Démarche d'investigation et évaluation formative en classe de sciences, mathématiques et technologie

Thèmes fractions et nombres décimaux et grandeurs et mesures : L'aire du Parc

Document pour les professeurs

Projet européen ASSIST-ME et LéA EvaCoDICE

Cycle ou classe : cycle de consolidation (sixième et CM2) **Durée :** 4 à 5 heures
Noms des concepteurs de la séquence :

Michèle Gandit*, Eric Cavagna***, Sophie Lopez***, Magali Soubrié**, Jean-Christophe Cubertafon**, Thomas Meyer**, Jérôme Meyer**.
avec Céline Lepareur, David Cross, Elie Rached et Michel Grangeat* (L.S.E - Grenoble)
*** Professeur/re des écoles (Fontaine-Grenoble)
** Professeur/re en collège (Fontaine-Grenoble)
* Univ. Grenoble Alpes - ESPE-Grenoble

Pour citer ce document :
Gandit, M. & Grangeat M. (2016). *Démarche d'investigation et évaluation formative en classe de sciences, mathématiques et technologie : l'aire du Parc (ressource enseignant). Projet européen ASSIST-ME et LéA EvaCoDICE.* Retiré de [adresse internet]

Des indications plus détaillées et le matériel élève peuvent être téléchargées à partir de :
http://webcom.upmf-grenoble.fr/sciedu/evacodice/

Compétences mises en œuvre

Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral : Participer à des échanges dans des situations diversifiées.

Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques : Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.

Raisonner : Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Les connaissances à faire acquérir

1) Comprendre qu'un même nombre peut avoir différentes écritures (fractions décimales ou non, nombre entier, somme ou différence de fractions et de nombres entiers, écriture à virgule). Comparer deux fractions.

2) Savoir expérimenter sur des exemples, argumenter le vrai, argumenter le faux.

3) Comprendre la notion de fraction : il s'agit, pour le(la) professeur(e) de revenir sur des conceptions très répandues des élèves sur les fractions, qui font obstacles au concept de nombre rationnel.

4) Savoir prouver que des écritures différentes représentent le même nombre (proportionnalité) ou ne représentent pas le même nombre.

Pour cela,
* écarter tout « calcul fractionnaire » et privilégier le sens,
* faire manipuler des fractions inférieures ou supérieures à 1,
* faire coexister le sens *fraction d'une quantité* et le sens *résultat d'un partage d'une pluralité* (ex : 118/12),
* travailler dans les deux sens le passage entre écriture symbolique et représentation figurale, varier les représentations figurales (grilles à mailles rectangulaires, carrées ou non, cadrans).

Indications sur le contexte d'élaboration et de test de la séquence

La séquence a été testée une fois par cinq professeurs, deux années de suite, en plusieurs vagues pour permettre des améliorations : en CM2, avec un double niveau CM1-CM2, quatre en classe de sixième.

Les différentes phases de la séquence

Engager : Susciter l'intérêt et l'engagement de tous les élèves

La séquence est divisée en plusieurs phases, au cours desquelles les élèves ont des activités différentes : faire des recherches, individuellement ou en groupe, comprendre d'autres réponses que les leurs, s'engager sur des réponses (s'ils sont d'accord ou pas), débattre avec des arguments scientifiques, éventuellement changer d'avis, s'exprimer oralement ou par écrit…

Les élèves sont confrontés à un problème de modélisation au sens où ils doivent passer de figures sur une grille à un nombre en écriture fractionnaire. Pour ce faire, ils doivent élaborer des stratégies visant à « déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple » (objectif du programme de 6$^{\text{ème}}$) et considérer « une fraction d'une quantité » (programme de 6$^{\text{ème}}$). Il s'agit aussi de comprendre que 118 / 12, par exemple, est, à la fois, le résultat – une aire, exprimée dans l'unité d'aire choisie – du partage équitable de 118 carreaux en portions de 12 carreaux (qui correspond à une unité) et aussi 118 fois 1/12 – 1/12 correspondant à l'aire d'un carreau dans l'unité choisie). Enfin, les élèves sont amenés, grâce à la confrontation avec d'autres réponses que les leurs, à comprendre le lien (ou l'absence de lien) entre écriture fractionnaire et écriture à virgule.

Présenter : le début de la séquence

La séquence est constituée de plusieurs séances, chaque séance étant elle-même décomposée en phases. Il s'agit de mesurer des aires de surfaces quadrillées, avec une unité d'aire « inhabituelle ».

Au tableau, l'enseignant/e présente une grille qui représente un parc, avec des massifs de fleurs, dans lequel se trouvent des bâtiments. Les massifs de fleurs sont représentés en gris clair. Les trous dans la grille représentent les bâtiments. On veut mesurer l'aire du parc (sans les bâtiments, mais avec les massifs de fleurs) avec une certaine unité d'aire. Cette unité d'aire est l'aire de la surface gris foncé qui se trouve en dessous de la grille. Cette unité représente 12 carreaux de la grille.

Le quadrillage favorise le comptage des carreaux et permet l'obtention de réponses sous forme de nombres entiers, de fractions… La confrontation des réponses des élèves amène au fait que le nombre qui exprime cette mesure a des écritures différentes et à la comparaison de différentes écritures (écritures fractionnaires, sommes, différences, écritures « à virgule »…).

Guider : soutenir et orienter l'activité des élèves

Les différentes phases de la séquence laissent une large place au débat, qui permet aux élèves de prendre position par rapport à d'autres réponses, de changer d'avis d'après les arguments échangés. Le débat, organisé de façon rigoureuse, permet aux élèves un retour sur leurs propres réponses, reconnaître qu'elles sont correctes ou non, avec des arguments.

Les tableaux de progression critériés servent aussi de guides aux élèves pour la compréhension de l'activité qui leur est demandée.

