

Matematikudredningen

Udredning af den gymnasiale matematiks rolle og udviklingsbehov

Udført efter opdrag fra Undervisningsministeriet

The image shows a handwritten mathematical derivation on a piece of paper. The derivation starts with the expression $(y_u - (ax_u + b))^2$ and proceeds through several steps to expand it. The steps are as follows:

$$\begin{aligned} & (y_u - (ax_u + b))^2 \\ & (y_u - (ax_u + b)) \cdot (y_u - (ax_u + b)) \\ & (y_u - ax_u - b) \cdot (y_u - ax_u - b) \\ & y_u^2 - ax_u y_u - by_u + ax_u y_u + ax_u^2 + ax_u b - by_u + a \end{aligned}$$

The final line of the derivation shows the simplified result:

$$y_u^2 - 2ax_u y_u - 2by_u + ax_u^2 + 2ax_u b + b^2$$

Britta Eyrih Jessen
Christine Holm
Carl Winsløw

August 2015

Indholdsfortegnelse

1	Introduktion til rapporten, undersøgelsens opbygning og empiriske metode	3
1.1	Læsevejledning til rapporten	5
1.2	Metodiske bemærkninger	5
2	Sammendrag og hovedpointer fra matematikudredningen	12
2.1	Stor spredning i fagligt niveau på matematik B	13
2.2	Behov for revision af den skriftlige eksamen	13
2.3	Manglende konsekvens ved overtrædelse af reglerne	15
2.4	Manglende matematikfærdigheder fra grundskolen	16
2.5	Aftagere og nabofagslæreres efterlyser matematisk dannelse	16
2.6	Lærernes faglige kompetencer	17
2.7	Læsning af faglige tekster	17
3	Elevernes forudsætninger, arbejde og resultater	19
3.1	Formelle resultater - hvor er knasterne?	20
3.2	Hvordan arbejder eleverne med matematik - og hvor oplever de problemer?	22
4	Hvad er matematik på de gymnasiale uddannelser?	27
4.1	Hvilke rammer sætter styringsdokumenterne for fagene?	27
4.2	Hvad er matematik på STX?	27
4.3	Hvad er matematik på HF?	31
4.4	Hvad er matematik på HHX?	32
4.5	Hvad er matematik på HTX?	33
4.6	Hvad er fagenes realiserede mål og indhold?	36
4.7	Behov og evt. mangler udpeget af aftagere	39
4.8	Behov og evt. mangler erfaret af nabofagslærere	45
5	Lærernes erfaringer og syn på fag og praksisbetingelser	47
5.1	Hvad er matematiklærernes daglige udfordringer og udviklingsbehov? ..	47
5.2	Hvad er de reelle kompetencer blandt matematiklærerne?	56
6	Referencer	65
6.1	Refererede kilder	65
6.2	Andre kilder	68

Forsideillustration: Figur 26 fra Jeanette Kjølbaeks kandidatspeciale *One-dimensional regression in high school* (Københavns Universitet, 2015). Billedet viser udsnit af elevarbejde udført på Gladsaxe Gymnasium, forår 2015.

1 Introduktion til rapporten, undersøgelsens opbygning og empiriske metode

Udredningen af matematikfaget på de gymnasiale uddannelser er et arbejde som Institut for Naturfagenes Didaktik ved Københavns Universitet har påtaget sig på baggrund af et oplæg fra de tre fagkonsulenter for matematik på STX & HF, HHX og HTX. Fagkonsulenternes oplæg tager udgangspunkt i erkendelsen af at *"matematikfagets identitet og formål er under pres set i lyset af IT-udviklingen og udviklingen i elevrekrutteringen til de gymnasiale uddannelser, hvorfor der efterlyses en faglig udredning med fokus på områderne: fagets kerneområder – faglige mål og arbejdsmetoder, lærernes faglige og pædagogiske kompetencer, elevmotivation, de faglige resultater, fagets rolle i fagsamarbejde samt lokal udvikling og udviklingsprojekter"*.

Vi valgte derfor at designe en undersøgelse med følgende tre fokusområder:

- A. *Fagets indhold*, herunder mål, metoder og værktøjer (inkl. forskellige former for IT), evaluering og fagsamspil. Gennem styringsdokumenter klarlægges det, hvad fagets indhold er på de forskellige niveauer og gymnasiale uddannelser. Parallelt hermed undersøges det hvilke faglige færdigheder aftagerinstitutionerne kunne ønske sig at kommende studerende besidder både monofagligt og i samspil med andre fag, herunder elevernes kompetencer fx ift. at bruge IT-værktøjer, læse og skrive fagtekster, samt regnetekniske kompetencer. Dette undersøges ved interviews med undervisere på et udvalg af aftageruddannelser. Gennem analyse af eksamenssæt fra de sidste fem år undersøges det, hvad den skriftlige eksamen tester af faglige teknikker (i betydningen regneregler og matematisk teoretisk begrundede operationer) og teoretisk overblik, sammenholdt med analysen af styringsdokumenterne, hvor der tages højde for elevernes forventede brug af instrumenterede teknikker. Det samme gøres med forsøget med ny eksamensform for STX.
- B. *Lærernes viden om fag og praksisbetingelser*, herunder udviklingsmuligheder. Lærernes erfaringer, synspunkter og behovsoplevelser i relation til matematik (herunder samspil med andre fag) på det gymnasiale niveau undersøges i to skridt:
 - i. Fire semistrukturerede fokusgruppeinterviews med lærere i matematik og tilgrænsende discipliner, hvor de fire fokusgrupper udvælges fra de fire gymnasiale uddannelser
 - ii. Webaseret survey udsendt til alle undervisere på de fire gymnasiale uddannelser, hvor der dels stilles fælles spørgsmål, dels stilles specifikke spørgsmål om overgangen fra uddannelse til lærerprofession.

Blandt de temaer som målrettet undersøges er specifikke udfordringer eller forhindringer ift.

- iii. Samspil mellem matematik og andre fag
- iv. Elevernes forudsætninger fra folkeskolen
- v. Fagets rammer, herunder lærerplan, eksamensformer og muligheder for ekstern motivation af eleverne

- vi. Om lærerne ved nyansættelse har tilstrækkelig baggrund både fagfagligt, fagdidaktisk og pædagogisk, og hvorvidt pædagogikum supplerer den akademiske uddannelse passende.

De to sidste punkter afklares yderligere via et webbaseret survey til rektorer ved de fire gymnasiale uddannelser, og dette skema vil desuden skabe statistisk overblik over nyansatte læreres uddannelsesbaggrund, rekrutteringsudfordringer og erfaringer med de nyansattes kompetencer (alt i forhold til matematiklærere).

C. Elevernes forudsætninger, arbejde og resultater.

Der laves en analyse af eksisterende statistikker, konferencerapporter og udviklingsarbejder, der forholder sig til elevernes forudsætninger ud fra de angivne parametre. Elevers tilgang til undervisningen som vilkår for underviserne undersøges gennem interviews med elever om deres forhold til faget matematik, tidsforbrug på lektier, punktstudier af deres afleveringer og deres syn på eget læringsudbytte af hhv. rettede afleveringer og forberedelse til daglig undervisning. Disse punkter belyses også af de tidligere nævnte fokusgruppeinterviews med lærergrupper fra de berørte uddannelser ang. udfordringer og løsningsideer vedr. elevparametre.

Dette er blevet samlet til følgende konkrete arbejdsspørgsmål for undersøgelsen:

- A1: Hvad er fagenes realiserede mål og indhold?
- A2: Behov og evt. mangler hos aftagere?
- A3: Behov og evt. mangler hos nabofag?
- B1: Rekruttering af formelle kvalifikationer?
- B2: Reelle kompetencer og kompetencebehov hos nyansatte?
- B3: Matematiklærernes daglige udfordringer og udviklingsbehov?
- C1: Formelle resultater - hvor er knasterne?
- C2: Hvordan arbejder eleverne med matematik - og hvor oplever de problemer?
- C3: Er elevernes forudsætninger fra folkeskolen tilstrækkelige - evt. konkrete problemer?

Undersøgelsen er gennemført af ph.d.-studerende Britta Eyrich Jessen, konsulent Christine Holm og Prof. Carl Winsløw, med bidrag fra ekstern lektor Claus Seidelin Jessen samt studentermedhjælper Rasmus Ulstrup Larsen.

Undervejs i projektet har arbejdet været kommenteret og diskuteret med de tre fagkonsulenter i matematik fra Undervisningsministeriet: Bodil Bruun, Marit Hvalsøe Schou og Laila Madsen. Sideløbende har arbejdet været diskuteret ved tre møder med en følgegruppe, der repræsenterer gymnasieskolernes aftagerinstitutioner og samtidig relevant ekspertise i matematik: Prof. Niels Grønbæk, IMF, KU, Prof. Claus Michelsen, IMADA, SDU, Prof. Steen Markvorsen, DTU COMPUTE, Prof. David Lando, FRIC, CBS og Lektor Charlotte Krog Skott, UCC. I den afsluttende fase bidrog yderligere lektor Morten Blomhøj, IMFUFA, RUC og lektor Uffe Jankvist, DPU, AU i diskussionen af undersøgelsens resultater.

1.1 Læsevejledning til rapporten

For at få det fulde udbytte af rapporten, vil det være en fordel, hvis læseren har et vist kendskab til matematik i gymnasial sammenhæng, da det ikke helt har kunnet undgå at bruge fagbegreber, særlig i analysen af de realiserede mål. Vi har forsøgt at formulere os så præcist som muligt, hvad angår brugen af IT i undervisningen. Generelt taler vi i teksten om matematikværktøjsprogrammer, hvilket dækker over CAS-værktøjer, regneark, lommeregnere, graflommeregnere og geometriske tegneprogrammer. Eksempler på programnavne kan være Maple, Texas Instruments Nspire, Microsofts Excel, Geogebra, wordmat og mange andre. Et CAS-værktøj er et matematikværktøjsprogram, som kan operere med matematiske symboludtryk (algebra).

I citater og gengivelser af andres tekst har vi holdt fast i den oprindelige ordlyd. Som led i udredningen har vi udført en række empiriske undersøgelser, som beskrives i næste afsnit; vi henviser i rapporten til disse undersøgelser med følgende terminologi:

Aftagerundersøgelsen: Telefoninterviews med undervisere fra aftagerinstitutionerne

Elevundersøgelsen: De fire semistrukturerede fokusgruppeinterviews med op til 5 elever fra samme gymnasiale uddannelsessted.

FiP-undersøgelsen: De gruppesvar fra i alt godt 400 matematiklærere, som vi indsamlede elektronisk vha. programmet *Socrative* ved FiP-konferencen i Vejle (se FiP, 2015), der var arrangeret af fagkonsulenterne i matematik ved STX & HF, HTX og HHX.

Lærerundersøgelsen: Det elektroniske spørgeskema udsendt til landets matematiklærere på de gymnasiale uddannelser

Lærerinterviews: De fire semistrukturerede fokusgruppeinterviews foretaget med 5 matematiklærere ad gangen fra samme gymnasiale uddannelsessted

Nabofagsundersøgelsen: De fire semistrukturerede fokusgruppeinterviews foretaget med 5 lærere repræsenterende 5 nabofag fra samme gymnasiale uddannelsessted

Rektorundersøgelsen: Det elektroniske spørgeskema udsendt til alle landets rektorer på de gymnasiale uddannelser.

1.2 Metodiske bemærkninger

Udredningen er baseret på dels egne empiriske undersøgelser som er oplistet i forrige afsnit, dels skrivebordsstudier af dokumenter, materialer og tidligere undersøgelser vedr. matematik i STX, HTX, HHX og HF. Vi vil nu redegøre for væsentlige detaljer vedr. de empiriske undersøgelser som er udført ifm. udredningen.

Skoler, lærere og elever til fokusgruppeinterviews er udvalgt i samarbejde med fagkonsulenterne i matematik, Undervisningsministeriet, således at vi har besøgt en HTX, en HHX, en STX og en STX & HF skole. Geografisk er skolerne placeret med tre i Jylland og en på Sjælland. Vi vil gerne sende en stor tak til skolerne samt de lærere og elever, der indvilgede i at deltage i interview - og præcisere, at ingen afslog.

Undervisningsministeriet kunne ikke selv levere kontaktoplysninger på samtlige matematiklærere og rektorer ved de berørte uddannelser, men henviste os til officielle lister over skoler, der udbyder gymnasiale uddannelser. På baggrund af disse lavede vi lister over landets rektorer. Til det elektroniske lærerskema fik vi hjælp med en liste over landets STX og HF-lærere i matematik fra Olav Lyndrup og DASG, der havde samlet en sådan i anden sammenhæng; vi takker hermed for "lån" af listen. For at få lavet en tilsvarende liste over HTX og HHX-lærerne gennemgik vi alle disse skolars hjemmesider og høstede adresser. De skoler, der ikke opgav enten fag eller adresser på deres hjemmesider blev kontaktet pr. e-mail med ønske om, at de sendte os de ønskede oplysninger. Ikke alle svarede, og blandt dem der svarede var det ikke alle, der ønskede at udlevere adresserne. Det var således ikke alle relevante matematiklærere som fik mulighed for at besvare lærerundersøgelsen.

Aftagerundersøgelsen er designet med en spørgeguide formuleret af projektgruppen på baggrund af en diskussion med følgegruppen, hvor de hver medbragte opgaver, som de mente var vigtige og vanskelige i deres sammenhæng. Herefter blev det indkredset hvilke spørgsmål, der skulle stilles samt, hvilke mulige respondenter på egne og andre uddannelsesinstitutioner som skulle kontaktes mhp. interview. Spørgeguidens endelige udformning blev:

1. Hvad består din kontakt med de studerende i?
2. Beskriv kort det mest elementære niveau du underviser på med et vist matematisk indhold eller anvendelse. Hvad er formålet med kurset?
3. Hvilket niveau i matematik er et krav for at blive optaget på den uddannelse du underviser på?
4. Er de studerende fortrinsvis fra HTX, HHX, STX eller HF?
5. Hvad er, efter din vurdering, det de studerende er bedst til matematisk, når de starter uddannelse hos jer?
6. Hvad vurderer du er manglerne i deres matematikfaglighed, når de starter på uddannelse hos jer?
7. Hvorfor er det en mangel? Hvad er problemet med at de studerende ikke kan eller ved dette?
8. Er der et matematisk emne, du mener de studerende med fordel kunne have lært i gymnasiet (alle fire skoleformer), men efter din erfaring, ikke dækkes af undervisningen på nuværende tidspunkt?
9. Hvordan vil du vurdere de studerendes evner er ift. til at sætte skolematematikken (fx forskellige former for modeller, repræsentationsformer og hypotesetest) i spil i forhold til andre fag?
10. I hvilken udstrækning oplever du gennem din undervisning, at de studerende kan håndtere et CAS-værktøj? (Evt. erfaringer med forskellige CAS-værktøjer) Til regnemaskine? Til begrebsforståelse?
11. Hvilken betydning for din undervisning har det, at de studerende i gymnasiet har lært at bruge CAS-værktøjer (som regnemaskine? Til begrebsforståelse?)?
12. Hvordan vurderer du de studerendes evner til at læse tekster som forudsætter viden fx om symboludtryk, beregninger, deduktivt ræsonnement etc. ?

13. I hvor høj grad vurderer du, at de studerende er i stand til selvstændigt at finde og sætte sig ind i fagligt relevant materiale som er baseret på matematiske metoder?

Telefoninterviewene belyser spørgsmål A1 og A2.

Denne undersøgelse blev suppleret med elevundersøgelsen, lærerinterviews og nabofagsundersøgelsen. Nabofagslærere defineres som undervisere i andre fag, hvor der forventes at være et vist matematisk indhold og anvendelse. For STX og HF drejer det sig om lærere fra fagene kemi, biologi, bioteknologi, samfundsfag, fysik og Naturgeografi. For HTX var det lærere fra fagene fysik, kemi, bioteknologi, teknik og Informationsteknologi. For HHX kom to lærere fra afsætning (1 cand.merc.er, 1 med 2-årig handelsuddannelse), to underviste i international økonomi, virksomhedsøkonomi og erhvervsøkonomi (oecon. og scient. oecon.), og dertil kom en IT-lærer, der også underviste i matematik. Lærerne (og dermed fag) blev udpeget af de udvalgte skolars ledelser ud fra projektgruppens definitioner af nabofag.

Lærerundersøgelsen og nabofagsundersøgelsen er gennemført på baggrund af en spørgeguide designet af projektgruppen og kommenteret af fagkonsulenterne i matematik. Udarbejdelsen er sket på baggrund af et møde med følgegruppen, hvor hvert medlem havde medbragt tre for dem presserende spørgsmål til lærerne om deres praksisbetingelser og arbejde med faget. Disse blev skrevet sammen til fem overordnede spørgsmål:

1. I jeres daglige arbejde som matematiklærere, er der så elementer i faget matematik som I synes der mangler, underprioriteres eller fylder for meget? Og hvorfor?
2. Omvendt, hvad mener I så, at der fungerer særligt godt ved i matematikfag I underviser i?
3. Hvordan oplevede I jer klædt på til undervisningsopgaven, da I startede som lærere i matematik? Og hvordan går det nu?
4. Hvilke udfordringer oplever I, at eleverne har i overgangen fra grundskole til gymnasial uddannelse og hvordan håndterer I dem?
5. Kan I forestille jer en ekstern motivation, der kunne sikre bedre resultater i matematik?

Fokusgruppeinterviewene er med til at give svar på spørgsmålene A2, B2, B3, C1, C2 og C3.

Tilsvarende var der udarbejdet en spørgeguide til nabofagsundersøgelsen med følgende spørgsmål:

1. Hvad er godt, og hvad kan evt. forbedres i samspillet mellem jeres fag og matematik?
2. Giv eksempler på, hvor i dit fag, der trækkes på matematiske kompetencer eller færdigheder?
3. I hvor høj grad har eleverne disse kompetencer og færdigheder, og i hvor høj grad er det noget, du selv underviser eleverne i? Giv gerne eksempler.

4. Hvilken rolle spiller fagsamspil for jeres elevers læring (af jeres fag) efter jeres vurdering? Giv gerne eksempler.

Yderligere var der formuleret spørgsmål om hvorvidt rammebetingelser besværliggør samspillet, hvilken rolle styringsdokumenterne spiller, eksempler på samspil, hvorvidt lærerne opfatter samspillet med matematik som studieforberedende samt eksempler på samspil hvor matematikværktøjsprogrammer er en fordel. Inspirationen til spørgsmålene her er til dels hentet hos svarene fra i aftagerundersøgelsen. Nabofagsundersøgelsen besvarer spørgsmål A3.

Endelig sendte hver matematiklærer fra lærerinterviewene en elev til elevundersøgelsen. Eleverne var i midtergruppen (standpunktskarakter 4-7 i matematik), bortset fra en enkelt (med 12). Årsagen til, at vi ønskede disse elever var, at gruppen vi ønskede at tale med, skulle være elever, der ikke oplevede matematik som uoverskueligt svært, eller som mangler udfordringer grundet deres flair for faget. Vi forventede derfor, at elever med middelkarakterer ville give et mere nuanceret billede af fagets udfordringer fra elevperspektivet. Elevgrupperne er selvfølgelig ikke "repræsentative" i nogen forstand. Der er alene tale om punktstudier af elevsynspunktet i denne rapports egen empiri.

De medbragte hver to rettede afleveringer. Én aflevering bestående af eksamenslignende opgaver og én mere projektorienteret opgave eller temaopgave.

Spørgsmålene til eleverne var følgende:

1. Hvordan ser et typisk matematikmodul ud?
2. Hvordan forbereder I jer til modulerne?
3. Hånden på hjertet; hvad foretager I jer i et matematikmodul og hvorfor?
4. Beskriv en situation, hvor I lærte noget nyt i matematik.
5. Lad os kigge på nogle konkrete rettelser – hvad tænker I om dem?

Hvis eleverne ikke selv kom ind på det, blev de også stillet supplerende spørgsmål: hvordan ser en typisk aflevering ud, hvor ofte afleverer I, hvordan går I i gang med en matematikaflevering, hvad gør I med returnerede afleveringer, hvad er konsekvenserne ved snyd, har det nogen konsekvenser om I har lavet lektier til modulerne eller ej, hvordan kan man højne jeres engagement, hvad ville I sige til løbende prøver eller skriftlige stopprøver?

Disse interviews skulle bidrage til at besvare udredningens spørgsmål C2 og C3.

For at styrke vores sikkerhed for, at de nævnte spørgsmål kunne afdække de væsentligste udfordringer og styrker, som matematiklærerne oplever i deres hverdag, stillede vi nogle tilsvarende spørgsmål ved konferencen *Faggruppeudvikling i Praksis: Matematik* (Vejle, 8. april 2015). Konferencen var arrangeret af Undervisningsministeriets tre fagkonsulenter i matematik på de gymnasiale uddannelser. Der deltog i alt 410 lærere, der bredt repræsenterede matematikfaget på gymnasialt niveau. Deltagerne blev delt ind i grupper med 8

lærere i hver, og grupperne blev bedt om at formulere svar på følgende spørgsmål:

1. Nævn, i stikord, 3-5 opgaver for matematiklæreren, som er problematiske – angiv hvori det problematiske består.
2. Hvad mener I fungerer særligt godt ved det matematikfag I underviser i?
3. Hvordan oplevede I jer klædt på til undervisningsopgaven, da I startede som lærere i matematik?
4. Matematik er forholdsvis udfordret ift. elevernes resultater ved eksamen. Er der behov for at styrke elevernes motivation for at arbejde med matematik og i givet fald, hvad ville I foreslå?

Grupperne fik en kode, som de skulle logge på systemet *Socrative* med og afgive deres svar elektronisk, hvorefter der blev lavet en kort opsamling af nogle af svarene. Dette er hvad vi kalder *FiP-undersøgelsen* i resten af rapporten. Vi er nødt til at tage det forbehold for resultaterne her, at vi ikke med sikkerhed kan vide, hvorvidt alle udsagn er valideret igennem gruppediskussion.

Enkeltpersoner kan have svaret for sig selv.

Ydermere har projektgruppen i nogle tilfælde skullet tolke stikordsformen, som præger en del svar.

På baggrund af de ovennævnte undersøgelser og følgegruppens input blev det elektroniske spørgeskema til lærerne formuleret. I rapporten refereres til denne undersøgelse som *lærerundersøgelsen*. Hypoteser om udfordringer og svarkategorier var i vid udstrækning hentet fra de nævnte undersøgelser.

Efterfølgende blev spørgeskemaet justeret på baggrund af kommentarer fra projektgruppens medlemmer samt de tre fagkonsulenter.

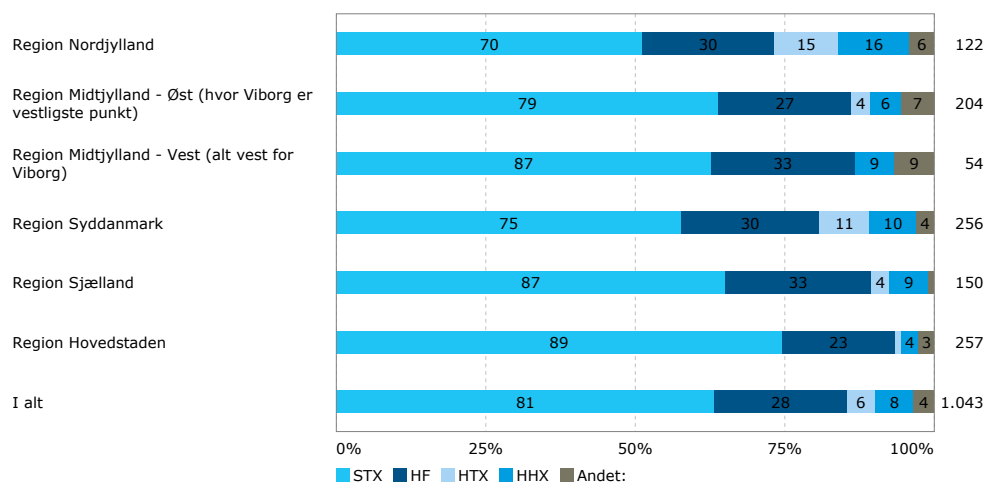
Respondentlisterne blev samlet som beskrevet tidligere. Spørgeskemaet blev sendt ud til 2173 lærere. Heraf blev der meldt fejl i 108 adresser og 3 respondenter meldte tilbage, at de ikke underviste på gymnasialt niveau. 1044 respondenter har besvaret skemaet helt eller delvist, heraf besvarede 763 alle spørgsmål, og 281 afgav nogle svar. Der er altså tale om en svarprocent på 51% (hvor 37% besvarede hele skemaet).

Respondenterne i lærerundersøgelsen har været rimeligt fordelt i forhold til geografi og skoleformer jf. Figur 1, der viser sammenhængen mellem, skoleform og geografisk placering i landet. Bemærk at region Midtjylland er delt i en nord-syd-akse igennem Viborg, hvor Viborg hører med i den østlige halvdel. Desuden er alle HF-uddannelser samlet i én kategori.

Udredning af den gymnasiale matematiks rolle og udviklingsbehov

1. Hvilken skoleform underviser du på? (sæt gerne flere kryds)

Krydset med: 2. Hvor i landet ligger din skole?



