INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Galoisteori i gymnasiet: En didaktisk transposition

Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg

Specialerapport

Juni 2007

INDs studenterserie nr. 3

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)

Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet

Vi vil med dette speciale gerne afprøve, hvorvidt det kan lade sig gøre at gennemføre et undervisningsforløb i en gymnasieklasse, hvor nogle af ideerne fra Galoisteorien introduceres. Vi vil s°aledes lave et eksistensbevis for, at et s°adant forløb kan designes og derefter gennemføres. Specialet er følgelig at betragte som en slags afprøvning af Bruners hypotese: ”Any subject can be taught effectively in some interlectually honest way to any child at any stage of development.” (Bruner, 1960, s. 33).

***INDs studenterserie** består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Derfor har vi fra og med 2007 besluttet at publicere dem elektronisk i INDs studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*

Indhold

1 Indledning

1.1 Bruners Hypotese

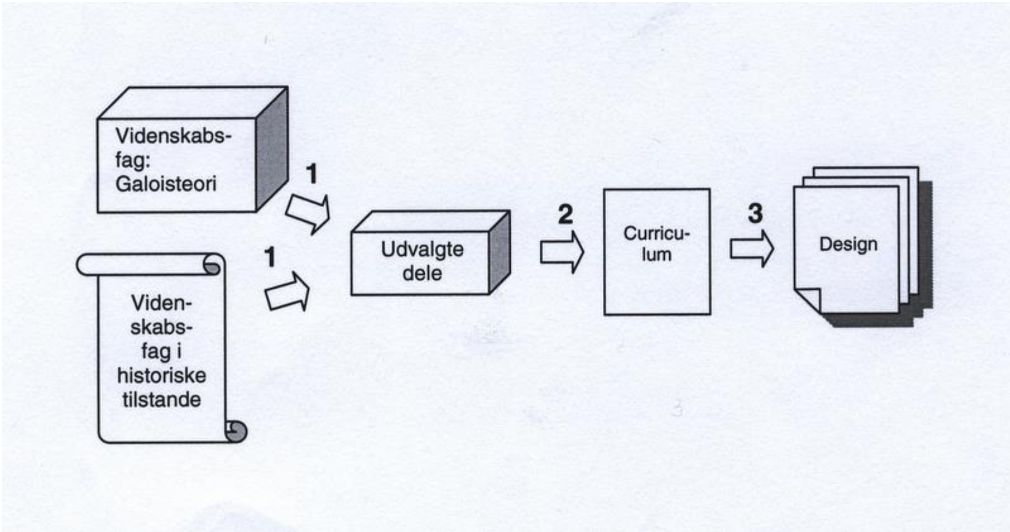
Vi vil med dette speciale gerne afprøve, hvorvidt det kan lade sig gøre at gennemføre et undervisningsforløb i en gymnasieklasse, hvor nogle af ideerne fra Galoisteorien introduceres. Vi vil således lave et eksistensbevis for, at et sådant forløb kan designes og derefter gennemføres. Specialet er følgelig at betragte som en slags afprøvning af Bruners hypotese: "Any subject can be taught effectively in some interlectually honest way to any child at any stage of development." (Bruner, 1960, s. 33). Bruner forsøgte selv i løbet af seks uger at undervise fire velbegavede otte-årige børn i andengradsligninger (Bruner, 1966, s. 56ff). Gymnasieelever kan ikke umiddelbart forventes at have forudsætninger for at lære Galoisteori, men det er imidlertid ikke utænkeligt, at vi kan komme så langt, at eleverne kan få et indblik i den oprindelige anvendelse af teorien, der var stærkt relateret til ligningsløsning.

1.2 Vores didaktiske transposition

Arbejdet med at designe undervisningsforløbet udgør den første del af specialet. Inden vi når frem til det endelige undervisningsforløb kræves en stor mængde forberedende arbejde, idet der er lang vej fra den matematiske teori - som den foreligger i moderne litteratur - til en form, der skal kunne tilegnes af gymnasieelever. Derfor vil vi indledningsvis beskrive den didaktiske transposition, der er en flytning og omformning af viden fra én form til en anden. I vores tilfælde vil vi tage udgangspunkt i historiske kilder og Galoisteorien, som den præsenteres på universitetsniveau, og på denne baggrund designe et undervisningsforløb til gymnasiet.

Transposition består for vores vedkommende af tre trin (figur 1).

I trin 1 er formålet at nå frem til en gennemarbejdet præsentation af udvalgte dele af Galoisteorien. Præsentationen tager afsæt i videnskabsfaget, hvor vi ud over den moderne Galoisteori vil betragte den første udvikling af Galoisteorien. Idet vi går tilbage til historiske kilder fra videnskabsfaget, kan vi få en forståelse



Figur 1: Vores didaktiske transposition.

for teoriens oprindelige formål og grundlæggende ideer, der var baseret på teorien om ligningsløsning. Trin 1 er væsentligt, idet processen skal give os et overblik over Galoisteoriens hovedresultater. Med udgangspunkt heri, vil vi i trin 2 skabe et curriculum ud fra de udvalgte dele af Galoisteorien. Dette curriculum skal være en liste indeholdende de emner, hvoromkring det endelige undervisningsforløb skal opbygges. I trin 3 vil vi beskrive designet af undervisningsforløbet. Vi vil her analysere, hvordan den tilsigtede viden kan tilegnes ved hjælp af forskellige undervisningssituationer, der gradvist kan udvikle elevernes kompetencer. Desuden vil vi analysere, hvordan eleverne skal opnå hver enkelt del af den tilsigtede viden. Vi vil bygge undervisningssituationerne op på baggrund af teorien om didaktiske situationer, udviklet af den franske matematikdidaktiker Guy Brousseau. Denne teori vil vi beskrive i afsnit 3.

1.3 Den empiriske del

Den anden del af specialet består af en afprøvning af det designede undervisningsforløb, samt en a posteriori analyse af dette. I analysen vil vi specielt rette vores fokus mod den didaktiske kontrakt, der beskrives i afsnit 5. Vi vil analysere, hvordan undervisningssituationerne forløber i praksis i forhold til vores a priori analyse. Herudover vil vi vurdere, hvorvidt forløbet er reproducerbart og diskutere om forløbet med større elle mindre forbedringer og variationer kan være egnet til videre brug. I relation til Bruners hypotese vil vi se på, om vores undervisningsforløb rent faktisk kan bruges som et eksempel på, at hypotesen holder.

Den empiriske del af specialet, altså afprøvning af forløbet kommer til at finde sted på Virum Gymnasium, hvor vi har fået kontakt med Christian Holst, der underviser et hold med toårigt højniveau i matematik og synes, at vores projekt lyder interessant. Holdet består af otte elever, der alle er på deres tredje år i gymnasiet. Vi er på forhånd blevet informeret om, at eleverne er særligt interesserede, og at deres niveau er et godt stykke over middel. Endvidere har vi som en forudsætning, at holdet har fået introduceret gruppebegrebet og i den forbindelse som et eksempel set på gruppen af permutationer af tre elementer. Vi har fået tildelt en uges matematikundervisning, svarende til tre moduler a 100 minutter, hvori der indgår en pause på fem minutter. Formidlingen af undervisningen vil fungere således, at Karina påtager sig rollen som lærer og Sarah rollen som observatør. Ingen af os har erfaring med at undervise.

Vi har valgt at skrive dette speciale som et gruppespeciale. Dette har givet os mulighed for at kaste os over et mere omfattende stykke arbejde, hvilket vi på forhånd antog, dette speciale ville blive. Det vil også være en fordel at samarbejde i forbindelse med afprøvningen af undervisningsforløbet, hvor vi således selv kan agere både underviser og observatør. Specialet er udarbejdet i tæt samarbejde, dog har vi besluttet, at Karina har ansvaret for afsnit 2-4 samt appendiks A.1-A.3, og Sarah har ansvaret for afsnit 5-7 samt appendiks A.4-A.5. Derudover har vi begge ansvaret for afsnit 1 og 8 samt appendiks B-D.

2 A priori analyse med henblik på den didaktiske transposition

I dette afsnit vil vi analysere de dele af Galoisteorien, som vi har gennemarbejdet i appendiks A, med henblik på at nå frem til et curriculum for vores undervisningsforløb. Vi betragter den del af Galoisteorien, der omhandler polynomiers opløselighed ved rodtegn. Dvs. om rødderne til et polynomium kan findes ved rodtegn, altså om der findes en formel til bestemmelse af rødderne til et polynomium. Dette betyder populært sagt, at vi vil se på, hvorvidt rødderne til et givet polynomium kan udtrykkes ved hjælp af de fire klassiske regneoperationer benyttet på elementer i koefficientlegemet, samt løsninger til ligninger af formen $x^n = a$ (cf. appendiks A.4). Vi vil beskæftige os med denne del af Galoisteorien, fordi den omhandler ligningsløsning, som gymnasieelever arbejder meget med i løbet af deres skoletid. I gymnasiet fokuserer man specielt på løsning af andengradsligninger og visse tredje- og fjerdegradsligninger. Galoisteorien kan anvendes til at afgøre, hvorvidt et polynomium er opløseligt ved rodtegn (cf. sætning A.68, appendiks A.4). Vi vil følgelig arbejde med denne anvendelse af Galoisteorien, idet den bygger på elevernes kendte viden om ligningsløsning. Desuden vil eleverne have mulighed for at se eksempler på konkrete polynomier, der er henholdsvis opløselige og ikke-opløselige. Da eleverne jo kender løsningsformlen til bestemmelse af rødderne til andengradspolynomier, kan vi med udgangspunkt heri anskue polynomier af højere grad, hvis rødder ikke kan bestemmes ved en tilsvarende løsningsformel. Mere generelt vil det være interessant for eleverne at se korollar A.74 (appendiks A):

> Rødderne til et n'tegradspolynomium kan altid findes ved rodtegn, hvis $n < 5$, hvorimod de ikke generelt kan findes ved rodtegn, hvis $n \geq 5$.

For, ved hjælp af Galoisteori, at kunne afgøre om et polynomium er opløseligt ved rodtegn, skal eleverne kunne anvende sætning A.68:

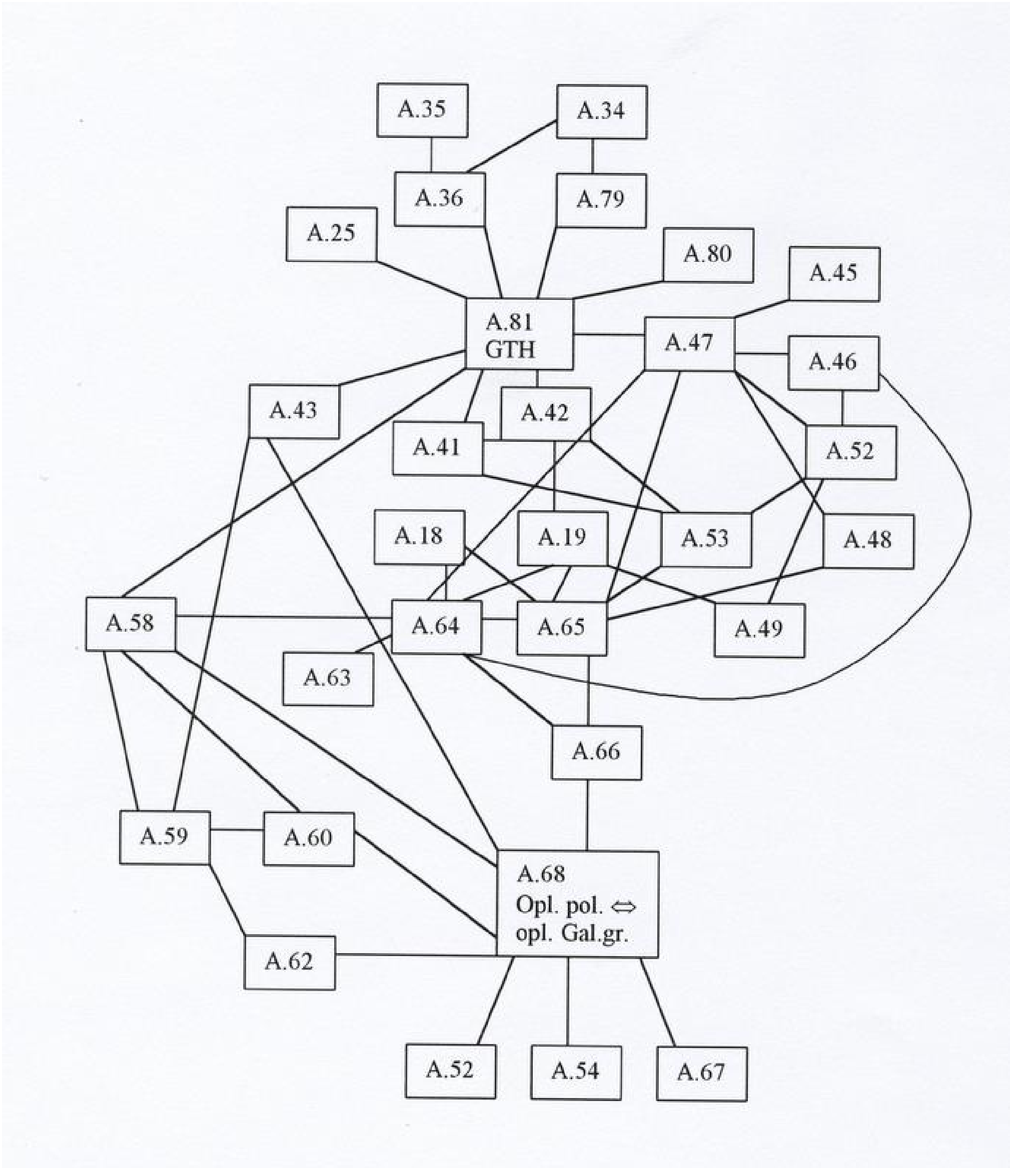
> Galoisgruppen for polynomiet $f(x)$ over grundlegemet K er opløselig, hvis og kun hvis $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn.

Vores oprindelige mål var, at eleverne desuden skulle igennem et bevis for denne sætning. Typisk benyttes Galoisteoriens hovedsætning i beviser for sætning A.68 (cf. f.eks. Jensen, 2001, s. 3.8-3.9), og denne sætning er i sig selv et meget stort resultat med mange abstrakte begreber (cf. sætning A.81, appendiks A.5). Beviset for sætning A.68 ville derfor blive alt for langt til vores undervisningsforløb, idet der kræves store mængder forberedende teori. Derfor er de typiske beviser for sætning A.68, der benytter Galoisteoriens hovedsætning, uegnede til vores brug. Figur 2 illustrerer, hvor meget teori (sætninger) vi har skullet bruge til at vise Galoisteoriens hovedsætning og sætning A.68.

Med henblik på at undgå for mange nye abstrakte matematiske objekter i undervisningsforløbet, har vi valgt at se nærmere på den historiske udvikling af Galoisteorien. Matematikerne havde dengang langt færre forudsætninger end forskere, der skriver den moderne litteratur. Gymnasieelevers tankegang vil derfor være nærmere de tidligere matematikeres end moderne forskeres. Derfor forestiller vi os, at eleverne måske bedre vil kunne forholde sig til teorien, som den fremstod oprindeligt. Af den årsag har vi arbejdet med historiske kilder fra algebraen, for på denne vis at forsøge at hente inspiration til designet af et gymnasieegnet undervisningsforløb.

2.1 Historisk tilgang

Galoisteorien blev udviklet på baggrund af ligningsløsning og i særdeleshed spørgsmålet om, hvorvidt man kunne finde rødderne til polynomier af grad større end eller lig 5 ved rodtegn. Dette spørgsmål optog mange matematikere i begyndelsen af 1800-tallet, bl.a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Niels Henrik Abel (1802-1829) og Evariste Galois (1811-1832) var pioneere på området. Det var først i 1824, at Abel gav et fuldstændigt bevis for, at et generelt femtegradspolynomium ikke er opløseligt ved rodtegn, og dermed at et generelt polynomium af grad n for $n \geq 5$ ligeledes ikke er opløseligt ved rodtegn (Abel, 1826).



Figur 2: Strukturen i appendiks A.

2.1.1 Lagrange

Lagrange udgav i slutningen af 1700-tallet en artikel (Lagrange, 1770-1771) omhandlende ligningsløsning. Her analyserede han metoder til løsning af tredje- og fjerdegradsligninger i et forsøg på at benytte disse metoder til løsning af ligninger af højere grad. Vi fandt denne artikel interessant, idet Lagrange var den første, der implicit så på grupper af permutationer af rødder til polynomier. Lagrange arbejdede med permutationsgrupper på den måde, at han fandt rationale udtryk i rødderne til et givet polynomium for dernæst at undersøge, hvilken delmængde af alle mulige permutationer af rødderne, der fikser værdierne af disse udtryk. Lagrange analyserer som sagt i de første dele af sin artikel metoder, som tidligere matematikere havde benyttet, til at finde løsningsformler til ligninger af grad 3 og 4. Han viser så, at ingen af disse metoder kan anvendes på den generelle femtegradsligning. Senere i artiklen deducerer han, ud fra sine undersøgelser, at alle metoderne kan reduceres til konstruktion af hjælpeligninger, der har lavere grad end den oprindelige, og hvis rødder er rationale funktioner af rødderne i den oprindelige ligning. Det er disse hjælpeligninger, der sætter den oprindelige ligning i stand til at kunne løses. Ideen er, at udtrykke løsningerne til hjælpeligningen som rationale udtryk i løsningerne til den oprindelige (Bashmakova & Smirnova, 2000, s. 100-106). Dette kræver lidt mere forklaring: Vi betragter altså polynomiet

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

der har rødderne $x_1, ..., x_n$. Vi lader så

$$y = \varphi(x_1, ..., x_n)$$

være en rational funktion af rødderne $x_1, ..., x_n$. Hvis værdien af y fikses af samtlige permutationer af $x_1, ..., x_n$ (dvs. under hele S_n), så viser Lagrange, at $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ kan udtrykkes rationalt ved hjælp af $a_1, ..., a_n$. Vi antager så, at $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ antager k værdier, $y_1, ..., y_k$ under permutation af $x_1, ..., x_n$. Så er $y_1, ..., y_k$ rødder i en ligning af grad k, hvis koefficienter kan udtrykkes rationalt i $a_1, ..., a_n$, nemlig ligningen

$$(y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_k) = y^k - (y_1 + \cdots + y_k)y^{k-1} + \cdots + (-1)^k y_1 \cdots y_k.$$

Ovenstående polynomium kaldes en resolvent. Koefficienterne til polynomiet er symmetriske funktioner af rødderne $x_1, .., x_n$, hvorfor de kan udtrykkes rationalt i $a_1, ..., a_n$ (Hovedsætningen om symmetriske polynomier). Generelt er $k = n!$, men i visse tilfælde er $k < n$. Graden k afhænger altså af antallet af værdier, som $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ antager under permutationerne i S_n .

Lagrange finder altså ud af, at løsning af ligninger ved rodtegn afhænger af gruppen af permutationer af rødderne og undergrupperne af denne gruppe (Bashmakova & Smirnova, 2000, s. 100-106; Katz, 1998, s. 619-621). Dog skal vi bemærke, at Lagrange ikke benytter ordet "gruppe". Lagrange betragter til ovenstående den simple funktion af rødderne

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n,$$

hvor $\alpha^n = 1$, $\alpha \neq 1$. Lad nu $\theta = t^n$. Dette θ er invariant under en undergruppe H af S_n, hvor H er cyklisk. Hvis ligningen har en cyklisk gruppe, kan ligningen altså løses ved hjælp af denne hjælpeligning. Men hvis gruppen har orden $n!$, vil θ antage $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ værdier, dvs. disse værdier er rødder i en ligning af grad $(n-1)!$. For $n = 3$ tilfredsstiler værdierne altså en ligning af grad (3-1)!=2, og for $n = 5$ tilfredsstiller værdierne en ligning af grad (5-1)!=24. Men da vi behøver en hjælpeligning af lavere grad end den oprindelige, viser denne metode, at tredjegradspolynomiet er opløseligt ved rodtegn, men at metoden ikke kan benyttes til at afgøre, hvorvidt femtegradspolynomiet er opløseligt ved rodtegn. Lagrange finder også, at fjerdegradspolynomiet er opløseligt ved rodtegn, idet han ved en anden metode finder en resolvent, der antager 3 værdier ved permutation; denne metode kan heller ikke benyttes i femtegradstilfældet. Efter overvejelser vedrørende forskellige funktioner af rødderne, erkender Lagrange, at han ikke kan finde en metode til bestemmelse af en hjælpeligning, med lavere grad end den oprindelige, for den generelle femtegradsligning. Derfor kan metoden, hvor rødderne til polynomiet findes ved hjælp af en resolvent, altså ikke bruges til $n = 5$.

Vores overvejelser vedrørende anvendelsen af metoder fra Lagranges tekst gik på, at lade eleverne prøve at finde forskellige rationale udtryk i rødderne til polynomier af en given grad n, og derefter anvende samtlige permutationer i S_n på udtrykkene og afgøre, hvilke af disse permutationer, der fikser udtrykkene. Her ville eleverne kunne komme til at arbejde meget med anvendelsen af konkrete permutationer. De ville også selv kunne opdage, at det er umuligt at finde en egnet hjælpeligning for et polynomium af grad større end eller lig 5. Vi syntes dog, det var et problem at finde ud af, hvordan eleverne skulle opnå viden omkring sammenhængen mellem disse hjælpeligninger og det faktum, at et polynomium er opløseligt ved rodtegn. Derfor gik vi helt bort fra ideen om at lade eleverne arbejde med hjælpeligninger.

2.1.2 Galois

Vores forsøg på at finde et bevis for sætning A.68, hvor vi kunne komme uden om så mange af de moderne abstrakte begreber som muligt, førte til, at vi begyndte at studere Galois' berømte artikel (Edwards, 1984, s. 101-113). Galois er den første, der eksplicit indfører permutationsgrupper og benytter disse i spørgsmålet om, hvorvidt et polynomium er opløseligt ved rodtegn. Galois' artikel er dog i sig selv meget svært tilgængelig, da beviserne er fyldt med store huller. Derfor har vi måttet hente hjælp i sekundærlitteraturen, hvor hullerne i Galois' beviser bliver udfyldt (Edwards, 1984; Radloff, 2002; Tignol, 1988).

Galois er den første, der benytter ordet gruppe for en mængde af permutationer af de n rødder til et n'tegradspolynomium $f(x)$ (med koefficienter i et legeme K), og han bemærker, at en sådan gruppe er lukket under sammensætning. Herefter beskriver han Galoisgruppen for polynomiet. Hertil benytter han en funktion V af rødderne, der antager $n!$ værdier under permutation af rødderne. Dette V kalder vi en Galoisresolvent (cf. appendiks A.3). Galois viser så, at alle rødderne kan udtrykkes som en rational funktion af V. Han betragter herefter et irreducibelt polynomium med koefficienter i K, der har V som rod ($\mathrm{Irr}(V, K)$), og viser, at rødderne til $f(x)$ også kan udtrykkes som en rational funktion af de andre rødder til $\mathrm{Irr}(V, K)$. Nu definerer Galois den gruppe, som vi i dag kalder Galoisgruppen. Denne gruppe består af permutationer, der sender rødderne til $f(x)$ over i de rationale funktioner af rødderne til $\mathrm{Irr}(V, K)$ (dvs. de sendes over i rødder til $f(x)$). Den første sætning, som Galois viser, svarer moderne til, at fixpunktsmængden af Galoisgruppen for $f(x)$ over K er lig K. Nu viser Galois, at hvis man udvider K med en rod r til en hjælpeligning af grad p, hvor p er et primtal, så vil det enten ikke ændre på Galoisgruppen, eller man vil få en ny Galoisgruppe, der har indeks p i den oprindelige Galoisgruppe. Derudover bemærker han uden bevis, at hvis man udvider K med alle rødderne til hjælpeligningen, vil den nye Galoisgruppe være normal i den oprindelige. Endelig viser Galois, at et polynomium er opløseligt ved rodtegn, netop når dets Galoisgruppe er opløseligt.

Galois' beviser er som tidligere nævnt fyldt med huller, som man nødvendigvis må udfylde, hvilket vi har gjort i appendiksene A.3 og A.4. For at udfylde disse huller måtte vi ty til den moderne algebra, hvilket jo netop var vores mål ikke at gøre. Det blev derfor klart for os, at vi på ingen måde kunne få gymnasieelever til at arbejde med beviset, hvorfor vi endte med helt at se bort fra beviset for sætning A.68.

Vores næste overvejelse var blot at præsentere sætning A.68 for eleverne uden bevis. Dette ville kræve, at eleverne fik kendskab til opløselige grupper. Vi arbejder selv i appendiks A.1 og A.4 med to forskellige definitioner af en opløselig gruppe. Begge disse definitioner kræver kendskab til normale undergrupper samt hhv. abelske faktorgrupper og gruppeindeks. Da vi i vores undervisningsforløb ikke vil bruge lang tid på at definere nye begreber, ender vi også med at udelukke opløselige grupper og dermed sætning A.68 helt. Dvs. vi vender nu vores fokus mod polynomiers opløselighed ved rodtegn.

2.2 A priori analyse med henblik på polynomiers opløselighed ved rodtegn

Som nævnt i begyndelsen af afsnit 2 var et af vores mål, at eleverne skulle opnå viden om korollar A.74. Men da sætning A.68 er en vigtig del af beviset for dette korollar, er de nødvendige redskaber til at gennemføre beviset ikke tilgængelige for eleverne. Derfor vil vi blot præsentere korollar A.74 for eleverne uden bevis.

Vi bestemte os nu for at fokusere mere på polynomiers opløselighed ved rodtegn. Her er vores mål, at eleverne skal se sætning A.76 (appendiks A.4):

> Lad $f(x)$ være et irreducibelt polynomium af primtalsgrad p og lad $f(x)$ have koefficienter i $\mathbb{Q}$. Hvis $f(x)$ har præcist $p-2$ reelle rødder, gælder der for spaltningslegemet M, at $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq S_p$, og $f(x)$ er derfor ikke opløseligt ved rodtegn for $p \geq 5$.

Vi synes denne sætning er velegnet til forløbet, idet den viser, at visse polynomier ikke er opløselige ved rodtegn. Eleverne må dog se sætningen uden bevis, idet vi ikke kan gennemføre beviset uden at se på bl.a. normale legemsudvidelser og transitive undergrupper. Desuden er beviset meget langt, idet det benytter sig af mange andre sætninger (cf. appendiks A.4). For at eleverne skal kunne anvende sætningen, skal de besidde viden om følgende:

- Irreducible polynomier.
- Galoisgruppen for et polynomium.
- Polynomiers opløselighed ved rodtegn.

2.2.1 Irreducible polynomier

I undervisningsforløbet vil vi kun definere irreducibilitet af polynomier inden for $\mathbb{Z}$. Begrundelsen for dette er, at vi kun vil arbejde med polynomier med koefficienter i $\mathbb{Z}$, og at defininitionen af irreducibilitet inden for $\mathbb{Z}$ er betydeligt simplere, end hvis vi definerer irreducibillitet inden for $\mathbb{Q}$ (appendiks A.1). Det er nemlig kun 1 og -1, der er invertible konstanter i $\mathbb{Z}$, dvs. de eneste trivielle faktoriseringer af et polynomium $f(x)$ inden for $\mathbb{Z}$ er $1 \cdot f(x)$ og $-1 \cdot f(x)$. Hvis vi derimod taler om irreducibilitet inden for $\mathbb{Q}$, er de invertible konstanter langt flere, f.eks. er 2 her en invertibel konstant, hvorfor eksempelvis $2 \cdot (x^2 - 2)$ er en triviel faktorisering af $2x^2 - 4$. Idet der i sætning A.76 kræves irreducibilitet inden for $\mathbb{Q}$, vil vi altså ændre dette, til at polynomiet skal have koefficienter i $\mathbb{Z}$ i vores præsentation af sætningen. For at lette definitionen af irreducibilitet yderligere vil vi desuden kun se på normerede polynomier. Således behøver vi kun gøre eleverne opmærksomme på, at faktoriseringen $1 \cdot f(x)$ ikke betyder, at $f(x)$ er reducibelt, og at $f(x) = 1$ ikke er irreducibelt. Definitionen af irreducibilitet inden for $\mathbb{Z}$, som vi ønsker eleverne skal kunne beherske, er altså følgende:

> Hvis et polynomium, hvor koefficienten til højestegradsleddet er 1, ikke kan faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$, kaldes polynomiet irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$; hvis det kan, kaldes det reducibelt inden for $\mathbb{Z}$. Dog gælder, at faktoriseringen $1 \cdot f(x)$ ikke betyder, at $f(x)$ er reducibelt, samt at $f(x) = 1$ ikke er irreducibelt.

Da vi ønsker, at eleverne skal kunne anvende sætning A.76, er det nødvendigt, at de kan afgøre, om et konkret polynomium er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$. De polynomier, for hvilke man kan anvende sætning A.76, er jo netop ikke opløselige ved rodtegn, hvorfor det ikke vil være muligt for eleverne at bestemme rødderne ved hjælp af metoder, som de kender. Derfor kan eleverne ikke afgøre, hvorvidt sådanne polynomier er irreducible ud fra ovenstående definition. Til hjælp vil vi derfor se på Eisensteins irreducibilitetskriterium, der er meget anvendeligt i denne sammenhæng. Det er en velegnet sætning, idet den er umiddelbart tilgængelig for gymnasieelever. Beviset for sætningen er et rent talteoretisk bevis, der ligeledes er tilgængeligt for eleverne (sætning A.14, appendiks A.1).

2.2.2 Galoisgruppen for et polynomium

Idet eleverne skal kende Galoisgrupper for polynomier, synes vi specielt at arbejdet med permutationsgrupper er vigtigt. Vores mål er her, at få eleverne til at tilegne sig viden om permutationsgruppen S_n. Eleverne kan let arbejde med de mindste permutationsgrupper, altså S_2 og S_3, og herudfra opnå viden om S_n. Arbejdet med permutationsgrupper skal danne grundlaget for indførelsen af Galoisgrupper.

I den moderne litteratur er Galoisgrupper defineret ved hjælp af automorfier og legemer, herunder spaltningslegemer (definition A.31, appendiks A.2). Da vi jo vil forsøge at indføre så få nye abstrakte begreber som muligt, vil vi gerne definere Galoisgruppen uden at indføre automorfier og spaltningslegemer. Vi mener også, at definition A.31 er svær at forstå, hvis man ikke kender de to begreber godt. Et af vores mål er desuden, at eleverne skal prøve at bestemme en Galoisgruppe for et givet polynomium, hvilket vi vurderer vil være uhyre vanskeligt for eleverne ud fra denne definition. Derfor skulle eleverne præsenteres for den mere utraditionelle definition af Galoisgruppen for et polynomium:

> Lad $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ være et n'tegradspolynomium med lutter simple rødder $\alpha_1, ..., \alpha_n$. En permutation $\sigma \in S_n$ af rødderne ligger i Galoisgruppen for $f(x)$ over $\mathbb{Q}$, hvis følgende gælder:
> For ethvert polynomium $g(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Q}[X]$ i n variable, hvor $g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$, vil $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = 0$.

I denne definition mangler eleverne kendskab til polynomier i flere variable, og det faktum, at et polynomium af grad n har n komplekse rødder, dvs. viden om komplekse tal og Algebraens Fundamentalsætning (fremover kaldet AFS). For at undgå at tale direkte om polynomier i flere variable, hvor rødderne indsættes, vil vi i stedet tale om udtryk i de forskellige rødder $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ til et polynomium. Ved hjælp af viden om permutationer, kan eleverne nu permutere rødderne i disse udtryk og afgøre om værdien af udtrykket ændres eller fikses. Herved kan eleverne opnå viden om, hvilke permutationer der ligger i Galoisgruppen for et polynomium.

Komplekse tal er et emne, der er meget egnet til brug i gymnasiet. For at kunne løse samtlige andengradsligninger kræves blot, at man ser, at $\sqrt{-1} = i$. Derfor er det et emne, eleverne let kan arbejde selvstændigt med. AFS er ikke i sig selv svær at forstå for gymnasieelever, men beviset er meget langt (cf. Poulsen & Thomsen, 2001, s. 487-494), og der kræves igen mange forudsætninger, som eleverne ikke besidder, for at beviset kan gennemføres. Derfor er beviset ikke velegnet til vores undervisningsforløb. Ved hjælp af de komplekse tal og løsningsformlen til andengradsligninger kan eleverne let se, at AFS gælder for $n = 2$ og derved få en intuitiv forståelse for, at sætningen gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

2.2.3 Polynomiers opløselighed ved rodtegn

Polynomiers opløselighed ved rodtegn er defineret på følgende måde: Et polynomium $f(x) \in K[X]$ er opløseligt ved rodtegn, hvis det har en rod i en radikaludvidelse af K. Denne definition er meget abstrakt, men indholdet betyder blot, at man kan udtrykke rødderne til $f(x)$ ved hjælp af addition, subtraktion, multiplikation og division af elementer i K samt løsninger til ligninger på formen $x^n = a$. Dette kender eleverne fra løsningformlen til bestemmelse af rødder til andengradspolynomier, dog ikke enhedsrødder, som man får ved at finde samtlige løsninger til $x^n = a$, $a > 0$. Enhedsrødder kan dog let indføres i forbindelse med komplekse tal. Derfor vil vi tale om løsningsformler i stedet for opløselighed ved rodtegn.

På grund af ovenstående betragtninger vil vi præsentere sætning A.76 for eleverne som (sætning B.29, appendiks B.3):

> Et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{Z}$ af grad $p \geq 5$, hvor p er et primtal, der har præcis $p - 2$ reelle rødder, har S_p som

Galoisgruppe, og man kan derfor ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$.

2.3 Endeligt curriculum

Vores a priori analyse med henblik på den didaktiske transposition, som vi har beskrevet i de foregående afsnit, medfører, at vores endelige curriculum bliver følgende:

- Komplekse tal, herunder Algebraens Fundamentalsætning.
- Irreducibilitet af polynomier.
- Formler til bestemmelse af rødderne til polynomier.
- Permutationsgrupper.
- Galoisgrupper for polynomier.

Vi kan nu beskrive vores design af undervisningsforløbet. Undervisningssituationerne har vi tilrettelagt ud fra teorien om didaktiske situationer, hvilken vi kort vil introducere i det følgende afsnit.

3 Teorien om didaktiske situationer

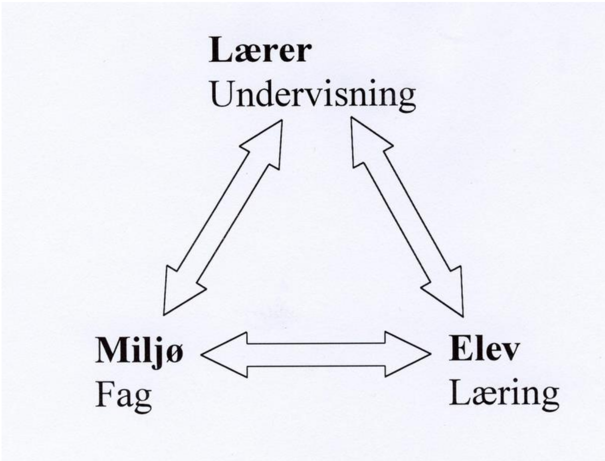
I al didaktisk arbejde er udgangspunktet at skabe en didaktisk transposition af viden, dvs. en flytning og omformning af viden fra en form til en anden. En didaktisk transposition kan enten være ekstern eller intern (Winsløw, 2006a, s. 18-20). Den eksterne didaktiske transposition består af flytning og omformning af viden fra kilder til undervisningsfaglig viden. F.eks. er udarbejdelsen af en lærebog ud fra videnskabelige artikler en ekstern didaktisk transposition. Den interne didaktiske transposition består af flytning og omformning af viden fra undervisningsfaglig viden til konkrete undervisningssituationer. Som et eksempel på en intern didaktisk transposition kan her nævnes udarbejdelsen af opgaver ud fra en læreplan.

Teorien om didaktiske situationer (fremover kaldet TDS) er udviklet af den franske matematikdidaktiker Guy Brousseau (1933-) gennem flere årtiers forskning, der havde sit udspring i 1970'erne. Teorien er udviklet på baggrund af studier af matematikundervisning, men er også anvendelig i andre naturvidenskabelige fag. TDS bygger på konstruktivistiske ideer om, at elever bedst tilegner sig viden gennem problemløsning, hvor de selv er ansvarlige for effektivt at konstruere sin viden ved at løse et problem eller en opgave. Når en elev således har fået en personlig viden gennem løsning af problemet skal denne viden kunne formuleres og dermed fællesgøres, således at den personlige viden bliver officiel.

3.1 Didaktisk miljø

I TDS taler man om et *didaktisk miljø*, hvori eleven kan tilegne sig viden. Grunden til, at man i TDS taler om det didaktiske miljø, er, at som det er gældende for andre miljøer, vil man udvikle sig inden for det miljø, befinder sig i. Man udvikler sig ved at tilpasse sig til det pågældende miljø. Det samme gælder i matematikundervisning, hvor man kan sige, at eleven udvikler sin matematiske viden ved at tilpasse sig det miljø, som det er lærerens opgave at skabe. Læreren kan skabe det didaktiske lærings-miljø ved f.eks. at præsentere et problem, der skal løses. Ved at eleverne så tilpasser sig miljøet, idet de løser problemet, kan viden tilegnes af eleverne.

Det er forholdet mellem eleven og det didaktiske miljø, dvs. elevens tilpasning til miljøet, der er det væsentlige i den didaktiske trekant , hvor læreren, eleven og miljøet indgår (figur 3). Dette forhold mellem eleven og det didaktiske miljø beskrives nærmere i næste afsnit.



Figur 3: Den didaktiske trekant.

Alle undervisningssituationer har en tilsigtet viden , svarende til den viden, eleverne skal opnå i situationen. Enhver undervisningssituation, såvel opgaveløsning som forelæsning, danner et didaktisk miljø, hvori der er forskellige betingelser for elevernes læring. Et didaktisk miljø har to dimensioner, en objektiv og en subjektiv (Winsløw, 2006b, s. 57-58). Den objektive dimension er den del af det didaktiske miljø, der kan beskrives, eksempelvis om man i en opgave bruger terninger til at kaste med for bestemme sandsynligheden for at slå en sekser, eller hvilke instruktioner eleverne skal have, inden de går i gang med opgaven. Den subjektive dimension handler om de aspekter, der implicit gælder i enhver didaktisk situation, eksempelvis den didaktiske kontrakt (cf. afsnit 5).

3.2 Offentlig vs. personlig viden

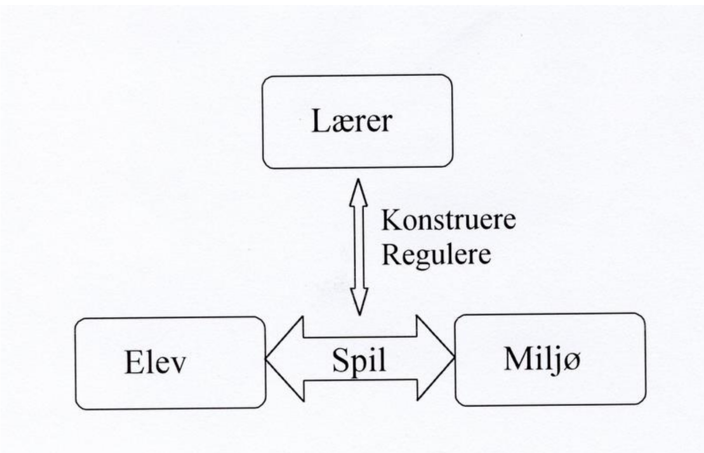
Man kan betragte viden som enten offentlig eller personlig. Den offentlige viden er, ved præsentation for offentligheden, dekontekstualiseret og depersonaliseret (Brousseau, 1997, s. 22). Hvad enten det er en forsker, der præsenterer forskningsresultater eller en lærebogsforfatter, der udgiver en ny bog, må resultatet som ses af offentligheden, være fri for den kontekst, hvori materialet er blevet til. Man kan således ikke i slutresultatet se alle overvejelser og eventuelle begåede fejl. Offentligheden bliver præsenteret for et materiale, der er frigjort fra forfatterens personlige forhold.

Det er lærerens opgave at skabe det didaktiske miljø, hvor eleven ved tilpasning til miljøet kan opnå viden. Læreren vil kunne skabe et egnet didaktisk lærings-miljø ved en intern didaktisk transposition fra officielt fastlagt undervisningsfaglig viden til undervisningssituationer, og idet eleven agerer inden for det didaktiske miljø, vil elevens personlige viden blive skabt. Når læreren skal lave den interne didaktiske transposition fra undervisningsfaglig viden til undervisningssituationer, må læreren repersonalisere og rekontekstualisere viden, så den kan tilegnes af eleverne (Brousseau, 1997, s. 23). Dette kan læreren gøre ved eksempelvis at stille eleverne over for et konkret problem, der skal løses. Når eleverne skal tilegne sig viden, vil det som regel ske i en bestemt kontekst, f.eks. i konteksten af en opgave eller et eksempel givet af læreren. Herefter må eleven redekontekstualisere og redepersonalisere denne viden igen, for efterfølgende at kunne benytte den i andre kontekster.

3.3 Det didaktiske spil

I TDS taler man om det didaktiske spil (Winsløw, 2006a, s. 137). I dette spil indgår læreren, miljøet og eleven. Elevens opgaver er at deltage i spillet med miljøet, forstå spillets regler og udvikle vinderstrategier. Lærerens opgaver er at planlægge og regulere spillet mellem eleven og det didaktiske miljø (figur 4). At eleven spiller med miljøet betyder, at eleven arbejder i det af læreren arrangerede miljø. Det didaktiske miljø skal etableres af læreren på en sådan vis, at den tilsigtede viden fremkommer som den mest hensigtsmæssige måde at forstå spillet og søge vinderstrategier; når eleven har opdaget en måde, hvorpå spillet kan vindes, opstår viden. Lærerens opgave er endvidere undervejs at justere elevens spil i miljøet, således at eleven ikke kommer på afveje. Lærerens "spil" består følgelig af konstruktion og regulering af elevens spil med miljøet. Disse to spil, elevens og lærerens, kaldes det didaktiske dobbeltspil. Efter eleven har spillet med miljøet, er det lærerens opgave at sørge for, at vinderstrategierne fællesgøres.

Vi vil nu betragte den såkalde puslespilsopgave, der på fremragende vis beskriver spillet (Brousseau, 1997, s. 177-179; Winsløw, 2006a, s. 136-137). Puslespilsopgaven har til hensigt at udvikle elevens viden om proportionalitet. Det objektive miljø består af et puslespil, hvor brikkerne er hhv. trekanter og firkanter. Eleverne skal nu i grupper spille spillet, hvilket består i at lave en forstørret udgave af puslespillet således, at de kanter på brikkerne, der er eksempelvis 5 cm i det oprindelige puslespil skal forlænges til lad os sige 8 cm i det forstørrede puslespil. Eleverne vil typisk indledningsvist forsøge sig med at forlænge alle siderne på brikkerne med 3 cm, dvs. forstørre brikkerne ved en additiv metode, hvorved de vil erfare, at puslespillet ikke kan samles. På dette tidspunkt vil miljøet give eleverne feedback, der gør det klart, at deres formodede vinderstrategi er forkert. På denne vis fremtvinges den tilsigtede viden af miljøet, idet den eneste måde, hvorpå de kan samle puslespillet igen, er ved at multiplicere alle siderne på brikkerne med $\frac{8}{5}$. Når eleven har fundet denne vinderstrategi er det elevens personlige viden. Det er herefter, som ovenfor beskrevet, lærerens opgave at sørge for, at den personlige viden fællesgøres, så den bliver officiel og dermed må benyttes i andre kontekster.



Figur 4: Det didaktiske dobbeltspil.

3.4 Didaktiske og adidaktiske situationer

En undervisningssituation kan bestå af henholdsvis adidaktiske og didaktiske situationer (Brousseau, 1997, s. 29-31; Winsløw, 2006a, s. 139, 143-144). Når læreren via spørgsmål, diskussion og fremlægning af officiel viden griber ind i elevernes spil med miljøet, har vi en *didaktisk situation*. I disse situationer findes *didaktiske variable*, som læreren kan ændre for at opnå en bedre undervisningssituation. Didaktiske variable er alle de ting, læreren kan ændre på i en didaktisk situation, for at eleverne bedre kan tilpasse sig miljøet. Således kan læreren eksempelvis ændre tal i en opgave, opgavens formulering eller sin præsentation af en opgave. Læreren vil typisk regulere de didaktiske variable, hvis han mener, at undervisningssituationen bliver bedre af ændringerne, og at eleverne således har en forbedret mulighed for at vinde spillet ved tilpasning til det didaktiske miljø. En *adidaktisk situation* forekommer, når eleverne spiller med det didaktiske miljø uden lærerens indgriben. I adidaktiske situationer kan læreren ikke i fuld udstrækning kontrollere, hvilken viden eleverne opnår; her er eleven i princippet ansvarlig for sin egen læring, idet han skal søge at vinde spillet.

Hvis vi vil beskrive ovenstående situationer ud fra vores eksempel med puslespilsopgaven er eleverne i en adidaktisk situation, når de egenhændigt forsøger at forstørre puslespillet og i en didaktisk situation, når læreren beder eleverne fællesgøre vinderstrategierne.

En *fundamental situation* er en eller flere adidaktiske situationer, der sikrer en faglig indsigt og fremtvinger viden hos eleven (Brousseau, 1997, s. 47-48; Winsløw, 2006a, s. 144). En fundamental situation er følgelig en situation, hvor eleven, hvis denne vinder spillet, med sikkerhed vil tilegne sig den tilsigtede viden i situationen. En elev i en fundamental situation vil nødvendigvis opnå personlig viden, der kan fællesgøres. Den ovenfor beskrevne puslespilsopgave er en fundamental situation, idet eleverne nødvendigvis må opnå den tilsigtede viden, når spillet vindes, altså når puslespillet samles.

Når læreren designer et undervisningsforløb ud fra TDS, handler det primært om, at skabe sådanne fundamentale situationer. Når man designer opgaver inden for rammerne af TDS, søger man derfor problemer, der har en såkaldt ”flaskehalsstruktur”, hvilket indebærer, at problemet skal være åbent, men udgangen snæver. Den tilsigtede viden i opgaven skal derfor være velafgrænset således, at uanset hvordan eleverne griber opgaven an, vil den tilsigtede viden kunne opnås. Det kan dog være ganske svært at identificere præcis hvilke dele af det didaktiske miljø, der sikrer den tilsigtede viden (Sierpinska, 1999, lecture 7).

I matematikundervisning på universitetet er den herskende undervisningsform forelæsninger, hvor officiel viden udelukkende fremlægges af læreren. Matematikundervisning i folkeskolen og i gymnasiet bærer ligeledes ofte præg af denne form, hvorfor der her er langt mellem fundamentale undervisningssituationer. Flere situationer har dog *adidaktisk potentiale* (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 117, 134, 137-138; Winsløw, 2006a, s. 140). Dermed er der i miljøet mulighed for, at eleverne kan få feedback på deres handlinger, hvorved der skabes potentiale for, at eleverne kan opnå viden i en adidaktisk situation. Læreren udnytter blot ikke dette adidaktiske potentiale til en adidaktisk situation.

Et problem ved de adidaktiske situationer er, at man opnår viden i en bestemt kontekst af en opgave (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 128). Det er herfor vigtigt, at denne viden efterfølgende dekontekstualiseres, idet den benyttes i andre kontekster. Ved denne dekontekstualisering opnås en egentlig tilegnelse af den nye viden, hvorved den kan mobiliseres.

3.5 Faser i det didaktiske spil

Det didaktiske spil har fem hovedfaser , som vi vil beskrive i det følgende afsnit (cf. figur A) (Sierpinska, 1999, lecture 1; Winsløw, 2006a, s. 138-139). Disse faser omhandler hhv. lærerens og elevernes forhold til den tilsigtede viden.

3.5.1 Devolution

Den første af faserne er en *devolueringssituation*, hvor læreren præsenterer et problemfelt, og sætter eleverne i gang med spillet. Dette problemfelt vælges af læreren ud fra overvejelser om, at eleven let skal kunne tage problemet til sig som sit eget og dermed løse det af egen interesse. Det er på denne baggrund, at det didaktiske miljø etableres. Eleven skal have mulighed for at løse problemet enten ved hjælp af velkendte metoder eller metoder, eleven selv har mulighed for at udvikle. Devolutionen er oftest en ren didaktisk situation.

3.5.2 Handling

I en *handlingssituation* vil læreren trække sig tilbage for at betragte elevernes spil med miljøet. Her er eleverne i en situation, hvor læreren ikke griber ind, hvorfor situationen er adidaktisk. Miljøet er i handlingssituationen et problem- og udforskningsfelt, hvor viden opnås i arbejdet med at finde en vinderstrategi.

3.5.3 Formulering

Den tredje fase er en *formuleringssituation*, hvor eleverne formulerer strategier og hypoteser, f.eks. efter en adidaktisk situation. I formuleringssituationen vil læreren fungere som organisator ved at stille spørgsmål og bede eleverne formulere og præcisere deres erfaringer og personlige viden. Eleverne skal her finde et fælles sprog til at udtrykke formuleringerne, så deres personlige viden bliver fælles. En formuleringssituation kan både være adidaktisk og didaktisk, og miljøet vil typisk være en åben diskussion.

3.5.4 Validering

Herudover kan der optræde en *valideringssituation*, hvor miljøet er en diskussion, der er systematisk styret. Her bliver elevernes formuleringer udfordret og evalueret. Der vil ofte være en valideringssituation efter en formuleringssituation. I valideringssituationer beviser eleverne de påstande, der er opstået i en foregående formuleringssituation. Valideringen vil normalt være didaktisk, idet læreren som regel vil styre diskussionen. Det gælder dog for læreren om at blande sig mindst muligt, så eleverne hovedsageligt selv skaber teorien.

3.5.5 Institutionalisering

Den sidste fase er en *institutionaliseringssituation*, hvor læreren præsenterer officiel viden, som typisk vil være love og principper. En institutionalisering er hyppigt præcisering og stadfæstelse af fælles viden fra en valideringssituation, men kan også stå alene som præsentation af officiel matematik, der er ukendt for eleverne, som eksempelvis ved en forelæsning. Institutionalisering er en ren didaktisk situation.

3.5.6 Sammenhæng mellem faserne

På trods af den sekventielle gennemgang af de fem faser er det ikke givet, at de i en undervisningskontekst vil følge hinanden som ovenfor beskrevet. Dog hænger nogle af faserne alligevel sammen, idet en devolution typisk vil gå forud for en handlingssituation. En handlingssituation lægger naturligvis op til en formuleringssituation, da man forsøger at få eleverne til at forklare, hvordan de har løst et givet problem. Valideringssituationer vil, som tidligere nævnt, ofte fungere som opsamling på handlings- og formuleringssituationer; heri bestemmes hvilke strategier, der er gode at benytte i spillet. Efter handlings-, formulerins- og valideringssituationer vil der naturligt nok forekomme en institutionalisering, hvor elevernes arbejde i miljøet præsenteres som officiel viden.

	Lærerens opgave	**Elevens opgave**	**Miljø**	**Situation**
Devolution	Igangsætte Afklare	Modtage Forstå	Etableres	Didaktisk
Handling	Observere Reflektere	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskning	Adidaktisk
Formulering	Organisere Udspørge	Formulere Præsicere	Åben diskussion	Adidaktisk/ didaktisk
Validering	Lytte Evaluere	Argumentere Reflektere	Styret diskussion	Oftest didaktisk
Instutio-nalisering	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutio-nelt	Didaktisk

Figur A: Faser i det didaktiske spil.

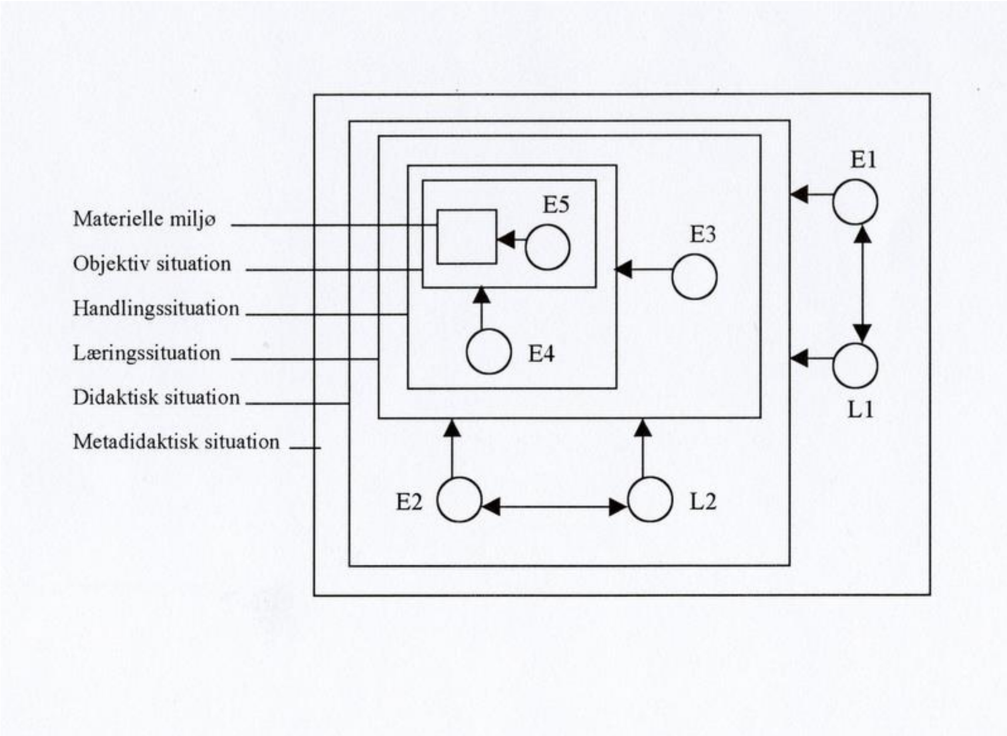
3.6 Aktørernes roller i det didaktiske spil

I et didaktisk miljø har læreren og eleven hver sine roller (Brousseau, 1997, s. 248; Sierpinska, 1999, lecture 1). Dette kan beskrives ved figur 5. I den metadidaktiske situation planlægger personerne at påtage sig rollerne som hhv. lærer og elev (L1, E1). Det er på dette grundlag, at læreren planlægger undervisningen, og her den didaktiske kontrakt tager form (cf. afsnit 5). Den didaktiske situation indtræffer, når lærer og elev træder ind i de planlagte roller (L2, E2), f.eks. i en devolution. Lærerens rolle består i at præsentere viden, stille og svare på spørgsmål eller observere, mens elevens rolle er centreret omkring at forstå, spørge, lytte eller reflektere. Der er nu et samspil mellem lærer og elev omkring en læringssituation. I en læringsssituation (formulering) tilegner eleven (E3) sig viden. Inden for denne læringssituation vil der være en handlingssituation, hvor eleven (E4) tager et problem til sig og forsøger at løse det. I handlingssituationen fremkommer en objektiv situation, hvor eleven (E5) spiller med det materielle miljø, der kan være konkret, eksempelvis i form af en terning, eller forestillet, såfremt spillet er uden hjælpemidler.

3.7 Degenererede situationer

I matematikundervisning generelt, og på universitetet i særdeleshed, er institutionalisering den hyppigst forekommende fase, idet forelæsninger og klassetimer som regel består i, at læreren præsenterer officiel viden. Baggrunden for at benytte institutionalisering er, at man skal nå igennem et vist pensum inden for en bestemt tidsramme. Adidaktiske situationer er ganske tidskrævende, hvorfor man må udvælge de vigtigste emner til denne type undervisning og benytte institutionalisering til resten.

I matematikundervisning kan der forekomme andre faser end institutionalisering, dog oftest i degenereret form (Sierpinska, 1999, lecture 1). Degenereringen kan i en handlingssituation bestå i, at læreren efter at have forelagt eleverne et problem, flere gange blander sig ved i løsningsprocessen at give hints og ideer til vinderstrategien. En degenereret formuleringssituation kan være, at læreren beder en elev formulere en definition eller sætning, hvorefter læreren fortæller, om svaret er korrekt. En valideringssituation kan degenereres ved, at læreren beder en elev bevise en påstand, som eleven ikke selv har formuleret, og desuden at læreren i for høj grad styrer fremgangsmåden.



Figur 5: Strukturen i det didaktiske miljø.

4 Den interne didaktiske transposition

I dette afsnit vil vi beskrive vores design af et undervisningsforløb for gymnasieelever, hvor udgangspunktet er det i afsnit 2.3 omtalte curriculum. Vi vil således udarbejde et didaktisk ingeniørarbejde, idet vi skaber en intern didaktisk transposition. Vi vil hermed beskrive, hvordan vi ved hjælp af undervisningssituationer vil stræbe mod, at eleverne opnår den tilsigtede viden. På baggrund af dette design udarbejder vi en undervisningsmanual til brug, når forløbet skal afprøves (appendiks B).

I henhold til designet vil vi i det følgende beskrive vores overvejelser.

4.1 Makrodidaktiske overvejelser

De makrodidaktiske valg er de overordnede beslutninger, vi har brugt som retningslinjer i ingeniørarbejdet (Artigue, 1994, s. 34). Disse er følgende:

I. Genbrug af polynomier. For at spare tid vil vi så vidt muligt genbruge polynomierne i opgaverne. Således vil mange af opgaverne kræve, at man skal benytte rødderne i givne polynomier til forskellige formål. Genbrug af polynomierne sikrer, at eleverne ikke skal bruge tid på at finde rødder i alle de forelagte polynomier, hvis det ikke i sig selv har noget formål. Herved kommer fokus på det væsentlige i opgaven.

II. Begrænset kompleksitet. Vi forsøger i vores a priori analyse af det faglige indhold at undgå, at det matematiske indhold i undervisningsforløbet bliver for omfattende i henhold til indførelsen af nye begreber (cf. afsnit 2). Herved minimerer vi for det første mængden af nye ord og definitioner. For det andet undlader vi helt at inddrage beviser for sætninger, der kræver for mange forudsætninger, som eleverne ikke er i besiddelse af. På denne måde begrænser vi antallet af abstrakte matematiske objekter, som eleverne skal forholde sig til. Vi er af den overbevisning, at det er vigtigt, at abstraktionsniveauet ikke bliver for højt i undervisningsforløbet, i og med undervisningsforløbet er designet til gymnasieelever, der ikke behersker brugen af abstrakte objekter på lige fod med universitetsstuderende. Jo mere abstrakte de matematiske objekter bliver, des sværere bliver de at identificere, og følgelig også at personliggøre. Netop personliggørelsen af viden er vigtig, for at eleverne skal kunne anvende viden i flere forskellige kontekster (cf. afsnit 3.4).

III. Kendt viden som grundlag for ny viden. Det er vores hensigt at undgå, at der opstår et stort spring mellem den viden eleverne besidder og den tilsigtede viden. Eleverne skal altså så vidt muligt anvende kendt viden til at opnå ny viden. Helt konkret vil vi indføre komplekse tal ud fra elevernes viden om andengradsligninger ved at introducere komplekse tal som løsninger til de andengradsligninger, som eleverne ikke tidligere har kunnet løse. Irreducibilitet vil vi indføre ved hjælp af elevernes viden om faktorisering af polynomier. Endelig vil vi indføre den generelle permutationsgruppe S_n på baggrund af elevernes viden om S_3 og gruppebetingelserne.

IV. Opgaver før institutionalisering. Eleverne vil løbende få udleveret arbejdsark med opgaver, hvor der i opgaveløsningen, skal benyttes viden, der endnu ikke er institutionaliseret. Med disse opgaver vil vi forsøge at skabe fundamentale situationer (cf. afsnit 3.4), hvor den tilsigtede viden tilegnes under en eller flere af de adidaktiske situationer, der optræder i forbindelse med opgaveløsning. Institutionalisering af den tilsigtede viden vil så finde sted, efter eleverne har formuleret og fællesgjort deres resultater.

V. Få noter efter institutionalisering. Vi vil ikke udlevere noter til eleverne før undervisningen. Dette bevirker, at eleverne ikke får mulighed for at hente hjælp i notemateriale i de adidaktiske situationer. Herved sikrer vi, at eleverne tilegner sig viden på egen hånd og ikke kopierer eksempler og metoder, hvilket ofte forekommer, såfremt eleverne får udleveret sædvanligt notemateriale. Vi vil ligeledes ikke gennemgå eksempler på tavlen, som eleverne kan kopiere i opgaveløsningen. Herved undgår vi at påvirke elevernes læringssituation. Efter institutionaliseringssituationerne vil eleverne få udleveret så få noter som muligt. Noterne indeholder ikke eksempler, men derimod kun den vigtigste institutionaliserede viden. På denne måde bliver eleverne tvunget til at tilegne sig den tilsigtede viden i handlingssituationerne og ikke ud fra notematerialet. Noterne kommer altså udelukkende til at fungere som hjælp til stadfæstelse af den institutionaliserede viden.

VI. Samlet materiale. På grund af ovenstående betragtninger producerer vi arbejdsark og notemateriale selv (cf appendiks C). Arbejdsarkene udarbejdes således, at der er plads til at skrive på selve arket. Herved skal eleverne ikke bruge tid på at finde papir frem og skrive opgaverne af. Arbejdsarkene vil sammen med notearkene, til slut, udgøre et samlet hæfte, idet vi giver arkene sidetal, efter hvornår de bliver udleveret. Dette hæfte kan give eleverne et overblik over forløbet og et materiale til videre brug.

VII. Læreren validerer resultater. Valideringen af elevernes løsninger til de stillede opgaver lader vi være lærerens ansvar, idet dette er tidsbesparende i forhold til at inddrage eleverne i valideringssituationerne.