Conclure : Finir la leçon ou la séquence

Les phases de débat se concluent par une synthèse argumentée sur les réponses aux questions, ainsi que par un bilan sur ce qu'on a appris concernant les différentes écritures d'un même nombre, d'une part, concernant l'activité mathématique, d'autre part, grâce au retour sur les grilles d'évaluation renseignées par les élèves.

Réinvestir : Conduire une activité autonome dans un contexte proche

La dernière partie de cette situation du parc consiste en un réinvestissement dans le même contexte. Il serait pertinent de prolonger ce travail à chaque occasion au cours de l'année scolaire, en demandant régulièrement plusieurs écritures différentes d'un même nombre.

Évaluer de manière sommative

Plus d'une semaine après la fin de la séquence, l'évaluation porte sur la compréhension qu'un nombre a différentes écritures, ainsi que sur les compétences ci-dessus.

Ce bilan est préparé par une séance où cours de laquelle il est demandé aux élèves d'expliquer ce qui a été appris au cours de la séquence et d'imaginer un autre exemple. Les élèves disent aussi ce qu'ils ne comprennent pas.

Anticiper : Prévoir les difficultés des élèves

De nombreux travaux montrent que l'apprentissage des fractions est difficile pour beaucoup d'élèves. Pour chaque question posée, les réponses attendues de la part des élèves sont anticipées dans les documents joints.

Les principales difficultés qui vont émerger sont :

* difficulté à concevoir qu'une fraction est aussi bien supérieure qu'inférieure à 1 (cette difficulté est due à l'aspect fractionnement, une fraction étant souvent considérée comme une partie d'un tout) ;

* difficulté à comprendre qu'une fraction est aussi le résultat d'un partage équitable d'une pluralité, et pas seulement une fraction de l'unité (par exemple, 3/4 peut représenter 3 quarts d'une pomme, la pomme étant l'unité, mais aussi la part de chaque personne dans le partage équitable de trois pommes partagées entre 4 personnes) ;

* difficulté à ne pas transférer systématiquement les propriétés des nombres entiers aux fractions (exemple de raisonnement erroné : 1/3 est plus petit que 2/8 car 1 < 2 et 3 < 8) ;

* difficulté à comprendre le rôle privilégié des fractions décimales dans l'écriture « à virgule » des nombres décimaux (exemple de réponse erronée, qui apparaît dans la séquence : écrire que 1 + 1/12 = 1,1 (ce qui est faux) par analogie avec 1 + 1/10 = 1,1 (ce qui est vrai)) ;

* difficulté à comprendre comment comparer des fractions telles que 8/10 et 10/12 (un raisonnement erroné qui apparaît au cours de la séquence : ils sont égaux car, pour obtenir 10/12, on ajoute 2 au numérateur et au dénominateur de 8/10 ; ce raisonnement est mis en défaut par le contre-exemple 1/2 ≠ 3/4) ;

* difficulté à comprendre qu'une fraction exprime bien un nombre, et pas une opération à effectuer.

Surmonter : Permettre à l'élève de surmonter ses difficultés

La confrontation des réponses et des stratégies des élèves à celles des autres élèves, ainsi que le débat, anticipé et rigoureusement organisé est un moyen pour chaque élève de surmonter ses difficultés.

Encourager : Observer les réussites de l'élève

Encourager les élèves par rapport aux compétences contenues dans les tableaux de progression, sur lesquels ils s'évaluent eux-mêmes, ainsi que dans la progression dans la compréhension des fractions et des différentes écritures d'un nombre qui se manifeste au cours de la séquence.

Adapter : Changements en fonction du niveau scolaire

L'adaptation porte sur le temps : en CM2 la séquence a été testée en fin d'année. En sixième elle a été testée pour chaque trimestre, selon les professeurs, sans différences notoires. Vu la diversité des réponses exactes possibles, il n'a pas été gênant que la séquence soit proposée à certains élèves en école puis en collège.

ASSISTME

This project has received funding from the European Union's Seventh Framework Programme Capacity, Collaborative Project under grant agreement no 321428

Déroulement de la séquence

Test de positionnement au départ (15 min, en fin d'une séance)

Il s'agit de proposer le même test avant de commencer la séquence et à l'issue de la séquence. Ce test est à poser à la fin d'une séance, avant la séquence. On pourra ainsi mesurer, pensons-nous, les effets de cette séquence sur les connaissances des élèves.

Ne pas corriger ce test. Voir les documents-élève intitulés *Test (sujet 1 et sujet 2*, pour éviter le copiage entre voisins*)*

Question 1 : « 4 + 2/5 est un nombre » ; est-ce vrai ou est-ce faux ?

C'est vrai. Cependant la plupart des élèves voient une opération et deux nombres. Un des objectifs de la séquence est de leur faire comprendre que c'est bien une écriture d'un nombre.

Question 2 : « 3/5 est égal à 5/7 » ; est-ce vrai ou est-ce faux ? Pourquoi ?

C'est faux. On retrouve dans la séquence suivante le raisonnement faux qui consiste à dire que, puisqu'on ajoute 2 au numérateur et au dénominateur de la fraction 3/5 pour obtenir la fraction 5 / 7, on va obtenir un nombre égal. Un contre-exemple simple à ce raisonnement est donné par les fractions 1/2 et 3/4. Ce raisonnement ne « marche » que si le numérateur et le dénominateur de la fraction sont égaux.

Pour répondre correctement à la question 2, les élèves pourraient, par exemple, dire que 3/5 = 1 – 2/5 et 5/7 = 1 – 2/7 ; or 2/5 est strictement plus grand que 2/7, puisqu'on partage 2 équitablement en 5 parts, pour l'un, en 7 parts, pour l'autre. Comme on retranche chacune des fractions à 1, le résultat est strictement plus petit on retranche 2/5 que quand on retranche 2/7. Donc les deux nombres 3/5 et 5/7 ne sont pas égaux.