Figur1: Figuren viser, hvor mange respondenter fra lærerundersøgelsen, der kommer fra de enkelte regioner og skoleformer.

Kategorien "andet" dækker over fritekstsvar, hvor respondenterne angiver GSK, VUC eller IB. Fordelingen af respondenter svarer nogenlunde til fordelingen af elever på de forskellige uddannelser.

Spørgeskemaet rummer 38 spørgsmål omhandlende lærerens ansættelse og uddannelse, elevgrundlaget og dets indvirkning på lærerens praksis, samt en række spørgsmål om lærerens rammebetingelser for undervisning og lærerens tilrettelæggelse af denne.

Spørgeskemaets ordlyd har givet anledning til forskellige kommentarer: enkelte uhensigtsmæssige svarkategorier, at man ikke kunne springe spørgsmål over eller svare "ved ikke", og fordi der manglede et generelt kommentarfelt vedr. skemaet. Dette har ført til henvendelser fra godt 20 lærere samt fra Matematiklærerforeningen for STX og HF. Sidstnævnte udtrykte bekymring for, hvad undersøgelsens resultater skal bruges til. Efter en tilbagemelding fra projektgruppen gik Matematiklærerforeningen ud og anbefalede sine medlemmer at deltage i undersøgelsen.

Særligt har mange af henvendelserne pointeret, at lærerne har frihed til at tilrettelægge deres undervisning, hvorfor de ikke ønsker at besvare spørgsmål om, hvordan de gør det. Endelig påpeger mange, at det tager for lang tid at udfylde skemaet i en presset hverdag. Dette kan være en forklaring på den relativt store andel, der ikke eller kun delvist har svaret. Trods disse forbehold mener vi, at der er grund til at fæste lid til de overordnede resultater af også denne del af udredningen.

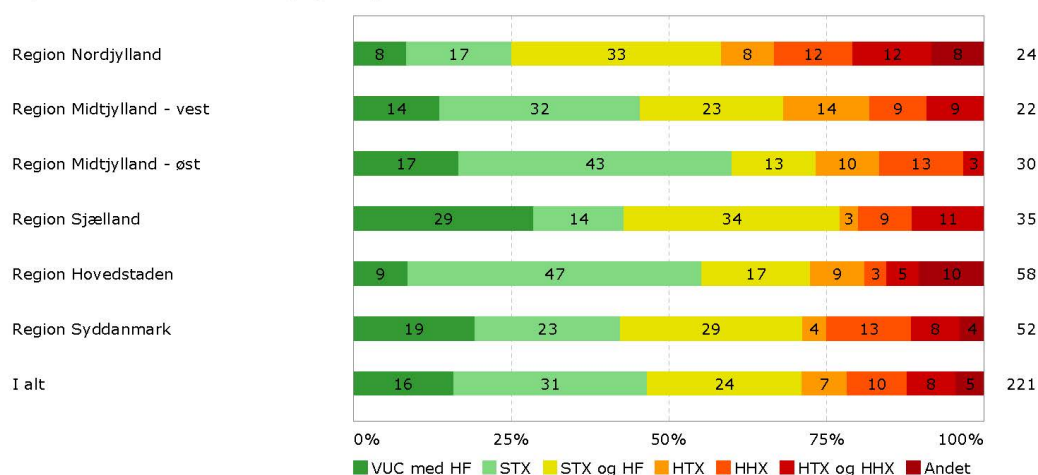
Lærerspørgeskemaet bidrager til at besvare udredningens spørgsmål B3 og C3.

For at opnå viden om rekrutteringsudfordringer ift. ledige stillinger samt kompetencerne hos nyuddannede lærere, udsendte vi et elektronisk spørgeskema til landets rektorer på de fire uddannelsesformer. Spørgeskemaet blev sendt ud til 371 respondenter, 215 (58%) gennemførte skemaet, 6 (2%) afgav delvist svar, og 150 (40%) svarede ikke. Der var fejl i 4 respondenteres e-mail adresser, og 3 skoler skrev tilbage, at de ikke udbød gymnasiale uddannelser.

Nedenstående figur 2 viser, hvilke skoleformer og geografisk område respondenterne tilhører. "Andet" kategorien dækker over fritekstsvar, hvor det primært angives GSK, IB og uddybende kommentarer om VUC-skoler.

1. Hvilken skoleform er du leder for?

Krydset med: 2. Hvor er din skole geografisk placeret?



Figur2: Figuren viser, hvor mange respondenter i rektorundersøgelsen, der har svaret fra de enkelte regioner og skoleformer.

Rektorundersøgelsen har til formål at belyse udredningens spørgsmål B1 og B2.

I næste afsnit findes et sammendrag af udredningens hovedresultater, samt overvejelser om hvilke konsekvenser, de kan eller bør have. Rapportens efterfølgende afsnit behandler resultaterne i større detalje. Hoveddelen af rapporten er bygget op i tre kapitler. Det første betragter elevperspektivet på gymnasial matematik og bygger til dels på tidligere undersøgelser. Det andet omhandler matematikfagernes profil, foreskrevne mål og realisere mål. Det sidste kapitel - som nok er det kapitel, der indeholder mest ny information - omhandler matematiklærernes praksisbetingelser, udfordringer, uddannelse, kompetencer og behov for videreudvikling. Der er naturligvis også en række emner, som går på tværs af kapitlerne, herunder ikke mindst brugen af matematikværktøjsprogrammer og eksamens styrende rolle ift. læreres og elevers virksomhed.

2 Sammendrag og hovedpointer fra matematikudredningen

I dette afsnit vil vi præsentere hovedpointerne i rapporten med henvisning til de afsnit, hvor læseren kan få yderligere indblik i udredningens resultater.

Afsnittet fokuserer på forhold, som kan anses for problematiske, og indeholder desuden kommentarer vedrørende handlemuligheder og vurderinger, som vi finder, at disse forhold giver anledning til at overveje nærmere. Vi vil gerne her understrege to ting. For det første opleves mange af de samme udfordringer også i andre lande, i varierende former og grader; matematik er, kort sagt, ikke bare et vigtigt, men også et svært fag at lære. For det andet må denne rapports fokus på problemer ikke tages som udtryk for at dansk, gymnasial matematikundervisning fungerer dårligt i al almindelighed. Tværtimod: her møder eleverne for første gang - tre år senere end elever i mange andre vestlige lande - lærere, som har en akademisk uddannelse i matematik. Disse lærere løfter indenfor en kort årrække eleverne til et niveau, som både samfundsøkonomisk og ift. den enkelte er værdiskabende som få andre elementer i uddannelsessystemet (se fx Produktivitetskommissionen 2014, s. 56ff). Gymnasial matematik er altså en vital og central del af dansk uddannelse, som det er vigtigt at bevare og videreudvikle.

Når man vil forfølge disse mål, har vores undersøgelse især identificeret tre udfordringer, som det vil være afgørende at tage hånd om (de uddybes nedenfor og i resten af udredningen):

- *Form og indhold i skriftlig eksamen leder i for høj grad til skabelontræning og overdreven betoning af matematikværktøjsprogramstøttet teknisk arbejde i undervisningen.* Der bør derfor udvikles nye, mere varierede og mere begrebsorienterede opgaver, ligesom større dele af eksamen bør foregå alene med papir og blyant.
- *Der er meget stor faglig spredning blandt eleverne på B-niveau'et, og man bør derfor overveje nye modeller, der kan sikre at eleverne, som får mulighed for at tage B-niveau, også har tilstrækkelige forudsætninger.* Det kan fx overvejes at regulere adgangen gennem en skriftlig prøve ved slutningen af 1.g. Dette vil naturligvis kræve en gentænkning af hvordan matematik indgår i studieretninger.
- *Det er nu op mod 1/3 af de nyansatte lærere, som ikke i deres universitetsuddannelse har haft matematik på det niveau, som er krævet for at undervise på de gymnasiale uddannelser.* Der bør sættes ind ift. dette massive rekrutteringsproblem og ift. behov for efteruddannelse og supplering af kvalifikationer i lærerkorpset.

I de følgende. delafsnit gennemgås disse og andre hovedresultater af udredningen kort, med henvisning til uddybning og detaljer i resten af rapporten.

2.1 Stor spredning i fagligt niveau på matematik B

Tilsammen tegner lærerinterview, FiP-undersøgelsen samt lærerundersøgelsen et klart billede af, at en af de største udfordringer for lærerne er den store spredning i matematikfagligt niveau blandt eleverne. Denne udfordring er særlig stor på B-niveauhold og på hævehold fra C til B, som hhv. 32% og 30% af respondenterne i lærerundersøgelsen fremhæver som de hold, der presser dem. Her taler vi generelt om B-hold på alle fire uddannelser samt hævehold på alle fraregnet HTX. Dertil kommer at 32% af respondenterne svarer, at presset er studieretningsafhængigt, og at det i særlig grad er studieretninger med matematik B (særligt matematik B – samfunds-fag A for STX) der er udfordrende, se afsnit 5.1.1. Der nævnes ikke specifikke retninger for HTX og for HHX peges der her på Innovations retninger, nogle dog med matematik C. Det skal yderligere tilføjes, at matematik B også er det største problem, når man ser på dumpeprocenterne, der ligger højere her end på de øvrige niveauer, jf. afsnit 3.1.

Det er klart, at det inden for studieretningsgymnasiets rammer ikke er let at afhjælpe problemet vedr. for stor faglig spredning, fordi eleverne typisk tager matematik på et givet niveau som en del af deres studieretning, og i øvrigt gør det uden sammenhæng med en forudgående vurdering af deres niveau i matematik. Der er på hævehold fra matematik C til B lavet forsøg med at niveaudele eleverne for at målrette undervisningen mod den enkelte. Disse forsøg er gjort på flere gymnasier, og har også vundet indpas på HF-uddannelserne. Det ligger dog udenfor denne rapports rammer at undersøge effekterne af disse forsøg.

Det bør overvejes om systematisk niveaudeling, eventuelt blot i nogle perioder, vil være hensigtsmæssigt for at afhjælpe udfordringerne med den for store faglige spredning på B-niveauet, også selvom det kunne betyde, at samspillet med andre studieretningsfag skal sikres på andre måder end ved, at eleverne på en given studieretning har matematik sammen hele tiden. Man bør også overveje om adgangen til matematik B bør reguleres, fx vha. en prøve ved afslutningen af 1.g, hvor alle elever skal op, ingen er på træk. Ydermere kunne dette kombineres med prøver i andre fag, der kan være styrende for, hvilke studieretninger en elev kan vælge. Igen vil det kræve mere omfattende justeringer af det aktuelle studieretningssystem.

2.2 Behov for revision af den skriftlige eksamen

I lærerundersøgelsen skriver en respondent, at "man skal som lærer være idealistisk for at holde fanen højt og undervise sine elever, så de bliver gode til matematik, når eleverne kan klare sig lige så godt til eksamen ved en undervisning, der er fokuseret på CAS-kommandoer og modelbesvarelser" (matematiklærer på STX). En modelbesvarelse eller skabelonbesvarelse vil sige, at eleverne medbringer forskellige former for opskrifter på, hvordan typeopgaver skal besvares, typisk under brug af et matematikværktøjsprogram. I et lærerinterview formulerede en STX-lærer det således, at hun "underviser elever i at besvare modelleringsopgaver med et CAS-værktøj". Denne formulering skal forstås som det forhold, at en matematikopgave er blevet pakket ind i en kontekst, som ikke påvirker de matematiske teknikker (disse skal ikke forveksles med teknikker på computere eller lommeregner, men betyder

her regneregler og matematisk teoretisk begrundede operationer) og valg der skal træffes for at løse den. Det handler altså om, at pakke matematikopgaven ud, løse den og formulere et svar under brug af det sprog, opgaven oprindeligt blev præsenteret i. I matematikdidaktikken kaldes denne form for modelleringslignende opgaver for "applicationist" (Barquero, Bosch & Gascón, 2009) eller "word problems" (se fx Gravemeijer, 1998). For en videre diskussion af konsekvenserne af modelleringsaktiviteter i dansk gymnasiesammenhæng se (Jessen, Kjeldsen & Winsløw, 2015).

Det er ikke kun STX-lærere, der giver udtryk for disse udfordringer og oplevelser af matematikfaget. Fx erklærer 53% af respondenterne i lærerundersøgelsen, at de er splittede mellem at forberede elever til skriftlig eksamen og samtidig arbejde begrebsorienteret. Der er 29% som mener, at de bruger for meget tid på at lære eleverne at bruge et matematikværktøjsprogram, og 14% siger, at de bruger for meget tid på at lære eleverne at løse modelleringsopgaver med et matematikværktøjsprogram. Disse fordelinger ser i vid udstrækning ens ud for de fire uddannelser.

Presset fra eksamen øges for lærerne af, at deres arbejde i et vist omfang evalueres på basis af elevernes karakterer: 51% af respondenterne i rektorundersøgelsen siger, at de bl.a. bruger de skriftlige eksamenskarakterer til at vurdere kvaliteten af den enkelte lærers arbejde. HTX rektorerne bruger eksamenskaraktererne mere end de øvrige uddannelser og HHX lidt mindre.

En række problematiske forhold omkring den skriftlige eksamens udformning er omtalt i afsnit 4.6. Hovedpointen er, at opgaverne i vid udstrækning kan løses med standardiserede matematik teknikker, og at det fører til et for instrumentelt og rutineorienteret fokus i matematikundervisningen. Problemet forstærkes af at mange af teknikkerne er automatiseret vha. matematikværktøjsprogrammer. Umiddelbart kan det synes påfaldende at fag som matematik B på STX kan have dumpeprocenter på over 20%, hvis eksamen kan bestås ved præfabrikerede skabelonbesvarelser i et matematikværktøjsprogram. En forklaring kan være, at eleverne oplever eksamen som hvad vi i afsnit 4.6 kalder et binært chancespil. Hvis det ikke er matematisk indsigt, der afgør valget af skabelon, men derimod kvalificerede gæt på baggrund af sprogbrug, vil eleverne have større risiko for at vælge eller gætte helt galt og dermed ingen point få for en opgave. En fagligt begrundet strategi vil derimod som regel i det mindste give nogle points. Hverken fagligt svage eller stærke elever udfordres særligt hensigtsmæssigt af en undervisning, hvor fokus er på en eksamen med skabelonbaserede standardopgaver.

Halvdelen af respondenterne i lærerundersøgelsen ønsker, at en større del af eksamen skal være opgaver, der kan regnes uden andre hjælpemidler end en godkendt formelsamling. 25% i lærerundersøgelsen ønsker flere centralt stillede prøver undervejs i et givet niveau, som tæller med i årskaracteren. At der kan være en pointe i gennem eksamensopgavernes udformning at fremme arbejdet med papir og blyant skyldes hensynet til det indledende "heuristiske" arbejde i løsningen af en opgave eller et problem: "One can at least question whether students will benefit from using the existing technology for heuristic

writing when researchers do not. A tendency to support collaboration by having all documents and working papers stored digitally might force students into using a computer for activities that are better supported by conventional means such as a pen and a piece of paper..." (Misfeldt, 2005, s. 40). Mere generelt peger (Mueller & Oppenheimer, 2014) i en undersøgelse af universitetsstuderende på at disse opnår bedre resultater når de tager noter i hånden frem for på computer; dette er mest udtalt i fag, der omhandler begrebsammenhænge snarere end fakta – altså i fag som matematik. Hvis computeren bliver det altdominerende skriveredskab, sætter det således en begrænsning på elevernes udfoldelsesmuligheder. Se yderligere afsnit 5.1.5.

Generelt giver analysen af eksamensopgaverne, og især deres tilbagevirkning på matematikundervisning og elevernes virksomhed, grund til at overveje en mere dybdegående revision af skriftlig eksamen, både ift. opgavetyperne og hvad angår rammerne - herunder den rolle, som hjælpemidler spiller.

Ift. opgavedesign er det vigtigt at reducere muligheden for (og det tilhørende incitament til) at forberede sig ved ren skabelontræning med fokus på brug af matematikværktøjsprogrammer. En større del af skriftlig eksamen bør foregå uden elektroniske hjælpemidler, så begrebsorienteret arbejde kan få en mere fremtrædende plads både ved eksamen og i undervisningen.

Opgavekommissionerne er i praksis bundet af præcedens (forventninger hos lærere og elever baseret på tidligere prøver), og har normalt heller ikke de nødvendige ressourcer til at udvikle afgørende nye opgaveformater, pilotteste disse og forberede lærerne. Større ændringer skal udmeldes i god tid og design af nye opgaver skal forberedes og afprøves grundigt inden de tages i brug.

Fokus for revisionen bør være at styrke sammenhængen mellem fagenes faglige mål og den opfyldelse, som kan demonstreres gennem besvarelse af de skriftlige opgaver. Man bør herunder tilstræbe, at eksamensopgaverne i højere grad tester matematikfagets almindennende og begrebslige sider (specielt vedrørende modellering og deduktivt ræsonnement) - i enkle, men ikke-trivielle former. Hvad angår hjælpemidlerne skal et bredere opgavespektrum også medvirke til at give automatiseret brug af matematikværktøjsprogrammer en mindre dominerende rolle, så brugen af værktøjerne bliver en støtte for matematisk tankegang, snarere end en erstatning af den. Man bør også overveje at lade en større del af eksamen foregå med papir, blyant og autoriseret formelsamling. Endelig bør det, som nævnt i forrige afsnit, overvejes at afholde centralt stillede skriftlige prøver for alle efter afslutningen af hvert skoleår, med resultater der indgår i studentereksamen. På nuværende tidspunkt er både den mundtlige og skriftlige eksamen kun på udtræk og det er kun en mindre del af eleverne, der afslutter et givet niveau, som kommer til mundtlig eksamen. Se flere detaljer i afsnit 5.1.2 og 5.1.3.

2.3 Manglende konsekvens ved overtrædelse af reglerne

I forlængelse og sammenhæng med ovenstående anbefalinger om at se på en revision af skriftlig eksamen, er der behov for at Undervisningsministeriet snarest tager stilling til de problemer med snyd ved eksamen og manglende konsekvenser af plagiat eller fravær af obligatoriske afleveringer, som rapporten

beskriver. Vi kan ganske vist ikke give præcise tal for omfanget af disse problemer. Men rapporten dokumenterer alligevel, at problemerne findes, og at der er behov for centrale retningslinjer og tilhørende støtte vedr. konsekvenserne af plagiat i afleveringer og vedr. effektiv kontrol med elevernes brug af internet og mobiltelefon under den skriftlige eksamen. Se afsnit 3.2 og 5.1.3.

2.4 Manglende matematikfærdigheder fra grundskolen

En række tidligere undersøgelser og initiativer har drejet sig om overgangen fra grundskolens matematik til gymnasial matematik, og som det også tidligere har været konstateret, peger over halvdelen af respondenterne i lærerundersøgelsen på manglende færdigheder hos de nye 1.g'ere indenfor basale regnefærdigheder, brøkgregning, potensregneregler, simpel ligningsløsning, reduktion af symboludtryk, modelleringsopgaver, og læsning af matematikholdig tekst. Lærerne er mere positive hvad angår 1.g'ernes generelle studiefærdigheder. Der er ikke markant forskel i disse vurderinger, når vi sammenligner udsagn fra gymnasielærere, som har sat sig ind i folkeskolens læreplaner mv. med udsagn fra dem, som ikke har. Man kunne måske ellers forestille sig, at lærere, der ikke er fortrolige med skolens læreplaner, kunne have urealistisk høje forventninger til de nye 1.g'ere. Men der er altså ikke noget i vores datamateriale, der tyder på det. Se yderligere afsnit 5.1.4.

I erkendelse af, at matematik i gymnasial sammenhæng bygger videre på grundskolens matematik, bør der gøres en intensiveret indsats for kommunikation og koordination mellem de to skolers matematiklærere, fx mhp. at intensivere grundskolens arbejde med de færdigheder, som indgår i læreplanerne for grundskolen og som gymnasielærerne efterlyser hos de nye 1.g'ere, samt for at give gymnasielærere bedre muligheder for at tage imod disse elever.

2.5 Aftagere og nabofagslæreres efterlyser matematisk dannelse

At dømme efter aftagerundersøgelsen og nabofagsundersøgelsen, så er der dele af de færdigheder, som gymnasielærerne efterlyser hos 1.g'erne, som også efterlyses af nabofagslærerne og af aftagerinstitutionerne. De to undersøgelser går fint i tråd med hinanden. Begge peger på mangler hos nogle elever ift. at sætte deres matematikfærdigheder i spil i nye og ukendte kontekster. Ydermere savner aftagerinstitutionerne en form for matematisk dannelse, der gør eleverne i stand til at overskue og løse matematikholdige problemer, herunder at vurdere, hvad der er let og svært at løse, jf. Afsnit 4.7. Der efterspørges ikke nye emner i matematikfaget (en enkelt nævner dog basal sandsynlighedsteori), men der er et klart ønske om mere solid kunnen indenfor de aktuelle emner. Disse resultater svarer til hvad der har været fremført i tidligere rapporter. Det nye her er, at ovenstående for så vidt angår nabofagslærerne gælder bredt for de gymnasiale uddannelser og niveauer. Det skal i øvrigt bemærkes, at de tiltag vedr. skriftlig eksamen, som nævnes i afsnit 2.2, også vil medvirke til at imødekomme nogle af de ønsker, som aftagere og nabofagslærere udtrykker.

2.6 Lærernes faglige kompetencer

Generelt tegner der sig et billede af et lærerkorps med tradition for en solid matematikfaglighed, og som er bevidste om, hvor meget det løfter eleverne matematisk fra de starter i 1.g. Alligevel er der visse krisetegn, som det er vigtigt at tage stilling til, og som i vid udstrækning skyldes velkendte og uløste problemer med et utilstrækkeligt antal fagligt kompetente kandidater til nye matematiklærerstillinger. Dette har tidligere været fremført af bl.a. Danske Gymnasier og Undervisningsministeriet selv, jf. afsnit 5.2.

Aktuelt er der 36% af lærerne, der har et hovedfag i matematik, og 38% har et sidefag. Ser man på de lærere med 5-10 års undervisningserfaring på gymnasialt niveau har 30% et hovedfag og 47% et sidefag. Altså er der en udvikling i retning af færre hovedfagsuddannede lærere i gang. Andelen med hoveduddannelsen i en anden naturvidenskabelig eller samfunds faglig grad, fx som ingeniør eller økonom, dækker generelt set 25% - disse lærere er hovedsagligt ansat på de erhvervsgymnasiale uddannelser. Ser man på dem med 5-10 års erfaring i denne gruppe, så udgør de 32% lærerne. Dette er et problem, der har været kendt i mange år jf. (Undervisningsministeriet, 1999), men der mangler fortsat at blive taget effektivt hånd om problemet.

Der ansættes en del matematiklærere, hvis grunduddannelse ikke opfylder krav svarende til de faglige mindstekrav for undervisning i gymnasial matematik, som er fastsat af undervisningsministeriet - disse kandidater skal supplere ved at tage matematikkurser ved universiteterne, men der er en del, der tyder på, at det ikke altid sker. Kompetencen til at give undervisningskompetence i matematik på baggrund af de faglige mindstekrav ligger i dag hos rektorerne, der kan søge hjælp til sådan en vurdering hos Undervisningsministeriet. Rektorundersøgelsen viser dog, at 32% af respondenterne enten ikke eller kun delvist kender de faglige mindstekrav, der skal vurderes ud fra. På baggrund af denne rapports tal kunne man overveje om denne kompetence alene skulle ligge i Undervisningsministeriet.

Desuden peger lærerundersøgelsen, FiP-undersøgelsen og lærerinterviews alle i retning af, at kandidatuddannelserne og pædagogikum ikke hænger godt nok sammen, og en del lærere rapporterer om en svær begyndelse som undervisere. Spurgt ind til, hvilke dele af pædagogikum, de bruger efterfølgende, er det særligt sparring fra praktisk pædagogikum og det fagdidaktiske kursus, der peges på. Resultaterne her ligner meget de generelle resultater af evalueringen af den nuværende pædagogikumordning (Dansk Evalueringsinstitut, 2013), se afsnit 5.2.3. og 5.2.4. Resultaterne her skal yderligere ses i lyset af lærernes egne ønsker til efteruddannelse, der særligt drejer sig om viden om og redskaber til at omsætte deres matematikfaglighed og teoretiske viden til inspirerende og motiverende undervisning. For en præcisering af, at dette er et matematikdidaktisk og *ikke* pædagogisk problem, se afsnit 5.2.3.

2.7 Læsning af faglige tekster

En tredjedel af matematiklærerne finder at det er svært at få eleverne til at læse matematiske tekster, og beder dem derfor ikke om at gøre det. Det er

problematiske af en række oplagte grunde, bl.a. fagets vanskelige skriftlighed og behov i videregående uddannelser. Se en udfoldet diskussion i afsnit 5.1.5. Der bør derfor arbejdes mere bevidst med betydningen af at læse matematikholdig tekst som en forudsætning for, at eleverne selv kan producere enkle matematiske ræsonnementer og modeller på en korrekt og selvstændig måde. Det skal understreges, at dette arbejde ikke alene kan eller skal løftes i den gymnasiale matematik, og vi så ovenfor, at "læsning af matematisk tekst" er en færdighed, som gymnasielærerne også gerne ser opprioriteret i grundskolen.