VIII. Variation. Generelt vil vi forsøge at skabe meget variation i undervisningen. Vi vil lave mange små opgaver, hvorved de adidaktiske situationer bliver korte. Hermed opnår vi kontrol over udviklingen i forløbet, der vil bestå af skiftevis adidaktiske og didaktiske situationer. Vi vil således begynde med en devolution af en opgave, der skal løses i endnu en adidaktisk situation. Dernæst skal eleverne formulere deres metoder og resultater, der så valideres af læreren. Herefter institutionaliseres den tilsigtede viden, hvorpå der kan bygges videre i en ny opgave, der løses i en adidaktisk situation osv. Vi kan dermed løbende kontrollere, hvilken viden eleverne har opnået, idet de ofte vil skulle formulere deres metoder og resultater. En psykologisk fordel ved den store grad af variation i undervisningen er, at idet elevernes fokus hele tiden skal skifte fra at være på opgaverne til at være på tavlen, kan vi måske undgå, at eleverne bliver ukoncentrerede. På denne måde er eleverne tvunget til hele tiden at være opmærksomme.

IX. Opgaveløsning. Vi vil lade det være op til eleverne selv, om de vil løse opgaverne individuelt eller sammen med en eller flere af de andre elever. Generelt vil opgaveløsningen fungere således, at vi vil bede den, der har løst opgaven først, om at skrive sit resultat på tavlen (ved flere opgaver, kommer forskellige elever til tavlen), mens resten regner videre. Når alle er (omtrent) færdige, vil vi lade eleven formulere sin fremgangsmåde. Vi har valgt netop denne metode, fordi den er tidsbesparende. Dette sidste punkt er ikke så meget af didaktisk karakter, men snarere en pædagogisk overvejelse vedrørende håndtering af klasserummet.

4.2 Mikrodidaktiske overvejelser

De mikrodidaktiske valg er lokale beslutninger omkring organiseringen af selve undervisningssituationerne. De er naturligvis underordnede de makrodidaktiske valg. Det er på dette mikrodidaktiske niveau, at vi vil anvende TDS (Artigue, 1994, s. 34), for derved at bygge undervisningen op omkring adidaktiske situationer og skabe fundamentale situationer. Problemet med adidaktiske situationer i undervisningen er, at det er svært at forudse alle hændelser. Derfor er det ikke på forhånd muligt at planlægge i detaljer, hvordan de enkelte situationer skal håndteres (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 113-114).

Undervisningsforløbet vil bestå af 13 trin. Hvert af disse trin tilrettelægges ved hjælp af en eller flere nøglesituationer, der skal danne grundlag for, at eleverne opnår den tilsigtede viden inden for hvert trin (Artigue, 1994, s. 35-36). Trinnene vil blive fordelt på de tre moduler, som vi har fået stillet til rådighed, således at modul 1 indeholder trin 1.1-1.5, modul 2 indeholder trin 2.1-2.4, og modul 3 indeholder trin 3.1-3.4. De 13 trin er følgende:

- 1.1 Hvorfor kan nogle andengradsligninger ikke løses inden for $\mathbb{R}$?
- 1.2 Komplekse tal som løsninger til andengradsligninger.
- 1.3 Komplekse tal og deres grafiske repræsentation.
- 1.4 Komplekse tal som rødder til tredje- og fjerdegradspolynomier.
- 1.5 Algebraens Fundamentalsætning.
- 2.1 Enhedsrødder.
- 2.2 Faktorisering af polynomier.
- 2.3 Irreducibilitet af polynomier.
- 2.4 Formler til bestemmelse af rødderne til polynomier.
- 3.1 Permutationsgrupper.

3.2 Definition af gruppe.

3.3 Permutationer af rødder til polynomier.

3.4 Galoisgrupper.

De 13 trin i undervisningsforløbet indeholder hver en tilsigtet viden, der skal tilegnes af eleverne. Da vi som beskrevet i vores design af undervisningsforløbet vil benytte TDS, skal eleverne tilegne sig viden gennem deres spil med det didaktiske miljø (cf. afsnit 3.5). Til dette formål, har vi lavet en eller flere opgaver til hvert trin, der skal få den tilsigtede viden i spil, og gøre den opnåelig for eleverne.

For at danne et overblik over indholdet i undervisningsforløbet vil vi i nedenstående skemaer yderligere opdele hvert af de 13 trin. Skemaerne bygges op omkring faserne i det didaktiske spil. Med skemaerne kan vi kort beskrive, hvilke faser de 13 trin hver især omfatter. Herefter vil vi nærmere beskrive, hvad hver af faserne indeholder, og hvordan viden skal opnås heri.

4.2.1 Tilsigtet viden - kompetencer - kunnen

Vi har i de følgende skemaer benævnt den sidste søjle ”Specifikke kompetencemål”. Dette har vi valgt, fordi det, der skal opnås i en situation, ofte vil være, at eleverne skal kunne beskrive eller redegøre for noget bestemt. Altså skal mange af situationerne munde ud i, at det er en ”kunnen”, som eleverne skal have opnået. Vi er i specialet ikke helt konsekvente, når vi omtaler, hvad eleverne skal opnå i situationerne. Mange steder har vi blot kaldt de specifikke kompetencemål eller denne kunnen for ”den tilsigtede viden”, idet TDS benytter denne betegnelse for, hvad der skal være det endelige udbytte af en didaktisk situation. Derfor vil vi bemærke, at når vi skriver ”den tilsigtede viden”, er det ikke altid en viden i form af f.eks. en sætning eller en definition, men også noget, der kræver et verbum, som f.eks. at kunne beskrive eller redegøre for noget.

4.2.2 Skematisk oversigt over modul 1

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
1.1.1	Devolution	Spørgsmål: Kan I løse alle andengradsligninger? Arbejdsark: Find p og q i udtrykket $x^2 + 4x + 5 = (x+p)^2 + q$.	
1.1.2	Handling	Eleverne skal finde $p = 2$ og $q = 1$.	Anvende kvadratets fuldendelsesmetode.
1.1.3	Formulering	Metoder og resultater fra 1.1.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen. Spørsmål: Hvad er problemet ved at skulle løse $(x+2)^2 = -1$?	Redegøre for hvorfor nogle andengradsligninger ikke kan løses inden for $\mathbb{R}$.
1.2.1	Devolution	Vi vil løse $(x+2)^2 = -1$ alligevel. Spørgsmål: Hvad ville I gøre for at komme videre hvis højresiden var et positivt tal?	
1.2.2	Institutionalisering	Vi sætter $\sqrt{-1} = i$. Spørgsmål: Hvad er i^2?	Kende et tal, der i anden potens er -1.
1.3.1	Devolution	Arbejdsark: Udregn $(3 + 8i)(-2+i)$.	
1.3.2	Handling	Eleverne skal finde, at $(3 + 8i)(-2+i) = -14 - 13i$.	Benytte i udregninger at $i^2 = -1$.

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
1.3.3	Formulering	Metoder og resultater fra 1.3.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen, hvis der er opstået problemer. Ellers fremlægges resultatet blot.	
1.2.3	Devolution	Arbejdsark: Opgave 1: Løs ligningen $(x+2)^2 = -1$ fra før. Er jeres resultater løsninger til den oprindelige ligning $x^2+4x+5=0$? Opgave 2: Løs ligningen $x^2+2x+17=0$.	
1.2.4	Handling	Eleverne skal i opgave 1 finde, at $x = -2+i$ eller $x = -2-i$, og at disse er løsninger til $x^2+4x+5=0$. De skal i opgave 2 finde, at ligningen har løsningerne $x = -1+4i$ eller $x = -1-4i$.	Løse andengradsligninger med negativ diskriminant ved hjælp af i. Redegøre for, at alle andengradslinger har to løsninger, når i benyttes.
1.2.5	Formulering	Metoder og resultater fra 1.2.4 fællesgøres og diskuteres ved tavlen.	
1.3.4	Institutionalisering	Mængden af komplekse tal $\mathbb{C} = \{x+iy \vert x, y \in \mathbb{R}\}$ samt den grafiske repræsentation af $\mathbb{C}$. Udlevering af noteark C.4 (appendiks C).	Kende generelle komplekse tal og redegøre for, hvor de ligger i planen.

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
1.4.1	Devolution	Arbejdsark: Find rødderne i følgende polynomier og omskriv polynomierne ved hjælp af deres rødder. $f(x) = x^2 - 16x + 68$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$, $h(x) = x^4 + 2x^3 + 16x^2 - 2x - 17 = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 17)$.	
1.4.2	Handling	Eleverne skal finde $f(x) = (x-8-2i)(x-8+2i)$, $g(x) = (x-2)(x+2-i)(x+2+i)$ og $h(x) = (x-1)(x+1)(x+1-4i)(x+1+4i)$.	Redegøre for, at tredje- og fjerdegradspolynomier har komplekse rødder samt kunne finde disse i nogle tilfælde.
1.4.3	Formulering	Metoder og resultater fra 1.4.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen Spørgsmål: Hvor mange rødder har et andengradspolynomium inden for $\mathbb{C}$? Hvor mange rødder tror I, at hhv. tredje- og fjerdegradspolynomier har?	
1.5.1	Institutionalisering	Spørgmål: Hvor mange komplekse rødder, tror I, n'tegradspolynomiet $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$ har? Hvordan kan vi opskrive $f(x)$ ved hjælp af dets rødder? AFS på overhead. Udlevering af note-/arbejdsark C.6 (appendiks C).	Anvende AFS på konkrete polynomier.

4.2.3 Beskrivelse af skema for modul 1

For at motivere eleverne til introduktionen af de komplekse tal, vil vi med devolueringssituation 1.1.1 etablere et didaktisk miljø omkring andengradspolynomier. Løsning af andengradsligninger er kendt viden for eleverne. De er dog kun i stand til at løse de andengradsligninger, der har diskriminant større end eller lig 0 og dermed reelle løsninger. Vi vil bygge videre på elevernes kendte viden, så den udvides til viden om løsning af samtlige andengradsligninger. Miljøet etableres, idet vi tilsigter, at eleverne genkalder den tidligere institutionaliserede viden, at de ikke kan løse andengradsligninger, hvor diskriminanten er negativ.

Diskriminantmetoden til løsning af andengradsligninger bliver ofte brugt, uden visning af sammenhængen med ligningen, hvorfor de fleste elever vil opfatte formlen for løsningerne som værende taget ud af ingenting. Det er ligeledes ved hjælp af denne formel, at eleverne kan afgøre, hvorvidt de kan løse en ligning eller ej, og ikke ved at se på selve ligningen. I trin 1.1 er formålet at gøre det klart for eleverne, hvad der går galt, når de ikke kan løse en andengradsligning. Til dette formål skal eleverne i handlingssituation 1.1.2 løse opgave B.1 (appendiks B.1). Eleverne skal her se, at en given andengradsligning kan omskrives ved hjælp af kvadratet på en toleddet størrelse, dvs. til formen $(x + p)^2 + q = 0$, og at man derfor kan løse ligningen direkte uden hjælp af diskriminantformlen blot ved at reducere udtrykket. Vi betragter derfor ligningen $x^2+4x+5 = 0$, der har negativ diskriminant.

Handlingssituationen 1.1.2 er nøglesituation for trin 1.1. Vi vil i formuleringssituation 1.1.3 gøre eleverne opmærksomme på, at enhver andengradsligning kan skrives på formen $(x + p)^2 + q = 0$. Efterfølgende omskrives $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 = 0$ til $(x + 2)^2 = -1$. Nu skulle det gerne være klart for eleverne, at denne ligning ikke kan løses ved hjælp af de reelle tal. Da der kommer til at stå et udtryk i anden potens på venstre side af lighedstegnet og et negativt tal på højre side af lighedstegnet efter reducering, bør det være klart for eleverne, hvorfor de ikke kan løse ligningen. Eleverne tænker imidlertid ikke eksplicit, at sådanne ligninger ikke kan løses inden for det bestemte domæne ”$\mathbb{R}$”. Generelt vil eleverne, idet de har opnået en ny viden, tænke at den må være universel og ikke kun være gældende inden for et implicit givet domæne (Sierpinska, 1999, lecture 7). Eksempelvis vil de færreste elever i gymnasiet kunne forestille sig, at der findes mængder, hvori reglen $a + b = b + a$ ikke gælder.

I trin 1.2 skal eleverne for første gang se et komplekst tal. Vi har i opgave B.1 valgt, at lade $q = 1$. Når eleverne når frem til, at $(x + 2)^2 = -1$, kan vi således definere $\sqrt{-1} = i$, idet vi lader eleverne tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet. Når eleverne skal tilegne sig en ny viden, må denne så vidt muligt kædes sammen med den gamle, idet eleverne ikke "nulstilles" inden de præsenteres for ny viden (Sierpinska, 1999, lecture 7). Det er vigtigt, at vi husker, at eleverne har en viden om, hvordan det er tilladt at benyttet kvadratrodstegnet, og at denne er i modstrid med den nye viden om det komplekse tal i, hvilket er problematisk for sammenkædningen af viden.

Handlingssituation 1.3.2 bliver en hjælp til stadfæstelsen af den nye viden, at $\sqrt{-1} = i$, idet eleverne får mulighed for at anvende, at $i^2 = -1$ i en konkret udregning. Eleverne får altså en øvelse i at regne med i, idet de skal løse opgave B.2 (appendiks B.1). Den tilsigtede viden for eleverne i denne opgave er, at man kan regne med i ved hjælp af de kendte regneoperationer. Herved skal eleverne begynde at opfatte i blot som et nyt tal. Eleverne ser her for første gang komplekse tal på formen $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dog uden at vide, at det er to sådanne tal, de multiplicerer. Endvidere udgør handlingssituation 1.3.2 optakt til den senere handlingssituation 1.2.4, hvor formålet er, at eleverne skal se eksempler på komplekse tal, $x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, som løsninger til andengradsligninger.

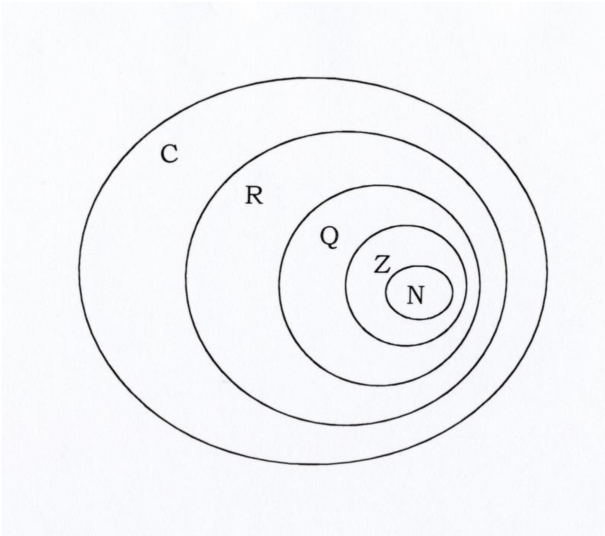
I første del af opgave B.3 (appendiks B.1) beder vi eleverne verificere, at deres fundne x faktisk er en løsning. Derfor kan de, ved at indsætte værdierne af x i ligningen se, at det opfylder ligningen, og dermed opnå viden om, at et tal på formen $x + iy$ kan være løsning til en andengradsligning. Vi ønsker, at eleverne benytter den kendte metode til løsning af det nye problem fra devolueringssituation 1.2.1, idet de skal tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet og komme frem til resultatet $x + 2 = \pm\sqrt{-1}$. Den tilsigtede viden for eleverne i handlingssituation 1.2.4 er, at såfremt de benytter i, vil de være i stand til at løse alle andengradsligninger, som tidligere ikke kunne løses. Denne viden skal eleverne opnå i anden del af opgaven, hvor vi har valgt et polynomium, der kun kan løses ved at benytte regnereglen $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$, for enten $p \geq 0$ eller $q \geq 0$, som eleverne kender. Der skal gælde, at enten $p \geq 0$ eller $q \geq 0$, idet f.eks. $1 = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$. Herved fremkommer det, at $\sqrt{-t} = \sqrt{-1}\sqrt{t} = i\sqrt{t}$. Med institutionaliseringssituation 1.2.2 skaber vi et nyt didaktisk miljø omkring det komplekse tal i.

Handlingssituation 1.2.4 nøglesituationen for trin 1.2. Desuden er den en fundamental situation, idet den sikrer eleverne den viden, at de nye komplekse tal kan være løsninger til ligninger, de tidligere ikke kunne løse ved hjælp af de reelle tal. Hvis eleverne ikke selv kan genkalde sig viden om, at $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$, hvor enten $p \geq 0$ eller $q \geq 0$, må den geninstitutionaliseres.

Eleverne har i trin 1.2 fundet komplekse tal som løsninger til andengradsligninger og i trin 1.3 vil eleverne opnå viden om den formelle definition af de komplekse tal, samt deres grafiske repræsentation ved institutionaliseringssituation 1.3.4. Her formaliseres de komplekse tal ved at præsentere dem som tal på formen $x + iy$, hvor $x, y \in \mathbb{R}$. Endvidere præsenteres mængden af de komplekse tal som $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$. Specielt gøres opmærksom på, at alle tal er komplekse. Dette illustreres med et Venn-diagram (figur 6)

Den grafiske repræsentation af komplekse tal gennemgås ved at indføre definitionen, at ethvert komplekst tal $x+iy$ svarer til punktet (x, y) i planen. I forbindelse med den grafiske repræsentation vil vi på tavlen udpege de forskellige punkter $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -1)$ og $(-2, -1)$ i planen, som eleverne skal genkende som de komplekse tal $0 + i$, $1 + 0i$, $3 + 0i$, $0 - i$ og $-2 - i$.

Den tilsigtede viden i trin 1.4 er det faktum, at tredje- og fjerdegradspolynomier også har komplekse rødder. Denne viden kommer i spil i handlingssituation 1.4.2 (opgave B.5 (appendiks B.1)), der bliver nøglesituationen for trin 1.4. Eleverne kan finde rødderne til tredjegradspolynomiet ved at gætte en rod og udføre polynomiers division, som de er vant til, og derefter finde de komplekse rødder til det tilbageværende andengradspolynomium. Fjerdegradspolynomiet i opgaven har vi skrevet som et produkt af to andengradspolynomier, for at eleverne ikke skal



Figur 6: Illustration af talmængderne.

bruge for lang tid på at gætte rødder og udføre polynomiers division to gange. Desuden har vi genbrugt andengradspolynomierne fra opgave B.3 således, at rødderne til andengradspolynomiet, der fremkommer efter polynomiers division af tredjegradspolynomiet, allerede er fundet. Ligeledes er rødderne i den sidste faktor i fjerdegradspolynomiet udregnet i handlingssituation 1.2.4. Inden løsning af denne opgave er de komplekse tal blevet formaliseret ved institutionalisering. Følgelig skal eleverne i denne opgave være i stand til at se, at det betragtede tredjegradspolynomium har tre komplekse rødder, og endvidere at fjerdegradspolynomiet tilsvarende har fire komplekse rødder, idet de husker på, at alle tal ligger inden for mængden af de komplekse tal. Den tilsigtede viden, der her antages at komme i spil, er, at et tredjegradspolynomium altid har tre rødder, når vi tillader komplekse løsninger, og at et fjerdegradspolynomium tilsvarende altid har fire rødder. Med handlingssituation 1.4.2 forstærkes også tidligere institutionaliserede viden om komplekse tal.

I handlingssituation 1.4.2 skal eleverne kunne genkalde, at polynomier kan faktoriseres ved hjælp af rødderne. Vi benytter dog i opgaveteksten ordvalget ”at omskrive polynomierne ved hjælp af deres rødder”, idet vi ønsker, at eleverne selvstændigt skal genkalde deres viden om faktorisering. Med handlingssituation

1.4.2 forberedes desuden det didaktiske miljø til næste modul, der omhandler irreducibilitet, herunder faktorisering. Endvidere fungerer 1.4.2 som optakt til trin 1.5, AFS, idet eleverne ser, at de givne polynomier har det antal rødder, graden angiver. Elevernes svar på spørgsmålene i formuleringssituation 1.4.3 og institutionaliseringssituation 1.5.1 leder os til instutionaliseringen af AFS i 1.5.1. AFS, der udgør er den tilsigtede viden i trin 1.5, skal herved opnås dels på baggrund af opgave B.5 og dels ved institutionalisering.

Vi vil afrunde modul 1 med en opsamling af det indledende spørgsmål, om hvorvidt eleverne kan løse alle andengradsligninger. Vi forventer, at eleverne nu kan svare bekræftende til dette spørgsmål grundet den nyerhvervede viden om komplekse tal. Der udleveres afslutningsvis hjemmeopgaver til træning af ny institutionaliseret viden (note-/arbejdsark C.6).

4.2.4 Skematisk oversigt over modul 2

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
2.1.1	Devolution	Opgave: Find løsningerne til ligningen $x^4 = 1$.	
2.1.2	Handling	Eleverne skal finde løsningerne $x = \pm 1$, $x = \pm i$.	
2.1.3	Formulering	Metoder og resultater fra 2.1.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen. Spørgsmål: Hvor ligger de fire løsninger $x = \pm 1$, $x = \pm i$ i planen?	
2.1.4	Institutionalisering	De n'te enhedsrødder.	Løse ligninger af formen $x^n = 1$ samt indtegne løsningerne på enhedscirklen.
2.1.5	Formulering	Spørgsmål: Hvad er de tredje enhedsrødder, og hvor ligger de på enhedscirklen?	
2.2.1	Devolution	Arbejdsark: Skriv alle de måder man kan faktorisere følgende polynomier ud i polynomier af lavere grad: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.	
2.2.2	Handling	Eleverne skal finde, at $f(x) = (x - i)(x + i)$, og at $g(x) = (x+1)(x-i)(x+i) = (x^2 + (1 - i)x - i)(x + i) = (x^2 + (1 + i)x + i)(x - i) = (x + 1)(x^2 + 1)$.	Finde samtlige faktoriseringer af polynomier, hvor rødderne er kendte.

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
2.2.3	Formulering	Metoder og resultater fra 2.2.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen. Spørgsmål: Kan de to polynomier $f(x)$ og $g(x)$ faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$?	Afgøre om polynomier, hvor rødderne er kendte, kan faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$.
2.3.1	Institutionalisering	Irreducibilitet inden for $\mathbb{Z}$. Spørgsmål: Er $f(x) = x^2 + 1$ hhv. $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ reducibelt eller irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$? Note-/arbejdsark C.8 (appendiks C) udleveres.	Afgøre om et polynomium, hvor rødderne er kendte, er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$.
2.3.2	Devolution	Arbejdsark: Afgør om følgende polynomier er irreducible inden for $\mathbb{Z}$: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 + 4x + 5$.	
2.3.3	Handling	Eleverne skal finde, at $f(x) = (x - 2)(x + 2)$ er reducibelt, idet $2 \in \mathbb{Z}$, og at $g(x) = (x+2-i)(x+2+i)$ er irreducibelt, idet $-2 \pm i \notin \mathbb{Z}$.	
2.3.4	Formulering	Metoder og resultater fra 2.3.3 fællesgøres og diskuteres ved tavlen.	

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
2.3.5	Institutionalisering	Eisensteins irreducibilitetskriterium på overhead. Udlevering af note-/arbejdsark C.9 (appendiks C).	Anvende Eisensteins irreducibilitetskriterium på et konkret polynomium.
2.3.6	Devolution	Arbejdsark: Er følgende polynomium irreducibelt? $f(x) = x^5 - 16x + 2$.	
2.3.7	Handling	Eleverne skal finde, at $f(x)$ er irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med $p = 2$.	
2.3.8	Formulering	Metoder og resultater fra 2.3.7 fællesgøres og diskuteres ved tavlen.	
2.4.1	Formulering	Arbejdsark: Kasse med forskellige polynomier. Spørgsmål: Hvad kan I sige om polynomierne i kassen? Spørgsmål: Vi kan specifikt finde rødderne til andengradspolynomiet ved en formel; kan vi tilsvarende det til de andre polynomier i kassen?	

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
2.4.2	Institutionalisering	Overhead med formler til bestemmelse af rødderne til det generelle tredje- og fjerdegradspolynomium (appendiks C). Spørgsmål: Hvad består formlen til bestemmelse af rødderne til det generelle tredjegradspolynomium af? Kriterier for hvornår rødderne til et polynomium kan findes ved en formel. Spørgsmål: Tror I, at der findes en generel formel til bestemmelse af rødderne til polynomier af grad større end eller lig 5.	Redegøre for, hvad det vil sige, at rødderne til et polynomium kan findes ved en formel.
2.4.3	Institutionalisering	Historie. Overhead med sætning B.18. Udlevering af noteark C.11 (appendiks C).	Anvende sætning B.18 på et konkret polynomium.
2.4.4	Devolution	Arbejdsark: Kan I afgøre, om rødderne til følgende polynomium kan findes ved en formel? $f(x) = x^5 - 16x + 2$.	
2.4.5	Handling	Eleverne skal finde, at rødderne til $f(x)$ kan findes ved en formel, da betingelserne i sætning B.18 er opfyldt.	
2.4.6	Formulering	Metoder og resultater fra 2.4.5 fællesgøres og diskuteres ved tavlen.	
2.4.7	Institutionalisering	Historie.	

4.2.5 Beskrivelse af skema for modul 2

Vi indleder modul 2 med opsamling af hjemmeopgave B.8 (appendiks B.1). Hvis nogen har haft problemer, er det hensigten, at en elev får muligheden for at løse den pågældende opgave på tavlen. Herefter vil vi samle op på modul 1 ved at spørge eleverne om, hvilke hovedresultater, vi her kom frem til. På denne vis minder vi om AFS.

Den tilsigtede viden i trin 2.1, er løsningerne til ligninger af formen $x^n = 1$, og den dertil relaterede viden om, at de inddeler enhedscirklen i n dele. Til dette formål skal eleverne i handlingssituation 2.1.2 løse opgave B.9 (appendiks B.2), under anvendelse af den nyligt instutionaliserede viden om komplekse tal. Eleverne ved på grund af AFS, at ligningen har fire løsninger. Da de imidlertid ikke kender formlen, der kan løse denne slags ligninger, er de nødsaget til løse opgaven ved at benytte en hjælpevariabel $y = x^2$, og dernæst løse de to andengradsligninger. Handlingssituation 2.1.2 har endvidere til formål, at eleverne via indtegning af deres løsninger som punkter i planen potentielt kan erfare, at de er placeret på enhedscirklen. Viden om formlen til bestemmelse af disse enhedsrødder må opnås ved institutionalisering.

I institutionaliseringssituation 2.1.4 præsenteres de n'te enhedsrødder som alle løsningerne til $x^n = 1$, og det understreges, at de inddeler enhedscirklen i n dele. I denne forbindelse vil vi bede en elev udpege de ottende enhedsrødder på enhedscirklen. Endvidere fortælles, at samtlige n løsninger til $x^n = 1$ fås ved $\varepsilon^p = cos(p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(p\frac{2\pi}{n}))$, hvor $p = 0, ..., n-1$. Institutionaliseringsituation 2.1.4 er nøglesituationen i trin 2.1. Vi vil stadfæste elevernes nye viden om enhedsrødder i formuleringssituation 2.1.5, hvor vi kollektivt vil betragte de 3. enhedsrødder. Vi forventer her, at eleverne kan indsætte $p = 0, 1, 2$ og $n = 3$ i formlen og derved komme frem til de tre løsninger. De n'te enhedsrødder introduceres desuden i 2.1.1-2.1.5 som forberedelse til et miljø omkring formler til bestemmelse af rødderne til polynomier.

Som indledning til irreducible polynomier vil vi fortælle, hvorledes vi i dette modul skal se på forskellige egenskaber ved polynomier, idet vi først og fremmest vil arbejde med polynomier, hvor koefficienten til højestegradsleddet er 1. Vi etablerer et didaktisk miljø omkring faktorisering af polynomier med devolueringssituation 2.2.1 (opgave B.11, appendiks B.2). Den tilsigtede viden i trin 2.2 er, at faktorisering af polynomier ikke er entydig, hvilket kommer i spil i handlingssituation 2.2.2. Her skal eleverne indse, at et polynomium, af grad større end 2, kan faktoriseres på flere måder end den fuldstændige kun med førstegradsfaktorer. Idet eleverne løser opgaven vil de finde forskellige faktoriseringer af det samme polynomium. Ved at anskue de forskellige faktoriseringer af et polynomium, kan eleverne betragte koefficienterne til de forskellige faktorer. Handlingssituation 2.2.2 bliver nøglesituationen for trin 2.2.

I trin 2.3 skal eleverne opnå viden om, hvorvidt et polynomium er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$. Med handlingssituation 2.2.2 forbereder vi miljøet til institutionaliseringssituation 2.3.1, som omhandler definitionen af irreducibillitet. Efter institutionaliseringen beder vi eleverne formulere, hvorvidt $f(x)$ hhv. $g(x)$ fra opgave B.11 er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$. I denne opgave er polynomierne valgt således, at det ene er irreducibelt, og det andet er reducibelt i $\mathbb{Z}$. Det reducible polynomium er valgt, så man ikke kan se reducibiliteten ved den fuldstændige faktorisering. Herved opnår eleverne at arbejde med definitionen af irreducibilitet. Institutionaliseringssituation 2.3.5 indeholder Eisensteins irreducibilitetskriterium, der fungerer som redskab til af afgøre irreducibilitet.

I institutionaliseringssituation 2.3.5 henleder vi elevernes opmærksomhed på, at det er potentielt vanskeligt at afgøre, om et givent polynomium af højere grad er irreducibelt, såfremt man ikke umiddelbart kan bestemme rødderne. Vi har her valgt at udelade beviset for Eisensteins irreducibilitetskriterium. Det er imidlertid et simpelt talteoretisk bevis velegnet for en gymnasieklasse og som i denne sammenhæng udelukkende er fravalgt, fordi det er for tidskrævende.

I handlingssituationerne 2.3.3 og 2.3.7 (opgaverne B.13 og B.16 (appendiks B.2)) kommer der ikke ny viden i spil; disse er blot træningsopgaver som hjælp til stadfæstelse af viden om hhv. irreducibilitet fra institutionaliseringssituation 2.3.1 og Eisensteins irreducibilitetskriterium. Institutionaliseringssituation 2.3.1 er sammen med spørgsmålet i formuleringssituation 2.2.3 nøglesituationerne for trin

2.3.

Vi ønsker i formuleringssituation 2.4.1, at eleverne skal genkalde og formulere nyligt institutionaliseret viden. Det er hensigten, at eleverne skal kunne udtale sig om følgende:

i) Antallet af rødder inden for $\mathbb{C}$.

ii) Hvordan rødderne ser ud.

iii) Faktorisering af polynomierne.

iv) Irreducibilitet.

For at eleverne skal kunne dette, har vi valgt at betragte:

- Det generelle andengradspolynomium $ax^2 + bx + c$, hvor eleverne på nuværende tidspunkt har viden til at kunne udtale sig om alle fire forhold.

- Et polynomiun af høj grad $x^{100} - x^{99} - 3$. Dette medtages for at eleverne skal se, at AFS gælder, selv om om polynomiet er usædvanligt. Endvidere skal eleverne erkende, at de ikke altid vil kunne afgøre, om polynomier er irreducible.

- Et fjerdegradspolynomium x^4+5x^3+x+13. Eleverne skal her på ny benytte AFS, men de er ikke i stand til at afgøre, om polynomiet er irreducibelt.

- Et n'tegradspolynomium $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$. Her skal de kunne anvende AFS på et mere generelt polynomium. Desuden kan de bestemme, at -1 er rod, hvis n er ulige, men heller ikke nu kan de bestemme, om polynomiet er irreducibelt.

- Polynomiet $x^5 - 16x + 2$, der tidligere blev behandlet. Dette medtages for at minde om Eisensteins irreducibilitetskriterium og tillige AFS.

- Et tredjegradspolynomium $4x^3 - 3x^2 - 4x + 20$. Her er det hensigten, at eleverne skal bemærke, at da polynomiet ikke er normeret er vores definition af irreducibilitet ikke længere gældende. Derfor kan de ikke bestemme, om det er irreducibelt. Endvidere er eleverne bekendt med grafen for et tredjegradspolynomium, hvorfor de ved, at et polynomium af grad 3 har mindst én reel rod. Desuden kan de bruge AFS.

Det sidste spørgsmål i formuleringssituation 2.4.1 forventer vi ikke, at eleverne kan besvare. Hensigten er, at det forbereder et nyt miljø vedrørende formler til bestemmelse af rødderne til generelle polynomier. Vi ønsker at igangsætte en diskussion om, hvorvidt det er muligt at finde sådanne formler. Formålet med institutionaliseringssituation 2.4.2, hvor formlerne til bestemmelse af rødderne til tredje- hhv. fjerdegradspolynomierne vises på overhead, er, at eleverne skal opleve, hvorledes formlernes kompleksitet stiger med graden af polynomiet og herved opnå en intuitiv forståelse for, hvor kompliceret femtegradstilfældet er. Dette skal gøre det lettere for eleverne at tro på, at der ikke findes en generel formel til bestemmelse af rødderne til et femtegradspolynomium. Vi viser de tre formler, der kan benyttes til bestemmelse af de tre rødder til tredjegradspolynomiet. Tilsvarende er der fire formler til bestemmelse af de fire rødder til fjerdegradspolynomiet, men vi vil kun vise eleverne formlen til den ene af disse rødder, da denne udfylder en hel A4-side.

For at eleverne i institutionaliseringssituation 2.4.2 skal forstå, hvad det indebærer, at rødderne kan udtrykkes ved en formel, tager vi udgangspunkt i formlen for rødderne til tredjegradspolynomiet. Denne formuleringssituation bliver nøglesituation for trin 2.4. Eleverne kan ved at betragte overheaden se, at formlen består af addition, subtraktion, multiplikation, division, rodtegn, enhedsrødder, koefficienterne og tal, der ligger i den samme talmængde som koefficienterne (koefficientlegemet). Dette fører til institutionaliseringen af disse generelle kriterier for, hvilke elementer en formel til bestemmelse af rødderne må indeholde. Vi antager i institutionaliseringssituation 2.4.2, at eleverne afkræfter spørgsmålet om, hvorvidt det generelle femtegradspolynomium har rødder, der kan findes ved en formel; ikke mindst ud fra formodningen om, at vi ville have vist formlen, såfremt den eksisterede.

Instutionaliseringssituation 2.4.3 (cf. appendiks B.2) giver eleverne en smule historisk baggrund for ligningsløsning, i særdeleshed løsningsformler til ligninger.

Endvidere er tanken, at det historiske element kan bruges som afveksling i undervisningen. Vi leder desuden op til sætning B.18, som giver, at det ikke er muligt at finde rødderne til polynomier af en bestemt type ved en formel. Denne sætning er en reduceret udgave af sætning B.29, hvor vi har udeladt, at sætningen faktisk giver, at Galoisgruppen for polynomiet er S_p, og at man derfor kan bestemme, at rødderne til polynomiet ikke kan findes ved en formel. Vi har valgt at præsentere eleverne for sætningen inden introduktion af Galoisgruppen, fordi den giver et resultat vedrørende eksistens af formler, som eleverne kan arbejde selvstændigt med. Endvidere vil vi med sætning B.18 og diskussionen i institutionaliseringssituation 2.4.2 om formler til bestemmelse af rødder motivere til modul 3, hvor vi vil se på grupper og Galoisgrupppen for et polynomium, som en anden vej til at kunne sige noget om rødderne til det pågældende polynomium.

Vi benytter handlingssituation 2.4.5 som en øvelse i at anvende sætning B.18. Udfordringen for eleverne består i, at afgøre om betingelserne i sætningen er opfyldt. Eleverne forventes at benytte nyligt institutionaliseret viden omkring irreducibilitet. Desuden er tanken, at eleverne kan anvende deres kendte viden om funktionsundersøgelse til at afgøre, om polynomiet har $p-2$ reelle rødder. Da opgaven ikke er en traditionel opgave i funktionsundersøgelse, er det tvivlsomt, om eleverne selv vil gå i gang med dette. Derfor vil det være tilfredsstillende, hvis eleverne blot ser på grafen for polynomiet, hvilket endvidere er tidsbesparende.

Vi afslutter modul 2 med institutionaliseringssituation 2.4.7, der udgør et historisk indslag om Galois (institutionalisering B.20, appendiks B.2), idet den tilsigtede viden i modul 3 består af teorien om Galoisgruppen for et polynomium. Desuden forventer vi, at historien om Galois' korte liv vil være underholdende for eleverne og dermed være en passende afslutning på modul 2. For at eleverne kan træne brugen af den nye viden, får de udleveret hjemmeopgaver (arbejdsark C.12, appendiks C).

4.2.6 Skematisk oversigt over modul 3

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
3.1.1	Devolution	Arbejdsark: Skriv gruppen af alle permutationer af 3 elementer S_3. Skriv gruppen af alle permutationer af 2 elementer S_2.	
3.1.2	Handling	Eleverne skal opskrive S_3 og S_2.	Beskrive en permutationsgruppe S_n, når n er givet.
3.1.3	Formulering	Metoder og resultater fra 3.1.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen. Spørgsmål: Hvad er en permutation? Spørgsmål: Hvad er S_4? Spørgsmål: Hvor mange permutationer ligger i S_4? Spørgsmål: Hvad er S_n? Spørgsmål: Hvor mange permutationer ligger i S_n?	Angive antallet af permutationer i en permutationsgruppe S_n, når n er givet.
3.2.1	Institutionalisering	Definition af en gruppe. Spørgsmål: Kan I huske gruppebetingelserne? Udlevering af noteark C.14 (appendiks C). Spørgsmål: Hvilke muligheder har vi for kompositionen $*$?	Afgøre om en bestemt mængde med en given komposition opfylder gruppebetingelserne.
3.1.4	Formulering	Spørgsmål: Hvorfor er S_n en gruppe?	

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
3.1.5	Institutionalisering	Permutationgruppe bestående af permutationer af vilkårlige elementer. Spørgsmål: Hvilken 'talpermutation' svarer permutationen $\begin{pmatrix} Ib & Ea & Bo \\ Ea & Bo & Ib \end{pmatrix}$ til i S_3? Bemærk: Vi kan også permutere rødder til et polynomium.	Opskrive S_n med vilkårlige elementer.
3.3.1	Devolution	Arbejdsark: Opgave 1: Betragt rødderne $r = i$ og $s = -i$ til polynomiet $f(x) = x^2+1$. Udregn r^2-2s^4+3rs. Benyt permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix}$ på ovenstående udtryk og udregn. Opgave 2: Betragt rødderne $r = 2$ og $s = -2$ til polynomiet $g(x) = x^2 - 4$. Udregn $10 + 3r + 2rs + s^3$. Benyt igen permutationen σ på ovenstående udtryk og udregn.	
3.3.2	Handling	Eleverne skal finde, i opgave 1, at $r^2 - 2s^4 + 3rs = 0$ og $s^2 - 2r^4 + 3sr = 0$, og i opgave 2, at $10 + 3r + 2rs + s^3 = 0$ og $10+3s+2sr+r^3 = 4$.	Benytte givne permutationer på algebraiske udtryk.

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
3.3.3	Formulering	Metoder og resultater fra 3.3.2 fællesgøres og diskuteres ved tavlen. Spørgsmål: For hvilke rødder gælder, at udtrykkene i rødderne stadig giver 0 efter permutation (i 3.3.2)? Spørgsmål: Hvad er forskellen på rødderne til $f(x)$ og $g(x)$ (i 3.3.1)?	
3.3.4	Institutionalisering	Et generelt udtryk i to rødder r og s har formen $\sum k_{u,v} r^u \cdot s^v$, hvor $k_{u,v}$ er hele tal, og u og v er naturlige tal eller 0. Et udtryk i rødderne til et polynomium, hvis værdi er 0, kalder vi et nuludtryk. For rødderne i og $-i$ til $f(x)$ (i 3.3.1) bliver det generelle udtryk i rødderne altså $\sum k_{u,v} i^u \cdot (-i)^v$, hvor $k_{u,v}$ er hele tal, og u og v er naturlige tal eller 0. Spørgsmål: Hvordan kan man skrive dette udtryk kun i i?	Beskrive et generelt udtryk i rødderne i og $-i$.

Trin	Fase	Indhold	Specifikke kompetencemål
3.4.1	Formulering	Spørgsmål: Hvilke permutationer i S_2 vil give nuludtryk, når de benyttes på samtlige nuludtryk i rødderne i og $-i$ til $f(x)$ (fra 3.3.1)? Spørgsmål: Hvilke permutationer i S_2 vil give nuludtryk, når de benyttes på samtlige nuludtryk i rødderne 2 og -2 til $g(x)$ (fra 3.3.1)?	
3.4.2	Institutionalisering	Galoisgruppe for et polynomium. Udlevering af noteark C.16 (appendiks C).	Beskrive Galoisgruppen for et generelt n'tegradspolynomium.
3.4.3	Formulering	Spørgsmål: Hvorfor er Galoisgruppen en gruppe?	
3.4.4	Institutionalisering	Galoisgruppens betydning for rødderne til polynomiet. Overhead med sætning B.29. Udlevering af noteark C.17 (appendiks C).	

4.2.7 Beskrivelse af skema for modul 3

Vi begynder modul 3 med en opsamling af hjemmeopgave B.21 (appendiks B.2). Derefter minder vi om, hvordan vi i sidste modul fandt ud af, at rødderne til $f(x) = x^5 - 16x + 2$ ikke kan findes ved en formel ifølge sætning B.18. Eleverne forelægges, at vi i dette modul vil se nærmere på, hvorfor sætningen giver dette resultat.

Den tilsigtede viden i trin 3.1 og trin 3.2 er i et vist omfang viden, som eleverne besidder i forvejen. Eleverne skal kende gruppen S_n og endvidere afgøre, om en given mængde med en given komposition er en gruppe. I trin 3.1 er det hensigten, at eleverne skal opnå viden om S_n. Denne viden kommer i spil i handlingssituation 3.1.2 (opgave B.22 (appendiks B.3)), hvor eleverne, ved at opskrive S_n for $n = 3$ og $n = 2$, blandt andet kan danne sig et billede af, hvordan de følgende permutationsgrupper S_4, S_5 osv. ser ud. Det eneste eksempel på S_n, som eleverne tidligere har været præsenteret for, er S_3. Derfor lader vi desuden eleverne opskrive S_2, som de ikke kender. Vi forventer, at eleverne, ved hjælp af deres viden om S_3, vil kunne tilegne sig ny viden om S_2 på egen hånd. Herved kan eleverne tilegne sig viden om strukturen i S_n.

Vi etablerer med devolueringssituation 3.1.1 et didaktisk miljø omkring permutationsgrupper ved at minde eleverne om permutationsgruppen S_3, som er tidligere institutionaliseret viden. Vi er ikke klar over, hvilken notation eleverne tidligere har anvendt for en permutation, men vi vælger blot at benytte den notation, eleverne selv foretrækker i handlingssituation 3.1.2. Vi er imidlertid ikke helt sikre på, at eleverne kan genkalde, hvordan S_3 ser ud, hvorfor vi er forberedt på, evt. at overgå til en institutionaliseringssituation, hvor S_3 indføres som gruppe. Vi ved desuden ikke, om eleverne er bekendt med ordet ”permutation”, men vil under alle omstændigheder bede eleverne formulere, hvad en permutation er. Dette gøres for at sikre, at eleverne forstår, at det er en funktion, der bytter om på elementer. Handlingssituation 3.1.2 og formuleringssituation 3.1.3 er nøglesituationer for trin 3.1.

Vi vil i institutionaliseringsituation 3.2.1 forstærke elevernes kendte viden om definitionen af en gruppe. Denne institutionalisering er nøglesituationen for trin 3.2. Eleverne skal i formuleringssituation 3.1.4 svare på, hvorfor S_n er en gruppe, da de indtil videre kun har set, at S_3 er en gruppe. Vi accepterer her, at eleverne giver eksempler på, at gruppebetingelserne er opfyldt for en konkret værdi af n. Eleverne kommer herved til at benytte definitionen af en gruppe. Formuleringsituation 3.1.4 er endnu en nøglesituation for trin 3.1.

Vi ønsker i institutionaliseringssituation 3.1.5, at eleverne skal opnå viden om, at alle permutationer af *n vilkårlige* elementer stadig giver gruppen S_n. Her vil vi specielt gøre opmærksom på, at det kan være rødder til et polynomium, der permuteres i S_n.

I trin 3.3 er det formålet, at eleverne skal opnå viden om de sammenhænge, hvor man kan benytte permutationer af rødderne til et polynomium. I handlingssituation 3.3.2 (opgave B.25 (appendiks B.3)) er den tilsigtede viden, at visse permutationer af rødderne - i modsætning til andre - bevarer nuludtryk i rødderne. I trin 3.4 er den tilsigtede viden, at de permutationer af rødderne, der bevarer *alle* nuludtryk i rødderne, giver Galoisgruppen for det givne polynomium.

Som forberedelse til definitionen af en Galoisgruppe, der præsenteres i institutionaliseringssituation 3.4.2, skal eleverne i handlingssituation 3.3.2 betragte permutationer af rødderne til et polynomium. Handlingssituation 3.3.2 er sammen med institutionaliseringssituation 3.1.5 nøglesituationerne for trin 3.3. Ved at eleverne i handlingssituation 3.3.2 arbejder med konkrete udtryk i rødderne til polynomier, bliver det lettere at se på generelle udtryk i rødderne. Eleverne får her forevist et eksempel på et nuludtryk i rødderne til $f(x)$, som stadig er et nuludtryk efter benyttelse af samtlige permutationer af de to rødder. Desuden ser de et eksempel på et nuludtryk i rødderne til $g(x)$, der ikke er et nuludtryk efter benyttelse af permutationen σ fra 3.3.1. Vores intention er, at eleverne skal bestemme Galoisgrupperne for de to polynomier fra 3.3.1. Efter handlingssituation 3.3.2 kan eleverne erkende, at identiteten er den eneste permutation i S_2, der giver nuludtryk, når den benyttes på samtlige nuludtryk i rødderne til $g(x)$. Dermed kan de bestemme Galoisgruppen for polynomiet dog uden kendskab til ordet "Galoisgruppe". Derimod kræver det yderligere arbejde at bestemme Galoisgruppen for $f(x)$. Inden vi ser nærmere på dette, vil vi i formuleringssituation 3.3.3 gerne have frem, at rødderne til $f(x)$ ligger uden for $\mathbb{Z}$, og at rødderne til $g(x)$ ligger i $\mathbb{Z}$. Baggrunden for dette er, at eleverne efter at have bestemt Galoisgrupperne for de to polynomier, kan se, at polynomiet med "pæne" heltalsrødder har en lille Galoisgruppe, og polynomiet med "grimme" rødder uden for $\mathbb{Z}$ har en stor Galoisgruppe.

For at bestemme Galoisgruppen for $f(x)$ fra 3.3.1, skal det vises, at det ikke blot er det givne nuludtryk fra handlingssituation 3.3.2, der stadig er et nuludtryk efter benyttelse af samtlige permutationer i S_2, men at det gælder for alle nuludtryk i i og $-i$. Vores hensigt er derfor i institutionaliseringssituation 3.3.4, at eleverne skal finde et generelt udtryk i i og $-i$ alene udtrykt ved i. Det forventer vi dog ikke de er i stand til, og vi er derfor forberedt på, at udtrykket skal findes med hjælp fra læreren. Derfor bliver det følgende sandsynligvis domineret af lærerstyring, men vi vil inddrage eleverne i størst muligt omfang. Vi ser nærmere på, hvordan leddene i ethvert udtryk i i og $-i$ ser ud: De har formen $k_{u,v} \cdot i^u \cdot (-i)^v$, hvor $k_{u,v}$ er vilkårlige hele tal, og u og v er naturlige tal eller 0. Det gælder altså, at et generelt udtryk i i og $-i$ har formen $\sum k_{u,v} \cdot i^u \cdot (-i)^v$, og ethvert led bliver enten et helt tal eller et helt tal multipliceret med i. Altså vil et generelt udtryk i de to rødder være på formen $a + bi$, a, $b \in \mathbb{Z}$. Hvis eleverne ikke kender betydningen af sumtegnet, vil vi introducere dette.

Vi vil under institutionalisering 3.3.4 spørge eleverne, hvad de kan sige om a og b, når $a + bi = 0$. Her skal eleverne se, at $a = b = 0$. Herefter skal de benytte permutationen σ fra 3.3.1 på det generelle udtryk og derved få $a - bi$, der også bliver lig 0, fordi $a = b = 0$. Fremgangsmåden er dog ikke helt korrekt, da a og b afhænger af i og $-i$. Vi formoder ikke, at eleverne vil bemærke dette, men såfremt de gør, vil vi forklare det nærmere ved hjælp af nedenstående.

De led i udtrykket $a + bi$, der giver a, er

$$i^{2n},\ i^{2n}(-i)^{2m} \text{ og } i^{2n+1}(-i)^{2m+1},\ n,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Når σ benyttes på i^{2n} og $i^{2n}(-i)^{2m}$, fås hhv. $(-i)^{2n}$ og $(-i)^{2n}(i)^{2m}$. Da $i^{2n} = (-i)^{2n}$ og $i^{2n}(-i)^{2m} = (-i)^{2n}i^{2m}$, ændrer det ikke noget ved a. Når σ benyttes på $i^{2n+1}(-i)^{2m+1}$, fås $(-i)^{2n+1}i^{2m+1} = -(i)^{2n+1}(-(-i)^{2m+1}) = i^{2n+1}(-i)^{2m+1}$, fordi $(-i)^{2n+1} = -1^{2n+1}i^{2n+1} = -(i)^{2n+1}$. Altså ændrer dette heller ikke noget ved a. De led i udtrykket $a + bi$, der giver bi, er

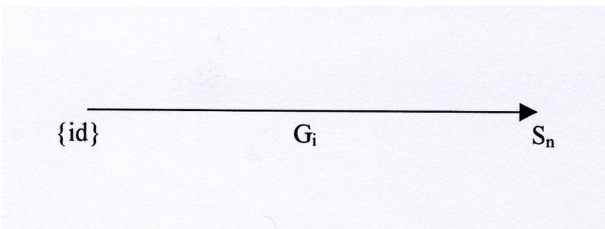
$$i^{2n+1},\ i^{2n+1}(-i)^{2m} \text{ og } (-i)^{2n+1}i^{2m},\ n,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Når σ benyttes på i^{2n+1}, fås $(-i)^{2n+1} = -((i)^{2n+1})$, og når σ benyttes på $i^{2n+1}(-i)^{2m}$, fås $(-i)^{2n+1}i^{2m} = -((i)^{2n+1}(-i)^{2m})$. Tilsvarende, hvis σ benyttes på $(-i)^{2n+1}i^{2m}$, fås $-((-i)^{2n+1}i^{2m})$. Altså fås $-bi$ ved benyttelse af permutationen σ på bi.

Vi vil i formuleringssituation 3.4.1 have eleverne til at angive hhv. S_2 og $\{id\}$ som værende de mængder af permutationer i S_2, hvor permutationerne giver nuludtryk, når de benyttes på samtlige nuludtryk i rødderne til hhv. $f(x)$ og $g(x)$ fra 3.3.1. Vi vil først i institutionaliseringssituation 3.4.2 benytte betegnelsen *Galoisgruppe for et andengradspolynomium* for de permutationer i S_2, der giver nuludtryk, når de benyttes på samtlige nuludtryk i de to rødder til polynomiet. Denne institutionaliseringssituation 3.4.2 er sammen med formuleringssituation 3.4.1 nøglesituationerne for trin 3.4.

Formuleringssituation 3.4.3 er endnu en nøglesituation for trin 3.4. Vi ønsker her, at eleverne skal redegøre for, hvorfor gruppebetingelserne er opfyldt for en Galoisgruppe (cf. appendiks B.3). Dette formoder vi ikke, at eleverne kan, så vi er forberedte på, at dette bliver fortrinsvis lærerstyret.

Afslutningsvis vil vi i modul 3 i institutionaliseringssituation 3.4.4 prøve at forklare, hvad Galoisgruppen kan bruges til i forbindelse med ligningsløsning. Vi vil her gøre opmærksom på, at selv om vi har defineret Galoisgruppen for et polynomium ud fra rødderne, kan man ved hjælp af sætninger bestemme den uden at kende rødderne. Når man således kender Galoisgruppen, kan man omvendt udtale sig om, hvordan rødderne til polynomiet ser ud. Vi vil illustrere dette ved følgende figur:



Figuren viser, hvordan Galoisgruppen G_i er en undergruppe af S_n, og pilen illustrerer, at jo mere komplicerede rødderne er, jo større er Galoisgruppen. Endvidere vil vi fortælle, at hvis Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium, hvor $n \geq 5$, er hele S_n, er rødderne så komplicerede, at de ikke kan findes ved en formel. Endelig vil vi give sætning B.29, som er den korrekte udgave af sætning B.18.

5 Den didaktiske kontrakt

I alle didaktiske situationer indgår en didaktisk kontrakt, bestående af reglerne og strategierne i det didaktiske dobbeltspil, dvs. regler og strategier for såvel læreren som eleverne (Brousseau, 1997, s. 31-32; Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 120; Winsløw, 2006a, s. 145-146). Kontrakten består for eleverne i at acceptere og engagere sig i det didaktiske miljø. Lærerens del af kontrakten er at designe de didaktiske variable på en sådan vis, at spillet bliver en succes. Den didaktiske kontrakt kan dermed siges at udgøres af gensidige forventninger og forpligtelser, der kun afhænger af den tilsigtede viden. Det bevirker, at faktorer som klasserumshåndtering, kultur eller politisk korrekthed ikke er inkluderet i den didaktiske kontrakt (Sierpinska, 1999, lecture 3). Hvis vi derimod betragter disse faktorer, vil der være tale om andre typer af kontrakter, f.eks. en pædagogisk kontrakt.

I modsætning til gængse regler i almindelige spil er der stor variation i den didaktiske kontrakt fra situation til situation. Når en didaktisk situation udvikler sig, vil der forekomme ændringer i den didaktiske kontrakt, så der tillades nye situationer. Specielt vil en institutionalisering af ny viden altid ændre kontrakten, idet en viden således er blevet fællesgjort og har undergået statusændring, således at den kan indgå som en del af den nye kontrakt. Den didaktiske kontrakt er sædvanligvis implicit, om end den kan opleves eksplicit, såfremt enten læreren eller eleven bryder kontrakten. F.eks. ses kontrakten tydeligt, hvis et barn begynder i skolen og, idet læreren stiller et spørgsmål, udbryder ”ved du ikke det?”. I dette eksempel træder eleven ud af sin rolle, idet hun endnu ikke har tilpasset sig spillereglerne, og dermed brydes den didaktiske kontrakt.

5.1 Fire dimensioner af den didaktiske kontrakt

Vi kan for gennemskuelighedens skyld opdele den didaktiske kontrakt i fire dimensioner (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 118-119).

5.1.1 Det matematiske domæne

Den første dimension er det *matematiske domæne*, svarende til det specifikke matematiske felt, hvori man i undervisningen bevæger sig.

5.1.2 Den didaktiske status

Den anden dimension er den *didaktiske status* af den tilsigtede viden. Den didaktiske status fortæller, hvorvidt den tilsigtede viden er kendt, delvist kendt eller ukendt af eleverne. Hvis den tilsigtede viden til dels er kendt, kan den enten være nyligt introduceret, i færd med at blive institutionaliseret eller være institutionaliseret men ikke stadfæstet. Der er altså mange måder, hvorpå viden kan være kendt. En institutionalisering er derfor ikke en garanti for, at eleverne har tilegnet sig viden på en sådan vis, at de kan benytte den og arbejde med den i andre kontekster, end hvor den blev præsenteret. Det ses hyppigt, at eleverne ikke selvstændigt kan fremkalde en tidligere institutionaliseret viden, men at de er i stand til at genkende den, hvis de hjælpes på vej. Forud for en absolut stadfæstning af viden, kan eleverne sædvanligvis kun benytte den som en metode til løsning af en vis type opgaver. Som eksempel vil gymnasieelever ofte kunne differentiere en funktion ved at benytte en formel, men dog kun i en bestemt type opgaver, f.eks. funktionsundersøgelsesopgaver, idet de ikke har en stadfæstet viden om den variabelsammenhæng som differentialkvotienten beskriver.

5.1.3 Karakteristik af den didaktiske situation

Den tredje dimension er den didaktiske situations *karakteristik*, hvilket beskriver egenskaberne ved selve undervisningssituationen, herunder i hvilken fase man befinder sig.

5.1.4 Uddeling af ansvar

Den sidste dimension er *uddeling af ansvar* mellem læreren og eleven i relation til den tilsigtede viden. Læreren vil normalt have ansvaret for ny viden og kan kun videregive ansvaret til eleven, i situationer, hvor miljøet har adidaktisk potentiale. Den sidste dimension er som den eneste afhængig af tilstedeværelsen af adidaktisk potentiale.

De fire dimensioner er indbyrdes afhængige. Specielt hænger den didaktiske status sammen med fordelingen af ansvar, idet læreren som regel vil lægge mere ansvar hos eleven ved arbejde med kendt viden i forhold til arbejde med ny viden.

5.2 Niveauer af den didaktiske kontrakt

Vi kan endvidere beskrive tre niveauer af den didaktiske kontrakt hhv. *Makro-, meso-* og *mikrokontrakt* (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 119-120, 134). Makrokontrakten omhandler undervisningsformålene, hvilket vil sige formålene med eller baggrunden for at benytte sig af en bestemt type situation. Mesokontrakten vedrører afviklingen af en aktivitet, såsom opgaveløsning. Mesokontrakten afhænger af de to dimensioner ”den didaktiske status af den tilsigtede viden” og ”den didaktiske situations karakteristik”, hvilket eksempelvis illustreres ved, at man benytter en handlingssituation til introduktion af ny viden. Mikrokontrakten omhandler en sekvens af en aktivitet, der fokuserer på en enkelt del af det matematiske indhold, hvilket f.eks. kan være et delspørgsmål i en opgave. De fire dimensioner kan isoleret betragtet forblive stabile inden for de tre niveauer af den didaktiske kontrakt. Det matematiske domæne er sjældent stabilt inden for makrokontrakten, og kun inden for mikrokontrakten kan alle fire dimensioner være stabile samtidigt. I analyse af makrokontrakten tages udgangspunkt i meso- og mikrokontrakterne, idet indholdet af disse er afgørende for indholdet af makrokontrakten. Når en lærer vælger en situation med adidaktisk potentiale i undervisningen, påvirker det mesokontrakten, mens mikrokontrakten afhænger af, hvorvidt det adidaktiske potentiale udnyttes.

5.3 Et paradoks i den didaktiske kontrakt

Den didaktiske kontrakt indeholder et tydeligt paradoks (Brousseau, 1997, s. 41-42). Læreren har en fastlagt forventning om, hvordan eleven skal opnå den tilsigtede viden, men elevens betingelser for selvstændig produktion af ny viden forværres i takt med, at læreren formidler sine forventninger. Idet læreren direkte fortæller, hvad han ønsker af eleven, fratager han elevens mulighed for på egen hånd at opnå det. Eleven er kun ubevidst konfronteret med paradokset. Hvis eleven accepterer, at læreren forklarer matematikken, producerer eleven ikke sin egen viden. Såfremt eleven derimod afviser lærerens anvisninger, brydes kontrakten, hvilket vanskeliggør elevens læring. For at overkomme dette paradoks bør det didaktiske miljø konstrueres på en sådan måde, at eleven har mulighed for at bevæge sig ud over grænserne for lærerens eksplicitte krav.

5.4 Effekter af den didaktiske kontrakt

I relation til den didaktiske kontrakt kan der forekomme en række problematiske effekter, hvis læreren for enhver pris vil have de didaktiske situationer til at lykkes (Brousseau, 1997, s. 25-28; Winsløw, 2006a, s. 148-150).

5.4.1 Topaze-effekten

En handlingssituation kan potentielt udvikle sig til en institutionalisering såfremt læreren, i frustration over en elevs problemer med opgaven, dikterer mere og mere præcise anvisninger for at kontrollere elevens uvished i situationen. I mange tilfælde kan frustrationen føre til, at den tilsigtede viden går fuldstændig tabt, idet lærerens anvisninger bliver så styrende, at eleven overhovedet ikke er i stand til at bidrage med selvstændig vidensproduktion. *Topaze-effekten* opstår eksempelvis, hvis læreren siger: ”Du skal bare skrive sådan her...”, og eleven således alene arbejder med lærerens konkrete anvisninger.

5.4.2 Jourdain-effekten

Jourdain-effekten kan opstå, hvis læreren i for høj grad tilstræber, at eleven skal have en faglig indsigt, der ligger uden for dennes rækkevidde. Dette kan komme til udtryk, hvis læreren efter at have givet eleven simple øvelser siger: ”Nu har du bevist, at...”. Jourdain-effekten er således en form for Topaze-effekt.

5.4.3 Metakognitivt skift

Et *metakognitivt skift* opstår, når en elev ikke har forstået den officielle viden, og læreren derfor helt erstatter denne med en hjemmelavet model, der er intuitivt mere forståelig, men har en begrænset faglig funktion. F.eks. ses et metakognitivt skift, når mængdelære erstattes af manipulation med Venn-diagrammer.

5.4.4 Uheldig brug af analogier

I visse situationer ses *uheldig brug af analogier*, hvilket i realiteten korresponderer til Topaze-effekten. En sådan situation fremkommer, når læreren laver en opgave på tavlen, og efterfølgende anmoder eleverne om at lave en tilsvarende. Eleverne vil i dette tilfælde blot kopiere metoden fra den tidligere opgave uden nødvendigvis at se, hvorfor metoden virker. Denne effekt er aldeles udbredt i form af standardopgaver.