Question 3 : « 2/7 est plus grand que 1/3 » ; est-ce vrai ou est-ce faux ? Pourquoi ?

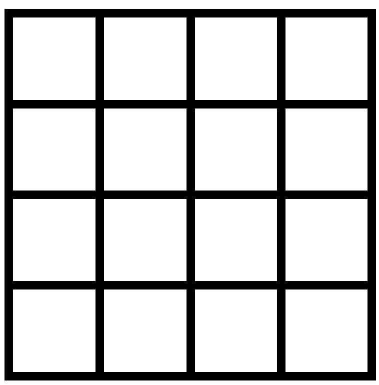
C'est faux. Notre hypothèse est que beaucoup d'élèves, considérant que la fraction 2/7 est constituée de nombres plus grands que la fraction 1/3, vont répondre que 2/7 est plus grand que 1/3. Sinon, ils pourraient dire que 1/3 = 2/6, donc le résultat de la division de 2 par 7 est plus petit que le résultat de la division de 2 par 6 ou comme ci-dessus en évoquant le partage de 2 en 6 parts ou en 7 parts.

Question 4 : « 3 + 2/5 = 3,2 » ; est-ce vrai ou est-ce faux ? Pourquoi ?

C'est faux. Il s'agit de faire expliciter le raisonnement faux qui consiste à dire qu'un nombre qui s'écrit comme une somme d'un nombre entier *n* et d'une fraction *p* / *q*, ne s'écrit pas nécessairement, en écriture à virgule, sous la forme *n*,*p*.

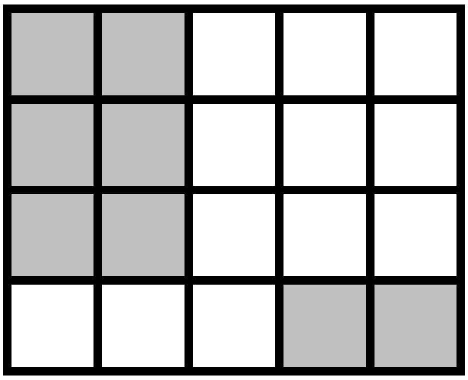
Pour répondre correctement à cette question, les élèves peuvent utiliser que 3,2 étant égal à 3 + 2/10 et 2/5 étant différent de 2/10, 3 + 2/5 ne peut pas être égal à 3,2.

Question 5 : colorie en noir 3/8 de la figure ci-dessous.



Pour répondre correctement, il suffit de colorier 6 carreaux. La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il faut comprendre qu'un huitième de la grille correspond à deux carreaux. Il est fort probable qu'une majorité d'élèves va colorier 3 carreaux de la grille.

Question 6 : quelle fraction de la figure est-elle coloriée ci-dessous ? Peux-tu proposer plusieurs écritures de cette fraction ?



La réponse est 8/20 ou 4/10 ou 2/5 ou 0,4 ou 6/20 + 2/20 ou…

Une difficulté de cette question réside dans le fait que la partie coloriée est en deux morceaux. On fait l'hypothèse d'une forte évolution sur cette question entre les deux tests (avant et après la séquence).

Question 7 : quel est le plus grand des deux nombres 1/3 et 1/4 ?

La réponse est 1/3 > 1/4. Pour le justifier (même si on ne le demande pas ici), on peut dire que, quand on partage équitablement un tout en 3 parts, la part est plus grande que celle qu'on obtient quand on partage équitablement ce tout en quatre parts.

Séance 1 (environ 1 heure)

Phase 1 : première recherche de l'aire du parc, réponse avec argument (20 min)

Le(la) professeur(e) présente le problème à toute la classe, avec un support (vidéo, la grille est projetée sur un tableau ou avec un TBI, voir plus loin) :

Consigne (1/2) : « Voici une grille qui représente un parc, avec des massifs de fleurs, dans lequel se trouvent des bâtiments. Les massifs de fleurs sont représentés en gris clair. Les trous dans la grille représentent les bâtiments. On veut mesurer l'aire du parc (sans les bâtiments, mais avec les massifs de fleurs) avec une certaine unité d'aire. Cette unité d'aire est l'aire de la surface gris foncé qui se trouve en dessous de la grille. »

On interdit l'usage des calculatrices et des règles graduées.

La question est écrite au tableau : « Quelle est, exprimée dans cette unité d'aire, l'aire du parc ? »

Le(la) professeur(e) ne donne aucune piste, mais s'assure que les élèves ont bien compris que l'unité d'aire n'est pas une unité habituelle (pas de réponse avec des cm^2, par exemple), que la surface dont on mesure l'aire ne comprend pas les bâtiments, mais comprend les massifs de fleurs.

Le(la) professeur(e) distribue alors la fiche-élève n°1. Il(elle) a préparé des surfaces d'aire unité en un certain nombre (qui ne sont pas montrées aux élèves) (voir en document élève) ; ces surfaces ne sont données aux élèves que s'ils les demandent.

Consigne (2/2) : « Vous pouvez échanger avec vos voisins. Vous devez argumenter votre réponse. Votre argument doit pouvoir convaincre quelqu'un qui n'a pas la même réponse que vous. Vous avez 20 minutes. »

Le temps donné de 20 min n'est pas à respecter rigoureusement. En passant dans les rangs, on va juger du moment opportun pour arrêter les recherches des élèves. Il faut attendre d'avoir suffisamment de réponses, correctes ou non. Il faut encourager les élèves à argumenter leur réponse, sans prendre parti du tout par rapport à ce qu'ils ont écrit.

Voir plus loin des stratégies possibles, qu'on pourra observer.

Que fait le(la) professeur(e) pendant cette première phase ?