3 Elevernes forudsætninger, arbejde og resultater.

Elevperspektivet på gymnasial matematikundervisning har været genstand for opmærksomhed gennem en del år. Problemerne ved overgangen fra grundskole til gymnasium er blevet mere tydelige som følge af, at elevgruppen er vokset og dermed antagelig også er blevet mere varieret hvad angår faglige forudsætninger, interesser og sociale baggrunde.

Tidligere rapporter behandler overgangsproblemerne, hvoraf særligt bidragene fra Lindenskov et al. (2009) & Dahl (2009) har fokus på matematik bl.a. i overgangen mellem grundskole og gymnasium. Vigtige pointer fra forskningsprojekterne om overgangen er, at mange elever oplever, at selv om de fortsætter med samme fag, så skifter matematikfaget fundamentalt karakter, når de går fra folkeskolen til gymnasiet, og mange får problemer med at leve op til de nye og anderledes krav. Der opleves et spring snarere end en gradvis progression i kravene til fx abstraktion og præcision, et spring som for nogle forekommer uoverstigeligt.

Der er blevet gennemført en række udviklingsprojekter og undersøgelser som adresserer elevernes problemer ved overgangen fra grundskole til gymnasium. Ebbensgaard et al. (2014) sammenfatter resultater fra en række af disse forsknings- og udviklingsprojekter under Undervisningsministeriet. Ministeriet havde inden denne rapport blev skrevet, udbudt flere runder af udviklingsprojekter med særlig fokus på gymnasiefremmede elever, herunder projekter som stillede skarpt på elevernes udfordringer i matematik, fx et projekt om faglig læsning i matematik (Hjorth et al, 2012; Ulriksen et al 2013). I Silkeborg har der gennem en række år været arbejdet med overgangsproblemerne i *Matematiklærernetværket* som er et samarbejde mellem grundskole- og gymnasielærere i matematik (Christensen, 2012). Senest er der igangsat et nyt udviklingsprojekt, *Matematikbroen*, som handler om efteruddannelse af folkeskolelærere mhp. at styrke elevernes forudsætninger for gymnasial matematik; dette projekt er finansieret af A. P. Møller fonden og udføres i et samarbejde mellem to kommuner (København & Silkeborg), to gymnasier (Gefion & Silkeborg) samt Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet (Matematikbroen, 2015).

Elevernes resultater fra den gymnasiale matematikundervisning måles på en meget konkret måde ved eksamen, der dog kun forekommer ved udtræk. Det er desværre iøjnefaldende, at mange elever får meget lave karakterer på C- og B-niveauerne, og en stor andel af eksaminanderne direkte dumper ved eksamen (i den forstand, at de får en lavere karakter end 02). Her indtager matematik en særstilling blandt fagene med særlig dårlige resultater. Et pilotprojekt under Undervisningsministeriet fra 2011 behandler den kendsgerning, at der på matematik på B-niveau på STX, er en udpræget kønsforskelle, hvor drengene klarer sig relativt dårligere end pigerne. (Bacher-Jensen et al, 2011 og 2012).

Nedenfor skitseres kort nogle af de vigtige pointer fra tidligere undersøgelser og projekter om matematikfaget og de udfordringer eleverne oplever med det. Derefter præsenteres resultater af vores egen elevundersøgelse. De drejer sig om

elevernes forhold til faget matematik, tidsforbrug på lektier, punktstudier af deres afleveringer og deres syn på eget læringsudbytte af hhv. rettede afleveringer og forberedelse til daglig undervisning.

3.1 Formelle resultater - hvor er knasterne?

Af eksamensstatistikken fra Undervisningsministeriets Databank (2015) fremgår det at matematik gennem mange år har været kendetegnet af relativt høje dumpeprocenter ved eksamen (fx i forhold til dumpeprocenter i engelsk og samfunds-fag). Det gælder på de fleste niveauer og skoleformer, at dumpeprocenten ved den skriftlige eksamen er vedvarende høj, og specielt for de niveauer, som omfatter rigtig mange elever, som fx matematik B på STX, varierer dumpeprocenten i perioden 2007-2014 mellem 15% og 30% (UVM, 2015). Tallene fra 2009, som lå til grund for rapporten af Bacher-Jensen et al (2011), viste at 20% af pigerne dumpede i STX matematik B ved sommereksamen, mens det gjaldt for hele 33% af drengene. Statistikken fra Undervisningsministeriet kan også vise, at særlig for den skriftlige eksamen på HF og STX B-niveau varierer karaktergennemsnit og dumpeprocenten relativt meget fra år til år, hvilket er vanskeligt at forklare, da populationen er så stor (Bacher-Jensen et al, 2011; Undervisningsministeriets Databank, 2015).

3.1.1 Kønsforskelle og matematik

Rapporten af Bacher-Jensen et al. (2011) undersøger i større detalje kønsforskelle i elevernes eksamensresultater på matematik B på STX, og om der er særlige karakteristika for de drenge, som klarer sig dårligt i gymnasiets matematikundervisning. Af interessante iagttagelser kan nævnes, at af de elever, som starter på matematik B-niveau, så havde drengene i gennemsnit klaret sig bedre end pigerne ved grundskolens afsluttende prøver, mens de klarede sig markant dårligere end pigerne ved eksamen i gymnasiet. Ved de statistiske analyser, som er gennemført, ses en vis sammenhæng mellem de skriftlige karakterer i matematik og hvilket fag drengene i øvrigt har i studieretningen, og af de undersøgte fag er det alene med fysik B der er en positiv sammenhæng. Der er ikke en tilsvarende sammenhæng mellem resultatet af de mundtlige eksamener i matematik og de øvrige undersøgte fag, kun for fysik kan man afvise hypotesen om uafhængighed. Drenge der har fysik B klarer sig typisk lidt bedre i matematik B end den gennemsnitlige dreng, både skriftligt og mundtligt, men der kunne ellers ikke påvises sammenhænge i de mundtlige karakterer. Det er også blevet undersøgt, om der var særlige opgavetyper eller matematiske emner, som drengene klarede ringere. Men her er der ingen klare tendenser; drengene var generelt dårligere end pigerne til alle områder og alle opgavetyper.

3.1.2 Elevernes oplevelse af overgangen fra grundskole til gymnasium

Et tydeligt mønster handler om kravene til arbejdsindsats og forberedelse (Bacher-Jensen et al 2011). En stor del af drengene har været vant til at kunne klare sig i grundskolen uden særlig meget forberedelse. Det kan de ikke i gymnasiet, og drengene har tilsyneladende vanskeligere end pigerne ved at omstille sig til de nye krav, og fastholdes måske i en rolle, der indbefatter at forberedelse ikke prioriteres. Samtidig oplever de at have vanskeligt ved at læse bøgerne i matematikundervisningen. Disse udfordringer er formentlig bredt

gældende, hvor pigerne blot er lidt bedre til at håndtere dem. Elevernes oplevelse af overgangen fra grundskole til gymnasium

I (Ebbensgaard et al., 2014) havde man blandt andet fokus på spørgsmålet om hvad eleverne oplever som svært, let og anderledes i overgangen i hvert af de tre fag, matematik, dansk og engelsk.

Faget matematik skiller sig ud fra de to andre fag ved, at hele 24% af eleverne svarer, at det stort set er alt, der er svært i matematik. Kun 6% af eleverne oplever matematik som samme fag i folkeskole og gymnasium, hvor det for dansk og engelsk er meget større andele. Der vil selvfølgelig være forskelle på hvordan overgangen opleves, afhængigt af hvilket niveau eleven har faget på, men sådanne forskelle er ikke nærmere undersøgt i det nævnte projekt om overgangen. I de interview, der supplerer spørgeskemaundersøgelsen, er følgende udsagn typiske: "alt er svært", "jeg har altid haft svært ved matematik", "læreren er ikke særlig god til at forklare det som er svært". Nogle elever har tilsyneladende allerede opgivet faget, inden de starter på gymnasiet, og kan være meget vanskelige at hjælpe (ibid.). Der kan således også peges på overgangsproblemer i grundskolen mellem indskoling, mellemtrin og udskoling, og det skal naturligvis pointeres, at overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium forårsages af forhold i begge institutioner.

Eleverne oplever altså, at de møder et helt andet fag, når de har matematik i gymnasiet (Ebbensgaard et al, 2014). Det store spring kan ikke forklares ved styredokumenterne (fagbilag, læreplaner, fælles mål) alene. I beskrivelserne af formål, mål og fagligt indhold er der god sammenhæng fra grundskole til gymnasium, også med faglige overlap. Der er i højere grad tale om forskelle i fagkulturer på de to uddannelsestrin. Eleverne kommer fra grundskolen med en tilgang, der domineres af hverdagsanvendelser af aritmetik og plangeometri. I gymnasiet mødes de af krav om en mere teoretisk og analyserende tilgang og en langt højere grad af abstraktion. Det kunne se ud til, at undervisningen i gymnasiet ikke i særlig høj grad tager udgangspunkt i det eleverne kan og kender fra grundskolen (Ebbensgaard et al, 2014; Lindenskov et al, 2009, p 59-60).

3.1.3 Tiltag der kan hjælpe eleverne med at overkomme overgangen

Der er blevet gennemført mange indsatser med brobygning mellem folkeskole og gymnasium. Vi har allerede nævnt Matematiklærernetværket i Silkeborg, hvor man over flere år har arbejdet med overgangen ved, at lærere samarbejder på tværs af grundskole og gymnasium og sammen udvikler matematikopgaver, der illustrerer progressionen i krav til matematisk præcision og abstraktion. Det gøres bl.a. ved at videreudvikle opgaver fra folkeskolens afgangsprøver til opgaver, som kunne forekomme i gymnasiet (Christensen, 2012).

For mange elever er det vanskeligt at gennemskue gymnasiets krav til arbejdsindsats, forberedelse og abstraktionsniveau, ligesom mange har vanskeligt ved at læse fagets tekster. I projekterne om gymnasiefremmede elever, såvel som i projekterne om overgangen mellem grundskole og gymnasium, understreges behovet for, at man i gymnasiet arbejder mere med at tydeliggøre faglige mål, hensigtsmæssige arbejdsmetoder mm. Det vil kunne bidrage til at lette overgangen for mange elever, måske i særlig grad for de gymnasiefremmede elever (Ulriksen et al., 2013 & Ebbensgaard et al. 2014).

Ét projekt har arbejdet særligt med læsning af matematikfagets tekster. Det dokumenterede at mange elever mangler hensigtsmæssige læsestrategier, og det peger også på mulige metoder til, hvordan elever kan arbejde mere forståelsesorienteret med matematiktekster og forberede sig mere konstruktivt, blandt andet med læseøvelser i undervisningen, ordkendskabskort og computerbaseret begrebstræning (Hjorth et al., 2012).

3.2 Hvordan arbejder eleverne med matematik - og hvor oplever de problemer?

Vi vil nu kort gennemgå elevernes udsagn i vores egen interviewundersøgelse for så vidt angår deres erfaringer og udfordringer med matematikundervisningen. De interviewede elever kommer fra klasser, som undervises på ret forskellige måder, og deres oplevede udbytte varierer ligeledes.

Nogle elever er en del ude af klassen, hvor de fx laver podcast-afleveringer og arbejder med, hvordan man læser lærebogen. Der er kun én elev, som bruger papir og blyant under lektielæsning i matematik. Men de fleste elever beskriver en undervisning, der starter med, at læreren gennemgår teorien fra lektionen eller fra sidste gang, derefter gennemgås nogle eksempler og endelig sidder eleverne i et tidsrum og regner selv - evt. i samtale med sidemanden. Nogle gange gennemgås de sværeste opgaver på tavlen inden ny teori præsenteres efterfulgt af eksempler, og så fremdeles. Som eleverne ser det, ligger aktiviteterne tæt op af lærebogens ordvalg, metoder og eksempler.

Spørges eleverne direkte til deres erfaringer med mere eksperimenterende tilgange til matematikundervisningen, så har de fleste prøvet forløb, der bryder med den traditionelle opbygning. De har dog svært ved at forklare, hvordan disse forløb har været, eller hvad indholdet og meningen var. En elev siger, at hun gerne vil regne opgaver i matematik på egen hånd: "Jeg lærer i hvert fald mer' når jeg sådan lige får lov at tænke over det selv" (elev på STX). Men læreren skal helst komme med det samme, når opgaverne driller, ellers ender koncentrationen med at divergere til de sociale medier. De samme elever fortæller om en gang, hvor læreren forsøgte at lade dem arbejde sig ind på chi-i-anden test gennem arbejde med en selvvalgt case. En elev forklarer: "hun havde bare udleveret noget materiale uden at gennemgå noget først, og det var virkelig svært, for så skulle vi bare spørge om alt. Det kunne jeg altså ikke lide [...] Ja, det var et helt nyt emne - jeg ved ikke hvad hun [læreren] havde forestillet sig [...] Så hellere få det hele gennemgået og lave fremlæggelser bagefter". Adspurgte, hvad der gjorde det svært, svarer eleverne at det dels var selv at læse materialerne og dels det, at de selv skulle finde på nogle spørgsmål, de ville undersøge. En forståelsesorienteret undervisning, som den beskrevne er naturligtvis mere krævende for både elever og lærere.

Det er klart fra interviewene, at eleverne kommer til de gymnasiale uddannelser med en erfaring af matematik som et fag, hvor man bliver præsenteret for en teknik, hvis brug derefter trænes på en række af opgaver. Eleverne har således

hverken erfaring med eller ønske om selv at skulle afgrænse, undersøge og udforske eller formulere matematiske spørgsmål "fra bunden".

Hovedindtrykket af elevernes beskrivelse af deres matematikundervisning, både i grundskolen og nu på en gymnasial uddannelse, er da også, at denne opleves som værende fokuseret på præsentation og træning af teknikker til at løse bestemte typer af matematikopgaver. Vore øvrige empiriske data i denne udredning bekræfter i øvrigt dette billede. Som ovenstående citater antyder, kan det være svært for læreren at indføre nye idéer og formater i matematikundervisningen, og dermed fx implementere viden fra efteruddannelseskurser eller matematikdidaktisk forskning.

Eleverne forventer en bestemt form for undervisning, og det tager tid at ændre deres opfattelser. Nogle elever udtrykte imidlertid en forventning om, at det meste af deres undervisning skulle foregå i grupper udenfor klasserummet, fx ved tavlebaseret "kammeratformidling" af matematisk stof. Det kan tages som udtryk for, at det over tid lykkes for lærere at ændre elevernes opfattelse af, hvordan matematiklæring og undervisning kan foregå. Denne ændring var sket efter, at de startede på deres STX-uddannelse, hvor undervisningen var væsentlig anderledes end den de havde oplevet i grundskolen.

Når vi har spurgt eleverne, om de vil beskrive en oplevelse, hvor de virkelig føler, at de lærte noget i matematik, eller hvor noget "gik op for dem", er det svært for dem at fremhæve noget præcist, udover masser af tid med en lærer. Som en elev fortæller, så sker det oftest i lektieværkstedet eller lektiecaféen, hvor man kan være heldig at få en lærer på tomandshånd, som bliver ved med at gennemgå eksempler indtil man forstår det: "fordi man sidder efter skole, så har man al tid i verden" (Elev på STX). Der er nogle steder, hvor også 3.g'ere er ansat som hjælpere i disse lektielæsningsseancer, men eleverne angiver, at de er mindre gode til at hjælpe, da de ældre elever simpelthen løser opgaverne for dem, der skal have hjælpen.

En elev giver et eksempel, hvor han har siddet og skrevet regnereglerne for differentiation ned i en tabel gentagne gange, for som han sagde: "så skal man kunne det i prøven uden hjælpemidler" (elev på STX). Der er altså implicit en opfattelse af, at "gentagelse" er en vigtig strategi for at lære matematik, og det skinner også igennem, at det dominerende mål er at klare den skriftlige eksamen.

Som eksempel på en særlig god læringsoplevelse, nævner en elev introduktionen til vektorregning, hvor de fik en lang liste over vektorer, der skulle tegnes i et koordinatsystem med papir og blyant. Her oplevede eleven at gå fra en oplevelse af ikke at fatte noget til "at have et billede i hovedet af hvad en vektor er" (Elev på STX). Flere elever taler om, at det at få skabt "mentale billeder" (se Duval, 2006) er godt. Men det er mere uklart, hvilke billeder de reelt har skabt og hvad de kan bruges til. Potentialet er utvivlsomt knyttet til den koordination af repræsentationer i forskellige registre, som er så afgørende for arbejdet med matematiske objekter (ibid.).

Det er meget forskelligt, hvor meget teori, der gennemgås i klasserne og hvem der står for gennemgangen. I nogle A-niveau klasser fortæller eleverne, at det først er to måneder før en mulig mundtlig eksamen, at de begynder at gå til tavlen og præsentere teori. I andre klasser forekommer det fra starten. Fælles for eleverne er dog, at de oplever at mundtlig matematik og teoriudledning primært er til for, at de skal kunne sige noget til mundtlig eksamen. Enkelte elever peger også på, at det giver mening til de metoder og teknikker, som de bruger i opgaveløsning.

De fleste elever læser matematikbogen på samme måde som alle andre tekster i gymnasiet, dvs. de har ikke særlige læsestrategier ifm. matematisk tekst, fx om hvordan man danner sig overblik over et matematisk emne eller sætter sig ind i bestemte detaljer i en teknisk udregning. Enkelte elever fortæller dog, at de har fundet ud af, at det kan være en fordel at skimme siderne først for at orientere sig, derefter læse eksemplerne for at danne sig et indtryk af hvad emnet eller metoden kan bruges til og til sidst læser de sætninger og beviser.

I vores forsøg på at belyse elevernes arbejde med matematik, kom vi også ind på hvad man lidt løst kunne kalde "disciplin", både i timerne og ift. hjemmearbejde. Eleverne er her meget åbenhjertige, og der er en udbredt opfattelse af at fx Facebook er en slem opmærksomhedsrøver i timerne. Flere synes godt om deres lærers krav om, at de lukker computeren og lytter, når læreren taler og computeren ikke skal bruges til opgaveregning. Dog er der ingen tale om, at eleverne i så fald tager noter med papir og blyant eller på anden vis er deltagende. Andre peger på, at det er forstyrrende, at deres regne- og noteværktøj er på computeren sammen med nettets fristelser. De angiver selv, at dette i høj grad udfordrer selvdisciplinen "især, hvis mange har brug for hjælp, så man skal sidde og vente med hånden oppe" (elev fra HHX). Ingen af eleverne har håndskrevne noter som en naturlig del af deres hverdag, så computeren bruges også til det. Det fremgår af elevernes udsagn, at nogle klasser opretter Facebookgrupper, hvor de deler afleveringer, noter og almindelige opgavebesvarelser. Alle eleverne kender klassekammerater, som langsomt sakker bagud, fordi de ikke yder en tilstrækkelig indsats. De kan ikke motiveres til at arbejde, falder fra eller ender med at kopierer dele af opgavebesvarelser fra nettet.

Nogle af eleverne peger på, at hyppigere tests måske ville kunne holde disse elever til ilden. Der er stor variation i, hvor ofte de enkelte hold har test og prøver i matematik. Der er klasser, hvor de kun får prøver inden eksamen, andre, hvor der afholdes test lige inden karaktergivning (sammen med tests i alle andre fag). Nogle elever peger på, at det er for let at snyde med afskrift, og at det samtidig er svært at se, hvor grænsen går mellem inspiration og plagiat. Brugen af nettet drejer sig da også om mere end afskrift. En elev forklarer, at han foretrækker at gå på nettet og se, hvordan andre elever eller lektiehjælpsportaler formulerer sig om enkelte emner, da "de ligesom taler mere vores [elevernes] sprog" – i modsætning til lærebog og lærer. Ydermere mener eleverne, heller ikke, at de opgaver, der stilles, kan besvares på ret mange måder, og derfor kan det let komme til at ligne afskrift.

Eleverne peger dog selv på, at det er et reelt problem, når det ikke har konsekvenser at snyde. Som en elev siger "i de klasser, hvor man opdager, at man ikke bliver smidt ud, spreder det sig som en steppebrand" (elev på HTX).

Eleverne mener, at hvis det ikke har nogen konsekvens at snyde, så lader man sig let friste når man er presset.

Som sammenfatning af det foregående kan vi sige, at der er betydelige dele af elevernes matematikaktiviteter på nettet, som foregår uden lærerens direkte kontrol.

Elevernes brug af 'skabelonbesvarelser' er et andet forhold, som tilsyneladende også delvis foregår udenfor lærernes kontrol. I elevundersøgelsen bad vi eleverne forholde sig til nogle af deres egne opgaveafleveringer med rettelser fra deres lærer, så vi med et konkret udgangspunkt kunne tale med dem om deres skriftlige arbejde. Elevernes generelle løsningsstrategi for en aflevering med opgaver, der ligner eksamensopgaverne, er: at åbne deres matematikværktøjsprogram, skrive den første opgaves tekst ind, og finde det der skal beregnes eller løses ("solves"). For de fleste elever gælder det, at opgaverne ligner andre opgaver de har regnet før, så de blot skal huske, hvordan de løste dem. Hvis det er nye opgavetyper, er der en kraftig tendens til at lærerne (ifølge eleverne) gennemgår lignende opgaver inden eller i løbet af den periode, hvor afleveringen skal laves. "Og så kan vi jo bare gøre ligesådan" (elev på STX). I det hele taget arbejder de meget på hukommelse og imitation. Det er kun få elever, der går tilbage og ser på lærerens kommentarer til tidligere besvarelser, når de står med et nyt sæt opgaver. Dem der kan huske, at de har lavet fejl i sådan en opgave før, går tilbage – andre mener, at kunne huske, hvad de skulle gøre i stedet – men nogle gange laver de fejlen igen. Det kunne pege på et behov for at arbejde med hensigtsmæssige og effektive feedbackformer ikke mindst af formativ karakter.

I det hele taget udtrykker eleverne en på nogle måder opgivende stemning omkring det skriftlige arbejde, hvilket afspejler udsagn i vore lærerinterviews; nogle af dem mener ikke, at eleverne læser og bruger deres kommentarer, men at de ser kun karakteren. Omvendt siger eleverne, når man spørger til deres tanker om de kommentarer læreren har givet i de konkrete opgavesæt, at de jo godt kan se, at de skal gøre som læreren udførligt har angivet, og at de har lavet en fejl. Samtidig siger de også, at de ikke retter filen inden næste aflevering, selvom det netop er i de afleverede filer, de leder efter løsningsstrategier til næste opgave. Kun en enkelt elev har erfaring med at genaflevere opgaver. Vedkommende betegnede det som lidt underligt, da man jo så godt vidste, hvordan opgaven skulle regnes ud fra lærerens skrevne anvisninger i den første aflevering.

Det kunne her være interessant at tale med elever, der har erfaringer med diverse tiltag inden for rammerne af "ny skriftlighed" eller omlagt elevtid. Det har dog ikke været muligt at sikre inden for rammerne af dette projekt.

Andre elever har i høj grad en effektivitetsfokuseret tilgang til matematikafleveringerne. De beretter om anbefalinger fra søskende og bekendte om "*at jeg skal lave en master fra starten af*" (elev på HTX), eller mere bredt en samling af skabelonbesvarelser der kan trækkes på ved skriftlig eksamen.

Adspurgt om, hvordan eleverne regner ud, hvilken skabelon de skal bruge, "så er der altid noget i teksten man kan genkende" (elev på HTX). Altså kan lærerne have nok så høje ambitioner om, at eleverne ikke skal arbejde med skabelonbesvarelser, men dyrkes fortællingen udenfor skolen om, at det er måden at klare sig på i matematik, så kan det være svært at ændre for læreren. De opgaver, der er sværest, er dem med meget modellering, da "det kan være svært at se ud fra teksten, hvad det er man skal regne ud" (elev på HHX). Dette bekræftes af udsagn fra lærerinterviews.

Endelig beretter eleverne om måden, de lærer at skrive matematiktekster på: de kopierer lærerens vejledende besvarelser af afleveringer og eksempler fra bogen. Eleverne er meget bevidste om officielle formkrav til eksamensopgaverne, og om metoder til at give karakterer, såsom at hvert delspørgsmål kan få op til 10 point. Flere af eleverne mener, at prøven uden hjælpemidler er den sværeste (eller "værste") del, og at den er "nytteløs, der bruges for meget tid på at træne til den, der kun tæller 20% - lad os komme videre teknologisk ligesom HTX" (elev på STX). Nogle elever på C-niveau påpeger dog, at det er mere trygt, at arbejde med matematik i hånden - dvs. med papir og blyant.

4 Hvad er matematik på de gymnasiale uddannelser?

Når vi taler om matematik på de fire uddannelser, som betragtes her, taler vi i realiteten om en række fag med flere niveauer, mange fællestræk og en del forskelle.

Dette kapitel vil i særlig grad fokusere på fagenes indhold og rammebetingelser. Grundlaget for denne del af analysen er dels styringsdokumenter og eksamensopgaver, dels vurderinger fra en række aktører omkring fagene (lærere i matematik og i nabofag, elever, repræsentanter for aftagerinstitutionerne etc.). Blandt de fremtrædende temaer er den rolle, som eksamen spiller for undervisningen, elevernes parathed til at sætte deres matematikviden i spil i nye kontekster, og den betydning, som matematikværktøjsprogrammerne har for både eksamen, den daglige undervisning og elevernes udbytte.