5.4.5 Misforstået behov for ændring

Endelig kan der forekomme et *misforstået behov for ændring* af en situation, da det kan være svært for en lærer at genbruge en didaktisk situation. Situationen vil sjældent udvikle sig på samme vis, da forskellige elevgrupper vil udvise varierende reaktioner, hvorfor resultatet vil blive et andet. Læreren kan imidlertid alligevel opleve et behov for at ændre elementer i situationen, i særdeleshed ting, der viser sig vanskelige for nogle elever. Dette handingsmønster indebærer en risiko for, at dele af den adidaktiske situation forsvinder i og med, at lærerens forsøg på at forbedre situationen potentielt kan udmønte sig i en af de ovenfor beskrevne effekter.

5.4.6 Elevgenererede effekter

Ovenstående effekter er alle genereret af læreren, men det er væsentligt at erkende, at der ligeledes kan opstå uheldige effekter, når eleven forsøger at overholde sin del af den didaktiske kontrakt. Således er det ikke usædvanligt, at den didaktiske kontrakt i matematikundervisning angiver, at læreren gennemgår et matematisk emne, hvorefter eleverne løser dertil knyttede opgaver, og modtager en afsluttende evaluering af læreren (Blomhøj, 1995, s. 17-19). I en sådan kontrakt vil eleven let komme til udelukkende at fokusere på at overholde sin del af den didaktiske kontrakt. Følgelig vil eleven typisk forsøge at afkode, hvad læreren ønsker frem for at arbejde målrettet med løsningsmodeller for det matematiske problem. På baggrund af dette fænomen vil eleven, firkantet set, kun kunne tilegne sig viden ved at bryde den didaktiske kontrakt i den forstand, at eleven egenhændigt overtager styringen af problemløsningen.

5.5 Lærerens rolle i undervisningssituationer

En essentiel faktor i enhver undervisningssituation er den måde, hvorpå læreren håndterer den pågældende situation. Alle de valg, læreren tager undervejs, vil påvirke den didaktiske kontrakt. Ifølge Arsac, Balacheff og Mante (1992, s. 14-16) vil lærerens adfærd specielt afhænge af følgende parametre:

1. Tid. I stort set al undervisning er der en tidsramme, inden for hvilken det planlagte forløb skal gennemføres. Dette påvirker de valg, læreren vil tage undervejs. Eksempelvis kan læreren vælge at udelade en del af det planlagte eller undlade at gennemføre en diskussion, som læreren vurderer vil være tidskrævende. Desuden kan et tidspres indebære, at læreren stiller meget ledende spørgsmål, således eleverne hurtigt når frem til det korrekte svar.
2. Lærerens epistemologiske ansvar. Læreren føler et ansvar for, at eleverne opnår den tilsigtede viden. Det epistemologiske ansvar kan i nogle tilfælde resultere i, at læreren retter en elevs fejl, frem for at afvente, at eleven gennem sin interaktion med miljøet selv kommer frem til en erkendelse af fejlen. Endvidere kan det forekomme, at læreren bliver for styrende i en diskussion, idet læreren vurderer hvilke dele af diskussionen, der kan lede til den tilsigtede viden, og derfor dirigerer diskussionens udvikling.

Lærerens adfærd kan endvidere være påvirket af dennes personlige forhold til matematik. Det påvirker læreren, hvis dennes opfattelse af matematikken kommer i modstrid med betingelserne i en given situation. Således vil en lærer, der i praksis ofte lader sig overbevise om et udsagns sandhed på baggrund af et eller flere eksempler, ubevidst overføre denne fremgangsmåde til eleverne, selvom hun i undervisningen tilsigter at videregive korrekt bevisteknik.

Endelig kan lærerens forhold til undervisning og læring påvirke undervisningssituationer. Disse forhold påvirker lærerens beslutninger og sætter rammerne for elevernes handlingsfelt (Sierpinska, 1999, lecture 7). Eksempelvis kan en lærer være af den opfattelse, at gruppearbejde ikke er udbytterigt for eleverne, hvorfor læreren muligvis i højere grad vil blande sig, sammenlignet med situationer, hvor eleverne arbejder selvstændigt med et givet problem.

5.6 Reproducerbarhed af undervisningssituationer

Det er interessant at overveje, hvorvidt et undervisningsforløb kan reproduceres under andre omstændigheder, f.eks. med en ny lærer eller med en anden klasse, sådan at eleverne opnår den samme vidensdannelse gennem forløbet. Der vil i enhver undervisningssituation være en kerne af reproducerbare elementer. Jo mere et forløb er tilrettelagt med henblik på, reproducerbarhed, des større vil denne kerne være. Følgelig vil en forelæsning altid kunne reproduceres, hvorfor kernen vil udgøre hele situationen. På den anden side vil der i en undervisningssituation bestående af en devolution, efterfulgt af en lang handlingssituation og en afsluttende opsamling (f.eks. en formulering), være en langt mindre kerne af reproducerbare elementer, idet selve handlingssituationen er svær at reproducere. Problemet med at reproducere adidaktiske situationer er det faktum, at det kun yderst vanskeligt lader sig gøre at kontrollere og observere elevers læringsprocesser. Derfor er det faktisk umuligt med sikkerhed at afgøre, hvorvidt en læringsprocess er reproduceret. Når en lærer skal reproducere en undervisningssituation, vil hun søge, at det ydre forløb i situationen bliver det samme, hvorved hun kan komme til at styre eleverne i en bestemt retning (Brousseau, 1997, s. 193). Derfor vil elevernes læringsprocesser blive påvirket, og dermed ikke blive reproduceret.

Der er mange faktorer, der kan influere, når man diskuterer reproduktion af et undervisningsforløb. Ifølge Arsac et al. (1992, s. 24-28) hænger reproduktionen nøje sammen med lærerens rolle, da denne foretager valg, der påvirker reproduktionen af en situation. Læreren vil, som beskrevet ovenfor, bl.a. være påvirket af tidsbegrænsninger, hvilket er en væsentlig faktor for reproducerbarheden. Det kan under planlægning af undervisningssituationer være vanskeligt på forhånd at fastlægge tidsrammer, hvorfor læreren eksempelvis kan være nødsaget til at stoppe eleverne i en handlingssituation. Endvidere har lærerens epistemologiske ansvar betydning for reproduktionen, idet en handlingssituation kan ødelægges ved, at læreren undervejs har behov for bekræftelse af, at eleverne faktisk opnår den tilsigtede viden. Endelig er lærerens personlige forhold til matematik, undervisning og læring afgørende for reproduktionen af et undervisningsforløb. En lærer kan eksempelvis være af den opfattelse, at forkerte udsagn ikke må skrives på tavlen. Dette kan betyde, at alle elevers strategier fra en specifik handlingssituation ikke kommer under diskussion.

Undervejs i et undervisningsforløb vil en lærer uundgåeligt skulle foretage mange mikro-beslutninger. Konsekvenserne af disse beslutninger er ukontrollerbare, idet det ikke lader sig gøre at forudsige, hvordan eleverne påvirkes. Hvis man derfor designer et undervisningsforløb med henblik på, at det skal kunne reproduceres, gælder det om at gennemtænke alle mulige udfald af de planlagte situationer. Således kan man til hvert udfald udarbejde en klar handlingsplan for herved at reducere lærerens ad hoc beslutninger.

6 Metodologi

Datamaterialet, som vi benytter til vores a posteriori analyse af undervisningsforløbet, består af videooptagelse af forløbet, transskription af det tilhørende lydspor samt notater, der undervejs er nedskrevet af observatøren.

Baggrunden for at arbejde med videooptagelse frem for blot at anvende lyd, er den åbenlyse fordel i at kunne betragte elevernes ageren, og ikke alene være fokuseret på den verbale kommunikation. Analysen forløber bedre ved kombination af billede og lyd, idet en betragtelig del af kommunikationen vedrører ting, der står på tavlen, i noter osv. Som konsekvens heraf benyttes hyppigt ord som ”den der” eller ”det der” om matematiske udtryk, der eksempelvis er skrevet på tavlen. Analysen faciliteres derfor af sammenkoblingen af videooptagelsen og lydspor. Herudover bliver det med videooptagelse lettere at afgøre, hvad der bliver sagt, og hvem der siger det, i tilfælde af lav eller utydelig tale. Kameraet blev placeret således, at eleverne konstant var i billedet. Dette ville give mulighed for at betragte elevernes interne kommunikation under opgaveløsninger. Desuden var vi på forhånd bevidste om, hvad læreren skulle præsentere og formodede herudover, at læreren ville tale højere end eleverne.

Observatørens noter har efterfølgende hjulpet os til at udvælge mange af de situationer, der danner baggrund for vores analyse. I forløbet har observatøren i særdeleshed været opmærksom på at notere tilfælde, hvor der opstod en situation, der ud fra et didaktisk synspunkt kunne være interessant at analysere nærmere. Observatørens rolle var at bemærke fordelingen af ansvar, misforståelser og uheldige effekter ved den didaktiske kontrakt fra såvel lærerens som elevernes side. Desuden skulle observatøren sammen med læreren iagttage, hvordan handlingssituationerne forløb. Vi bruger endvidere observatørens noter i visse tvivlsspørgsmål, f.eks. når denne har bemærket samtaler mellem elever, der ikke kunne høres på videooptagelsen.

Transskriptionen (appendiks D) giver mulighed for, at vi kan zoome ind på enkelte aspekter af samtaler, som vi finder interessante for vores a posteriori analyse. Ud fra transskriptionen vil vi først beskrive forløbet i korte træk, for dernæst at udvælge forskellige didaktiske kontrakter til nærmere analyse ved hjælp af de tidligere omtalte fire dimensioner: Det matematiske domæne, den didaktiske status, karakteristik af situationerne og fordeling af ansvar (cf. afsnit 5.1). Vi vil desuden identificere steder, hvor miljøets adidaktiske potentiale ikke udnyttes på en sådan vis, at eleverne egenhændigt kan løse et problem uden lærerintervention. Endvidere vil vi fokusere på situationer, hvor lærerintervention enten mangler eller har en uheldig påvirkning af elevernes læring. Dernæst vil vi vurdere, i hvilken udstrækning det er muligt at reproducere undervisningsforløbet. Endelig diskuteres mulige variationer af forløbet, specielt med henblik på en større tidsramme.

Vi har i transskriptionen nummereret hvert udsagn, så man let kan finde de samtaler, som vi vælger at gengive i analysen.

7 A posteriori analyse af undervisningsforløbet

7.1 Forhindringer for gennemførelse af det planlagte

Generelt var der et stort tidspres gennem hele undervisningsforløbet, hvilket afspejlede sig i nogle af de valg, som læreren tog. Dette vil vi behandle nærmere undervejs i analysen. I situationer, hvor eleverne selvstændigt løste opgaver, var det svært at vide, hvad eleverne tænkte, og hvilken viden de tilegnede sig. Derfor gik læreren rundt ved elevernernes pladser og observerede deres arbejde med de udleverede opgaver. I de tilfælde, hvor en elev slet ikke var i stand til at komme i gang med opgaveløsningen, valgte læreren at hjælpe eleven, idet hun tydeligvis følte et epistemologisk ansvar for, at alle elever fik et udbytte af opgaverne (cf. afsnit 5.5). Det var som regel kun den fagligt stærkeste halvdel af klassen, der deltog i diskussioner vedrørende udvikling af ny viden. Derfor forsøgte læreren at få alle eleverne, specielt de svagere, til at formulere sig, i de tilfælde, hvor diskussionen omhandlede tidligere institutionaliseret viden.

Igennem forløbet trådte observatøren i korte perioder ud af sin rolle, idet hun ind imellem blandede sig i undervisningen. Dette var til tider forstyrrende og udgjorde en direkte påvirkning af den didaktiske kontrakt, at en anden pludselig overtog rollen som lærer. Observatøren fratog ved sin indblanding lærerens autoritet som lærer, og det var derfor vanskeligt for eleverne at afgøre, hvor hen de skulle rette deres fokus. Specielt i de tilfælde, hvor lærer og observatør havde længerevarende diskussioner, fremgik denne forvirring tydeligt.

Andre forhindringer for at undervisningen kunne forløbe planmæssigt, var i højere grad af psykologisk karakter. Vi fandt det problematisk at træde ind i en klasse, hvor eleverne slet ikke kendte os. Dette betød, at eleverne var tilbageholdende f.eks. med hensyn til at komme til tavlen og tage del i diskussioner. Vi bemærkede dog, at disse forhindringer blev færre med tiden, idet eleverne - efterhånden som de lærte os at kende - blev mere trygge ved os.

Før vi går i dybden med den egentlige a posteriori analyse af afprøvningen, følger her en kort gennemgang af forløbet.

7.2 Forløbet i korte træk

Det fungerede generelt godt med de udleverede arbejds- og noteark, som eleverne kunne skrive på. De opdagede hurtigt, at den didaktiske kontrakt indebar, at de ikke fik udleveret udførlige noter, men at de selv kunne skrive supplerende oplysninger i tilfælde, hvor de fandt det nødvendigt.

7.2.1 Forløbet af modul 1

Modul 1 begynder, efter en kort introduktion, med at eleverne løser opgave B.1. Her skal de finde p og q i udtrykket $x^2 + 4x + 5 = (x + p)^2 + q$. Det viser sig, at der er en usædvanlig dygtig elev på holdet, som meget hurtigt løser opgaven og skriver den på tavlen, hvorfor vi hurtigt kan gå videre. Dernæst diskuteres, hvad der går galt, når man ikke kan løse andengradsligningen $x^2 + 4x + 5 = 0$, dvs. $(x + 2)^2 = -1$, og eleverne bliver bedt om at fortælle, hvordan de ville løse ligningen, såfremt højresiden var et positivt tal. Herved sker den første institutionalisering af viden omkring det komplekse tal i (cf. afsnit 7.8). Eleverne løser herefter opgave B.2, hvor de skal udregne produktet $(3+8i)(-2+i)$. Dette giver heller ikke eleverne nogen problemer, og de opnår alle det rigtige resultat. Nu arbejder eleverne med opgave B.3, hvor de skal løse ligningen $(x + 2)^2 = -1$ og verificere, at deres opnåede resultat rent faktisk er en løsning til den oprindelige ligning $x^2 + 4x + 5 = 0$. Desuden skal de løse ligningen $x^2 + 2x + 17 = 0$. Her har eleverne ikke de store problemer med første del af opgaven, men anden del giver som forudset lidt vanskeligheder (cf. afsnit 4.2.3). Derfor bidrager læreren til løsningsprocessen ved at oplyse, at $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$, når enten $p \geq 0$ eller $q \geq 0$, hvorefter de kan komme videre med opgaven. Nu er der en institutionalisering vedrørende komplekse tal og herunder deres grafiske repræsentation. Herefter er der en pause på fem minutter.

Efter pausen løser eleverne opgave B.5, hvor de skal finde rødderne til polynomierne $f(x) = x^2 - 16x + 68$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ og $h(x) = x^4 + 2x^3 + 16x^2 - 2x - 17 = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 17)$ og omskrive disse polynomier ved hjælp af deres rødder. Denne opgave medfører en del problemer for eleverne (cf. afsnit 7.9 og 7.10). Efter løsning at opgaven diskuteres, hvor mange rødder de forskellige polynomier har, hvilket leder op til institutionaliseringen vedrørende AFS. Da der efter gennemgang af det planlagte materiale til modul 1 er tid tilbage, fortsættes med det planlagte materiale for modul 2 og opgave B.9 devolueres. Her skal eleverne løse ligningen $x^4 - 1 = 0$. Med udgangspunkt i denne opgave har vi en institutionaliseringssituation omhandlende enhedsrødder. Til sidst i modul 1 udleveres hjemmeopgave B.8.

7.2.2 Forløbet af modul 2

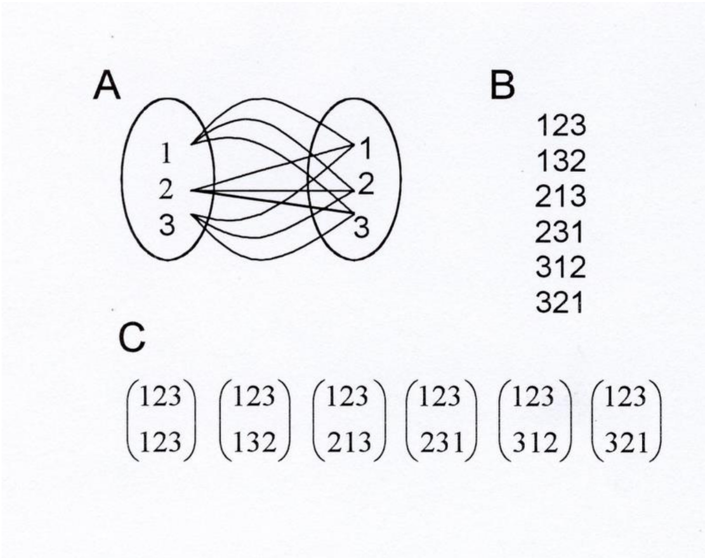
Modul 2 begynder med en diskussion af hjemmeopgave B.8. Her har specielt de sidste opgaver givet eleverne nogle problemer (cf. afsnit 7.10). Efter dette forstærkes institutionaliseringen vedrørende enhedsrødder fra modul 1, og som eksempel betragtes de tredje enhedsrødder. Nu løser eleverne opgave B.11, hvor de skal faktorisere de to polynomier $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ på alle mulige måder. Denne opgave har enkelte elever problemer med (cf. afsnit 7.9 og 7.11). Herefter indføres definitionerne på irreducibilitet og reducibilitet inden for $\mathbb{Z}$ ved institutionalisering. Læreren glemmer her at henlede deres opmærksomhed på, at $f(x) = 1$ ikke er irreducibelt, hvilket dog ikke giver anledning til problemer for eleverne, da den manglende information ikke har nogen betydning for de fremtidige opgaver. Nu løser eleverne opgave B.13, hvor de skal afgøre om to andengradspolynomier, $f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = x^2 + 4x + 5$, er irreducible. Denne opgave fører til misforståelser hos nogle af eleverne (cf. afsnit 7.9 og 7.11).

Efter en pause på fem minutter gennemgås Eisensteins irreducibilitetskriterium på overhead. Nu løser eleverne opgave B.16, hvor de skal afgøre, om polynomiet $f(x) = x^5 - 16x + 2$ er irreducibelt. Denne opgave giver kun en enkelt elev problemer (cf. afsnit 7.9). Efter denne opgave udleveres arbejdsark C.10, hvor eleverne skal formulere deres viden om egenskaberne ved de forskellige polynomier på arket. Her fremgår det, at de generelt er i besiddelse af et godt overblik over både AFS og irreducibilitet, hvorfor den tilsigtede viden til dels må være blevet stadfæstet som personlig viden.

Efter diskussionen vedrørende bestemte polynomier forevises eleverne eksplicitte formler til bestemmelse af rødderne til generelle tredje- og fjerdegradspolynomier på overhead. Det fortælles nu, at det ikke kan lade sig gøre at finde en tilsvarende formel for polynomier af en grad, der er større end eller lig 5. I denne forbindelse kommer et historisk indslag vedrørende ligningsløsningens udvikling. Herefter tages udgangspunkt i formlen til bestemmelse af rødderne til det generelle tredjegradspolynomium, og eleverne når frem til, hvad en formel til bestemmelse af rødderne til et n'tegradspolynomium kan bestå af. På overheaden præsenteres eleverne nu for sætning B.18, der kan benyttes til at afgøre, om rødderne til et givet polynomium kan findes ved en formel. Herefter løser eleverne opgave B.19, hvori de skal afgøre, hvorvidt rødderne til polynomiet $f(x) = x^5 - 16x + 2$ kan bestemmes ved en formel. Læreren indfører her grafen for polynomiet som et objektivt miljø, der skal sandsynliggøre, at $f(x)$ har tre rødder (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 126). I slutningen af modul 2 fortælles kort om Galois og Galoisteoriens historie, som indtroduktion til det næste modul. Dette historiske indslag fungerer godt, da historien om Galois er sjov og dermed vækker elevernes interesse. Det er desuden en god variation i undervisningen. Til slut nævnes, at modul 3 vil omhandle Galoisgrupper, og hjemmeopgave B.21 udleveres.

7.2.3 Forløbet af modul 3

I modul 3 lægger vi ud med en gennemgang af hjemmeopgave B.21. Opgaven har kun givet få problemer for eleverne (cf. afsnit 7.11). Herefter bliver eleverne bedt om at genkalde viden, der blev institutionaliseret i modul 2, herunder hvad formler til bestemmelse af rødderne til polynomier må bestå af. Nu løser eleverne opgave B.22, hvor de skal opskrive S_3 og S_2. Her forstærkes kendt viden om S_3, og de har ingen vanskeligheder ved opgaven, heller ikke med hensyn til S_2. Denne gruppe er ukendt for dem i den forstand, at de aldrig har set S_2; imidlertid kender de strukturen i S_3, hvorfor de til dels har en viden om strukturen i S_2. Eleverne har tidligere set flere notationer for gruppen S_3 og benytter derfor forskellige af disse; enkelte elever opskriver alle de forskellige notationer, de kender (figur 7). I figur 7 illustrerer stregerne i A en funktion, der kan sende 1 i hhv. 1, 2 og 3 osv. I B kan vi se alle de seks permutationer i S_3, idet den øverste række bliver sendt i sig selv og i de følgende rækker. C viser ligeledes de seks permutationer i S_3. Sidstnævnte var den mest anvendte notation, og desuden den vi selv er vant til at benytte. Derfor valgte læreren efterfølgende at benytte notationen i C.



Figur 7: Elevernes forskellige notationer for S_3.

To elever opskriver nu hhv. S_2 og S_3 på tavlen. Her foregribes institutionaliseringen vedrørende gruppen S_n, idet læreren spørger, hvordan S_4 og dernæst S_n ser ud.

Eleverne bliver nu bedt om at genkalde betingelserne for, at en mængde med en given komposition er en gruppe. Det viser sig her, at i stedet for associativitetsbetingelsen, har eleverne tidligere set, at mængden skal være stabil under komposition. Endvidere har eleverne tidligere benyttet ordene regneoperation, enhedselement og omvendt element for hhv. komposition, det neutrale element og det inverse element. Det giver dog ikke problemer for eleverne, at vores definition benytter andre betegnelser, måske fordi læreren hurtigt overtager elevernes metode til at vise gruppebetingelserne og det af eleverne anvendte sprogbrug.

Nu diskuteres, hvorfor S_n er en gruppe, og i den forbindelse hvilke muligheder der foreligger for en gruppes komposition. Her kommer det frem, at kompositionen for S_n er sammensætning. Den første gruppebetingelse, der betragtes, er, at S_n skal være stabil under sammensætning. Her benyttes et eksempel med S_3, hvor der skrives to permutationer, der skal sættes sammen, på tavlen. Læreren benytter hverken sammensætningstegnet $\circ$ eller kompositionstegnet $*$ mellem de to permutationer, men lader det være indforstået, at det er sammensætning, der tales om. Dette kunne have medført, at eleverne fejlagtigt fik den opfattelse, at de to permutationer skulle multipliceres. Der er dog imidlertid ingen, der bemærker den manglende komposition, hvorfor vi er usikre på, om det har haft nogen betydning for eleverne, der i øvrigt benytter sammensætning rigtigt. Der bliver nu gjort opmærksom på, at man kan permutere alle former for elementer i stedet for de naturlige tal. Som eksempel bruges tre af elevernes navne i en permutation i S_3. Dette appellerer godt til eleverne, så selv den mest passive elev får sagt lidt, sandsynligvis fordi det ene af navnene i permutationen er hans. Desuden vises eleverne, at rødder til et polynomium ligeledes kan optræde som elementer, der permuteres.

Efter en kort pause løser eleverne opgave B.25, hvor de skal benytte en permutation af to rødder til et andengradspolynomium på et udtryk i de to rødder. Dette giver kun få problemer for eleverne (cf. afsnit 7.9). Efter eleverne har løst opgaven, viser læreren, at et generelt udtryk i i og $-i$ ser således ud: $\sum k_{u,v} \cdot i^u \cdot (-i)^v$, hvor $k_{u,v} \in \mathbb{Z}$ og $u, v \in \mathbb{N}_0$. Med hjælp fra eleverne reduceres dette til $a+bi$, hvor $a, b \in \mathbb{Z}$. Herefter redegøres kollektivt for, at hvis $a+bi = 0$, så vil $\sigma(a+bi) = a - bi = 0$. Eleverne stiller ikke spørgsmålstegn ved vores ad hoc metode, som er omtalt i afsnit 4.2.7.

Eleverne bliver nu bedt om at afgøre hvilken delmængde af S_2, der bevarer ethvert nuludtryk mellem de to rødder i hhv. 1) og 2) i opgave B.25. De erkender let, at det er hhv. S_2 og $\{e\}$. Herved forberedes et miljø omkring Galoisgruppen for et polynomium, idet læreren stiller spørgsmål, hvor svarene findes kollektivt. Herefter skabes en institutionaliseringssituation vedrørende Galoisgruppen for et andengradspolynomium, hvorved der sættes navn på de delmængder, eleverne netop har fundet. Dette medfører en ny institutionaliseringssituation omkring Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium. Efterfølgende diskuteres, hvorfor Galoisgruppen er en gruppe. Denne diskussion bliver noget ustruktureret, hvilket medfører, at eleverne har svært ved at følge med (cf. samtalen 761-782, appendiks D). Modul 3 afsluttes ved, at læreren uddyber sammenhængen mellem Galoisgruppen for et polynomium og rødderne til dette. I den forbindelse benyttes en illustration (figur 11, appendiks B.3), der viser, at jo større Galoisgruppen er, des mere komplicerede er rødderne. Eleverne kan her få en intuitiv forståelse for, at rødderne således ikke kan bestemmes ved en formel.

Generelt var modul 3 af en helt anden karakter end de to første moduler, da strukturen i store perioder bar mere præg af forelæsning. De adidaktiske situationer var færre, og ingen var fundamentale, idet miljøet ikke kunne give eleverne den feedback, der var nødvendig for at de kunne opnå den tilsigtede viden i situationerne. Derfor måtte læreren via intervention modificere miljøet, for at hjælpe eleverne videre i det didaktiske spil med miljøet (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 116).

Nu følger en mere dybdegående beskrivelse af empirien, idet vi betragter udvalgte dele af transskriptionen og analyserer de forskellige observationer, der er gjort undervejs.

7.3 Kendt vs. ukendt viden

Vi har under udarbejdelsen af vores undervisningsforløb været tilbøjelige til at antage, at hvis eleverne eksempelvis havde fået en viden præsenteret ved institutionalisering, så ville denne viden være tilgængelige for eleverne på en sådan måde, at de ville kunne bruge den i forskellige opgaver. Som det fremgår af det følgende, står det imidlertid klart, at dette repræsenterer en aldeles firkantet måde at afgøre status af viden. Vi er altså i designet gået mest ud fra, at en viden enten er kendt eller ukendt. Som vi også beskriver i afsnit 5.1, er der mange intermediære niveauer, hvorpå en viden kan være kendt. I det følgende kan vi se, at elevernes viden om faktorisering af polynomier udgør et godt eksempel på, hvordan viden kan være kendt på mange forskellige måder. Vi skal se, at eleverne alle kender begrebet faktorisering, men har klart forskellige opfattelser af, hvad det faktisk betyder at faktorisere et polynomium. I udarbejdelsen af designet kunne vi i højere grad have overvejet, hvordan vi skulle handle i situationer, hvor en institutionaliseret viden ikke er stadfæstet hos eleverne i en sådan grad, at de kan mobilisere den fra en kontekst til en anden.

7.4 Uudnyttet adidaktisk potentiale

Det didaktiske miljø har i visse tilfælde et adidaktisk potentiale, der i forbindelse med opgaveløsning ikke automatisk udnyttes af eleverne. Derfor kan lærerintervention være nødvendig (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 117). I situationer, hvor eleverne konfronteres med problemer, kommer læreren ofte uforvarrende til at hjælpe for meget, i stedet for at opfordre eleverne til at spille med miljøet og derved udnytte det tilstedeværende adidaktiske potentiale. Vi vil i dette afsnit analysere episoder, hvor læreren ikke formår at lade eleverne arbejde selvstændigt med miljøet, således at det adidaktiske potentiale udnyttes.

I opgave B.3 finder eleverne komplekse løsninger til andengradsligninger. I den forbindelse opstår der en misforståelse hos en elev under løsning af del (1):

40. Mikael: "Ahh smart, og så kan jeg bare flytte 2 over igen [i $x + 2 = \pm i$] ik'? ... Men det er vel, -2 det må være det samme som $2i$."
41. L: "-2 er bare -2."
42. Mikael: "Nåh, sådan her [$x = -2 \pm i$] [...]."

Eleverne er på dette tidspunkt endnu ikke rigtig fortrolige med komplekse tal, og det er første gang, de skal præsenteres for det faktum, at et tal på formen $x + iy$ kan være løsning til en andengradsligning. Vi tror derfor, at den pågældende elev forsøger at omskrive $-2 \pm i$ til en kendt løsningstype. Selv om eleverne tidligere har set eksakte løsninger til andengradsligninger, vil de typisk føle et behov for at reducere løsningsudtrykket, indtil alle regneoperationer er væk. Eksempelvis kunne de have set $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, der er løsning til ligningen $x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$. Det er følgelig af vores opfattelse, at eleven forsøger at reducere $-2 \pm i$ yderligere, hvorfor misforståelsen, at han kan skrive i i stedet for $-$ (minus), opstår.

Miljøet har i ovenstående tilfælde potentiale til, at den pågældende elev egenhændigt kunne have opdaget sin fejl. Problemet er her, at eleven ikke var nået til anden del af (1), hvor eleverne skulle eftertjekke, at de fundne værdier tilfredsstiller ligningen. Såfremt eleven havde indsat de fundne værdier, ville han formentlig have erkendt, at løsningerne var forkerte. Læreren kunne have bedt eleven indsætte de fundne værdier i ligningen eller alternativt bedt ham forsøge at verificere, at $-2 = 2i$, således, at han selv havde erkendt sin fejl i forbindelse med sin yderligere handlen i miljøet.

Endnu et eksempel på, hvordan læreren ikke tillader eleven at få feedback fra miljøet, kan anskues i relation til opgave B.9, hvor eleverne skal finde løsningerne til $x^4 - 1 = 0$:

140. L: "[...] Men hvad ved I ifølge AFS, som I lige har set og fået udleveret? Hvad skal så i hvert fald gælde? Maria?"

141. Maria: "Den har fire rødder."

142. L: "Ja, er der nogen bud på, hvad de rødder de er?"

151. Peter: "1 og -1, og så ville jeg mene, at de var dobbeltrødder."

152. L: "Det er de faktisk ikke."

153. Peter: "Nåh aha."

154. L: "Ja?"

155. Peter: "$\pm i$ også."

Læreren kunne i denne kontekst have udnyttet miljøets adidaktiske potentiale ved at have bede eleven om at vise, hvorledes -1 og 1 er dobbeltrødder. Herved kunne eleven have opnået viden på egen hånd ved at handle i miljøet.

7.4.1 Problemer med faktorisering

Det er et tilbagevendende fænomen, når eleverne hører ordet faktorisering, at de tænker på, at de skal sætte x uden for en parentes; dette illustreres i forbindelse med løsningen af opgave B.11:

287. L: "[...] Ok, er der nogen af de her f og g - f eller g, som man kan faktorisere ud i mindre polynomier, der har heltalskoefficienter? ... Er der nogen af de her polynomier - hvis man faktoriserer dem ud på en eller anden måde, at de mindre polynomier får koefficienter, der ligger i $\mathbb{Z}$, altså som er hele tal? Mikael?"

288. Mikael: "I g der kunne du vel sætte x uden for en parentes, kunne du ikke det?"

293. L: "Hvis du kigger på faktoriseringerne - du har en faktorisering her [*peger på en af de fire faktoriseringer af* $g(x)$], du har en faktorisering her, så har du de her to også den her og den her. Og herovre [*peger på* $f(x)$] der er der jo kun den her ene [*faktorisering*]. Er der nogen af de her, som hvor de enkelte faktorer er polynomier, der har heltalskoefficienter?"

Eleverne kan tidligere have arbejdet med mange opgaver, hvor de har skullet sætte x uden for en parantes, hvilket sandsynligvis forklarer elevens første indskydelse. Faktorisering af polynomier er tydeligvis ikke kendt af eleverne i den udstrækning, vi forventede (cf. afsnit 4.2.3). Det er således kun delvist kendt viden for denne elev, idet han relaterer det til at sætte x uden for en parantes. Læreren forstår ikke, hvorfor eleven vil sætte x uden for en parentes, og hun ignorerer forslaget flere gange. Læreren har i denne situation en klar forestilling om, hvordan undervisningen skal forløbe for at nå den tilsigtede viden, og vurderer, at det forkerte svar ikke vil kunne føre til en diskussion, der inden for de givne tidsrammer kan være udbytterig (Arsac et al., 1992, s. 20; Sierpinska, 1999, lecture 7). Hun vurderer, at fejlen er et resultat af manglende opmærksomhed fra elevens side og ikke et egentligt forståelsesproblem. Dog er der meget, der indikerer, at elevens problem faktisk er et forståelsesproblem. Det er problematisk, at læreren i ovenstående eksempel beslutter at ignorere elevens fejl, idet det er vigtigt, at lade sådanne behandle, således at eleven kan få feedback fra miljøet. Hvis eleven fik lov at spille yderligere med miljøet, kunne han måske egenhændigt opdage sin fejl, eventuelt ved hjælp af lærermedieret regulering af spillereglerne.

I ovenstående samtale arbejdes med faktoriseringerne af $f(x)$ og $g(x)$ fra opgave B.11, idet læreren beder eleverne bestemme hvilke af polynomierne, der kan faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der hver især har heltalskoefficienter. Dette er vanskeligt for eleverne, sandsynligvis fordi de her skal benytte faktorisering af polynomier i en ny sammenhæng.

I et andet tilfælde forekommer et eksempel på, at eleven rent faktisk har en forkert forståelse af faktorisering:

305. Maria: "Når der står sådan et ekstra led [+1], er den [$(x+2)^2+1$] så reducibel?"

308. L: "Den der [+1] det er jo ikke - når der står plus, så er det jo ikke en rigtig faktor, kan man sige. Hvis du faktoriserer, så må du kun skrive ud i ting, der er ganget sammen. Så hvis det her [*peger på det sidste led i* $(x+2)^2+1$] skal være med, så skal det være inden i [*en parentes*]."

Det fremgår igen åbenlyst, at viden om faktorisering af polynomier kun er delvist kendt af eleven i den forstand, at eleven kan genkalde, at polynomiet kan omskrives ved faktorisering, men ikke hvad denne omskrivning består i. Det er muligvis derfor, at hun forveksler faktorisering med metoden til omskrivning af et andengradspolynomium, hvilken eleverne arbejdede med i modul 1. Endvidere ses i 308, at læreren forsøger at forklare forskellen på et led og en faktor i et polynomium. Forklaringen bliver her både uformel og ad hoc, idet læreren prøver at sætte sig ind i elevens tankegang og udrede elevens situationsspecifikke faktoriseringsproblemer. Sådanne ad hoc forklaringer kan være et forsøg på at forelægge eleven en mere intuitiv forklaring. I nogle tilfælde kan det måske i stedet være grobund for misforståelser. Den sidste sætning i 308 kunne eksempelvis bevirke, at eleven blot ville sætte en parantes omkring +1 og få $(x+2)^2(+1)$ og dermed tro, at polynomiet således var faktoriseret.

I hjemmeopgave B.21 har eleven fra tidligere igen problemer med faktoriseringen af polynomier:

194. L: "Ja, er I med? Må jeg spørge dig, der havde problemer, var det faktoriseringen, eller var det...?"

197. Mikael: "Bare sådan at komme i gang, jeg ved ikke, hvad det er. Jeg må åbenbart bare være virkelig dårlig til at faktorisere."

200. L: "Det du har, det er, at hvis du har et andengradspolynomium $f(x) = ax^2+bx+c$, det har to rødder. Vi siger, at det har en rod, der hedder r_1

og en rod der hedder r_2, det er de to rødder til det her andengradspolynomium. Hvordan er det så, vi skriver faktoriseringen op - så kan vi skrive $f(x)$ som?"

201. Mikael: "Det er $a(x - r_1)(x + r_1)$, eller r_2 bliver det så."

204. L: "Ja, man kan altid faktorisere ved at skrive x minus den ene rod gange x minus den anden rod, hvis det er et andengradspolynomium. Hvis det er et tredjegradspolynomium, så kommer der selvfølgelig en faktor mere på. [...] Så selvom det ser lidt mere forvirrende ud, så er det her $[4 + 7i]$, det er stadig et tal, som stadigvæk er en rod."

212. L: "Ja, jeg ved ikke, om vi skal kigge på den anden også - skal vi kigge på $g(x)$ også? Hvad siger I?"

213. Mikael: "Nej, jeg tror - jeg tror, at jeg godt kan finde ud af det nu."

Elevens misforståelse vedrørende faktorisering er denne gang af en anden karakter end tidligere. Da eleverne har set flere eksempler, hvor rødderne til et givet andengradspolynomium er af formen $\pm a$, $a \in \mathbb{C}$, har den pågældende elev fået den opfattelse, at faktoriseringen af et vilkårligt andengradspolynomium altid må være af formen $(x - a)(x + a)$. Eleven bliver dog i ovenstående eksempel forvirret, da formen $(x - r_1)(x + r_1)$ er i modstrid med at faktoriseringen skal indeholde begge rødder r_1 og r_2. Følgelig ender han med, at faktoriseringen må være $(x - r_1)(x + r_2)$. På ny illustreres det, hvorledes viden om faktorisering af polynomier ikke er kendt som forventet af læreren. Bemærk her, at læreren overhører elevens misforståelse. Endvidere kan vi i 213 observere en tydelig konsekvens af den didaktiske kontrakt, hvilket vi beskriver nærmere i afsnit 7.11.

7.5 Kendt viden som forberedelse af ny viden

Ved at tage udgangpunkt i viden, der er kendt for eleverne, kan læring af ny viden forberedes (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 122). Et eksempel herpå fremgår af indledningen til modul 1, hvor læreren stiller et spørgsmål relateret til tidligere institutionaliseret viden:

2. L: "[...] Kan I løse alle andengradsligninger?"

3. Maria: ”Man kan i hvert fald sige om de andengradsligninger, der ikke har en løsning, at de ikke har en løsning. Ellers så kan man se, at der er to eller en løsning.”

4. L: ”Ja, men I kan altså ikke sådan generelt løse dem, vel - nej?”

6. L: ”[...] Denne her ligning [$x^2+4x+5=0$] er et eksempel på én, som jeg vil gå ud fra, I ikke kan løse, eller som vi kan sige, ikke har nogen løsninger. Så vil vi gerne se lidt nærmere på, hvorfor det faktisk er, at vi ikke kan løse den [...].”

I dette miljø i relation til andengradspolynomier anvendes den kendte viden til at forberede læring af ukendt viden vedrørende komplekse tal. Læreren udleverer her et arbejdsark med opgaven: Find p og q i udtrykket $x^2 + 4x + 5 = (x + p)^2 + q$. Her skal den kendte viden om kvadratet på en toleddet størrelse, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, benyttes til at se kvadratets fuldendelsesmetode. Eleverne er bekendt med den traditionelle diskriminantformel til løsning af andengradsligninger, men den nye metode udgør en anden tilgang til erkendelse af, hvorfor visse andengradsligninger ikke har løsninger inden for $\mathbb{R}$. Eleverne finder hurtigt, at $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$. Læreren sætter nu $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 = 0$, dvs. $(x + 2)^2 = -1$.

11. L: ”[...] Ok, hvad er det lige, der går galt her [$(x + 2)^2 = -1$]? Ja, Maria?”

12. Maria: ”Du kan ikke sætte noget i anden og få et negativt tal.”

13. L: ”Nej, så derfor har vi virkelig et oplagt eksempel på, hvor det er, det går galt, når vi skal løse de her ligninger, hvor diskriminanten bliver negativ. [...] nu vil vi faktisk gerne løse denne her ligning [$(x + 2)^2 = -1$] alligevel [...].”

Her gøres det klart for eleverne, hvorfor de ikke kan løse ligninger med negativ diskriminant. Dette medfører en første devolution af det nye problem, nemlig at løse $(x + 2)^2 = -1$ (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 128).

Inden opgave B.11 har eleverne kun tiftet bekendtskab med faktorisering som den fuldstændige faktorisering i førstegradsfaktorer. Så med denne opgave udvides det tidligere institutionaliserede begreb, idet de ser, at faktorisering af et tredjegradspolynomium ikke er entydig. Efter gennemgang af opgaven på tavlen stiller læreren spørgsmål, der besvares kollektivt, hvorved der forberedes et miljø vedrørende irreducibilitet (cf. samtalen 287-293, afsnit 7.4).

7.6 Ny kontrakt etableres ved brud på den eksisterende

Ved at læreren bryder den didaktiske kontrakt, skabes et nyt miljø, hvor en ny kontrakt bliver gældende. Det følgende eksempel viser et brud på den didaktiske kontrakt i relation til det matematiske domæne.

13. L: ”[...] hvis det nu var et positivt og ikke et negativt tal, der står her [-1 *i ligningen* $(x+2)^2 = -1$], hvad ville I så gøre for at komme videre? Ja, Peter?”

14. Peter: ”Tage kvadratroden på begge sider.”

15. L: ”Ja, så hvis vi nu gør det alligevel. ... Hvad får vi så herovre [*højresiden af* $(x+2)^2 = -1$)]?”

16. Peter: ”Kvadratroden af -1 [...].”

Med hensyn til det matematiske domæne vil en didaktisk kontrakt i gymnasiet indebære, at det ikke er tilladt at tage kvadratroden af et negativt tal. I det ovenstående brydes denne kontrakt, og med bruddet etableres en ny kontrakt, hvor det er tilladt at benytte $\sqrt{-1}$. Der skabes altså et nyt miljø omkring komplekse tal.

I forbindelse med arbejdsark C.10, hvor eleverne bl.a. undersøger, hvorvidt de forskellige polynomier på arbejdsarket er irreducible, brydes den didaktiske kontrakt af læreren. Bruddet opstår, idet eleverne ikke har mulighed for at afgøre, hvorvidt tre af polynomierne i kassen er irreducible. Eleverne skal altså se på polynomier, hvor de ikke kan udtale sig om den egenskab, der netop er blevet præsenteret. Formålet med at arbejde med sådanne polynomier er at demonstrere for eleverne, at man i mange tilfælde hverken kan afgøre irreducibilitet ved hjælp af definitionen eller ved hjælp af Eisensteins irreducibilitetskriterium. Endvidere er formålet med at se på disse polynomier, at eleverne skal erkende, at selvom Eisensteins irreducibilitetskriterium ikke kan anvendes er dette ikke ensbetydende med, at polynomiet er reducibelt, men blot at de ikke på nuværende tidspunkt har redskaber til at afgøre, hvorvidt det er irreducibelt eller reducibelt. Opnåelsen af disse mål forhindres af en didaktisk kontrakt, der for eleverne angiver, at de kun får stillet opgaver, som de har redskaber til at løse (Blomhøj, 1995, s. 17). Det er en helt generel forventning hos eleverne i matematikundervisning, at de naturligvis har fået redskaber til at løse de opgaver, de bliver stillet. I forbindelse med at eleverne skal formulere deres viden om polynomiet $x^4 + 5x^3 + x + 13$, forekommer et illustrativt eksempel på, at en sådan kontrakt sædvanligvis indebærer, at en stillet opgave kan løses:

420. L: "Ja, kan vi sige noget om, om den er irreducibel?"

421. Siv: "Umiddelbart vil jeg sige, at det er den ikke. Vi skal finde et primtal, der går op i b ik'?"

422. L: "Hvis du kan bruge den sætning, vi havde lige før, så skal du finde et primtal, der går op i den [5] og den [1], der står her, og den her [13], kan du finde det?"

423. Siv: "Umiddelbart ikke nej."

Umiddelbart inden denne situation var der i fællesskab blevet talt om polynomiet $x^{100} - x^{99} - 3$, hvor eleverne hverken var i stand til at faktorisere eller benytte Eisensteins irreducibilitetskriterium. Ovenstående eksempel viser, at det er vanskeligt for eleven at løsrive sig fra den for eleven gældende kontrakt, på trods af at der kort tid inden har været et tilsvarende brud på den. Det lader endvidere til, at elevens logik foreskriver, at hvis A medfører B, så vil ikke-A nødvendigvis medføre ikke-B. Hvis der således ikke findes et primtal, der opfylder betingelserne i sætningen, vil polynomiet ikke være irreducibelt, hvorfor det så er reducibelt.

7.7 Håndtering af elevernes usikkerhed ved brud på kontrakten

Når der sker et brud på en gældende didaktisk kontrakt, kan der opstå en usikkerhed hos eleverne, som læreren må forholde sig til (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 122). Følgende giver et indblik i, hvordan læreren forsøger at reducere den usikkerhed, der muligvis opstår hos eleverne, når læreren bryder kontrakten ved at tillade $\sqrt{-1}$ (cf. samtalen 13-16, afsnit 7.6):

20. L: "Ja. ... Ok, det her [$\sqrt{-1}$] det giver selvfølgelig ikke mening inden for de reelle tal, så for at løse den her slags ligninger så bliver vi nødt til at udvide vores talbegreb, altså udvide de reelle tal [...]. Ja, så vi definerer altså ... $\sqrt{-1}$ til at være i - hvad er så i^2? Ja, Maria?"

21. Maria: "-1."

22. L: "Ja. ... Ok, så nu har vi altså faktisk lige pludselig fundet et tal, der i anden giver -1 [...]."

Den potentielle usikkerhed håndteres her ved, at læreren anerkender, at $\sqrt{-1}$ ikke giver mening for eleverne. Læreren letter desuden med den sidste kommentar (22) stemningen og gør situationen mere uformel, da hun lidt i spøg antyder, at der pludselig er dukket et nyt tal op.

I afsnit 7.6 omtales det brud på en didaktiske kontrakt, der forekommer, når eleverne bliver bedt om at udtale sig om irreducibilitet mht. polynomier, hvilket de jo netop er ude af stand til at afgøre. Elevernes usikkerhed afhjælpes ved, at læreren gør opmærksom på, at det ikke altid er muligt at benytte Eisensteins irreducibilitetskriterium. I fællesskab konkluderes, at eleverne faktisk ikke har grundlag for at udtale sig om irreducibilitet for de pågældende polynomier.

7.8 Institutionalisering ved samtaler med eleverne

I stedet for at læreren egenhændigt institutionaliserer ny viden, kan institutionaliseringsprocessen ske ved, at læreren og eleverne skiftevis stiller spørgsmål og svarer på disse (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 122). I denne form for institutionalisering vil læreren øjeblikkeligt validere elevens svar på det stillede spørgsmål, hvorved svaret kommer til at fungere institutionaliserende.

I samtalen 20-22 (afsnit 7.7) ses en første instutionaliseringssituation omkring det komplekse tal i ved kommunikation med eleven. Denne institutionalisering udføres i konteksten af den udleverede opgave (cf. afsnit 7.5). Efterfølgende sker en dekontekstualisering, idet eleverne først skal arbejde med en opgave, omhandlende multiplikation af to komplekse tal og dernæst får forelagt en opgave, hvor de skal løse den tidligere behandlede ligning $(x+2)^2 = -1$, og undersøge, hvorvidt deres resultater er løsninger til den oprindelige ligning $x^2 + 4x + 5 = 0$ (opgave B.2 og B.3). Dekontekstualiseringen indebærer, at eleverne kan mobilisere den nye viden til andre sammenhænge.

Under institutionaliseringen af den grafiske repræsentation af de komplekse tal, bliver eleverne bedt om at angive, hvilke komplekse tal læreren har afmærket i et todimensionalt koordinatsystem på tavlen (cf. samtalen 64-80, appendiks D). Altså foregår en del af institutionaliseringen via samtale med eleverne. I institutionaliseringen af de komplekse tal opstår der desuden et skift inden for det matematiske domæne, idet vi bevæger os fra symbolsk til grafisk repræsentation.

I modul 3 bliver eleverne bedt om at redegøre for, hvorfor S_n er en gruppe. På nærværende tidspunkt er der viden i udvikling vedrørende S_n. Redegørelsen for, hvorfor S_n er en gruppe, gennemgås kollektivt ved eksempler med elementer fra S_3 (cf. samtalen 638-662, appendiks D). Herved har vi en institutionalisering vedrørende gruppen S_n baseret på samtaler mellen lærer og elever.

7.9 Fordeling af ansvar

Som omtalt i afsnit 5.1 hænger fordelingen af ansvar tæt sammen med den didaktiske status af den tilsigtede viden. I forbindelse med løsning af opgave B.3 placeres ansvaret hos eleverne, idet opgaven kun kræver grundlæggende viden omkring løsning af en andengradsligning, samt den nyligt institutionaliserede viden, at $i^2 = -1$. Eleverne går dog i stå med opgaven, hvorfor lærerintervention er påkrævet, for at de kan komme videre i spillet med miljøet (cf. samtalen 55-60, appendiks D). Derfor tager læreren en del af ansvaret tilbage.

Med hensyn til løsning af opgave B.5 lægges ansvaret igen hos eleverne, da opgaven kan løses på baggrund af institutionaliseret viden. Eleverne forventes at anvende ny institutionaliseret viden, idet de arbejder med at finde komplekse løsninger til andengradsligninger. Herudover skal de i relation til $g(x)$ kunne gætte en rod og udføre polynomiers division. Ingen elever ønsker at regne opgaven for $h(x)$ på tavlen (bortset fra den meget dygtige elev), hvorfor læreren stiller spørgsmål og nedskriver elevernes svar. Herved foregår en kollektiv opgaveløsning, hvilket indebærer, at læreren påtager sig en del af ansvaret for løsning af opgaven.

Enkelte elever havde vanskeligt ved at komme i gang med løsning af opgave B.11. Her eleven, der tidligere havde problemer med faktorisering:

239. Mikael: "Hvad skal jeg gøre her?"
240. L: "Hvad vil du starte med at gøre med $g(x)$?"
241. Mikael: "Så vil jeg umiddelbart gætte en rod."
242. L: "Ja."
243. Mikael: "Og det er -1."
244. L: "Ja, og hvad vil du så gøre?"
245. Mikael: "Så kan man sætte x uden for en parentes /.../."
246. L: "Hvad plejer du at gøre, efter du har gættet en rod? Hvordan kan du så skrive polynomiet?"
247. Mikael: "I hvert fald $x + 1$ der ikk?"
248. L: "Ja, og hvad er der så tilbage? Hvordan vil du finde det?"
249. Mikael: "Nåh, så kan man sætte det der $[x+1]$ udenfor en parentes måske."
250. L: "Jahh. ... Ellers så er der noget, der hedder polynomiers division."
251. Mikael: "Ja /.../."
252. L: "Ja, men det er rigtig nok, det kan skrives som $(x + 1)$ gange et andengradspolynomium /.../."

I denne opgave er ansvaret placeret hos eleverne, da alt hvad der kræves til løsning af opgaven, er viden om faktorisering af polynomier, hvilket læreren har antaget kendt af eleverne. Dog overtager læreren pány ansvaret i den beskrevne situation, som konsekvens af elevens store vanskeligheder med at komme i gang med opgaven. Det viser sig således, at faktorisering af polynomier ikke udgør stadfæstet viden hos eleverne, og derfor ikke kan mobiliseres under varierende kontekster (cf. afsnit 7.4). De fleste elever får imidlertid løst hele opgaven, og den gennemgås på tavlen af to elever. Bemærk endeligt Topaze-effekten i 250, der yderligere omtales i afsnit 7.11.

I opgave B.13 får eleverne ansvaret for at benytte den nye institutionaliserede viden om irreduciblilitet. Læreren får dog noget af ansvaret for løsning af opgaven igen, idet der stilles et spørgsmål til opgaveløsningen (cf. samtale 305-308, afsnit 7.4).

I forbindelse med opgave B.16 får eleverne ansvaret for at anvende den nyligt institutionaliserede viden om Eisensteins irreducibilitetskriterium. Eleverne har generelt ingen problemer med dette. Dog må læreren tage det meste af ansvaret igen fra en enkelt elev, der har svært ved at komme igang med opgaven (cf. samtalen 360-386, appendiks D).

Diskussionen omkring arbejdsark C.10 forstærker den institutionaliserede viden om polynomier, idet eleverne får ansvar for at anvende og verificere anvendelsen af denne viden.

I opgave B.19 skal eleverne anvende kendt viden om irreducibilitet og funktionsundersøgelse for at kunne benytte sætning B.18. Der skal herunder redegøres for, at det givne femtegradspolynomium har 3 reelle rødder, hvorfor eleverne skal bruge funktionsundersøgelse i en anden kontekst, end de er vant til. Det forventes at de selvstændigt bør indse, at de skal benytte funktionsundersøgelse for at bestemme, om polynomiet har 3 reelle rødder. Følgelig lægges ansvaret umiddelbart hos eleverne. Igen oplever et par af eleverne problemer med opgaven, og læreren må derfor bidrage til opgaveløsningen, hvilket betyder, at ansvaret flyttes til læreren; som eksempel herpå se samtalen 487-492 (afsnit 7.11).

Med hensyn til løsning af opgave B.22 placeres ansvaret atter hos eleverne, hvilket fungerer fint. Her registreres en af de få handlingssituationer, hvor ansvaret ligger hos eleverne under hele situationen. Faktisk bliver ansvaret jo placeret hos eleverne i alle de adidaktiske situationer, men det kan generelt konstateres, at det er svært for læreren ikke at måtte tage en del af ansvaret igen, da eleverne hyppigt kommer i vanskeligheder under handlingssituationerne. Endnu et eksempel herpå findes i forbindelse med opgave B.25 (cf. samtalen 676-678, appendiks D).

7.10 Forstærkning af institutionaliseret viden for at undgå fejl

Hvis eleverne har problemer med at genkalde tidligere institutionaliseret viden, må den i visse tilfælde geninstitutionaliseres for at undgå fremtidige fejl (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 128). Vi kan betragte følgende eksempler på dette.

7.10.1 Ophævelse af potens

Det første eksempel ses under tavlegennemgangen af opgave B.3:

33. Mikael: "Ja, det er bare den samme som før [$x + 2 = i$]. [...]."
34. O: "Hvad er x?"
35. Mikael: "Nåh, ja men så - /.../ så skal jeg regne videre og alt muligt /.../."
36. O: "Prøv at regne den [$(x + 2)^2 = -1$] fra starten af, så vi får mellemregningerne med. ... Hvordan er det, når man tager kvadratroden på begge sider?"
37. L: "Ok, når du hæver en potens, så plejer du altid at gøre noget - når du tager kvadratroden på begge sider ik'? Hvis du regner tilbage, så kan der også stå...?"
38. Mikael: "Nåh ja, så er det selvfølgelig $\pm$."
39. L: "Ja."

Her appellerer læreren til elevens rutinehukommelse, i dette tilfælde korresponderende til den viden, altså at man skal huske $\pm$ ved ophævelse af en andenpotens. Dette gør læreren for fremover at undgå fejl. Lærerens epistemologiske ansvar er er grunden til, at læreren gerne vil undgå fejl. Lærerens målsætning er, at eleverne skal nå frem til et korrekt resultat, og i løbet af processen at fange eventuelle fejl, der hvor de opstår, i stedet for at lade eleven fortsætte ud ad en forkert tangent. Generelt vil det dog ikke være en fordel helt at undgå at lade fejl komme frem, idet fejl kan medføre vidensopnåelse. Dette ses i udtalt grad, når miljøet giver eleven mulighed for selv at opdage sin fejl og efterfølgende finde en vinderstrategi.

7.10.2 Faktorisering

Under løsning af opgave B.5 opstår der hos en elev tvivl om, hvorfor man altid kan skrive et tredjegradspolynomium som et produkt af tre faktorer. Læreren beslutter derfor at forny tidligere institutionaliseret viden om faktorisering af et andengradspolynomium og tredjegradspolynomium for at undgå fremtidig usikkerhed:

106. L: "Altså du ved - har I ikke lært at, jo det tror jeg - at et andengradspolynomium hvis det har to rødder, så kan det skrives som x minus den ene rod gange x minus den anden rod, i hvert fald hvis der står 1 her. Hvis der står et eller andet foran [*foran højestegradsleddet*], så skal man lige gange med det også - kan I huske det - det må I næsten have set før. Og så viste Maria lige, at man kunne skrive det [*tredjegradspolynomiet*] som denne her [$x - 2$] gange et andengradspolynomium. [...] Og det her [$x^2 + 4x + 5$] er et andengradspolynomium, som også kan skrives i to faktorer."

I hjemmeopgave B.8 skal eleverne løse en tilsvarende opgave, idet de bedes omskrive $f(x) = -3x^2+24x-195$ og $g(x) = x^3+x^2+x+1$ ved hjælp af deres rødder, hvilket forudsætter en fuldstændig faktorisering af polynomierne. I begyndelsen af modul 2 spørger læreren, om der har været problemer med hjemmeopgaverne. Den samme elev, der tidligere havde problemer med faktoriseringen af $g(x)$ i opgave B.5, tilkendegiver, at han igen har haft problemer. En anden elev kommer til tavlen og faktoriserer $f(x)$. Herved fællesgøres denne elevs personlige viden. Efter gennemgangen forsøger læreren at opklare hvilke problemer, eleven fra før havde, for at undersøge om de stadig er problemer (cf. samtalen 194-213, afsnit 7.4.1). Det fremgår, at eleven tydeligvis ikke har forstået, hvordan et polynomium faktoriseres, da det blev diskuteret i forbindelse med opgave B.5. Derfor gentages institutionaliseringssituationen omkring faktorisering af polynomier af læreren.

Da det i samtalen 305-308 (cf. afsnit 7.4) viser sig, at en elev har en misforståelse omkring faktorisering geninstitutionaliserer læreren for tredje gang dette, for at undgå fremtidige fejl. Denne gang i konteksten af opgave B.13.

7.11 Uheldige effekter ved kontrakten

Under forløbet observerede vi forskellige effekter ved den didaktiske kontrakt. Specielt er kontraktens påvirkning af eleverne og Topaze-effekten gennemgående.

7.11.1 Topaze-effekt

Topaze-effekten er en almindeligt forekommende effekt af den didaktiske kontrakt, og den optræder flere gange i vores undervisningsforløb.

I samtalen 239-252 (cf. afsnit 7.9) er vi af den overbevisning, at det ikke i sig selv er faktoriseringen, der er elevens problem, men snarere det at finde rødder til et tredjegradspolynomium. Det er sandsynligt, at denne proces også tidligere har været elevens problem (cf. afsnit 7.10). Læreren har gennem hele forløbet ikke fået en reel forståelse af elevens egentlige problem, hvilket danner grundlaget for en Topaze-effekt. Det er dog ikke den tilsigtede viden, der dikteres, men en fremgangsmåde, som læreren antager, er kendt for eleven. Læreren tror her, at hvis ordene "polynomiers division" nævnes vil elevens rutinehukommelse fremkalde den for situationen relevante viden.

Opgave B.19 skaber en del problemer for flere af eleverne:

487. L: "Ja, hvordan vil du afgøre, om den der har tre reelle rødder? ... Hvordan kan du se - hvis du nu har en tegning af den, hvordan ville du så se om den har tre reelle rødder? Du kan jo prøve at tegne den på lommeregneren [...]."

488. Kim: "Det ved jeg ikke, hvad mener du?"

489. L: "Du ved, når du finder nulpunkter, hvis du finder løsninger til en ligning. Løsning det er, når det giver nul ik', hvis du indsætter, så giver det nul.

Hvis du finder en rod - hvis x er en rod, hvad skal $f(x)$ så give?"

490. Kim: "Den skal så give 0."

491. L: "Ja, hvordan kan du så se, om den har 3 reelle rødder? ... Det er når den skærer x-aksen, kan du så se hvor mange?"

492. Kim: "3."

Eleven har så markante vanskeligheder ved at redegøre for antallet af reelle rødder til $f(x)$, at situationen fremkalder en Topaze-effekt i 491. Generelt udviser eleverne forståelsesproblemer i relation til sætningen, hvilket formentlig skyldes, at der er adskillige betingelser, der skal være opfyldt for at sætningen kan anvendes. Eleverne er ikke vant til lange sætninger, hvor det er essentielt at kontrollere, hvorvidt forskellige betingelser er opfyldt. Derfor tror de eksempelvis, at sætningen udtrykker, at hvis $p = 5$, da har $f(x)$ 3 reelle rødder. Dette illustreres endnu mere tydeligt i modul 3, hvor der gennemgås en hjemmeopgave, der er tilsvarende (cf. samtalen 537-551, appendiks D).

7.11.2 Kontraktens påvirkning af eleverne

Generelt var eleverne under hele forløbet meget optagede af at overholde deres del af den didaktiske kontrakt, hvilket kommer til udtryk i deres tydelige forsøg på at afkode, hvilke metoder læreren forventede, de anvendte (cf. afsnit 5.4). Nedenstående omhandler sidste del af opgave B.3 og repræsenterer en sådan effekt.

60. Maria: "Jeg laver den her [$x^2+2x+17$] om til formlen, der hedder $(x+p)^2+q$, og den kan vi lave om, så den hedder $(x+1)^2+16=0$ ik'? Så dvs., at hvis jeg så tager 16 og sætter over på den anden side og tager kvadratroden, så står der, at $x+1=\pm\sqrt{-16}$. Og $\sqrt{-16}$ det er det samme som $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}$, så den her kan vi skrive om igen, så den hedder $x+1=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}$, $\sqrt{-1}$ er defineret til i, $\sqrt{16}$ er 4. Så står der $4i$, og så står der $\pm$ ik' foran kvadratroden, og så er $x = 4i-1$ eller $-4i-1$."

