benævnes med C. a) Bestem $\angle TCB$. b) Bestem $\|TB\|$.  Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte.
(B-niveau)	**Opgave 10** Figuren viser gavlen af et bestemt hus. Det oplyses, at de retvinklede trekanter CEF og GDF er ensvinklede. Endvidere oplyses det, at $\|CE\|=34$, $\|CF\|=12$ og $\|DG\|=26$.  a) Bestem $\angle C$ i trekant CEF. b) Bestem $\|FG\|$ og $\|EG\|$.

<table>
<tr><td colspan="2">TERMINSPRØVER</td></tr>
<tr><td colspan="2">2008</td></tr>
<tr><td>November A-niveau 2g (netadgang)</td><td>

Opgave 10 I trekant ABC er $|AB|=x$, $|CB|=\frac{x}{3}$ og $|AC|=\frac{3x}{4}$.

a) Vælg to x-værdier, og konstruer de to tilhørende modeller af trekant ABC.

b) Gør rede for, at vinklerne i trekant ABC er de samme for enhver værdi af x.

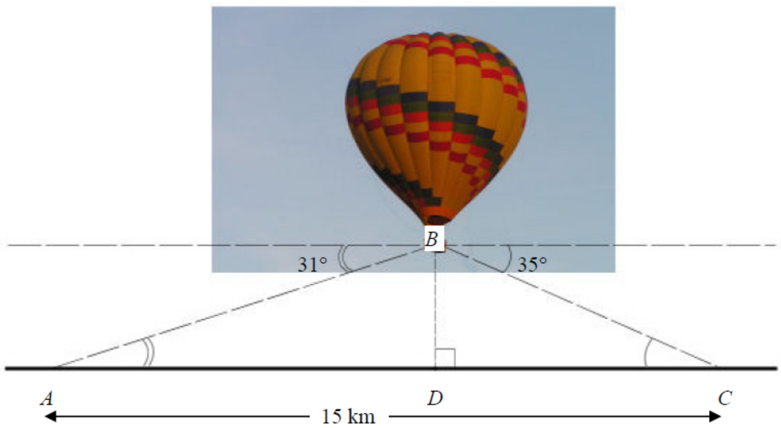
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2009</td></tr>
<tr><td rowspan="2">April</td><td>

Opgave 12 I trekant ABC er $\angle A = 37{,}2^\circ$, og sidelængderne $b = 5{,}3$ og $c = 13{,}8$.

a) Tegn en model af trekanten, og bestem længden af siden a.

</td></tr>
<tr><td>

Opgave 18 Under en luftfærd befinder en luftballon sig mellem to byer A og C.



Afstanden mellem A og C er 15 km. Vinklen mellem den vandrette linje igennem B og sigtelinjen BA er 31°. Vinklen mellem den vandrette linje igennem B og sigtelinjen BC er 35°. D er et punkt på vejen mellem A og C. BD står vinkelret på AC. Den vandrette linje igennem B og linjen i gennem A og C er parallelle.

a) Bestem længden af BD.

Ballonen stiger lodret op til 6000 m's højde.

b) Bestem størrelsen af den spidse vinkel som sigtelinjen til C nu danner med vandret.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>november 3g</td>
<td>

Opgave 12 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{og} \qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x + 3 \ .$$

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser sammen med y-aksen og linjen med ligningen $x = 3\pi$ en punktmængde T .

a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem, og bestem arealet af T .

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">2010</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Opgave 9 Der er givet punkterne $A = (-1,-2)$, $B = (3,4)$ og $C = (0,3)$.

a) Bestem $\angle A$ i trekant ABC .

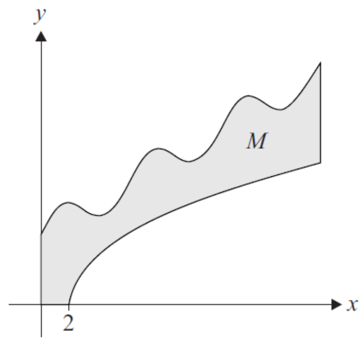
b) Bestem længden af medianen m_c .

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Opgave 13 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \sin(x) + \tfrac{1}{2}x + 4 \qquad \text{og} \qquad g(x) = k \cdot \sqrt{x-2} \ .$$

For $k = 2$ afgrænser graferne for f og g sammen med akserne og linjen med ligning $x = 20$ en punktmængde M (se figur), der har et areal.



Formen af en 20 cm høj glasvase fremkommer ved, at punktmængden M drejes $360°$ om x-aksen.

a) Bestem rumfanget af vasens glasdel.

b) Bestem k , så rumfanget af vasens glasdel er 3000 cm^3.

</td>
</tr>
</table>

Lærebog

Nedenfor er givet en oversigt over steder i Trip's lærebogssystem for matematik i gymnasiet (Sloth 2005; Sloth 2006a; Sloth 2006b), hvor de trigonometriske funktioner optræder.

TRIP's matematiske GRUNDBOG

Geometri og trigonometri

Cosinus s. 60 (def. og arccos)

Sinus s. 64 (def. og arcsin)

Tangens s. 67 (def.)

Cosinus er veldefineret s. 73

Cosinus og sinus til vilkårlig vinkel s. 82

Beregninger i vilkårlig trekant s. 84

TRIP's matematiske BOG 3

Vektorer i planen

Determinant s. 34 (formlen $det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$)

Nogle beviser om vektorer s. 40 (formlen $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \binom{\cos(v)}{\sin(v)}$)

Periodiske fænomener

Vinkelmål s. 62 (radianer)

Funktionerne sinus og cosinus s. 64 (differentialkvotienterne for sin og cos uden beviser s. 68)

Harmonisk svingning s. 70

Rumgeometri

Skalarprodukt s. 86

Vektorprodukt s. 104 (formlen $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$)

Integralregning

Stamfunktioner s. 128

Differentialligninger

Lidt om differentialligninger af 1. orden s. 168 (opgave som løses vha. CAS)

Hvor er jeg?

Om stedbestemmelse s. 192 (koordinater på en sfære)

Appendiks

Additionsformler og logaritmiske formler (formlen $\sin(u+v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$ mv.)

Funktionen tangens