Le(la) professeur(e) s'assure que les élèves ont bien compris ce qu'il s'agit de faire, mais il(elle) n'intervient pas s'ils n'utilisent pas l'unité d'aire correcte. Il(elle) ne donne aucune piste.
Si des élèves s'engagent dans le découpage et report de la surface donnée pour 1 u a, le(la) professeur(e) donne plusieurs exemplaires de la surface (une dizaine). Le fait que le(la) professeur(e) sorte ce matériel va peut-être inciter les élèves qui ont juste compté les carreaux à chercher une autre solution.

Si certains élèves ont trouvé 118/12 et 9,83, on leur demande discrètement d'en chercher une autre. Le(la) professeur(e) arrête la recherche une fois apparues au moins trois des écritures données ci-dessous, même si certains élèves n'ont pas vraiment terminé.

Les différentes écritures qui vont apparaître

(Les fractions seront écrites sur deux lignes, avec un trait horizontal, et non pas comme ci-dessous, les unités seront données ou non par les élèves).

118 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question)

118/12 u a (il faut lire : 118 douzièmes et non pas 118 divisé par 12, valeur correcte, qui répond à la question ; cette réponse privilégie la fraction en tant que *partage équitable d'une pluralité*, cette conception de la fraction est peu présente chez les élèves de CM ou collège qui privilégient souvent la fraction comme fraction de l'unité)

9 u a + 10 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question)

9 + 10/12 u a (il faut lire : 9 plus 10 douzièmes, valeur correcte, qui répond à la question ; cette réponse privilégie la fraction en tant que *fraction de l'unité*)

9,8 u a (valeur fausse car 9,8 = 9 + 8/10 et 8/10 ≠ 10/12 car 10/12 = 0,8 + 0,4/12 ou encore car 118/12 = 9,8 + 0,4/12, donc 118/12 ≠ 9,8 ; néanmoins, cette réponse est intéressante au sens où elle est la conséquence d'une conception de la fraction comme *partage équitable d'une pluralité* (voir ci-dessus))

9,83 u a ou 9,8333333 u a (valeurs fausses aussi, mais il y a peu de chances que ces réponses apparaissent dans la mesure on l'on a demandé de ne pas utiliser les calculatrices)

9 + 5/6 u a (il faut lire : 9 plus 5 sixièmes, valeur correcte, qui répond à la question ; cette réponse privilégie la fraction en tant que *fraction de l'unité*, mais elle montre aussi une certaine maîtrise des fractions ; elle a peu de chances d'apparaître)

9 + un morceau (réponse incorrecte car « un morceau » n'est pas un nombre)

9,10 ou 9,1 (valeur fausse, conséquence d'une mauvaise interprétation de 9 + 10/12)

8 + 22 carreaux (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question)

Phase 2 : liste de réponses données, argumentation écrite des élèves, le vote est reporté à la séance suivante (25 min)

Le(la) professeur(e) recense au tableau les différentes réponses de la classe et complète, si besoin, par les réponses suivantes (écrire « carreaux » et « unités » en toutes lettres) :

…

réponse 4 : 118 /12 unités
réponse 5 : 9 + 10/12 unités
réponse 6 : 9,8 unités
réponse 7 : 9,10 unités

Une feuille est distribuée aux élèves pour l'écriture des réponses et de l'argumentation (voir fiche-élève n°2).

Consigne : « Vous allez devoir voter concernant ces réponses (c'est vrai, c'est faux[1]) et donner des arguments (pour convaincre les autres). Concernant votre propre réponse, vous recopiez l'argument que vous avez préparé. Vous avez 20 min pour écrire vos votes et vos arguments. Vous remplirez complètement chaque ligne (vrai ou faux avec l'argument), mais vous pouvez remplir la fiche dans l'ordre que vous voulez. »

On dira aux élèves qu'on dit *unités* pour « unités d'aires » (moins long à écrire). La réponse « 118 » va être proposée par les élèves ; la réponse « 118/12 » va les interroger directement sur le sens de cette fraction.

La fiche-élève n°2 est relevée et annotée par le(la) professeur(e). Ces fiches sont photocopiées avant d'être rendues aux élèves.

Phase 3 : présentation du tableau de progression n°1

On projette le tableau n°1 et on demande à quelques élèves où ils se situent dans ce tableau. Celui-ci n'est effectivement donné à remplir aux élèves qu'à la phase 6.

Les annotations des fiches

Les annotations ne doivent pas « couper » le débat qui va suivre à la deuxième séance. Elles doivent encourager l'élève à se positionner, à s'ouvrir aux réponses proposées par les autres élèves. Elles signaleront aussi les incohérences dans un même argument.

On propose :

* « Positionne-toi », « Donne ton avis » ou bien « Tu as bien donné ton avis »(pour signaler à l'élève qu'il doit ou s'est engagé dans une argumentation).

* « Cet argument n'est pas convaincant en mathématiques » (pour des arguments qui ne relèvent pas des mathématiques, du type « c'est vrai car c'est ma réponse » ;

* « Dans cet argument, ta première idée n'est pas cohérente avec la seconde » (pour signaler une incohérence) ;

[1] On ne dit pas, à ce moment-là, qu'il y aura une troisième possibilité de vote, on ne le dira qu'à la séance suivante.

* « Ouvre-toi aux réponses des autres » ou bien « Tu es ouvert aux réponses des autres » (pour signaler à l'élève qu'il argumente ou pas les réponses autres que la sienne).

Des stratégies possibles, qu'on pourra observer lors de la première phase

On peut utiliser, comme unité d'aire intermédiaire, l'aire d'une maille carrée de la grille, désignée par 1 c. On peut utiliser directement l'unité d'aire fixée : 1 u a = 12 c. Mais, dans ce cas, on peut garder la forme de la surface donnée en gris foncé et essayer de paver la grille avec cette surface ou comprendre qu'une u a est aussi l'aire de toute forme qui compte 12 carreaux (par exemple, une ligne de 12 carreaux, un rectangle 3 × 4, la réunion de trois lignes de 5, 4, puis 3 carreaux).