61. L: "Ja. ... Så igen så har I faktisk to løsninger til en ligning, hvor diskriminanten er mindre end 0."

De øvrige elever benytter ligeledes metoden med kvadratets fuldendelse, der blev introduceret kort forinden i begyndelsen af modul 1. Dette gør de på trods af, at deres opmærksom henledes på, at den kendte diskriminant-formel tillige kan anvendes. Læreren handler således på det matematiske domæne, idet der foreslås en anden metode (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 126). Eleverne er optaget af at overholde deres del af den didaktiske kontrakt, hvorfor de vælger at benytte den nye metode. De overtager derfor ikke opgaven som deres eget problem, men forsøger udelukkende at identificere ligheder mellem den første og anden del af opgaven. At eleverne ikke benytter diskriminant-formlen, er dog i dette tilfælde uproblematisk og udgør blot en interessant effekt af kontrakten. Vi havde forestillet os, at eleverne ville bruge den nye viden om komplekse tal i relation til den velkendte diskriminant-formel. Generelt er det problematisk, når eleverne bliver så fokuserede på en ny metode, at de ser bort fra en gammel. Det kan således ofte være nødvendigt at huske på begge metoder (dette kan vi se et eksempel på senere i dette afsnit i forbindelse med irreducibilitet).

I vores undervisningsforløb har en række af opgaverne til formål, at eleverne skal kunne anvende bestemte metoder, som det f.eks. ses i opgave B.16. Forventningen er her, at eleverne opnår viden om Eisensteins irreducibilitetskriterium som en metode, der i visse tilfælde kan afgøre om et polynomium er irreducibelt. En sådan opgave er ikke et reelt matematisk problem, men blot en måde, hvorpå eleverne kan erhverve sig et redskab (Sierpinska, 1999, lecture 7). I opgaven vil eleverne ikke forsøge at løse et matematisk problem, men snarere ud fra den didaktiske kontrakt forsøge at klarlægge lærerens intentioner med opgaven. Her formoder vi, at eleverne straks vil forsøge sig med Eisensteins irreducibilitetkriterium, da det er blevet indført, umiddelbart inden opgaven devolueres.

I samtalen 194-213 (cf. afsnit 7.10), har en elev for anden gang problemer med faktorisering af tredjegradspolynomier. I situationen vælger læreren at repetere institutionaliseringen vedrørende faktorisering. Vi er dog usikre på, hvorvidt eleven rent faktisk er i stand til at faktorisere polynomier, på trods af han giver udtryk herfor. Det er plausibelt, at han blot søger at overholde sin del af den didaktiske kontrakt, ved at bekræfte over for læreren, at han kan løse opgaven. Det er sandsynligt, at eleven, efter en længere gennemgang af opgave og teori, føler, at han bør have opnået den tilsigtede viden. Herudover søger læreren også at opfylde sin del af kontrakten ved at sørge for at eleven har tilstrækkelige kompetencer til at kunne faktorisere. Læreren accepterer derfor villigt ethvert tegn på, at eleven har opnået den tilsigtede viden, hvorved undervisningen kan fortsætte (Blomhøj, 1995, s. 18). For at undgå disse problematiske effekter ved den didaktiske kontrakt kunne læreren i mere udpræget grad have fokuseret på elevens problemer. Dette kunne eksempelvis gøres på en sådan måde, at den pågældende elev får mulighed for at formulere sine problemer og i højere grad inddrages i opgaveløsningen.

I forbindelse med løsning af opgave B.13 foretager en af eleverne en fuldstændig korrekt faktorisering af $g(x)$. Efterfølgende går han i gang med at gange parenteserne ud, under antagelse af, at det resulterer i en ny mulighed for faktorisering af polynomiet (cf. samtalen 310-324, appendik D). Denne misforståelse indtræffer muligvis, fordi eleven i den tidligere opgave B.11 skulle bestemme alle mulige faktoriseringer af et tredjegradspolynomium ved at først at faktorisere til bunds i førstegradsfaktorer for dernæst at gange faktorerne parvist sammen. Eleven forsøger antageligt i denne situation at kopiere den tidligere opgave frem for at benytte sin personlige viden. Endnu en gang er eleven optaget af at opfylde sin del af den didaktiske kontrakt på meso-niveauet. Følgelig bliver det mere essentielt for eleven at nå til det af læreren ønskede resultat, end at være i opgaveløsningsprocessen, hvor viden tilegnes.

Der opstår desuden en anden misforståelse i relation til løsning af opgave B.13. Når eleverne ser et andengradspolynomium, vil de initielt omskrive det til formen $(x + p)^2 + q$, som de så i begyndelsen af modul 1; dette forekommer, selv når opgaven lyder på faktorisering. Den didaktiske kontrakt påvirker eleverne i en sådan udstrækning, at når læreren først en gang har vist dem, at man kan omskrive alle andengradspolynomier til formen $(x+p)^2+q$, vil de fremover altid vælge at begynde med denne metode, når de ser et andengradspolynomium. Man kan anskue dette fænomen som en variant af "kaptajnens alder" (cf. Winsløw, 2006a, s. 147), der er et klassisk eksempel på, at eleverne ikke reflekterer over opgaven, men blot per automatik benytter en velkendt metode. Endvidere kommer det for eleverne til at handle om at vise læreren, hvad de har lært, fremfor at gribe opgaven an som en matematiker.

I begyndelsen af modul 3 regnes hjemmeopgave B.21 på tavlen. Vi ser i den forbindelse endnu et eksempel på, at den didaktiske kontrakt fastlåser en elev:

514. Peter: "$x^4 - 4$ og jeg kunne ikke finde et primtal, eller det primtal der går op i 4 er 2, og 2^2 går også op i 4, så irreducibilitetskriteriet er ikke opfyldt, så jeg kan ikke bestemme, om det er irreducibelt."

515. L: "Så du synes ikke, du kan bestemme det?"

516. Peter: "Var det ikke det, I nævnte sidst, at hvis det ikke var opfyldt, så kunne vi ikke sige, om det var irreducibelt?"

517. L: "I hvert fald ikke ved hjælp af den [Eisensteins irreducibilitetskriterium] - det har du ret I. [...]."

Her er eleven så overbevist om, at det er hensigtsmæssigt at benytte Eisensteins irreducibilitetskriterium, at han helt udelukker den kendte viden vedrørende definitionen af irreducibilitet. Eleven har i modul 2 lavet en tilsvarende opgave, men er sidenhen blevet præsenteret for Eisensteins irreducibilitetskriterium. Derfor er han bundet af en didaktisk kontrakt, der angiver, at man skal benytte det sidst indførte redskab til løsning af opgaver. Ofte vil man jo introducere en ny metode, fordi den er anvendelig og kan erstatte en tidligere benyttet metode. Vi kan i det ovenstående se, hvordan en nyligt indført metode - i dette tilfælde Eisensteins irreducibilitetskriterium - kan fortrænge selve problemet, der her er at afgøre irreducibilitet. Desuden formoder vi, at eleven har fortolket, polynomiet som irreducibelt på baggrund af lærerens svar, idet han i det følgende leder efter en faktorisering, hvor faktorerne ikke har koefficienter i $\mathbb{Z}$:

517. L: "[...] Men kan du skrive om på det polynomium på en anden måde?"

518. Peter: "Ja, det kan man også godt, skal jeg gøre det?"

519. L: "Ja, det må du gerne."

520. Peter: "Find en rod i det her tilfælde $x^4-4=0$ reducerer vi til $x^2 = \pm 2$, så x - ja, kan man skrive rødderne, ... så kan man skrive det som $(x^2+2)(x^2-2)$,

og den her kan vi også få, så det bliver lig med $(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, så det kan man altså ikke."

521. L: "Kan du huske, hvad definitionen var på reducibilitet og irreducibilitet?"

522. Peter: "Hvis den var reducibel, så kunne den skrives som polynomier med koefficienter i $\mathbb{Z}$, og den der $[(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})]$ har ikke koefficienter i $\mathbb{Z}$."

523. L: "Nej, men hvad med den anden $[(x^2+2)(x^2-2)]$?"

524. Peter: "Den har."

525. L: "Ja, kan du så ikke sige noget om den?"

526. Peter: "Nåh, men så er den reducibel /.../."

Her slår den didaktiske kontrakt påny igennem, idet eleven er klar over, at læreren forsøger at lede ham i en bestemt retning, og derfor forsøger han at tolke det, læreren siger. Faktisk ender denne dialog ud i en Topaze-effekt i 523-525. Eleven har egentlig en udmærket teoretisk forståelse af teorien, men vi formoder, at den didaktiske kontrakt bevirker, at elevens fokus bliver rettet mod læreren i stedet for på selve opgaven (Blomhøj, 1995, s. 18).

I forbindelse med at eleverne i modul 3 skal redegøre for, at S_n er en gruppe, kræves det at kompositionen for S_n bestemmes. Følgelig diskuteres, hvilke muligheder der generelt eksisterer for en komposition i en gruppe. Der opstår i den forbindelse en misforståelse hos en elev, der for det første tror, at der stadig tales om S_n, og for det andet opfatter elementerne i S_n som de naturlige tal, hvorfor gruppebetingelserne skal være opfyldt for $\mathbb{N}$:

624. Peter: "Ja, hvis vi havde minus, kunne man så ikke, hvad hedder det, bruge operationer og så få et tal, der ikke var med i vores grundmængde. Er det ikke alle tallene fra - altså alle naturlige tal, der er med i [*det eleven kalder grundmængden*]?"

Problemet kan være, at eleven har svært ved at skelne mellem de forskellige elementer. Her skal han både se på elementerne, der permuteres, og tillige på permutationer som elementer i S_n. Vi er af den overbevisning, at det kan være vanskeligt for eleverne at betragte permutationer - og funktioner generelt - som isolerede matematiske objekter i sig selv, hvilket kan skyldes, at de er vant til at benytte funktioner som en proces. Det er også plausibelt, at eleverne tidligere har fået indført gruppebegrebet på talmængder, idet en elev beskriver $(G, *)$ som en talmængde med en regneoperation (cf. 603, appendiks D). Dette kan ligeledes have indflydelse på elevens opfattelse af, at de naturlige tal som værende "grundmængden" for S_n. Da vi har valgt at repræsentere en permutation ved notationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

kan selve repræsentationen have betydning for, at eleven opfatter elementerne i S_n som naturlige tal, idet repræsentationen jo netop indeholder de naturlige tal 1,2,3. Måske kunne denne misforståelse være undgået såfremt vi fra begyndelsen havde valgt at repræsentere en permutation af tre elementer ved f.eks.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}.$$

7.12 Reproducerbarhed af forløbet

Under udarbejdelse af analysen har vi gjort os nogle tanker om, hvorvidt vores undervisningsforløb er reproducerbart i den forstand, at man i en anden klasse eller med en anden lærer, ville være i stand til at opnå de samme resultater. Dette vil vi nu se nærmere på.

Den første overvejelse i relation til forløbets reproduktion er, at vores undervisningsforløb specielt er designet til et matematikhold med to-årigt højniveau som beskrevet i afsnit 1.3. Holdet bestod af otte dygtige elever, hvilket i høj grad har påvirket tidsrammerne for situationerne i vores design. Hvis man underviser et hold med 30 elever med større indbyrdes spredning, forestiller vi os, at hver enkelt situation typisk vil tage længere tid, specielt handlingssituationerne. Ydermere var det et vigtigt forhold, at vores elever tidligere havde stiftet bekendskab med gruppebegrebet og som eksempel derpå, set permutationsgruppen S_3. Disse faktorer betyder sammenlagt, at specielt modul 3 ikke direkte vil kunne reproduceres i en vilkårlig 3.g-klasse, der normalt ikke forventes at have arbejdet med grupper. I det tilfælde, at man har mere tid til rådighed, vil det naturligvis være muligt at introducere gruppebegrebet og specielt de små permutationsgrupper, hvorefter forudsætningerne ville svare til dem, vores elever havde.

Læringsprocesserne i de handlingssituationer, hvor problemet er snævert, vil lettere kunne reproduceres, end hvis det er et åbent problem, man arbejder med. Vores forløb indeholder opgaver, der alle er ret snævre, hvorfor de pågældende problemer, som eleverne skal løse, ikke kan gribes an på mange forskellige måder. Derfor er opgaverne i vores forløb velegnede til reproduktion. Endvidere kræver vores opgaver ikke en egentlig devolution fra lærerens side, da de alle kan udleveres, uden yderligere forklaring. Følgelig er lærerens rolle uvæsentlig i forbindelse med devolutionen af opgaverne, og kan derfor ikke påvirke reproduktionen.

Ved hjælp af arbejdsark C.10 kan man i modul 2 konkludere i hvilket omfang, eleverne har opnået den tilsigtede viden vedrørende rødderne til polynomier, faktorisering af polynomier og irreducibilitet. På denne måde kan man i en reproduktion foregribe problemer, der kan opstå i de tilfælde, hvor eleverne ikke har opnået den tilsigtede viden. Den enkelte lærer kan dog være nødtsaget til at improvisere i håndteringen af elevernes problemer, idet det er umuligt at forudse samtlige potentielle problemer, der kan opstå. Disse lærerbeslutninger vil altid påvirke reproduktionen, som beskrevet i afsnit 5.6.

Med henblik på, hvilke elementer i vores undervisningsforløb, der er vigtige for reproduktion af elevernes læringsprocesser, må vi vurdere hvilke dele af forløbet, der er vigtige for at reproduktionen kan finde sted, og hvilke dele, der er variable, i den forstand at de ikke har en afgørende betydning for elevernes læringsprocesser. I vores forløb vil sidstnævnte specielt omfatte de opgaver, der fungerer som træning i at anvende institutionaliseret viden. Disse er opgave B.2, B.13, B.16 og B.19. Disse opgaver bidrager ikke til elevernes vidensproduktion som de øvrige opgaver. Grunden hertil er, at man kan forestille sig, at en elev, der eksempelvis blot har fået præsenteret Eisensteins irreducibilitetskriterium, kan besidde den samme viden som en elev, der både har fået kriteriet præsenteret og prøvet at anvende det på et givet polynomium. Altså er de elementer, der er væsentlige i reproduktion af elevernes læringshistorie de øvrige opgaver samt de tilhørende formaliseringssituationer.

7.13 Variationer af forløbet

Hvis vores undervisningsforløb skulle gentages i en anden klasse, kan visse mulige variationer overvejes. Uden tidspres, kunne man generelt lave flere opgaver, således at handlingssituationerne blev flere og længere, og eleverne derved brugte længere tid på selv at tilegne sig viden. Man kunne i modul 1 med fordel lade eleverne omskrive flere polynomier i opgave B.1, for at eleverne kan opnå en intuitiv forståelse for, at ethvert andengradspolynomium kan omskrives til den foreliggende form.

For at give eleverne en større fortrolighed med komplekse tal kunne man lade eleverne gennemgå flere regneopgaver af samme type som opgave B.2. Herudover kunne eleverne arbejde med at dividere komplekse tal, og i den forbindelse introduceres til kompleks konjugering. Herved ville eleverne opnå en endnu større viden om rødderne til polynomier, idet det ville fremgå, at komplekse rødder kommer i par, og følgelig at et polynomium af ulige grad derfor altid vil have én reel rod.

I vores undervisningsforløb havde eleverne allerede i modul 1 problemer med faktorisering. Det vil derfor, med hensyn til reproduktion, være hensigtsmæssigt at forberede, hvordan lignende problemer skal håndteres. Her vil det mest tilrådelige være, hvis det arrangeres, at eleverne skal komme med en formulering af, hvad det vil sige, at faktorisere et polynomium. Desuden kunne eleverne formulere en metode til at faktorisere i tilfældet, hvor de betragter anden- og tredjegradspolynomier.

I opgave B.13 kunne man have givet eleverne et polynomium, hvor de ikke umiddelbart var i stand til at finde rødderne, og derfor heller ikke ved hjælp af definitionen kunne afgøre, hvorvidt polynomiet var irreducibelt eller reducibelt. Med et sådant polynomium kunne man sikre sig, at eleverne ikke fejlagtigt antager, at de altid let vil kunne finde rødderne. Det ville desuden motivere til Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Hvis man påtænkte at lade eleverne arbejde mere med grupper, kunne det være relevant at betragte generelle grupper og ikke blot permutationsgrupper. Her kunne man lade eleverne redegøre for, om visse mængder med givne kompositioner udgør grupper. Her tænker vi eksempelvis på $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ og $(\mathbb{Q}, \cdot)$, hvor eleverne vil kunne vise, at den første opfylder gruppebetingelserne, at ikke alle elementer i den anden mængde har en invers, og at den sidste igen opfylder gruppebetingelserne. Denne har netop de inverse elementer til forskel fra $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Dette ville også hjælpe på elevernes fortrolighed med gruppebegrebet.

Opgave B.25 ville med fordel kunne udvides således at eleverne kunne opnå en større viden ved hjælp af selve opgaven, end tilfældet var i vores forløb. Dette kunne gøres ved at lade eleverne permutere rødderne i flere udtryk end blot det ene i hver del af opgaven. Herved kunne eleverne få et bedre indblik i, at udtrykkene i 1) altid giver 0 efter permutation, og at de i 2) kun nogle gange giver 0 efter permutation. Desuden kunne man lade eleverne benytte permutationer med tre elementer på givne udtryk i tre rødder, for at de skulle få mulighed for at benytte forskellige permutationer på udtrykkene. Her kunne eleverne efterfølgende se S_3 som eksempel på en Galoisgruppe, og eventuelt også en delmængde af S_3. Det sidstnævte ville hjælpe eleverne til at få en bedre forståelse for Galoisgruppen som en delmængde af S_n, der ikke blot er $\{id\}$ eller S_n, hvilket jo er tilfældet med andengradspolynomier.

8 Afrunding

8.1 Processen

Udarbejdelsen af dette speciale har været en yderst lærerig proces. Vi har fundet det både spændende og udfordrende at arbejde med TDS i praksis. Det har absolut ikke været nogen simpel opgave at designe opgaverne ud fra TDS' konstruktivistiske ideer, hvilket vores undervisningsdesign da også bærer præg af. Vores opnåede erfaringer viser os, at vores curriculum har været for stort i henhold til de tre moduler, vi havde til rådighed.

Såfremt vi havde haft mere tid til rådighed til dette undervisningsforløb eller alternativt, at vores ambition blot havde været at fokusere på enkelte emner fra det anvendte curriculum, ville det potentielt have været lettere at tilrettelægge undervisningssituationerne således, at de konstruktivistiske ideer i højere grad kunne komme til udtryk. Vi har utvivlsomt medtaget for stor en teorimængde, under udvælgelsen af emner til undervisningsforløbet. Vores a posteriori analyse afslører, hvordan vi i et fremtidigt undervisningsforløb i langt højere grad ville kunne lade eleverne validere de fremkomne resultater, i særdeleshed i tilfælde hvor eleverne har problemer og misforståelser. På trods af, at vi har planlagt forløbet ud fra TDS' principper, oplevede vi i de enkelte undervisningssituationer alligevel at være præget af den måde, hvorpå vi selv er blevet undervist. Det fremgår tydeligt, hvorledes vi er vant til, at læreren korrigerer eleverne, når de laver en fejl. Igen skal det understreges, at det er TDS' hensigt, at eleverne skal have plads til at arbejde med miljøet og reflektere over problemer.

Selve afprøvningen af forløbet har ligeledes repræsenteret en stor udfordring. Vi var på forhånd utrolig spændte på, hvorledes forløbet ville udarte sig og gjorde os i særdeleshed tanker om elevernes reaktion; om de ville finde emnet interessant; om de ville have svært ved at løse opgaverne og generelt have vanskeligheder ved at følge med i undervisningen. Vores intension og målsætning var naturligvis at kunne opnå elevernes aktive deltagelse igennem hele forløbet. Det var derfor glædeligt at erfare, at eleverne faktisk var engagerede og nærværende under hele forløbet. Majoriteten af eleverne var endvidere i stand til at deltage i størstedelen af undervisningssituationerne. Da der som tidligere beskrevet ikke er nogen af os, der før har undervist, var vi desuden nysgerrige for at se, hvordan vi ville fungere i lærerrollen. Det viste sig, at være ganske udfordrende at undervise en ikke kendt elevgruppe, specielt når man som underviser stræber efter at gøre tingene optimalt og ønsker, at forløbet skal blive en succes. Hvorvidt det er lykkedes, er for os stadig et åbent spørgsmål.

8.2 Bruners hypotese

I henhold til Bruners hypotese vil vi konkludere, at det faktisk *kan* lade sig gøre at undervise i Galoisteori på gymnasieniveau, hvis man anvender en hensigtsmæssig indgangsvinkel. Det der taler imod hypotesens bekræftelse, er det faktum, at hovedparten af matematikere sandsynligvis ville mene, at vores undervisningsforløb ikke har meget relation til Galoisteori. Vi har skåret teorien så meget ind til benet, som det kunne lade sig gøre, idet vi blot introducerer gruppebegrebet og Galoisgruppen for et polynomium samt en intuitiv gennemgang af, hvorledes Galoisgruppen for polynomiet kan benyttes, hvis man vil udtale sig om rødderne.

Dette speciale har demonstreret, at vores undervisningsforløb kan være velegnet til brug i gymnasiet. Komplekse tal er i forvejen et meget brugt valgfrit emne, så vores forløb kunne eventuelt udbygges på dette område. Irreducibilitet af polynomier ville ligeledes kunne danne grundlag for gymnasieundervisning, idet man eksempelvis kunne introducere flere metoder til at afgøre irreducibilitet. Gruppeteorien kunne ligeledes udvides til at omhandle flere typer grupper end blot permutationsgrupper, som beskrevet i afsnit 7.13.

Med mere tid til rådighed kunne det have været interessant at teste, hvad eleverne faktisk havde fået ud af undervisningsforløbet. Da vi ikke havde udarbejdet en test, som eleverne afslutningsvis skulle igennem, er det vanskeligt for os at vide, hvilken viden eleverne egentlig har opnået om Galoisteori. Specielt var der på holdet 2-3 elever, der var meget passive, hvorfor det er ekstra svært for os at vurdere, om de har opnået nogen form for viden. Alternativt kunne det være interessant at have testet eleverne et stykke tid efter afprøvningen, hvor forløbet var kommet lidt på afstand, for på denne vis at undersøge, hvorvidt eleverne rent faktisk kunne genkalde dele af det, de arbejdede med i løbet af ugen.

A Galoisteori

Målet med det følgende er at give en grundlæggende introduktion til Galoisteori, herunder at se nærmere på hvilke betingelser, der skal være opfyldt, for at et polynomium er opløseligt ved rodtegn. Dvs. vi vil se på, hvad der skal gælde for at rødderne til et polynomium kan fås ved anvendelse af de fire klassiske regneoperationer på kendte størrelser, samt løsninger til ligninger på formen $x^n = a$? Derudover vil vi bevise Galoisteoriens hovedsætning.

A.1 Grundlæggende definitioner og begreber

Vi får brug for noget grundlæggende teori, og begynder med Algebraens Fundamentalsætning og en række definitioner (Jensen, 2001, s. 1.1, 1.3, 2.1; Poulsen & Thomsen, 2001, s. 487; Thorup, 1998, s. 30-31, 89, 226-227, 232).

Sætning A.1 (Algebraens Fundamentalsætning).

Definition A.2. En *gruppe* $(G, \circ)$ er en ikke-tom mængde G med en komposition $\circ$, hvor følgende er opfyldt:
1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ for alle $a, b, c \in G$ (associativitet).
2) Der findes et neutralt element $e \in G$, så $e \circ g = g \circ e = g$ for alle $g \in G$.
3) Til ethvert element $g \in G$ findes et inverst element $g^{-1} \in G$, så $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Definition A.3. En gruppe $(G, \circ)$ er *kommutativ* (eller *abelsk*), hvis $g \circ h = h \circ g$ for alle $g, h \in (G, \circ)$.

Definition A.4. Hvis G og G' er grupper med komposition $\circ$, så er afbildningen $\varphi : G \longrightarrow G'$ en *homomorfi*, hvis der for alle $x, y \in G$ gælder, at $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. En *isomorfi* er en bijektiv homomorfi. De to grupper G og G' er *isomorfe*, $G \simeq G'$, hvis der findes en isomorfi imellem dem.

Definition A.5. *Kernen* for en homomorfi φ er defineret ved $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = e\}$.

Definition A.6. En *ring* $(R, +, \cdot)$ er en ikke-tom mængde R med kompositionerne addition og multiplikation, hvor følgende er opfyldt:
1) $(R, +)$ er en kommutativ gruppe.
2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ for alle $a, b, c \in (R, \cdot)$ (associativitet).
3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + (a \cdot c)$ og $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ for alle $a, b, c \in R$ (distributivitet).

Definition A.7. Hvis $(R, \cdot)$ er kommutativ, er $(R, +, \cdot)$ *kommutativ.*

Definition A.8. Mængden af polynomier med koefficienter i ringen R betegnes $R[X]$.

Definition A.9. Et polynomium $f(x) \in R[X]$ kaldes *normeret*, hvis $f(x) \neq 0$ og den ledende koefficient i $f(x)$ er elementet 1 i R.

Definition A.10. En kommutativ ring R er et *legeme*, hvis der gælder, at ethvert element $a \in R$ forskelligt fra 0 har et inverst element $a^{-1} \in R$ med hensyn til produkt.

Definition A.11. Lad X være en mængde, da er $\sim$ en *ækvivalensrelation* i X, hvis der for alle $x, y, z \in X$ gælder, at

$$x \sim x \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad x \sim y \text{ og } y \sim z \Rightarrow x \sim z.$$

For ethvert element $a \in X$ er *ækvivalensklassen* defineret ved

$$[a] = \{x \in X | x \sim a\}.$$

Det kan vises, at ækvivalensklasserne udgør en klassedeling af X, hvilket vi dog ikke vil gøre her.

Definition A.12. Lad $f(x)$ være et polynomium med koefficienter i en ring R. De *trivielle divisorer* i $f(x)$ er konstanterne $u \in R^*$, dvs. de *invertible konstanter* i R, og polynomier af formen $uf(x)$, $u \in R^*$. Endvidere er $f(x)$ *irreducibelt* inden

for R, hvis følgende er opfyldt:
(1) $f(x)$ er forskelligt fra nul-polynomiet.
(2) $f(x)$ er ikke en invertibel konstant.
(3) $f(x)$ har kun trivielle divisorer.

Definition A.13. Hvis mindst et af punkterne (1)-(3) i definition A.12 ikke er opfyldt er $f(x)$ *reducibelt.*

For at afgøre om et polynomium er irreducibelt er følgende ofte anvendeligt (Jensen, 2001, s. 2.4; Allenby, 2003, s. 46-47).

Sætning A.14 (Eisensteins irreducibilitetskriterium). *Et polynomium af grad n, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, med heltalskoefficienter er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$, hvis man kan finde et primtal p, så p går op i $a_{n-1}, ..., a_0$, men p ikke går op i a_n, og p^2 ikke går op i a_0.*

Bevis:
Vi antager, at $f(x)$ kan skrives som et produkt af to polynomier $g(x)$ og $h(x)$ i $\mathbb{Z}[X]$, der er af lavere grad end $f(x)$ og søger en modstrid. Antag derfor, at der for $r < n$ og $s < n$ gælder

$$f(x) = g(x)h(x) = (b_r x^r + \cdots + b_0)(c_s x^s + \cdots + c_0).$$

Konstantleddet a_0 i $f(x)$ er lig $b_0 c_0$. Da p går op i a_0, men p^2 ikke går op i a_0, kan p ikke gå op i både b_0 og c_0. Antag derfor, at p går op i b_0, og at p ikke går op i c_0.

Vi kan ikke have, at p går op i b_i for alle $i = 0, ..., r$, for så ville p gå op i alle a_i, $i = 0, ..., n$, hvilket er i modstrid med, at p ikke går op i a_n. Lad k være det mindste indeks, for hvilket p ikke går op i b_k. Så vil $0 < k \leq r < n$. Vi har, at $a_k = b_0 c_k + \cdots + b_k c_0$, og at p går op i a_k, da $k < n$. Dvs. at p går op i $b_i c_{k-i}$, $i = 0, ..., k$, men dette er i modstrid med, at p ikke går op i $b_k c_0$, da p ikke går op i b_k og p ikke går op i c_0. Altså kan $f(x)$ ikke skrives som et produkt af to polynomier af lavere grad. Dvs. $f(x)$ er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$.

□

Vi får brug for flere definitioner (Jensen, 2001, s. 2.8-2.9).

Definition A.15. Lad L være et legeme, $K \subseteq L$ være et dellegeme og $\alpha \in L$. Så er *udvidelseslegemet* $K(\alpha)$ det mindste dellegeme af L, der indeholder K og α. Alle elementer i $K(\alpha)$ er på formen

$$\frac{k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \cdots + k_m\alpha^m}{k'_0 + k'_1\alpha + k'_2\alpha^2 + \cdots + k'_m\alpha^m},$$

hvor $k_i, k'_i \in K$, $m \in \mathbb{N}$ og nævneren er forskellig fra 0. Vi får tilsvarende, hvis $\alpha_1, ..., \alpha_s \in L$ så er $K(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ det mindste dellegeme af L indeholdende K og $\alpha_1, ..., \alpha_s$.

Definition A.16. Vi har, at $K(X)$ er legemet af rationale funktioner i én variabel:

$$\frac{k_0 + k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_mx^m}{k'_0 + k'_1x + k'_2x^2 + \cdots + k'_mx^m},$$

hvor $k_i, k'_i \in K$, $m \in \mathbb{N}$ og nævneren er forskellig fra 0. Legemet af rationale funktioner i s variable er tilsvarende $K(X_1, ..., X_s)$.

Definition A.17. Det entydigt bestemte normerede polynomium med koefficienter i legemet K af lavest grad, der har α som rod, kaldes $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$. Det er klart, at $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ er irreducibelt inden for K.

Følgende sætning giver vi uden bevis (Jensen, 2001, s. 2.9; Tignol, 1988, s. 236).

Sætning A.18. *Lad K, L være legemer, hvor $K \subseteq L$. Hvis $\alpha \in L$ er rod i et irreducibelt polynomium $f(x) \in K[X]$ af grad r, så kan ethvert element i $K(\alpha)$ skrives entydigt på formen*

$$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + b_{r-1}\alpha^{r-1},$$

hvor $b_0, b_1, ..., b_{r-1} \in K$.

Vi får en del brug for denne sætning (Edwards, 1984, s. 51-52):

Sætning A.19. *Hvis polynomiet $f(x) \in K[X]$ har α som rod, da vil Irr(α, K) være divisor i $f(x)$.*

Bevis:
Euklids algoritme giver os, at $f(x)$ og $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ altid har en fælles divisor. Denne divisor må have α som rod og dermed have grad større end 0. Dvs. divisoren må være $k{\cdot}\mathrm{Irr}(\alpha, K)$, $k \in K$, da $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ er irreducibelt, og det er dermed klart, at $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ er divisor i $f(x)$.

$\square$

Følgende definition er fra (Jensen, 2001, s. 2.9).

Definition A.20. Vi har fra sætning A.18 at ethvert element i $K(\alpha)$, hvor K er et legeme, kan skrives som en K-linearkombination af $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}$. Dvs. $K(\alpha)$ kan betragtes som et *vektorrum* over K med $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}$ som basis. Så er dimensionen af vektorrummet $[K(\alpha) : K] = n$, hvilket bliver graden af polynomiet $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$.

Vi vil nu give en vigtig sætning (Jensen, 2001, s. 2.14), som vi ikke viser, da det er resultatet og ikke beviset, der er interessant i vores sammenhæng.

Sætning A.21. *Hvis $f(x)$ er et n'tegradspolynomium i $K[X]$, hvor K er et legeme, så findes der et udvidelseslegeme L af K, hvori $f(x)$ spaltes til bunds i førstegradsfaktorer, dvs. $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$, hvor $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ er rødderne i $f(x)$. Altså vil L være på formen $K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Det mindste udvidelseslegeme, der har ovenstående egenskab, kaldes spaltningslegemet for $f(x)$ over K. Spaltningslegemet for $f(x)$ er entydigt bestemt.*

Følgende definitioner er fra (Jensen, 2001, s. 1.3-1.4, 1.24, 1.28).

Definition A.22. En undergruppe H af G er *normal* i G, hvis der gælder, at $ghg^{-1} = h$ for alle $g \in G$ og $h \in H$. Hvis H er normaldeler i G skriver vi $H \lhd G$.

Definition A.23. En *normalrække* i G er en følge af undergrupper

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\},$$

hvor hver undergruppe G_i er normaldeler i G_{i-1}. Faktorgrupperne

$$G_0/G_1, G_1/G_2, ..., G_{s-1}/G_s = G_{s-1}$$

er normalrækkens *faktorer*. Her er hver faktorgruppe

$$G_{i-1}/G_i = \{g_{i-1}g_i | g_{i-1} \in G_{i-1},\ g_i \in G_i\}.$$

Definition A.24. En gruppe G er *opløselig* , hvis der findes en normalrække i G med abelske faktorer.

Vi får brug for endnu en sætning, som vi giver uden bevis (Jensen, 2001, s. 1.4).

Sætning A.25. *Lad φ være en surjektiv homomorfi fra en gruppe G på en gruppe H. Da er $\ker(\varphi) \lhd G$ og $G/\ker(\varphi) \simeq H$.*

A.2 Automorfier og Galoisgrupper

Vi vil nu se nærmere på permutationer, dvs. bijektive afbildninger fra en gruppe G på sig selv, og egenskaber ved permutationsgrupper.

Vi begynder med en række definitioner (Jensen, 2001, s. 1.18, 3.1, 3.6; Thorup, 1998, s. 53).

Definition A.26. Gruppen af alle permutationer af n elementer kaldes den *symmetriske gruppe* S_n. Den har orden $n!$.

Definition A.27. Lad Ω være en vilkårlig ikke-tom mængde og $S(\Omega)$ være mængden af alle bijektive afbildninger af Ω på Ω. Vi har, at $S(\Omega)$ er en gruppe med sammensætning som komposition. Hvis Ω er endelig, f.eks. $\Omega = \{1, ..., n\}$, er $S(\Omega)$ gruppen S_n. Ved en *permutationsgruppe* på Ω forstås en undergruppe af $S(\Omega)$.

Definition A.28. En permutationsgruppe G på Ω er *transitiv*, hvis der til ethvert par $a, b \in \Omega$ gælder, at der findes et $\sigma \in G$ sådan at $\sigma(a) = b$.

Definition A.29. Lad L være et legeme. Vi betragter de permutationer $\sigma \in S_n$, der er isomorfier, dvs. hvor der gælder $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ og $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, $x, y \in L$. Disse permutationer kaldes *automorfier*, og gruppen af automorfierne for L skrives $\mathrm{Aut}(L)$.

Definition A.30. Hvis G er en vilkårlig delmængde af $Aut(L)$, L er et legeme, så er *fixpunktsmængden* defineret ved

$$\mathcal{F}(G) = \{x \in L | \sigma(x) = x \text{ for alle } \sigma \in G\}.$$

Definition A.31. Lad K og L være legemer, hvor $K \subseteq L$. *Galoisgruppen* $\mathrm{Gal}(L/K)$ af L over K er den mængde af automorfier i $\mathrm{Aut}(L)$, der fixer alle elementer i K. Dvs.

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) | \sigma(k) = k \text{ for alle } k \in K\}.$$

Den tilhørende fixpunktsmængde, $\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(L/K))$, vil være mængden af elementer i L, der bliver fixet af alle permutationer i $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Definition A.32. Galoisgruppen for et polynomium $f(x) \in K[X]$ er $\mathrm{Gal}(M/K)$, hvor M er spaltningslegemet for $f(x)$ over K.

Definition A.33. Udvidelsen L/K er *endelig normal*, hvis $[L : K] < \infty$ og $K = \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(L/K))$.

Vi får brug for følgende sætning (Jensen, 2001, s. 3.4).

Sætning A.34. *Enhver mængde af indbyrdes forskellige automorfier $\sigma_1, ..., \sigma_n$ for et legeme L er lineært uafhængige, dvs., hvis $a_1, ..., a_n \in L$ og $a_1\sigma_1(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) = 0$, for alle $x \in L$, så er $a_1 = \cdots = a_n = 0$.*

Bevis:
Beviset føres ved induktion efter n.
Lad $n = 1$ og antag, at $a_1\sigma_1(x) = 0$ for alle $x \in L$. Dvs. specielt for $x = 1$ er $a_1\sigma_1(1) = 0$ og da $\sigma_1(1) = 1$, idet en automorfi fixer det neutrale element, vil $a_1 = 0$.
Vi antager, at sætningen gælder for $n - 1$ og viser, at den gælder for n. Vi antager, at

$$a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) = 0, \quad \text{for alle } x \in L. \tag{A.1}$$

For ethvert $b \in L$ og for alle $x \in L$ er

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\sigma_1(bx) + a_2\sigma_2(bx) + \cdots + a_n\sigma_n(bx) \\ &= a_1\sigma_1(b)\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(b)\sigma_2(x) + \cdots + a_n\sigma_n(b)\sigma_n(x). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Vi multiplicerer (A.1) med $\sigma_1(b)$ og får for alle $x \in L$

$$a_1\sigma_1(b)\sigma_1(x) + a_2\sigma_1(b)\sigma_2(x) + \cdots + a_n\sigma_1(b)\sigma_n(x) = 0. \tag{A.3}$$

Ved at trække (A.3) fra (A.2) fås for alle $x \in L$

$$a_2(\sigma_2(b) - \sigma_1(b))\sigma_2(x) + \cdots + a_n(\sigma_n(b) - \sigma_1(b))\sigma_n(x) = 0. \tag{A.4}$$

Vi kan nu benytte induktionsantagelsen, idet (A.4) har $n-1$ led, og få

$$a_2(\sigma_2(b) - \sigma_1(b)) = \cdots = a_n(\sigma_n(b) - \sigma_1(b)) = 0.$$

Hvis vi vælger $b \in L$ så $\sigma_1(b) \neq \sigma_n(b)$ fås, at $a_n = 0$. Hvis vi indsætter $a_n = 0$ i (A.1) får vi igen ved hjælp af induktionsantagelsen, at $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

□

Vi vil ikke vise den følgende sætning, men vi skal bruge resultatet (Messer, 1994, s. 78):

Sætning A.35 (Fundamentalsætningen om homogene ligningssystemer). *Et homogent ligningsystem bestående af m lineære ligninger med n ubekendte, hvor $n > m$, har mindst en ikke-triviel løsning.*

Vi viser nu endnu to brugbare sætninger og dertil to lemmaer (Jensen, 2001, s. 3.5-3.6).

Sætning A.36. *Lad $\sigma_1, ..., \sigma_n$ være indbyrdes forskellige automorfier for legemet L. Lad K være et legeme, så $K \subseteq \mathcal{F}(\{\sigma_1, ..., \sigma_n\})$. Så er $[L : K] \geq n$.*

Bevis:
Vi antager, at $[L : K] = r < n$ og søger en modstrid. Lad $\omega_1, ..., \omega_r$ være en basis for L betragtet som vektorrum over K og $\sigma_1, ..., \sigma_n$ være de indbyrdes forskellige automorfier i G. Det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1\sigma_1(\omega_1) + \cdots + x_n\sigma_n(\omega_1) &= 0 \\ &\vdots \\ x_1\sigma_1(\omega_r) + \cdots + x_n\sigma_n(\omega_r) &= 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

har, ifølge sætning A.35, en egentlig løsning i L, da $r < n$. Vi kan skrive ethvert element $\beta \in L$ som en K-linearkombination, $\beta = a_1\omega_1 + \cdots + a_r\omega_r$. Ved hjælp af udregning og (A.5) fås, at

$$\begin{aligned} x_1\sigma_1(\beta) + \cdots + x_n\sigma_n(\beta) &= a_1(x_1\sigma_1(\omega_1) + \cdots + x_n\sigma_n(\omega_1)) + \cdots \\ &\quad + a_r(x_1\sigma_1(\omega_r) + \cdots + x_n\sigma_n(\omega_r)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ifølge sætning A.34 er nu $x_1 = \cdots = x_n = 0$, hvilket er i modstrid med, at (A.5) har en egentlig løsning.

□

Lemma A.37. *Lad G være en gruppe af automorfier for legemet L. For ethvert element $x \in L$ er $S(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$ et element i $\mathcal{F}(G)$.*

Bevis:
For ethvert $\tau \in G$ er $\tau(S(x)) = \sum_{\sigma \in G} \tau\sigma(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x) = S(x)$. Dvs. τ fixer $S(x)$, hvorfor $S(x) \in \mathcal{F}(G)$.

□

Lemma A.38. *Lad G være en gruppe af automorfier for legemet L og $S(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$. Der findes et $x \in L$ så $S(x) \neq 0$.*

Bevis:
Antag, at $S(x) = \sum_{\sigma \in G} 1 \cdot \sigma(x) = 0$ for alle $x \in L$. Nu opnås en modstrid ifølge sætning A.34, idet $1 \neq 0$.

□

Sætning A.39. *Lad G være en gruppe af automorfier for legemet L. Da er*

$$[L : \mathcal{F}(G)] = |G|.$$

Bevis:
Vi betragter kun tilfældet, hvor G er en endelig gruppe. Lad derfor $|G| = n$. På grund af sætning A.36 er det nok at vise, at $[L : \mathcal{F}(G)] \leq n$. Vi betragter L som et vektorrum over $\mathcal{F}(G)$. Hvis vi kan vise, at vilkårlige $n+1$ elementer i L er lineært afhængige over $\mathcal{F}(G)$ er vi færdige, idet L's basis således vil indeholde et antal elementer, der er mindre end eller lig n. Lad $\sigma_1, ..., \sigma_n$ være de indbyrdes forskellige automorfier i G og $\omega_1, ..., \omega_{n+1}$ være vilkårlige elementer i L. Det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1\sigma_1^{-1}(\omega_1) + \cdots + x_{n+1}\sigma_1^{-1}(\omega_{n+1}) &= 0 \\ &\vdots \\ x_1\sigma_n^{-1}(\omega_1) + \cdots + x_{n+1}\sigma_n^{-1}(\omega_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \tag{A.6}$$

har, ifølge sætning A.35, en egentlig løsning $(x_1, ..., x_{n+1})$ i L. Vi antager, at $x_1 \neq 0$. Betragt $S(x) = \sum_{\sigma\in G} \sigma(x)$, for alle $x \in L$, der ligger i $\mathcal{F}(G)$ ifølge lemma A.37. Ved at multiplicere x_1 med et passende element $l \in L$ kan vi ved hjælp af lemma A.38 få, at $S(lx_1) \neq 0$. Ved at multiplicere (A.6) med l og anvende automorfierne $\sigma_1, ..., \sigma_n$ på dette fås

$$\begin{aligned} \sigma_1(lx_1\sigma_1^{-1}(\omega_1) + \cdots + lx_{n+1}\sigma_1^{-1}(\omega_{n+1})) &= 0 \\ &\vdots \\ \sigma_n(lx_1\sigma_n^{-1}(\omega_1) + \cdots + lx_{n+1}\sigma_n^{-1}(\omega_{n+1})) &= 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Vi summerer ligningerne i (A.7) og får således

$$S(lx_1)\omega_1 + \cdots + S(lx_{n+1})\omega_{n+1} = 0.$$

Altså er $\omega_1, ..., \omega_{n+1}$ lineært afhængige over $\mathcal{F}(G)$.

$\square$

Vi får nu følgende korollar af sætning A.39 samt definition A.33.

Korollar A.40. *Hvis L/K er en endelig normal legemesudvidelse, så er*

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| = [L : K].$$

Denne sætning kaldes også for Praktisk Lemma, idet den er meget anvendelig (Jensen, 2001, s. 3.2):

Sætning A.41. *Lad L/K være en vilkårlig legemsudvidelse og $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ være et polynomium med koefficienter i K. Hvis $\alpha \in L$ er rod i $f(x)$, så er $\sigma(\alpha)$ også rod i $f(x)$ for enhver automorfi $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$.*

Bevis:
Da α er rod i $f(x)$ er

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n \quad = \quad 0 \tag{A.8}$$

Hvis vi benytter σ på (A.8) fås

$$\sigma(\alpha^n) + \sigma(a_1\alpha^{n-1}) + \cdots + \sigma(a_n) = 0.$$

Da $a_1, ..., a_n \in K$ fixes af σ fås nu

$$(\sigma(\alpha))^n + a_1(\sigma(\alpha))^{n-1} + \cdots + a_n \quad = \quad 0.$$

Altså er det klart, at $\sigma(\alpha)$ er rod i $f(x)$.

$\square$

Vi får brug for følgende vigtige sætning (Jensen, 2001, s. 3.6-3.7).

Sætning A.42. *Hvis L/K er endelig normal, og $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ er et normeret irreducibelt polynomium med koefficienter i K, så gælder, at hvis $f(x)$ har en rod α i L, så ligger alle rødder til $f(x)$ i L. De andre rødder er de forskellige blandt $\{\sigma(\alpha) | \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$.*

Bevis:
Da $f(x)$ er normeret og irreducibelt, er $f(x) = \mathrm{Irr}(\alpha, K)$. Lad

$$\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), ..., \sigma_j(\alpha)$$

være de indbyrdes forskellige elementer i $\{\sigma(\alpha) | \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$. Vi lader nu $p(x) = (x - \sigma_1(\alpha))(x - \sigma_2(\alpha)) \cdots (x - \sigma_j(\alpha))$. Vi vil vise, at $f(x) = p(x)$, idet vi viser, at
(1) $f(x)$ er divisor i $p(x)$ og

(2) $p(x)$ er divisor i $f(x)$.
Ad (1): For enhver automorfi $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ vil mængden $\{\tau\sigma_1(\alpha), ..., \tau\sigma_j(\alpha)\}$ være lig mængden $\{\sigma_1(\alpha), ..., \sigma_j(\alpha)\}$, med passende indexnummerering. Lad $\hat{\tau}$ være en automorfi taget på polynomier med koefficienter i L, således at den fås ved koefficientvis anvendelse af τ. Nu er

$$\hat{\tau}p(x) = (x - \tau\sigma_1(\alpha) \cdots (x - \tau\sigma_j(\alpha)) = p(x).$$

Da dette gælder for alle $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ har $p(x)$ koefficienter i $\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(L/K)) = K$ (da L/K er endelig normal). Da α er rod i $p(x)$ fås ifølge sætning A.19, at $f(x) = \mathrm{Irr}(\alpha, K)$ er divisor i $p(x)$.
Ad (2): Ifølge sætning A.41 fås, at $f(\alpha) = 0 \implies f(\sigma(\alpha)) = 0$ for alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Dvs. alle elementerne $\sigma_1(\alpha), ..., \sigma_j(\alpha)$ er rødder i $f(x)$ og dermed må $p(x) = (x - \sigma_1(\alpha)) \cdots (x - \sigma_j(\alpha))$ være divisor i $f(x)$.

□

Endnu en vigtig sætning er (Jensen, 2001, s. 2.10)

Sætning A.43 (Transitivitetssætningen). *Lad K, L, M være legemer, sådan at $K \subseteq L \subseteq M$, og at $[M : L]$ og $[L : K]$ er endelige. Da gælder*

$$[M : K] = [M : L][L : K].$$

Bevis:
Vi betragter L som vektorrum over K og lader $\alpha_1, ..., \alpha_m$ være en K-basis for L. Endvidere betragter vi M som et vektorrum over L og lader $\beta_1, ..., \beta_n$ være en L-basis for M. Vi viser nu, at elementerne, $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, er en K-basis for M. Til dette skal vi vise
(i): Elementerne $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ er lineært uafhængige over K
(ii): Ethver element i M kan skrives som en K-linearkombination af elementerne $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
Ad (i): Antag

$$\sum_{i,j} k_{i,j}\alpha_i\beta_j \quad = \quad 0, \tag{A.9}$$

hvor $k_{i,j} \in K$. Vi vil nu vise, at elementerne $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, er lineært uafhængige over K, og dvs. vi vil vise, at $k_{i,j} = 0$ for alle i, j. Vi omskriver derfor summen (A.9) til

$$\sum_j(\sum_i k_{i,j}\alpha_1)\beta_j = 0.$$

Her gælder, at den inderste sum er et element i L for alle j. Da elementerne β_j, $1 \leq j \leq n$, er lineært uafhængige over L er

$$\sum_i k_{i,j}\alpha_1 = 0,$$

for ethvert j, $1 \leq j \leq n$. Idet elementerne α_i, $1 \leq i \leq m$, er lineært uafhængige over K fås tilsvarende, at $k_{i,j} = 0$ for alle i, $1 \leq i \leq m$, og alle j, $1 \leq j \leq n$. Dvs. elementerne $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ er lineært uafhængige over K.
Ad (ii): Vi lader $\xi \in M$. Da elementerne β_j, $1 \leq j \leq n$, er en L-basis for M kan ξ skrives

$$\xi = \sum_j l_j\beta_j,$$

hvor $l_j \in L$. Da α_i'erne, $1 \leq i \leq m$, er en K-basis for L kan ethvert l_j tilsvarende skrives

$$l_j = \sum_i k_{i,j}\alpha_i,$$

hvor $k_{i,j} \in K$. Nu fås, at

$$\xi = \sum_{i,j} k_{i,j}\alpha_i\beta_j.$$

Dvs., at ethvert element i M kan skrives som en K-linearkombination af elementerne $\alpha_i\beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Vi har altså, at vektorrumsdimensionen $[M : K] = nm = [M : L][L : K]$.

□

Følgende sætning er fra (Jensen, 2001, s. 3.10).

Sætning A.44. *Lad M være spaltningslegemet over K for et polynomium $f(x)$ af grad n med lutter simple rødder $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Da er* $\mathrm{Gal}(M/K)$ *isomorf med en undergruppe i S_n. Dvs. der gælder, at $[M : K]|n!$ Hvis endvidere $f(x)$ er irreducibelt over K, da er* $\mathrm{Gal}(M/K)$ *isomorf med en transitiv undergruppe i S_n og $n|[M : K]|n!$.*

Bevis:
Vi har, at en automorfi $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ er entydigt bestemt ved værdierne på $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Ifølge sætning A.41 er elementerne $\sigma(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$, rødder i $f(x)$. Heraf fås, at $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \dots & \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$ er en permutation af rødderne. Desuden bliver afbildningen $\varphi : \mathrm{Gal}(M/K) \longrightarrow S_n$, $\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \dots & \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$ en homomorfi, for hvis $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(M/K)$, så vil

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma\tau) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \sigma\tau(\alpha_1) & \dots & \sigma\tau(\alpha_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \dots & \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \tau(\alpha_1) & \dots & \tau(\alpha_n) \end{pmatrix} \\ &= \varphi(\sigma)\varphi(\tau). \end{aligned}$$

Vi har, at φ er injektiv, idet σ er entydigt bestemt ved værdierne på rødderne. Dvs., at $\mathrm{Gal}(M/K)$ er isomorf med en undergruppe i S_n. Dvs. $|\mathrm{Gal}(M/K)| = [M : K] | n!$

Hvis vi antager, at $f(x)$ er normeret og irreducibelt over K, da giver sætning A.42, at for enhver rod $\alpha_i \in M$ er samtlige rødder til $f(x)$ blandt de forskellige i $\{\sigma(\alpha_i) | \sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)\}$. Dvs., at $\mathrm{Gal}(M/K)$ er isomorf med en transitiv undergruppe i S_n. Sætning A.43 giver, at $n | [M : K]$, idet M indeholder $K(\alpha_i), i = 1, ..., n$, og $[K(\alpha_i) : K] = \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(\alpha_i, K)) = n$.

□

A.3 Galoisresolventer

Vi vil nu se nærmere på, hvordan Galois oprindeligt greb teorien an, ved hjælp af resolventer. Dog er det følgende en meget moderne udgave af Galois' arbejde, og vi vil da også vise, at hans definition af Galoisgruppen er ækvivalent med vores moderne, og dermed at alle resultaterne også er brugbare for os i dag.

Vi begynder med at introducere Galoisresolventen (Edwards, 1984, s. 36).

Lemma A.45. *Lad* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *være rødderne til* $f(x) \in K[X]$ *og* M *være spaltningslegemet for* $f(x)$ *over* K*. Der eksisterer en funktion* $V \in M$ *af rødderne* $\alpha_1, ..., \alpha_n$*, som antager* $n!$ *værdier under permutation af de* n *rødder (en sådan funktion* V *kaldes en* Galoisresolvent *for* $f(x)$ *over* K*).*

Bevis:
Vi viser eksistensen af V ved at vise, at $V = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \cdots + A_n\alpha_n$ har den ønskede egenskab. Da vi har, at $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ er forskellige, skal vi finde $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{Z}$, så alle værdierne

$$A_1\sigma(\alpha_1) + A_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + A_n\sigma(\alpha_n) \tag{A.10}$$

er forskellige, når σ gennemløber alle permutationerne i S_n. Betragt

$$\begin{aligned}\prod_{\sigma,\tau\in S_n,\sigma\neq\tau} \quad & (A_1(\sigma(\alpha_1) - \tau(\alpha_1)) + A_2(\sigma(\alpha_2) - \tau(\alpha_2)) + \cdots \\ & +A_n(\sigma(\alpha_n) - \tau(\alpha_n))).\end{aligned} \tag{A.11}$$

Der gælder $\sigma(\alpha_i) - \tau(\alpha_i) \neq 0$ for alle $i = 1, ..., n$ og $\sigma(\alpha_i) - \tau(\alpha_i) \neq \sigma(\alpha_j) - \tau(\alpha_j)$, når $i \neq j$. Nu er hver faktor i (A.11) forskellig fra 0, idet det er klart, at $A_1, ..., A_n$ ikke alle kan være lig 0. Altså er (A.11) forskelligt fra 0. Som et eksempel opskriver vi (A.11)

$$\begin{aligned} & (A_1(\alpha_1 - \alpha_2) + A_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots) \cdot \\ & (A_1(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \cdots) \cdots \\ = \; & (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \cdots - (\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2 \cdots)) \cdot \\ & (\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2 \cdots - (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \cdots)) \cdots \end{aligned} \tag{A.12}$$

Da produktet (A.12) er forskelligt fra 0, er hver faktor forskellig fra 0. Hver faktor er én værdi af (A.10) fratrukket en anden værdi af (A.10). Dvs., når alle faktorer i (A.12) er forskellige fra 0, er alle værdierne af (A.10) forskellige. Altså vil V antage $n!$ forskellige værdier.

□

Vi får brug for følgende sætning, som vi vil give uden bevis (Jensen, 2001, s. 2.5).

Sætning A.46 (Hovedsætningen om symmetriske polynomier). *Ethvert symmetrisk polynomium* $f(x_1, ..., x_n) \in K[X_1, ..., X_n]$, *hvor* K *er et legeme, kan på én og kun én måde skrives som et polynomium, med koefficienter i* K, *i de elementærsymmetriske polynomier i* $x_1, ..., x_n$.

Galoisresolventen har bl.a. denne egenskab (Edwards, 1984, s. 43-45; Radloff, 2002, s. 122):

Sætning A.47. *Lad* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *være rødder til* $f(x) \in K[X]$, M *være spaltningslegemet for* $f(x)$ *over* K *og* V *være en Galoisresolvent for* $f(x)$ *over* K. *Så er* V *et primitivt element for udvidelsen* M/K. *Altså er* $M = K(V)$. *Enhver rod* $\alpha_i \in M$, $i = 1, ..., n$, *til* $f(x)$ *kan altså skrives som en rational funktion af* V, *dvs. på formen*

$$\alpha_i = \frac{k_0 + k_1 V + k_2 V^2 + \cdots}{k'_0 + k'_1 V + k'_2 V^2 + \cdots}, \quad k_i, k'_i \in K. \tag{A.13}$$

Bevis:
Vi har, at $V \in M$, så vi skal vise, at enhver rod α_i i $f(x)$ kan skrives som en funktion af V, altså $\alpha_i = \psi(V)$, for en rational funktion ψ på formen (A.13). Beviset gennemføres for α_1. Vi antager, at $f(x)$ er normeret. Så er

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_1} = x^{n-1} + s_1(\alpha_1)x^{n-2} + \cdots + s_{n-1}(\alpha_1)$$

er polynomium af grad $n-1$, hvor $s_i(\alpha_1), i = 1, .., n-1$, er de elementærsymmetriske polynomier i $\alpha_2, ..., \alpha_n$. Lad $V = \phi(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ være som i beviset for lemma A.45. Betragt produktet

$$\begin{aligned}&(V - \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n))(V - \phi(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, ..., \alpha_n)) \cdot \\ &(V - \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, ..., \alpha_3)) \cdots,\end{aligned} \tag{A.14}$$

hvor vi permuterer $\alpha_2, ..., \alpha_n$ på alle mulige måder og α_1 fixes. Det er klart, at (A.14) er symmetrisk i $\alpha_2, ..., \alpha_n$. Dvs. ifølge sætning A.46, kan (A.14) skrives som et polynomium i $s_1(\alpha_1), ..., s_{n-1}(\alpha_1)$ med koefficienter i K. Lad $a_1, ..., a_n$

være de elementærsymmetriske polynomier i $\alpha_1, ..., \alpha_n$, så gælder, at

$$\begin{aligned} a_1 &= s_1 + \alpha_1 \\ a_2 &= s_2 + \alpha_1 s_1 \\ a_3 &= s_3 + \alpha_1 s_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \alpha_1 s_{n-1} \end{aligned}$$

ved udregning fås

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 - \alpha_1 \\ s_2 &= a_2 - \alpha_1 a_1 + \alpha_1^2 \\ s_3 &= a_3 - \alpha_1 a_2 + \alpha_1^2 a_1 - \alpha_1^3 \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= \text{polynomium i } \alpha_1 \text{ og } a\text{'erne.} \end{aligned}$$

Ved at indsætte disse udtryk for $s_1, ..., s_{n-1}$ i (A.14) fås et polynomium i V og α_1 med koefficienter i K. Kald dette polynomium $F(V, \alpha_1)$. Ved at indsætte x i stedet for α_1 får vi et polynomium $F(V, x)$ med koefficienter i K. Vi har nu, at α_1 er rod i $F(V, x)$, idet den første faktor i (A.14) bliver 0.

Der gælder, at $F(V, \alpha_2), F(V, \alpha_3), ..., F(V, \alpha_n) \neq 0$, idet ϕ antager forskellige værdier for enhver permutation af $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ifølge lemma A.45. Altså er α_1 den eneste fælles rod for $F(V, x)$ og $f(x)$. Dvs., at den største fælles divisor for $F(V, x)$ og $f(x)$ må have formen $k(x - \alpha_1) = kx - k\alpha_1, k \in K(V)$. Nu fås, at $kx - k\alpha_1$ er et polynomium med koefficienter i $K(V)$, hvorfor $\alpha_1 \in K(V)$. Tilsvarende fås, at $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K(V)$. Vi har altså vist, at $M \subseteq K(V)$, og da det er klart, at $K(V) \subseteq M$, er $M = K(V)$.

$\square$

Tilsvarende har vi følgende sætning (Edwards, 1984, s. 104; Radloff, 2002, s. 123).

Sætning A.48. *Lad $\alpha_1, ..., \alpha_n$ være rødderne til $f(x) \in K[X]$ og M være spaltningslegemet for $f(x)$ over K. Betragt Irr(V, K), hvor V er en Galoisresolvent* *for $f(x)$ over K. Lad $V = V_1, V_2, ..., V_m$ være alle rødderne til Irr(V, K). Hvis $\alpha_i = \psi_i(V)$, $i = 1, ..., n$ (sætning A.47), så er $\psi_i(V_2), ..., \psi_i(V_m)$, også rødder til $f(x)$. Altså er $V_2, ..., V_m$ primitive elementer for M/K*

Bevis:

Hvis $\alpha_i = \psi_i(V)$, $i = 1, ..., n$, så er ifølge sætning A.47 V et primitivt element for M/K. Vi kan gennemføre beviset for sætning A.47 med en hvilken som helst rod V_j til Irr(V, K), så vi får, at $V_j, j = 2, ..., m$ ligeledes er et primitivt element for M/K. Hvis f.eks. $V = \varphi(\alpha_1, \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3), ..., \sigma(\alpha_n))$, så vil $V_j = \varphi(\alpha_k, \tau(\alpha_1), ...)$, hvor $\sigma, \tau \in S_{n-1}$ og $\sigma \neq \tau$, hvilke er de andre rødder til Irr(V, K).

□

Vi får nu brug for et lemma (Tignol, 1988, s. 317).

Lemma A.49. *Lad $g(x) \in K(X)$ og betragt* Irr(V, K). *Hvis $g(V) = 0$ så er $g(W) = 0$ for enhver rod W til* Irr(V, K).

Bevis: Lad $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ for $p(x), q(x) \in K[X]$, sådan at $p(V) = 0$ og $q(V) \neq 0$. Sætning A.19 giver nu, at Irr(V, K) er divisor i $p(x)$. Dvs. $p(W) = 0$ for enhver rod W til Irr(V, K). Antag omvendt, at $q(W) = 0$ for en rod W til Irr(V, K). Sætning A.19 giver nu tilsvarende, at Irr(V, K) er divisor i $q(x)$. Dvs. $q(V) = 0$, hvilket er en modstrid. Nu er $q(W) \neq 0$ for enhver rod W til Irr(V, K). Altså er $g(W) = 0$ for enhver rod W til Irr(V, K).

□

Vi kan nu vise følgende sætning (Tignol, 1988, s. 325-326).