4.1 Hvilke rammer sætter styringsdokumenterne for fagene?

Den mest basale ramme man kan vælge at betragte er uddannelsestiden og minimumsgrænsen for elevtid, der gives pr. niveau. Som det fremgår af nedenstående tabel 1 er satserne relativt enslydende for de tre uddannelser, dog udmærker HTX sig med lidt mere tid til undervisning end de øvrige institutioner.

	C-niveau	B-niveau	A-niveau
STX Uddannelsestid (timer)	125	250	375
STX Min. skr.opg. (timer)	40	100	160
HF Uddannelsestid (timer)	125	250	375
HF Min. skr.opg. (timer)	50	100	160
HHX Uddannelsestid (timer)	125	250	375
HHX Min. skr.opg. (timer)	40	100	160
HTX Uddannelsestid (timer)	-	285	410
HTX Min. skr.opg. (timer)	-	100	160

Tabel 1: UVMs tildeling af timer til matematikfagene på de gymnasiale uddannelser (jf. STX, HF, HHX og HTX Bekendtgørelserne)

Ellers gives der samme timetal til undervisning og til elevers arbejde med afleveringer i det format der af læreren skønnes mest hensigtsmæssigt fx rapporter, projekter, opgaveregning, podcast eller vodcast.

4.2 Hvad er matematik på STX?

Som allerede angivet er der tre niveauer af matematik på STX. Hvad angår kernestoffet ligger de tre niveauer i naturlig forlængelse af hinanden, men der findes ikke et såkaldt "differenspensum", forstået på den måde, at et stof der optræder på flere niveauer vil blive behandlet på et for niveauet passende abstraktionsniveau, og en elev afslutter faget (dvs. går kun til eksamen) på det højeste niveau eleven har haft faget. Sammenligner man de faglige mål kan man konstatere, at nogle matematik kompetencer (se Niss et al., 2002) tænkes dækket i forskellig grad på de forskellige niveauer, jf. analysen af styringsdokumenterne for matematik C i næste afsnit. Det at kunne anvende et matematikværktøjsprogram på en meningsfyldt måde, fylder meget lidt på

matematik C, men mere på A- og B-niveau, hvor der er skriftlig eksamen, som er baseret på elevens adgang til et matematikværktøjsprogram, herunder CAS. Tilsvarende er der en naturlig graduering af, hvad man forventer af elevernes evne til at ræsonnere matematisk gående fra simpel matematisk argumentation til på A-niveau at overskue og gennemføre matematiske beviser.

På *C-niveau* omhandler kernestoffet: regningsarternes hierarki, ligningsløsning grafisk såvel som analytisk, procent og rentesregning, formeludtryk for ligefrem og omvendt proportionalitet, lineære, potens- og eksponentielle variabelsammenhænge samt xy-plot af datamateriale svarende til de nævnte variabelsammenhænge. Desuden skal eleverne arbejde med forholdsregninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter, samt deskriptiv statistik både ved grafisk repræsentation og ved simple empiriske deskriptorer. I vejledningen til læreplanen anbefales det, at man arbejder med "prikdiagram, boksplot, histogram og sumkurve". Det supplerende stof skal udgøre 20% af uddannelsestiden og dække ræsonnement og bevisførelse inden for udvalgte emner, bearbejdning af autentisk talmateriale, samt et matematikhistorisk forløb. De faglige mål specificerer, at eleverne skal kunne håndtere formler, anvende symbolholdigt sprog og oversætte til naturligt sprog, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig til rækkevidden af modeller, løse geometriske problemer, gennemføre simple matematiske ræsonnementer, anvende matematik også i samspil med andre fag, anvende et it-værktøj til løsning af givne problemer, lære om matematiks samspil med den øvrige videnskabelige og kulturelle udvikling samt anvende simple statistiske modeller. Det er altså hensigten, at eleverne får udviklet alle otte matematikkompetencer til en vis grad (som i hvert fald relativt til B- og A-niveau kan betragtes som mindre).

Eksamensformen er kun mundtlig og forekommer ved udtræk. Eleverne får både en mundtlig og skriftlig årskaraktér. Den mundtlige eksamen har 24 min. forberedelse og 24 min. eksamination. Spørgsmålene eleverne trækker, skal udformes som en overskrift med et uddybende spørgsmål. En betydelig del af spørgsmålene skal give eleverne mulighed for at inddrage temaopgaver eller rapporter fra undervisningen, og spørgsmålene skal være kendt af eleverne i god tid før prøven.

På *B-niveau* består kernestoffet af både kernestoffet fra C-niveau i mere kompleks form i anvendelsesorienteret perspektiv samt udvides med: det udvidede potensbegreb, ligningsløsning vha. IT-værktøjer, polynomielle sammenhænge, stikprøvers repræsentativitet og chi-i-anden test, $f(x)$ begrebet, anvendelse af regression, definition og fortolkning af differentialkvotient herunder væksthastighed, marginalbetragtninger, differentiation af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$ og udledning af udvalgte differentialkvotienter, monotoniforhold og ekstrema, optimering, stamfunktioner, ubestemte og bestemte integraler herunder arealbestemmelse af punktmængder, samt principielle egenskaber ved matematiske modeller. Supplerende stof skal ligeledes udgøre 20% af uddannelsestiden og det skal udover selvvalgte emner og C-niveau kravene omfatte matematisk modellering samt mindst én yderligere statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model.

Tilsvarende indeholder de faglige mål på B-niveau krav til højere abstraktionsniveau med henblik på de faglige mål for C-niveau, og derudover at: kunne redegøre for foreliggende symbolholdige beskrivelser af variabelsammenhænge, gennemføre hypotesetest, anvende funktionsudtryk i modellering, anvende differentialkvotient og stamfunktion og fortolke forskellige repræsentationer af disse, gennemføre simple beviser, demonstrere viden om matematikanvendelse i behandling af mere komplekse problemer, demonstrere viden om fagets identitet og metoder samt en udvidet anvendelse af IT-værktøjer til at kunne håndtere symbolske operationer på mere komplekse udtryk. Eksamensformen er både mundtlig og skriftlig, begge på udtræk. Den mundtlige prøve ligner den på C-niveau, dog er den udvidet til 30 min. til både forberedelse og eksamination. Den skriftlige prøve er 4 timer, hvoraf den første time er uden hjælpemidler og de sidste 3 er med alle hjælpemidler, herunder netadgang til evt. ressourcer som eleven har anvendt som en del af undervisningen.

På *A-niveau* består kernestoffet af både en mere teoretisk behandling af kernestoffet fra C- og B-niveau samt yderligere emner som: rationelle og irrationelle tal, vektorer i to og tre dimensioner givet ved koordinatsæt, vektorbaseret koordinatgeometri til opstilling og løsning af plan- og rumgeometriske problemstillinger, logaritmefunktioner, cosinus og sinus (som funktioner), regneregler for differentiation af $f \cdot g$ og $f \circ g$, integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer, lineære differentiaalligninger af 1. orden, logistiske differentiaalligninger, kvalitativ analyse af simple differentiaalligninger samt opstilling af disse. Også her skal det supplerende stof udgøre 20% af uddannelsestiden og det skal udover selvvalgte emner samt kravene til C- og B-niveau dække ræsonnement og bevisførelse indenfor infinitesimalregningen samt deduktive forløb over udvalgte emner og differentiaalligningsmodeller.

Tilsvarende indeholder de faglige mål på A-niveau krav om højere abstraktionsniveau med henblik på behandling af de faglige mål fra C- og B-niveau og derudover nye faglige mål: anvende afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale og viden fra andre fagområder, anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentiaalligninger, anvende analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål, redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori.

Eksamen for matematik på A-niveau er dels en skriftlig og dels en mundtlig eksamen som begge forekommer ved udtræk. Formen på den mundtlige eksamen på A-niveau er som den for B-niveau. Den skriftlige eksamen er 5 timer, hvoraf den første er uden hjælpemidler og de sidste 4 er med alle hjælpemidler på samme måde som for B-niveau. På A-niveau kan den enkelte lærer vælge at tilmelde sine hold "netforsøget". Netforsøget startede i 2008, og den første eksamen blev afholdt sommeren 2010. Forsøget indeholder en mindre tilpasning af læreplanen, der vægter de udforskende og undersøgelsesbaserede sider af faget, men overordnet dækker samme kernestof og faglige mål. Det væsentligste forhold ved netforsøget er ændringen i den skriftlige eksamensform: den er fortsat 5 timer, men de to første timer er uden andre hjælpemidler end en

autoriseret formelsamling. De sidste tre timer er med alle hjælpemidler inklusiv informationssøgning på internettet, dog uden kommunikation med omverdenen. Spørgsmålene i denne del af prøven dækker dels kernestoffet og de faglige mål, men også et forberedelsesmateriale udarbejdet af opgavekommissionen som offentliggøres ca. 3 uger før eksamensperiodens start. Det enkelte hold skal afsætte 6 timer af uddannelsestiden til, at eleverne kan arbejde med materialet og sætte sig ind i emnet med læreren som vejleder. Eksempler på emner i forberedelsesmaterialet er: parameterfremstilling af kurver, komplekse tal, matricer og lineær algebra, normalfordeling og T-test, funktioner af to variable og ekstrema for disse samt koblede differentialligninger.

Ser man på de skriftlige eksamener, så skal eleverne på B-niveau i prøven uden hjælpemidler typisk løse en lineær ligning, løse en andengradsligning, løse en trekantsopgave baseret på Pythagoras sætning eller ligedannethed, løse en integralregningsopgave (typisk: find det bestemte integral, hvor funktion og grænser er givet) og en differentialregningsopgave, ofte opgaver hvor eleven skal finde tangentens ligning til en given funktion $f(x)$ i et punkt $(x_0, f(x_0))$. I delprøven med hjælpemidler skal eleverne typisk løse en regressionsopgave oftest med en lineær eller eksponentiel regression. Disse funktionstyper er også de typiske i opgaver hvor funktionen er givet og de skal enten bestemme $f(a)$ hvor a er et tal eller løse ligningen $f(x) = a$. Handler opgaven om en eksponentiel sammenhæng, spørges der gerne til fordoblingskonstanten – der er næsten altid tale om voksende funktioner. Derudover skal eleverne løse en trigonometriopgave, hvor cosinusrelationen ofte kommer i spil. Andre typiske opgaver handler om monotoniforhold for polynomier, opstilling af simple variabelsammenhænge fx i optimeringsopgaver, arealbestemmelser med integralregning, samt chi-i-anden test, hvor der skal beregnes forventede værdier og udføres test med et givet signifikansniveau. De fleste opgaver kan løses, hvis eleven kan gennemskue, hvilken ligning teksten lægger op til, man skal opstille og derefter løse mht. den relevante størrelse. Omkring halvdelen af opgaverne er forsynet med en "ekstramatematisk" kontekst fx et hverdagsproblem, og dermed er det at identificere den matematiske opgavetype en del af udfordringen for eleverne. Da eleverne frit må bruge matematikværktøjsprogrammer i denne delprøve, tester opgaverne kun i mindre grad elevernes beherskelse af matematiske teknikker og overblik, fx ift. at løse en ligning i flere trin. De opgaver, der tester om eleverne kan argumentere matematisk, finder vi hovedsageligt i fortolkningsspørgsmålene og i de opgaver, hvor eleverne skal sætte grafer i forbindelse med et forhold ved funktionsforskriften.

Den skriftlige eksamen på A-niveau tester de samme teknikker som på B-niveau, dog er der på A-niveau primært tale om eksponentielle modeller eller potensmodeller i regressionsopgaverne. I prøven med hjælpemidler regnes der på vinkler mellem planer og afstande mellem disse, ofte kontekstualiseret med forskellige skæve bygninger. Derudover tester denne prøve eleverne i at bruge logaritmer og trigonometriske funktioner til beskrivelse af forskellige modeller. Eleverne skal derudover kunne finde omdrejningslegemer, tangentens ligning i forskellige sammenhænge samt opstille, løse og fortolke differentialligningsmodeller. Som i prøven på B-niveau kan disse opgaver anses

som rutineprægede for elever, der er gode til at bruge et matematikværktøjsprogram. På samme måde som i B-sættene er der gerne to opgaver i hvert sæt, der tester elevernes evne til at arbejde med de mere abstrakte matematiske begreber, og de er også her primært placeret i prøven uden hjælpemidler. I netforsøget tester man om eleverne er i stand til at læse og forstå en matematikfaglig tekst og omsætte udbyttet heraf til løsning af opgaver. På en måde gør dette op med de rutineprægede opgaver, der kan være trænet de sidste tre år og løses med skabeloner. Omvendt kan opgaverne, der relaterer sig til forberedelsesmaterialet løses, hvis man kan genbruge strategier og teknikker i eksempler og opgaver fra materialet.

4.3 Hvad er matematik på HF?

På HF kan man læse matematik på C og B-niveau. Ønsker man et A-niveau fx som fagsupplering, læses der efter STX-bekendtgørelsen.

For matematik på *C-niveau* er kernestoffet det samme som for STX. Det supplerende stof skal udgøre 20% af uddannelsestiden og dække "emner, der perspektiverer arbejdet med procent, rentesregning og andre økonomiske sammenhænge" foruden de to krav om ræsonnement og autentisk talmateriale fra C-niveau på STX.

De faglige mål er stort set de samme som på C-niveauet på STX, dog er det faglige mål, der omhandler matematikkens samspil med videnskabelig og historisk udvikling erstattet af mål om at søge information og videreformidle viden om matematikanvendelser inden for dagligliv og samfundsliv.

Der er obligatorisk mundtlig såvel som skriftlig eksamen. Den mundtlige prøve er som den for matematik C på STX, dog med et eksplicit krav om at inddrage gennemførte projektforsøg og temaopgaver. Den skriftlige eksamen er 3 timer med hjælpemidler, dog uden adgang til internettet og uden kommunikation med andre, jf. eksamensbekendtgørelsen.

Matematik på *B-niveau* har samme kernestof som B-niveauet på STX, dog uden udledning af udvalgte differentialkvotienter, ubestemt og bestemt integral samt statistiske metoder herunder chi-i-anden test. Sidstnævnte ligger imidlertid som en mulighed i det supplerende stof, hvor det hedder sig, at kursisterne skal arbejde med at opstille hypoteser, med diskussion af en stikprøves repræsentativitet, og med anvendelse af to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller. Der er intet krav om et matematikhistorisk forløb, men ellers er kravene til det supplerende stof det samme. Som på C-niveauet er der obligatorisk skriftlig og mundtlig prøve. Prøverne har samme form som på STX.

Den skriftlige prøve på C-niveau starter ofte med en eksponentialfunktion der modellerer opsparing på en bankkonto, men hele sættet dækker alle tre vækstformer i modelleringskontekst, hvor kursisterne ofte skal finde forskrifter ved to-punkts formler, bestemme fordoblingskonstant, isolere en variabel i udtrykket eller erstatte en variabel med en given værdi. Endelig skal de enten lave boksplot eller sumkurve og kommentere på fordelingen, regne med

indekstal, og anvende mindst to formler for sider, vinkler eller arealer af vilkårlige trekanter.

Den skriftlige eksamen på B-niveau deler flere af vækstmodelopgaverne med C-niveau eksamen dog med krav om regression. I prøven uden hjælpemidler skal kursisterne ofte kunne opstille en eksponentiel model på baggrund af nogle oplysninger om en udvikling, finde afledte til et polynomium af grad 2 til 4, løse simple ligninger, og finde simple stamfunktioner. At løse ligninger og integrere en funktion testes kursisterne også i ud fra grafen for funktionen, uden angivelse af forskrift. Det kræver teknikker, der kan siges at svare til repræsentationskompetence. Opgaverne handler fortsat meget om modeller for ekstramatematiske fænomener, og flere delspørgsmål i hvert sæt beder eleverne om at fortolke på vækstegenskaber for modeller.

4.4 Hvad er matematik på HHX?

Den handelsgymnasiale uddannelse er naturligt farvet af dens merkantile sigte. Dette ses også i matematikfaget på de forskellige niveauer.

C-niveauet har et kernestof, der på de fleste punkter er lig *C-niveauet* på STX. Dog er det et krav, at eleverne arbejder med indekstal og annuitetsregning samt bliver i stand til at diskutere undersøgelsers repræsentativitet i forbindelse med statistik. Endvidere nævnes proportionalitet, omvendt proportionalitet og trigonometri ikke eksplicit. Det supplerende stof rammesættes ikke her med et bestemt timetal og heller ikke med tvungne emner, men det er et krav, at eleverne ”gennem det supplerende stof skal erkerkende, at matematisk tankegang og metoder kan anvendes i samspil med andre fag og opnå erfaring med identifikation af problemstillinger, opstilling af modeller samt løsningen af disse”.

De faglige mål svarer til STX, fraregnet de emneområder som *C-niveauet* her ikke dækker. Desuden er det præciseret, at modelleringskompetencerne her særlig skal dække samfunds-faglige og økonomiske fagområder samt finansielle modeller.

Eksamensformen for *C-niveau* på HHX er som den for STX. Der er dog krav om, at der i tilknytning til hvert hovedemne udarbejdes en emneopgave, som inddrages ved eksamen.

For *B-niveauet* er der både ligheder og forskelle i kernestoffet sammenholdt med *B-niveauet* på STX. Proportionalitetsbegrebet, integralregningen, trigonometri og matematisk modellering nævnes ikke eksplicit, til gengæld indgår funktioner i to variable og lineær programmering, logaritmefunktioner, indekstal og annuitetsregning, tangentens ligning samt grundlæggende sandsynlighedsregning binomial- og normalfordelingen, konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren og middelværdi som emner, der skal arbejdes med. Det supplerende stof for *B-niveauet* er formuleret på samme måde som for *C-niveauet* for HHX.

De faglige mål udvides fra C til B-niveauet med et krav om at anvende hjælpemidler, herunder CAS-værktøjer til at løse matematiske problemer samt gennemføre matematiske ræsonnementer og beviser.

Faget evalueres både mundtligt og skriftligt. Den skriftlige prøve er 4 timer, hvoraf første time alene er med tegne- og skriveredskaber, og de sidste tre timer er med alle hjælpemidler, dog ikke internet eller kommunikation med andre. Den mundtlige prøve er lig den for STX B-niveau.

Når eleverne skal til eksamen på B-niveau på HHX testes de hyppigt i differentiation af et polynomium, finde a og b i en lineær funktion ud fra to punkter, arbejde med tangentens ligning for et polynomium samt fortolke på en statistisk fordeling, herunder normalfordelingen. I prøven med hjælpemidler bliver eleverne testet i beregninger af afbetalingen på annuitetslån, opstilling af og ekstremumsbestemmelser for funktioner af to variable, tilrettelæggelse af en statistisk præsentation af data, brug af differentialregning på polynomier der modellerer et problem vedrørende afsætning, produktion og overskud. Endelig involverer nogle sæt eksponentialfunktioner. Trigonometri udgik af læreplanerne i 2010, hvorfor emnet ikke er at finde i eksamenssættene fra 2012 og frem. De trigonometriske funktioner er dog en del af det supplerende stof på A-niveau efter ønske fra aftagerinstitutionerne.

For *A-niveauet* er kernestoffet fra B-niveau på HHX udvidet med følsomhedsanalyse og kvadratisk optimering for funktioner af to variable, trigonometriske funktioner, differentiation af $f \cdot g$ og $f \circ g$, anden afledte (med anvendelser vedr. konveks og konkav krumning og vendetangent), differentialligninger af 1. orden samt integralregning svarende til matematik på B-niveau på STX. Det supplerende stof beskrives på samme måde som de øvrige niveauer på HHX.

De faglige mål er de samme som for B-niveauet på HHX, dog med den udvidelse, at eleverne ikke blot skal kunne håndtere, men også opstille formler til løsning af problemstillinger med et matematisk indhold.

Eksamensformen er stort set som for matematik B på HHX, dog med en time mere til den skriftlige delprøve med hjælpemidler.

Selvom de faglige mål ikke er beskrevet i samme detaljeringsgrad som for STX, kan man dog også her konstatere at alle 8 matematiske kompetencer som angivet i (Niss et al., 2002) er tilstræbt udviklet hos eleverne i en grad, der vokser fra C- til A-niveau.

I eksamen på A-niveau går nogle af opgaverne fra B-niveau prøven igen. Ellers er sættet udvidet cirkelns ligning, integralregning med arealbestemmelse, Lorenzkurver og Gini-koefficienter. I prøven uden hjælpemidler testes eleverne desuden i om de kan finde en stamfunktion hvis graf indeholder et bestemt punkt. Endelig stilles undertiden opgaver om at tegne grafen for en funktion med en given definitions-mængde, nulpunkter og ekstremumpunkter.

4.5 Hvad er matematik på HTX?

På HTX findes matematik på B- og A-niveau, og med lidt mere uddannelsestid, hvilket modsvarer uddannelsens tekniske og naturvidenskabelige profil.

På *B-niveauet* skal eleverne lære det samme kernestof som for *B-niveauet* på STX, dog nævnes eksplicit yderligere regneregler for rødder, bestemmelse af areal og volumen af plane og rumlige figurer, geometrisk og analytisk vektorregning i planen, herunder projektioner, vinkler og afstande; desuden er funktionsbegrebet udvidet med enkle sammensætninger af funktioner, og differentialregningen er udvidet med begreberne kontinuitet og differentiability. Eleverne på HTX skal til gengæld ikke beskæftige sig med statistik eller sandsynlighedsregning. På nogle skoler udbydes dette dog som et valgfag. På HTX skal det supplerende stof ligeledes svare til 20% af uddannelsestiden og dække inddragelse af matematisk teori, give mulighed for fordybelse, udvikle elevernes opfattelse af fagets anvendelighed i flerfaglige sammenhænge, understøtte studieretningsfag samt give mulighed for elevinddragelse. De faglige mål ligger også her tæt op af de otte matematikkompetencer. Det præciseres, at når eleverne skal analysere praktiske problemer evt. gennem modellering, skal det primært ske inden for teknologi og naturvidenskab. I løbet af undervisningen skal eleverne have udfærdiget en række projekter (der ligner det STX, HF og HHX kalder temaopgaver eller emneprojekter), som tilsammen dækker hovedområderne i kernestoffet samt supplerende stof.

Prøveformen er en projektprøve, dvs. eleverne udarbejder et projekt med en skriftlig rapport i et centralt udmeldt emne. Der afsættes 12 timer af uddannelsestiden til projektet. Ved projektperiodens afslutning sendes de skriftlige rapporter til censor, der sammen med eksaminator beslutter, hvilke elementer eleven skal uddybe ved den mundtlige eksamen. Ved eksamen trækker eleven et af projekterne fra undervisningen som eleven får 30 min. forberedelsestid til at se på inden selve eksaminationen. Eksaminationen er 30 min., hvor eleven præsenterer sit eksamensprojekt og besvarer de spørgsmål som lærer og censor er blevet enige om at stille ift. projektet. Der gives en samlet karakter for projekt og mundtlig eksamen.

Emner for de skriftlige eksamensprojekter har været agility, belysning, racehall, Ishøj Dyrepark og "Projekt hus og have". Fælles for alle oplæg er, at eleverne i særlig grad får vist, hvordan de kan aktivere deres viden om plan- og rumgeometri, gerne koblet til vektorregningen. En stor del af projekterne handler om plane og rumlige former, der beskrives ved polynomier, som så enten skal integreres eller differentieres for at undersøge formernes egenskaber. Disse projektoplæg gør det således muligt for eleverne at komme ind på et bredt udsnit af faglige emner. Flere oplysninger skal hentes i links til animationer, og links til talværdier på koefficienter og konstanter, som i øvrigt afhænger af elevernes fødselsdato. Dette er med til at give eleverne forskellige projektoplæg. Flere af projekterne slutter med en meget åben opgave, hvor eleverne skal designe eller beskrive designs vha. geometriske tegninger eller grafer for forskellige funktioner. Eneste inspiration er her billeder af virkelige ting, hvilket virkelig giver eleverne frie hænder til at udfolde matematisk kreativitet på et selvvalgt niveau. Fra sommereksamen 2015 er vægtningen af sidstnævnte opgavetyper blevet opprioriteret.

På *A-niveau* skal eleverne arbejde med de samme ting som på A-niveau for STX, med flg. tilføjelser og præciseringer: numerisk værdi, vektorregning i tre dimensioner, planens ligning, kugler og kuglens tangentplan, grænseværdibegrebet som oplæg til differentialregning, vektorfunktioner knyttes til tangent-, hastigheds- og accelerationsvektorer. Dette kan man også vælge at arbejde med indenfor rammerne af matematik A på STX, men det ekspliciteres ikke i læreplanen, hvilket det gør for HTX matematik A. Det supplerende stof skal også her dække 20% af uddannelsestiden og tjene samme formål som på matematik B HTX. Ligeledes er de faglige mål de samme for de to niveauer på HTX, dog formuleret med en forventning om større selvstændighed i beherskelsen af kompetencerne for eleverne på A-niveau sammenholdt med elever på B-niveau, dog med en progression i beherskelsen af den enkelte kompetence.