Suivant chacune de ces utilisations d'unités, on peut raisonner en décomposant la surface du parc en une réunion disjointe de surfaces dont on évalue facilement l'aire (on fait une ou des additions) ou bien en enfermant la surface du parc dans une surface plus grande dont on enlève des surfaces (du « coin en bas à droite », des bâtiments) (on fait une soustraction et des additions intermédiaires ou bien des soustractions).

Un élève qui compte le nombre de carreaux et divise par 12 pour obtenir le résultat demandé a bien compris que l'aire est indépendante de la forme de l'objet. Il privilégie le sens de la fraction qui est *partage équitable d'une pluralité*.

Certains peuvent faire des découpages et pavages par la figure donnée dont l'aire est 1 u a.

…

Des exemples de réponses :

- On considère que la surface du parc est incluse dans un rectangle 13 × 11, d'aire 143 c. On soustrait l'aire du « coin en bas », 9 c, l'aire « des deux bâtiments », 4 c et 12 c, on obtient :
  143 – (9 + 4 + 12) = 118 c. D'où la réponse : 118/12 u a.
- On décompose la grille en rectangles dont on mesure l'aire (soit par comptage des carreaux, soit par le produit longueur × largeur), en utilisant l'unité intermédiaire c : (en haut à gauche) un rectangle 9 × 4, d'aire 36 c, (en dessous) un rectangle 5 × 7, d'aire 35 c, (en bas) un rectangle 5 × 4, d'aire 20 c, (à droite) un rectangle 2 × 8, d'aire 16 c, un rectangle 2 × 4, d'aire 8 c, enfin 3 c (correspondant à 3 carreaux isolés).
  Ceci donne : 36 + 35 + 20 + 16 + 8 + 3 = 118 c.
  Il existe évidemment de multiples autres découpages possibles.
  Cette stratégie donne une aire de 118 /12 u a.
- Par comptage des carreaux : 118 carreaux, donc une aire de 118/12 u a.
- Par utilisation directe de l'unité d'aire choisie, en remarquant que c'est aussi l'aire d'un rectangle 3 × 4 : on peut découper la surface du parc en un certain nombre de rectangles (par exemple, 6), puis découper le reste en formes du type « une ligne de 5 carreaux, une ligne de 4 carreaux et une ligne de 3 carreaux » (par exemple, 3) et voir qu'il reste 10 carreaux. Si l'on pave directement la surface du parc avec la forme décrite ci-dessus, on trouvera aussi que finalement on a : 9 u a + 10 c ou bien 9 u a + 10/12 u a.
- Par utilisation directe de l'unité d'aire choisie, en remarquant que c'est aussi l'aire d'une ligne de 12 carreaux : on peut paver la surface avec des lignes de 12 carreaux (on poursuit une ligne sur la ligne suivante) qu'on interrompt quand on arrive à des trous. On arrive à la même écriture de 9 u a + 10/12 u a (ou 9 u a + 10 c).

Séance 2 (environ 1 heure)

Cette séance comporte les phases 4 et 5. Il est possible que le débat (phase 5) ne soit pas terminé à la fin de cette séance.

Phase 4 : le recueil des votes (10 min)

Le(la) professeur(e) rend les fiches-élèves n°2 aux élèves, après les avoir photocopiées. Il(elle) réécrit au tableau les différentes réponses qui figurent sur la fiche-élève n°2.

Il(elle) procède au vote, pour chaque réponse, et écrit les résultats au tableau :
« Pour chaque réponse (les réponses en lignes, les 3 choix en colonnes)
* qui pense que cette réponse est vraie,
* qui pense que cette réponse est fausse,
* qui ne sait pas ou a des doutes concernant cette réponse.

Certains élèves vont peut-être demander si l'on peut voter pour plusieurs réponses. On répond « oui ».

Il est important d'ajouter la possibilité « qui ne sait pas ou a des doutes concernant cette réponse », avant que les élèves ne votent, pour laisser la porte ouverte aux élèves qui ne savent pas. Certains élèves ne voudront peut-être pas s'engager pour une réponse, par exemple, s'ils n'ont pas vraiment d'argument. C'est important qu'ils soient entendus dans la classe. Tout élève a le droit de « ne pas savoir ». Par ailleurs, il est nécessaire que les votes pour « vrai » ou « faux » soient des votes authentiques, ce qu'ils ne seront pas si l'on n'ouvre pas cette autre possibilité.

Les premières expérimentations ont montré l'importance de cette possibilité (beaucoup d'élèves choisissent cette réponse, puis évoluent).

Phase 5 – Débat (35 min) incluant la comparaison de fractions

1) Réponse « 118 », donnée par les élèves, avec ou sans « carreaux »

Le(la) professeur(e) interroge :
1) un élève qui a voté pour cette réponse et lui demande pourquoi il a fait ce choix. L'argument est écrit au tableau.
2) un élève qui a voté que cette réponse est fausse et pourquoi il a fait ce choix. Son argument est écrit au tableau.
3) Un élève qui a voté pour « je ne sais pas ou j'ai des doutes ». Il est invité à dire pourquoi il a des doutes, ce qui le gêne…
Tout élève qui intervient ensuite doit nécessairement répondre à un des arguments donnés précédemment.

Cette réponse va permettre d'aborder la question de l'unité si elle ne figure pas.
Elle permettra aussi de revenir à l'idée qu'on cherche si l'on peut paver la surface du parc par 118 surfaces-unités et sur ce que c'est que cette unité d'aire.
Elle va peut-être amener des élèves à dire qu'il « faut diviser par 12 ». Si c'est le cas, on passera ensuite à la réponse « 118 /12 ».