Sætning A.50. *Lad $\alpha_1, ..., \alpha_n$ være rødderne til $f(x) \in K[X]$ og M være spaltningslegemet for $f(x)$ over K. Lad V være en Galoisresolvent for $f(x)$ over K, sådan at, for $i = 1, ..., n$, $\alpha_i = \psi_i(V)$, hvor $\psi_i(x) \in K[X]$ (sætning* A.47). *Lad desuden $V = V_1, ..., V_m \in M$ være rødderne til* Irr(V, K). *For $j = 1, ..., m$ er $\psi_1(V_j), ..., \psi_n(V_j)$ parvis forskellige rødder til $f(x)$, dvs.*

$$\{\psi_1(V_j), ..., \psi_n(V_j)\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}.$$

Bevis:
Vi har ifølge sætning A.48, at $\psi_i(V_j)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, er rødder til $f(x)$. Da er $f(\psi_i(V_j)) = 0$, $j = 1, ..., m$. Vi antager nu, at der for nogle $i, k \in \{1, ..., n\}$, $i \neq k$, og nogle $j \in \{1, ..., m\}$ gælder, at $\psi_i(V_j) = \psi_k(V_j)$ og søger en modstrid. Nu er V_j rod i $\psi_i - \psi_k$. Ifølge sætning A.19 vil Irr(V_j, K) =Irr(V, K) være divisor i $\psi_i - \psi_k$. Dvs. alle rødderne $V = V_1, ..., V_m$ til Irr(V, K) er rødder til $\psi_i - \psi_k$. Altså gælder specielt, at $\psi_i(V) = \psi_k(V)$. Dvs. $\alpha_i = \alpha_k$, hvilket er i modstrid med, at $f(x)$ har lutter simple rødder. Altså er $\{\psi_1(V_j), ..., \psi_n(V_j)\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

□

Vi vil nu definere Galoisgruppen, som Galois oprindeligt gjorde det (Tignol, 1988, s. 308-309).

Definition A.51. Lad $\alpha_1, ..., \alpha_n$ være rødderne til $f(x) \in K[X]$ og M være spaltningslegemet for $f(x)$ over K. Lad V være en Galoisresolvent for $f(x)$ over K, sådan at, for $i = 1, ..., n$, $\alpha_i = \psi_i(V)$, hvor $\psi_i(x) \in K(X)$ (sætning A.47). Lad desuden $V = V_1, ..., V_m \in M$ være rødderne til Irr(V, K). Da er $\psi_1(V_j), ..., \psi_n(V_j)$, $j = 1, ..., m$ rødderne $\alpha_1, ..., \alpha_n$ til $f(x)$ i en passende rækkefølge (sætning A.50). For $j = 1, ..., m$ og $i = 1, ..., n$ er afbildningerne

$$\sigma_j : \alpha_i \mapsto \psi_i(V_j)$$

permutationer af rødderne $\alpha_1, ..., \alpha_n$ til $f(x)$. Mængden $\{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$ er *Galoisgruppen* for $f(x)$ over K og betegnes Gal(f/K). Permutationerne i Gal(f/K) er altså følgende

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}\psi_1(V_1) & \psi_2(V_1) & \cdots & \psi_n(V_1)\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\psi_1(V_2) & \psi_2(V_2) & \cdots & \psi_n(V_2)\end{pmatrix} \\
\vdots \\
\begin{pmatrix}\psi_1(V_m) & \psi_2(V_m) & \cdots & \psi_n(V_m)\end{pmatrix}
\end{array}$$

Det er klart, at $|\text{Gal}(f/K)|$ =grad(Irr(V, K)). Desuden kan man vise, at Gal(f/K) ikke afhænger af valget af Galoisresolvent V (Tignol, 1988, s. 330), hvilket vi ikke vil gøre her.

Vi viser nu en vigtig egenskab ved Galoisgruppen (Tignol, 1988, s. 327-328).

Sætning A.52. *Lad* $g(x_1, ..., x_n) \in K(X_1, ..., X_n)$ *og lad* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *være rødderne til et polynomium* $f(x) \in K[X]$*. For et* $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$ *er* $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) \in K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *veldefineret, når* $g(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *er veldefineret. Endvidere gælder for alle* $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$*, at*

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K \Longleftrightarrow g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = g(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Bevis:
Lad $g(x_1, ..., x_n) = \frac{p(x_1,...,x_n)}{q(x_1,...,x_n)}$, hvor $p(x_1, ..., x_n), q(x_1, ..., x_n) \in K[X_1, ..., X_n]$. Vi viser først, at hvis $q(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$, så er $q(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) \neq 0$ for ethvert $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$. Hvis vi erstatter $\alpha_1, ...\alpha_n$ med deres rationale udtryk i en Galoisresolvent V for $f(x)$ (sætning A.47), fås

$$q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = q(\psi_1(V), ..., \psi_n(V)) = h(V),$$

for et passende $h(x) \in K(X)$. Lad $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$ og lad V' være en passende rod til $\mathrm{Irr}(V, K)$, sådan at

$$q(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = q(\psi_1(V'), ..., \psi_n(V')) = h(V').$$

Antag nu, at $q(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = 0$. Så er V' en rod til $h(x)$ og ifølge lemma A.49 fås nu, at $h(V) = 0$. Dvs. $q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$. Derfor gælder omvendt, at hvis $q(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$, så er $q(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) \neq 0$ for ethvert $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$. Dette viser, at $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n))$ veldefineret, når $g(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ er veldefineret.

I resten af beviset erstatter vi i $g(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ rødderne $\alpha_1, ..., \alpha_n$ med deres rationale udtryk i V. Vi får så

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = g(\psi_1(V), ..., \psi_n(V)) = d(V),$$

hvor $d(x) = g(\psi_1(x), ..., \psi_n(x)) \in K(X)$.

"$\Longrightarrow$": Antag

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K.$$

Så vil

$$d(x) - g(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K(X) \tag{A.15}$$

og idet V er rod i (A.15) er også de andre rødder til $\mathrm{Irr}(V, K)$, $V_2, ..., V_m$, rødder i (A.15) ifølge lemma A.49. Derfor må for $j = 1, ..., m$ gælde

$$d(V_j) = g(\psi_1(V_j), ..., \psi_n(V_j)) = g(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Hvis vi benytter definitionen af $\sigma_j \in \mathrm{Gal}(f/K)$ fås for $j = 1, ..., m$, at

$$g(\sigma_j(\alpha_1), ..., \sigma_j(\alpha_n)) = g(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

"$\Longleftarrow$": Antag omvendt for $j = 1, ..., m$, at

$$g(\sigma_j(\alpha_1), ..., \sigma_j(\alpha_n)) = g(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Så er $g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = d(V_j)$ for $j = 1, ..., m$, og dvs.

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \frac{1}{m}(d(V_1) + \cdots + d(V_m)). \tag{A.16}$$

Da $d(x_1) + \cdots + d(x_m)$ er symmetrisk i $x_1, ..., x_m$ kan vi benytte sætning A.46, der giver, at $d(x_1) + \cdots + d(x_m)$ kan udtrykkes som en rational funktion i de elementær-symmetriske polynomier i $x_1, ..., x_m$. Dvs. at højresiden i (A.16) kan udtrykkes som en rational funktion i de elementær-symmetriske polynomier i $V_1, ..., V_m$, der jo er koefficienterne til $\mathrm{Irr}(V, K)$. Altså $\frac{1}{m}(d(V_1)+\cdots+d(V_m)) \in K$, hvorfor

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K.$$

$\square$

Nu kan vi vise følgende sætning (Tignol, 1988, s. 329-330).

Sætning A.53. *De to definitioner* A.31 *og* A.51 *af Galoisgruppen for polynomiet* $f(x)$ *er ækvivalente.*

Bevis:
Vi viser først, at hvis $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$, hvor M er spaltningslegemet for $f(x)$ over K, så vil $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$. Lad $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ og α være en rod til $f(x)$. Sætning A.41 giver, at også $\sigma(\alpha)$ er en rod til $f(x)$. Endvidere giver sætning A.42, at alle rødderne til $f(x)$ er blandt $\{\sigma(\alpha) | \sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)\}$. Altså $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$.

Vi viser nu, at enhver permutation i Gal(f/K) kan opfattes som en automorfi for $M = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, hvor $\alpha_1, ..., \alpha_n$ er rødderne til $f(x)$, der fixer elementerne i K, idet vi for alle $\sigma \in$ Gal(f/K) og $g(x_1, ..., x_n) \in K[X_1, .., X_n]$ sætter

$$\sigma g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)). \tag{A.17}$$

Først viser vi, at $\sigma g(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ er veldefineret ved (A.17) ved at vise, at den ikke afhænger af valget af $g \in K[X_1, ..., X_n]$, men kun af $g(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Derfor antager vi nu, at der for $g, h \in K[X_1, ..., X_n]$ gælder

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = h(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Så vil

$$(g - h)(\alpha_1, .., \alpha_n) = 0 \in K.$$

Ifølge sætning A.52 gælder nu, at for $\sigma \in$ Gal(f/K) vil

$$(g - h)(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = (g - h)(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0.$$

Dvs. for alle $\sigma \in$ Gal(f/K) er $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = h(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n))$. Altså kan vi se, at $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n))$ kun afhænger af $g(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ og ikke af valget af den rationale funktion $g(x_1, ..., x_n)$.

Da $\sigma \in$ Gal(f/K) klart er bijektiv på $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ følger det at σ er en automorfi, idet der for alle $g(x_1, ..., x_n)$, $h(x_1, ..., x_n) \in K(X_1, ..., X_n)$ gælder

$$g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) + h(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = (g + h)(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n))$$

og

$$g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n))h(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = (gh)(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)).$$

□

Idet sætning A.53 giver, at Gal(f/K) er ækvivalent med Gal(M/K), når M er spaltningslegemet for $f(x)$ over K, fås en anden udgave af sætning A.52.

Sætning A.54. *Lad M være spaltningslegemet for $f(x) \in K[X]$. Da gælder, at $\mathcal{F}(\text{Gal}(M/K)) = K$.*

A.4 Opløselighed ved rodtegn

Vi vil nu se nærmere på, hvornår et polynomium er opløseligt ved rodtegn. Her er det vigtige resultat sætning A.68, der siger, at et polynomium er opløseligt ved rodtegn netop når polynomiets Galoisgruppe er opløselig.

Hvis vi kan finde en løsningsformel for en rod α i et polynomium, så vil der i denne formel indgå en j'te rod $\sqrt[j]{}$, idet løsningsformlen ellers ville være rational i polynomiets koefficienter og dermed kun antage én værdi. Hvis j ikke er et primtal, kan vi primfaktorisere og få rodudtrykket til kun at bestå af primtalsrødder $\sqrt[p_i]{\sqrt[p_{i-1}]{\ddots \sqrt[p_1]{}}}$.

Når vi har et grundlegeme K, er det klart, at vi bliver inden for K, når vi benytter de fire klassiske regneoperationer på elementer i K. Men idet vi tager en p_1'te rod af et element i K $\sqrt[p_1]{k_1}$, vil denne ikke nødvendigvis ligge i K. Hvis $\sqrt[p_1]{k_1} \notin K$, er vi altså nødt til at udvide legemet K med den p_1'te rod. Så fås et udvidelseslegeme $K(\sqrt[p_1]{k_1}) = K_1$, hvor alle elementer kan udtrykkes rationalt ved $\sqrt[p_1]{k_1}$ og størrelser i K. Vi bemærker, at K_1 fås, hvis $x^{p_1} - k_1$ er irreducibelt over K. Hvis løsningsformlen kræver endnu en rod, f.eks. $\sqrt[p_2]{k_2}$, som ikke ligger i K_1, må vi udvide K_1 med $\sqrt[p_2]{k_2}$ og får $K_1(\sqrt[p_2]{k_2}) = K_2$. Vi kan fortsætte på denne måde, indtil vi får et legeme K_t, der indeholder alle de størrelser, der kræves til at finde rødderne i polynomiet.

Det ovenstående beskriver en radikaludvidelse (Edwards, 1984, s. 57-59). Vi vil nu give en mere formel definition af radikaludvidelser (Jensen, 2001, s. 5.5).

Definition A.55. En udvidelse L/K er en *radikaludvidelse*, hvis man kan indskyde mellemlegemer

$$K = K_0, K_1, K_2, ..., K_t = L,$$

sådan at

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0(\alpha_1), \text{ hvor } \alpha_1^{n_1} \in K_0 \text{ for et passende } n_1 \in \mathbb{N} \\
K_2 &= K_1(\alpha_2), \text{ hvor } \alpha_2^{n_2} \in K_1 \text{ for et passende } n_2 \in \mathbb{N} \\
&\vdots \\
K_t &= K_{t-1}(\alpha_t), \text{ hvor } \alpha_t^{n_t} \in K_{t-1} \text{ for et passende } n_t \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Vi har altså, at hvert legeme K_i fås ved at udvide med en rod $\alpha_i = \sqrt[n_i]{a_i}$, hvor $a_i = \alpha_i^{n_i} \in K_{i-1}$. Altså er α_i rod i et egentligt polynomium med koefficienter i K_{i-1}. Det kan antages, at K_i indeholder de n_i'te enhedsrødder, idet K_i indeholder løsningerne til $x^{n_i} = a_i$. Vi får dermed, at et tal i en radikaludvidelse kan fås ved et endeligt antal gange at udføre de fire klassiske regneoperationer på tal i grundlegemet, og løsninger til ligninger af formen $x^n = a$. Man kan endvidere på grund af det ovenstående forlænge enhver radikaludvidelse således, at der udvides med primtalsrødder, idet n'erne primfaktoriseres.

Vi kan nu give den egentlige definition af opløselighed ved rodtegn (Jensen, 2001, s. 5.7).

Definition A.56. Et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i K er *opløseligt ved rodtegn*, hvis der findes en radikaludvidelse af K, hvori $f(x)$ har en rod.

Man kan vise, at spaltningslegemet for et polynomium med lutter simple rødder er en endelig normal udvidelse, hvilket vi ikke vil vise her (Jensen, 2001, s. 3.3). Der gælder, at når $f(x)$ har én rod i en endelig normal radikaludvidelse, har $f(x)$ alle sine rødder i radikaludvidelsen ifølge sætning A.42. Når et irreducibelt polynomium $f(x)$, dvs. $f(x)$ har lutter simple rødder, er opløseligt ved rodtegn, findes der altså en række af legemer

$$K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_t,$$

hvor K_t indeholder alle rødderne til $f(x)$.

Vi får nu brug for at se på sideklasser, da vi flere gange skal bruge Lagranges Indekssætning (Thorup, 1998, s. 79-80; Tignol, 1988, s. 347-348).

Definition A.57. Lad H være en undergruppe af en gruppe G. For ethvert element $\sigma \in G$ er *sideklassen* med hensyn til H, defineret ved delmængden

$$\sigma H = \{\sigma\tau | \tau \in H\}.$$

Antallet af sideklasser kaldes H's *indeks* i G, og det betegnes $|G : H|$.

Sætning A.58 (Lagranges indekssætning). *For sideklasser i en gruppe G med hensyn til undergruppen H gælder, at de udgør en klassedeling af G. Desuden gælder for $\sigma, \tau \in G$, at*

$$\sigma H = \tau H \iff \sigma^{-1}\tau \in H.$$

Endelig har hver sideklasse det samme elementantal som H, og der gælder, at

$$|G| = |G : H| \cdot |H|.$$

Bevis:
Vi viser først, at sideklasserne udgør en klassedeling af G, dvs. at sideklasserne ikke er tomme, og at hvert element i G ligger i præsis én sideklasse. Det er klart, at sideklasserne ikke er tomme, idet der for ethvert element $g \in G$ gælder, at $g = ge \in gH$. Vi antager nu, at $g \in g'H$. Dvs. at $g = g'h'$, for et passende $h' \in H$. Da H er en undergruppe, gælder for ethvert element $h \in H$, at $h'h \in H$ og $h'^{-1}h \in H$, og dermed, at

$$gh = g'h'h \in g'H \quad \text{og} \quad g'h = gh'^{-1}h \in gH.$$

Dvs. at $g'H = gH$. Altså ligger g i præsis én sideklasse gH.

Vi viser nu, at $\sigma H = \tau H \iff \sigma^{-1}\tau \in H$.
"$\Longrightarrow$": Hvis $\sigma H = \tau H$, så vil $\tau \cdot 1 \in \sigma H$, dvs. $\tau = \sigma h$, for et $h \in H$. Hermed er $\sigma^{-1}\tau = h \in H$.
"$\Longleftarrow$": Hvis $\sigma^{-1}\tau \in H$, så viser relationen $\sigma h = \tau((\sigma^{-1}\tau)^{-1}h)$, $h \in H$, at $\sigma H \subseteq \tau H$. Endvidere viser relationen $\tau h = \sigma((\sigma^{-1}\tau)h)$, $h \in H$, at $\tau H \subseteq \sigma H$. Dvs. $\sigma H = \tau H$.

Vi vil nu vise, at hver sideklasse har samme elementantal som H. Sideklasserne har formen gH, for et $g \in G$. For $h \in H$ definerer $h \mapsto gh$ en klart surjektiv afbildning $H \to gH$. Endvidere er afbildningen injektiv, for hvis $gh_1 = gh_2$, $h_1, h_2 \in H$, så fås ved multiplikation med g^{-1} fra venstre, at $h_1 = h_2$. Dvs. afbildningen $H \to gH$ er bijektiv, hvorfor $|H| = |gH|$.

Vi viser endeligt, at $|G| = |G : H| \cdot |H|$. Antag først, at G er endelig. Da sideklasserne udgør en klassedeling af G, kan elementantallet i G fås ved at addere elementantallene i sideklasserne. Da alle sideklasser har samme elementantal, bliver elementantallet i G antallet af sideklasser, $|G : H|$, multipliceret med det fælles element antal, $|H|$. Antag nu, at G er uendelig, så må enten H være uendelig eller antallet af sideklasser være uendeligt eller begge dele. Dvs. formlen $|G| = |G : H| \cdot |H|$ holder også i dette tilfælde.

$\square$

Vi får endvidere brug for følgende sætning (Tignol, 1988, s. 348-350).

Sætning A.59. *Lad H og N være undergrupper af en gruppe G og definer HN som en delmængde af G ved:*

$$HN = \{h\nu \mid h \in H,\ \nu \in N\}.$$

(1) *Hvis $N \lhd G$ så er HN en undergruppe af G og $H \cap N$ er en normal undergruppe i H.*

(2) *Hvis N har primindeks i G og G er endelig, så er enten $HN = N$ eller $HN = G$.*

(*a*) *Hvis $HN = N$, så er $H \subseteq N$, dvs. $H \cap N = H$.*

(*b*) *Hvis $HN = G$, så er $|H : H \cap N| = |G : N|$. Desuden vil enhver sideklasse af N i G være på formen hN for et $h \in H$.*

Bevis:

ad (1): Vi viser, at HN er en undergruppe i G: Det er klart, at det neutrale element ligger i HN, idet $e \in G$ ligger i HN, da det kan skrives som produktet $e \cdot e$, hvor e tilhører både H og N. Vi har endvidere, at HN er stabil under produkt, idet der for $h_1, h_2 \in H$ og $\nu_1, \nu_2 \in N$ gælder, at

$$(h_1\nu_1)(h_2\nu_2) = \underbrace{(h_1h_2)}_{\in H}\underbrace{((h_2^{-1}\nu_1h_2)\nu_2)}_{\in N},$$

idet $h_2^{-1}\nu_1 h_2 \in N$, da $N \lhd G$. Endelig har alle elementer i HN en invers, idet der for $h \in H$ og $\nu \in N$ gælder, at

$$(h\nu)^{-1} = \underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{(h\nu^{-1}h^{-1})}_{\in N}.$$

Idet $N \lhd G$ så vil et element k i den mindre undergruppe $H \cap N$ (evt. lig N) klart opfylde at $gkg^{-1} = k$ for alle $g \in G$ og dermed klart for alle $g \in H$.

ad (2): Vi har nu rækken af undergrupper

$$G \supseteq HN \supseteq N.$$

Hvis $|G : N|$ er et primtal så følger fra sætning A.43, at enten er $HN = N$ eller $HN = G$.
ad (a): Hvis $HN = N$, så vil $H \subseteq N$, idet $H \subseteq HN$.
ad (b): Hvis $HN = G$, så kan vi for ethvert element $\sigma \in G$ finde elementer $h \in H$ og $\nu \in N$, sådan at $\sigma = h\nu$. Der følger nu af sætning A.58, at $\sigma N = hN$, idet $h^{-1}\sigma = \nu \in N$. Dvs., at enhver sideklasse af N i G har formen hN for et $h \in H$. Vi definerer nu en afbildning ψ ved

$$\psi : h(H \cap N) \longrightarrow hN, \quad h \in H.$$

Denne er bijektiv: Vi viser først surjektiviteten. Da enhver sideklasse af N i G er af formen hN, hvor $h \in H$, vil alle de disjunkte sideklasser i G være $h_1N, ..., h_pN$. Vi vil vise, at der for to vilkårlige elementer h_i, $h_j \in H$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., p\}$, gælder $h_i(H \cap N) \neq h_j(H \cap N)$. Vi antager derfor, at $h_i(H \cap N) = h_j(H \cap N)$. Dvs. $h_i^{-1}h_j(H \cap N) = H \cap N$, hvilket medfører, at $h_i^{-1}h_j \in H \cap N$. Nu er $h_i^{-1}h_j \in N$, hvilket er i modstrid med, at de p sideklasser, $h_1N, ..., h_pN$, er disjunkte. Altså er ψ surjektiv.
Den er injektiv, for hvis vi antager, at der for h_1, $h_2 \in H$ gælder, at $h_1N = h_2N$, så giver sætning A.58, at $h_1^{-1}h_2 \in N$. Altså vil

$$h_1^{-1}h_2 \in H \cap N,$$

idet $h_1, h_2 \in H$. Vi bruger nu sætning A.58 igen og får, at

$$h_1(H \cap N) = h_2(H \cap N).$$

Bijektionen ψ viser nu, at der er lige mange sideklasser af N i G som af $H \cap N$ i H. Altså

$$|G : N| = |H : H \cap N|.$$

$\square$

Vi kan nu vise dette korollar (Tignol, 1988, s. 351-352):

Korollar A.60. *Lad N være en normal undergruppe i en endelig gruppe G og lad $|G : N| = p$, p primtal. Hvis $\sigma \in G \backslash N$, så vil $\sigma^p \in N$.*

Bevis:
Betragt de $p + 1$ sideklasser:

$$N, \sigma N, \sigma^2 N, ..., \sigma^p N.$$

Vi ønsker at vise, at $N = \sigma^p N$. Idet $|G : N| = p$ er disse sideklasser ikke indbyrdes forskellige, dvs. vi kan finde $m, n \in \mathbb{Z}$, hvor $0 \leq m < n \leq p$, sådan at $\sigma^m N = \sigma^n N$. Ved hjælp af sætning A.58 fås, at $\sigma^{m-n} \in N$. Vi kan altså betragte det mindste $k > 0, k \in \mathbb{Z}$, sådan at $\sigma^k \in N$. Det er nu klart, at $k \leq p$, da $m, n \leq p$. Vi mangler således at vise, at $k \geq p$. Vi vil altså vise, at enhver sideklasse af N i G er en af de følgende:

$$N, \sigma N, ..., \sigma^{k-1} N. \tag{A.18}$$

Lad $H = \{\sigma^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Vi har at H er en undergruppe i G (Thorup, 1998, s. 71). Dette sammenholdt med at $\sigma \notin N$ giver, at $HN \neq N$. Derfor giver sætning A.59, at $HN = G$ og at enhver sideklasse af N i G er på formen $\sigma^i N$, for et $i \in \mathbb{Z}$. Ved at dividere i med k fås $i = kq + r$, hvor $q, r \in \mathbb{Z}$, med $0 \leq r < k$. Så er $\sigma^{i-r} = (\sigma^k)^q \in N$, og dvs. ifølge sætning A.58 er

$$\sigma^i N = \sigma^r N.$$

Nu er det bevist, at enhver sideklasse $\sigma^i N, \sigma^i \in G$ ligger blandt (A.18), idet $0 \leq r \leq p - 1$. Dvs. $k \geq p$, altså $k = p$. Vi får nu at $N = \sigma^p N$.

$\square$

Med hensyn til opløselige grupper gælder følgende sætning, som vi vil give uden bevis (Jensen, 2001, s. 1.29).

Sætning A.61. *For en endelig gruppe G gælder følgende:*
G er opløselig $\iff$
Der findes en normalrække i G, $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_t = \{e\}$, hvor G_i har primindeks i G_{i-1}.

Vi vil fremover for det meste benytte den nederste betingelse i sætning A.61 for en opløselig gruppe.

Vi vil nu vise en vigtig egenskab ved opløselige gruppe (Tignol, 1988, s. 352-353).

Sætning A.62. *En undergruppe H i en opløselig gruppe G er selv opløselig.*

Bevis:
Lad G være en opløselig gruppe. Dvs. der findes en normalrække, hvor hver undergruppe har primindeks i den foregående:

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_t = \{e\}.$$

Lad nu H være en undergruppe i G. Vi ønsker nu at finde tilsvarende normalrække i H. Betragt

$$H = H \cap G_0 \supseteq H \cap G_1 \supseteq \cdots \supseteq H \cap G_t = \{e\}. \tag{A.19}$$

Ved brug af sætning A.59 (1) med $(H \cap G_i)$ i stedet for H, G_{i+1} i stedet for N og G_i i stedet for G, fås nu, da G_{i+1} er normal i G_i, at $(H \cap G_i) \cap G_{i+1} = H \cap G_{i+1}$ er normal i $H \cap G_i$. Dvs. (A.19) er en normalrække. Da G_{i+1} har primindeks i G_i og G_i er endelig, giver sætningen endvidere, at enten er $H \cap G_{i+1} = H \cap G_i$ eller er $|H \cap G_i : H \cap G_{i+1}| = |G_i : G_{i+1}|$. Dvs. der kan findes gentagelser i (A.19) som vi kan se bort fra, og for resten af grupperne vil der gælde, at indekset $|H \cap G_i : H \cap G_{i+1}|$ er et primtal. Dvs. H er opløselig.

$\square$

Vi får brug for et lemma (Edwards, 1984, s. 60).

Lemma A.63. *Lad $h(x)$ være et irreducibelt polynomium med koefficienter i K. Lad L være spaltningslegeme for $h(x)$ over K. Lad u, v, w være polynomier i to variable og med koefficienter i K. Hvis der for en rod r til $h(x)$ gælder, at*

$$u(x, r) = v(x, r)w(x, r),$$

så vil

$$u(x, r_i) = v(x, r_i)w(x, r_i),$$

for enhver rod r_i til $h(x)$.

Bevis:
Antag $u(x, r) = v(x, r)w(x, r)$, hvor r er rod i $h(x)$. Polynomiet

$$u(x, y) - v(x, y)w(x, y)$$

kan skrives som

$$c_\nu(y)x^\nu + c_{\nu-1}(y)x^{\nu-1} + \cdots + c_0(y),$$

hvor $c_\nu(y), ..., c_0(y)$ er polynomier i y. Ifølge antagelsen må r være rod i alle polynomierne $c_\nu(y), ..., c_0(y)$ over K. Men da $h(x)$ er irreducibelt er dets andre rødder r_i også rødder i $c_\nu(y), ..., c_0(y)$, hvorfor $u(x, r_i) = v(x, r_i)w(x, r_i)$.

□

De følgende to sætninger (Tignol, 1988, s. 335-340) er væsentlige i beviset for sætning A.68.

Sætning A.64. *Lad $c(x) \in K[X]$ være et irreducibelt polynomium af grad t med de simple rødder $\beta_1, ..., \beta_t$. Lad desuden $\alpha_1, ..., \alpha_n$ være rødderne til $f(x) \in K[X]$ og M være spaltningslegemet for $f(x)$ over K. Da er $|\mathrm{Gal}(f/K(\beta_1)) : \mathrm{Gal}(f/K)|$ divisor i t.*

Bevis:
Lad V være en Galoisresolvent for $f(x)$ over K. For $i = 1, ..., n$ vil $\alpha_i \in K(V)$ ifølge sætning A.47. Da $K(V) \subseteq K(\beta_1)(V)$ vil enhver rod α_i til $f(x)$ kunne udtrykkes som en rational funktion af V med koefficienter i $K(\beta_1)$. Dvs. at V også er en Galoisresolvent for $f(x)$ over $K(\beta_1)$. Ifølge sætning A.58 er

$$|\mathrm{Gal}(f/K) : \mathrm{Gal}(f/K(\beta_1))| = \frac{|\mathrm{Gal}(f/K)|}{|\mathrm{Gal}(f/K(\beta_1))|}.$$

Da

$$|\mathrm{Gal}(f/K)| = \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K))$$

og

$$|\mathrm{Gal}(f/K(\beta_1))| = \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K(\beta_1)),$$

skal vi altså vise, at

$$\frac{\text{grad}(\text{Irr}(V,K))}{\text{grad}(\text{Irr}(V,K(\beta_1))} \text{ er divisor i } t.$$

Sætning A.19 giver, at $\text{Irr}(V,K(\beta_1))$ er divisor i $\text{Irr}(V,K)$. Lad derfor

$$\text{Irr}(V,K) = \lambda \cdot \text{Irr}(V,K(\beta_1)) \tag{A.20}$$

for et polynomium $\lambda \in K(\beta_1)[X]$, og lad

$$\text{Irr}(V,K(\beta_1)) = x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_1x + b_0. \tag{A.21}$$

Da $b_0, ..., b_{r-1} \in K(\beta_1)$ kan de for $i = 0, ..., r-1$, ifølge sætning A.18, skrives som $b_i = \theta_i(\beta_1) = k_0 + k_1\beta_1 + \cdots + k_{r-1}\beta_1^{r-1}$, hvor $k_0, ..., k_{r-1} \in K$. Betragt nu $\theta_i(y) = k_0 + k_1y + \cdots + k_{r-1}y^{r-1}$ som et polynomium i $K[Y]$. Ved at erstatte $b_0, ..., b_{r-1}$ med $\theta_0(y), ..., \theta_{r-1}(y)$ på højresiden af (A.21) fås følgende polynomium i $K[X,Y]$:

$$\Theta(x,y) = x^r + \theta_{r-1}(y)x^{r-1} + \cdots + \theta_1(y)x + \theta_0(y).$$

Det er klart, at $\Theta(x,\beta_1) = \text{Irr}(V,K(\beta_1))$. Vi kan på tilsvarende måde få polynomiet $\Lambda(x,y) \in K[X,Y]$ så

$$\Lambda(x,\beta_1) = \lambda(x).$$

Så bliver ligningen (A.20) følgende

$$\text{Irr}(V,K) = \Theta(x,\beta_1)\Lambda(x,\beta_1).$$

Lemma A.63 giver så for $i = 1, ..., t$, at

$$\text{Irr}(V,K) = \Theta(x,\beta_i)\Lambda(x,\beta_i).$$

Hvis vi multiplicerer disse t ligninger, får vi, at

$$(\text{Irr}(V,K))^t = \Theta(x,\beta_1)\cdots\Theta(x,\beta_t)\Lambda(x,\beta_1)\cdots\Lambda(x,\beta_t), \tag{A.22}$$

hvor $\Theta(x,\beta_1)\cdots\Theta(x,\beta_t)\Lambda(x,\beta_1)\cdots\Lambda(x,\beta_t) \in K(\beta_1, ..., \beta_t)[X]$. Faktisk vil vi vise, at $\Theta(x,\beta_1)\cdots\Theta(x,\beta_t) \in K[X]$: Idet produktet $\Theta(x,y_1)\cdots\Theta(x,y_t)$ er symmetrisk i $y_1, ..., y_t$ kan det udtrykkes som et polynomium i x og de elementærsymmetriske polynomier i $y_1, ..., y_t$ (sætning A.46). Hvis vi nu erstatter $y_1, ..., y_t$

med $\beta_1, ..., \beta_t$, får vi et polynomium i x, hvis koefficienter kan findes ud fra koefficienterne til polynomiet $c(x)$ af grad t, der har $\beta_1, ..., \beta_t$ som rødder. Og da $c(x) \in K[X]$ må således

$$\Theta(x, \beta_1) \cdots \Theta(x, \beta_t) \in K[X].$$

Vi kan se af (A.22), at $\Theta(x, \beta_1) \cdots \Theta(x, \beta_t)$ er divisor i $(\mathrm{Irr}(V, K))^t$. Derfor må

$$\Theta(x, \beta_1) \cdots \Theta(x, \beta_t) = (\mathrm{Irr}(V, K))^s, \tag{A.23}$$

for $1 \leq s \leq t$, da jo $(\mathrm{Irr}(V, K))$ er irreducibelt. Hvis vi ser på graderne i (A.23), får vi, at

$$t \cdot r = s \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K).$$

Og da $r = \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K(\beta_1))$, vil

$$t \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K(\beta_1)) = s \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K).$$

Dvs. $\frac{\mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V,K))}{\mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V,K(\beta_1))}$ er divisor i t som ønsket.

□

Sætning A.65. *Lad forudsætningerne være som i sætning* A.64. *Da gælder, at*

$$\mathrm{Gal}(f/K(\beta_1, ..., \beta_t)) \lhd \mathrm{Gal}(f/K).$$

Med andre ord: Hvis $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$ *og* $\tau \in \mathrm{Gal}(f/K(\beta_1, ..., \beta_t))$, *så vil*

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{Gal}(f/K(\beta_1, ..., \beta_t)).$$

Bevis:

Lad V være en Galoisresolvent for $f(x)$ over K, og lad $\psi_1, ..., \psi_n \in K(X)$, sådan at der for $i = 1, ..., n$ gælder, at

$$\alpha_i = \psi_i(V).$$

Så har ethvert $\tau \in \mathrm{Gal}(f/K(\beta_1, ..., \beta_t))$ for $i = 1, ..., n$ formen

$$\tau : \alpha_i = \psi_i(V) \mapsto \psi_i(V'), \tag{A.24}$$

hvor V' er en rod til Irr$(V, K(\beta_1, ..., \beta_t))$. Hvis $\sigma \in$ Gal(f/K), da giver beviset for sætning A.53 at σ kan opfattes som en automorfi for $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, der fixer alle elementerne i K. Definer nu $\pi(x) =$Irr(V, K). Hvis vi anvender σ på begge sider af

$$\pi(V) = 0$$

fås

$$\sigma(\pi(V)) = \pi(\sigma(V)) = 0,$$

hvorfor $\sigma(V)$ er en rod til $\pi(x)$. Nu kan enhver rod $\alpha_1, ..., \alpha_n$ til $f(x)$ skrives som $\psi_i(\sigma(V)) \in K(\sigma(V))$ i følge sætning A.47. Dvs. $\sigma(V)$ er en Galoisresolvent for $f(x)$ over K og dvs. over $K(\beta_1, ..., \beta_n)$. Da Gal$(f/K(\beta_1, ..., \beta_n))$ ikke afhænger af valget af Galoisresolvent, kan vi vælge en hvilken som helst Galoisresolvent til at beskrive elementerne i Gal$(f/K(\beta_1, ..., \beta_n))$. Derfor vælger vi $\sigma(V)$ som den Galoisresolvent vi vil benytte til at beskrive $\sigma\tau\sigma^{-1}$. Vi får af (A.24)

$$\sigma\tau\sigma^{-1} : \alpha_i = \psi_i(\sigma(V)) \mapsto \psi_i(\sigma(V')).$$

Derfor skal vi for at vise, at $\sigma\tau\sigma^{-1} \in$ Gal$(f/K(\beta_1, ..., \beta_t))$ vise, at $\sigma(V')$ er en rod i Irr$(\sigma(V), K(\beta_1, ..., \beta_t))$. Lad W være en Galoisresolvent for $c(x)$ over K, og lad $W = W_1, W_2, ..., W_s$ være alle rødderne til Irr(W, K). Ifølge sætning A.48 gælder for $j = 1, ..., s$, at

$$K(\beta_1, ..., \beta_t) = K(W_j).$$

Som i beviset for sætning A.64 kan vi betragte polynomiet $\Phi(x, y) \in K[X, Y]$ således at for $j = 1, ..., s$

$$Irr(V, K(\beta_1, ..., \beta_t)) = \Phi(x, W_j) \in K(\beta_1, ..., \beta_t)[X].$$

Igen som i beviset for sætning A.64 fås for et passende l, hvor $1 \leq l \leq s$, at

$$\Phi(x, W_1)\Phi(x, W_2) \cdots \Phi(x, W_s) = \text{Irr}(V, K)^l.$$

Da $\sigma(V)$ er rod i Irr(V, K) må $\sigma(V)$ være rod i en af faktorerne $\Phi(x, W_k)$ for et passende k, hvor $1 \leq k \leq s$. Vi vil nu vise, at $\Phi(x, W_k) =$ Irr$(\sigma(V), K(\beta_1, ..., \beta_t))$, for derefter at vise, at $\sigma(V')$ er rod i $\Phi(x, W_k)$. Da $\Phi(x, W_k)$ er irreducibelt og har $\sigma(V)$ som rod er det klart, at $\Phi(x, W_k) =$ Irr$(\sigma(V), K(\beta_1, ..., \beta_t))$. Vi har, at V'

er rod i Irr$(V, K(\beta_1, ..., \beta_t)) = \Phi(x, W_k)$ og da $V' \in K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, er $V' \in K(V)$ ifølge sætning A.47. Dvs. at der for $g(x) \in K(X)$ gælder

$$V' = g(V). \tag{A.25}$$

Vi kan ifølge sætning A.18 vælge $g(x) \in K[X]$. Da $\Phi(V', W_k) = 0$ fås, at

$$\Phi(g(V), W_k) = 0,$$

og dvs. V er en rod i $\Phi(g(x), W_k) \in K(\beta_1, ..., \beta_t)$. Sætning A.19 giver nu, at $\Phi(x, W_k)$ er divisor i $\Phi(g(x), W_k)$. Dvs.

$$\Phi(g(x), W_k) = \Phi(x, W_k)\Psi(x, W_k).$$

Da $\sigma(V)$ er en rod i $\Phi(x, W_k)$ er

$$\Phi(g(\sigma(V)), W_k) = 0. \tag{A.26}$$

Vi tager nu σ på begge sider af (A.25) og får $\sigma(V') = g(\sigma(V))$. Dvs. (A.26) giver, at $\sigma(V')$ er rod i $\Phi(x, W_k) =$Irr$(\sigma(V), K(\beta_1, ..., \beta_t))$. Vi har altså vist, at $\sigma\tau\sigma^{-1} \in$ Gal$(f/K(\beta_1, ..., \beta_t))$.

□

Vi kan nu benytte de ovenstående sætninger til at vise (Tignol, 1988, s. 344)

Korollar A.66. *Lad $f(x) \in K[X]$ og lad L/K være en radikaludvidelse, sådan at $L = K(\alpha)$, hvor $\alpha^p = a$ for et primtal p, $a \in K$ og $\alpha \notin K$. Hvis K indeholder en primitiv p'te enhedsrod, så er* Gal(f/L) *en normal undergruppe af indeks p i* Gal(f/K)*.*

Bevis:
Betragt polynomiet $g(x) = x^p - a$, som har α som rod. Da $\alpha \notin K$ vil $g(x)$ være irreducibelt inden for K. Da K indeholder en primitiv p'te enhedsrod ω, vil $L = K(\alpha)$ indeholde alle rødderne til $g(x)$, dvs.

$$L = K(\alpha) = K(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha, ..., \omega^{p-1}\alpha).$$

Det følger nu af sætning A.64 og A.65, at Gal(f/L) er en normal undergruppe i Gal(f/K) af indeks p.

$\square$

Vi får i det følgende brug for resultatet i denne sætning, som vi ikke vil vise (Tignol, 1988, s. 283).

Sætning A.67. *For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert legeme K findes en radikaludvidelse af K, der indeholder en primitiv n'te enhedsrod.*

Nu kan vi endelig vise vores hovedresultat (Edwards, 1984 , s. 61-65; Jensen, 2001, s. 5.7; Tignol, 1988, s. 353-360).

Sætning A.68. *Lad $f(x) \in K[X]$ være et irreducibelt polynomium. Da gælder, at*

$$f(x) \text{ er opløseligt ved rodtegn} \Longleftrightarrow G = \mathrm{Gal}(f/K) \text{ er opløselig.}$$

Bevis:
"$\Longrightarrow$": Antag at $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn. Beviset føres ved induktion efter $|\mathrm{Gal}(f/K)|$.

Antag først at $|\mathrm{Gal}(f/K)| = 1$, så er $\mathrm{Gal}(f/K) = \{e\}$, hvorfor den er trivielt opløselig.

Antag nu, at der for polynomier, der er opløselige ved rodtegn, og hvis Galoisgruppe har orden mindre end $|\mathrm{Gal}(f/K)|$, gælder, at de har en opløselig Galoisgruppe. Vi vil så vise, at $\mathrm{Gal}(f/K)$ også er opløselig. Lad R/K være en radikaludvidelse som indeholder alle rødderne til $f(x)$. Ifølge sætning A.52 vil alle elementerne i R blive fixet af permutationerne i Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(f/R)$. Dvs. enhver rod til $f(x)$ fixes af permutationerne i $\mathrm{Gal}(f/R)$. Altså er $\mathrm{Gal}(f/R) = \{e\}$. Dette viser, at der findes en radikaludvidelse R'/K, sådan at

$$|\mathrm{Gal}(f/R')| < |\mathrm{Gal}(f/K)|.$$

Vi kan altså betragte det mindste primtal p, for hvilket der eksisterer en radikaludvidelse L/K sådan at $\mathrm{Gal}(f/L) = \mathrm{Gal}(f/K)$, og at der for et $a \in L$, hvor $\sqrt[p]{a} \notin L$, gælder, at

$$|\mathrm{Gal}(f/L(\sqrt[p]{a}))| < |\mathrm{Gal}(f/K)|.$$

Ifølge sætning A.67 findes en radikaludvidelse S/L, som indeholder en primitiv p'te enhedsrod. Man kan let vise, at en sådan radikaludvidelse kan fås ved at udvide med q'te rødder, hvor $q < p$ er et primtal (Tignol, 1988, s. 283-284). Ifølge antagelsen omkring p fås nu, at

$$\mathrm{Gal}(f/S) = \mathrm{Gal}(f/L) = \mathrm{Gal}(f/K).$$

Endvidere har vi, at

$$\mathrm{Gal}(f/S(\sqrt[p]{a})) \subseteq \mathrm{Gal}(f/L(\sqrt[p]{a})),$$

idet $|\mathrm{Gal}(f/S(\sqrt[p]{a}))| < |\mathrm{Gal}(f/K)|$. Da S indeholder en primitiv p'te enhedsrod giver korollar A.66 at $\mathrm{Gal}(f/S(\sqrt[p]{a}))$ er en normal undergruppe af indeks p i $\mathrm{Gal}(f/S) = \mathrm{Gal}(f/K)$. Da der findes en radikaludvidelse R/K, der indeholder rødderne til $f(x)$, må der specielt findes en radikaludvidelse af S, der indeholder rødderne til $f(x)$ (Tignol, 1988, s. 294). Dvs. $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn over S. Vi kan derfor benytte induktionsantagelsen og få normalrækken:

$$G_1 = \mathrm{Gal}(f/S(\sqrt[p]{a})) \triangleleft G_2 \triangleleft \cdots \triangleleft G_t = \{e\},$$

hvor G_{i-1} har primindeks i G_i. Normalrækken

$$\mathrm{Gal}(f/K) \triangleleft \mathrm{Gal}(f/S(\sqrt[p]{a})) \triangleleft G_2 \triangleleft \cdots \triangleleft G_t = \{e\}$$

viser nu at $\mathrm{Gal}(f/K)$ er opløselig.

"$\Longleftarrow$": Lad G være opløselig, og lad derfor N være en normal undergruppe i G af primindeks p. Lad $\sigma \in G \backslash N$.
Beviset føres i seks trin.
<u>Trin 1:</u> Lad $x \in L$ sådan, at $\nu(x) = x$ for alle $\nu \in N$. Vi viser:
(a) Hvis $\sigma(x) = x$, så vil $x \in K$.
(b) Hvis $\sigma(x) \neq x$ og $\tau \in G$, hvor $\tau(x) = x$, så vil $\tau \in N$.

Lad

$$X = \{\tau \in G | \tau(x) = x\}.$$

Denne mængde er klart en gruppe, der indeholder N, dvs. $G \supseteq X \supseteq N$. Da $|G : N| = p, p$ primtal fås af sætning A.43, at enten er $X = N$ eller $X = G$. ad

(a): Lad $\sigma(x) = x$. Så vil $\sigma \in X$, og dvs. $X \neq N$, idet $\sigma \notin N$. Altså er $X = G$. Ifølge sætning A.54 vil $\mathcal{F}(G) = K$, dvs. $x \in K$.
ad (b): Lad $\sigma(x) \neq x$ og $\tau \in G$, hvor $\tau(x) = x$. Dvs. $\sigma \notin X$. Dermed er $X \neq G$. Dermed er $X = N$, hvilket betyder, at $\tau \in N$.

Trin 2: Vi viser, at der eksisterer et element $\theta \in L \backslash K$, som fixes af enhver permutation i N.

Lad V være en Galoisresolvent for $f(x)$ over K. Betragt polynomiet

$$C(y) = \prod_{\nu \in N} (y - \nu(V)).$$

Koefficienterne i $C(y)$ er de elementær-symmetriske funktioner af $\nu(V)$'erne og derfor fixes de af permutationerne i N, idet disse blot bytter rundt på $\nu(V)$'erne. Hvis alle koefficienter i $C(y)$ fixes af permutationerne i G, så vil de ligge i K ifølge sætning A.54. Dvs., V er en rod i polynomiet $C(y)$ med koefficienter i K og af grad $|N|$, idet ν gennemløber N, og dermed antager V $|N|$ værdier i $C(y)$. Ifølge sætning A.58 har G orden $p \cdot |N|$, dvs. $\mathrm{Irr}(V, K)$ har grad $p \cdot |N|$, hvilket klart er større end $|N|$, altså i modstrid med det foregående. Dvs., at mindst en koefficient i $C(y)$ ikke fixes af permutationerne i G. Altså vil der findes et element θ i M som fixes af permutationerne i N, men som ikke ligger i K.

For enhver p'te enhedsrod $\omega \in K$ og et θ som opfylder ovenstående betingelser, defineres funktionen

$$g(\omega) = \theta + \omega\sigma(\theta) + \cdots + \omega^{p-1}\sigma^{p-1}(\theta).$$

Trin 3: Vi viser, at $\sigma(g(\omega)) = \omega^{-1}g(\omega)$, og at $\nu(g(\omega)) = g(\omega)$ for alle $\nu \in N$.

Da $\omega \in K$ ligger alle potenser af ω også i K, hvorfor de fixes af permutationerne i G, ifølge sætning A.54. Vi får

$$\begin{aligned} \sigma(g(\omega)) &= \sigma(\theta) + \omega\sigma^2(\theta) + \cdots + \omega^{p-1}\sigma^p(\theta) \\ &= \omega^{-1}(\omega\sigma(\theta) + \omega^2\sigma^2(\theta) + \cdots + \omega^{p-1}\sigma^{p-1}(\theta) + \sigma^p(\theta)), \end{aligned}$$

idet $\omega^{-1} = \omega^{p-1}$. Korollar A.60 giver, at $\sigma^p \in N$, og da θ fixes af permutationer i N vil $\sigma^p(\theta) = \theta$. Vi får altså $\sigma(g(\omega)) = \omega^{-1}g(\omega)$ som ønsket.

Vi får endvidere, at

$$\nu(g(\omega)) \quad = \quad \nu(\theta) + \omega\nu\sigma(\theta) + \cdots + \omega^{p-1}\nu\sigma^{p-1}(\theta),$$

for alle $\nu \in N$. Da $N \lhd G$, har vi $\sigma^{-i}\nu\sigma^i \in N$ for ethvert $\nu \in N$ og $i = 0, ..., p-1$, dvs. $\sigma^{-i}\nu\sigma^i(\theta) = \theta$, for ethvert $\nu \in N$ og $i = 0, ..., p-1$. Hvis vi tager σ^i på hver side af $\sigma^{-i}\nu\sigma^i(\theta) = \theta$, fås $\nu\sigma^i(\theta) = \sigma^i(\theta)$ for ethvert $\nu \in N$ og $i = 0, ..., p-1$. Dvs. $\nu(g(\omega)) = g(\omega)$ for ethvert $\nu \in N$ som ønsket.

Trin 4: Vi viser, at $g(\omega)^p \in K$ for enhver p'te enhedsrod ω, og der findes en p'te enhedsrod $\omega \neq 1$, sådan at $g(\omega) \neq 0$.

Ifølge trin 3 fixes $g(\omega)^p$ af σ og enhver permutation i N. Trin 1 giver så, at $g(\omega)^p \in K$ som ønsket. Vi antager, at $g(\omega) = 0$ for enhver p'te enhedsrod $\omega \neq 1$ og søger en modstrid. Lad $g_j(\omega) = \theta + \omega^j\sigma(\theta) + \omega^{2j}\sigma^2(\theta) + \cdots + \omega^{(p-1)j}\sigma^{p-1}(\theta)$ for $j = 1, ..., p-1$. Vi vil benytte $g_j(\omega)$ i stedet for $g(\omega)$, idet ω^j blot er en p'te enhedsrod og $\omega^j \neq 1$. Dvs., da $g(\omega) = 0$, må alle $g_1(\omega) = g_2(\omega) = \cdots = g_{p-1}(\omega) = 0$. Så er

$$\begin{aligned} g_1(\omega)0g_2(\omega) + \cdots + g_{p-1}(\omega) \quad &= \quad (p-1)\theta + (\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{p-1})\sigma(\theta) \\ &\quad\quad +(\omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{2p-2})\sigma^2(\theta) + \cdots \\ &\quad\quad +(\omega^{p-1} + \omega^{2p-2} + \cdots + \omega^{(p-1)^2})\sigma^{p-1}(\theta) \\ &= \quad (p-1)\theta - \sigma(\theta) - \sigma^2(\theta) - \cdots - \sigma^{p-1}(\theta) \\ &= \quad p\theta - \theta - \sigma(\theta) - \sigma^2(\theta) - \cdots - \sigma^{p-1}(\theta) \end{aligned}$$

Dvs., at $\theta = \frac{1}{p}g(1)$ og derfor fås, at θ fixes af σ ifølge trin 3. Idet θ også fixes af alle permutationer i N giver trin 1, at $\theta \in K$. Dette er i modstrid med antagelsen i trin 2, at $\theta \notin K$. Dvs., at der findes en p'te enhedsrod $\omega \neq 1$, sådan at $g(\omega) \neq 0$.

Lad altså nu $\omega \neq 1$ og $g(\omega) \neq 0$. Lad $R = K(g(\omega))$. Trin 4 giver nu, at R er en radikaludvidelse af K på formen $K(\sqrt[p]{a})$, hvor $a \in K$.
Trin 5: Vi viser, at $\mathrm{Gal}(f/R) = N$.

Da $g(\omega) \neq 0$ og $\omega \neq 1$ giver trin 3, at $g(\omega)$ ikke fixes af σ. Ifølge beviset for sætning A.66 fås, at $\mathrm{Gal}(f/R)$ er en undergruppe i G af indeks p. Dvs. $|\mathrm{Gal}(f/R)| = |N|$. Idet $\sigma(g(\omega)) \neq g(\omega)$ giver trin 1, at for ethvert $\tau \in G$, hvor $\tau(g(\omega)) = g(\omega)$, er $\tau \in N$. Da $g(\omega) \in R$ giver sætning A.54, at $g(\omega)$ fixes af permutationer i $\mathrm{Gal}(f/R)$. Dvs., at $\mathrm{Gal}(f/R) \subseteq N$. Nu er $\mathrm{Gal}(f/R) = N$.

Trin 6: Vi viser, at $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn.

Beviset føres ved induktion efter $w = |\mathrm{Gal}(f/K)|$.
Lad først $w = 1$. Den eneste permutation i $\mathrm{Gal}(f/K)$ er identiteten, som fixer alle rødderne $\alpha_1, ..., \alpha_n$ i $f(x)$. Sætning A.54 giver, at alle rødderne ligger i K, som er en radikaludvidelse af sig selv.
Vi antager nu, at for opløselige Galoisgrupper, der har orden mindre end w, er $f(x)$ opløseligt. Vi vil så vise, at $f(x)$ er opløseligt, hvis $\mathrm{Gal}(f/K)$ har orden w. Da $\mathrm{Gal}(f/K)$ er opløselig, indeholder den en normal undergruppe N, hvor $|\mathrm{Gal}(f/K) : N| = p$, p primtal. Lad nu F være en radikaludvidelse af K, der indeholder de p'te enhedsrødder.
Hvis

$$|\mathrm{Gal}(f/F)| < w,$$

kan vi benytte induktionsantagelsen, idet $\mathrm{Gal}(f/F)$ ifølge sætning A.62 er opløselig. Dvs. at der eksisterer en radikaludvidelse F' af F som indeholder alle rødderne til $f(x)$. Men F' er jo også en radikaludvidelse af K. Altså er $f(x)$ opløseligt ved rodtegn, når $|\mathrm{Gal}(f/K)| = w$.
Hvis

$$\mathrm{Gal}(f/F) = \mathrm{Gal}(f/K),$$

giver trin 5, at der findes en radikaludvidelse R af F således, at $\mathrm{Gal}(f/R) = N$. Da

$$|\mathrm{Gal}(f/R)| < w,$$

kan vi igen benytte induktionsantagelsen og får som før, at $f(x)$ er opløseligt ved rodtegn, når $|\mathrm{Gal}(f/K)| = w$.

$\square$

Vi får nu brug for lidt flere definitioner og en sætning, som vi giver uden bevis (Thorup, 1998, s. 57, 59, 63-64 og 130-131).

Definition A.69. For permutationer σ benytter vi cykelnotationen

$$\sigma = (a_1 \ ... \ a_k).$$

En cykel τ af længde 2, $\tau = (a_1 \ a_2)$, kaldes en *transposition*. Det kan vises, at enhver permutation kan fremstilles som et produkt af transpositioner, hvilket vi ikke vil gøre her.

Definition A.70. En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis den kan skrives som et produkt af et lige hhv. ulige antal transpositioner. De lige permutationer i S_n udgør en normal undergruppe, A_n, der kaldes den *alternerende gruppe*. A_n består af halvdelen af permutationerne i S_n og har derfor orden $\frac{1}{2}n!$.

Definition A.71. En gruppe G kaldes *simpel*, hvis $G \neq \{e\}$ og de eneste normale undergrupper er G og $\{e\}$.

Sætning A.72. *Den alternerende gruppe A_n er simpel for $n \geq 5$.*

Vi kan nu vise følgende sætning (Rotman, 1990, s. 80).

Sætning A.73. *S_n er opløselig for $n \leq 4$ men ikke-opløselig for $n \geq 5$.*

Bevis:
Hvis $m < n$, så er S_m isomorf med en undergruppe i S_n. Da enhver undergruppe i en opløselig gruppe selv er opløselig ifølge sætning A.62, vil det være nok at vise, at S_4 er opløselig og S_5 er ikke-opløselig. I S_4 fås normalrækken

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V \triangleright \{e\},$$

hvor V er Kleins Vier-gruppe. Da $|S_4| = 24$, $|A_4| = 12$ og $|V| = 4$, har faktorgrupperne, S_4/A_4, A_4/V og $V/\{e\}$, orden hhv. 2, 3 og 4, dvs. de er abelske. Altså er S_4 opløselig.

Hvis S_5 var opløselig ville dens undergruppe A_5 også være opløselig, men da A_5 er simpel, ifølge sætning A.72, er dens eneste normalrække $A_5 \triangleright \{e\}$, og her er faktorgruppen $A_5/\{e\} \simeq A_5$ ikke abelsk.

□

Af sætningerne A.68 og A.73 fås nu

Korollar A.74. *Der gælder, at et polynomium af grad n er opløseligt ved rodtegn, hvis $n \leq 4$ og ikke nødvendigvis opløseligt ved rodtegn, hvis $n \geq 5$.*

Vi vil nu vise følgende lemma, som vi skal bruge til at vise sætning A.76 (Jensen, 2001, s. 5.11-5.12).

Lemma A.75. *Lad p være et primtal og H være en transitiv undergruppe i S_p. Hvis H indeholder en transposition, så er $H = S_p$.*

Bevis:
Vi indfører en ækvivalensrelation på mængden $\{1, ..., p\}$ ved, at $a \sim b$, når transpositionen $(a\ b) \in H$. Hvis $a \sim b$ og $\tau \in H$, så vil $(\tau a\ \tau b) = \tau(a\ b)\tau^{-1}$, dvs. $\tau a \sim \tau b$. For ethvert element $x \in [a]$ findes et element $\nu x \sim \nu a$, $\nu \in H$, dvs. νx ligger i $[\nu a]$. Da H er transitiv vil der for alle par (a, i), $i \in \{1, ..., p\}$, gælde, at der findes et $\sigma \in H$ sådan at $\sigma(a) = i$. Altså vil alle ækvivalensklasser indeholde lige mange elementer. Dvs.

$$p = (\text{antal ækvivalensklasser}) \cdot (\text{elementantallet i en ækvivalensklasse}).$$

Da H indeholder en transposition, og p er et primtal, vil der findes præcis én ækvivalensklasse. Nu vil H indeholde samtlige transpositioner, og da enhver permutation altid er et produkt af transpositioner, vil $H = S_p$.

□

I det følgende vil vi anvende definition A.31, når vi benytter Galoisgruppen for et polynomium. Vi bemærker dog, at sætningerne i hele appendiks A gælder for begge definitioner (A.31 og A.77) på grund af sætning A.53.

Sætning A.76. *Lad $f(x)$ være et irreducibelt polynomium af primtalsgrad p og lad $f(x)$ have koefficienter i $\mathbb{Q}$. Hvis $f(x)$ har præcist $p - 2$ reelle rødder, gælder der for spaltningslegemet M, at $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq S_p$, og $f(x)$ er derfor ikke opløseligt ved rodtegn for $p \geq 5$.*

Bevis:
Vi benytter sætning A.44 og får, at $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ er isomorf med en transitiv undergruppe i S_p. Vi lader $\tau : M \longrightarrow M$ være kompleks konjugering. Så er τ en automorfi, idet $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$ og $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$. Desuden gælder, at $\tau(q) = q$, for alle $q \in \mathbb{Q}$, hvorfor $\tau \in \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$. Det er klart, at τ svarer til en transposition i S_p, og derfor er $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq S_p$ ifølge lemma A.75. Altså er $f(x)$ ikke opløseligt ved rodtegn ifølge sætning A.68 og sætning A.73.

□

A.5 Galoisteoriens hovedsætning

Vi vil nu se nærmere på Galoisteoriens hovedsætning , men først vil vi give endnu en definition af Galoisgruppen for et polynomium $f(x)$. Her gælder definitionen kun for polynomier med koefficienter i $\mathbb{Q}$, men den er mindre abstrakt end de to foregående, da Galoisgruppen defineres direkte ud fra rødderne:

Definition A.77. Lad $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ være et n'tegradspolynomium med lutter simple rødder $\alpha_1, ..., \alpha_n$. En permutation $\sigma \in S_n$ af rødderne ligger i *Galoisgruppen* for $f(x)$ over $\mathbb{Q}$, hvis følgende gælder:
For ethvert polynomium $g(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Q}[X]$ i n variable, hvor $g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$, vil $g(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = 0$.

Vi viser nu, at ovenstående definition af Galoisgruppen er ækvivalent med de andre definitioner.

Sætning A.78. *Lad $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ være et polynomium af grad n med de indbyrdes forskellige rødder $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Lad $M = \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ være spaltningslegemet for $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Da er $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ isomorf med den i definition A.77 definerede Galoisgruppe.*

Bevis:
"$\Longrightarrow$": Ifølge sætning A.44 kan vi betragte $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ som en undergruppe i S_n. Dvs. ethvert $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ svarer til en permutation

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \cdots & \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

i S_n. Betragt altså isomorfien φ der sender $\sigma \in \text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ over i $\bar{\sigma} \in \varphi\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$. Vi vil nu vise, at $\bar{\sigma}$ har egenskaben i definition A.77. Lad derfor $g(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$ være et polynomium i n variable

$$g(x_1, ..., x_n) = \sum q_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$

Så er

$$\bar{\sigma}(g(x_1, ..., x_n)) = \sum q_{i_1,...,i_n} \bar{\sigma}(x_1)^{i_1} \bar{\sigma}(x_2)^{i_2} \cdots \bar{\sigma}(x_n)^{i_n}.$$

Antag nu, at $g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$. Så vil

$$\sigma(\sum q_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n}) = 0,$$

da automorfier sender 0 i 0. Dvs.

$$\sum q_{i_1,...,i_n} \sigma(\alpha_1)^{i_1} \sigma(\alpha_2)^{i_2} \cdots \sigma(\alpha_n)^{i_n}) = 0.$$

Nu er

$$\varphi(\sum q_{i_1,...,i_n} \sigma(\alpha_1)^{i_1} \sigma(\alpha_2)^{i_2} \cdots \sigma(\alpha_n)^{i_n})) = 0.$$

Dvs.

$$\sum q_{i_1,...,i_n} \bar{\sigma}(\alpha_1)^{i_1} \bar{\sigma}(\alpha_2)^{i_2} \cdots \bar{\sigma}(\alpha_n)^{i_n}) = 0,$$

som ønsket.

"$\Longleftarrow$": Antag, at $\tau \in S_n$ har egenskaben fra definition A.77. Vi vil nu vise, at der findes et $\sigma \in \text{Gal}(M/\mathbb{Q})$, sådan at $\bar{\sigma} = \tau$. Ifølge sætning A.18 kan ethvert element $\beta \in M$ skrives på formen $\beta = \sum q_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n}$. Lad nu σ være defineret ved, at $\sigma(\beta) = \sum q_{i_1,...,i_n} \tau(\alpha_1)^{i_1} \tau(\alpha_2)^{i_2} \cdots \tau(\alpha_n)^{i_n})$. Vi vil vise, at σ er veldefineret. Antag derfor, at

$$\beta = \sum q_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n}) = \sum q'_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n}),$$

og vil så vise, at

$$\sum q_{i_1,...,i_n} \tau(\alpha_1)^{i_1} \tau(\alpha_2)^{i_2} \cdots \tau(\alpha_n)^{i_n}) = \sum q'_{i_1,...,i_n} \tau(\alpha_1)^{i_1} \tau(\alpha_2)^{i_2} \cdots \tau(\alpha_n)^{i_n}).$$

Betragt hertil $h(x_1, ..., x_n) = \sum (q_{i_1,...,i_n} - q'_{i_1,...,i_n}) \tau(x_1)^{i_1} \tau(x_2)^{i_2} \cdots \tau(x_n)^{i_n})$. Da $h(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ vil ifølge antagelsen $h(\tau(\alpha_1), ..., \tau(\alpha_n)) = 0$. Dvs.

$$\sum q_{i_1,...,i_n} \tau(\alpha_1)^{i_1} \tau(\alpha_2)^{i_2} \cdots \tau(\alpha_n)^{i_n}) = \sum q'_{i_1,...,i_n} \tau(\alpha_1)^{i_1} \tau(\alpha_2)^{i_2} \cdots \tau(\alpha_n)^{i_n}),$$

som ønsket. Altså er σ veldefineret. Det er nu klart, at σ er en automorfi i $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$, og at $\bar{\sigma} = \tau$.