Som afslutning på forløbet afsættes der 10 timer af uddannelsestiden til et forberedelsesmateriale på ca. 20 sider, der både er en del af den mundtlige og den skriftlige eksamen. Lærerne må vejlede i materialet, men ikke undervise i det. En del af opgaverne i den skriftlige eksamen, svarende til 3-5 delspørgsmål ud af de i alt godt 20 delspørgsmål, tager udgangspunkt i det supplerende materiale. Prøven er en skriftlig eksamen, hvor eleverne skal regne en række opgaver dels i kernestoffet og dels i forberedelsesmaterialet. I perioden 2010-2014 har forberedelsesmaterialet dækket lineære afbildninger (algebra), lineær regression herunder minimumsbestemmelse vha. partiel differentiation, lineær interpolation og numerisk integration, første ordens lineære differentiaalligninger med begyndelsesværdibetingelse, optimering af funktioner af to variable og lineær programmering. Den skriftlige eksamen tester i særlig grad vektorregning (ofte i tilknytning til trigonometri), regressionsopgaver primært med eksponentielle og potenssammenhænge, og differential- og integrationsopgaver, der ofte knyttet til andre modelleringsopgaver. I de senere år har der været en opgave, hvor eleverne skal argumentere for hvordan man kommer fra én linje til den næste i en forelagt matematisk argumentation eller ligningsløsning. En sådan opgave kan godt være en del af de opgaver, der bygger på forberedelsesmaterialet, og den tester desuden mere elementære færdigheder vedr. skolealgebra. Idet alle dele (linjer) i udledningen af ligningsløsningen er givet, kan eleverne springe over led, de ikke kan forklare.

Den mundtlige prøve tager udgangspunkt i en række spørgsmål, der ikke er kendt af eleverne. Spørgsmålene er dog baseret på de projekter, som eleverne har lavet i løbet af undervisningen, foruden et delspørgsmål, der kan ligge udenfor det trukne projekt. Der skal være delspørgsmål, som knytter sig til forberedelsesmaterialet.

Til matematikfagene på HTX kan der yderligere knyttes den kommentar, at vejledningen til bekendtgørelserne nedtoner nogle steder skolealgebraen i starten af forløbet, idet denne betegnes som fagets "snublesten"; fx nævnes det, at den indledende geometri med fordel kan gøres "algebrafri". Derimod anbefales det at lade eleverne løse opgaver vha. CAS-værktøjer. Retfærdigvis giver vejledningen flere forslag til og argumenter for, at skolealgebraen dyrkes som en integreret del af de øvrige forløb og ikke som "brush up" kurser i starten af 1.g.

Bemærkningerne om skolealgebra er dog interessante i det lys, at netop nabofaglærerne på HTX udtrykte størst frustration over elevernes manglende færdigheder vedrørende bogstavsmanipulation og simpel ligningsløsning. Dette uddybes i afsnit 4.7.

4.6 Hvad er fagenes realiserede mål og indhold?

Ud fra ovenstående analyse af styringsdokumenterne og eksamensopgaverne kan man sammenfattende sige, at matematikfaget på hvert niveau og på hver uddannelse har mål og indhold som er i god overensstemmelse med de mål og kategorier, som beskrives i KOM-rapporten (Niss et al., 2002). Det bør dog overvejes, om elementer af sandsynlighedsteori bør indgå i kernestoffet på STX og HTX, både for at opnå en bredere modelleringskompetence, og for at give et bedre grundlag for elevernes forståelse af statistik (fx hvad en test siger). Hvad der i så fald kunne udelades, tages der ikke stilling til i denne rapport.

Man kan så spørge, i hvilket omfang de skriftlige prøver tester, hvorvidt eleverne opnår disse kompetencer. Som en HTX-lærer siger (under et fokusgruppeinterview om bl.a. eksamen), "[...] så tjekker opgavekommissionen hvilke kompetencer, der dækkes af de enkelte delspørgsmål, så vi er sikre på at alle kompetencer testes ved eksamen" (HTX-lærer i interview). Men det er selvfølgelig ikke nok at fastslå, at de enkelte kompetencemål er berørt - det er også vigtigt at forholde sig til, hvad KOM-rapporten kalder dækningsgrad og teknisk niveau (ibid., s. 128). Som det er angivet i KOM-rapporten, så "i deres klassiske rene former, er der ret snævre grænser for, hvilke (aspekter af) de matematiske kompetencer, skriftlige og mundtlige prøver kan evaluere" (Niss et al., 2002, s. 130). Dette problematiske forhold rammer alle fire uddannelser.

Udfordringen rammer især de skriftlige eksamener, idet eleverne gør brug af de omdiskuterede "skabelonbesvarelser". Som nævnt i afsnit 3.2 laver nogle elever selv sådanne skabeloner og under udviklingen, kan de selvfølgelig aktivere en række kompetencer og en mængde kernestof. Alligevel bliver selve eksamensbesvarelsen let mekanisk og ukritisk, når den baseres på en skabelon, og kan give en tendens til at eksamen reduceres til en test af de skabelonernes styrker.

Oplevelsen af et misforhold mellem fagenes mål og det som reelt testes ved de skriftlige eksamener, udtrykkes klart i andre dele af vort empiriske materiale. Som tidligere nævnt udtalte en matematiklærer på STX således: "mit arbejde består i at træne eleverne i at løse modelleringsopgaver i et CAS-værktøj", en anden lærer skrev i et fritekstfelt i lærerundersøgelsen, at: "man skal som lærer være idealistisk for at holde fanen højt og undervise sine elever, så de bliver gode til matematik, når eleverne kan klare sig lige så godt til eksamen ved en undervisning, der er fokuseret på CAS-kommandoer og modelbesvarelser".

Dette understøttes af, at 53% af respondenterne i lærerundersøgelsen føler sig splittet mellem at forberede elever til skriftlig eksamen og samtidig arbejde begrebsorienteret. Dertil kommer, at de 29% synes, at de bruger for meget tid på at lære eleverne at bruge et matematikværktøjsprogram, samt de 14% der siger, at de bruger for meget tid på at lære eleverne at løse modelleringsopgaver med

et matematikværktøjsprogram. Som det fremgår af tabel 2, så er det mere sandsynligt at eleverne udtrækkes til at komme til skriftlig eksamen end til mundtlig eksamen. Dog skiller HF sig ud ved, at alle skal til eksamen både mundtligt og skriftligt til gengæld får de ingen årskaraktter.

Gymnasie- form	Niveau	Mundtlig eksamen Frekvens	Eksamen skriftlig frekvens
HF	B	alle	alle
	C	alle	alle
Hhx	A	15%	99%
	B	21%	68%
	C	20%	-
Htx	A	41%	100%
	B	23%	-
Stx	A	21%	101%
	B	30%	74%
	C	20%	-

Tabel 2: Tabellen viser, hvor mange procent af eleverne, der kom til hhv. mundtlig og skriftlig eksamen i 2014 på de forskellige uddannelser og niveauer. Tallene er trukket fra Undervisningsministeriets Databank (2015). Årsagen til at STX A-niveau er over 100% skyldes enkeltfagsstuderende fx fra GSK.

At skriftlig eksamen har stor betydning for undervisningen bestyrkes yderligere af, at 51% af respondenterne i rektorundersøgelsen svarer, at de bruger de skriftlige eksamenskarakterer som en del af grundlaget for at vurdere kvaliteten af den enkelte lærers arbejde. Der er dog kun 11% af respondenterne i lærerundersøgelsen, der føler dette som et direkte pres i udførelsen af deres job. Det er i og for sig naturligt, at eksamen har indflydelse på undervisningen og at eksamenspræstationer i et vist omfang, og med passende blik på andre faktorer, tages i betragtning ved vurderingen af lærerens indsats. Det er også naturligt at læreren forsøger at indrette undervisningen således, at eleverne klarer eksamen bedst muligt.

Det er imidlertid et problem, hvis eksamensopgaverne er så forudsigelige, at lærere og elever derved kommer til at foretrække en undervisning, der retter sig mod skabelonbaseret besvarelse af typeopgaver. De skriftlige eksamensopgaver lægger - trods variationerne på tværs af uddannelser - ved deres genkendelighed fra år til år op til, at der trænes "skabelonbesvarelser". Selv for de opgaver, som kunne henføres til "modelleringskompetence", drejer det sig for eleverne om at pakke en standardopgave ud af et stykke tekst, anvende de korrekte kommandoer i et matematikværktøjsprogram, for til sidst af formulere en konklusion i opgavetekstens sprog. Man kan sige, at forudsigeligheden af opgaverne i praksis reducerer kravene til begrebsforståelse og matematisk dømmekraft, mens muligheden af en næsten automatisk brug af matematikværktøjsprogrammer fører til en tilsvarende reduktion af teknisk niveau. At gøre op med muligheden for skabelonbesvarelser, vil ikke være det samme som at øge dumpeprocenterne. Tværtimod reducerer illusionen om skabelonbesvarelserne eksamensopgaveløsningen til et binært chancespil. Enten

bruger eleven den korrekte skabelon, eller også gør vedkommende ikke. Er eleverne tvunget ud i eksplicit at ræsonnere over løsningsstrategier, er der flere muligheder for at vise matematisk kunnen.

Overordnet viser vores analyse af eksamensopgaverne, at de samme teknikker og typeopgaver går igen år efter år – det gælder også matematikværktøjsprogrammernes teknikker. Udtrykkene og sammenhængene, der laves regression på, er givetvis blevet mere avancerede med indførelsen af matematikværktøjsprogrammer, men det er det samme, man skal kunne foretage sig. Dilemmaet er, at de skriftlige opgaver altid har haft stor vægt på tekniske standardberegninger, men mange af disse er stort set tømt for matematisk indhold, når de løses med matematikværktøjsprogrammer som fx CAS (Winsløw, 2015). Naturligvis er der emner som statistiske tests der ikke vil være mulige at teste i samme grad ved en skriftlig eksamen uden værktøjsprogrammerne. Men besvarelsen af opgaverne kræver ikke stor teoretisk indsigt hos eleverne, når de anvender et program og en skabelon, som opgaven passer i. Det er muligt, at virkeligheden er en anden på andre skoler.

Opgaverne på HTX synes mere varierede, da de kræver, at eleverne i højere grad er i stand til at kombinere elementer fra fagenes forskellige emneområder. Særligt er de åbne modelleringsopgaver på baggrund af et billede på B-niveauet interessante bud på at nytænke eksamensopgaver. Ligeledes kan opgaver, hvor eleverne skal forklare de enkelte skridt i en på forhånd givet symbolsk udledning, være med til at opprioritere arbejdet med skolealgebraen. Uagtet de gode intentioner om opgaverne for HTX, var der på den besøgte HTX-skole fortællinger blandt eleverne om fordele ved udvikling af "masters" eller skabeloner.

Generelt efterlader analysen af eksamensopgaverne det indtryk, at en revision af eksamensopgavernes design og selve eksamensformen er stærkt tiltrængt. Dette skal ikke udlægges som en kritik af opgavekommissionerne, som er bundet af præcedens (forventninger hos lærere og elever).

Der er derfor behov for, at man gentænker især de skriftlige eksamensopgaver mhp. at reducere muligheden for (og det tilhørende incitament til) at forberede sig ved ren skabelontræning med fokus på brug af matematikværktøjsprogrammer. Udover at man i god tid skal udmelde og forberede mere principielle ændringer i de skriftlige eksamensopgaver, er det også afgørende, at der i god tid igangsættes en systematisk opgave med nydesign af opgaver (herunder pilottests). Formålet med dette arbejde skal være at styrke sammenhængen mellem fagenes faglige mål og den opfyldelse, som kan demonstreres gennem besvarelse af opgaverne. Det bør herunder tilstræbes at udvikle nye opgaveformer, hvis løsning kræver selvstændig brug af matematiske begreber og begrebssammenhænge, og at reducere brugen af typeopgaver. Sådanne forandringer skal naturligvis indføres gradvist og formentlig også afbalanceres med en tilpasning af det matematiktekniske niveau.

I nær tilknytning til arbejdet med innovation af opgavernes indhold, bør rammerne for den skriftlige eksamen genovervejes, herunder bestemmelser

vedr. brug af matematikværktøjsprogrammer (specielt CAS) og andre hjælpemidler. 51% af respondenterne i lærerundersøgelsen mener, at alle skriftlige eksamener bør omfatte en to timers prøve uden hjælpemidler, men med en godkendt formelsamling. Dog gælder dette kun for 20 % af HTX-lærerne. Dette og andre resultater (se specielt afsnit 5.1.2 og 5.1.3) peger på, at en større del af skriftlig eksamen bør finde sted uden brug af elektroniske hjælpemidler (herunder adgang til internet og mobiltelefon), idet man så kan overveje i højere grad at inddrage disse hjælpemidler fx i temaopgaver og ved mundtlige prøver baseret på sådanne.

Der er andre formelle muligheder for at revidere rammerne for skriftlig eksamen i matematik. Således ønsker 13% af respondenterne i lærerundersøgelsen at alle skriftlige eksamener skal være med et forberedelsesmateriale (som ovenfor nævnt er det almindeligt på HTX) og 25% af respondenterne ønsker flere centralt stillede prøver igennem forløbene (og altså ikke kun ved forløbets afslutning), med det formål at styrke den løbende eksterne motivation hos elever med behov for det (jf. afsnit 3.2 og 5.1.1-5.1.3 om elevdisciplin). En mindre omfattende version af denne idé er at lade eleverne gå til eksamen efter hvert år, så fx alle elever bestod C-niveauet efter første år, og efter andet år kun gik til eksamen i B-niveauet.

Dette vil i princippet kunne gennemføres indenfor rammerne af studieretningsgymnasiet, men vil kræve klare forholdsregler for elever, der måtte dumpe et givet niveau. Vi har ikke indenfor rammerne af dette projekt formuleret en model for dette forslag.

4.7 Behov og evt. mangler udpeget af aftagere

For at belyse "aftagerinstitutionernes" opfattelse af og ønsker til den gymnasiale matematik, er der gennemført interviews med 14 undervisere på videregående uddannelser. Underviserne repræsenterer mange forskellige uddannelser med varierende grad af matematikindhold, fx: universitære matematikuddannelser, universitetsuddannelser med et stort matematikindhold (fx ingeniør, naturvidenskab, økonomi), læreruddannelsen med matematik som linjefag, og andre uddannelser, hvor matematik ikke indgår, men hvor gymnasial matematik fungerer som redskabsfag på forskellige niveauer (fx sygepleje). Hvad angår underviserne fra universiteter, repræsenterer de forskellige typer af kurser fra det første år af uddannelserne. Der har fortrinsvis været tale om egentlige matematikkurser, men vi har også talt med enkelte undervisere, hos hvem matematik mere indgår som redskab end som et selvstændigt emne. Vi har i interviewene bedt underviserne om primært at forholde sig til erfaringerne fra deres egne kurser, og ikke fra uddannelsen i dens helhed. Interviewguiden er udviklet i samarbejde med følgegruppen og kan ses i afsnit 1.2.

Vi har med interviewundersøgelsen forsøgt at få aftagerne til at uddybe de styrker og svagheder i matematik, de oplever hos de nye studerende. Særligt har vi gerne villet belyse, hvad det er for problemer, det giver anledning til i undervisningen, når de oplever, at de studerende har utilstrækkelige matematikfaglige forudsætninger.

Vi har også spurgt ind til om aftagerne oplever forskelle mellem studerende fra forskellige gymnasiale uddannelser i forhold til deres matematikfaglighed. Det er

dog meget få af aftagerne, der har kunnet belyse dette. Dem, vi har talt med, oplever, at langt hovedparten af ansøgerne er fra STX, og selv i de tilfælde hvor de andre gymnasiale uddannelser udgør en betragtelig del, er det vanskeligt for respondenterne at sammenkoble oplevelser af studerendes matematikfaglighed med given gymnasial uddannelse. Det er således ikke på baggrund af interviewene muligt at skelne kommentarer rettet mod de specifikke gymnasiale uddannelser. I det følgende vil vi se på fremtrædende tværgående temaer fra interviewene, illustreret med eksempler på karakteristiske udsagn.

4.7.1 Hvad er de studerende bedst til matematisk, når de begynder på en videregående uddannelse?

Overskriften her var det første spørgsmål vi stillede ved interviewene, og det er kendetegnende, at mange af aftagerne i første omgang havde lidt vanskeligt ved at besvare dette spørgsmål. Det afspejler nok det faktum, at man som underviser let bliver fokuseret på problemer og vanskeligheder, og hvordan de kan afhjælpes. Flere nævner, at deres kursus netop fokuserer på det, som de studerende finder vanskeligt, hvorfor de ikke kan sige så meget om styrkerne.

Af styrker hos de studerende fremhæves ofte *generelle kompetencer*, fx at de studerende er gode til at samarbejde i grupper og til at lave projekter. De fleste fremhæver også, at der er meget stor *spredning* i de studerendes matematikfaglighed. Det gælder uddannelser i matematik og på uddannelser i andre fag, hvor matematik er et vigtigt redskab og sprog. Som en styrke fremhæves også, at de studerende er vant til at bruge matematikværktøjsprogrammer. De studerende er ikke skræmte over at skulle bruge fx *Maple* eller andre it-redskaber, heller ikke redskaber som de ikke har prøvet før. Her er der sket en klar ændring over de senere år. Men ofte er der også et "men" i samme sætning. Et par eksempler:

"De er gode til at starte et computerprogram, det jamrer de ikke over. Men de er vant til færdige worksheets..., ikke gode til avanceret håndtering."

"Det er vanskeligt at sige hvad de er gode til, for vi fokuserer alene på det, de er dårlige til. Men de er gode til at bruge lommeregner. Det kan godt løse et integral med en lommeregner, men de kan ikke oversætte det til et areal under en kurve. De mangler kritisk sans overfor resultatet"

"De kan meget problemløsning, gode til at gå i kødet på det. Gode til lommeregner og pc"

Det sidste eksempel er fra et kursus, hvor selve det matematikfaglige niveau ikke er så højt, og hvor mange af de faglige emner ikke er ukendte for de studerende. Noget tyder på, at de studerendes styrke indenfor problemløsning og anvendelse af matematik i højere grad kommer til udtryk på kurser, hvor selve den matematikfaglige udfordring er mindre dominerende.

4.7.2 Hvad vurderes som mangler i de studerendes matematikfaglighed, når de starter på en videregående uddannelse?

Når vi spørger ind til vurdering af mangler i de studerendes matematikfaglighed, så er det ofte det at kunne ræsonnere og tænke matematisk, som svarene

kredser omkring. Det er kendetegnende, at en del af svarene også her relaterer sig til brugen af matematikværktøjsprogrammer, fordi det opleves som et problem, at de studerende er alt for tilbøjelige til straks at forsøge at løse en opgave med programmerne alt for tidligt i processen. Dette stemmer overens med elevernes egne udsagn i elevinterviewene, jf. afsnit 3.2. Aftagerne vurderer generelt, at det er vigtigt, at de studerende kan analysere et problem, og vurdere hvilke løsningsstrategier, som er hensigtsmæssige, før de tager matematikværktøjsprogrammerne i brug. Til det har de brug for grundlæggende matematikfærdigheder, begrebsforståelse og gode kompetencer i matematisk ræsonnement. Aftagerne ønsker, at de studerende skal kunne tænke selv med matematik, og derfor skal de være indstillet på at bruge hoved, papir og blyant. Og netop dette oplever de, at mange af de studerende har meget vanskeligt ved.

En respondent fra en teknisk-naturvidenskabelig uddannelse underviser på et indledende kursus, som gennem de senere år er blevet omlagt til at have et meget matematisk fokus, hvor det før bredt skulle introducere til hele uddannelsen. Kurset er bevidst tilrettelagt uden hjælpemidler, og den store udfordring for de studerende på kurset er at lægge matematikværktøjsprogrammerne fra sig. Det matematiske indhold i kurset er ellers ret simpelt: algebraisk manipulation, potenser, logaritmer, finde rødder, differentiation og integration etc. Som en respondent siger:

"Det er sådan noget som de kender fra gymnasiet [...]. Men forventningen [her] er anderledes. Det giver måske ikke mening, at en person, som skal i finansverdenen, skal bruge matematikken som et særligt redskab, så det giver meget mening, at man også i gymnasiet bruger matematikværktøjer. Men så har vi bare det problem, at når de kommer på en uddannelse, hvor matematikken er det daglige sprog, så har vi behov for, at de kan manipulere ligninger både i hovedet og med papir og blyant, for ellers bliver deres læsefærdighed for ringe, de kan ikke læse ingeniørfaglige bøger[...] Hvis ikke de kan følge en udvikling af ideer udtrykt matematisk, så kan de ikke følge argumentet. Så derfor er det ikke nok at sidde med en matematiklommeregner og lave alle disse manipulationer. Det ville jo svare til, at man skulle slå hvert eneste engelske ord op i en ordbog [...]"

Matematikværktøjsproblematikken vender vi tilbage til i afsnit 4.7.4 og 5.1 nedenfor.

En gennemgående pointe er altså, at problemer med helt grundlæggende færdigheder og begreber gør det ekstra vanskeligt for de studerende at lære nyt stof, fordi så bliver alt svært. Nogle af aftagerne nævner også mere avancerede faglige emner, som de studerende har mangler omkring, men det opleves typisk ikke som så stor en udfordring, for det kan man på uddannelsen relativt nemt gøre noget ved. Det er vanskeligere, når der mangler grundlæggende færdigheder og begreber i tal og algebra (fx nævnes brøkgregning, funktioner, at kunne differentiere og integrere), eller grundlæggende forståelse af, hvad et matematisk ræsonnement er, for det er en forudsætning for at kunne lære nyt. Aftagerne melder også om meget dygtige elever, men der er en stor tung ende som har problemer med det basale.

4.7.3 Det er ikke faglige emner, der mangler i gymnasiet

"Det er ikke emner de mangler! Det er dybere forståelse og grundlæggende færdigheder"

Vi har spurgt til om der er særlige faglige emner, som aftagerne oplever, at de studerende mangler, og som ikke dækkes af undervisningen på de gymnasiale uddannelser. Nogle nævner, at det kan være upraktisk, når behandlingen af emner i gymnasiet ændrer sig, og universitetet så ikke når at tilpasse deres kurser; det kan være upraktisk, men anses ikke for et alvorligt problem. I det store hele opleves læreplanens emner fint at dække behovet for de videregående uddannelser. Enkelte aftagere i følgegruppen nævnte dog, at det kunne styrke relevansen af den tilsigtede modelleringskompetence, hvis man gjorde simpel sandsynlighedsteori til en del af kernestoffet i matematik B også på STX og HTX. Der er dog ikke i diskussionen taget stilling til, hvilke emner dette kunne erstatte.

Helt gennemgående svarer aftagerne, at det ikke er emner, der mangler, men "forståelse". Dybere begrebsforståelse, matematisk tankegang, ræsonnement og sikkerhed i elementære algebraiske begreber og færdigheder er det, der opleves som vigtige elementer at bygge videre på for de videregående uddannelser. Som en respondent i aftagerundersøgelsen siger: "hvad vil det fx sige, at differentiere? Det er reduceret til en kode i CAS". Dette understreger, at eleverne har lært teknikker og ikke større begrebsforståelse.

4.7.4 Udfordringer ved CAS-værktøjerne

Vi har spurgt hvordan aftagerne oplever, at de studerende kan håndtere matematikværktøjsprogrammer, herunder CAS, når de starter på en videregående uddannelse. På mange af uddannelserne spiller forskellige IT-redskaber og CAS-værktøjer en vigtig rolle, og er redskaber som de studerende skal lære at bruge. Så det er ikke fordi aftagerne er imod matematikværktøjsprogrammer. Flere understreger, at det jo inden for deres fagområder er fuldstændig afgørende at have stærke it-redskaber. På kurser, der gør intensivt brug af programmet *Maple* eller lignende, opleves det klart som en fordel, at de studerende har erfaringer med matematikværktøjsprogrammer, og hvad man kan bruge det til, fra de gymnasiale uddannelser. Men mange af aftagerne er alligevel ambivalente overfor den måde de nye studerende forholder sig til disse programmer. På den ene side er det en fordel, at de studerende har erfaringer med matematikværktøjsprogrammer til problemløsning, men på den anden side oplever mange af aftagerne, at brugen har fået et skævt fokus:

"Desværre er der nogle der tror at de der matematikværktøjer, de er ligesom en opvaskemaskine, som kan klare det hele fra A til Z. Men sådan er det ikke. De er nærmere ligesom en røremaskine, man skal se til den hele tiden, man skal være den der fører processen. Og så får man måske et udtryk, der skal regnes ud, og det kan man så bruge en lommeregner til. Og så må man tilbage til papir og blyant og få udtrykkene skrevet op og manipulere videre. Det er ikke sådan en automatisk proces, der kan få én hele vejen igennem. Det er ikke fordi vi ikke tror på de her værktøjer, men de skal køre parallelt med papir og blyant."