Une fois que le(la) professeur(e) sent qu'un consensus s'établit autour du fait que cette réponse ne convient pas ici (refaire un vote pour le savoir) parce qu'il n'y a pas d'unité et que, même si on ajoute « carreau », ce n'est pas ce qu'on cherche, on arrête le débat.

La feuille de réponse distribuée est complétée par une phrase qui ressemble à : « La réponse 118 est incorrecte parce qu'elle sous-entend qu'il s'agit de 118 carreaux et que le carreau n'est pas l'unité d'aire choisie. »

2) Réponse « 118 /12 unités »

On pourrait envisager de reporter à la fin le débat sur cette réponse, mais elle apparaît naturellement à la suite de 118.

Le(la) professeur(e) interroge :
1) un élève qui a voté que cette réponse est fausse et pourquoi il a fait ce choix. Son argument est écrit au tableau.
2) un élève qui a voté pour cette réponse et lui demande pourquoi il a fait ce choix. L'argument est écrit au tableau.
3) Un élève qui a voté pour « je ne sais pas ou j'ai des doutes ». Il est invité à dire pourquoi il a des doutes, ce qui le

gêne…
Tout élève qui intervient ensuite doit nécessairement répondre à un des arguments donnés précédemment.

Même mise en œuvre que ci-dessus pour la suite.

L'argument qui justifie cette réponse est :
une unité = 1 paquet de 12 carreaux ; 1 carreau = 1 douzième de l'unité ;
Il y a 118 carreaux, donc 118/12 d'unités.

3) Réponse « 9 + qqch »

Même déroulement que ci-dessus, en interrogeant d'abord un élève qui a voté pour cette réponse.

Un consensus devrait s'établir assez rapidement sur le fait que cette réponse n'est pas fausse (si on précise l'unité), mais qu'elle n'est pas satisfaisante car trop incomplète (il faut préciser ce qu'est le « qqch ».

4) Réponse « 9 + 10/12 unités »

Même déroulement que ci-dessus, en interrogeant d'abord un élève qui a voté contre cette réponse.

L'argument qui justifie cette réponse est :
il y a 118 carreaux, 118 = 9 paquets de 12 + 10 carreaux, donc aussi 9 unités + 10 carreaux,
donc 9 unités + 10/12.

5) Réponse « 9,8 unités »

Même déroulement du débat que ci-dessus, en interrogeant d'abord un élève qui a voté pour cette réponse.

Le(la) professeure(e) devrait se ramener à la question : « Est-ce que 9,8 = 9 + 10/12 ? », puis à « Comment écrire 9,8 comme la somme de 9 et d'une fraction ? ». Réponse : 9,8 = 9 + 8/10.

On reformule ainsi la question (clairement écrite au tableau) : « Est-ce que 8/10 = 10/12 ? ». Demander aux élèves comment s'y prendre pour répondre à cette question ?

Bien marquer au tableau :
8/10 : on partage équitablement en 10 et on prend 8 parts ;
10/12 : on partage équitablement en 12 et on prend 10 parts.

Des stratégies envisageables :
* On peut penser à un quadrillage en 60 carreaux (à distribuer aux élèves, deux grilles par élève).
Demander à un ou plusieurs élèves de formuler ce qu'on doit faire avec ces grilles distribuées en deux exemplaires par personne : « on dispose de deux grilles identiques, on doit chercher si 8/10 de la grille, c'est la même chose que 10/12 de la grille. » Demander aux élèves de colorier 8/10 et 10/12 de la grille.
* On peut aussi penser à ramener la surface unité à un rectangle et partager équitablement ce rectangle en 10 (je renonce à le faire, c'est trop petit en gardant la même unité d'aire).
* On peut aussi raisonner par différence : quand on enlève 8/10 d'unité d'aire, il en reste 2/10 ; quand on enlève 10/12 d'unité d'aire, il en reste 2/12 ; or 2/10 est plus grand que 2/12, donc différent de 2/12, donc les parts enlevées de l'unité sont différentes aussi.

Laisser 10 min et observer ce que font les élèves.

Demander aux élèves de voter sur chacune des réponses suivantes :
réponse A : 8/10 = 10/12 ;
réponse B : 8/10 ≠ 10/12 ;
réponse C : autre réponse.

Le débat commence par l'argumentation d'un élève qui a voté pour la réponse A. S'il n'y en a pas, par un élève qui a voté pour la réponse B.

Le(la) professeure(e) demande alors en quoi cela permet de répondre à la question :
« Est-ce que 8/10 = 10/12 ? ».

On conclut que :

9,8 unités n'est pas une réponse correcte car : 9,8 = 9 + 8/10 9 + 10/12 unités est une réponse correcte et 8/10 ≠ 10/12.

Phase 5 bis (qui peut ne pas avoir lieu, si la réponse 9 + 5/6 n'apparaît pas) (10 min)

Si, au cours du débat, il apparaît la réponse 9 + 5/6, il faut la traiter, après le débat sur la réponse 2.

On pose alors la question, « Est-ce que 9 + 10/12 = 9 + 5/6 ? », qu'on demande, après consensus, de transformer en : « Est-ce que 10/12 = 5/6 ? ».

Demander aux élèves des idées pour répondre à cette question.
Certains vont demander à utiliser des grilles (comme ci-dessus) ou des cadrans horaires (voir en document élève). Si aucune de ces idées n'est émise (on refuse les arguments calculatoires du type « multiplication ou division du numérateur et du dénominateur par 2 » en disant qu'on veut savoir pourquoi), on distribue aux élèves les deux types de matériels pour expérimenter : 2 grilles 6 × 10 et 2 cadrans, par élève.

Mais ce n'est pas parce « cela marche » sur ces deux exemples, qu'on peut conclure dans le cas général. Il faut faire un raisonnement qui soit déconnecté du matériel. On peut dire :
1 sixième (une part d'un découpage d'une surface en 6 parts égales) est égal à 2 douzièmes (2 parts d'un découpage de la même surface en 12 parts égales), donc 5 sixièmes est égal à 2 fois 5 douzièmes, soit 10 douzièmes.