$\square$

Til Galoisteoriens hovedsætning får vi brug for følgende (Tignol, 1988, s. 402, 406-408).

Lemma A.79. *Lad L/K være en legemsudvidelse og G en endelig gruppe af automorfier for L. Hvis $K = \mathcal{F}(G)$, så vil*
1) $[L : K] = |G|$ *og*
2) $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Bevis:
Ad 1): Lad $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$. Ifølge sætning A.36 fås, at $[L : K] \geq n$. Vi antager, at $[L : K] > n$ og søger en modstrid. Vi kan for et passende $m > n$ finde elementer $l_1, ..., l_m$ i L, der er lineart uafhængige over K, da det jo specielt gælder for basiselementerne for L. Matricen

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(l_1) & \sigma_2(l_1) & \cdots & \sigma_n(l_1) \\ \sigma_1(l_2) & \sigma_2(l_2) & \cdots & \sigma_n(l_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(l_m) & \sigma_2(l_m) & \cdots & \sigma_n(l_m) \end{bmatrix}$$

kan højst have n ledende 1'ere i sin reducerede række-echelonform. Derfor vil der som minimum være $m - n$ rækker indeholdende lutter 0'er nederst i den reducerede række-echelonform. Dvs. hver søjle vil indeholde mindst et 0, hvorfor det er klart, at de n søjler er lineært afhængige. Lad nu $b_1, ..., b_m \in L$, hvor ikke alle $b_1, ..., b_m$ er lig nul, sådan at der gælder

$$\begin{aligned} &\sigma_1(l_1)b_1 + \sigma_1(l_2)b_2 + \cdots + \sigma_1(l_m)b_m = 0. \\ &\vdots \\ &\sigma_n(l_1)b_1 + \sigma_n(l_2)b_2 + \cdots + \sigma_n(l_m)b_m = 0. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Vi antager pga. ovenstående, at $b_1 \neq 0$. Det følger af sætning A.34, at hvis $a_1 \neq 0, ..., a_n \neq 0$ så findes et $x \in L$ så $a_1\sigma_1(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) \neq 0$. Dvs. specielt findes et $x \in L$ så $\sigma_1(x) + \cdots + \sigma_n(x) \neq 0$. Vi kan antage, at b_1 er et sådant x, idet vi i stedet for b_1 kan få et passende element i L, der er forskelligt fra 0, ved at multiplicere $b_1, ..., b_n$ med det samme element i L, der er forskelligt fra 0.

Altså har vi, at

$$\sigma_1^{-1}(b_1) + \cdots + \sigma_n^{-1}(b_1) \neq 0. \tag{A.28}$$

Vi anvender nu σ_i^{-1}, på den i'te ligning i (A.27) og får de n ligninger

$$\begin{aligned} &l_1\sigma_1^{-1}(b_1) + \cdots + l_m\sigma_1^{-1}(b_m) \\ &\vdots \\ &l_1\sigma_n^{-1}(b_1) + \cdots + l_m\sigma_n^{-1}(b_m) \end{aligned} \tag{A.29}$$

Ved at addere de n ligninger i (A.29) fås

$$l_1(\sigma_1^{-1}(b_1) + \cdots + \sigma_n^{-1}(b_1)) + \cdots + l_m(\sigma_1^{-1}(b_m) + \cdots + \sigma_n^{-1}(b_m)) = 0.$$

Dvs., da $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} = \{\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_n^{-1}\}$, med passende nummerering, fås

$$l_1(\sum_{\sigma\in G}\sigma(b_1)) + \cdots + l_m(\sum_{\sigma\in G}\sigma(b_m)) = 0. \tag{A.30}$$

Summerne $\sum_{\sigma\in G}\sigma(b_1), ..., \sum_{\sigma\in G}\sigma(b_m)$ i (A.30) fixes under G, og de er ikke alle 0, da specielt $\sum_{\sigma\in G}\sigma(b_1) \neq 0$ ifølge (A.28). Vi opnår nu en modstrid, da vi har antaget, at $l_1, ..., l_m$ er lineært uafhængige. Altså må $[L : K] = |G|$.

Ad 2): Der gælder, at $G \subseteq \text{Gal}(L/K)$, idet $K = \mathcal{F}(G)$; så gælder jo, at $\text{Gal}(L/K)$ består af de automorfier i $\text{Aut}(L)$, der fixer alle de elementer i K, der fixes af alle automorfier i G. Derfor er det nok at vise, at

$$|G| = |\text{Gal}(L/K)|.$$

Da $G \subseteq \text{Gal}(L/K)$ vil altså ethvert element i L, der fixes af automorfierne i $\text{Gal}(L/K)$ også fixes af automorfierne i G; med andre ord $\mathcal{F}(G) \supseteq \mathcal{F}(\text{Gal}(L/K))$. Endvidere er det klart, at alle elementerne i K fixes af automorfierne i $\text{Gal}(L/K)$. Vi har altså

$$K = \mathcal{F}(G) \supseteq \mathcal{F}(\text{Gal}(L/K)) \supseteq K,$$

dvs. $\mathcal{F}(\text{Gal}(L/K)) = K$. Ifølge 1) med $\text{Gal}(L/K)$ i stedet for G fås, at

$$[L : K] = |\text{Gal}(L/K)|.$$

Igen ifølge 1) er nu $|G| = |\text{Gal}(L/K)|$. Hermed er $G = \text{Gal}(L/K)$.

□

Endvidere får vi brug for et lemma (Tignol, 1988, s. 410).

Lemma A.80. *Lad M/K være en legemesudvidelse og L være et dellegeme af M indeholdende K. Lad endvidere $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$. Da gælder:*

$$\mathrm{Gal}(M/\sigma(L)) = \sigma \mathrm{Gal}(M/L)\sigma^{-1}.$$

Bevis:
Vi har

$$\mathrm{Gal}(M/\sigma(L)) = \{\tau \in \mathrm{Aut}(M) | \tau(\sigma(x)) = \sigma(x) \text{ for alle } x \in L\},$$

$$\sigma \mathrm{Gal}(M/L)\sigma^{-1} = \{\sigma\gamma\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(M) | \gamma(x) = x \text{ for alle } x \in L\},$$

$$\sigma^{-1}\mathrm{Gal}(M/\sigma(L))\sigma = \{\sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathrm{Aut}(M) | \gamma \in \mathrm{Gal}(M/\sigma(L))\}.$$

"$\subseteq$": Denne inklusion vises ved at vise $\sigma^{-1}\mathrm{Gal}(M/\sigma(L))\sigma \subseteq \mathrm{Gal}(M/L)$. Lad $\sigma^{-1}\tau\sigma \in \sigma^{-1}\mathrm{Gal}(M/\sigma(L))\sigma$. For alle $x \in L$ gælder nu

$$\sigma^{-1}\tau(\sigma(x)) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x.$$

Altså vil $\sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathrm{Gal}(M/L)$.
"$\supseteq$": Lad $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in \sigma\mathrm{Gal}(M/L)\sigma^{-1}$. For alle $x \in L$ gælder nu

$$\sigma\gamma\sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma\gamma(x) = \sigma(x).$$

Altså vil $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in \mathrm{Gal}(M/\sigma(L))$.

□

Vi vil nu vise Galoisteoriens hovedsætning (Jensen, 2001, s. 3.8-3.9; Tignol, 1988, s. 402, 408-412).

Sætning A.81 (Galoisteoriens hovedsætning). *Lad M/K være en endelig normal udvidelse med Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(M/K)$. Da findes en 1-1 forbindelse*

mellem undergrupperne i G og dellegemerne af M indeholdende K, som til ethvert dellegme L af M indeholdende K tilordner undergruppen $\mathrm{Gal}(M/L)$ *i* G*; og som til enhver undergruppe H i G tilordner fixpunktslegemet $\mathcal{F}(H)$, hvor* $K \subseteq \mathcal{F}(H) \subseteq M$. *Under denne 1-1 forbindelse gælder følgende:*
1) *For en undergruppe H i G gælder:*

$$\mathrm{Gal}(M/\mathcal{F}(H)) = H \text{ og } |G : H| = [\mathcal{F}(H) : K].$$

2) *For et dellegeme L i M indeholdende K gælder:*

$$|\mathrm{Gal}(M/L)| = [M : L] \text{ og } \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L)) = L.$$

3)

a) For dellegemer L_1 og L_2 af M indeholdende K gælder:

$$L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow \mathrm{Gal}(M/L_1) \supseteq \mathrm{Gal}(M/L_2).$$

b) For undergrupper H_1 og H_2 i G gælder:

$$H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}(H_1) \supseteq \mathcal{F}(H_2).$$

4) *For et dellegeme L af M indeholdende K gælder:*

$$L/K \textit{ endelig normal } \Leftrightarrow \mathrm{Gal}(M/L) \lhd G.$$

5) *Hvis L/K er endelig normal, så findes en isomorfi*

$$\varphi : G/\mathrm{Gal}(M/L) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K),$$

der fås ved at restringere automorfierne i G til L.

Bevis:
Ad 1): Vi får, ifølge lemma A.79 del 2) med H i stedet for G, at

$$\mathrm{Gal}(M/\mathcal{F}(H)) = H.$$

Endvidere fås, ifølge lemma A.79 del 1), at

$$[M : K] = |G| \text{ og } [M : \mathcal{F}(H)] = |H|.$$

Ifølge sætning A.43, da $M \supseteq \mathcal{F}(H) \supseteq K$, er

$$[M : K] = [M : \mathcal{F}(H)][\mathcal{F}(H) : K].$$

Vi får altså

$$[\mathcal{F}(H) : K] = \frac{|G|}{|H|} = |G : H|,$$

ifølge sætning A.58.

Ad 2): Vi viser først, at $[L : K] = |G : \mathrm{Gal}(M/L)|$. Ved at restringere automorfierne $\sigma \in G$ til L fås homomorfier

$$\sigma_{(res,L)} : L \longrightarrow M.$$

Hvis, der for to sådanne homomorfier, $\sigma_{(res,L)}$, $\tau_{(res,L)}$, σ, $\tau \in G$, gælder, at $\sigma_{(res,L)} = \tau_{(res,L)}$, så vil $\sigma(l) = \tau(l)$, for alle $l \in L$. Dvs. at $\tau^{-1}\sigma(l) = l$, for alle $l \in L$, og derfor vil $\tau^{-1}\sigma \in \mathrm{Gal}(M/L)$. Ifølge sætning A.58 fås nu, at

$$\sigma\mathrm{Gal}(M/L) = \tau\mathrm{Gal}(M/L).$$

Lad nu $|G : \mathrm{Gal}(M/L)| = r$ og lad $\sigma_1, ..., \sigma_r \in G$ ligge i de r forskellige sideklasser med hensyn til $\mathrm{Gal}(M/L)$. Så vil homomorfierne $\sigma_{i(res,L)}$, $i = 1, ..., r$, være parvis forskellige. Sætning A.36 giver, da $K = \mathcal{F}(G)$, at

$$[L : K] \geq r.$$

Omvendt fås

$$[L : K] \leq r,$$

idet $L \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L))$ og $[\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L)) : K] = |G : \mathrm{Gal}(M/L)|$ ifølge 1). Altså er

$$[L : K] = |G : \mathrm{Gal}(M/L)|.$$

Vi viser nu, at $[L : K] = |G : \mathrm{Gal}(M/L)|$. Vi har $L \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L))$ og

$$[L : K] = |G : \mathrm{Gal}(M/L)| = [\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L)) : K]$$

ifølge første del af 2) og anden del af 1). Altså er

$$L = \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L)).$$

Ad 3):

"$\Rightarrow$"i a): Klart.
"$\Rightarrow$"i b): Klart.
"$\Leftarrow$"i a): Antag, at $\mathrm{Gal}(M/L_1) \supseteq \mathrm{Gal}(M/L_2)$. Vi anvender "$\Rightarrow$"fra b) og får, at

$$\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L_1)) \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{Gal}(M/L_2)),$$

hvilket ifølge 2) betyder, at $L_1 \subseteq L$.
"$\Leftarrow$"i b): Antag, at $\mathcal{F}(H_1) \supseteq \mathcal{F}(H_2)$. Vi anvender "$\Rightarrow$"fra a) og får, at

$$\mathrm{Gal}(M/\mathcal{F}(H_1)) \subseteq \mathrm{Gal}(M/\mathcal{F}(H_2)),$$

hvilket ifølge 1) betyder at $H_1 \subseteq H_2$.

Ad 4):
"$\Rightarrow$": Antag, at L/K er endelig normal. Lad $|G : \mathrm{Gal}(M/L)| = r$, og lad $\sigma_1, ..., \sigma_r \in G$ ligge i de r forskellige sideklasser med hensyn til $\mathrm{Gal}(M/L)$. Som i beviset for 2) får vi, at restriktionerne $\sigma_{i(res,L)} : L \longrightarrow M$, $i = 1, ..., r$, bliver parvise parvis forskellige homomorfier, der fixer elementerne i K.

Ifølge 2) er $[L : K] = r$. Ifølge sætning A.47 er $L = K(V)$, hvor V er en Galoisresolvent i L. Dvs. $\mathrm{grad}(\mathrm{Irr}(V, K)) = r$. Da M/K er endelig normal vil de r rødder til $\mathrm{Irr}(V, K)$ ligge i M ifølge sætning A.42. En homomorfi fra $L = K(V)$ ind i M, der fikser elementerne i K, er entydigt bestemt ved værdien på V. Ifølge sætning A.41 vil en sådan homomorfi, der fikser elementerne i K føre en rod til $\mathrm{Irr}(V, K)$ over i en rod til $\mathrm{Irr}(V, K)$. Men der er kun r rødder til $\mathrm{Irr}(V, K)$; altså er der højst r homomorfier fra L ind i M, der fikser elementerne i K. Dvs. at enhver sådan homomorfi vil være på formen $\sigma_{i(res,L)}$ for nogle $i = 1, ..., r$, pga. ovenstående.

Da L/K er endelig normal, og $[L : K] = r$, er der r automorfier for L, der fikser elementerne i K (nemlig automorfierne i $\mathrm{Gal}(L/K)$). Disse automorfier kan betragtes som homomorfier fra L ind i M, idet $L \subseteq M$. Disse homomorfier vil altså være på formen $\sigma_{i,(res,L)}$, $i = 1, ..., r$. Altså vil

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma_{1(res,L)}, ..., \sigma_{r(res,L)}\}.$$

Derfor vil $\sigma_1, ..., \sigma_r$ ligeledes sende elementer fra L ind i L; med andre ord gælder for $i = 1, ..., r$, at

$$\sigma_i(L) = L.$$

Ifølge lemma A.80 gælder nu for $i = 1, ..., r$, at

$$\mathrm{Gal}(M/L) = \sigma_i \mathrm{Gal}(M/L) \sigma_i^{-1}.$$

Da $\sigma_1, ..., \sigma_r$ ligger i hver sin sideklasse med hensyn til $\mathrm{Gal}(M/L)$, vil ethvert element $\sigma \in G$ være på formen $\sigma_i \tau$, $i = 1, ..., r$, $\tau \in \mathrm{Gal}(M/L)$. Derfor gælder også for alle $\sigma \in G$, at

$$\mathrm{Gal}(M/L) = \sigma \mathrm{Gal}(M/L) \sigma^{-1}.$$

Altså er $\mathrm{Gal}(M/L) \lhd G$.

"$\Leftarrow$": Antag, at $\mathrm{Gal}(M/L) \lhd G$. Ifølge lemma A.80 er så $\sigma(L) = L$ for alle $\sigma \in G$. Dvs. vi kan restringere σ til L og få en automorfi $\sigma_{(res,L)} : L \longrightarrow L$, der fikser alle elementerne i K. Altså er $\mathcal{F}(\mathrm{Gal}(L/K)) = K$, hvorfor L/K er endelig normal.

Ad 5): Antag, at L/K er endelig normal. Som i beviset for 4) fås af lemma A.80, at $\sigma \in G$ restringeret til L giver en automorfi $\sigma_{(res,L)} : L \longrightarrow L$, som fikser elementerne i K. Lad nu afbildningen $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ være defineret ved $\varphi(\sigma) = \sigma_{(res,L)}$. Vi har $\ker(\varphi) = \{\sigma \in G | \varphi(\sigma) = \sigma_{res,L} = e\}$. Vi viser nu, at

$$\ker(\varphi) = \mathrm{Gal}(M/L).$$

"$\subseteq$": Lad $\sigma \in \ker(\varphi)$, dvs. $\sigma(res, L) = e$, hvorfor $\sigma(x) = x$ for alle $x \in L$. Altså vil $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/L)$.
"$\supseteq$": Lad $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/L)$, dvs. $\sigma(x) = x$ for alle $x \in L$, hvorfor $\sigma(res, L) = e$. Altså vil $\sigma \in \ker(\varphi)$.

Vi har altså, at $\ker(\varphi) = \mathrm{Gal}(M/L)$. Så giver sætning A.25, at der findes en isomorfi $\bar{\varphi} : G/\mathrm{Gal}(M/L) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$. Nu giver 2) og lemma A.79, at

$$|G : \mathrm{Gal}(M/L)| = [L : K] = |\mathrm{Gal}(L/K)|.$$

Dvs. grupperne $G/\mathrm{Gal}(M/L)$ og $\mathrm{Gal}(L/K)$ har samme orden. Altså er

$$G/\mathrm{Gal}(M/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/K).$$

$\square$

B Undervisningsmanual

B.1 Modul 1, mandag d. 23/10-2006 kl. 12.10-13.50

12.10-12.18:

Præsentation af os selv. Kan I løse alle andengradsligninger? Nej.

Hvorfor ikke? Vi kan ikke løse de ligninger, hvor diskriminanten er negativ.

Vi vil nu se lidt nærmere på, hvorfor ligningerne med negativ diskriminant ikke kan løses. Betragt derfor ligningen $x^2 + 4x + 5 = 0$, der har diskriminant -4, hvorfor den ikke har nogen reelle løsninger.

12.18-12.26:

Udlevering af arbejdsark C.1 (appendiks C)

Opgave B.1. Find p og q i udtrykket $x^2 + 4x + 5 = (x + p)^2 + q$.

Løsning: $p = 2$ og $q = 1$.

12.26-12.39:

En elev kommer til tavlen og skriver resultatet med forklaringer.

Se på $x^2+4x+5 = 0$, dvs. $(x+2)^2+1 = 0$ ud fra opgaven og dvs. $(x+2)^2 = -1$.

Hvad er problemet her? Vi kan ikke inden for de reelle tal finde et tal, der i anden potens giver -1. Dvs. ligningen ikke kan løses inden for $\mathbb{R}$.

Vi vil gerne løse ligningen $(x+2)^2 = -1$ alligevel. Hvad ville I gøre, for at komme videre, hvis der stod et positivt tal på højresiden? Vi må tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet. Dvs. vi får $x + 2 = \pm\sqrt{-1}$.

Vi sætter $\sqrt{-1} = i$.

Hvad er så i^2? $i^2 = -1$.

12.39-12.42:

Udlevering af arbejdsark C.2 (appendiks C).

Opgave B.2. Udregn $(3 + 8i)(-2 + i)$.

Løsning: $-14 - 13i$

12.42-12.46:

En elev kommer til tavlen og udregningen diskuteres.

12.46-12.58:

Udlevering af arbejdsark C.3 (appendiks C).

Opgave B.3. (1): Løs ligningen $(x+2)^2 = -1$ fra før. Er jeres resultater løsninger til den oprindelige ligning $x^2 + 4x + 5 = 0$?

Løsning:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= -1 \quad \Leftrightarrow \\ x+2 &= \pm\sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow \\ x+2 &= \pm i \quad \Leftrightarrow \\ x &= -2 \pm i \end{aligned}$$

Vi tjekker ved indsættelse $(-2+i)^2+4(-2+i)+5 = (-2)^2+(i)^2-4i-8+4i+5 = 4-1-3 = 0$. Tilsvarende for den anden løsning.

(2): Løs ligningen $x^2 + 2x + 17 = 0$.

Løsning: $x = -1 \pm 4i$.

12.58-13.04:

To elever til tavlen (skrive løsningerne op) og diskussion af resultater.

Hvis eleverne, i den sidste opgave, ikke kan se, at $\sqrt{-64} = \pm 8i$ eller $\sqrt{-16} = 4i$ (afhængig af fremgangsmåde), kan vi hjælpe ved $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$, $p > 0$ eller $q > 0$

Dette skulle gerne lede til eksempelvis $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$.

13.04-13.12:

Pause.

13.12-13.22:

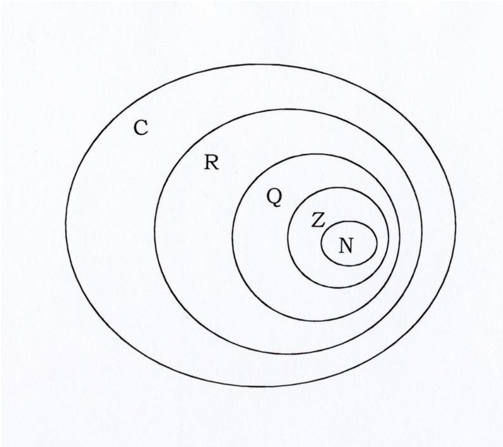
Institutionalisering B.4. Tallet i kaldes et komplekst tal. Generelt er de komplekse tal på formen $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Mængden af alle de komplekse tal er

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

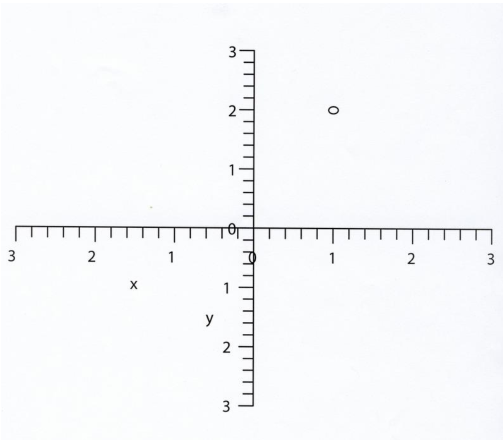
Bemærk at alle tal er komplekse.

Grafisk repræsentation af de komplekse tal:

13.22-13.36:



Man kan afbilde de komplekse tal som punkter i planen ved at lade tallet $x + iy$ svare til punktet (x, y):



Figur 8: Det komplekse tal $1 + 2i$ afbildet i planen

Vi peger på forskellige punkter i planen, som eleverne skal genkende som komplekse tal.
Udlevering af noter C.4.

13.22-13.36:

Udlevering af arbejdsark C.5 (appendiks C).

Opgave B.5. Find rødderne i følgende polynomier og omskriv polynomierne ved hjælp af deres rødder.
$f(x) = x^2 - 16x + 68$
$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
$h(x) = x^4 + 2x^3 + 16x^2 - 2x - 17 = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 17)$
Løsning:
Rødderne til $f(x)$ er $r_1 = 8 + 2i$ og $r_2 = 8 - 2i$, dvs.

$$f(x) = (x - 8 - 2i)(x - 8 + 2i).$$

Rødderne til $g(x)$ er $r_1 = 2$, $r_2 = -2 + i$, $r_3 = -2 - i$, dvs.

$$g(x) = (x - 2)(x + 2 - i)(x + 2 + i).$$

Rødderne til $h(x)$ er $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = -1 + 4i$, $r_4 = -1 - 4i$, dvs.

$$h(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 1 + 4i)(x + 1 - 4i).$$

13.36-13.46:
Tre elever fremlægger resultater på tavlen.
Hvor mange rødder har et andengradspolynomium inden for $\mathbb{C}$? 2.
Hvor mange rødder tror I, at hhv. tredje- og fjerdegradspolynomier har? De har hhv. 3 og 4 komplekse rødder (talt med multiplicitet).
Hvor mange rødder tror I n'tegradspolynomiet $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$ har? Polynomiet $f(x)$ har n komplekse rødder.
Hvordan kan vi opskrive $f(x)$ ved hjælp af dets rødder? Vi kan skrive $f(x)$ som et produkt af n førstegradsfaktorer $f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$, hvor $r_1, r_2, ..., r_n$ er rødderne til $f(x)$.

13.46-13.50:
Overhead med AFS.

Institutionalisering B.6.

Sætning B.7 (Algebraens fundamentalsætning). *Et polynomium $f(x)$ af grad n med koefficienter i $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) har n rødder $r_1, ..., r_n$ i $\mathbb{C}$ talt med multiplicitet. Dvs. vi kan skrive $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$, hvor a er koefficienten til n'tegradsleddet.*

Vi vil ikke vise sætningen, da beviset er for langt.
Udlevering af note-/arbejdsark C.6.

Opsamling: Kan I nu løse alle andengradsligninger? Ja, to komplekse løsninger.

Hjemmeopgave B.8. Udregn $(8 - 6i)(-4 + 10i)$.
Løsning: $28 + 104i$.
Udregn $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$.
Løsning: 4.

Find samtlige rødder til følgende polynomier og omskriv polynomierne ved hjælp af deres rødder.
$f(x) = -3x^2 + 24x - 195$.
$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
Løsning:
Rødderne til $f(x)$ er $r_1 = 4 + 7i$ og $r_2 = 4 - 7i$, dvs.

$$f(x) = -3(x - 4 - 7i)(x - 4 + 7i).$$

Rødderne til $g(x)$ er $r_1 = -1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, dvs.

$$g(x) = (x + 1)(x - i)(x + i).$$

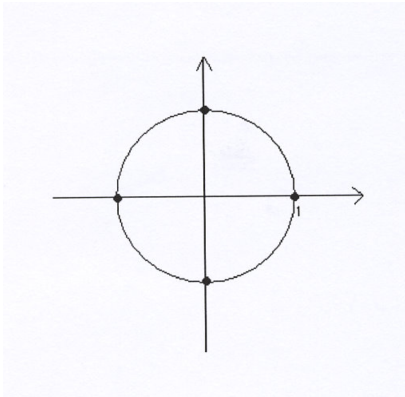
B.2 Modul 2, tirsdag d. 24/10-2006 kl. 8.00-9.40

8.00-8.05:
Opsamling af hjemmeopgaver.
Hvad var hovedresultatet i sidste modul? Sætning B.7.
I dette modul vil vi se på nogle flere egenskaber ved forskellige polynomier. Inden da vil vi se på de n'te enhedsrødder. Vi skriver en opgave på tavlen:

Opgave B.9. Find samtlige løsninger til $x^4 = 1$.
Løsning: $x = 1$, $x = -1$, $x = i$, $x = -i$.

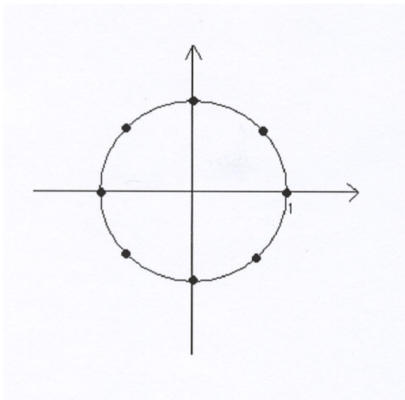
Hvor ligger disse løsninger i planen? Figur 9.

8.05-8.10:



Figur 9: De fjerde enhedsrødder.

Institutionalisering B.10. De n'te enhedsrødder er samtlige løsninger til ligningen $x^n = 1$. De inddeler enhedscirklen i planen i n dele.
Hvor ligger de ottende enhedsrødder på enhedscirklen? Figur 10.



Figur 10: De ottende enhedsrødder.

Løsningerne til $x^n = 1$ er $\varepsilon^p = cos(p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(p\frac{2\pi}{n}))$, hvor $p = 0, ..., n-1$.

Se på $x^3 = 1$. Hvad er løsningerne til denne ligning? Ved indsættelse af $n = 3$ og $p = 0, 1, 2$ i ovenstående formel fås $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vi vælger for simpelheds skyld fremover at se på n'tegradspolynomier, hvor koefficienten til n'tegradsleddet er 1, dvs. normerede polynomier.

8.10-8-16:

Udlevering af arbejdsark C.7 (appendiks C).

Opgave B.11. Skriv alle de måder man kan faktorisere følgende polynomier ud i polynomier af lavere grad?
$f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
Løsning:
$f(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.
$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x - i)(x + i) = (x^2 + (1 - i)x - i)(x + i) = (x^2 + (1 + i)x + i)(x - i) = (x + 1)(x^2 + 1)$.

8.16-8.21:

To elever fremlægger resultater på tavlen.
Kan de to polynomier faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$? $f(x)$ kan ikke, men $g(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$ kan.

8.21-8.27:

Institutionalisering B.12. Hvis et polynomium, hvor koefficienten til højestegradsleddet er 1, ikke kan faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$, kaldes polynomiet irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$; hvis det kan, kaldes det reducibelt inden for $\mathbb{Z}$. Dog gælder, at faktoriseringen $1 \cdot f(x)$ ikke betyder, at $f(x)$ er reducibelt, samt at $f(x) = 1$ ikke er irreducibelt.

Er $f(x) = x^2 + 1$ hhv. $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ fra opgave B.11 reducibelt eller irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$? $f(x)$ er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$ og $g(x)$ er reducibelt inden for $\mathbb{Z}$.

8.27-8.39:

Udlevering af note-/arbejdsark C.8.

Opgave B.13. Afgør om følgende polynomier er irreducible inden for $\mathbb{Z}$
$f(x) = x^2 - 4$
$g(x) = x^2 + 4x + 5$

Løsning:
$f(x) = (x-2)(x+2)$. Reducibelt, idet $2 \in \mathbb{Z}$.
$g(x) = (x+2-i)(x+2+i)$. Irreducibelt, idet $-2 \pm i \notin \mathbb{Z}$.

Resultaterne diskuteres.

8.39-8.46:

Institutionalisering B.14. Det kan være svært at afgøre om et polynomium af højere grad er irreducibelt, hvis man ikke umiddelbart kan bestemme rødderne. Følgende kan være til hjælp.
Overhead med følgende.

Sætning B.15 (Eisensteins irreducibilitetskriterium). *Et polynomium af grad n, $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$, med heltalskoefficienter er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$, hvis man kan finde et primtal p, så p går op i $b, ..., k$, men p ikke går op i a og p^2 ikke går op i k.*

8.46-8.53:
Udlevering af note-/arbejdsark C.9.

Opgave B.16. Er $f(x) = x^5 - 16x + 2$ irreducibelt?
Løsning: $f(x)$ er irreducibelt ifølge sætning A.14 med $p = 2$.

Metode og resultat diskuteres.

8.53-8.58:
Pause.

8.58-9.06:
Udlevering af arbejdsark C.10 (appendiks C).
Eleverne fortæller, hvad de ved om polynomierne i kassen, som også vises på overhead.

$ax^2 + bx + c$

$x^{100} - x^{99} - 3$

$x^4 + 5x^3 + x + 13$

$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$

$x^5 - 16x + 2$

$4x^3 - 3x^2 - 4x + 20$

Vi kan specifikt finde rødderne til andengradspolynomiet ved en formel; kan vi tilsvarende det til de andre polynomier i kassen?

9.06-9.19:

Institutionalisering B.17. Til tredjegrads- og fjerdegradspolynomier findes generelle formler til bestemmelse af rødderne. Disse svarer til den kendte formel til bestemmelse af rødderne til andengradspolynomiet, dog meget mere komplicerede. Overhead med formlerne (appendiks C).
Betragt formlen til bestemmelse af rødderne til tredjegradspolynomiet. Hvad består den af? Formlen består af $+$, $-$, $\cdot$, $/$, rodtegn, enhedsrødder, polynomiets koefficienter og tal, der ligger i den samme talmængde som koefficienterne.
Dette er de generelle kriterier for, hvad formler til bestemmelse rødderne til polynomier må indeholde. Vi vil gerne kunne finde sådanne formler til bestemmelse af rødderne til polynomier af vilkårlig grad.
Tror I, at der findes en generel formel til bestemmelse af rødderne til polynomier af grad større end eller lig fem?

I begyndelsen af 1700-tallet var løsningsformler til anden-, tredje- og fjerdegradsligningen kendt. Man kunne ikke finde en generel løsningsformel til femtegradsligningen og man diskuterede, hvorvidt en sådan fandtes. I 1826 kom så det endelige bevis for, at femtegradsligningen ikke har en generel løsningsformel som ligningerne af lavere grad. Det blev hermed fastslået, at ligninger af grad større end fem heller ikke kunne løses ved hjælp af en generel løsningsformel. Herefter arbejdede man på at finde en metode til at afgøre om et bestemt polynomium har rødder, der kan findes ved hjælp af en formel eller ej. Man har senere fundet ud af, at følgende gælder (overhead):

Sætning B.18. *Hvis et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{Z}$ af grad $p \geq 5$, hvor p er et primtal, har præcis $p-2$ reelle rødder, så kan man ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$.*

9.19-9.36:
Udlevering af note-/arbejdsark C.11.

Opgave B.19. Kan I afgøre om rødderne til følgende polynomium kan findes ved en formel?
$f(x) = x^5 - 16x + 2$.
Løsning:
$f(x)$ er irreducibelt fra før. Ved funktionsundersøgelse ses, at $f(x)$ har 3 reelle rødder. Sætning B.18 giver nu, at røddene til $f(x)$ ikke kan findes ved en formel.

Eleverne fremlægger resultater.

9.36-9.41:

Institutionalisering B.20. At afgøre om et bestemt polynomium havde rødder, der kunne findes ved en formel var et stort spørgsmål i 1800-tallet. Det var den franske matematiker, Evariste Galois (1811-1832), der løste problemet ved at gå en helt anden vej. Galois var et matematisk geni, der var meget revolutionær, hvorfor han tilbragte en del tid i fængsel for bla. at have truet kongen på livet. Galois kunne ikke blive optaget på École Polytechnique, da han dumpede optagelsesprøverne, og samtidens matematikere ikke forstod hans ideer. Han blev optaget på École Normale, men blev senere smidt ud, for at være med i en revolutionær gruppe. Galois' liv endte desværre tidligt, da han som blot 20-årig fik rodet sig ud i en skudduel, som han tabte. Han var sandsynligvis klar over, at han ville dø, da han natten inden duellen i hast skrev alle sine ideer ned i et brev til en ven. Han bad vennen videregive ideerne til nogle af de store matematikere. Selv om vennen fulgte hans ønske, var det først 15 år senere, at Galois' arbejde bliver udgivet. Herefter tog det igen lang tid, inden hans ideer rigtig blev forstået.

I næste modul vil vi se på et polynomiums Galoisgruppe og snuse til, hvad man kan bruge den til.

Der udleveres hjemmeopgaver (arbejdsark C.12, appendiks C)

Hjemmeopgave B.21. Afgør om følgende polynomier er irreducible.
$f(x) = x^4 - 4$
$g(x) = x^7 + 6x^6 + 2x^5 + 12x^4 + 108x^3 + 18$
Løsning:
$f(x) = x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ er reducibelt, idet $2 \in \mathbb{Z}$.
$g(x)$ er irreducibelt ifølge sætning A.14 med $p = 2$.

Kan man finde en formel til bestemmelse af rødderne til polynomiet $h(x) = x^5 - 80x + 5$?
Løsning: Nej, iflg. sætning B.18.

B.3 Modul 3, torsdag d. 26/10-2006 kl. 8.00-9.40

8.00-8.05:
Opsamling af hjemmeopgaver.
I sidste modul så vi, at man ikke kan finde en formel til bestemmelse af rødderne til polynomiet $f(x) = x^5 - 16x + 2$ ved hjælp af sætning B.18. Vi vil i dette modul se lidt nærmere på, hvorfor sætningen giver dette resultat.

8.05-8.17:
Udlevering af arbejdsark C.13 (appendiks C).

Opgave B.22. Skriv gruppen af alle permutationer af 3 elementer S_3 op, og skriv gruppen af alle permutationer af 2 elementer S_2 op.
Løsning:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

8.17-8.22:

Eleverne præsenterer resultater ved tavlen.

Hvad er en permutation? En funktion, der bytter om på elementerne i en mængde (en permutation af en mængde X er en funktion $\sigma : X \longrightarrow X$, der er injektiv).

Hvis eleverne ikke kan huske, hvad S_3 er: Gruppen S_3 består af permutationer $\sigma : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$, f.eks. ligger

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

som har værdierne $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ og $\sigma(3) = 3$.

Hvad er S_4? S_4 er gruppen af permutationer af 4 elementer.

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ . \ . \ . \right\}$$

Hvor mange permutationer ligger i S_4? S_4 har $4! = 24$ permutationer.

Hvad er S_n? Gruppen af permutationer af n elementer $\{1, 2, ..., n\}$.

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 2 & 3 & ... & 1 \end{pmatrix}, \ . \ . \ . \right\}$$

Hvor mange permutationer ligger i S_n? Der ligger $n!$ permutationer.

8.22-8.37:

Vi spørger, om nogen kan huske gruppebetingelserne.

Overhead med følgende:

Institutionalisering B.23. En gruppe $(G, *)$ er en mængde G med en komposition $*$, hvor følgende er opfyldt

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ for alle $a, b, c \in G$ (associativitet).

2) Der findes et neutralt element $e \in G$ sådan at $e * a = a * e = a$ for alle $a \in G$.

3) Til ethvert element $a \in G$ findes et inverst element $a^{-1} \in G$ sådan at $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ for alle $a \in G$.

Udlevering af noteark C.14.
Hvilke muligheder har vi for $*$? Hvilken komposition har f.eks. S_3? Muligheder for $*$ er $\cdot$, $+$ og sammensætning. S_3 har sammensætning som komposition.
Hvorfor er S_n en gruppe? Gruppebetingelserne er opfyldt.

Institutionalisering B.24. I stedet for at se på permutationer af $\{1, ..., n\}$ kan vi se på permutationer af n vilkårlige elementer f.eks.
$\{Ib, Ea, Bo, ..., Kurt\}$, hvilket stadig er gruppen S_n. Dvs. vi kan også se på permutationer af rødderne til et polynomium.

Hvilken 'talpermutation' svarer permutationen $\begin{pmatrix} Ib & Ea & Bo \\ Ea & Bo & Ib \end{pmatrix}$ til i S_3? Den svarer til permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8.37-8.46:
Udlevering af arbejdsark C.15 (appendiks C):

Opgave B.25.
1) Betragt rødderne $r = i$ og $s = -i$ til polynomiet $f(x) = x^2 + 1$.
Udregn $r^2 - 2s^4 + 3rs$.
Benyt permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix}$ på ovenstående udtryk og udregn.
Løsning: $r^2 - 2s^4 + 3rs = 0$ og $s^2 - 2r^4 + 3sr = 0$.

2) Betragt rødderne $r = 2$ og $s = -2$ til polynomiet $g(x) = x^2 - 4$.
Udregn $10 + 3r + 2rs + s^3$.
Benyt igen permutationen σ på ovenstående udtryk og udregn.
Løsning: $10 + 3r + 2rs + s^3 = 0$ og $10 + 3s + 2sr + r^3 = 4$.

8.46-8.50:
Metoder og resultater diskuteres Hvilke rødders udtryk gav stadig 0 efter permutation? Rødderne til $f(x)$ bevarede nuludtryk, men ikke rødderne til $g(x)$.
Hvad er forskellen på rødderne til $f(x)$ og $g(x)$? Rødderne i f(x) ligger uden for $\mathbb{Z}$ og rødderne i g(x) ligger i $\mathbb{Z}$.

8.50-9.00:

Institutionalisering B.26. Et generelt udtryk i to rødder r og s har formen $\sum k_{u,v} r^u \cdot (s)^v$, hvor $k_{u,v}$ er hele tal, og u og v er naturlige tal eller 0. Et udtryk i rødderne til et polynomium, hvis værdi er 0, kalder vi et nuludtryk. For rødderne i og $-i$ til $f(x)$ bliver det generelle udtryk i rødderne altså $\sum k_{u,v} i^u \cdot (-i)^v$, hvor $k_{u,v}$ er hele tal, og u og v er naturlige tal eller 0.

Hvordan kan man skrive dette udtryk kun i i? Yderligere spørgsmål til hjælp: Hvordan vil leddene se ud i det generelle udtryk i i og $-i$? Leddene vil være enten et helt tal eller et helt tal multipliceret med i. Derfor er et generelt nul-udtryk på formen $\sum k_{u,v} i^u \cdot (-i)^v = 0$, hvor $k \in \mathbb{Z}$ og u, $v \in \mathbb{N}_0$, dvs. på formen $a + bi = 0$, hvor $a, b \in \mathbb{Z}$. Hvad kan vi her sige om a og b? Her er $a = b = 0$. Hvad sker der, hvis vi benytter σ på rødderne i det generelle udtryk? Vi får $a - bi = 0$. Dvs. ethvert nuludtryk i rødderne bevares altid ved benyttelse af permutationen σ. Ved spørgsmål må vi forklare yderligere (cf. afsnit 4.2.7).

9.00-9.06:

Betragt $f(x)$. Hvad er nu den delmængde af permutationer i S_2, der bevarer alle nuludtryk rødderne i og $-i$? Hele S_2.

Betragt $g(x)$. Hvad er nu den delmængde af S_2, der bevarer alle nuludtryk i rødderne 2 og -2? Identiteten, idet vi har set et modeksempel for det andet element σ i S_2.

9.06-9.11:

Pause.

9.11-9.14

Institutionalisering B.27. Den delmængde af permutationer i S_2, der bevarer alle nuludtryk i rødderne, kalder vi Galoisgruppen for andengradspolynomiet. Altså: Galoisgruppen for $f(x)$ er S_2 og Galoisgruppen for $g(x)$ er $\{id\}$.

Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium er den delmængde af S_n, der bevarer alle nuludtryk i de n rødder.

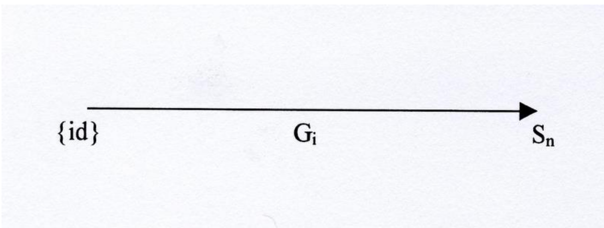
Udlevering af noteark C.16.

Hvorfor er Galoisgruppen en gruppe? Gruppebetingelserne er opfyldt:
Da alle permutationer i S_n opfylder associativitet, vil en delmængde af S_n også opfylde dette. Den neutrale permutation er identiteten, som altid vil bevare nuludtryk. Hvis en permutation bevarer et nuludtryk, vil den inverse også gøre det.

9.26-9.40:

Institutionalisering B.28. Vi har mange gange svært ved at finde rødder til n'tegradspolynomier, og finder derfor normalt ikke Galoisgruppen udfra disse. Der findes til gengæld mange sætninger, der let giver os Galoisgruppen for et polynomium. Galoisgruppen er god at have, fordi den kan vise os noget om, hvor grimme/pæne rødderne til polynomiet er. Hvis Galoisgruppen er identiteten, så har polynomiet pæne heltalsrødder, og hvis Galoisgruppen er S_n, så ligger alle rødderne uden for $\mathbb{Z}$.

Der kan for polynomier af grad større end 2 være tilfælde, hvor Galoisgruppen er en undergruppe G_i af S_n, der hverken er S_n eller identiteten.



Figur 11: Illustration af Galoisgruppens størrelse.

Det kan være svært at sige noget om rødderne i disse tilfælde, men det kan være, at nogle af rødderne ligger i $\mathbb{Z}$, og nogle ikke gør. Galoisgruppen kan hjælpe os med at afgøre, om rødderne til et polynomium kan findes ved en formel eller ej. Det viser sig, at hvis Galoisgruppen for et polynomium af grad n, $n \geq 5$, er hele

S_n, da kan man ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne. Sætning B.18 fra før, giver os faktisk Galoisgruppen:
Overhead med følgende:

Sætning B.29. *Et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{Z}$ af grad $p \geq 5$, hvor p er et primtal, der har præcis $p - 2$ reelle rødder, har S_p som Galoisgruppe og man kan derfor ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$.*

Vi udleverer til sidst noteark C.17.

C Noter og overheads

De følgende sider er de note- og arbejdsark, der udleveres til eleverne undervejs i undervisningsforløbet.

Arbejdsark C.1.

Find p og q i udtrykket

$$x^2 + 4x + 5 = (x + p)^2 + q.$$

Arbejdsark C.2.

Udregn

$$(3+8i)(-2+i)$$

Arbejdsark C.3.

Opgave 1: Løs ligningen $(x+2)^2 = -1$ fra før. Er jeres resultater løsninger til den oprindelige ligning $x^2 + 4x + 5 = 0$?

Opgave 2: Løs ligningen $x^2 + 2x + 17 = 0$.

Noteark C.4.

Komplekse tal

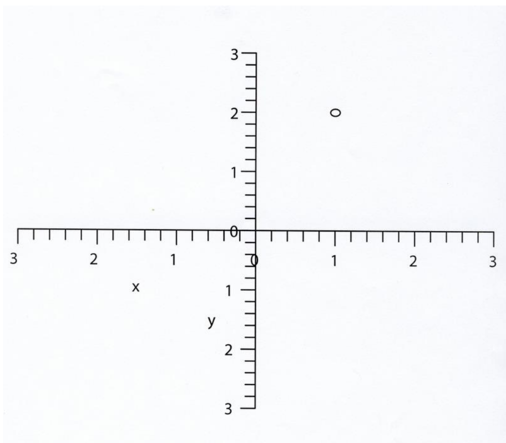
Det komplekse tal i defineres ved

$$\boxed{i = \sqrt{-1},\ \text{dvs. } i^2 = -1}$$

Mængden af alle de komplekse tal er

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Man kan afbilde de komplekse tal som punkter i planen ved at lade det komplekse tal $x + iy$ svare til punktet (x, y):



Figur 12: Det komplekse tal $1 + 2i$ afbildet i planen.

Arbejdsark C.5.

Find rødderne i følgende polynomier og omskriv polynomierne ved hjælp af deres rødder.
$f(x) = x^2 - 16x + 68$
$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
$h(x) = x^4 + 2x^3 + 16x^2 - 2x - 17 = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 17)$.

Note-/arbejdsark C.6.

Algebraens fundamentalsætning

Et polynomium $f(x)$ af grad n med koefficienter i $\mathbb{Z}$ har n rødder $r_1, ..., r_n$ i $\mathbb{C}$ talt med multiplicitet. Dvs. vi kan skrive $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$, hvor a er koefficienten til n'tegradsleddet.

Hjemmeopgaver

Udregn $(8 - 6i)(-4 + 10i)$.
Udregn $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$.

Find samtlige rødder til følgende polynomier og omskriv polynomierne ved hjælp af deres rødder.
$f(x) = -3x^2 + 24x - 195$.
$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Arbejdsark C.7.

Skriv alle de måder man kan faktorisere følgende polynomier ud i polynomier af lavere grad:

$f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Note-/arbejdsark C.8.

Irreducible polynomier

Hvis et polynomium kan faktoriseres ud i polynomier af lavere grad, der har koefficienter i $\mathbb{Z}$ kaldes polynomiet reducibelt inden for $\mathbb{Z}$, hvis ikke kaldes det irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$.

Afgør om følgende polynomier er irreducible inden for $\mathbb{Z}$:
$f(x) = x^2 - 4$
$g(x) = x^2 + 4x + 5$

Note-/arbejdsark C.9.

Eisensteins irreducibilitetskriterium

Et n'tegradspolynomium $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$ med heltalskoefficienter er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$, hvis man kan finde et primtal p, så p går op i $b, ..., k$, men p ikke går op i a og p^2 ikke går op i k.

Er følgende polynomium irreducibelt?
$f(x) = x^5 - 16x + 2$.

Arbejdsark C.10.

$$ax^2 + bx + c$$

$$x^{100} - x^{99} - 3$$

$$x^4 + 5x^3 + x + 13$$

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$$

$$x^5 - 16x + 2$$

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 20$$

Note-/arbejdsark C.11.

Kan man finde en formel til bestemmelse af rødderne til et polynomium?

Hvis et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{Z}$ af grad $p \geq 5$, hvor p er et primtal, har præcis $p-2$ reelle rødder, så kan man ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$.

Kan I afgøre om rødderne til følgende polynomium kan findes ved en formel?
$f(x) = x^5 - 16x + 2$.

Arbejdsark C.12.

Hjemmeopgaver

Afgør om følgende polynomier er irreducible.
$f(x) = x^4 - 4$
$g(x) = x^7 + 6x^6 + 2x^5 + 12x^4 + 108x^3 + 18.$

Kan man finde en formel til bestemmelse af rødderne til følgende polynomium?
$h(x) = x^5 - 80x + 5.$

Arbejdsark C.13.

Skriv gruppen af alle permutationer af 3 elementer S_3.

Skriv gruppen af alle permutationer af 2 elementer S_2.

Noteark C.14.

Grupper

En gruppe $(G, *)$ er en mængde G med en komposition $*$, hvor følgende er opfyldt

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ for alle $a, b, c \in G$ (associativitet).
2) Der findes et neutralt element $e \in G$ sådan at $e * a = a * e = a$ for alle $a \in G$.
3) Til ethvert element $a \in G$ findes et inverst element $a^{-1} \in G$ sådan at $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ for alle $a \in G$.

S_n er gruppen af permutationer af n elementer:

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 2 & 3 & ... & 1 \end{pmatrix}, \ . \ . \ . \ \right\}$$

Arbejdsark C.15.

Opgave 1: Betragt rødderne $r = i$ og $s = -i$ til polynomiet $f(x) = x^2 + 1$.
Udregn $r^2 - 2s^4 + 3rs$.

Benyt permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix}$ på ovenstående udtryk og udregn.

Opgave 2: Betragt rødderne $r = 2$ og $s = -2$ til polynomiet $f(x) = x^2 - 4$.
Udregn $10 + 3r + 2rs + s^3$.

Benyt igen permutationen σ på ovenstående udtryk og udregn.

Noteark C.16.

Galoisgruppe

Galoisgruppen for et polynomium $f(x)$ er den delmængde af permutationer i S_n, for hvilke der gælder, at alle de nuludtryk i de n rødder til $f(x)$, stadig er nuludtryk efter benyttelse af disse permutationer.

Noteark C.17.

Sætning

Et irreducibelt polynomium $f(x)$ med koefficienter i $\mathbb{Z}$ af grad $p \geq 5$, hvor p er et primtal, der har præcis $p-2$ reelle rødder, har S_p som Galoisgruppe og man kan derfor ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$.

Overhead C.18.

De tre rødder r_1, r_2, r_3 til den generelle tredjegradsligning $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ er givet ved:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{a}{3} + \left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \\ &\quad + \left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{a}{3} - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \\ &\quad + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 &= -\frac{a}{3} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Overhead C.19.

Den ene rod r_1 til den generelle fjerdegradsligning $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ er givet ved:

$$
\begin{aligned}
r_1 \quad = \quad & \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd +}} \\
& \underline{\sqrt{-4\left(b^2 - 3ac + 12d\right)^3 + \left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd\right)^2})^{\frac{1}{3}}} + \\
& (\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd +}{54} \\
& \underline{\sqrt{-4\left(b^2 - 3ac + 12d\right)^3 + \left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd\right)^2})^{\frac{1}{3}}} - \\
& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd +}} \\
& \overline{\sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2})^{\frac{1}{3}}} - \\
& (\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd +}{54} \\
& \underline{\sqrt{-4\left(b^2 - 3ac + 12d\right)^3 + \left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd\right)^2}})^{\frac{1}{3}} - \\
& \frac{-a^3 + 4ab - 8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}}} + \\
& \overline{\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

D Transskription

I henhold til transskriptionen er elevernes navne ændrede, så eleverne kan forblive anonyme. Derudover er tegnforklaringerne følgende

[ ] Vores kommentarer og uddybning for at lette forståelsen af, hvad der tales om.

[...] Når vi har udeladt noget af samtalen, som f.eks. "Har du noget kridt?"

... Pause i talen.

/.../ Når vi ikke kan høre, hvad der bliver sagt.

Vi har valgt at nummerere udsagnene, så de bliver lettere at referere til. Desuden har vi skrevet klokkeslettene i parantes, for at man f.eks. kan se, hvor lang tid eleverne bruger i handlingssituationer.

D.1 Modul 1

1. (12.12) L: "[...] [*Introduktion*]."

   [*Ved tavlen:*]

2. (12.15) L: "Vi starter med lidt velkendt. I kender jo som sagt andengradsligninger - sikkert til bevidstløshed. Så jeg vil sige: Kan I løse alle andengradsligninger?"

3. (12.15) Maria: "Man kan i hvert fald sige om de andengradsligninger, der ikke har en løsning, at de ikke har en løsning, ellers så kan man se, at der er to eller en løsning."

4. (12.15) L: "Ja, men I kan altså ikke sådan generelt løse dem, vel - nej?"

5. (12.15) Maria: "Nej."

6. (12.16) L: "Okay, men vi har i hvert fald lige et eksempel på en... Denne her ligning [$x^2 + 4x + 5 = 0$] er et eksempel på én, som jeg vil gå ud fra, I ikke kan løse, eller som vi kan sige ikke har nogen løsninger. Så vil vi gerne se lidt nærmere på, hvorfor det faktisk er, at vi ikke kan løse den."

   [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.1.*]

7. (12.16) L: "I kan bare skrive på det her papir, for vi har lavet totalt papirspild, så I får lige sådan nogle ark her som I bare kan skrive på. ... Og når der er en, der er færdig, så ville det være meget rart, hvis I lige kom op og skrev jeres løsning."

   [*Elev skriver på tavlen:*]

8. (12.17) Peter: "Bare skrive p og q op."

9. (12.17) L: "Ja, det må du gerne, [...] det er sådan set ligegyldigt. Ja, det var meget hurtigt. ... Har I alle styr på hvordan, måske du lige kan fortælle, hvordan du er kommet frem til det, Peter?"

10. (12.17) Peter: "Ja, jeg gangede parentesen [$(x + p)^2$] ud, så der står $x^2 + 2px + p^2 + q$ og $2px$ skal så være $4x$, så p må være 2, og så skal $p^2 + q$ være 5, så da p^2 er 4 må q være 1."

11. (12.18) L: "Kunne I følge med, eller skal vi skrive noget op her. Ok, så vi har altså, at det her udtryk [$(x+p)^2+q$], ... altså at de her to er ækvivalente [$x^2 + 4x + 5 = 0$ *og* $(x + 2)^2 + 1 = 0$]. ... Ok, hvis vi nu lige f.eks. ... Ok, hvad er det lige, der går galt her [$(x + 2)^2 = -1$]? Ja Maria?"

12. (12.18) Maria: "Du kan ikke sætte noget i anden og få et negativt tal."

13. (12.18) L: "Nej, så derfor har vi virkelig et oplagt eksempel på, hvor det er, det går galt, når vi skal løse de her ligninger, hvor diskriminanten bliver negativ. Jeg vil så lige nævne faktisk, at alle andengradsligninger kan skrives på den her form [$(x + p)^2 + q$], ... hvor p og q det er relle tal, alt efter hvad koefficienterne er selvfølgelig. Så vi kan altid få sådan, og det er virkelig tydeligt at se, hvad det er, der går galt. Ok, hvis vi nu faktisk nu vil vi faktisk gerne løse denne her ligning [$(x + 2)^2 = -1$] alligevel, og hvis det nu var et positivt og ikke et negativt tal, der står her [-1 *i ligningen* $(x + 2)^2 = -1$], hvad ville I så gøre for at komme videre? Ja, Peter?"

14. (12.19) Peter: "Tage kvadratroden på begge sider."

15. (12.19) L: "Ja, så hvis vi nu gør det alligevel. ... Hvad får vi så herovre [*højresiden af* $(x + 2)^2 = -1$)]?"

16. (12.19) Peter: "Kvadratroden af -1 eller i."

17. (12.19) O: "Der er en, der kender det."

18. (12.19) L: "Der mangler lige?"

19. (12.19) Peter: "$\pm\sqrt{-1}$."

20. (12.20) L: "Ja. ... Ok, det her [$\sqrt{-1}$] det giver selvfølgelig ikke mening inden for de reelle tal, så for at løse den her slags ligninger så bliver vi nødt til at udvide vores talbegreb, altså udvide de reelle tal. Så vi tager lige det her [$\sqrt{-1}$], og det definerer vi til, som du sagde, du har vist set det før, tror jeg, det kalder vi i. Så vi har altså, at - [...] ja, så vi definerer altså ... $\sqrt{-1}$ til at være i - hvad er så i^2? Ja, Maria?"

21. (12.21) Maria: "-1."

22. (12.21) L: "Ja. ... Ok, så nu har vi altså faktisk lige pludselig fundet et tal, der i anden giver -1 og det her tal det kan vi faktisk regne med, ligesom vi kan regne med alle mulige andre tal."

    [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.2, som eleverne regner.*]

    [*Ved tavlen:*]

23. (12.24) L: "Er I ved at være nået til et resultalt? Ja, er der nogen, der vil sige, hvad de har fået?"

24. (12.24) Mikael: "$-14 - 13i$."

25. (12.24) L: "Ja. ... Det var bare lige en lille regneøvelse. Er der nogen, der ikke har fået det? ... Hvis der er nogen, der ikke har fået det, så må du gerne regne det på tavlen, ellers så går vi bare videre. ... Ja, ok. ... Så har vi en opgave til."

    [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.3.*]

26. (12.25) L: "Ok, nu har I det her [$i = \sqrt{-1}$] ... tallet i, som er $\sqrt{-1}$ til hjælp. ... Og så kan I se, om I nu kan løse de der ligninger, der er i opgaven."

    [*Eleverne regner.*]

27. (12.26) L: ”Og igen når der er to, der bliver færdige, så må I godt gå op og skrive løsninger på hhv. den første og den anden opgave op på tavlen.”
28. (12.28) Mikael: ”Skulle vi gå op og skrive, hvis vi har et resultat?”
29. (12.28) L: ”Ja.”
30. (12.28) Mikael: ”Hvilken en af dem skal jeg så vælge?”
31. (12.28) L: ”Bare den første.”
32. (12.28) O: ”Du må gerne skrive ligningen op også, den oprindelige, så vi kan huske, hvad det er for en.”

    [*Mikael skriver på tavlen:*]
33. (12.29) Mikael: ”Ja, det er bare den samme som før [$x + 2 = i$]. Skal jeg tage den anden også.”
34. (12.29) O: ”Hvad er x?”
35. (12.29) Mikael: ”Nåh, ja men så - /.../ så skal jeg regne videre og alt muligt /.../.”
36. (12.29) O: ”Prøv at regne den [$(x + 2)^2 = -1$] fra starten af, så vi får mellemregningerne med. ... Hvordan er det, når man tager kvadratroden på begge sider?”
37. (12.30) L: ”Ok, når du hæver en potens, så plejer du altid at gøre noget, når du tager kvadratroden på begge sider ik'? Hvis du regner tilbage, så kan der også stå...?”
38. (12.30) Mikael: ”Nåh ja, så er det selvfølgelig $\pm$.”
39. (12.30) L: ”Ja.”
40. (12.30) Mikael: ”Ahh smart, og så kan jeg bare flytte 2 over igen [i $x + 2 = \pm i$] ik'? ... Men det er vel, -2 det må være det samme som $2i$.”
41. (12.31) L: ”-2 er bare -2.”
42. (12.31) Mikael: ”Nåh, sådan her [$x = -2 \pm i$], ok, skal jeg tage den næste også? Eller er nogen andre der har lyst? Peter?”

43. (12.31) Peter: "Nej, jeg indsatte lige først resultatet [*i ligningen*], som der står [*i opgaven*]."

44. (12.31) L: "Ja, men det må du faktisk også gerne gøre, hvis du vil. ... Jeg ved ikke, om du har svaret på det også - om det her resultat rent faktisk er løsning."

45. (12.31) Mikael: "Åhh nej, det har jeg ikke lige fået gjort."

46. (12.31) L: "Ok, nå men det kan du [*Peter*] jo så gøre, og så er der en af jer andre, der kan tage toeren måske."

    [*Peter skriver på tavlen.*]

47. (12.32) L: "Er der en, der har mod på den anden opgave?"

48. (12.32) Peter: "Skal jeg også tage den anden?"

49. (12.32) L: "Nej, det behøver du måske ikke."

50. (12.34) O: "Ellers kan de måske også bare skrive, hvor langt de er kommet, for det kan godt være, vi muligvis får lidt besvær med at blive helt færdige."

51. (12.34) L: "Ok. ... Mikael vil du tage den anden også?"

52. (12.34) Mikael: "Nej, jeg tror, jeg holder her."

53. (12.34) L: "Ok, men du kan i hvert fald godt lige fortælle, hvad du har gjort her [$(x+2)^2 = -1$]."

54. (12.34) Mikael: "Ja, men når man tager kvadratroden af -1, så bliver det i, og så skal man huske $\pm$, og så flytter man jo sådan set bare 2 over."

55. (12.34) L: "Ja, så vi har - ... så x [$= -2 \pm i$] her bliver faktisk en løsning til ligningen [$x^2 + 4x + 5 = 0$], som vi har set passer. Ok. ... Og så har vi bare nummer to, jeg kan måske give et lille hint, vi har jo at $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$, det kan I måske bruge som hjælp til den anden, når I nu ved det her [*læreren skriver hintet på tavlen*]."