Problemerne opstår, når de studerende vil gå direkte til at løsningen vha. matematikværktøjsprogrammer, fordi de så ikke lærer at analysere og forstå problemerne, skelne let fra svært og vælge de hensigtsmæssige strategier. I princippet ville matematikværktøjsprogrammerne også kunne bidrage til, at de studerende kunne udforske og forstå begreberne bedre, men i praksis oplever mange tværtimod, at programmerne bidrager til, at begrebsforståelse bliver erstattet med tastekombinationer. Flere bemærker, at det nok til dels skyldes, at gymnasieeleverne – og deres lærere – er meget bundet af den skriftlige eksamen, og dermed fokuserer mere på træning af typeopgaver og udvikling af matematikværktøjsprogramskabeloner til disse, end på den begrebsforståelse, som de videregående uddannelser i høj grad gerne skal bygge videre på. Det er godt og vigtigt, at de ikke er bange for at gå i gang med at arbejde i et matematikværktøjsprogram, men de mangler at træne det at tage noter med papir og blyant, de mangler indblik i hvad grafers forløb kan sige om en udvikling, og så mangler de basalt set motivation for at arbejde med matematik uden et matematikværktøjsprogram, ifølge aftagerne. Omvendt kommer de dygtige studerende med et stærkt redskab som de kan eksperimentere sig frem med.

Der er selvfølgelig noget varierende synspunkter afhængig af det kursus respondenterne taler ud fra, og hvad uddannelsens tilgang til matematikværktøjsprogrammer er. Det fremhæves flere steder som en fordel, at de studerende lynhurtigt går i gang med nye it-værktøjer. Tærsklen for de studerende er ikke så stor, som den tidligere har været, når de skal i gang med at anvende numeriske metoder etc., men de studerende opleves ikke som selvstændige i deres anvendelse af matematikværktøjsprogram, og ofte er de afhængige af udleverede skabeloner og programmer. Det er også tankevækkende, at selv de uddannelser som gør intensivt brug af matematikværktøjsprogrammer, i flere tilfælde har fundet det nødvendigt at oprette kurser (eller perioder i kurserne) hvor programmerne ikke må anvendes, fordi de opleves som en forhindring for udvikling af begrebsforståelse.

4.7.5 Tværfaglighed – at sætte matematikken i spil i forhold til andre fag

I aftagerundersøgelsen har vi spurgt, hvordan de vurderer de studerendes evner til at sætte matematikken i spil i forhold til andre fag. Svarene her stritter i noget forskellige retninger. Mange nævner, at de studerende har meget svært ved at bruge matematikken i andre fag såvel som i senere kurser, hvor konteksten er ny for dem. Nogle af de indledende matematikkurser skal forberede studerende til mange forskellige naturvidenskabelige fag, hvorfor det er en vigtig pointe, at matematikken skal kunne anvendes udenfor faget selv. Men det opleves som en ekstra udfordring:

”Vi har nogle opgaver, som vi toner, hvor de netop skal anvende matematikken, og som er relevante i forhold til de studerendes eget fag. [...] Men det man kan sige er, at matematikken er allerede svær for dem. På det her niveau gør det det sværere for alle studerende også at skulle anvende den. Så ofte vil det være sådan, at selv fysiklærerne vil vælge de ikke-anvendelsesorienterede opgaver, for at sikre sig, at de lærer matematikken, fordi det andet bliver sværere for dem.”

Andre fremhæver, at det er meget vanskeligt for de studerende at opstille modeller, fx at omsætte fysiske principper til matematiske udtryk. De studerende har meget sværere ved at opstille en differentiaalligning end ved at løse den. Også i de uddannelser, hvor de studerende skal skrive projekter eller opgaver med anvendelsessigte, fremhæves det, at de studerende ofte har meget vanskeligt ved matematisk modellering. Det opleves undertiden, at de studerende "flygter" over i konteksten, fordi det er nemmere for dem, og ikke får koncentreret sig om matematikken. Man kan måske godt mærke, at de er trænede i projektopgaver og i at tænke tværgående fra AT-forløb mm, men det er ikke nødvendigvis til den store hjælp, når de skal anvende matematik i nye kontekster på deres uddannelse.

Der er dog eksempler på aftagere, der modsat oplever, at de studerende er gode til at opstille modeller og også til at forholde sig kritisk til deres resultater - men også de fremhæver, at der opstår udfordringer, når de studerende skal arbejde matematisk med modellen. Det er kendetegnende, at de aftagere, der er mest positive over de studerendes evne til at opstille modeller og anvende matematik til problemløsning uden for selve faget, kommer fra nogle uddannelser, hvor selve det matematikfaglige indhold er relativt simpelt således, at de studerende ikke skal lære mange nye matematiske metoder og begreber.

Der kan ikke på baggrund af aftagerundersøgelsen peges på bestemte emner i matematik på de gymnasiale uddannelser, som ønskes styrket, udover basal algebra og aritmetik. Generelt udtrykkes tilfredshed eller uvished vedrørende indholdet i læreplanerne. Der er tilfredshed med, at de studerende har nogle redskaber til at løse opgaver og bruge matematikværktøjsprogrammer. Men der efterspørges generelt en mere dybdegående begrebsforståelse, solide grundlæggende færdigheder og at de studerende er trænede i at ræsonnere og tænke matematisk, også uden brug af matematikværktøjsprogrammer. Dette gælder såvel matematiktunge uddannelser, som de uddannelser hvor matematik er mere sekundært.

Aftagerundersøgelsen ligger på den måde i fin forlængelse af pointerne fra "Færdighedsrapporten" (Hansen et al, 2011). Her fremhæves det, at det er vigtigt, at de studerende kan regne i hånden, og har styr på de helt elementære færdigheder – ikke mindst i skolealgebra og aritmetik – ligesom det fremhæves, at det vigtigste er den begrebsmæssige forståelse, som de studerende skal bygge videre på i den videregående uddannelse.

Der efterspørges en mere kritisk indstilling til brugen af matematikværktøjsprogrammer, så de studerende i højere grad overvejer og analyserer problemerne, inden de går videre med at løse dem vha. disse programmer. Det vurderes at være helt afgørende i forhold til forståelse og fortolkning af de resultater, som værktøjerne kan producere.

Man kan konkludere, at det er en broget flok, der rekrutteres til de videregående uddannelser. Nogle elever kan jonglere og eksperimentere med matematiske begreber med og uden matematikværktøjsprogrammer. Andre elever – selv på

de tekniske uddannelser – er ikke særligt selvkørende i et matematikværktøjsprogram og endnu mindre uden.

4.8 Behov og evt. mangler erfaret af nabofagslærere

Gennem nabofagsundersøgelsen er vi kommet vidt omkring i forhold til, hvad nabofagslærere ønsker og glædes over.

Nabofagslærere på HHX og naturgeografilærerne på STX og HF udpeger i almindelighed hverken mangler eller særlige ønsker til matematikfaget på de gymnasiale uddannelser. De anser nærmest ikke deres fag som nogle, der trækker på matematik. Adspurgte til deres brug og fortolkning af grafer, diagrammer og tabeller, opfatter disse lærere det som en integreret del af deres egne fag og de mener ikke, det betyder noget særligt, hvordan det samme dyrkes i matematik.

Samfundsfagslærerne er meget begejstrede for, at eleverne har styr på chi-i-anden test, når nu det er blevet en del af eksamen på samfundsfag på A-niveau. De er mindre begejstrede for, at elevernes foretrukne matematikværktøjsprogram er et andet end *Excel*. Deres argument for at bruge *Excel* er, at det bruger de videregående uddannelser. De få vi talte med, havde ikke yderligere ønsker til matematik. De kunne i samarbejde med matematik arbejde med Gini-koefficienter, og meget mere finansiel økonomi ønskede de ikke at lægge i samfundsfaget lige nu. De oplevede, at elever kan være meget utilpasse med matematiktunge dele af faget. De anså det i den forbindelse for en fordel at være i studieretning med matematik på A-niveau, og ikke kun det krævede B-niveau.

De øvrige nabofagslærere fra de naturvidenskabelige fag og informationsteknologi havde derimod et mere anstrengt forhold til elevernes matematiske kunnen. En lærer i informationsteknologi argumenterede dog for, at deres matematikbrug i vid udstrækning var afkoblet fra gymnasiefaget, og at de selv kunne lære eleverne binære tal og logisk tankegang.

Fysiklærerne repræsenterede et mere bredt spektrum af holdninger, fra at fysikfaget i dag ikke rummer meget matematik, til en frustration over, at eleverne ikke kan de basale færdigheder og en påstand om, at det er spørgsmålet om procentregning i skriftlig fysik A eksamen, der volder eleverne problemer. Som en erfaren STX-lærer i fysik og matematik udtrykte det:

”Førhen sagde man, at det var i fysik eleverne lærte matematik, da det var her de brugte det, men i dag insisterer de på, at alt skal løses i Nspire” (fysiklærer på STX).

Generelt var der en udbredt frustration over, at eleverne ikke som en naturlig ting forsøger, at løse simple problemer med hovedregning. At afstemme et reaktionsskema i kemi kan tage en anseelig mængde tid, når det basale ikke er på plads. Manglende evne til at forstå en graf, herunder bruge oplysningerne på akserne i et koordinatsystem, kan gøre det vanskeligt, at læse bogen i bioteknologi.

En lærer giver et eksempel med idealgasloven ($pV=nRT$): *«det er næsten umuligt at få eleverne til at forudsige, hvad der sker med trykket (p), hvis volumen (V) halveres og de øvrige led fastholdes»*. Tilsvarende eksempler gives med Ohms lov, og der argumenteres for, at det ikke er brøkregning, ligningsløsning og former for proportionalitet i sig selv, der er et problem. Det er en mere almen algebraisk forståelse, der mangler. Det betyder, at eleverne ikke kan fortolke og vurdere på formeludtryk og lovmæssigheder, eller overskue hvordan man tester en hypotese om en given sammenhæng. Eleverne kan ikke gennemskue, hvornår matematikværktøjsprogrammer ikke er en hjælp, og får de ikke de tiltænkte svar ud af programmerne (eller blot noget de ikke selv forstår) slår de ud med armene og beder læreren om hjælp. Dette har gjort, at nogle lærere har lært sig selv at bruge matematikværktøjsprogrammerne - men det hjælper ikke i de tilfælde, hvor programmerne alligevel ikke kan løse problemerne.

Problemerne gælder i varierende grad både de svage og stærke elever i matematik, hvoraf særligt gruppen af stærke elever frustrerer lærerne, da disse ikke burde stå med sådanne basale problemer. Størst utilfredshed blev observeret blandt nabofagslærerne på HTX. Om dette er et generelt billede eller en tilfældighed i skolevalg, kan vi ikke afgøre. Men det er en nærliggende hypotese, at problemet på HTX forstærkes af, at den skriftlige eksamen ikke omfatter en delprøve uden hjælpemidler. Omvendt kan man argumentere for, at når samme frustration også findes på uddannelser, der har en delprøve uden hjælpemidler, så afhjælper en sådan (i det mindste i dens nuværende omfang og udformning) ikke i sig selv problemet.

5 Lærernes erfaringer og syn på fag og praksisbetingelser

Gymnasial matematikundervisning er også en *profession* som dagligt udøves af mere end 2000 lærere, hvis praksisviden, erfaringer og vurderinger er helt centrale, når man vil danne sig et billede af matematikfagernes status og behov for udvikling. Derfor ser vi i dette kapitel på lærernes arbejdsbetingelser, oplevelser af praksis og deres ønsker for udvikling i bred forstand.

5.1 Hvad er matematiklærernes daglige udfordringer og udviklingsbehov?

I et forsøg på at besvare undersøgelsens spørgsmål B3, vil vi i forlængelse af første kapitel præsentere et lærerperspektiv på fagets rammer, herunder læreplan, eksamensformer og aktuelle muligheder for at motivere og understøtte elevernes arbejde med matematik.

Efter gennemførelsen af vores lærerinterview stod det hurtigt klart, at de største udfordringer set fra respondenternes synspunkt ligger i:

- spredningen i det faglige niveau for eleverne på de enkelte hold, og som konsekvens heraf i at tilrettelægge en undervisning med en tilsvarende differentiering.

Andre markante vurderinger, som fremgår tydeligt af disse interviews, er:

- Utilstrækkelige forudsætninger fra grundskolen hos en del elever;
- Manglende motivation og arbejdsindsats hos eleverne,
- Undertiden gives ovenstående mere ekstreme udtryk såsom plagierede eller manglende skriftlige afleveringer
- Samspillet med andre fag rummer store udfordringer.

I FiP-undersøgelsen peger flest, over 70% af grupperne på, at den største udfordring i dagens matematikundervisning er differentiering efter forskellige elevniveauer, ca. 60% pegede på elevernes manglende motivation eller engagement, 40% peger på brugen af matematikværktøjsprogrammer, over 25% peger på utilstrækkelige færdigheder fra grundskolen og endelig peger godt 20% på elevernes udbytte af skriftligt arbejde og feedback på dette. Det skal her understreges, at udfordringer ikke udelukkende skal forstås som "problemer", men der er tale om forhold som af mange eller en del lærere ses som væsentlige og aktuelle arbejdsbetingelser.

Disse og andre udfordringer uddybes og nuanceres i det flg., baseret på såvel de nævnte lærerinterviews som på resultaterne fra lærerundersøgelsen.

5.1.1 Stor spredning i fagligt niveau blandt B-niveauelever

Lærerne føler sig pressede af, at eleverne på et og samme hold fra begyndelsen har meget forskellige forudsætninger i matematik. De væsentligste årsager, som nævnes, er elevernes stærkt varierende færdigheder og viden fra grundskolen. Problemet forstærkes af at eleverne uanset matematiske forudsætninger kan vælge studieretninger, hvor matematik indgår på B- eller A-niveau. Tilsvarende nævner flere HF- og HHX-lærere at de møder en del elever som selv oplever, at

deres forudsætninger er utilstrækkelige, eller som "har fået at vide, at jeg er dårlig til matematik" (Matematiklærer på HF citerer HF-kursist). Uanset kilden kan denne oplevelse af egen utilstrækkelighed i sig selv være en hindring for elevernes indsats i faget. En anden lærer siger, at "nursingen fra folkeskolen må være enorm [...] de sidder med fingeren i vejret med det samme og bruger ikke tid på at forsøge at løse opgaven selv" (Matematiklærer på STX). Det stiller store krav til undervisningsdifferentiering og motivation af den gruppe elever, der ikke på forhånd er motiverede for at gøre en indsats i matematik. Alt i alt er disse faktorer med til at forårsage, hvad der af lærerne omtales som et tidsmæssigt pres, der i nogle tilfælde fører til, at de ikke rigtig når det supplerende stof som andet end mindre uddybninger af kernestoffet. Fordybelse i kernestoffets emner er et af målene for det supplerende stof, men på alle niveauerne på STX, HTX og HF er det ligeledes foreskrevet i læreplanen, at andre emner også skal inddrages. For HHX lægges der i vejledningerne op til en tolkning af læreplanens formuleringer, der peger i retning af inddragelse af nye områder.

HTX-lærernes erfaring er, at nogle elever blomstrer op, når de kommer til HTX, "hvor matematikken bliver levende i alle anvendelserne, og eleverne vil pludselig gerne lave matematiklektier hver dag" (Matematiklærer på HTX).

Direkte adspurgt i læreundersøgelsen svarer blot 1% af respondenterne, at de ikke har brug for at tage højde for faglig spredning i deres undervisningstilrettelæggelse. 52% af respondenterne planlægger moduler med kraftig differentiering og evt. opdeling af klasserne. 78% af respondenterne angiver, at den store faglige spredning påvirker undervisning og læring negativt; og store klassekvotienter påvirker 46% af respondenternes praksis. For respondenterne fra HHX er udfordringerne med klassekvotienterne ikke lige så markante som de øvrige uddannelser. Ligeledes værd at bemærke er, at over 50% af respondenterne svarer, at elevernes private problemer påvirker undervisningen, mens kun 27% peger på, at elevernes erhvervsarbejde er en udfordring. De sidste to forhold må antages at være almene for gymnasiets fag som helhed, og vi vil ikke i denne rapport gå dybere ind i dem. Endelig angiver 14% af respondenterne "andet" som svar på hvad der besværliggør deres undervisning og uddyber det med kommentarer om elevernes motivation, arbejdsmoral og "det at tage skolen alvorligt".

I lærerinterviewene pointerede HTX-lærerne, at en del af det pres de oplever på undervisningen i B-niveauet kommer af, at de allerede i marts skal være færdige med stoffet, så der kan fokuseres på eksamensprojektet – og at de ikke anser forskellen på det faglige indhold på B og A-niveau som særlig udtalt. Hvorvidt dette er et generelt problem eller specifikt for denne skole kan vores data ikke sige. Lærerundersøgelsen bekræfter blot, at også andre lærere føler sig pressede på matematik B på HTX.

Samlet set svarer 78% af respondenterne i lærerundersøgelsen, at den faglige spredning blandt eleverne fra grundskolen har en negativ påvirkning af deres undervisning og elevernes læring. Krydses disse svar med hvilke hold, så mener 32%, at matematik B og 28% at hævehold C til B er de hold, der presser dem. Dertil kommer, at 32% af respondenterne svarer, at udfordringernes omfang

afhænger af studieretningen og at det i særlig grad er studieretninger med matematik B (og særligt matematik B – samfundsfag A) der er udfordrende. Også andre studieretninger, hvor matematik B er en del af fagpakken, nævnes som udfordrende. På HHX er det særligt innovationsretninger, der presser lærerne (også dem med matematik C). Der er altså noget, der tyder på, at når elever vælger studieretning som indeholder matematik B eller hæver matematik til B-niveau af andre grunde end en interesse for matematik eller matematikholdige uddannelser, så repræsenterer matematik en særlig stor udfordring både for lærerne og for eleverne. Man kan derfor argumentere for, at skal så stort et antal elever have matematik på B-niveau med en højere succesrate, så kan det være meningsfyldt, at se på initiativer som allerede er i gang med at niveaudele eleverne på hævehold fra C til B (se fx Rasmussen, 2012). Sådanne initiativer kan måske ikke stå alene, men der er dog klart tale om et problem, der med fordel kunne imødegås centralt og ikke kun af enkelte skoler og lærere.

5.1.2 Store udfordringer med den skriftlige eksamen og matematikværktøjsprogrammer

"Man skal som lærer være idealistisk for at holde fanen højt og undervise sine elever, så de bliver gode til matematik, når eleverne kan klare sig lige så godt til eksamen ved en undervisning, der er fokuseret på CAS-kommandoer og modelbesvarelser" (Kommentar fra respondent i lærerundersøgelsen).

I lærerinterviewene sagde en anden matematiklærer, at "jeg underviser elever i at besvare modelleringsopgaver med et CAS-værktøj" (Matematiklærer på STX). I lærerundersøgelsen skriver en tredje lærer, at "den store vægt på brug af CAS betyder, at det er svært at sikre, at eleverne får tilstrækkelig træning i elementære færdigheder" og også er medvirkende til "den manglende sammenhæng i matematikfaget" og at der er "for stor afstand mellem teori og opgaveregning med CAS. CAS kan løse opgaver uden brug af teorien. Før lærte vi teorien for at kunne løse opgaverne".

Lærerne giver i lærerinterviewene udtryk for, at de gerne vil lave en undervisning, der i højere grad dyrker en eksperimenterende og induktiv tilgang til faget. Deres erfaring er, at det giver eleverne meget, men at det er tidskrævende at planlægge og gennemføre, hvorfor det kun i mindre grad dyrkes i undervisningen. 38% af respondenterne i lærerundersøgelsen bekræfter ønsket om at gennemføre mere induktiv og eksperimenterende undervisning, men at det nedprioriteres af forskellige årsager.

I det hele taget tegner der sig et billede af, at der blandt lærerne opleves en ubalance mellem det de gerne vil undervise i, og som de mener er vigtigt, sammenholdt med, hvad de føler sig forpligtet til at undervise i for at eleverne klarer sig bedst muligt til eksamen.

Dette understøttes fx af, at 53% af respondenterne føler sig splittet mellem at forberede elever til skriftlig eksamen og samtidig arbejde begrebsorienteret. Dertil kommer de 29% der synes, at de bruger for meget tid på at lære eleverne at bruge et matematikværktøjsprogram.

Det skal som omtalt tidligere sammenholdes med, at 51% af respondenterne i rektorundersøgelsen siger, at de bl.a. bruger de skriftlige eksamenskarakterer til

at vurdere kvaliteten af den enkelte lærers håndtering af jobbet (hvor udbredt denne praksis er, svinger fra 67% på HTX til 48% på HHX).

Det er forståeligt, at lærerne vægter at træne eleverne til den skriftlige eksamen i ønsket om, at deres elever klarer sig bedst muligt – både for elevernes videre muligheder i uddannelsessystemet, og for hvordan de selv evalueres. Men det er et problem, hvis det i større omfang sikres gennem undervisning i skabelonbesvarelser og håndteringen af en begrænset række matematiske teknikker, som analysen af eksamensopgaverne peger på, er tilstrækkelige til at løse disse. Et u hensigtsmæssigt scenarie er, at eleverne har den oplevelse, at matematik nok er et svært fag, som de er nødt til at vælge af bindinger til andre fag eller grundet ambitioner om videre uddannelse, men at de så kan klare sig igennem faget (i hvert fald den skriftlige del) ved at træne skabelonbesvarelser.

5.1.3 Elevernes arbejdsvaner

I forlængelse af ovenstående er der i dagspressen blevet tegnet et billede af, at der er en tendens til, at hvis ikke skabelonerne rækker til et tilstrækkeligt resultat, så kan man hente hjælp via diverse internetfora – sågar i prøven uden hjælpemidler (Mainz, 2015a & 2015b). Det ligger dog uden for denne rapports rækkevidde at estimere omfanget af dette eksamenssnyd, der trods alt må anses for at være relativt begrænset. Men det er naturligvis et centralt placeret ansvar at forebygge, at studentereksamens validitet kan drages i tvivl.

Vi kan derimod pege på, at der tilsyneladende er et reelt disciplinproblem i forhold til at håndhæve krav til elevernes skriftlige afleveringsopgaver, og at lærerne ikke altid oplever den nødvendige opbakning fra skolernes ledelser. I rektorundersøgelsen viser det sig, at kun på 63% af respondenternes skoler, har det reelle konsekvenser for elever, der plagierer. Altså er der 37% af respondenternes skoler, hvor det ikke er klart, hvorvidt det har reelle konsekvenser at overtræde regler om plagiering. Tilsvarende angiver 23% af respondenterne i lærerundersøgelsen det som en kilde til frustration, at det ingen konsekvens har, når de rapporterer plagiat og andre problemer med afleveringer til ledelserne. Altså synes der at være overensstemmelse mellem lærernes og ledelsernes opfattelser af situationen i den forstand, at der på et mindretal af skolerne ikke i tilstrækkeligt omfang reageres på plagiat i elevopgaver. Den reelle konsekvens afhænger i nogen grad af situationen, ligesom skolernes politik på området selvsagt ikke kun drejer sig om faget matematik.

I elevundersøgelsen gives der udtryk for, at alle kender til klassekammerater, der henter besvarelser på nettet eller blandt venner. Og mere væsentligt rapporteres der om klasser, hvor værste sanktion er en samtale med en ledelsesperson; og "der breder snyd sig som en steppebrand blandt resten af klassens elever" (Elev fra HTX). Samlet set danner der sig således et billede af et fag, der er svært for mange elever, hvor en del klarer sig igennem med skabelonbesvarelser – og i nogle tilfælde snyd. Uanset, at der er mange elever, som slet ikke har dette forhold til matematik, kalder dette billede alligevel på centrale tiltag ift. at styrke såvel ekstern som intern motivation i elevernes daglige arbejde med matematik. Det kan fx dreje sig om hyppigere og tydeligere evaluering, og om nytænkning af de matematiske opgaver eleverne arbejder med både til daglig og ved eksamen.

Mange lærere oplever at distraherende elevaktivitet på Facebook og nettet er et stort problem i den daglige undervisning: hele 52% af lærerne føler sig pressede af disse forhold. Flere af FiP-deltagerne peger ligeledes på at elevernes manglende koncentration og motivation i undervisningssituationer kan skyldes konkurrencen fra sociale medier.

Direkte adspurgt, hvordan lærerne engagerer eleverne i undervisningen svarer en lærer, at "eleverne forstår, hvad jeg siger. Jeg bruger farvekridt pædagogisk meget relevant, og lytter og svarer så eleven er hørt" (respondent i lærerundersøgelsen). For 93% af respondenterne er det da også det personlige engagement, de griber til som middel til at styrke elevernes motivation. Dette skal kobles med at 70% bruger inddragelse af andre fag – helt i den seneste reforms ånd – og yderligere 47% laver eksperimenterende og induktiv undervisning som bl.a. Matematiklærerforeningen for STX og HF har været med til at udbrede. Lærerne savner imidlertid effektive værktøjer til at dyrke netop disse strategier med endnu større styrke, hvilket vil fremgå af rapportens diskussion af lærerkvalifikationer og (efter)uddannelse, se afsnit 5.2.3.