L'institutionnalisation (la synthèse) est reportée à la séance suivante.

Séance 3 (environ 1 heure)

Phase 6 : conclusion sur l'aire du parc, institutionnalisation, évaluation formative (15 min)

Demander à la classe : « Qu'avez-vous appris ? »

<u>A noter dans le cahier</u> (associer les élèves aux formulations) :

Un nombre peut s'écrire de différentes façons : 118/12 = 9+10/12= ... Mais : 118/12 n'est pas égal à 9,8. 118/12 ≠ 9,8 9 + 10/12 n'est pas égal à 9,10 car 9,10 c'est 9 + 1/10 + 0/100 ou 9 +10/100 ou 9 + 1/10.

Demander ensuite : « De façon plus générale, quelles compétences avez-vous travaillées ? » Et faire remplir le tableau de progression (tableau n°1).

Phase 7 : réinvestissement dans un travail par groupe, avec production d'affiches (30 min)

Les élèves doivent produire, par groupes, en réinvestissant ce qu'ils ont précédemment appris, des écritures différentes du même nombre. Des arguments doivent figurer sur les affiches.

Prévoir d'autres exemplaires de la fiche-élève n°1.

On annonce que l'objectif est de trouver plusieurs manières d'écrire le même nombre.

Le(la) professeur(e) donne la consigne suivante :

« On revient vers le problème de la surface du parc. On considère toujours la même unité d'aire, qui est celle de la surface en gris foncé. Vous avez 30 min pour répondre à la question suivante, vous devez argumenter vos réponses et faire une affiche :

Quelle est, exprimée dans cette unité d'aire, l'aire de chacun des quatre massifs de fleurs ? Pour chacun, donner deux écritures différentes de leur aire, avec un argument pour chacune des réponses. »

On fait en sorte d'obtenir au maximum 6 affiches.

Ce qui est attendu, les preuves à faire, ce qui guide l'observation du(de la) professeur(e)

Les élèves vont devoir nommer chacun des massifs de fleurs pour communiquer leurs résultats. C'est la raison pour laquelle on ne nomme pas ces massifs. On le laisse à l'initiative des élèves.

<u>Pour le massif (coin en haut à gauche du parc)</u> : il a une aire supérieure à 1 u a ; on attend les réponses :
1 u a + 1 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question) ;
1 + 1/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
13/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
1,08 u a (valeur fausse ; il suffira de montrer que 8/100 ≠ 1/12 en utilisant des grilles de 300 carreaux) ;
13 c. (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question).

13/12 ≠ 1,08
1 + 1/12 = 13/12 car, dans 1 u a, il y a 12 douzièmes, donc si on ajoute 1 douzième à 12 douzièmes, on obtient 13 douzièmes.

<u>Pour le massif (partie droite du parc)</u> : il a une aire inférieure à 1 u a ; on attend les réponses :
1 u a – 3 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question) ;
1 – 3/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
9/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
0,75 u a (valeur correcte, on pourra comparer 75/100 et 9/12 en expérimentant sur des grilles de 300 carreaux (voir en document élève), mais en généralisant ensuite avec des raisonnements de proportionnalité) ;
9 c. (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question) ;

3/4 u a (valeur correcte, on pourra comparer 3/4 et 9/12, par exemple, en expérimentant sur des grilles de 12 carreaux, mais en généralisant ensuite avec un raisonnement de proportionnalité)

1 – 3/12 = 9/12 car, dans 1 u a, il y a 12 douzièmes, donc, si on retranche 3 douzièmes à 12 douzièmes, on obtient 9 douzièmes.

9/12 = 75/100 (qui est une autre écriture de 0,75) car (on se ramène à une unité commune, le trois-centième, facilement décomposable à la fois en 12 et en 100) :
* dans 1 douzième, il y a 25 trois-centièmes, donc, dans 9 douzièmes, il y a 9 fois 25 = 225 trois-centièmes : 9/12 = 225/300 ;
* dans 1 centième, il y a 3 trois-centièmes, donc, dans 75 centièmes, il y a 75 fois 3 = 225 trois-centièmes : 75/100 = 225/300 ;
* donc 9/12 = 225/300 car ils sont tous les deux égaux à 225/300.

3/4 = 9/12 car, dans 1 quart, il y a 3 douzièmes, donc, dans 3 quarts, il y 3 fois 3 = 9 douzièmes.

<u>Pour le massif (gauche du parc)</u> : il a une aire inférieure à 1 u a ; on attend les réponses :
6 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question) ;
6/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
0,5 u a (valeur correcte, on pourra comparer 5/10, 6/12 et 1/2, en expérimentant éventuellement sur des grilles de 60 carreaux, mais en généralisant ensuite avec un raisonnement de proportionnalité :) ;
1/2 u a (valeur correcte, l'égalité 0,5 = 1/2 ne posera pas de difficulté aux élèves).

6/12 = 1/2 car, dans 1 demi, il y a 6 douzièmes.
6/12 = 0,5

<u>Pour le massif (bas du parc)</u> : il a une aire inférieure à 1 u a ; on attend les réponses :
4 c (valeur correcte, mais qui ne répond pas à la question) ;
4/12 u a (valeur correcte, réinvestissement de ce qui a été fait précédemment) ;
0,3 u a ou 0,33 (valeurs fausses, on pourra le prouver en montrant que 4/12 ≠ 3/10, en utilisant des grilles de 60 carreaux) ;
1/3 u a (valeur correcte, on pourra comparer 1/3 et 4/12 en expérimentant sur des grilles de 12 carreaux ou sur des cadrans, mais en généralisant ensuite avec des raisonnements de proportionnalité).