    [*Eleverne regner.*]

    [*Ved Marias plads:*]

56. (12.36) Maria: "Kan man forkorte det og bruge den samme metode på den her [$x + 1 = \pm\sqrt{-16}$]?"

57. (12.36) L: "Jo, du kan godt bruge den metode der, hvor du splitter p og q, det må du gerne. Du må gerne komme op og skrive det på tavlen."

    [*Maria skriver på tavlen:*]

58. (12.36) Maria: "Skal jeg lave udregninger, eller skal jeg kun skrive resultatet."

59. (12.36) L: "Du må gerne lave udregninger ... og sige, hvad du gør."

60. (12.36) Maria: "Jeg laver den her [$x^2 + 2x + 17$] om til formlen, der hedder $(x + p)^2 + q$, og den kan vi lave om, så den hedder $(x + 1)^2 + 16 = 0$ ikk? Så dvs., at hvis jeg så tager 16 og sætter over på den anden side og tager kvadratroden, så står der, at $x + 1 = \pm\sqrt{-16}$. Og $\sqrt{-16}$ det er det samme som $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}$, så den her kan vi skrive om igen, så den hedder $x + 1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}$, $\sqrt{-1}$ er defineret til i, $\sqrt{16}$ er 4. Så står der $4i$, og så står der $\pm$ ik' foran kvadratroden, og så er $x = 4i - 1$ eller $-4i - 1$."

61. (12.38) L: "Ja. ... Så igen så har I faktisk to løsninger til en ligning, hvor diskriminanten er mindre end 0. I kan også løse den, hvis der er nogen, der har gjort det, ved jeres normale formel ved hjælp af diskriminanten. Er der nogen, der har gjort det på den måde? Ved hjælp af diskriminanten? ... Nej, men det er også fuldstændig ligegyldigt, fordi I får, at en diskriminant, der er mindre end 0, minus diskriminanten [$-d$] det hedder det jo ikke, men det er bare lige et tegn for, at diskriminanten er negativ. Og så igen som Maria gjorde, så har vi, at det her [$-d$] er $-1 \cdot d$. Dvs. $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{d}$ og så kan man bare sætte det [$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{d}$] ind i formlen, I kender, i stedet for. Men det er en meget smart måde at gøre det på den her [*omskrive til* $(x + p)^2 + q$], for man kan virkelig se normalt, hvad det er, der går galt. Det hedder faktisk, hvad er det, det hedder - kvadratets fuldendelsesmetode."

62. (12.39) O: "Nå, men vi er jo meget foran i tidsplanen, så lad os vente med at holde pausen."

63. (12.39) L: "Ja ja. ... Ok, det her tal i, det hedder det komplekse tal i. [...] i det er altså et komplekst tal. Generelt så er alle de komplese tal - ...

generelt så er de komplekse tal - ... de er på formen $x + iy$ [...]. Kan I se, det er komplekse tal, I har fundet som løsninger, hvor x og y det er reelle tal, og mængden af de komplekse tal det plejer man at skrive som sådan et stort $\mathbb{C}$, det er så bare mængden af alle de her [$x + iy$], hvor x og y de er reelle tal. ... Ok, som I kan se, så er alle tal faktisk komplekse tal, for hvis vi har, det her er mængden af alle de komplekse tal [*tegner cirkel som repræsentant for mængden af de komplekse tal*], så hvis vi har de reelle tal - de vil jo så ligge her inde i [*tegner cirkel som repræsentant for* $\mathbb{R}$ *inden i cirklen for* $\mathbb{C}$], hvor der gælder at $y = 0$, så har vi så bare x er alle de reelle tal; de ligger her, og igen så har vi så - ja osv. så ligger de rationale tal og de hele tal og de naturlige tal jo som sagt her inde i [*tegner cirkler for* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *og* $\mathbb{N}$]."

64. (12.42) L: "De her komplekse tal, det kan man faktisk godt sige, at det er punkter i planen, for man kan faktisk repræsentere alle de her komplekse tal som punkter i en todimensional plan [...]. Her har vi et velkendt todimensionalt plan, så gælder der faktisk, at det komplekse tal $x + iy$ det svarer til punktet (x, y) i planen. ... Ok, så alle de tal der ligger på denne her akse [x-*aksen*], hvad er det for nogen tal? Peter ja?"

65. (12.43) Peter: "De reelle tal."

66. (12.43) L: "Ja, det er alle de reelle tal, de vil så ligge her, det er alle de tal, hvor $y = 0$, det står her [*peger på definitionen af mængden* $\mathbb{C}$], hvis $y = 0$, så er det bare x, det er alle de reelle tal. Hvad er det så for nogen tal, der ligger på denne her [y-*aksen*]? Maria?"

67. (12.44) Maria: "De komplekse tal."

68. (12.44) L: "Ja, men der gælder - det er lige nogle bestemte af de der komplekse tal. ... Ja, Peter?"

69. (12.44) Peter: "Det er alle dem, hvor x er 0."

70. (12.44) L: "Ja, så alle dem der ligger her, det er dem, der bare hedder noget med iy. Så det komplekse tal, der ligger her, hvad hedder det? Ja, Peter?"

71. (12.44) Peter: "$3 + 0i$."

72. (12.44) L: ”Ja, og hvad er det så for et, vi har liggende her? Maria?”
73. (12.45) Maria: ”Bare i.”
74. (12.45) L: ”Ja, i ligger her, og hvad hvis vi så tager det tal, der ligger her? Josefine?”
75. (12.45) Josefine: ”$-i$.”
76. (12.45) L: ”Ja, så faktisk så er alle komplekse tal, det er bare punkter i planen. Så det er jo meget sjovt.”
77. (12.45) O: ”Måske vi også skulle have et punkt, der ikke ligger på nogen af akserne. Vil I ikke gerne se sådan et også?”
78. (12.45) L: ”Ja ok, vi kan lige... Hvad er så det, der ligger her? Ja, Børge?”
79. (12.45) Børge: ”$-2 - i$.”
80. (12.46) L: ”Ja. ... Så jeg har lige en lille side til jer her. ... Så det er altså den grafiske repræsentation af de komplekse tal.”

    [*Uddeling af noteark med komplekse tal.*]

    [*Pause.*]

    [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.5.*]

    [*Eleverne regner.*]
81. (13.04) L: ”/.../ Hvis I har problemer med kvadratets fuldendelsesmetode, så kan I jo også bruge den, som I kender med diskriminanten.”
82. (13.04) Peter: ”Skal jeg skrive op?”
83. (13.04) L: ”Ja, du må gerne komme op og skrive løsningerne op, hvis der er nogen, du er færdig med. ... Du kan tage etteren”
84. (13.05) Peter: ”Etteren - jeg må ikke tage h, så tager jeg ikke h.”

    [*Peter skriver på tavlen.*]
85. (13.06) L: ”I må gerne regne videre på de andre, så kan vi snakke om den bagefter.”

86. (13.06) Peter: "Skal jeg bare skrive den næste?"

87. (13.06) L: "Nej, måske vi skal have..."

88. (13.07) L: "Er der ikke en af jer, der har mod på at skrive h op, selvom I ikke er helt færdige?"

89. (13.08) L: "Er der nogen, der har kigget på de to sidste?"

90. (13.08) Elever: "Ja."

91. (13.08) L: "Ok, så kan vi gøre det lidt sammen måske. Ok, har I allesammen fået det, som Peter har fået i den første?"

92. (13.08) Elever: "Nej."

93. (13.08) L: "Så må du hellere lige komme op og regne den ud for os."

94. (13.08) Peter: "Det første."

95. (13.08) Mikael: "Regn den ud, regn den ud pædagoisk og langsomt."

96. (13.08) Peter: "Ja, det første - ja vi kan jo prøve at gange det ud, x^2+64+4 det er 68 $-2\cdot 8\cdot x$, det er $-16x$ ok. Så sætter vi for at finde rødderne, så kan vi i stedet for sætte det her $[(x-8)^2+4]$ lig 0. Det betyder, at $(x-8)^2 = -4$. Så tager vi kvadratroden på begge sider $x - 8 = \pm\sqrt{-4}$, dvs. $\sqrt{-4}$ det er $2i$, og det betyder at $x = 8 \pm 2i$. [...] Dvs. $f(x)$ kan skrives som x minus den ene rod $-8 - 2i$ gange x minus den anden rod $8 + 2i$ ok."

97. (13.10) L: "Fik I det? Er der nogen, der har protester?"

98. (13.10) Elever: "Nej."

99. (13.10) L: "Er der ikke en, der har lyst til at prøve at skrive g op - også selvom I ikke er helt færdige? ... Ja ok, Maria?"

    [*Maria skriver på tavlen:*]

100. (13.10) Maria: "Først så gættede jeg på, at 2 var en løsning, og det kan jeg regne ud for så... Og hvis så man prøver at sætte 2 ind. [...] Så vi har allerede en rod, og så vil vi prøve at finde et udtryk, hvor at vi siger, vi skal finde ud af, hvad resten er, når vi ved, at vi kan skrive den op som $x - 2$

gange et eller andet. Så vi bruger polynomiers division. [...] Så konklusionen er, at man kan sætte den op som det her led [$(x-2)$] gange det her led [(x^2+4x+5)] - eller den her faktor gange den her faktor. Den her har vi løst før [x^2+4x+5], hvor vi fandt ud af, at løsningerne var hhv., løsningerne til denne her [x^2+4x+5] lig 0, det var hhv. $x=-2-i$ eller $x=-2+i$, og så kender vi de tre rødder, og så kan man bare sætte dem ind. [...] Og så kan vi bare skrive den op, så den hedder $(x-2)(x+2+i)(x+2-i)$ sådan."

101. (13.14) L: "Ja."

102. (13.14) Mikael: "Hvorfor kan man skrive den op på den sidste formel, altså hvorfor kan man skrive den op som de der tre parenteser?"

103. (13.15) Maria: "Så prøv at gange dem sammen."

104. (13.15) L: "Som de her tre?"

105. (13.15) Mikael: "Ja."

106. (13.15) L: "Altså du ved - har I ikke lært at, jo det tror jeg - at et andengradspolynomium hvis det har to rødder, så kan det skrives som x minus den ene rod gange x minus den anden rod, i hvert fald hvis der står 1 her. Hvis der står et eller andet foran [*foran højestegradsleddet*], så skal man lige gange med det også - kan I huske det - det må I næsten have set før. Og så viste Maria lige, at man kunne skrive det [*tredjegradspolynomiet*] som denne her [$x-2$] gange et andengradspolynomium. [...] Og det her [x^2+4x+5] er et andengradspolynomium, som også kan skrives i to faktorer."

107. (13.15) O: "Altså det er alle polynomier, også et tredjegradspolynomium kan også skrives ved hjælp af sine tre rødder, hvis det har tre rødder."

108. (13.16) L: "Hvad med den sidste, hvem har lige mod på at skrive den op? Er der ikke en af jer andre ud over Peter som lige kunne tænke sig det også selvom I ikke er helt færdige? ... Nej, slet ikke, bare lidt af den?"

109. (13.16) L: "Ok, hvis vi så deler den op, det har vi endda været så søde at gøre. ... Denne her faktor Børge det må du kunne svare på, hvad er

rødderne i det her polynomium $[x^2-1]$? ... Hvis vi kalder den her $[x^2-1]$ for $f(x)$. ... Hvis vi sætter den lig 0 [*Børge ser fortvivlet ud*]. Ja [*til Katja*]?"

110. (13.17) Katja: "Det må så være $(x+1)(x-1)$."

111. (13.17) L: "Ja, rødderne i den her er ± 1, hvordan vil I så skrive $f(x)$ op, hvis I skulle faktorisere den? Ja, Mikael?"

112. (13.17) Mikael: "Det må så være $(x+1)(x-1)$."

113. (13.18) L: "Ja, $h(x)$ som vi havde... Den må så kunne skrives som det her $[(x+1)(x-1)(x^2+2x+17)]$. Er der nogen, der har fundet rødder i det her polynomium $[x^2+2x+17]$? Det får I lige to minutter til - bare at finde rødder i det her polynomium. Enten ved hjælp af metoden der oppe eller bare ved hjælp af jeres helt almindelige diskriminantformel."

    [*Eleverne regner.*]

    [*Ved tavlen:*]

114. (13.21) L: "Ja, Josefine?"

115. (13.21) Josefine: "Jeg har fået $x = -4i - 1$, og $x = 4i - 1$."

116. (13.21) L: "Ja, og hvordan vil du så skrive den op sådan faktoriseret?"

117. (13.21) Josefine: "Så vil jeg skrive $x + 4i + 1$ og $x - 4i + 1$."

118. (13.22) L: "Altså med de her komplekse tal, hvor mange løsninger har en andengradsligning så altid? Ja?"

119. (13.22) Mikael: "To."

120. (13.22) L: "Ja, en andengradsligning vil altid have to løsninger, når vi må regne inden for de komplekse tal. Hvor mange løsninger tror I så altid, en tredjegradsligning har? Josefine?"

121. (13.22) Josefine: "Så har den vel tre."

122. (13.23) L: "Ja, og hvor mange løsninger ser det ud til, at en fjerdegradsligning har? Ja, Peter?"

123. (13.23) Peter: "Fire."

124. (13.23) L: "Ja, sådan ser det i hvert fald ud umiddelbart, men det er faktisk rigtigt, at det gælder. Hvor mange tror I, at sådan en som den her [$f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$] har? Hvor mange rødder tror I, at det her polynomium [$f(x)$] har? Hvad siger du Siv?"

125. (13.23) Siv: "n antal, det ved jeg ikke."

126. (13.23) L: "n det er rigtigt, den har n rødder, dem kalder vi lige $r_1, r_2, ..., r_n$ - og hvordan vil I så skrive den ved hjælp af, nu er det måske ikke lige den her, ... for ellers kan det godt være, at det bliver forkert. Men hvis det her det nu er rødderne, hvordan vil I så faktorisere det her polynomium? Josefine?"

127. (13.24) Josefine: "Jeg ville skrive $(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$."

128. (13.24) L: "Ja, det er helt rigtigt, og der er faktisk en sætning, der siger, at det er rigtigt. Nu vil vi godt nok ikke bevise den, for det her bevis det er virkelig langt. Men I har lært, at en n'tegradsligning, hvis der står et eller andet med koefficienter på her [$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + jx + k$], at sådan en n'tegradsligning den har højst n rødder inden for de reelle tal, men når vi snakker inden for de komplekse tal, så har den faktisk præsis n rødder; det er så talt med multiplicitet, dvs. at det kan godt være, at der er nogen af de her [$r_1, r_2, ..., r_n$], der er dobbelt rødder, ligesom et andengradspolynomium kan have en dobbelt rod, men den har faktisk præsis n rødder [...]."

    [*Overhead med AFS.*]

129. (13.26) L: "Ok, altså det her det er en sætning som... [...] Algebraens Fundamentalsætning hedder den, som siger at et polynomium $f(x)$ af grad n med heltalskoefficienter, det gælder faktisk også med de andre koefficienter, med koefficienter i, med reelle koefficienter, det gælder faktisk også med komplekse koefficienter, men det har vi ikke rigtig set på, hvis den har n rødder $r_1, ..., r_n$."

130. (13.27) O: "Nej, den har n rødder."

131. (13.27) L: "Ja, som har selvfølgelig har n rødder."

132. (13.27) O: "Det er det sætningen siger."

133. (13.27) L: "Hvad var det egentlig, jeg sagde?"

134. (13.27) O: "Det var fordi, du sagde, hvis den har n, så siger jeg, sætningen siger, den har n rødder."

135. (13.27) L: "Nå ok, sætningen siger, at et polynomium af grad n har netop n rødder i de komplekse tal, hvis man tæller med multiplicitet, og det vil så sige, at vi kan skrive den op på den her måde [*peger på faktoriseringen*], hvis vi faktoriserer den, hvor a det så er koefficienten til n'tegradsleddet til højstegradsleddet."

     [*Uddeling af noteark med AFS.*]

136. (13.28) L: "Ok, så faktisk nu så har vi, at et polynomium har det antal rødder, som højestegradsleddet angiver ved hjælp af de her komplekse tal. Og nu har vi jo alt for god tid, så må vi jo lige se, om vi kan finde på noget andet. Ok, med det for øje så vil vi gerne snakke lidt om nogle enhedsrødder, tror jeg, er det det, vi vil gøre?"

137. (13.29) O: "Ja, det er det, vi vil."

138. (13.29) L: "Ja, men for det første vil jeg gerne have jer til at kigge på den her ligning [$x^4+1=0$] og prøve at finde rødder til den eller finde løsninger til den, hedder det jo, når det er en ligning [...]."

     [*Eleverne regner.*]

139. (13.32) L: "Hvad er det, jeg har skrevet? [...] Prøv begge to [$x^4+1=0$ *og* $x^4-1=0$]."

     [*Ved tavlen:*]

140. (13.34) L: "Ja, måske hvis I kigger på denne her [$x^4-1=0$], det var i hvert fald også min intention, at det var den, jeg skulle have skrevet, den anden er måske sådan lidt. Men hvad ved I ifølge AFS, som I lige har set og fået udleveret? Hvad skal så i hvert fald gælde? Maria?"

141. (13.35) Maria: "Den har fire rødder."

142. (13.35) L: "Ja, er der nogen bud på, hvad de rødder de er?"

143. (13.35) Mikael: ”Er det den nederste [$x^4 - 1 = 0$], vi er ved nu?”

144. (13.35) L: ”Ja. ... Josefine, hvad siger du?”

145. (13.35) Josefine: ”$\sqrt{i}$ og $-\sqrt{i}$.”

146. (13.35) L: ”Prøv lige at sige det igen.”

147. (13.35) Josefine: ”$\sqrt{i}$.”

148. (13.35) L: ”Det er den nederste.”

149. (13.35) Josefine: ”Nåh, men så er jeg ikke med.”

150. (13.36) L: ”Hvad siger Peter?”

151. (13.36) Peter: ”1 og -1 og så ville jeg mene, at de var dobbeltrødder.”

152. (13.36) L: ”Det er de faktisk ikke.”

153. (13.36) Peter: ”Nåh aha.”

154. (13.36) L: ”Ja?”

155. (13.36) Peter: ”$\pm i$ også.”

156. (13.36) O: ”Det kan være, at den skal regnes på tavlen måske, eller i hvert fald du måske lige kunne sige, hvordan man gør?”

157. (13.36) Peter: ”Ja, det kan jeg godt. Læg 1 til først på begge sider, så tager du kvadratroden i første omgang, så $x^2 = \pm 1$.”

158. (13.37) L: ”Så $x^2 = \pm 1$.”

159. (13.37) Peter: ”Og så kvadratroden på begge sider igen, så $x^2 = \sqrt{1}$, eller $x^2 = \pm$, eller $\pm\sqrt{i}$.”

160. (13.37) L: ”Jeg kan ikke rigtig følge med. [...] Ja, videre.”

161. (13.37) Peter: ”Og så tage kvadratroden på begge sider igen [*af* $x^2 = \pm 1$].”

162. (13.37) L: ”Kvadratroden på begge sider her [$x^2 = \pm 1$]?”

163. (13.37) Peter: ”Ja. ... Så får du $\pm\sqrt{\pm 1}$, og det vil så være i det ene tilfælde $\pm\sqrt{1}$ og i det andet tilfælde $\pm\sqrt{-1}$.”

164. (13.37) L: ”Ja, og faktisk så hedder... Altså løsninger til ligninger, der er af denne her form [$x^n - 1 = 0$]... Løsninger til ligninger der er af denne her form, det hedder de n'te enhedsrødder, og dem kan man tegne, hvis man ser på - hvis vi har vores lille enhedscirkel her.”

165. (13.38) O: ”Det var de fjerde enhedsrødder, vi fandt før.”

166. (13.38) L: ”Ja, se de her [± 1 *og* $\pm i$] de er de fjerde enhedsrødder, og generelt så hedder de løsninger til ligninger af denne her form [$x^n = 1$], de hedder de n'te enhedsrødder. Godt, hvis vi har enhedscirklen her [*tegner enhedscirklen*], så kan vi sige, at de n'te enhedsrødder de vil ligge rundt på den her cirkel, dvs., de fjerde enhedsrødder de indeler den her cirkel i fire, det er faktisk lige præsis de fjerde enhedsrødder, vi tegner her. Så hvis vi nu har de, ja?”

167. (13.39) Maria: ”Hvad var det, du sagde, at definitionen på en enhedsrod var?”

168. (13.39) L: ”Altså ja, den har jeg sådan set ikke skrevet op endnu, men det er løsninger til ligninger af denne her form, lige præsis denne her form $x^n - 1 = 0$. Hvis vi nu havde f.eks. $x^8 - 1$, hvor tror I så, de ville ligge henne på enhedscirklen? Vi vil gerne få en op at tegne? ... Ok, jeg kan også tegne, Peter hvor tror du, de vil være henne?”

169. (13.39) Peter: ”Selvfølgelig den i otte [*enhedscirklen inddelt i otte dele*], så 45 grader.”

170. (13.40) L: ”Ja, så de ottende enhedsrødder de ligger her.”

171. (13.40) O: ”Så de fire de er også med, de fire andre vi fandt før, så der er otte af dem, det skulle der i hvert fald meget gerne være.”

172. (13.40) L: ”Ja, så sådan vil det generelt være for enhedsrødder, at de ligger - inddeler den her enhedscirkel i alt efter, hvad n selvfølgelig er.”

173. (13.40) Maria: "Er det også ligesom radianer man regner med, eller er det bare sådan nogle afsætninger ind i et kordinatsystem?"

174. (13.41) L: "Altså det gælder faktisk... Det gælder, at de n'te enhedsrødder er de her: $\varepsilon^p = cos(p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(p\frac{2\pi}{n}))$, hvor p løber fra 0 til $n-1$. Der er altså n styk [...]. 1 vil altid være en løsning til denne her [$x^n - 1 = 0$]. Så 1 er altid en enhedsrod. [...] Vi plejer at kalde de n'te enhedsrødder for ε^p [...]. Vi kunne jo prøve at sætte $n = 4$, og så se hvad vi får i formlen. [...]. Man får altså alle de fjerde enhedsrødder ved at - altså i nulte, det var 1, det blev vi enige om, at det var altid en enhedsrod, så har vi så ε^1, den er her - i, og så ϵ^2, hvad er det? Ja?"

175. (13.44) Peter: "-1."

176. (13.44) L: "Ja, så fik vi den [*peger på enhedscirklen*], og så ϵ^3, og 3 det er jo $n-1$. Hvad er ϵ^3? Maria?"

177. (13.45) Maria: "$-i$."

178. (13.45) L: "Ja, så fik vi dem alle fire. Og hvad er så ϵ^4?"

179. (13.45) Maria: "Det må være 1."

180. (13.45) L: "Ja, så ryger vi heldigvis tilbage igen, og sådan kan vi sådan set blive ved, så ϵ^5 så ryger vi der op og ϵ^6 osv. [*peger på enhedscirklen*]. Det er derfor, vi kun behøver at tage dem fra 0 til 3 [...]."

181. (13.46) O: "Der er nogle hjemmeopgaver på det der, vi har udleveret, som I meget gerne må lave til i morgen [...]."

D.2 Modul 2

[*Ved tavlen:*]

182. (8.02) L: "Har I kigget på de der hjemmeopgaver? Der var lige nogle stykker. Er der nogen, der har nogen problemer med nogen af dem?"

183. (8.02) Mikael: "Ja, de to sidste."

184. (8.02) L: "De to sidste?"

185. (8.02) Mikael: ”Ja.”

186. (8.02) L: ”Ok, måske vi skulle have en op at regne dem så. Hvad med dig Katja har du lyst til at tage en af dem - bare en af dem?”

187. (8.02) Katja: ”Det kan jeg godt, det var den næstsidste ikke også?”

188. (8.02) L: ”Jo.”

[*Katja skriver på tavlen:*]

189. (8.03) L: ”Det er $-3x^2$ ik'?”

190. (8.03) Katja: ”Jo, og så sætter jeg -3 uden for en parentes. ... Og så kan man så faktorisere den her [$x^2 - 8x + 65$]. ... Og så siger man, at 0 det er lig med det her [$(x-4)^2 + 49$]. ... Og så kan man så dividere med $+3$, og så går den ud - og så trække 49 fra. ... Og så når man tager kvadratroden af det, så bliver det altså $\sqrt{-49}$. ... Og så har jeg så fået, at x=4 $\pm\, i7$, og når man så skriver det op... [*skriver resultatet med fortegnsfejl*].”

191. (8.05) O: ”Hvad er det nu man siger - man siger x, og hvad siger man så - plus eller minus roden?”

192. (8.05) Katja: ”Det må være så være minus her.”

193. (8.05) O: ”Ja, det er minus roden x minus roden og det samme for den anden også, der er ikke nogen fortegnsforskel foran 4, der er det bare minus.”

194. (8.05) L: ”Ja, er I med? Må jeg spørge dig, der havde problemer, var det faktoriseringen eller var det...?”

195. (8.05) Mikael: ”Jeg ved ikke, jeg har bare svært ved at se det der for mig og gøre det.”

196. (8.05) L: ”Se hvad?”

197. (8.05) Mikael: ”Bare sådan at komme i gang, jeg ved ikke, hvad det er, jeg må åbenbart bare være virkelig dårlig til at faktorisere.”

198. (8.06) O: ”Men hvad nu hvis du bare skulle løse en andengradsligning?”

199. (8.06) Mikael: "Ja, men det ville jo ikke være noget specielt stort problem, men jeg ved ikke hvorfor."

200. (8.06) L: "Det du har, det er, at hvis du har et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, det har to rødder. Vi siger, at det har en rod, der hedder r_1, og en rod, der hedder r_2, det er de to rødder til det her andengradspolynomium. Hvordan er det så, vi skriver faktoriseringen op - så kan vi skrive $f(x)$ som?"

201. (8.06) Mikael: "Det er $a(x - r_1)(x + r_1)$, eller r_2 bliver det så."

202. (8.06) O: "Det er altid minus."

203. (8.06) Mikael: "Nåh, det er altid minus - ok."

204. (8.06) L: "Ja, man kan altid faktorisere ved at skrive x minus den ene rod gange x minus den anden rod, hvis det er et andengradspolynomium. Hvis det er et tredjegradspolynomium, så kommer der selvfølgelig en faktor mere på. Det er sådan set bare det, det vil sige at faktorisere, så ser det selvfølgelig lidt mærkeligt ud, når du har de komplekse rødder, for så er det ligesom om, der kommer et led mere på, eller hvad skal man sige, så ser det selvfølgeligt lidt grimmere ud, men du skal tænke på, at det her $[4 + 7i]$ det er stadigvæk et tal, det er de her komplekse tal, det er bare et generelt komplekst tal. Så selvom det ser lidt mere forvirrende ud, så er det her $[4 + 7i]$, det er stadig et tal, som stadigvæk er en rod."

205. (8.07) Mikael: "Ja."

206. (8.07) O: "Og man behøver jo bestemt ikke at finde roden med den metode, som vi viste jer i går, det er rigtig fint, at I benytter den så meget, men I kan jo sagtens finde rødderne på den helt almindelige måde, som I plejer."

207. (8.07) Mikael: "Ja, men det giver meget god mening nu."

208. (8.07) L: "Ja."

209. (8.08) O: "Men det er en rigtig fin måde at gøre det på [*Katjas metode ved tavlen*], for så ser man jo netop, hvorfor det er, at man faktoriserer ud på den måde med, at man sætter a udenfor."

210. (8.08) L: "Ja, det er sikkert også fordi, at man lige skal vende sig til at se på de der tal [*henvendt til Mikael*], ja."

211. (8.08) O: "Jeg ved ikke, I havde ikke nogen problemer med udregning af de der komplekse tal, jeg ved ikke om vi lige skal have resultaterne op, så vi kan se om alle har fået det samme eller om vi bare, det er måske ikke så vigtigt?"

212. (8.08) L: "Ja, jeg ved ikke, om vi skal kigge på den anden også - skal vi kigge på $g(x)$ også? Hvad siger I?"

213. (8.08) Mikael: "Nej, jeg tror - jeg tror, at jeg godt kan finde ud af det nu."

214. (8.09) L: "Vi kan godt prøve at regne den på tavlen."

215. (8.09) Mikael: "Jeg synes - I skal ikke gøre det for min skyld."

216. (8.09) L: "Hvis der er nogen, der synes, det er svært, så synes jeg, vi skal gøre det - regne den på tavlen. ... Ok, men så siger vi, at det var det. Ja, sidste time - modul hedder det jo. Hvad var det, vi så der?"

217. (8.09) Maria: "At man kan udregne samtlige polynomier ved hjælp af de komplekse tal, hvis man har et polynomium af grad n, så kan man finde de n rødder."

218. (8.10) L: "Ja. ... Det er helt korrekt. Jeg synes faktisk lige - vi så på de her enhedsrødder sidste gang [...]. Jeg tror lige, at vi bruger fem minutter på at samle det op. ... Og som sagt når vi har en n'tegradsligning, så har den n rødder, så hvis vi har ligningen, der hedder $x^n = 1$, så har den de her [1, ϵ, ϵ^2,...,ϵ^{n-1}], ... den har n rødder, som vi kalder de n'te enhedsrødder, som jo er, jeg ved ikke, hvorfor de hedder ϵ, men det kalder de dem, de hedder ϵ, og alle de n'te enhedsrødder, de har formen $\epsilon^p = \cos(p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(p\frac{s\pi}{n})$, hvor $p = 0, 1, 2, ..., n-1$. Der er altså n stk. af de her ... Og de her de er altså rødder til den der [$x^n = 1$]. Hvis vi har $x^3 = 1$ f.eks., så har vi selvfølgelig altid 1, og hvor mange stykker er det så, vi skal inddele den her i [*enhedsciklen*]? Siv, nej Josefine?"

219. (8.12) Josefine: "Tre stykker."

220. (8.12) L: ”Ja, hvis vi inddeler den i tre, så er det så sådan cirka her og cirka her, så hvis vi prøver og sige - ok den her, hvor ligger den [ϵ] henne, så skal vi sætte ind i den her formel, så hvad får vi så, hvis vi siger - vi har den her, den her det er ϵ^0, så kan vi finde den her ϵ^1, ϵ^2, ϵ^3, som er lig det samme som ϵ^0, altså så ϵ^1 den bliver så hvad? ... Hvis vi bruger formlen og siger, vi har $p = 1$, og vi ved, hvad er n? Ja, Maria?”

221. (8.13) Maria: ”3.”

222. (8.13) L: ”Ja, er der så en, der kan sætte ind i formlen? ... p er 1. /.../ Er der nogen, der kan huske, hvad $cos(\frac{2\pi}{3})$ er? Peter?”

223. (8.14) Peter: ”$-\frac{1}{2}$.”

224. (8.14) L: ”Ja, og sinus til det samme?”

225. (8.14) Peter: ”$\frac{\sqrt{3}}{2}$.”

226. (8.14) L: ”Ja, så den første enhedsrod den ligger her i det komplekse plan, så det her punkt det er det komplekse tal $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ [*peger på enhedscirklen*]. Det var lige en lille opsamling. [...] Ja, i dag så skal vi så se på nogle egenskaber ved polynomier. ... Og der var lige en opgave her.”

    [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.9.*]

    [*Eleverne regner.*]

    [*Ved Sivs plads:*]

227. (8.17) L: ”Ok, hvis du ser på f, hvis du skal faktorisere den, hvad vil du så starte med at gøre?”

228. (8.17) Siv: ”Fordele i nogen parenteser.”

229. (8.17) L: ”Ja, og det gør man ved hjælp af?”

230. (8.17) Siv: ”Rødderne.”

231. (8.17) L: ”Ja, så hvis du starter med /.../.”

232. (8.17) Siv: ”Ja, ok.”

233. (8.17) L: ”Det vil være en rigtig god ide, så kigger du på de to og prøver at finde ud af, hvis du finder... r_1 og r_2.”

234. (8.17) Siv: ”Jeg skal bare lige sidde lidt med det.”

235. (8.17) L: ”Ja ja, men det kan du jo lige prøve at kigge på.”

[*Ved Katjas plads:*]

236. (8.18) L: ”[...] Det ser meget rigtigt ud, prøv at se hvis du kigger på [*opgaveformuleringen*], hvor der står alle mulige måder, ... den der [$(x+1)(x-i)(x+i)$] hvis du kigger på den, kan du ikke gøre mere ved den?”

237. (8.19) Katja: ”Ikke sådan rigtigt.”

238. (8.19) L: ”Men hvis du ganger de to sammen, er det så ikke en faktorisering også, den er måske ikke fuldstændig, men den er der. ... Og sådan kan du faktisk også gøre med de andre.”

[*Ved Mikaels plads:*]

239. (8.22) Mikael: ”Hvad skal jeg gøre her?”

240. (8.22) L: ”Hvad vil du starte med at gøre med $g(x)$?”

241. (8.22) Mikael: ”Så vil jeg umiddelbart gætte en rod.”

242. (8.22) L: ”Ja.”

243. (8.22) Mikael: ”Og det er -1.”

244. (8.22) L: ”Ja, og hvad vil du så gøre?”

245. (8.22) Mikael: ”Så kan man sætte x uden for en parentes /.../.”

246. (8.22) L: ”Hvad plejer du at gøre, efter du har gættet en rod? Hvordan kan du så skrive polynomiet?”

247. (8.22) Mikael: ”I hvert fald $x+1$ der ik'?”

248. (8.22) L: ”Ja, og hvad er der så tilbage? Hvordan vil du finde det?”

249. (8.22) Mikael: ”Nåh, så kan man sætte det der [$x+1$] udenfor en parentes måske.”

250. (8.22) L: ”Jahh. ... Ellers så er der noget, der hedder polynomiers division.”

251. (8.23) Mikael: ”Ja /.../.”

252. (8.23) L: ”Ja, men det er rigtig nok, det kan skrives som $(x + 1)$ gange et andengradspolynomium /.../.”

253. (8.23) Mikael: ”Så er det sådan, det er ik’?”

254. (8.23) L: ”/.../.”

[*Ved tavlen:*]

255. (8.24) L: ”Er der et par stykker, der vil skrive resultaterne på tavlen? Josefine?”

256. (8.24) Josefine: ”Hvad for en skal jeg tage?”

257. (8.24) L: ”Du må vælge.”

258. (8.24) L: ”Og hvad med dig [*til Kim*]?”

259. (8.24) Kim: ”Helst ikke.”

260. (8.24) L: ”Du har da lavet etteren.”

261. (8.25) Kim: ”Jah, men det - jeg kigger bare på.”

262. (8.25) L: ”Ok.”

263. (8.25) Josefine: ”Jeg kan godt tage den anden?”

264. (8.25) L: ”Nej, bare [*tag etteren*].”

[*Josefine skriver på tavlen.*]

265. (8.25) L: ”Mikael vil du så ikke skrive den anden op?”

266. (8.25) Mikael: ”Jo, toeren - skal det bare være resultatet, eller skal der udregninger med?”

[*Mikael skriver på tavlen:*]

267. (8.25) L: ”[...].”

268. (8.25) L: "Du kan måske bare fortælle, hvad du har gjort og så skrive resultatet [*til Mikael*]."

269. (8.25) Mikael: "Ja, altså jeg startede med at forsøge at gætte en rod, og det var ikke så forfærdeligt svært, for det var -1, og hvis du så lige rykker 1 over, så kan du godt gætte det. Og så laver man polynomiers division bagefter, det kan være, at jeg lige skal skrive resultatet. ... Fordi når man har gættet den første rod, så kan man skrive den første parentes op $[x+1]$, og så ved man, at så må det der [*det der er tilbage*] være andengradspolynomiet, og det kan man så finde ved at dividere det der $[x+1]$ op i den der $[x^3+x^2+x+1]$, og så får man x^2-1 [*skriver den fuldstændige faktorisering på tavlen*]."

270. (8.26) Josefine: "Mangler du ikke nogle løsninger?"

271. (8.26) L: "Jo, det gør du, men det var også fordi, du ikke fik lov at regne opgaven helt færdig, men fordi - er der flere måder, du kan faktorisere den her på."

272. (8.26) Mikael: "Altså, du kan jo godt vælge at gange nogle af parenteserne sammen - skal jeg gøre det?"

273. (8.27) L: "Ja, det kan du godt."

274. (8.27) Mikael: "/.../."

275. (8.27) L: "Det er fint."

276. (8.27) Mikael: "Er det ikke sådan, det er?"

277. (8.27) L: "Jo."

278. (8.27) O: "Måske der er nogen - hvis der var nogen, der havde ganget sammen på andre måder, kunne måske gå op og skrive resultatet."

279. (8.28) L: "Er der nogen, der har flere forslag? Peter?"

280. (8.28) Peter: "Der er lige en fortegnsfejl."

281. (8.28) L: "Er der en fortegnsfejl. I den her? [...] I den der?"

282. (8.28) Peter: "/.../."

283. (8.28) L: "Ja, det er rigtigt. Er der nogen, der har flere forslag til, hvordan man kan gange de her sammen? Ja, Peter?"

284. (8.28) Peter: "Skrive eller sige det?"

285. (8.28) L: "Bare sig det."

286. (8.28) Peter: "$(x+i)(x^2-ix+x-i)$."

287. (8.28) L: "Ja, så er der vist en til tilsvarende med minus her [$(x-i)(x^2+ix+x+i)$]. ... Kan I se, hvad der står - ja, det kan man vist godt. Ok, er der nogen af de her f og g - f eller g, som man kan faktorisere ud i mindre polynomier, der har heltalskoefficienter? ... Er der nogen af de her polynomier - hvis man faktoriserer dem ud på en eller anden måde, at de mindre polynomier får koefficienter, der ligger i $\mathbb{Z}$, altså som er hele tal? Mikael?"

288. (8.29) Mikael: "I g der kunne du vel sætte x uden for en parentes, kunne du ikke det?"

289. (8.29) L: "Hvad siger du?"

290. (8.29) Mikael: "Kan du ikke bare sætte x uden for en parentes?"

291. (8.29) L: "Sætte x hvor henne?"

292. (8.29) Mikael: "Altså nåh, nu tænker jeg bare helt fra starten af."

293. (8.29) L: "Hvis du kigger på faktoriseringerne - du har en faktorisering her [*peger på en af de fire faktoriseringer af* $g(x)$], du har en faktorisering her, så har du de her to også den her og den her. Og herovre [*peger på* $f(x)$] der er der jo kun den her ene [*faktorisering*]. Er der nogen af de her, som hvor de enkelte faktorer er polynomier, der har heltalskoefficienter?"

294. (8.30) Maria: "Jeg tror ikke, vi forstår spørgsmålet."

295. (8.30) L: "Ok, måske lige - så skal jeg lige se om - altså når et polynomium har heltalskoefficienter, dvs., at hvis vi har et eller andet f.eks. ax^2+bx+c,

så betyder det, at a og b og c de er hele tal. Er der nogen af de her [$f(x)$ *og* $g(x)$], hvor de enkelte faktorer ser sådan her ud [ax^2+bx+c, $a,b,c \in \mathbb{Z}$] eller et eller andet hvilken som helst potens. Ja, Maria?"

296. (8.30) Maria: "Er det ikke bare den midterste der?"

297. (8.30) L: "Den her? Ja, den der er god nok, hvad med nogen af de andre?"

298. (8.31) Maria: "i er jo ikke et helt tal."

299. (8.31) L: "Nej, så det er den eneste. ... Der gælder, at et polynomium, hvis vi kalder det $f(x)$, det er irreducibelt ... irreducibelt i $\mathbb{Z}$, hvis man ikke kan faktorisere det ud i mindre polynomier med heltalskoefficienter, så det er irreducibelt i $\mathbb{Z}$, hvis man ikke kan faktorisere $f(x)$ ud i - altså nu skriver jeg mindre polynomier, det betyder af lavere grad ik' - i mindre polynomier med heltalskoefficienter, så er det irreducibelt. Hvis man kan faktorisere det ud ligesom den her [$g(x)$], så hedder det, at det er reducibelt ... i $\mathbb{Z}$, og det er det selvfølgelig, hvis det ikke er irreducibelt."

300. (8.33) O: "Hvad er det nu, der skal gælde for, at den definition den er helt korrekt?"

301. (8.33) L: "Nå ja, vi kigger - det har jeg selvfølgelig glemt at sige - at vi kigger fra nu af kun på polynomier, hvor højestegradsleddet er 1, ellers så er det sådan lidt mere særligt, og det kan vi snakke om, hvis vi har tid til sidst. Men den her definition er faktisk kun helt rigtig, hvis vi har et polynomium, hvor højestegradsleddet har koefficient 1. Så der hvor der bare står 1 her foran, det hedder faktisk også, at polynomiet er normeret, men det er lige meget, men ellers så er der sådan lidt finurligheder, og ja, som sagt det kan vi snakke om, hvis vi har tid til sidst."

    [*Uddeling af note/arbejdsark med definition af irreducibilitet og opgave 1.11.*]

    [*Eleverne regner.*]

302. (8.35) L: "/.../."

    [*Ved Marias plads:*]

303. (8.37) Maria: "Må jeg spørge om noget?"

304. (8.37) L: "Ja."

305. (8.37) Maria: "Når der står sådan et ekstra led [+1], er den [$(x+2)^2+1$] så reducibel?"

306. (8.37) L: "Et ekstra led?"

307. (8.37) Maria: "Hvis man kan omskrive den til $(x+2)^2+1$?"

308. (8.37) L: "Den der [+1] det er jo ikke - når der står plus, så er det jo ikke en rigtig faktor, kan man sige. Hvis du faktoriserer, så må du kun skrive ud i ting, der er ganget sammen. Så hvis det her [*peger på det sidste led i* $(x+2)^2+1$] skal være med, så skal det være inden i [*en parentes*]."

309. (8.37) Maria: "Ja, ok."

[*Ved Mikaels plads:*]

310. (8.38) Mikael: "Altså... /.../ Så er rødderne $-2 \pm i$, så står der jo sådan her [$(x+2-i)(x+2+i)$]. Hvis man så ganger dem ind, så kan jeg få det der."

311. (8.38) L: "Hvis du hvad?"

312. (8.38) Mikael: "Hvis du ganger de der parenteser ud ik'?"

313. (8.38) L: "Hvis du ganger de der parenteser ud."

314. (8.38) Mikael: "Det må være x^2, og det må være $(-i)^2$ og $+i$."

315. (8.38) L: "Hvordan er det lige, du ganger to parenteser sammen?"

316. (8.38) Mikael: "Årh for fanden, ... jeg prøver lige igen."

317. (8.38) O: "Men inden du gør det, hvad er det, du har fået der [$(x+2-i)(x+2+i)$]?"

318. (8.38) Mikael: "Hvad det er lig med?"

319. (8.39) O: "Ja, hvad er det, du har fundet her."

320. (8.39) Mikael: "Det er bare $g(x)$ er det ik'?"

321. (8.39) O: "Jo, så hvad skulle du gerne få, når du ganger det ud?"
322. (8.39) Mikael: "Så skulle jeg gerne få $g(x)$ ik'?"
323. (8.39) O: "Jo."
324. (8.39) Mikael: "Nåh, så kan det ikke svare sig at gange det ud. Det er en meget god pointe."

    [*Ved Kims plads:*]

325. (8.39) L: "Det ser meget rigtigt ud."
326. (8.39) Kim: "Er der ikke et eller andet galt her?"
327. (8.39) L: "Nej, hvad skulle der være galt?"
328. (8.39) Kim: "Det ved jeg ikke?"
329. (8.39) L: "Hvordan er det, du har gjort her? Du har fundet [2 *og* -2]."
330. (8.39) Kim: "Ja, og så satte jeg det bare ind [*i* $(x - r_1)(x - r_2)$]."
331. (8.39) L: "Ja. [...]."

    [*Ved tavlen:*]

332. (8.40) L: "Har du ikke lyst til at lave den første på tavlen [*til Kim*]?"
333. (8.40) Kim: "Helst ikke."
334. (8.40) L: "Helst ikke. Du har jo ellers lavet den helt rigtigt."
335. (8.40) Kim: "Ja."
336. (8.40) L: "Men stadigvæk ikke?"
337. (8.40) Kim: "Nej."
338. (8.40) L: "Nej, ok. [...] Hvad med Katja?"
339. (8.40) Katja: "Ja, det kan jeg godt [...]."

    [*Katja skriver på tavlen.*]

340. (8.40) L: "Er der en, der har lyst til at lave toeren?"

341. (8.40) Josefine: "Ja, jeg kan godt."

342. (8.40) L: "Ja. [...]."

    [*Josefine skriver på tavlen.*]

343. (8.42) L: "Her [*peger på tavlen, hvor der står:* $(x+2)^2+1$ *irreducibelt*] må du lige komme med en lille forklaring [*til Josefine*]."

344. (8.42) Josefine: "Ja, jeg omskriver det bare, og så kan jeg se, at jeg ikke kan reducere det, uden jeg bruger i, som ikke er med i $\mathbb{Z}$."

345. (8.42) L: "Dvs., hvis du skulle skrive det ud i faktorer, nu er det jo sådan, at når man faktoriserer - det ved jeg ikke, hvor meget I har snakket om - men når man faktoriserer - det gør man kun ved at skrive sådan nogle ting her [$(\ )\cdot(\ )\cdot(\ )$], der er ganget sammen. ... Sådan en her - det er ikke en faktor [*peger på det sidste led i* $(x+2)^2+1$]."

346. (8.42) O: "Faktor betyder gange."

347. (8.42) L: "Ja, at faktorisere det er at skrive ting, man ganger sammen. Men du har helt ret, altså hvis du regner det her ud og finder x, hvad ville det så blive?"

348. (8.43) Josefine: "Så ville det blive noget med i i hvert fald."

349. (8.43) L: "Ja."

350. (8.43) Josefine: "$i-2$ ville det ikke?"

351. (8.43) L: "Jo. [...] Ok, så hvis vi skal skrive den her ud i faktorer, sådan rigtige faktorer, hvordan kommer den så til at se ud? Maria?"

352. (8.43) Maria: "$(x-i+2)(x+i+2)$."

353. (8.43) L: "Sådan der? [...] Ok, har vi andre muligheder for at skrive den her op som parenteser ganget sammen?"

354. (8.44) Maria: "Nej."

355. (8.44) L: "Nej, du må gerne sige det, fordi så får vi hvad? - Hvis man skulle gange det yderligere sammen, Maria?"

356. (8.44) Maria: "Så får vi g."

357. (8.44) L: "Ja, så den her er, som du helt rigtigt sagde, irreducibel."

[*Pause.*]

[*Overhead med Eisensteins irreducibilitetskriterium.*]

358. (9.00) L: "Det her er Eisensteins irreducibilitetskriterium, som siger, at hvis vi har et n'tegradspolynomium, som ser sådan der ud [$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$], det gælder så - selvom det ikke er normeret, selvom det er det, vi kigger på i vores tilfælde - som har heltalskoefficienter, det er irreducibelt inden for $\mathbb{Z}$, hvis man kan finde et primtal, sådan at primtallet går op i alle koefficienter undtagen den første, men p ikke går op i den første - ja det var så lige det, jeg sagde før - og der skal gælde, at p^2 ikke går op i den sidste altså i konstantleddet."

[*Uddeling af note/arbejdsark med Eisensteins irreducibilitetskriterium og opgave 1.14.*]

359. (9.01) L: "Og vi ville faktisk meget gerne have lavet et bevis for den her eller haft jer til at bevise det, men vi har haft sådan lidt tidspres, så det får I heller ikke lov til."

[*Ved Kims plads:*]

360. (9.02) L: "Kan du forstå sætningen?"

361. (9.02) Kim: "Ja."

362. (9.02) L: "Hvad er et primtal?"

363. (9.02) Kim: "Det er, når 1 og tallet selv er de eneste, der deler det."

364. (9.02) L: "Ja, kan du finde et primtal, der går op i /.../."

[*Ved tavlen:*]

365. (9.03) L: "Det ved jeg selvfølgelig ikke lige, om det er helt klart, at når et tal går op i et andet tal, det betyder altså, at den deler den fuldstændigt, altså så I får et helt tal ud."

366. (9.03) Mikael: "Må det godt være et negativt tal?"

367. (9.03) L: "Ja, det må det gerne, det må bare ikke være en brøk, det skal bare være et helt tal. Altså, så hvis a går op i b, så skal det give et helt tal c f.eks., hvor c det er helt. Det må gerne give et negativt tal, men det skal være et helt tal."

[*Ved Kims plads:*]

368. (9.03) L: "Ja, så p skal gå op i de her, de der står der, men ikke?"

369. (9.03) Kim: "Den første."

370. (9.03) L: "Ja, og så skal der også gælde at?"

371. (9.03) Kim: "At p^2 ikke må gå op i 2."

372. (9.03) L: "Ja, kan du finde sådan et p? Du kan jo starte fra en ende af, hvad er det første p?"

373. (9.04) Kim: "1 er ikke et primtal?"

374. (9.04) L: "Nej."

375. (9.04) Kim: "Hvad med 3?"

376. (9.04) L: "Prøv midt i mellem."

377. (9.04) Kim: "2 /.../."

378. (9.04) L: "Hvis vi nu siger, at p er 2."

379. (9.04) Kim: "Så går p op i -16 og 2 men ikke i 1."

380. (9.04) L: "Ja. det er helt rigtigt. Hvad med p^2?"

381. (9.05) Kim: "Den går ikke op i 2."

382. (9.05) L: "Ja."

[*Ved Josefines plads:*]

383. (9.05) Josefine: "Er det ikke ligemeget, om det er -2 eller $+2$?"

384. (9.05) L: "Altså primtal det er altid de positive tal."

385. (9.05) Josefine: "Ok."

386. (9.05) L: "Primtal er per definition defineret som naturlige tal, hvor der gælder, at det kun er 1 og tallet selv, der går op i det."

   [*Ved tavlen:*]

387. (9.05) L: "Er der nogen der vil svare på spørgsmålet? ... Børge?"

388. (9.05) Børge: "Det er irreducibelt, man kan bruge primtallet 2."

389. (9.06) L: "Ja, og det er jo en meget smart sætning ik'? [...]."

   [*Overhead og uddeling af arbejdsark med polynomiumskasse.*]

390. (9.06) L: "Ok, nu skal vi snakke lidt om polynomier, så I kan lige få et minut til at tænke over, hvad I egentlig kan sige om de forskellige polynomier, der er i denne her kasse - efter hvad vi sådan har fået at vide om polynomier indtil videre."

   [*Eleverne tænker og snakker lidt sammen.*]

391. (9.07) L: "Vi kan vist godt tage det sådan lidt hen af vejen - hvis I nu kigger på den første [$ax^2 + bx + c$], hvad kan vi sige om den? Josefine?"

392. (9.08) Josefine: "Vi kan sige, at den har to rødder."

393. (9.08) L: "Det er rigtigt. Hvad kan vi ellers sige? To rødder ja det er rigtigt, hvor er de rødder henne?"

394. (9.08) Josefine: "Hvor de er henne?"

395. (9.08) L: "Ja, hvordan vil de se ud? ... I hvilken talmængde er de?"

396. (9.08) Josefine: "Nåh, de er irrationale - næh, det er ikke sikkert."

397. (9.08) L: "Mikael?"

398. (9.08) Mikael: "De er vel i de komplekse tal."

399. (9.08) L: "Ja, vi er sikre på, den har to komplekse tal. Hvad kan vi ellers sige om den? ... Kan vi sige noget om, om det er reducibelt eller irreducibelt? ... Kan vi ikke sige noget om det? Hvad siger Peter?"

400. (9.09) Peter: ”Det kommer an på - altså det kommer an på, om den har nogle rødder i de reelle tal /.../.”

401. (9.09) L: ”Ja, vi faktoriserede andengradspolynomier lige før, og vi kunne se, at det afhang af, hvor rødderne var. Hvis rødderne er komplekse, så er den irreducibel, og hvis de er heltal, så vil den være reducibel. Kan vi finde de her rødder? Maria?”

402. (9.09) Maria: ”Hvis vi kender koefficienterne, ellers så har vi et udtryk eller en formel for, hvordan man finder rødderne.”

403. (9.09) L: ”Ja, så det er jo ret meget, vi ved om den her i virkeligheden, selvom der bare er bogstaver. Hvad med den næste - den her [$x^{100} - x^{99} - 3$], hvad kan I sige om den? ... Mikael?”

404. (9.10) Mikael: ”Vi ved i hvert fald, at den må have 100 rødder, der ligger i de komplekse tal.”

405. (9.10) L: ”Ja, kan vi sige andet om den? Josefine?”

406. (9.10) Josefine: ”Den er reducibel.”

407. (9.10) L: ”Hvordan kan du se det?”

408. (9.10) Josefine: ”Fordi den ikke opfylder reglen /.../.”

409. (9.10) L: ”Og hvordan kan du afgøre det?”

410. (9.10) Josefine: ”Fordi koefficienten foran x^{99} kan ikke have et tal - nåh nej, at et af de tal, nåh nej, det er nok ude foran, så er der ikke noget p, der opfylder kravene.”

411. (9.10) L: ”Nej, det er rigtigt. Man kan sige, at vi kan i hvert fald ikke bruge sætningen på den. Det er lidt svært at sige andet om den måske.”

412. (9.10) O: ”Ja, for der er jo det med sætningen, at den kan kun fortæller os, om noget er irreducibelt, men det er ikke sådan, at hvis man ikke kan bruge den, at den så nødvendigvis er reducibel.”

413. (9.11) L: ”Ja, det er rigtigt nok, det er ikke omvendt, den fortæller kun, om det er irreducibelt, den kan ikke fortælle, om noget er reducibelt, den kan bare sige, at den er i hvert fald ikke irreducibel, fordi at der kan ikke findes et primtal, hvor det gælder. Ja?”

414. (9.11) Mikael: ”Kan man godt have et polynomium, der hverken er irreducibelt eller reducibelt?”

415. (9.11) O: ”Nej, det er noget vrøvl ik'? Altså, vi kan sige, at vi kan ikke sige med sikkerhed, om den er irreducibel, det er det, vi ikke kan - den kan godt være irreducibel, men vi kan ikke udtale os om den.”

416. (9.11) Mikael: ”Ok.”

417. (9.11) O: ”Den er enten det ene eller det andet.”

418. (9.11) L: ”Ja, det vil den altid være. Ok, hvad med den her [x^4+5x^3+x+13]? [...] Siv hvor mange rødder har den?”

419. (9.11) Siv: ”Fire.”

420. (9.11) L: ”Ja, kan vi sige noget om, om den er irreducibel?”

421. (9.12) Siv: ”Umiddelbart vil jeg sige, at det er den ikke. Vi skal finde et primtal, der går op i b ik'?”

422. (9.12) L: ”Hvis du kan bruge den sætning, vi havde lige før, så skal du finde et primtal, der går op i den [5] og den [1], der står her, og den her [13], kan du finde det?”

423. (9.12) Siv: ”Umiddelbart ikke nej.”

424. (9.12) L: ”Nej, så det er også svært at bruge sætningen på den. Så vi kan ikke rigtig sige, om den er irreducibel eller reducibel, men vi ved i hvert fald, at den har fire rødder. Hvad med den her [$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$]? ... Peter?”

425. (9.12) Peter: ”Den har n rødder.”

426. (9.12) L: ”Kan du finde en rod, hvis n er et eller andet bestemt?”

427. (9.13) Peter: ”-1 er rod, hvis n er ulige.”

428. (9.13) L: ”Ja, det er i hvert fald rigtigt, men kan du ellers sige noget om den?”

429. (9.13) Peter: ”/.../.”

430. (9.13) L: ”Ja. ... Hvad med den her $x^5 - 16x + 2$, hvad kan vi sige om den? Maria?”

431. (9.13) Maria: ”Den må være irreducibel, fordi primtallet 2 går op i b og c, men går ikke op i a, og 2^2 går ikke op i c, så den må være irreducibel.”

432. (9.14) L: ”Ja, hvad med rødderne?”

433. (9.14) Maria: ”Der er fem rødder inden for de komplekse tal.”

434. (9.14) L: ”Ja, så kan vi lige kigge på den sidste [$4x^3 - 3x^2 - 4x + 20$] hurtigt. ... Hvor mange rødder har den f.eks.?”

435. (9.14) Mikael: ”Den har tre rødder, og vi kan ikke sige noget om, om den er irreducibel.”

436. (9.14) L: ”Nej, det kan vi ikke. Kan vi f.eks. sige noget om - kan vi indskrænke det lidt? Ok, vi kan sige, at den har tre komplekse rødder, men har den også nogen, der ligger inden for et lidt mindre område? ... Hvis vi nu f.eks. ser på grafen for sådan et polynomium? Peter?”

437. (9.14) Peter: ”Den har mindst en reel rod.”

438. (9.15) L: ”Ja, I ved godt, hvordan grafen til sådan et tredjegradspolynomium ser ud? Jeg kan ikke tegne den helt rigtigt, den er sådan en her ik’ [*tegner skitse i luften*]. Så den har mindst en reel rod. Ja, rødderne til den her [$ax^2 + bx + c$], dem kunne vi jo eksplicit finde ved hjælp af en formel, som vi har. Tror I man kan det for nogen af de andre altså for 100-grads, fjerdegrads, n’tegrads, tror I, man kan finde tilsvarende? ... I kan jo måske kun gætte på det, hvad tror I?”

439. (9.15) Elever: ”Ja/nej.”

440. (9.15) L: "Ok, det kan jeg godt se, at det kan være ret svært at sige noget om - men faktisk så gælder der, at man for tredjegradspolynomier også kan finde rødderne ved en formel. De ser faktisk sådan her ud."

[*Overhead med fomler for rødderne til tredjegradspolynomiet.*]

441. (9.16) L: "De er rimelig store ik'? Det er så de tre rødder, der er givet der. Vi kan sige - for fjerdegradspolynomier gælder det faktisk også, det her er så én rod [*overhead med en rod til fjerdegradspolynomiet*], og den tager jeg rimelig hurtigt af igen, for den er helt vanvittig - og den altså - I kan godt se, at den er rimelig ubrugelig, også selv om man havde en computer - den er helt håbløs, men de findes generelt. Ligesom for andengradspolynomier kan man finde rødderne for tredje- og fjerdegradspolynomier vha. de her formler. Altså som sagt så er de jo helt fucked up, de er jo vanvittige, det ville heller ikke engang rigtigt hjælpe, hvis man havde en computer, men de er der - man ville selvfølgelig i praksis skulle bruge nogle algoritmer for at finde dem. Tror I så også, at man ville kunne finde sådan nogen for femtegradspolynomier og højere? Hvad siger Josefine?"

442. (9.17) Josefine: "Kan man ikke godt det, for vi skrev den der formel - nåh nej, det var enhedscirklen [*formlen for enhedsrødder*]."

443. (9.17) L: "Hvad siger Peter?"

444. (9.17) Peter: "Nej."

445. (9.17) L: "Godt gæt. Det kan man faktisk ikke generelt - der findes ikke generelt nogen formler sådan tilsvarende. Altså for de der store formler - det var sådan, hvis du havde et hvilket som helst fjerdegradspolynomium, så ville du kunne bruge den formel, sådan en findes der ikke til femtegradspolynomier og højeregrads - og det er jo meget mærkeligt, men man kan godt sige sig selv, at de kan komme til at være ret grimme. Og faktisk så troede man i 1800-tallet - der var en mand, der hed Abel, en nordmand, der troede, at han havde fundet sådan en formel helt generelt, men han fandt så lidt efter ud af, at det kunne han ikke, og modbeviste det hele, og viste så, at man faktisk ikke kunne finde en generel formel. Efter det så blev man interesseret i at kunne sige - hvis man havde et konkret poly-

nomium - et eller andet konkret femtegradspolynomium f.eks. - om man så for lige præsis det her polynomium - om man kunne finde en formel, sådan at rødderne til lige præsis det kunne puttes ind i en formel, så man kunne finde alle de fem rødder vha. den. Altså så [*man ville finde ud af*] om der var nogle bestemte klasser af femtegradspolynomier - om der galt noget bestemt - sådan at lige præsis den, man kiggede på, havde en eller anden formel, som rødderne kunne udtrykkes ved. Og når vi siger, at vi finder rødderne ved hjælp af en formel, så betyder det, at man har [...]. Når vi skal finde sådan en formel her - hvis vi kigger på tredjegradstilfældet - tredjegradspolynomiet. Nu er det selvfølgelig skrevet op som en ligning, men hvis det var et polynomium, så skulle der bare stå $f(x)$. Hvad består sådan en her af [*peger på formlen til bestemmelse af rødderne til tredjegradspolynomiet*]? ... Det er ligesom også med andengradspolynomiets rodformel, hvad består sådan en her af? ... Der er f.eks. et minus her, så det består den i hvert fald af, hvad ellers? Hvad kan I ellers se for jer? Maria?"

446. (9.20) Maria: "At der er, hvad hedder det, opløftet i $\frac{1}{3}$ potens, så det er kubikroden af, men jeg ved ikke, om det er det, du vil have, vi skal sige."

447. (9.20) L: "Jo, det er da i hvert fald med."

448. (9.20) Maria: "plus."

449. (9.21) L: "Plus, ja. ... Det er - her kan vi jo se, at der er minus, der er plus, der er gange, hvis vi siger, at der står $\frac{1}{54}$ her foran, så er det gange. Vi kan også sige, der er dividere med - hvis vi bare dividerer med 54. [*Formlen*] som består af division - divisionsting også - og den består, som vi sagde, af kubikrod, der er også hele tal med - 27, 54 - og de her [*peger på de tredje enhedsrødder*]. Den der [$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$] hvad er det for en, og hvad er den her for en [$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$]? ... Hvis I tænker lige sådan cirka en time tilbage? [*Læreren løfter lærredet og peger på de tidligere definerede enhedsrødder*] Maria?"

450. (9.22) Maria: "Var det ikke en enhedsrod til $x^3 + 1 = 0$?"