Endelig nævner en respondent i lærerundersøgelsen den særlige udfordring, at "mange – særlig drenge – med flair for faget, tager den på talentet, indtil de er hægtet af". Denne pointe underbygges af en undersøgelse fra 2009 om drenge og matematik, som viser at en tendens til at drenge forbereder sig mindre end pigerne. Mange har kunnet klare sig i grundskolen uden forberedelse, og særlig drengene har svært ved at omstille sig til gymnasiet øgede krav (Bacher-Jensen et al., 2011). Disse elever skal holdes til og have en kontant og løbende bedømmelse af, i hvilket omfang talentet skal suppleres med en større arbejdsindsats. I den sammenhæng er det en udbredt praksis at man løbende tester eleverne på forskellig vis. Her angiver 25% af respondenterne i lærerskemaet, at de kunne ønske sig, at eleverne forløbene igennem kom til centralt stillede prøver, hvor resultatet talte som en del af den endelige skriftlige karakter. Dette kunne i praksis være jævnlige, centralt stillede multiple choice prøver, eller det kunne mindre radikalt bestå i at eleverne simpelthen skulle afslutte de enkelte niveauer (C og B) med en prøve, inden de gik videre til det næste niveau. Der er lavet forsøg med, hvad der er blevet kaldt modulopdelt eksamen på Borupgaard og Ørestad Gymnasium med 4 deltagende klasser med matematik på C-niveau, hvor konklusionen er at: "Modulopdelte evalueringer er på grund af dets tilbagevirkning på elevers motivation og systematiske feedback på læringsudbytte et vigtigt didaktisk redskab til at få alle med" (Miller et al, 2013). Der kan derfor være god mening i at gå videre med denne type forsøg og få undersøgt, hvad der virker og hvordan. Samtidig er det i lyset af den almene forskning vedr. evaluering grund til at være særlig opmærksom på elevernes behov for formativ feedback (Damberg et al., 2014, Del 5.1).

5.1.4 Mangelfulde matematikfærdigheder og kompetencer fra grundskolen

En ofte luftet hypotese om udfordringerne i matematik er, at de bl.a. skyldes utilstrækkelige resultater af den matematikundervisning som eleverne har modtaget i grundskolen. Der har igennem årene været gennemført en række udviklingsprojekter og undersøgelser, som forsøger at afdække og imødegå udfordringerne i overgangen fra grundskole til gymnasium i matematik (fx

projektet *Matematiklærernetværk – brobygning fra grundskole til gymnasium* fra Silkeborg; Ebbensgård et al, 2014; Lindenskov et al, 2009). Rapporterne viser tydeligt at både elever og lærere oplever overgangen som udfordrende. Mange elever oplever et stort spring ved overgangen, at matematikfaget skifter karakter og at der bliver stillet helt andre krav. Springet kan dog ikke forklares af fagets styringsdokumenter alene, idet der faktisk er en relativ god sammenhæng mellem fagbeskrivelserne i grundskolen og i de gymnasiale uddannelser. Det er i højere grad tilgangene til faget, som er forskellige på de to niveauer, hvordan rammerne for undervisningen fortolkes og forvaltes (Ebbensgård et al, 2015, p 71-72). En vigtig pointe fra (ibid.) er, at elevernes forudsætninger og oplevelser med faget i grundskolen er afgørende for deres tilgang og motivation i gymnasiet. Nogle elever oplever næsten uoverstigelige vanskeligheder i matematik allerede før de begynder i gymnasiet, og kan så være meget vanskelige at hjælpe. Grundskolen rummer i øvrigt selv overgange i matematikundervisningen hvor faget skifter karakter og kravene ændres markant. Overgangen fra indskoling til mellemtrin og videre til udskolingen er udfordrende for mange elever, og kræver særlig opmærksomhed. (ibid. p 76-77). Vi har ikke i denne udredning haft til opgave at se nærmere på folkeskolens matematikundervisning, men det foregående antyder i hvert fald, at en del af udfordringerne i gymnasiets matematik skal ses i sammenhæng med grundskolens matematikundervisning og dens betingelser.

Lærerundersøgelsen viser ikke overraskende en klar tendens blandt respondenterne (dvs. mere end 50% svarer 'for dårligt' eller 'næsten ikke') til, at de nye 1.g'ere ikke mestrer: basale regnefærdigheder, brøkgregning, potensregneregler, simpel ligningsløsning, reduktion af symboludtryk, modelleringsopgaver, læse matematikholdig tekst. Respondenterne er mere positive, hvad angår procentregning, samtale om matematik, parathed til at deltage aktivt i timerne og til at overholde deadlines. Tilsammen tyder disse vurderinger på, at det ikke alene er et uddannelsesparathedsproble, vi står med, men at det også drejer sig om færdigheder, som eleverne ikke mestrer. Sammenholdes dette med de tidligere beskrevne undersøgelser fra aftagere og nabofag (jf. Afsnit 2.5), så er gymnasiet ikke alene i stand til at overvinde disse mangler. Som en gruppe skriver i FiP-undersøgelsen om, hvad der er problematisk: "Basisfærdigheder: de kan det ikke på forhånd og selvom vi underviser i det, glemmer de det hurtigt". Vejledningerne til læreplanerne anbefaler da også, at grundlæggende færdigheder dyrkes som en del af de andre forløb, og ikke selvstændigt.

Det skal dog siges, at gymnasielærerne nævner, at de også modtager elever fra grundskolen som er endog meget godt klædt på, hvad basale færdigheder angår. Enkelte lærere beretter ydermere om elever, der kan løse andengradslikninger og bruge cosinusrelationen, hvilket naturligvis kan bidrage til et positivt spredningsproblem i 1.g i den forstand, at sådanne elever så ikke behøver undervisning i de emner – til gengæld opdager de ikke, at det er nødvendigt, at lave noget i matematik i gymnasiet.

Det er naturligvis let for gymnasielærerne at pege på, at nogle af deres udfordringer skyldes utilstrækkelige forudsætninger fra grundskolen – måske

særlig hvis lærerne ikke ved, hvilke forudsætninger man kan forvente hos eleverne. Derfor har vi spurgt lærerne om deres kendskab til folkeskolens matematikundervisning på de afsluttende trin. Vi har mere specifikt spurgt til hvorvidt de har gennemlæst Fælles Mål, observeret undervisning i grundskolen og gennemlæst de afsluttende prøver. Og når vi ser på de respondenter, der aktivt har opsøgt viden om grundskolens læreplan og praksis i matematik, så er de lige så lidt tilfredse med elevernes forudsætninger fra grundskolen som resten af respondenterne i lærerundersøgelsen.

I lærerinterviewene blev en elev citeret for at have forklaret, at vedkommendes folkeskolelærer sagde "det her behøver vi ikke lære jer, da I alligevel lærer det i gymnasiet" (Matematiklærer på STX, der citerer en 1.g-elev). Andre lærere i lærerinterviewene har berettet noget tilsvarende om, at lærerne i folkeskolen ikke mener, at det er nødvendigt at klæde eleverne på i de emner, som gymnasiet også berører. Betydningen og validiteten af sådanne udsagn er i sagens natur uklare, men følger sig alligevel til et billede af at der er potentiale i mere systematiske samarbejder mellem undervisere i de to skoleformer. Der kan derfor være en pointe i at se på de realiserede mål for grundskolens matematikundervisning og specielt sammenhængen mellem resultater fra folkeskolens afgangsprøve og præstation på forskellige niveauer i gymnasial matematik. For så vidt angår de tidligere omtalte grundlæggende færdigheder i aritmetik og skolealgebra, er der også grund til at se nærmere på brug af matematikværktøjsprogrammer på grundskolens ældste klassetrin.

Foruden udfordringen med grundlæggende færdigheder fra grundskolen, så peger udsagn fra vores fokusgruppeinterviews på samme pointe, som vi har nævnt fra tidligere overgangsprojekter, at det er i høj grad er forskellige former for matematisk fagsprog (ikke mindst skriftligt!), der rummer overgangsproblemer for eleverne. En del af udfordringen her kunne være, at en del lærere har manglende kendskab til elevernes forudsætninger fra grundskolen. I spørgeskemaundersøgelsen er det kun 19% af respondenterne, der selv har observeret undervisning i grundskolens udskoling – formentlig er andelen endnu mindre blandt samtlige lærere. I tidligere undersøgelser peges også på at mange elever, når de starter i gymnasiet, oplever at det de har lært i grundskolen er forkert, og at de skal lære tingene forfra. Når man ser på beskrivelserne af kernestof, faglige mål og Fælles Mål forekommer dette ikke rimeligt. Og hvis problemet skal løses effektivt, forudsætter det igen en mere systematisk samordning af udskolingens matematikfag og den gymnasiale matematik, fx gennem initiativer som (Matematikbroen, 2015).

5.1.5 Faglig læsning og skriftlighed

Et af de mere overraskende udsagn som fremkom ved fokusgruppeinterviews med lærere er, at der ikke længere arbejdes med elevernes evne til at læse matematiske fagtekster – end ikke sædvanlige lærebøger. Flere fortæller, hvordan de skriver sidetal fra lærebogsmaterialer ind i skolens elektroniske planlægningssystem (Lectio, fronter eller lignende), således at det fremgår af de automatisk genererede studieplaner, hvad der er gennemgået og hvornår. De forventer imidlertid ikke, at siderne er læst af eleverne til næste undervisningsgang. På HF er der kørt flere forsøg og initiativer med "lektiefri

HF", (*HF-projekt på Tønder Gymnasium*, 2011). Her er hensigten dog ikke at fritage elever fra at læse, men at dette skal være en del af undervisningen i klassen. Også andre skoler har tilsyneladende afprøvet dette med succes, fx (Hjorth et al, 2012).

Der er 33% af respondenterne i lærerundersøgelsen, som angiver "at det er svært at få eleverne til at læse matematiske tekster, hvorfor jeg ikke beder eleverne om at gøre dette". Krydser man dette svar med hvilken uddannelse respondenterne underviser på, ser det ud som om problemerne med læsning af matematisk tekst er mere udbredt på HF og HHX end på STX og HTX. Der er dog 27 HTX-lærere, ca. en tredjedel af respondenterne fra HTX, der svarer, at de ikke beder elever læse matematiske tekster. Sammenholdes dette med, at skriftlig eksamen delvist bygger på centralt stillet matematisk tekst, hvilken kunne formodes at øge opmærksomheden på læsning i undervisningen, forekommer ovenstående uhensigtsmæssigt. Det er ikke muligt ud fra lærerundersøgelsen at sige, om der er forskel på, om det i særlig grad er bestemte niveauer, der ikke trænes i at læse fagtekster. Men uanset om der er en forskel, er selve eksistensen og omfanget af problemet med læsning af matematisk tekst bemærkelsesværdig.

Sammenholder man respondenternes besvarelse af hvilket niveau som "presser dem mest" (dvs. hvilket niveau de oplever som mest udfordrende at undervise på) med gruppen, som ikke beder deres elever om at læse faglige tekster, så er det ca. en tredjedel på hvert niveau - dvs. der er ingen markant forskel ift. om generelt pres på et niveau afsætter sig i fravær af fokus på matematisk læsning. Selvom der ikke er matematisk tekst i lektierne hos alle elever, kan de selvfølgelig sagtens få erfaring med sådanne på andre måder. Fx viser vores elevundersøgelse, at de læser matematikholdige tekster, men at de i højere grad foretrækker tekster på nettet eller tekster af andre elever på samme niveau, da "vi forstår dem bedre end det vores lærer eller bogen skriver" (elev på STX). Man kan håbe, at det de finder så er af lodig kvalitet, men det kan formodes, at en del af det stof, som findes på internetfora mv., vil være mindre sammenhængende og typisk også længere fra fagets stringente standarder end de tekster, som typisk indgår i et gymnasialt pensum i matematik.

Af hensyn til læsere, som ikke til daglig arbejder med matematisk litteratur, gør vi nu et ophold i fremstillingen af empiri for kort at uddybe hvori problemet med læsning af matematikfaglige tekster består, og hvorfor det er en væsentlig komponent i matematikundervisning på gymnasialt niveau. Det er oplagt, at skal eleverne videre på en matematikholdig uddannelse efter den gymnasiale uddannelse, så giver det ikke mening, hvis ikke de har dyrket den slags læsning på forhånd. I den matematikdidaktiske forskningslitteratur er matematikfagets egenartede skriftlige udtryksformer et veldokumenteret tema (se fx Misfeldt, 2006; Iversen, 2014; Bosch, u.udg.). En hovedpointe er her, at matematisk tekst i modsætning til almindelig prosa (fx en roman) ikke kan "læses op" og dermed ikke kan opfattes som en skriftliggørelse af "mundtligt sprog". Den skriftlige fremstilling - fx af et algebraisk ræsonnement - er *primær* og typisk uomgængelig for tilgang til matematisk betydning. At læse og producere skriftlig tekst er derfor både mere fundamentalt, og samtidig fundamentalt forskelligt, fra læsning og skrivning i fx et humanistisk fag. Det er derfor vigtigt at matematikundervisningen arbejder systematisk med, at eleverne oparbejder

erfaring med gradvist mere "professionelle" matematiske tekster, både som et vitalt værktøj til selv at komme til at beherske elementære principper for matematisk skriftlighed, og som almindennende og studieforberedende forberedelse til at læse og bruge matematisk tekst i andre sammenhænge, både i videregående uddannelse og i arbejdslivet.

Vi vender os nu mod elevernes produktion af matematisk tekst, både i forbindelse med mindre og større opgaveafleveringer, og ved skriftlig eksamen. Her er et aktuelt hovedtema matematikværktøjernes muligheder og begrænsninger eller som Iversen (2014, p. 261) formulerer det: "skriveredskaber er aldrig neutrale [...] derfor bør et 'naturligt' fokus [være] på brugen af it som medie for skrivning". I vore lærerinterviews kommer lærerne flere gange ind på samspillet mellem matematikværktøjsprogrammerne og skriftlighed, og nabofagsundersøgelse viser en direkte frustration over, at eleverne afleverer "Mapledokumenter" (dvs. filer, som er skrevet og kun kan læses i CAS-værktøjet Maple). De mener dels, at "eleverne mister overblik med Maple" og, at det kan "koste en hel karakter" (Lærer i et naturvidenskabeligt fag på HTX) i andre fags skriftlige eksamener at bruge et matematikværktøjsprogram, fordi eleverne har en utilstrækkelig evne til at formidle deres arbejde gennem sådan et værktøj. Udredningens data giver dog ingen mulighed for at bedømme betydningen eller omfanget af dette problem, men der er næppe tvivl om, at den omfattende brug af matematikværktøjsprogrammer ifm. det skriftlige arbejde stiller nye krav til bevidst og systematisk at arbejde med kvalitet og stringens af elevernes skriftlige fremstilling i matematik, og dermed for både klare retningslinjer (fx vedr. genrekrav til besvarelse af eksamensopgaver) og nye muligheder for vidensdeling og efteruddannelse (for lærerne).

I forbindelse med elevernes skriftlige arbejde er betydning og brug af feedback fra lærerne også et væsentligt tema. Af FiP-undersøgelsen fremgår det, at eleverne opleves som "udelukkende fokuserede på karakterer og læser derfor ikke kommentarerne, som faktisk der dem, der er med til at kunne udvikle deres arbejde". Andre skriver blot, at en væsentlig udfordring for lærerne er "feedback strategien og omlagt skriftlighed" (det sidste hentyder til en brugen af tid, som ellers var afsat til rettelarbejde, på direkte vejledning af elevernes skriftlige arbejde). I den sammenhæng skriver lærerne i lærerundersøgelsen, at væsentlige kilder til pres på deres arbejde er "for lidt tid til at rette opgaver", "opgaveretningen skal effektiviseres for at holde normen", "er MEGET presset på skriftlig retur" etc. Disse og lignende udsagn skal ses i lyset af den store betydning som skriftlig eksamen har på B- og A-niveauerne, kombineret med reduktioner og omlægninger af den tid, som er afsat til at give skriftlig feedback på opgaver.

Ser man på respondenternes angivelse af *rettestrategier* i lærerundersøgelsen, så giver 84% kommentarer til afleveringernes enkeltelementer, 72% retter med "flueben og røde streger", 81% gennemgår de opgaver på klassen som mange har haft svært ved, og 58% udleverer efterfølgende en eksemplarisk besvarelse af afleveringen. 37% af lærerne gennemgår opgaver, der ligner afleveringsopgaverne i den periode, hvor eleverne skal udarbejde afleveringen,

hvilket måske understøtter elevernes udvikling af skabeloner. Det skal siges, at lærerne har her skullet svare på, hvilke strategier de bruger mere end 6 gange årligt, så det er ikke nødvendigvis strategier som anvendes meget ofte. Yderligere svarer 63% af respondenterne, at de arbejder med skriftlighed i moduler med omlagt elevtid (skriftlighedsmoduler), 37% arbejder med video- og lydafleveringer og endelig angiver 23% at de lader eleverne genaflevere udvalgte opgaver. Der synes altså at være et broget billede af hvilke strategier og evalueringsmetoder lærerne anvender. Flere lærer efterlyser efteruddannelse i netop arbejdet med at vejlede og evaluere elevernes skriftlige arbejde i matematik.

5.2 Hvad er de reelle kompetencer blandt matematiklærerne?

Vi vil i dette afsnit forsøge at give et bud på hvem, der i disse år ansættes på gymnasier, hvordan rektorerne sikrer at de nyansatte matematiklærere har de fornødne kompetencer, og hvilke efteruddannelsesmuligheder lærerne peger på som ønskelige eller nødvendige.

I forhold til de nyansatte læreres uddannelsesbaggrund er visse formelle præciseringer relevante. Der er med universitetsloven fra 2004 fastsat nogle faglige mindstekrav for at opnå undervisningskompetence i en række fag, herunder matematik (Faglige mindstekrav, 2006). Undervisningskompetence i matematik forudsætter således, at man har taget universitetskurser af et bestemt omfang indenfor forskellige dele af faget. Konkret drejer det sig om 60 ECTS kernestof indenfor områderne calculus, matematisk analyse, geometri, lineær algebra, algebra, sandsynlighedsteori og statistik (hvert af de 6 områder med "nogenlunde" samme vægt), hvortil kommer dybde- og breddestof à ca. 20 ECTS (indenfor ovenstående områder samt matematisk modellering og matematikkens historie). Har kandidaten ikke et andet naturvidenskabeligt fag, er kravet op til 90 ECTS-point. Hvorvidt en kandidat til et gymnasielærerjob har undervisningskompetence i flg. retningslinjer (2006) afgøres af den ansættende skoles rektor, som kan rådføre sig med Undervisningsministeriets fagkonsulenter, der kan rådføre sig med et universitært matematikmiljø.

Udover at opfylde de faglige mindstekrav, skal de nyansatte også gennemføre pædagogikum. Det er dog muligt at fungere som timelærere eller årsvikar (ikke fastansat) uden at have eller være i pædagogikum. Det har i årtier været kendt, at det kan være vanskeligt at finde kvalificerede kandidater til matematiklærerstillinger i gymnasiet, og kandidater med andre baggrunde end den almindelige universitetsuddannelse med hoved- eller sidefag i matematik, finder derfor ansættelse i et vist omfang, idet opfyldelsen af de faglige mindstekrav naturligvis fortsat skal sikres. Der er således oprettet kurser for ingeniører og økonomer mhp. at supplere disses uddannelse ift. de faglige mindstekrav i matematik. Foreningen Danske Gymnasier bekræfter, at der er en rekrutteringsudfordring – særligt i matematik og naturvidenskabelige fag (Wissing, 2008). Den massive mangelsituation var allerede forudsagt i en rapport 10 år tidligere (Undervisningsministeriet, 1999).

5.2.1 Lærernes faglige kompetencer

I lærerundersøgelsen har vi spurgt ind til lærernes primære uddannelsesmæssige baggrund. Samlet set er der 36% af lærerne, der har et hovedfag i matematik, mens 38% et sidefag. Man kan næppe heraf slutte, at hele 26% hverken har en universitetsuddannelse med hoved- eller sidefag i matematik (fx kan betegnelserne variere over tid, fx hed sidefag tidligere bifag) men nok, at der er et betydeligt mindretal af lærere med andre primære uddannelsesbaggrunde. Ser man på de lærere med 5-10 års undervisningserfaring på gymnasialt niveau, har 30% et hovedfag og 47% et sidefag. Vi vurderer, at det væsentligste her er tendensen til, at færre af de yngre lærere har hovedfag i matematik, ligesom man (bl.a. på basis af erfaringer fra universitetsuddannelserne) kan formode, at der er en vis stigning i sidefagskandidater, som har hovedfag udenfor den naturvidenskabelige fagrække.

Andelen af respondenter hvis hoveduddannelse kommer fra andre matematikholdige områder end de naturvidenskabelige basisfag, fx ingeniørvidenskab eller økonomi, dækker generelt set 25% - de er hovedsagligt ansat på HHX og HTX. Blandt dem med 5-10 års erfaring udgør denne gruppe 32%, og der er grund til at formode, at denne gruppe faktisk vokser. Der er naturligvis ingen formelle problemer i denne vækst under forudsætning af, at kandidaterne supplerer deres primære uddannelse, så de opfylder de faglige mindstekrav. Dette er relevant at undersøge for dem, der er blevet ansat indenfor de seneste 10 år, hvor de nuværende regler har været gældende. I den periode har 25% af sidefagskandidaterne, 47% af ingeniørerne, 67% af økonomerne og 24% af dem med en anden naturvidenskabelig grad været til faglig supplerings på universiteterne for at opnå undervisningskompetence. Mellem 3% og 10% af respondenterne (i lærerundersøgelsen) i hver gruppe ved ikke, hvorvidt de har været igennem dette. Det kan måske undre, at lærere med sidefag (og også enkelte med hovedfag) har været på fagsuppleringen, men det kan sagtens forklares af, at de har valgt kurser på deres uddannelse uden en gymnasielærerkarriere for øje, og derfor har manglet at dække enkelte områder. Meget mere overraskende er det, at fx under halvdelen af lærere med en ingeniørbaggrund har suppleret, idet ingeniørstudier næppe nogensinde opfylder de faglige mindstekrav, og man kan sige noget tilsvarende om økonomer, der dog i højere grad supplerer. Der skal dog tages en række forbehold: nogle af tallene kan dække over lærere, der har merit fra tidligere påbegyndte uddannelser, hvor de kan have taget relevante matematikkurser. Men generelt giver materialet alligevel anledning til bekymring for, i hvilket omfang det håndhæves at lærerne opfylder, hvad der svarer til de faglige mindstekrav. Og dermed hvorvidt alle matematiklærere fortsat har den faglige basis (både i bredde og dybde) som anses for nødvendig på en gymnasial uddannelse.

Situationen er oplagt en konsekvens af, at der ikke har været gjort noget effektivt og centralt for at fremme og udvikle uddannelsen af gymnasielærere i matematik, både ift. at styrke relevant optag og profilering af universitetsuddannelserne, og ift. at sikre rekruttering og kompetencesikring på gymnasieskolerne.

Rektorundersøgelsen viser, at det er 63% af respondenterne, der har sendt 0-5% af de ansatte uden et side- eller hovedfag, på faglig supplerings. 11% af respondenterne sender 75-100% af denne gruppe af sted. Da vi ikke ud af tallene kan sige præcis, hvor stort et antal dette drejer sig om, er det svært at give en klar vurdering af om praksis på skolerne, svarer til de officielle krav. Det man imidlertid kan sige ud fra rektorundersøgelsen er, at 32% af respondenterne siger, at de slet ikke eller kun delvist kender de faglige mindstekrav. Resten af rektorerne angiver, at de altid vurderer ansøgere på baggrund af mindstekravene. Dette kan de gøre med faglig sparring fra Undervisningsministeriet eller fagpersoner på skolen. Alligevel indberetter tilsynsførende pædagogikumkandidater til Undervisningsministeriet som de finder tvivlsomme – og dem uden pædagogikum underviser typisk helt uden en ekstern vurdering af de faglige kvalifikationer.

Samlet set tegner der sig et billede af, at det kunne være meningsfyldt at sikre at kompetencevurderingen varetages af enten kompetente instanser ved universiteterne eller, at en ansættelse kræver en konkret vurdering af Undervisningsministeriet. Rektorundersøgelsen viser ikke noget foruroligende ift. hvor mange (og kvaliteten af de) årsvikarer som skolerne ansætter fra år til år. Men rekrutteringsproblematikken ift. at skaffe kvalificerede matematiklærere synes at være voksende. Af rektorundersøgelsen fremgår, at for 15% af respondenterne er det blevet lettere at finde kvalificerede ansøgere siden 2005, 40% mener ikke, at det har ændret sig og endelig mener 45% at det er blevet sværere at finde kvalificerede ansøgere de sidste 10 år. Årsagerne til dette kender vi ikke, men vi kan dog se, at det ikke i udpræget grad er et provinsproblem.

Rekrutteringsproblematikken vil fortsætte så længe der ikke iværksættes sådanne tiltag, ja, de vil forstærkes: 23% af respondenterne i lærerundersøgelsen forventer ikke selv at være gymnasielærer om fem år. Langt de fleste angiver alder som grund, mens andre respondenter angiver grunde som "kun hvis jeg ikke kan finde noget andet interessant", "så er jeg forhåbentlig kun en del af ledelsen" og "jeg vil gerne prøve at have et rigtigt arbejde en gang" og "er ansat ved siden af mit studie som BA oecon., og er ikke interesseret i at være lærer" (fritekstsvar fra lærerundersøgelsen). Det skal for en ordens skyld fremhæves, at den største del af respondenterne er meget begejstrede for deres job og ikke ønsker andet; men en afgang på omkring 20% vil ikke desto mindre være alvorlig, så der er også grund til fokusere på fastholdelse af matematiklærere i gymnasiet. Det er muligt, at kompetenceproblematikken (som omtalt ovenfor) også spiller sammen med fastholdelse, idet tilstrækkelige kompetencer må formodes at styrke tilbøjeligheden til at forblive i professionen.