4/12 = 1/3 car, dans 1 tiers, il y a 4 douzièmes.
4/12 ≠ 0,3

Si besoin, on peut revenir à la grille de 12 carreaux qu'on peut réarranger, pour faire comprendre le découpage en 60 ou 300.

Ce que fait le(la) professeur(e) pendant la recherche des élèves

Il(elle) renvoie aux élèves les questions qu'ils posent, distribue les feuilles et les stylos pour les affiches, du matériel (voir en document élève) dès qu'un élève montre qu'il en a besoin pour expérimenter sur la comparaison des écritures des aires. Veiller à ce que les affiches soient lisibles de loin.

Séance 4 (environ 1 heure)

Les affiches sont visibles de tous dès le début de la séance.

Phase 8 : prise de position des élèves, vote et débat sur les écritures (avec argument) correspondant à chacun des quatre massifs (40 min)

Une fois les affiches réalisées, il faut les numéroter et les montrer à tous.

On traite les réponses, massif par massif, et non pas affiche par affiche : le(la) professeur(e) demande aux élèves de lire les réponses correspondant au premier massif sur toutes les affiches, puis on passe au deuxième, etc… Il est prévisible que certaines réponses seront identiques. Il faut faire voter les élèves sur les réponses différentes avec arguments : « je suis d'accord », « je ne suis pas d'accord parce que…», « je ne sais pas ». Ecrire les votes au tableau. Il faut laisser du temps aux élèves pour qu'ils préparent leurs arguments.

Pour chaque massif de fleurs, un consensus va se dégager du débat. Refaire voter les élèves pour avoir une vision de la compréhension de la classe, après l'arrêt du débat.

Dans le débat sur les productions, il est important de passer rapidement sur ce qui relève du respect ou non de la consigne et de s'attarder sur ce qui relève de la compréhension des nombres.

La synthèse se fait à partir de la fiche-élève n°3, qui est complétée, collectivement, après le débat.

Phase 9 : l'institutionnalisation (10 min) et le point sur les compétences

Demander aux élèves de récapituler ce qu'ils ont appris et faire remplir le tableau de progression n°2, en le commentant pour leur donner des points de repère.

Les différentes écritures 1 – 3/12, 9/12, 3/4, 0,75, 75/100, 7/10 + 5/100 désignent toutes le même nombre.
Mais 1/3 et 0,3 ne désignent pas le même nombre.

Pour prouver que deux écritures différentes désignent le même nombre (ou sont égales), on fait un raisonnement de proportionnalité.
Par exemple : dans 1 quart, il y a 3 douzièmes parce que, quand on partage une même quantité équitablement en 12 (chaque part représente 1 douzième) et aussi en 4 (chaque part représente 1 quart), chaque quart comporte 3 douzièmes. On écrit : 1/4 = 3/12.

Quand on cherche un problème, il est utile de faire de multiples essais, afin de mieux comprendre quelle preuve on peut donner.

Pour communiquer nos résultats, il est utile de nommer certaines figures, certains points… comme ici les différents massifs de fleurs.

Phase 10 : travail à faire en exercice ou destiné aux élèves en avance dans la confection de l'affiche

Dans ce parc, on peut marcher partout sauf sur les massifs de fleurs.
Calculer l'aire de la surface accessible aux promeneurs. Demander plusieurs écritures de ce nombre.

Séance 5 (une heure)

Phase 11 : correction de l'exercice donné en phase 10 et retour sur les tableaux de progression

Revenir sur l'exercice donné à faire (voir phase 9 ci-dessus), ainsi que sur le bilan des tableaux de progression.

Les élèves doivent savoir sur quoi ils vont être évalués.

Phase 12 : bilan sur les savoirs et savoir-faire en jeu

Outre les items des tableaux de progression n°1 et n°2, faire apparaître qu'on a travaillé ces savoirs ou savoir-faire :

- Savoir associer diverses écritures d'un nombre, écritures décimale et fractionnaire.
- Savoir qu'une fraction peut désigner un nombre supérieur à 1 ou un nombre inférieur à 1 (ou un nombre égal à 1).
- Savoir qu'un nombre peut s'écrire sous la forme d'une somme, d'une différence… d'autres nombres.
- (Seul le second sens est au programme du cycle 3) Comprendre une fraction de plusieurs façons : par exemple, la fraction 3/4 signifie aussi bien *la part qu'on obtient quand on partage équitablement 3 objets en 4 parts* que *la quantité qu'on obtient quand on partage équitablement un objet en quatre parts et qu'on en prend 3*.
- Comparer des fractions, encadrer des fractions, intercaler des nombres entre deux nombres.
- Savoir faire un raisonnement simple relevant de la proportionnalité.
- Savoir donner un nom à un élément d'un problème.
- Savoir écrire un nombre en écriture à virgule comme la somme d'un nombre entier et de fractions : exemples, 2,7 = 2 + 7/10 ; 4,75 = 4 + 75/100, mais aussi 4,75 = 4 + 7/10 + 5/100.
- Savoir représenter une fraction à partir d'une grille ou d'un disque partagé en pars égales.

Cette liste est à travailler avec les élèves, avec les compétences des grilles n°1 et n°2.

Pour chacun de ces savoirs, expliciter le moment où il a été en jeu dans la situation du parc et donner au moins un autre exemple (à traiter par les élèves en exercice) en dehors du contexte du parc.

On peut également demander aux élèves qu'ils construisent des questions en relation avec les savoirs ou savoir-faire.

Pour le collège, on peut distribuer aux élèves, en fin de phase 10, cette liste de savoirs et savoir-faire en leur demandant de préparer des questions sur ce qu'ils ne comprennent pas. On démarré sur ces questions en début de la séance 5.

Evaluation sommative (au moins une semaine après la séance 5)

On donne exactement le même test qu'avant la séquence.

Pour la notation des élèves, on tiendra compte de la présence ou non d'argument, même si ceux-ci sont faux.