451. (9.22) L: "Jo, dvs. det er en?"

452. (9.22) Maria: "Det er et komplekst tal."

453. (9.22) L: "Ja, det er den tredje enhedsrod."

454. (9.22) Maria: "Den tredje enhedsrod - ja ok."

455. (9.22) L: "Og det var jo den, som var en løsning til $x^3 = 1$ - så sådan en er der altså også med i formlen til bestemmelse af rødderne til en tredjegradsligning. Så generelt så består formler til..."

456. (9.22) Maria: "Var det ikke $x^3 = -1$?"

457. (9.22) L: "$x^3 = 1$."

458. (9.22) O: "Ja, det er jo så det samme som $x^3 - 1 = 0$."

459. (9.22) L: "Ja ja."

460. (9.22) O: "Nåh, men jeg tror bare, at det var det hun..."

461. (9.23) L: "Nåh, ok ja. Så formler til polynomier af grad n, de består altså af n'te rødder, ligesom du sagde; kubikroden, der er det samme som opløftet i $\frac{1}{3}$. De består af n'te rødder; de består af plus, minus, gange, division og tal, der ligger i den mængde, hvor koefficienterne til polynomiet ligger, og n'te enhedsrødder. Det er det, vi kan bruge, for at vi kan have en formel til bestemmelse af rødderne. Og det kan jo være ret svært at afgøre, om man sådan lige kan finde sådan en formel for et polynomium. Men det ville man virkelig gerne engang, og det var faktisk en franskmand, der hed Galois, der ligesom var banebrydende, og det skal vi lige snakke om. Men først skal I lige have den her, fordi man har fundet ud af, at der gælder - vi hiver altså en kanin op af hatten her."

   [*Overhead med sætning B.18.*]

462. (9.24) L: "Det er jeg lidt ked af, og den er lidt uden sammenhæng, men I får lidt mere sammenhæng i næste modul, det er virkelig - vi hiver den bare op og siger, at man har fundet ud af, at det her det gælder: At hvis vi har et irreducibelt polynomium $f(x)$, som har koefficcienter, der er hele tal, og den har grad primtalsgrad, hvor $p \geq 5$, og den har præsis $p - 2$ reelle rødder, så kan man ikke finde en formel til bestemmelse af rødderne til $f(x)$, vha. de ting vi lige har sagt."

[*Uddeling af note/arbejdsark med sætning B.18 og opgave 1.17.*]

[*Eleverne regner.*]

463. (9.25) L: "Og vi har ikke sådan vildt meget tid, så I må gerne kigge på jeres graflommeregnere, hvis det kan være til nogen hjælp /.../."

[*Ved Mikaels plads:*]

464. (9.26) Mikael: "Det der gælder jo i hvert fald ikke [*sætningen*]."

465. (9.26) L: "Det gælder ikke?"

466. (9.26) Mikael: "Gør det det?"

467. (9.26) L: "Ok, prøv lige at gå betingelserne igennem."

468. (9.26) Mikael: "Jo, fordi koefficienterne skal være større end 5 /.../. Nåh, graden for søren."

469. (9.27) L: "Ja, graden /.../."

470. (9.27) Mikael: "Nåh, men så kan den vel godt. Så må den have tre rødder ik'?"

471. (9.27) L: "Jo, hvordan kan du afgøre det?"

472. (9.27) Mikael: "Jo, for p den er 5, så er $p - 2 = 3$, så må den have tre rødder."

473. (9.27) L: "Hvordan vil du afgøre, om den der har tre reelle rødder?"

474. (9.27) Mikael: "Jeg kunne tegne den eller /.../."

475. (9.27) L: "Ja, jeg synes bare lige, at du måske skal holde fast i, at det måske var en meget god idè at tegne den, og jeg er også - jeg er rimelig sikker på, at I har lært sådan noget som funktionsundersøgelse."

476. (9.28) Mikael: "Ja."

[*Ved Kims plads:*]

477. (9.28) L: "Hvis vi kigger på sætningen - irreducibelt opfylder den det?"

478. (9.28) Kim: "Ja /.../."

479. (9.28) L: "Den næste, koefficienter i $\mathbb{Z}$."

480. (9.28) Kim: "Af grad p."

481. (9.28) L: "Ja, fordi hvilken grad har den?"

482. (9.28) Kim: "Den har 5."

483. (9.28) L: "Ja, og p er et primtal, gælder det?"

484. (9.28) Kim: "Ja."

485. (9.29) L: "Den skal have præsis $p-2$ reelle rødder, dvs. den skal have hvad?"

486. (9.29) Kim: "3."

487. (9.29) L: "Ja, hvordan vil du afgøre, om den der har tre reelle rødder? ... Hvordan kan du se - hvis du nu har en tegning af den, hvordan ville du så se om den har tre reelle rødder? Du kan jo prøve at tegne den på lommeregneren [...]."

488. (9.29) Kim: "Det ved jeg ikke, hvad mener du?"

489. (9.29) L: "Du ved, når du finder nulpunkter, hvis du finder løsninger til en ligning. Løsning det er, når det giver nul ik', hvis du indsætter, så giver det nul. Hvis du finder en rod - hvis x er en rod, hvad skal $f(x)$ så give?"

490. (9.30) Kim: "Den skal så give 0."

491. (9.30) L: "Ja, hvordan kan du så se, om den har 3 reelle rødder? ... Det er når den skærer x-aksen, kan du så se hvor mange?"

492. (9.30) Kim: "3."

493. (9.30) L: "Ja, man kan godt gøre sådan lidt mere - hvis du har funktionsundersøgelse, almindelig funktionsundersgøelse, så finder du f' og sætter den lig 0 og finder vendetangenter, men nu er det ok, at I bare kigger på grafen. Så det ser ud som om, den har 3 rødder."

[*Ved tavlen:*]

494. (9.31) L: ”Ok, er der nogen, der lige vil prøve at svare på det her spørgsmål? ... Hvad med Børge, du sad da og skrev noget.”

495. (9.31) Børge: ”Nej.”

496. (9.31) L: ”Det så da - det var da ellers meget rigtigt. Så det ikke meget godt ud? ... Nej, ok. ... Er der andre end Maria, der vil svare? ... Mikael?”

497. (9.32) Mikael: ”Ja, men den har jo - den højeste grad det er jo 5, og så kan vi se, at så gælder sætningen, fordi at graden p skulle være større end eller lig med 5, og det er den. Det er jo dejligt, og så må den have 3 rødder, fordi den skulle have $5 - 2$, og det er 3, og så kan vi jo prøve at tegne den, hvis vi vil se, om det måske passer, og det gør det ser det ud til. Ja, og så vi er gået igang med monotoniforhold, men vi er ikke nået så langt.”

498. (9.32) L: ”Ja, men I får mulighed for at regne sådan en her der hjemme, så vi siger at lige nu.”

499. (9.32) O: ”Det kunne godt være, hvis der var en, der havde lavet funktionsundersøgelse, for vi kunne godt nå det, hvis det var.”

500. (9.33) L: ”Ja, men det tror jeg ikke, der er. Er der nogen, der har lavet sådan en rigtig, er der?”

501. (9.33) Maria: ”Ja.”

502. (9.33) L: ”Du kan måske bare fortælle, hvad du har gjort.”

503. (9.33) Maria: ”Vi har bare prøvet at vise, at grafen er stigende, når x er større end 2 og mindre end -2, fordi så vender den ikke og går op og rører x-aksen igen. Og det kan man finde ud af ved at se på $f'(x)$. Og hvis man sætter $x = 2$, så er den positiv, og hvis man sætter $x = -2$, så er den positiv, og det gælder så også, hvis man altså sætter x lig større end eller lig 2 ik', så man kan se at, ud fra f', at den er positiv. Der kan man se, at grafen er stigende, så den går ikke ned og vender på noget tidspunkt og rører x-aksen igen. Og det samme med når den er mindre end -2.”

504. (9.34) L: ”Ja [...]. Ok, hvis vi har, at $f(x) = x^5 - 16x + 2$, så vil vi finde, hvis det skulle være helt rigtigt - nu har vi sagt, at det er ok, at I kigger

på lommeregneren - men hvis vi nu skulle være helt rigtige, så som Maria siger, sætter vi $f'(x) = 0$, finder ud af den vender to gange ik', var det ikke det, du sagde?"

505. (9.34) Peter: "Vi har bare set, at den havde tre rødder, og ud fra de tre rødder, vi kunne se på grafen, kunne vi se, at den fortsætter mod uendelig, og /.../."

506. (9.34) L: "Ja, men hvis det er helt rigigt, så kunne du faktisk ikke vide, om den så sådan her ud [*tegning af graf, der har mange vendetangenter*]."

507. (9.35) Maria: "Nej, men så kan man gøre det med at finde, hvor $f' = 0$ ik'?"

508. (9.35) L: "Ja, så hvis det er helt rigtigt, så finder vi vendetangenter; finder ud af hvor mange gange grafen vender, og ved at gøre det så undersøge, selvfølgelig, om den skærer x-aksen, som man gør ved almindelig funktionsundersøgelse; finder ud af om den går mod uendelig eller minus uendelig og så finder vi ud af - men det er helt ok, som I har gjort det. ... Faktisk så var det en franskmand, som hed Evariste Galois. Det kan være, I kan huske navnet fra den allerførste time, hvor vi sagde, at vores projekt det omhandler Galoisteori - det kommer så fra ham her Evariste Galois. Han lever kun fra 1811-1832, han blev 21 år gammel. Men det var ham, der var helt banebrydende inden for det her med, om man kunne finde de her formler til bestemmelse af rødderne til polynomier af grad større end eller lig med fem. Og han gjorde det faktisk på en helt anden måde: I stedet for at kigge på polynomiet - det kan nogen gange være ret svært at sige noget om de her polynomier, f.eks. så kunne vi se, at der var nogen, som vi ikke engang sådan lige umiddelbart kunne afgøre, om de var irreducible. Det kan bare være ret svært at se på dem, hvis de er meget grimme og store osv. Men han fandt så ud af, at ethvert polynomium har sådan en gruppe tilknyttet, som vi så skal se på næste gang. Ham her Galois han var jo et geni, som I nok kan se. Han var 21 år, og han fandt ud af hele den her teori, inden han døde. Det startede så som sagt med, at han ville finde formler for de her rødder, og finde ud af hvad for nogle man kunne finde formler for, og hvad for nogen man ikke kunne, og hvad der skulle gælde

osv. Det synes man er sådan et ret snævret område - hvorfor skal man vide noget om det? Men i dag så er der - Galoisteori det er jo kæmpe stort, vi har flere kurser, hele semestre, der bare omhandler det, så det var virkelig noget stort, han fandt ud af. Men han var ret uheldig. Det var lige oven på den franske revolution, som jo var i 1789, som I sikkert har lært i historie, så han var rigtig ballademager. Han var revolutionær ad Pommern til, og han tilbragte faktisk meget af sit liv i fængslet, fordi så havde han truet kongen på livet, og han havde gået rundt i en eller anden uniform, man ikke måtte gå i."

509. (9.38) Maria: "Og inden han blev 21 år?"

510. (9.38) L: "Ja, han døde som 21 årig, og det gjorde han faktisk, fordi han fik sig rodet ud i en skudduel; og der er ikke rigtigt nogen, der ved hvorfor, men der er selvfølgelig nogen, der tror, det er noget, der handler om en pige osv. Men han var i hvert fald godt klar over, at han nok ikke skød så godt, for natten inden han døde, har han siddet og skrevet alle sine ideer ned, og han har skrevet ude i siden: Jeg har ikke tid, jeg har ikke tid, jeg har ikke tid. Han har skrevet det i et brev til sin ven, som han bad: Giv det her brev til nogen af de store matematikere - på den tid - vil du ikke give det her brev til den her matematiker, så han kan se mine fantastiske ideer. Men på hans samtid, der var der ikke rigtig nogen, der syntes, at de her ideer de var så fantastiske. Der var faktisk ikke rigtigt nogen, der forstod noget af det. Og han kunne heller ikke komme ind på nogen af de fine skoler i Frankrig; der er en rigtig fin skole, der hedder École Polytechnique, som alle de store matematikere har gået på, men der kunne han ikke komme ind på, fordi han dumpede, og han kunne ikke finde ud af sådan det helt basale matematik, og når han prøvede at præsentere den her teori, så rystede de bare på hovedet og tænkte, at det var da vanvittigt. Men han kom så ind på en knap så fin skole, hvor han så også blev smidt ud igen, fordi han havde været med i et eller andet oprør i en eller anden revolution på skolen, så det var heller ikke så godt. Og så døde han jo som sagt rigtig ung, fordi han så også skulle i skudduel; og det var faktisk først 15 år efter, han døde, at hans arbejde overhovedet blev udgivet, fordi der var simpelthen ikke nogen, der kunne forstå det. Og så gik der - ja, så

udgav man det godt nok, men der var stadig ikke rigtig nogen, der havde helt styr på, hvad det handlede om. Så det var først rigtig mange år senere igen, helt op i 1850'erne, at der var nogen, der sådan begyndte og rigtig at forstå det. Men det vi skal se på næste gang, det er, hvad sådan en Galoisgruppe det er, og hvordan det kan hænge sammen med det her med rødderne til et polynomium [...]."

D.3 Modul 3

[*Ved tavlen:*]

511. (8.00) L: "[...] Jeg synes, vi skal starte med at kigge på de hjemmeopgaver, I havde fra sidst. Hvis vi starter med de to første. Er der et par stykker, der har lyst til at skrive på tavlen? f og g? ... $f(x)$ her. ... To stk."

512. (8.01) Peter: "Hvad skal der skrives?"

513. (8.01) L: "Bare skriv hvad du har fundet ud af. ... Peter, du kan tage den ene [...]."

    [*Peter skriver på tavlen:*]

514. (8.01) Peter: "$x^4 - 4$ og jeg kunne ikke finde et primtal, eller det primtal der går op i 4 er 2, og 2^2 går også op i 4, så irreducibilitetskriteriet er ikke opfyldt, så jeg kan ikke bestemme, om det er irreducibelt."

515. (8.02) L: "Så du synes ikke, du kan bestemme det?"

516. (8.02) Peter: "Var det ikke det, I nævnte sidst, at hvis det ikke var opfyldt, så kunne vi ikke sige, om det var irreducibelt?"

517. (8.02) L: "I hvert fald ikke ved hjælp af den [*Eisensteins irreducibilitetskriterium*] - det har du ret I. Men kan du skrive om på det polynomium på en anden måde?"

518. (8.02) Peter: "Ja, det kan man også godt, skal jeg gøre det?"

519. (8.02) L: "Ja, det må du gerne."

520. (8.02) Peter: "Find en rod i det her tilfælde $x^4 - 4 = 0$ reducerer vi til $x^2 = \pm 2$, så x - ja, kan man skrive rødderne, ... så kan man skrive det som $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$, og den her kan vi også få, så det bliver lig med $(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, så det kan man altså ikke."

521. (8.03) L: "Kan du huske, hvad definitionen var på reducibilitet og irreducibilitet?"

522. (8.03) Peter: "Hvis den var reducibel, så kunne den skrives som polynomier med koefficienter i $\mathbb{Z}$, og den der $[(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})]$ har ikke koefficienter i $\mathbb{Z}$."

523. (8.03) L: "Nej, men hvad med den anden $[(x^2+2)(x^2-2)]$?"

524. (8.03) Peter: "Den har."

525. (8.03) L: "Ja, kan du så ikke sige noget om den?"

526. (8.03) Peter: "Nåh, men så er den reducibel /.../."

527. (8.04) L: "Ok, ja /.../."

528. (8.04) L: "Så den der den er altså reducibel inden for $\mathbb{Z}$, fordi vi kan finde en faktorisering af polynomiet, der har heltalskoefficienter, så den er altså reducibel. Hvad med g? ... Josefine?"

529. (8.04) Josefine: "Kan jeg bare sige det, er det ikke det nemmeste?"

530. (8.04) L: "Det må du gerne."

531. (8.05) Josefine: "Den er irreducibel, fordi man kan finde et p, der går op i alle koefficienterne foran på nær den ved højeste grad."

532. (8.05) L: "Jeg kan lige skrive den op her."

533. (8.05) Josefine: "Fordi 2 går op i alle koefficienterne foran på nær den med højeste grad x^7, og 2^2 går ikke op i 18."

534. (8.05) L: "Altså så du siger $p = 2$ går op i alle koefficienter undtagen den første, og p^2 går ikke op i 18. Altså kan vi bruge Eisensteins irreducibiliteskriterium, og dermed er den ikke irreducibel."

535. (8.05) O: "Den er irreducibel."

536. (8.05) L: "Ja, den er irreducibel. Hvad med den sidste opgave? ... Ja [*til Katja*]?"

537. (8.06) Katja: "Der kan man ikke finde en formel, fordi for det første så er den irreducibel, og så er $p \geq 5$."

538. (8.06) L: "Hvordan afgør du, om den er irreducibel?"

539. (8.06) Katja: "Ved at finde et primtal der går op i 80 5, og det er så 5, men 5^2 går ikke op i 5."

540. (8.06) L: "Ja, så vi har - vi bruger $p = 5$."

541. (8.06) Katja: "Ja, så kan man ikke finde en formel, fordi den er irreducibel, og den største koefficient er et primtal, der er større end eller lig med 5."

542. (8.06) L: "Den er irreducibel og?"

543. (8.07) Katja: "Ja, og så er der heller ikke nogen formel for den, fordi at den øverste koefficient, altså 5, det er et primtal, der er større end eller lig med 5."

544. (8.07) L: "Ja, der er lige noget mere, der skal være opfyldt."

545. (8.07) Katja: "Så har jeg ikke lige fundet ud af, hvad det sidste er."

546. (8.07) L: "Du har måske sagt det, jeg kan ikke huske, om du har sagt det."

547. (8.07) O: "Nej, jeg tror faktisk..."

548. (8.07) L: "Maria?"

549. (8.07) Maria: "Den skal have præcist tre rødder."

550. (8.07) L: "Ja, sætningen siger også, at den skal have præsis $p-3$, nej $p-2$, dvs. 3 reelle rødder, har den det?"

551. (8.07) Katja: "Det kan jeg ikke lige se."

552. (8.07) L: "Nej - Josefine?"

553. (8.07) Josefine: "Ja."

554. (8.07) L: "Og hvorfor har den det?"

555. (8.07) Josefine: "Først så kiggede jeg på grafregneren og så, at den skar tre steder. Så fandt jeg f' og fandt ud af, at den havde to vendetangenter, og så fandt jeg monotoniforhold, så den ikke vendte på den anden side af mit window på grafen."

556. (8.08) L: "Ja, det gider jeg ikke lige at skrive på tavlen men kig på lommeregneren - fint og find monotoniforhold og tre skæringspunkter. Ja vi har så set, at f.eks. h der ikke har - eller har rødder, som ikke kan findes vha. en formel, altså sådan en formel som vi snakkede om sidste gang. Kan I forresten huske - det skal vi måske lige - hvis vi nu har en femtegradsligning eller et femtegradspolynomium. Hvis man kunne finde en formel for de her rødder, hvad skulle den så bestå af? ... Vi kiggede på tredjegradspolynomiet sidste gang, nu har vi et femtegrads. Peter, hvad skulle den bestå af?"

557. (8.09) Peter: "Noget med de femte enhedsrødder og den femte rod af et eller andet stort."

558. (8.09) L: "Ja, dvs., den består af i hvert fald nogle rodtegn, og det var femte rod, ja, og femte enhedsrødder."

559. (8.09) Peter: "Ja, og så tal fra samme mængde som koefficienterne ligger i."

560. (8.09) L: "Ja, dvs., den vil bestå af hele tal."

561. (8.09) Peter: "Ja, og så en masse regneoperationer plus, minus, gange og dividere."

562. (8.09) L: "Ja, plus, minus, gange, division og rodtegn har vi allerede. Ja, i dag skal vi så se lidt - vi kan ikke komme sådan helt i detaljer med det, men vi skal se, hvordan det hænger sammen med en Galoisgruppe, der er tilknyttet det her polynomium. Og vi skal se i dag, hvordan Galoisgruppen f.eks. er defineret ud fra rødderne til det her polynomium, ikke lige til det

her polynomium [$x^5 - 80x + 5$], men til polynomier generelt. Og er det ikke rigtigt, at I har set noget om permutationsgruppen af tre elementer?"

563. (8.10) Elever: "Jo."

564. (8.10) L: "[...]."

 [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.20.*]

 [*Eleverne regner.*]

565. (8.11) L: "[...] Jeg ved ikke, om I har kaldt den S_3, men gruppen af alle permutationer af tre elementer den hedder S_3 [...]."

 [*Ved Katja og Josefines plads:*]

566. (8.12) Katja: "Jeg kan ikke huske noget om permutationer."

567. (8.12) L: "Ok, gruppen af permutationer af tre elementer, så du har altså tre elementer..."

568. (8.12) Josefine: "Nåh, det er det der med, når man ændrer de der to parenteser - 1 og 2... er det ikke det?"

569. (8.12) Katja: "Nåh."

570. (8.12) L: "Ja."

571. (8.13) L: "[...]."

 [*Ved tavlen:*]

572. (8.16) L: "Er der en, der kan skrive S_3, og en der vil skrive S_2? ... Josefine, hvad med dig?"

573. (8.16) Josefine: "Skal jeg skrive - hvad for en af dem?"

574. (8.16) L: "Du må selv vælge."

 [*Josefine skriver på tavlen.*]

575. (8.17) L: "Tak, hvad er det, du har gjort her?"

576. (8.17) Josefine: "Jeg har skrevet de mulige måder, som 1, 2 og 3 kan forbindes, hvis du sætter dem op over for hinanden, så det er alle sammen kombinationer, hvis du f.eks. har en pose og så trækker et tal op."

577. (8.18) L: "Ja. ... Ok, og den her [*peger på alle permutationerne*] som gruppe den kalder vi for S_3, fordi at det er ombytninger af tre elementer, den hedder S_3. Så sætter vi lige sådan nogle klammer [*mængdeklammer*] her om. Hvad med S_2 er der ikke en, der vil skrive den op? Hvad siger Maria? [...]."

578. (8.18) Maria: "Jeg har bare gjort det der med to elementer."

     [*Maria skriver på tavlen.*]

579. (8.19) L: "Ja, jeg sætter lige sådan nogle her imellem [*kommaer imellem permutationerne*]. ... Ok, det her - det er så gruppen af tre af permutationer - det hedder - det kalder vi permutationer; det kommer jeg måske til at sige. Men permutationer det betyder bare ombytninger faktisk, så hvis jeg kommer til at sige permutationer, så mener jeg bare ombytninger af de her tre elementer. Så det er gruppen af ombytninger, af permutationer, af tre elementer, og den her er jo sådan faktisk lettere - mindre; det er gruppen af ombytninger af to elementer. Hvordan tror I f.eks. S_4 ser ud? ... Maria?"

580. (8.20) Maria: "Der er 24, er der ik' - bytninger?"

581. (8.20) L: "Jo."

582. (8.20) Maria: "Så hvis du tager de 24 forskellige måder man kan kombinere eller permutere, hvad hedder det, de fire elementer."

583. (8.20) L: "Ja, så f.eks. har vi sådan en her [*skriver identiteten for* S_4], og vi har en anden. Hvad f.eks.?"

584. (8.20) Maria: "1 4 3 2 [*under* 1234]."

585. (8.20) L: "Og hvor mange elementer - eller hvor mange permutationer vil den bestå af?"

586. (8.20) Maria: "24."

587. (8.20) L: "Og hvordan er du kommet frem til det?"

588. (8.20) Maria: "Jeg sagde bare 4 fakultet."

589. (8.21) L: "Så S_4 har altså 24 4 fakultet permutationer. Hvad så hvis vi kigger på S_n? ... Hvordan vil et element i S_n se ud - eller en permutation i S_n? ... Peter?"

590. (8.21) Peter: "Det vil så være n [*muligheder for permutation af* 1] og så $n-1$ [*muligheder for permutation af* 2], $n-2$ [*muligheder for permutation af* 3] og så 1 [*mulighed for permutation af* n]."

591. (8.22) L: "Den består altså af permutationer af n elementer. /.../ Og hvor mange permutationer vil der ligge i S_n? ... Hvis I ser på, hvor mange der var i S_3 og S_4 f.eks.? ... Maria?"

592. (8.22) Maria: "$n!$."

593. (8.23) L: "Og det har du fundet ud af hvordan?"

594. (8.23) Maria: "Fordi det er på samme måde som med fire elementer; der er det 4! og i treeren, der er det 3!."

595. (8.23) L: "Hvis vi har 1 her - hvor mange muligheder har du så for [*peger på pladsen under* 1]?"

596. (8.23) Maria: "Så er der n muligheder."

597. (8.23) L: "Og på den her [*peger på pladsen under* 2]?"

598. (8.23) Maria: "$n-1$."

599. (8.23) L: "Og for næste?"

600. (8.23) Maria: "Gange $n-2$ gange $n-3$."

601. (8.23) L: "Så det er derfor, vi får - det er lige lidt kombinatorik her - så vi får altså $n!$ permutationer inde i S_n. Ok, så skal vi... Jeg tror også, at I har set [...]."

    [*Overhead med gruppedefinition, der vises lidt efter lidt.*]

602. (8.25) L: ”Ok, nu skal vi se på, hvad en gruppe er. Nu har vi jo bare - I har set, hvad en gruppe er før ik'? Det har jeres lærer i hvert fald sagt [...]. S_3 var en gruppe, og nu sagde jeg selvfølgelig bare, at S_2 også var en gruppe, og S_4 var en gruppe. Men er der nogen, der kan huske, hvad betingelserne er, for at en mængde er en gruppe. Maria?”

603. (8.25) Maria: ”Er det ikke noget med en regneoperation og en talmængde eller sådan et eller andet? Er det ikke det, du snakker om?”

604. (8.25) L: ”Jo, nu har vi kaldt regneoperationen for en komposition, men det er rigtig nok. Det er en regneoperation [$*$] og G er en mængde [*peger på overhead*]. Hvad skal der være opfyldt for denne her mængde med en regneoperation? Er der nogen, der kan huske bare lidt af det? ... Ja?”

605. (8.26) Maria: ”At hvis a er et element i G, og b er et element i G, så skal a komposition b være et element i G.”

606. (8.26) L: ”Har I lavet 'snydebetingelsen'?”

607. (8.26) O: ”Det er undergruppebetingelsen.”

608. (8.26) L: ”[...] Det er det samme, det er fordi, at man kan også definere... Ok, men der skal gælde, som man også kan sige, at hvis at $a * b$ - ... at hvis a og b ligger i G, så skal $a * b$ ligge i G [*skriver betingelsen for at en gruppe er stabil under* $*$]. ... Den bruger man tit for at vise, at noget er en gruppe i stedet for det her [*associativitet*], men det her er bare associativitetsreglen, der siger, at man kan flytte parentesen - at det er lige meget, om man først tager de her to og så tager c på den, eller om man tager a på de her to sammen. ... Hvad ellers skal der gælde? Peter?”

609. (8.27) Peter: ”Det er noget med, der skal være et enhedselement, vi kaldte det e, så $a * e$ er lig a.”

610. (8.27) L: ”Ja, et enhedselement. Nu har vi kaldt det et neutralt element - men det er det samme - hvor der gælder, at $e * a = a * e$ som er a, så at der findes et eller andet element, som man kan gange på hvad som helst, så det bare bliver sig selv, når e er ganget på - det hedder det ikke - $*$ på. ... Og hvad mere? ... Du må gerne sige det, Peter?”

611. (8.28) Peter: "Så vidt jeg husker, så skulle alle elementer have et omvendt element, som vi kaldte a^{-1}, så $a * a^{-1} = e$ det neutrale element."

612. (8.28) L: "Ja, det har vi kaldt et inverst element - det omvendte element. Så hvis a sådan at $a * a^{-1} = a^{-1} * a$ som er det neutrale element. Så det her det er betingelserne for, at en mængde er en gruppe."

613. (8.29) Maria: "Får vi sådan et stykke papir?"

614. (8.29) L: "Ja, det må I få nu. Og vi har at S_n..."

   [*Uddeling af noteark med gruppebetingelserne.*]

615. (8.29) L: "Og vi har S_n, som står der [*overhead*], og som der også stod noget af på tavlen. Hvorfor er S_n en gruppe? ... Først så skal vi lige finde - hvad er mulighederne for det her $*$ - hvad kan vi forestille os, vi kunne bruge som $*$? ... $*$, hvad kan det være? Josefine?"

616. (8.30) Josefine: "Plus, minus, gange, dividere."

617. (8.30) L: "Plus. Minus det er... Ja, gange er også rigtigt, er der flere muligheder?"

618. (8.30) Katja: "Det er vel også dividere, er det ikke?"

619. (8.30) L: "Nej."

620. (8.31) O: "Det er jo sådan med minus og division, at det hører ind under plus og gange, fordi det bare er den omvendte operation."

621. (8.31) L: "Ja, så det er jo sådan set. Ja, det er rigtigt, det er måske sådan, man skal sige, det er de omvendte operationer til de her [+ *og* $\cdot$], man kan sige, man kunne måske lige så godt tage minus og division her i stedet for men..."

622. (8.31) Peter: "Man kan da ikke bruge negative elementer /.../?"

623. (8.31) L: "Negative elementer?"

624. (8.31) Peter: "Ja, hvis vi havde minus, kunne man så ikke, hvad hedder det, bruge operationer og så få et tal, der ikke var med i vores grundmængde.

Er det ikke alle tallene fra - altså alle naturlige tal, der er med i [*det eleven kalder grundmængden*]?"

625. (8.31) L: "Hvad så hvis vi ser på mængden $\mathbb{Z}$ med + [*Peter taler stadig om* S_n*, men læreren taler om en generel gruppe.*]?"

626. (8.31) Peter: "Så kan vi godt, men den jeg ville kigge på nu, det var ikke..."

627. (8.32) L: "Nåh, det er rigtigt nok. Ja det kan jeg ikke lige..."

628. (8.32) O: "Nej, jeg er ikke helt med?"

629. (8.32) L: "Nej, jeg tror heller ikke helt, jeg er med."

630. (8.32) Peter: "Ok, hvad er grundmængden for den gruppe, vi kigger på nu? Altså hvilke?"

631. (8.32) O: "Altså det kan jo i princippet være en hvilken som helst mængde ik'."

632. (8.32) Peter: "Ok."

633. (8.32) O: "Det er bare betingelserne, der skal gælde."

634. (8.32) L: "Det tager vi måske."

635. (8.32) Peter: "Ja, ok jeg troede vi kiggede på en bestemt."

636. (8.32) L: "Ja, men vi er også i gang med S_n faktisk."

637. (8.32) O: "Nåh ja, ok. Så man kan sige, ja hvad er det for en mængde, vi kigger på, når vi kigger på S_n"

638. (8.32) L: "Vi mangler - hvis vi skal se præcist på S_n - så mangler vi faktisk lige præcist $*$ for S_n, og det er hverken plus eller gange, det er en helt tredje. Hvis vi tænker på at de permutationer, der er inden i S_n - der var jo rigtig mange af jer, der skrev det som sådan nogle mængder her og 1, 2 og 3, så jeg 1, 2 og 3 sådan her, og hvad kalder man tit sådan nogle pile [*'funktionspile'*]? Det er jo faktisk funktioner, der sender en mængde over i en anden mængde, og hvad kan der også gælde for funktioner andet end plus og gange. Hvordan kan man ellers lave $*$ på funktioner? ... Hvis vi f.eks. har $f(x)$ og $g(x)$, hvad kan vi gøre med [...]? Maria?"

639. (8.34) Maria: ”Er det sammensætning, du tænker på?”

640. (8.34) L: ”Ja, sammensætning. Og kompositionen for S_n det er faktisk sammensætning, fordi - at hvis vi har to permutationer i S_n, lad os nu sige, at S_n det er S_3. Vi sætter n til at være 3. Hvis vi så har et element, eller en permutation, vi kan sige 2 3 1 [*i den nedre række*], det her det er en i S_3, og så har vi en til, ... de der to - hvad vil det der [...]. Hvad ville det blive for en [*de to permutationer sammensat*]? Den måde I havde bestemt gruppen på, det var jo, at hvis man havde to elementer i en gruppe, så skulle sammensætningen ligge i gruppen? Så hvad ville den her blive? [...] Katja?”

641. (8.35) Katja: ”Altså 1 2 3 og så 1.”

642. (8.35) L: ”Hvor går 1 hen?”

643. (8.35) Katja: ”I 2 og 2 går i 1.”

644. (8.35) L: ”Ja, 2 går i 1, så vi sætter sammen, 1 går i 2 - og sætter sammen med den næste - går i 2 går i 1. Og den næste?”

645. (8.36) Katja: ”Det er så - 2 går i 3, og 3 går i 3, så det er 3.”

646. (8.36) L: ”Og den sidste?”

647. (8.36) Katja: ”3 går i 1, og 1 går i 2.”

648. (8.36) L: ”Og ligger den her i S_3?”

649. (8.36) Katja: ”Ja.”

650. (8.36) L: ”Ja, så faktisk - det var jo meget heldigt, at betingelsen er opfyldt. Hvad med det neutrale element, hvad er det får et i S_n? Josefine?”

651. (8.36) Josefine: ”Det er den, der hedder 1 2 3 og så har den 1 2 3 nedenunder.”

652. (8.36) L: ”Ja, og i S_n?”

653. (8.36) Josefine: ”Så må det jo bare være det, hvor de står under hinanden.”

654. (8.36) L: ”Ja, så det er den første heroppe - af dem vi har skrevet. Hvad med det omvendte element, det inverse element, hvad var det nu, I kaldte det?”

655. (8.36) O: ”Omvendte var det.”

656. (8.36) L: ”Omvendte element. ... Hvis vi nu tager den omvendte til - hvis vi igen tager og kigger på S_3 f.eks. ... Hvad er det omvendte element den omvendte permutation til den her? Hvis vi tager den i minus første? ... Maria?”

657. (8.37) Maria: ”Er det ikke bare 2 1 3 går i 1 2 3?”

658. (8.37) L: ”Jo, det er tilbage igen. Kan vi ikke sætte den her - vi ordner den lige, så den ligner de andre 1 2 3, 2 1 3 - sådan her. Skal vi tjekke, at det er det rigtige? [...] Den der skal vi finde den inverse til, og den inverse til den, har vi lige - tror vi, er den der i hvert fald - og det tjekker vi lige. Er der nogen, der vil sætte de to sammen? ... Hvad med dig igen?”

659. (8.39) Katja: ”Jo, det kan jeg godt, 1 går i 2, 2 går i 1 - og så den næste det er også 2 2.”

660. (8.39) L: ”2 går i 1, 1 går i 2.”

661. (8.39) Katja: ”Og så 3 3.”

662. (8.39) L: ”Det var heldigt, så faktisk så har vi, at S_n det er en gruppe [...]. Ok, i stedet for at vi permuterer denne her mængde 1 2 3 op til n, så kan vi faktisk permutere hvad som helst. Vi kunne permutere jer. Hvis vi nu siger, at vi ser på S_3, så kunne vi lige så godt permutere mængden af Maria og Peter og Børge. Hvis vi har alle mulige permutationer af jer tre, så ville vi stadigvæk have S_3, fordi hvis vi nu har en permutation i S_3 - hvis vi siger at Maria og Børge... Hvad ville den her svare til [*skriver permutation med navnene på tavlen*]. Hvis der stod tal, hvis den svarer til en talpermutation, som vi har set lige før? Ja, Maria?”

663. (8.41) Maria: ”1 2 3 og så 2, 3 og 1.”

664. (8.41) L: "Så vi har stadig bare et element i S_3. Hvis vi nu... Hvad med denne her, hvor vi lige fixer Maria [*skriver ny permutation med navnene på tavlen*], Børge?"

665. (8.41) Børge: "Det bliver så 1 3 2 [*under* 123]."

666. (8.42) L: "Det er stadig et element i S_3, det er bare nogle andre elementer vi permuterer. Så det er faktisk helt lige meget, hvad det er vi permuterer, vi kan permutere alt muligt. Vi kan også permutere rødder i et polynomium for hvis - ... og det vil vi gøre nu."

667. (8.42) O: "Jeg ved ikke, om vi skal holde pausen inden, for vi er lidt forsinket."

668. (8.42) L: "Ok, så lad os holde pause inden."

    [*Pause.*]

    [*Uddeling af arbejdsark med opgave 1.23.*]

    [*Eleverne regner.*]

    [*Ved Maria og Peters plads:*]

669. (8.55) L: "/.../ Vi blev lidt i tvivl om - ved I, hvad vi mener med ovenstående udtryk?"

670. (8.55) Maria: "Er det ikke bare det der [$r^2 - 2s^4 + 3rs$]?"

671. (8.56) L: "Jo, godt."

    [*Ved Josefines plads:*]

672. (8.56) Josefine: "Når man har $i \cdot -i$ er det det samme som i^2, så det bliver -1?"

673. (8.56) L: "Altså /.../. Hvad tror du selv?"

674. (8.56) Josefine: "At man skal sætte minuset udenfor."

675. (8.56) L: "Ja /.../."

    [*Ved Kims plads:*]

676. (8.59) L: ”/.../ Ja, hvis du så skal bruge σ på det her udtryk [r^2-2s^4+3rs], hvad får du så? [*Til Kim, der slet ikke forstår.*] /.../ Så siger vi: benyt den her permutation [σ], den her ombytning, af rødderne på ovenstående udtryk, det her [*udtrykket*], og regn det ud igen. Den her permutation - du skal benytte den på det her udtryk. Hvad bliver det her udtryk så? /.../ Hvis du bytter r og s om, hvad får du så? Prøv at skrive det her om først.”

677. (9.03) Kim: ”Den der?”

678. (9.03) L: ”Ja, den der /.../.”

[*Ved Katja og Observators plads:*]

679. (9.03) Katja: ”Når man siger $-i$ i anden, bliver det så 1 eller -1.”

680. (9.03) O: ”/.../.”

[*Ved tavlen:*]

681. (9.05) L: ”Ok, det vi har skrevet i opgaven - det her vi kalder r^2-2s^4+3rs, hvor at r og s er rødder i et polynomium, kalder vi et udtryk i rødderne - det er et eller andet udtryk, hvor r og s indgår med nogle konstanter, og de må være ganget sammen, og de må være i en hvilken som helst potens. Det her [r^2-2s^4+3rs] det er ét udtryk i rødderne. Dvs. et generelt udtryk - har I egentlig nogensinde set sådan et sumtegn før?”

682. (9.06) Elever: ”Ja.”

683. (9.06) L: ”Det har I, så kan vi jo godt skrive det sådan her. Altså det er en eller anden sum, det er det her [r^2-2s^4+3rs] jo også, så det er summen af en konstant, en eller anden konstant, gange med de her rødder [*i og $-i$*] i en eller anden potens, dvs. gange i i en eller anden potens [*og $-i$ i en eller anden potens*] - det her det er tegnet for potens, det kan være hvad som helst, helt tal - gange med den anden rod i en anden potens. Så det her udtryk ser sådan her ud, sådan ser de - de kan have mange mange led, fordi det er jo bare en sum, vi kan ikke se dem alle sammen. Men et hvilket som helst udtryk i de to rødder vil se sådan her ud, og det der [r^2-2s^4+3rs] det er bare et af dem. Og i opgave 2 har vi opskrevet et andet udtryk i de to rødder. Maria?”

684. (9.07) Maria: ”Skal hvert led så indeholde begge rødder?”

685. (9.07) L: ”Det kan man godt sige - det kan man godt sige, men f.eks. den her [$-2s^4$] med s, som er $-i$, hvordan ser det led [$-2s^4$] ud her [*i det generelle udtryk*]? ... Hvad er k i det her led? Ja?”

686. (9.07) Maria: ”-2.”

687. (9.07) L: ”Ja, hvad er resten? Kan du se, hvordan vi skal skrive resten her for at få det her led? Ja?”

688. (9.07) Maria: ”Ja, den ene skal opløftes i 0’te.”

689. (9.07) L: ”Ja, så alle led vil se sådan her ud.”

690. (9.07) Maria: ”Ja, ok.”

691. (9.08) L: ”Hvis vi kigger på de to opgaver, så har vi - i opgave 1 er udtrykket det her [$r^2 - 2s^4 + 3rs$] og i opgave 2 - skal vi lige skrive...”

692. (9.08) O: ”Det kan være, vi skal starte med at høre, hvad de har fået.”

693. (9.08) L: ”Ja. ... Den første del af opgave 1 - hvad har I fået det her udtryk til ved indsættelse af rødderne? Josefine?”

694. (9.08) Josefine: ”0.”

695. (9.08) L: ”Ja, og når I har brugt permutationen, hvad har I så fået? Katja?”

696. (9.08) Katja: ”Jeg har også fået 0.”

697. (9.08) L: ”Ja, og hvordan kommer den der [$r^2 - 2s^4 + 3rs$] til at se ud, hvis vi bruger σ på den? Så hvis vi siger σ af den her.”

698. (9.09) Katja: ”$s^2 - 2r^4 + 3rs$ eller sr.”

699. (9.09) L: ”Ja, og hvad bliver det?”

700. (9.09) Katja: ”0.”

701. (9.09) L: ”0. Hvad med nummer 2, hvad har I fået i den første? Maria?”

702. (9.09) Maria: ”0.”

703. (9.09) L: "Ja, og i den anden del?"

704. (9.09) Maria: "4."

705. (9.09) L: "4?"

706. (9.09) Maria: "Ja."

707. (9.09) L: "Så hvis vi bruger σ på den... Ok, hvilke af de her polynomiers rødder bevarer deres nuludtryk? ... Nuludtryk, bevarer et udtryk, der giver 0? Maria?"

708. (9.10) Maria: "Det er den første."

709. (9.10) L: "Ja, den her giver 0, selvom vi permuterer rødderne, det gør den her ikke. Hvis vi ser på etteren, der er rødderne i og $-i$, hvordan vil sådan en her [*det generelle udtryk*] altid se ud i det tilfælde? Hvordan vil en - kan vi opskrive det på eller anden måde sådan udtrykt ved i? Hvordan vil ethvert udtryk se ud? Det er måske lidt svært at svare på, men hvis man skulle skrive det op helt som et generelt udtryk, hvordan vil ethvert led i sådan en her se ud? ... Det her det er et led, kan vi sige - et led ser sådan her ud [i det generelle udtryk]. Kan man skrive det sådan mere reduceret? Hvis vi opløfter i eller $-i$ i noget lige f.eks., hvad sker der så? Maria?"

710. (9.11) Maria: "Så bliver det -1."

711. (9.11) L: "F.eks."

712. (9.11) Maria: "Ja, i 2."

713. (9.11) L: "Det kan også blive -1 ik'?"

714. (9.11) O: "Det var -1, hun sagde."

715. (9.11) Maria: "Jeg sagde -1, og så ville jeg opløfte det i 2, altså i^2, det bliver -1, det ved jeg godt."

716. (9.12) L: "Ok, ja, hvad bliver i^4?"

717. (9.12) Maria: "Det bliver jo 1."

718. (9.12) L: ”Ja, så det bliver enten 1 eller -1. Hvis vi opløfter det i noget ulige, hvad sker der så? Peter?”

719. (9.12) Peter: ”Så bliver det enten i eller $-i$.”

720. (9.12) L: ”Ja, så vi kan altså skrive - generelt vil alle udtryk have en eller anden form, hvor vi har en konstant gange - nej, plus b gange i, hvor a og b det bare er nogle tal. For hvis vi opløfter i i noget lige, så vil vi få en konstant, og hvis vi opløfter i i noget ulige, så vil vi få noget med i. Så generelt kan vi skrive ethvert udtryk på den her form $[a + bi]$.”

721. (9.12) Maria: ”Ja, med de her rødder der ik'.”

722. (9.13) L: ”Hvad siger du, ja, med de her rødder her, det er bare i og $-i$. Det er de her rødder - det er dem, vi ser på nu. Så det her $[a+bi]$ er ethvert udtryk af den der form [*det generelle udtryk*]. Hvis vi nu bruger σ på denne her $[a + bi]$, hvis vi tager σ af denne her, fra opgaven, σ fra opgaven. Hvad får vi så? Josefine?”

723. (9.13) Josefine: ”Så får vi $a - bi$.”

724. (9.13) L: ”Ja, men hvis vi har - hvis vi har...”

725. (9.13) Maria: ”Hvordan fandt I ud af det?”

726. (9.13) L: ”σ - hvad var σ i opgaven?”

727. (9.13) Maria: ”Det var bare den, der bytter rundt på i og $-i$.”

728. (9.14) L: ”Hvis vi benytter den permutation på det her udtryk $[a + bi]$, kan du så se, hvordan vi får den her $[a - bi]$? ... Hvis vi tager i. Den bliver ført i hvad?”

729. (9.14) Maria: ”I $-i$.”

730. (9.14) L: ”Ja, og $-i$ bliver?”

731. (9.14) Maria: ”Ført i i.”

732. (9.14) L: ”Ja, den er her ikke. Hvis vi så tager ethvert udtryk, udtrykket der $[a + bi]$, som giver 0. Det her det er så alle dem, der giver 0. Vi har lige

fundet ét, der giver 0. Nu ser vi på alle dem, der giver 0. Hvad kan vi så sige om a og b? Peter?"

733. (9.15) Peter: "De bliver 0."

734. (9.15) L: "Ja, så benytter vi permutationen, og får det her, hvad kan vi så sige? Hvad er så a og b igen? Maria?"

735. (9.15) Maria: "$a = bi$."

736. (9.15) L: "Hva'?"

737. (9.15) Maria: "Er det ikke det?"

738. (9.15) L: "Jeg kunne ikke høre, hvad du sagde?"

739. (9.15) Maria: "$a = bi$."

740. (9.15) L: "$a = bi$? Hvis vi har, at a og b er 0 i det her udtryk, vi benytter σ på den her, hvad er a og b så?"

741. (9.15) Maria: "Nå, jeg troede bare, du satte det lig 0."

742. (9.16) L: "De er stadigvæk 0. ... Så ethvert udtryk i de her to rødder i og $-i$ der - ethvert udtryk i de der to, der giver 0, vil stadigvæk give 0, når vi har permuteret. ... Ok, så skal vi sige - I må altså sige til hvis det, hvis I er, ... hvis I slet ikke er med. Hvis vi nu har - vi skriver lige S_2 op her med rødderne. Hvis vi har S_2 med de her i og $-i$, hvad kan det så være? Der har vi i og $-i$. Ja, Peter?"

743. (9.17) Peter: "i og $-i$ i den ene."

744. (9.17) L: "Og i den anden?"

745. (9.17) Peter: "$-i$ og i."

746. (9.17) L: "Den her det er altså S_2 med de her rødder [i *og* $-i$]. Hvad er så den - hvis vi kigger på opgave 1 - hvad er den delmængde af S_2, som bevarer ethvert nuludtryk mellem rødderne? ... En delmængde af S_2 der bevarer ethvert udtryk, der giver 0? ... Peter?"

747. (9.17) Peter: "Det er den første i og $-i$."

748. (9.17) L: "Hvad med den der?"

749. (9.17) Peter: "Den anden gør også. Dvs., så det gør de begge to, så hele S_2."

750. (9.17) L: "Ja. ... Den delmængde af S_2, der bevarer ethvert nuludtryk i i og $-i$, det er S_2. Hvis vi så kigger på opgave 2, hvad er så den delmængde af S_2, der bevarer ethvert nuludtryk? ... Josefine?"

751. (9.18) Josefine: "Det er den første permutation i S_2 [*identiteten*]."

752. (9.19) L: "Ja, hvis vi skriver S_2 op med rødderne fra opgave 2. Hvad var det, rødderne i opgave 2 var?"

753. (9.19) Josefine: "De var 2 og -2."

754. (9.19) L: "2 og -2. ... 2 og -2 [*skriver* S_2 *med* 2 *og* -2]. ... Det er den første - det er den her. Så i opgave 2 er det altså kun den her, der bevarer nuludtrykket. Og hvordan kan du se det? Hvorfor var det lige, at den her [σ] ikke gjorde det?"

755. (9.19) Josefine: "Fordi vi prøvede det, og det gav 4 i stedet for 0."

756. (9.19) L: "Ja, det har vi set et modeksempel på. Så i opgave 2 er det altså kun den her - den hedder faktisk også identiteten eller det neutrale element, kan man godt sige. Så det er faktisk e og... Den delmængde af S_2, der bevarer ethvert nuludtryk i de her to rødder, den kalder vi for Galoisgruppen. ... Galoisgruppen for et andengradspolynomium er den delmængde af S_2, der bevarer ethvert nuludtryk i de her rødder. Hvad er Galoisgruppen for polynomiet i den første opgave? ... Josefine?"

757. (9.21) Josefine: "Det, fandt vi ud af, var S_2."

758. (9.21) L: "Ja, for vi fandt ud af, at ethvert udtryk i i og $-i$, der gav 0, også gav 0 ved permutation. Vi fandt ud af, at ethvert udtryk, der gav 0, også gav 0, hvis vi benyttede vores σ på det. Og hernede? Hvad er Galoisgruppen for polynomiet i den anden opgave? Josefine?"

759. (9.22) Josefine: "Det er så bare enhedselementet."

760. (9.22) L: ”Ja, så Galoisgruppen for $f(x)$, her oppe i den første opgave, det er S_2, og Galoisgruppen for $f(x)$ i den anden opgave det var kun identiteten eller et enhedselement. Ok, Galoisgruppen for... Vi kan sige det her mere generelt: Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium det er så den delmængde af S_n, der bevarer ethvert nuludtryk i de n rødder [...]. Nå, men Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium det er så den delmængde af S_n, hvor der gælder, at alle de udtryk i de n rødder, der giver 0, de giver stadig 0, hvis man permuterer med en permutation, der ligger i S_n, hvis det gælder [...].”

[*Uddeling af noteark med definition af Galoisgruppen.*]

761. (9.25) L: ”Ok, hvorfor er Galoisgruppen så en gruppe? Nu hedder det jo Galoisgruppen, så det er jo nok en gruppe, men hvorfor er det en gruppe? ... Hvad er det, der skal gælde for en gruppe? ... Maria?”

762. (9.26) Maria: ”Den skal have et enhedselement.”

763. (9.26) L: ”Ja, og ser det ud som om, at en Galoisgruppe har et enhedselement?”

764. (9.26) Maria: ”Ja, for ellers ville det ikke være en gruppe.”

765. (9.26) L: ”Det kan man sige, men nu ved vi jo faktisk ikke - nu hedder det Galoisgruppen, så det er nok en gruppe, men hvorfor er det det er en gruppe? Hvorfor er enhedselementet f.eks. deri? Peter?”

766. (9.27) Peter: ”Det neutrale element vil fører enhver rod over i sig selv, og så vil alle nuludtryk selvfølgelig være bevaret.”

767. (9.27) L: ”Dvs. hvis vi har et hvilket som helst nuludtryk her, hvis det her nu ikke er S_2, hvis det er generelt, så vil det i hvert fald hedde noget med summen af en eller anden konstant igen gange alle rødderne, som hedder r_1 i noget, gange r_2 i noget andet og r_3 i noget tredje og r_n i noget n'te, sådan der, det er hvert led, og hvis det her udtryk giver 0, og vi bruger enhedselementet, som bare fører r_1 i sig selv, r_2 i sig selv, r_3 i sig selv, så vil det selvfølgelig være der, så det er i hvert fald helt korrekt. Hvad med, at det gælder, hvis man stjerner to sammen.”

768. (9.28) O: "Der kan vi jo godt se på undergruppebetingelsen."

769. (9.28) L: "Ja, som vi så var den første betingelse på den her [...]. Men som I har set, hvis man har to, man sætter sammen, at så vil resultatet af det også være i gruppen - gælder det for den? ... Maria?"

770. (9.29) Maria: "Jeg vil spørge, hvad er regneoperationen?"

771. (9.29) L: "Det er en delmængde af S_n. Hvad var det, at regneoperationen var i S_n?"

772. (9.29) Maria: "Sammensætning."

773. (9.29) L: "Så, det vil den jo selvfølgelig stadigvæk være."

774. (9.29) Maria: "Ok."

775. (9.29) L: "Altså, så hvordan hvis man har to sammen - altså hvis man har to - ... nu skal jeg lige tænke mig om, det er blevet helt væk."

776. (9.29) O: "Hvis man har to permutationer i Galoisgruppen, som de begge to de bevarer ethvert nuludtryk, når man så sætter de to sammen, vil den så også bevare ethvert nuludtryk? Man bruger først den ene på udtrykket, så bliver nuludtrykket bevaret, så bruger man den anden, hvad så?"

777. (9.30) Maria: "Så må den jo også bevare den."

778. (9.30) L: "Ja. ... Så hvis vi har to elementer, to permutationer, i Galoisgruppen, som bevarer nuludtryk - så hvis vi bruger den ene, der bevarer nuludtrykket, så bliver det 0, hvis vi så bruger den anden, der også giver 0, så giver det selvfølgelig stadig 0. Hvad så med det omvendte element? Hvis vi nu siger, at vi har faktisk fundet, at vores Galoisgruppe det er en - vi siger lige, at Galoisgruppen det er en delmængde af S_n, og nu siger vi, at vores n det er 3. Så vi har Galoisgruppen - delmængde af S_3. Hvad med det omvendte element vil det være der? ... Så ser vi på 3 rødder r,s, t. ... Det her det er et eller andet [*udtryk*] i rødderne. Hvis vi har et udtryk i de 3 rødder - hvis vi siger, udtrykket $r\ s\ t$ giver 0, så giver det også 0, når vi permuterer, fordi så ligger det nemlig i Galoisgruppen, det er det

definitionen af Galoisgruppen siger. Hvad var det, det omvendte element til den her var? ... Maria?"

779. (9.32) Maria: "Det var $s\ t\ r$ over $r\ s\ t$."

780. (9.32) L: "Ja, ... det er det omvendte element til den her. Vil den her også give 0? Peter?"

781. (9.32) Peter: "Ja, vi vidste fra før, sammenhængen mellem s, t og r gav 0 og mellem r, s og t gav det også 0."

782. (9.32) L: "Ja, hvis vi har en sammnehæng mellem r, s og t, der giver 0, et udtryk i r, s og t, der giver 0, vi benytter den her permutation, og den også giver 0, så ligger den i Galoisgruppen. Hvis vi går den anden vej, så har vi, at sammenhængen mellem s, t og r giver 0, men så vil den her selvfølgelig også give 0, for det gjorde den jo i forvejen. Er I med? Lidt rodet måske? Ja. Så det er altså Galoisgruppen, som er defineret som en delmængde af S_n, der bevarer nuludtryk. Det kan jo godt være ret svært at finde Galoisgruppen ud fra de her rødder, specielt hvis vi ikke kan - vi så jo lige med i og $-i$, at det gjalt for ethvert udtryk, men forestil jer lige at vi har sådan en her, det er en sum mellem alle de her rødder r_1 i noget og r_2 i noget osv... Det er jo helt umuligt at finde samtlige udtryk i de her rødder, der giver 0, der er jo virkelig mange. Så det er jo ret håbløst at gå i gang med faktisk. Så det er ret svært at definere Galoisgruppen på den her - finde Galoisgruppen ud fra denne har metode, selvom den er defineret sådan. Men det har vi så en hel masse sætninger, der kan hjælpe os med. Altså, hvis vi har givet et polynomium, så kan vi finde Galoisgruppen, og Galoisgruppen kan så omvendt hjælpe os med at sige noget om rødderne, fordi - hvis vi igen kigger på vores opgave. I opgave 1, der har vi de to rødder, og hvad var det Galoisgruppen var i opgave 1? Der fandt vi Galoisgruppen for $f(x)$, det var S_2. Hvordan er rødderne her? Peter?"

783. (9.34) Peter: "De er komplekse."

784. (9.34) L: "Ja, rødderne r og s er i, og s er $-i$. I opgave 2, ... der var det, at Galoisgruppen for $f(x)$, det var det her enhedselement, og hvordan ser

rødderne ud her? Josefine?"

785. (9.35) Josefine: "2 og -2."

786. (9.35) L: "Ja, og de er?"

787. (9.35) Josefine: "Reelle."

788. (9.35) L: "De er også mere end det. ... Hvad tilhører de? ... -2 og 2, hvor ligger de?"

789. (9.35) Josefine: "De er hele."

790. (9.35) L: "Ja, de er hele. Galoisgruppen kan faktisk sige os noget om rødderne i polynomiet. Hvis vi nu kun har et polynomium, vi kan ikke - vi kan finde Galoisgruppen ud fra nogle sætninger, som vi har, men vi ved ikke noget om rødderne, fordi at det - der er måske mange af dem, det kan måske være et 119.-gradspolynomium, så det kan være ret svært at finde dem. Men vi kan måske finde Galoisgruppen. Så hvis vi har, at - hvis jeg nu lige tegner sådan en streg - Galoisgruppen er stor, den er herovre, det er den største Galoisgruppe, vi har for et n'tegradspolynomium. Galoisgruppen for et n'tegradspolynomium det er en delmængde af S_n, så den størst mulige det er S_n. Den mindst mulige det er jo det - den mindst mulige delmængde, der stadig er en gruppe, det er det neutrale element, enhedselementet. Hvis vi har et n'tegradspolynomium, så kan der faktisk også være nogle delmængder her - delmængder af S_n, som hverken er den her [$\{e\}$] eller den her [S_n]. Hvis vi f.eks. har S_3, som har 6 permutationer, kunne vi godt forestille os, at vi havde en eller anden delmængde, hvor det der var opfyldt [*Galoisgruppebetingelserne*], som lå her midt i mellem, f.eks. der indeholdt 3 permutationer, så den kunne godt være her midt i mellem S_n og e. Så vi kan have en eller anden gruppe - en eller anden delmængde af S_n, som selvfølgelig selv er en gruppe, som ligger et sted midt i mellem. Så vi kan bruge vores Galoisgruppe som sådan en indikator for, hvordan rødderne ser ud. Det kan være svært selvfølgeligt at sige noget om rødderne i det her tilfælde, det kan være, at der er nogen af dem, der er hele, og nogen af dem, der er komplekse. Men generelt så jo større Galoisgruppen er jo grimmere rødder har polynomiet, der hører til. Så stor

Galoisgruppe grimme grimme rødder, lille Galoisgruppe fine rødder. Og der gælder faktisk, at hvis vi har $f(x)$ og graden - hvis graden af $f(x)$ er n, som er større end eller lig med 5, hvis $f(x)$ har Galoisgruppe, som er den store - har Galoisgruppe S_n, altså den største Galoisgruppe, hvor rødderne er aller mest grimme, så kan vi ikke finde rødderne ved en formel. Og det er faktisk den her Galoisgruppes skyld, at vi har den her sætning, som vi så før [...]. Men sætningen som I har set før, siger faktisk en lille ting til - den med de $p-2$ reelle rødder og at man ikke kan finde noget ved en formel, den siger faktisk, at hvis [...]. At hvis vi har et irreducibelt med koefficienter i $\mathbb{Z}$, som har grad $p \geq 5$, p er et primtal, så er det fordi, at den har S_p som Galoisgruppe, den har den store Galoisgruppe, og derfor kan de ikke findes ved en formel [...]."

E Referencer

Abel, N. H. (1826). *Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als dem vierten, allgemein aufzulösen.* I: Journal für die reine und angewandte Mathematik **1** (1), s. 65-84.

Allenby, R. B. J. T. (2003). *Rings, Fields and Groups. An Introduction to Abstract Algebra.* 2. udgave. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Arsac, G., Balacheff, N. og Mante, M. (1992). *Teacher's role and reproducibility of didactical situations.* I: Educational Studies in Mathematics **23**, s. 5-29. Holland: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1994). *Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products.* I: Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R. og Winkelmann, B. (Eds.), Didactics of mathematics as a scientific discipline, s. 27-39. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bashmakova, I. G. & Smirnova, G. S. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra.* USA: The Mathematical Association of America.

Blomhøj, M. (1995). *Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen.* I: Kognition & pædagogik, 4. årg., nr. 3, s. 15-25. IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. og Warfield, V. (Eds.). Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education.* Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.

Edwards, H. M. (1984). *Galois Theory.* New York: Springer-Verlag.

Hersant, M. & Perrin-Glorian, M. (2005). *Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations.* I: Educational Studies in Mathematics **59**, s. 113-151. Springer.

Jensen, C. U. (2001). *Matematik 3AL. Klassisk Algebra.* Matematisk Afdeling ved Københavns Universitet.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics. An Introduction.* 2. udgave. University of the District of Columbia. Addison Wesley Longman.

Lagrange, J. L. (1770-1771). *Réflexions sur la Résolution algébrique des équations.* I: Volume 3 af Lagrange Oeuvres, s. 203-421. Publiseret første gang i Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1770-1771.

Messer, R. (1994). *Linear Algebra: Gateway to Mathematics.* New York: HarperCollins College Publishers.

Radloff, I. (2002). *Évariste Galois: Principles and Applications.* I: Historia Mathematica **29**, s. 114-137. USA: Elsevier Science.

Rotman, J. (1990). *Galois Theory.* New York: Springer-Verlag.

Sierpinska, A. (1999). *Lecture notes on the theory of didactic situations.* MATH 645: Lecture 1, 3 og 7. Lokaliseret den 30. maj 2007 på World Wide Web: http://alcor.concordia.ca/ sierp/TDS.html

Thorup, A. (1998). *Matematik 2AL. Algebra.* Matematisk Afdeling ved Københavns Universitet.

Tignol, J.-P. (1988). *Galois' theory of algebraic equations.* England: Longman

Scientific & Technical.

Poulsen, E. T. & Thomsen, K. (2001). *Indledning til Matematisk Analyse 1*. Matematisk Afdeling ved Københavns Universitet.

Winsløw, C. (2006a). *Didaktiske Elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. 1. udgave, 2. oplag. Biofolia.

Winsløw, C. (2006b). *Didaktiske miljøer for ligedannethed*. I: MONA **2**, s. 47-62. Narayana press.

Indeks