5.2.2 Hvordan vurderes lærernes arbejde?

En væsentlig del af lærernes praksisbetingelser er, hvordan de oplever, at ledelsen vurderer deres arbejde. Som en lærer sagde i lærerinterviewene: "Nu har jeg lige været på [fagdidaktisk] kursus for erfarne lærere og kan godt se, at jeg skal lave min undervisning helt om. Men hvorfor ændre noget der virker? Jeg får gode evalueringer fra eleverne, de klarer eksamen godt og ledelsen er glade"

(Matematiklærer på STX). Det er naturligt, at lærerne ikke ændrer en praksis, som ledelsen udtrykker tilfredshed med. Men dels har vi andre steder i rapporten gjort rede for, at ledelsernes fokus på eksamensresultater, og især de skriftlige eksameners faktiske krav, kan fremme en undervisningspraksis hvor træning af typeopgaver og skabeloner spiller en fremtrædende rolle - en situation som nogle lærere selv peger på som utilfredsstillende. Lærerne fortæller, at eleverne selv efterspørger skabeloner og hvordan den enkelte undervisningsgang kan bruges til eksamen. De uddyber med udsagn som, at der er en del elever, der er "dårlige til at være i det eksperimentelle rum, da de vil gå den lige vej" (Matematiklærer STX og HF). På denne baggrund forekommer det forståeligt, at lærerne i deres undervisningspraksis vægter eksamensforberedelse højt, og at eleverne også oplever, at det er hvad der sker.

I rektorundersøgelsen bekræftes og nuanceres ovenstående tendens fra ledelsesside. Fx vurderer 51% af rektorerne den enkelte lærer ved at sammenligne lærerens holds afsluttende eksamenskarakterer med landsgennemsnittet, men der er også andre faktorer, som kan spille ind, fx klager fra elever, forældre eller kolleger. Det er også bemærkelsesværdigt godt, at 72% af rektorerne afholder faglige samtaler med lærerne, og at 70% baserer denne samtale på observation og diskussion af konkret undervisning, som et værktøj i den faglige ledelse og sparring.

5.2.3 Lærernes ønsker til egen udvikling

Det store flertal af lærerne vurderer, at de besidder de fornødne matematikfaglige kompetencer til at undervise i gymnasiet. Der er dog 14%, der ikke føler sig "rimeligt" eller "meget godt" klædt på til at undervise i matematik på A-niveau, mens de tilsvarende tal er 4% på B-niveau og 9% på C-niveau. Det er derimod kun mellem 50 og 60%, der føler sig rimeligt eller meget godt klædt på matematikdidaktisk og pædagogisk. Hvorvidt det forholder sig sådan i det samlede lærerkorps er svært at sige, idet det skal erindres, at 37% besvarede lærerundersøgelsen fuldt ud (og 13% afgav det meste af en besvarelse); dertil kommer, at der her (i sagens natur) alene gives udtryk for selvoplevede behov. Der er dog også andet belæg for at hævde, at en del lærere efterlyser redskaber og viden, der er tæt koblet til undervisningsfagligt indhold i matematik og til tilrettelæggelse af matematikundervisning. Det fremgår især af lærernes udtrykte behov for efteruddannelse, som vi vender tilbage til i næste afsnit. Adspurgte om de fagområder, lærerne har taget undervisningsrelaterede kurser i ved et universitet (enten i hoveduddannelsen eller efterfølgende), svarer 52% matematikkens historie, 32% matematikdidaktik og 28% almen pædagogik. Når vi ser på respondenter, der har under 15 års erfaring i gymnasiet, er der dog langt flere respondenter (mere end 70%), som har haft sådanne kurser, hvilket kan forklares med udviklingen af de faglige mindstekrav og pædagogikum. Men for lærerkorpsen som helhed er hovedindtrykket altså, at lærernes ønsker og behov vedr. faglig udvikling hovedsageligt ligger i disse områder.

Dette leder naturligt til at se på, hvilket udbytte de nyuddannede lærere har af pædagogikum. Allerede lærerinterviewene viste fællestræk i lærernes vurderinger heraf, og på basis heraf, blev det undersøgt meget bredere i lærerundersøgelsen. Det mest iøjnefaldende er, at lærerne oplever størst udbytte

af praktisk pædagogikum. Særligt de lærere, der som følge af tidligere ordninger eller på grund af særlige omstændigheder, har haft mere end én vejleder i praktisk pædagogikum angiver, at refleksionen over anbefalinger, kommentarer på egen undervisning samt observation har været mest givtig ift. egen praksis. Ellers beskriver flere deres første erfaringer med klasserummet som, at de "føjte sig taget med bukserne nede" (Matematiklærer på HHX), fx fordi de havde forberedt en forelæsningspræget undervisning, som slet ikke fungerede. På denne baggrund kan sparringen med en eller flere erfarne vejledere give helt afgørende input til deres udvikling som lærere, specielt i forhold til at planlægge undervisning, udforme opgaver osv.

Vi har i lærerundersøgelsen undersøgt, hvor ofte de har brugt teoretiske værktøjer, som de lærte i pædagogikum. 35% bruger dem mindst en gang om ugen, 14% bruger dem en gang om måneden og 28% bruger dem endnu sjældnere. Endelig svarer 11%, at de slet ikke bruger dem. Disse tal ændrer sig ikke væsentligt, når man kun ser på dem, der har mindre end 10 års undervisningserfaring i gymnasiesektoren og dermed har været i pædagogikum for nylig – der er i øvrigt kun 7% af denne gruppe som endnu ikke har været i pædagogikum. Det er selvsagt svært at vide præcis, hvad respondenterne lægger i det at bruge den teoretiske viden fra pædagogikum, men for de fleste tyder svarene på, at det teoretiske indhold af pædagogikumuddannelsen ikke får en varig og central rolle i deres undervisningspraksis.

Ovenstående er blevet bekræftet af lærerinterviewene, hvor pædagogikum får en del kritik – i øvrigt uafhængig af hvilken ordning, lærerne selv har haft pædagogikum under. Det fremhæves, at almindelen er præget af svært tilgængelige tekster og "at man hver gang skal læse 200 sider, for kun for alvor at bruge de to på kursusdagene" (Matematiklærer på HTX). En enkelt peger dog på at definitionen af forskellige elevtyper og hvilken slags undervisning, der appellerer til dem "har været en øjenåbner" (Matematiklærer på HHX). De fagdidaktiske kurser vurderes mere positivt, idet lærerne bliver præsenteret for værktøjer, som opleves som brugbare i egen praksis. Ovenstående holdninger genfindes i øvrigt i evalueringen af den nye pædagogikumordning fra 2009 (EVA, 2013). Fx hedder det deri om teoretisk pædagogikum, at "teksterne havde for højt et niveau i forhold til kandidaternes forudsætninger, mens andre igen mente, at navnlig formidlingen af stoffet kunne forbedres og gøres mere praksisrelevant og med fokus på eksemplarisk undervisning" (EVA, 2013, p. 51). På den anden side skrives om de fagdidaktiske kurser, at disse "nævnes da også af både kandidater og tilsynsførende som de fra kandidaternes perspektiv mest relevante kurser [...] at kurserne gav dem en værktøjskasse, som de kunne tage direkte med hjem og anvende i deres egen undervisning" og yderligere er det praksisnære workshops som valg af arbejds- og tilrettelæggelsesformer, der vurderes mest givende (ibid. p. 53). Det nævnte mønster er således ikke specifikt for matematiklærere.

Det interessante er at overveje, hvilke typer af teoretisk uddannelse og efteruddannelse, som kan bygge bro mellem den primære universitetsuddannelse i (hovedsagelig) akademisk matematik, og professionen

som matematiklærer i gymnasiet, og også hvad det mere præcist er for teoretiske værktøjer, som lærerne selv vurderer, har bidraget til deres praksis. I Tyskland rummer afslutningen af uddannelsen såkaldte stofdidaktiske kurser, der netop er med til at understøtte kandidatens brug af teoretisk viden fra matematik i undervisningen i gymnasieskolen. Denne transposition af fagets teoriblokke er på ingen måde en enkel opgave, hvorfor lærernes ønske om uddannelse i netop dette må anses for velbegrundet. Dette vil yderligere understøtte lærernes tilrettelæggelse af differentieret undervisning, der kan ramme den enkelte elevs niveau. Dette handler i matematik ikke blot om undervisningsdifferentiering som pædagogisk redskab, men om at designe undervisningsindhold på forskellige teoretiske niveauer. En af udfordringerne i klare retningslinjer for, hvad gymnasielærernes uddannelse bør rumme, kan knyttes til den ikke helt ensartede opfattelse af, hvad fagdidaktik og specielt matematikdidaktik egentlig dækker over, jf. (Gymnasiepædagogik, p. 225-289). Af alle disse grunde bør det overvejes at sammentænke universitetsstudium og pædagogikum på nye måder, så der bliver bedre overgange og sammenhæng mellem uddannelse og profession. Der er behov for en mere indgående undersøgelse af styrker, mangler og behov i den samlede uddannelse af matematiklærere til gymnasiet, end det har været muligt at gennemføre indenfor rammerne af denne udredning. Men det er klart, at ser vi på pædagogikum isoleret set, så har lærervurderingen af de teoretiske (og særlig de almene) elementer været konstant kritiske, og det for flere pædagogikumordninger. Ved en fornyelse af ordningen bør man overveje en mere gennemgribende nytænkning af sammenhængen mellem gymnasirelevante kandidatuddannelser og pædagogikum, med en stærkere sammenhæng mellem teoretiske og praktiske elementer.

5.2.4 Hvilken efteruddannelse har lærerne taget og hvilken efterspørger de?

Hvis lærerne helt frit kunne vælge efteruddannelse ville 51% på kursus i "konkrete idéer til matematikundervisning i praksis". En lærer eksemplificerer det i et fritekstsvar i lærerundersøgelsen med et emne som "teoretisk baggrund for chi-i-anden tilpasset gym-lærer-forudsætninger [...] der kan bruges i undervisningssammenhæng", mens en anden nævner "matematik i programmering, dvs. en kombination af nyere matematikhistorie og anvendt matematik". Det er altså ikke i hovedsagen et spørgsmål om, at lærerne mangler teoretisk viden om fx chi-i-anden test. Lærerne mangler derimod viden om, hvordan de omsætter deres universitetsviden til viden på det niveau eleverne skal og kan lære det - altså om hvordan matematisk universitetsviden omsættes i undervisning på gymnasialt niveau. Et ønske om kurser og uddannelse i dette formuleres særligt i besvarelserne fra FiP-undersøgelsen med formuleringer som: "Det ville være godt med mindre forløb [på universitetsuddannelsen], hvor man skulle formidle noget matematisk stof til given målgruppe", en anden gruppe skriver: "I pædagogikum: alt for lidt fagdidaktik og alt for meget teoretisk pædagogik" og endelig efterlyser en gruppe en decideret uddannelse: "Vi savner en linje på universitetet målrettet studerende, der vil være gymnasielærere [...]". 48% af respondenterne nævner anvendt matematik som noget, de ønsker efteruddannelse i og eksemplificerer det bl.a. med matematikanvendelser i biologi fx Hardy-Weinberg-loven, samfundsfags toning med Gini-koefficienter, og koblede differentialligninger i fysik. Det tredje emne, som efterspørges, er kurser

i matematikdidaktik, angivet af 39% af respondenterne; enkelte respondenter præciserer, at disse skal være "forskningsbaserede". I forlængelse af hele diskussionen om matematikværktøjsprogrammer er der 32% af respondenterne, der gerne vil på et "IT-didaktisk kursus i begrebsindlæring med matematisk værktøjsprogrammer, herunder CAS". Endelig vil 20% gerne på rene matematikfaglige kurser og blot 7% ønsker kurser i almen pædagogik. Ser man alene på de lærere, der har 5-10 års erfaring (dvs. særligt dem, der er uddannet i pædagogikum på 2009-ordningen), så er ovennævnte tendenser endnu stærkere. Det skal her nævnes, at der i lærerundersøgelsen blev givet en konkret definition af såvel matematikdidaktiske som almenpædagogiske kurser (hvh. kurser i, hvordan man specifikt underviser i matematik og kurser i, hvordan man tackler forskellige elevtyper, anvender forskellige ressourcer og andet uden eksplicit tilknytning til det faglige indhold).

Formen på efteruddannelseskurser blev også diskuteret i lærerinterviewene. Det klassiske kursus, hvor man deltager lyttende i kursusaktiviteter, og efterfølgende selv skal skabe tid og rum for udmøntning i egen undervisning, synes for de fleste *ikke* at være en attraktiv model, hvorfor nytænkning af formerne efterspørges.

De relativt få, der efterspørger pædagogiske kurser i lærerinterviews og lærerundersøgelsen, argumentere med behov for bedre at håndtere elever med særlige udfordringer. Det er dog langt flere af lærerne, der kender til sådanne udfordringer. Således siger 53% af respondenterne i lærerundersøgelsen, at problemer i elevers privatliv spiller en stadig større og negativ rolle i forhold til deres undervisningspraksis. Lærerne "føler sig ikke klædt på til socialrådgiverfunktionerne" (Matematiklærer på HHX). På alle skoleformer rapporteres der om, at en stadig større del af matematiklærerjobbet påvirkes af sådanne problemer, da matematik er et fag med mange uddannelses timer, hvorfor matematiklærerne ofte indgår i teamfunktioner for de enkelte klasser. Nogle lærere siger, at de simpelthen er nødt til at ignorere den slags. Lærerne anser problemerne som noget, der ligger udenfor faget og som ikke kan løses med pædagogisk opkvalificering af dem selv. At tage hånd om elevers private problemer, der vanskeliggør læring af fagene, mener lærerne primært burde varetages af andre med indsigt i den slags – ikke matematiklæreren.

Vi har undersøgt, hvilke kurser lærerne har deltaget i de seneste år. Her viser det sig, at 47% har været på matematikfaglige kurser i regi af deres faglige forening (dette gælder ikke HTX, der ikke har en fungerende faglig forening p.t.), 38% har været på faglige kurser arrangeret af egen skole, 30% har været på pædagogiske kurser arrangeret af egen skole og 28% har været på fagdidaktiske kurser i regi af deres faglige forening. Endelig har 15% slet ikke været på kurser indenfor de sidste 5 år. For 68% af respondenterne har efteruddannelsen været efter eget ønske. 4% svarer, at det har været påkrævet af ledelsen. 48% af respondenterne ved ikke, hvor meget tid deres skole reserverer til efteruddannelse og opkvalificering af dem selv som lærer. Dette kan naturligvis dække over, at skolen vurderer den enkelte forespørgsel separat, uden faste og fælles rammer. For 75% af lærerne er faggrupperne et væsentligt forum for den faglige sparring og udvikling. I rektorundersøgelsen viser det sig, at 47% af skolerne, sætter tid af

til faggruppearbejde og vidensdeling, men at det er faggruppen selv, der tager initiativ til, hvordan den udmøntes i praksis. 24% af rektorerne siger, at faggruppemøder skemalægges og organiseres af ledelsen, imens 22% siger at det organiseres af faggruppen selv med mindst to møder årligt. Endelig siger 7%, at lærerne selv forventes at strukturere deres arbejdstid, inklusiv vidensdeling med kolleger.

Lærerne deler ydermere viden med kolleger i mange andre sammenhænge. For 88% af respondenterne sker det således over frokosten med kollegaerne, 36% nævner LMFK-bladet, 29% peger på Facebookgruppen for matematiklærere i gymnasiet, 27% fremhæver de faglige foreningers regionalmøder, og endelig bruger 26% deres andre netværk fx fra studietiden. Det fremgår altså af lærerundersøgelsen, at lærernes faglige udvikling og opkvalificering i høj grad sker i andre og mere uformelle sammenhænge end kurser og faggrupper. Kvaliteten af sparringen i uformelle sammenhænge er selvfølgelig vanskeligere at styre og vurdere.

Som en lærer konstaterer under lærerinterviewene: "det er omkostningsfrit at diskutere Maple-kommandoer over frokosten sammenholdt med, hvordan man ellers laver sin undervisning". Generelt har vi ikke data, der tyder på, at mange samarbejder direkte om undervisning, men det er almindeligt at dele materialer og idéer til undervisningsforløb, diskutere rækkefølgen af emner osv. Der er dog to respondenter i lærerundersøgelsen, der skriver at de deltager i fælles forberedelse af moduler og en anden svarer, at inspirationen hentes fra "to-lærer-forløb". Mere systematiske former for lærersamarbejde i direkte tilknytning til undervisningsforløb er afprøvet i flere ministerielle forsøg (fx Hjorth et al., 2012 & Ulriksen et al., 2013).

Der rapporteres dog fra de erhvervsgymnasiale uddannelser om utilstrækkelige muligheder for faggruppearbejde på skolerne, som angiveligt skyldes, at skemalægningen ikke muliggør fælles faggruppemøder. På HTX mangler der tilsyneladende en organisering af matematiklærerne (en faglig forening) og fagkonsulenten spiller således en stor rolle ift. at give lærerne faglige ideer og inspiration udefra. Det nævnes også, at uenigheder om bedømmelse af præstationer til dels kan skyldes manglende kommunikation på tværs af matematiklærerkorpset. Man kan håbe, at et tiltag som FiP bløder op på dette.

Som afrunding på kapitlet vil vi opridsse nogle hovedtræk i vore observationer. Samlet set tegner, der sig et billede af at matematiklærerne er under stærkt pres fra elever, ledelser og eksamensopgavernes udformning, og dette pres resulterer i et stærkt fokus på, at eleverne klarer visse typeopgaver godt, under intensiv brug af matematikværktøjsprogrammer. Dette hindrer tilsyneladende fokus på opfyldelsen af andre (fx bredere eller mere teoretiske) matematikfaglige mål, og lærerne efterlyser da også ideer og viden om hvordan man kan motivere, differentiere og løfte eleverne fagligt og på andre måder end ift. de skriftlige eksamensopgaver. Lærerne giver udtryk for, at jobbet forudsætter omstillingsparathed ved reformer, og de er også villige til at tilpasse og udvikle deres praksis, men efterspørger viden og værktøjer som er specifikt relevante for matematik. Der er altså på mange måder grobund for positiv udvikling, hvor

rammerne for matematikundervisningen justeres, så der skabes større sammenhæng mellem mål og evalueringsformer, og lærerne gives de nødvendige ressourcer i form af relevant efteruddannelse og vidensdeling. I et videre perspektiv bør uddannelse og efteruddannelse af lærerkorpset gentænkes mhp. at skabe større sammenhæng mellem relevant teoretisk baggrundsviden (herunder ikke mindst matematikfaglig viden) og de praktiske opgaver og udfordringer som matematiklærere løser i den daglige undervisning.

6 Referencer

6.1 Refererede kilder.

Bacher-Jensen, Crilles; Iversen, Steffen M.; Laursen Kjeld B, Ulriksen, Lars (2011). *Gymnasiets drenge – Matematikfagets drenge*, rapport fra et FoU-projekt, UVM 126152; https://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=156356

Bacher-Jensen, Crilles; Iversen, Steffen M.; Laursen Kjeld B, Ulriksen, Lars (2012). *Dovne drenge eller dødbringende matematik?* Tidsskriftet MONA 2012-1; http://www.ind.ku.dk/mona/2012/MONA2012-1-DovneDrengeEllerD_dbringendeMat.pdf (hentet 19.06.2015)

Barquero, B.; Bosch, M. & Gascón, J. (2009). *The 'ecology' of mathematical modeling: constraints to its teaching at university level*. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lyon (France).

Bosch, M. (u. udg.). *Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra*. In S. J. Cho (Ed), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. New York: Springer.

Christensen, Brian Krog (2012). *Brobygning i Silkeborg*, i LMFK-bladet 1-2012; http://www.lmfk.dk/artikler/data/artikler/1201/1201_04.pdf

Dahl, Bettina (2009). *Case 5: Progression i matematiske kompetencer? En analyse af systemforventninger for matematik i overgangene mellem grundskolen, det almene gymnasium og universitetet*; i Mathiasen, Helle et al: *Overgangsproblemer som udfordringer i uddannelsessystemet*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet. http://pure.au.dk/portal/files/41902239/Udfordringer_rapport_17_06_2009.pdf

Damberg, Erik et al. (red., 2013). *Gymnasiepædagogik*, Hans Reitzels Forlag, København 2013

Danmarks Evalueringsinstitut (2013). *Evaluering af pædagogikumordningen fra 2009*; <https://www.eva.dk/projekter/2012/evaluering-af-paedagogikum/projektprodukter/evaluering-af-paedagogikumordningen-fra-2009>

Ebbensgaard, Aase B; Jacobsen, Jens Christian; Ulriksen, Lars (2014). *Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk*, IND's skriftserie nr. 37, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet; http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2014-37/

Faglige mindstekrav (2006). *Faglige mindstekrav - Retningslinjer for universitetsuddannelser rettet mod undervisning i de gymnasiale uddannelser*, 2006; <https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=29265>

FiP (2015). Faggruppeudvikling i Praxis: Matematik.
<http://www.emu.dk/modul/faggruppeudvikling-i-praksis-matematik>

Gravemeijer, K. (1998). *Solving word problems: A case of modelling?* I: Learning and Instruction, vol. 7, p. 389–397

Hansen, H.C. et al. (2011). *Moderne matematiske færdigheder fra skolestart til studiestart*, Et udredningsarbejde finansieret af Undervisningsministeriet 2010-2011, https://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=162957

HF-projekt på Tønder Gymnasium (2011). <http://www.toender-gym.dk/index.php?lektiefrit-hf>

Hjorth, Sarah; Nielsen, Hanne & Hjorth, Mikkel (2012). Læsning af matematikfagtekster i gymnasiet. Identificering af gymnasiefremmede elevers læsevanskeligheder og udvikling af metoder til forbedring af læsestrategier, MONA, 2012-1, 46-65.

Iversen, Steffen Møllegaard (2014). *Skrivning og skriveudvikling i de gymnasiale matematikfag*, Ph.d.-afhandling, Institut for Kulturvidenskaber, Syddansk Universitet; <http://www.gymnasieforskning.dk/skrivning-og-skriveudvikling-de-gymnasiale-matematikfag/>

Jessen, B. E.; Kjeldsen, T. H. & Winsløw, C. (2015). *Modelling: from Theory to Practice*. I: Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (In press).

Lindenskov, Lena; Enggard, Karsten; Andersen, Annemarie Møller & Sørensen, Helene (2009). Case 2: Progression i matematik og naturvidenskab fra grundskole til stx – hvordan kan det blive helt forkert i gymnasiet at bruge det, man har lært? I: Mathiassen, Helle et al: Overgangsproblemer som udfordringer i uddannelsessystemet. Forskningsrapport, Aarhus Universitet; http://pure.au.dk/portal/files/41902239/Udfordringer_rapport_17_06_2009.pdf

Lyndrup, Olav (2015). *En erfaringsopsamling – brug af it i matematikundervisningen på stx og hf*, DASG og Matematiklærerforeningen, http://science-gym.dk/evaluer/Erfaringsopsamling_Brug_af_IT_i_mat.pdf

Mainz, Pernille (2015). *Gymnasieelever bruger Facebook til eksamenssnyd*. Politiken 7. juni, 2015.
<http://politiken.dk/indland/uddannelse/ECE2703693/gymnasieelever-bruger-facebook-til-eksamenssnyd/>

Mainz, Pernille (2015). *Elever: Snyder er fristende for mange*. Politiken 8. juni, 2015, politiken.dk/indland/ECE2704084/elever-snyder-er-fristende-for-mange/

Matematikbroen (2015). Udviklingsprojekt om overgang fra grundskole til gymnasium 2015-2016. <http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med-grundskolen/matematikbroen/> ;
<http://www.ind.ku.dk/projekter/matematikbroen/>

Miller, Tanja et al. (2013). *Modulevaluering som alternativ til eksamen*; Videncenter for evaluering i praksis, CEPRA, University College Nordjylland; [http://www.ucn.dk/forside/forskning_og udvikling/indsatser/cepra/evalueringer_udf%C3%B8rt_af_cepra.aspx](http://www.ucn.dk/forside/forskning_og_udvikling/indsatser/cepra/evalueringer_udf%C3%B8rt_af_cepra.aspx)

Misfeldt, Morten (2005). *Media in mathematical writing: can teaching learn from research practice?* I: For the learning of mathematics, vol. 25, no. 2, s. 36-41.

Misfeldt, Morten (2006). *Mathematical Writing*. Ph.d. afhandling, København: Danmarks Pædagogiske Universitet.

Mueller, P. A. & Oppenheimer, D. M. (2014) *The Pen is Mightier Than the Keyboard: Advantages of Longhand Over Laptop Note Taking*. I: Psychological Science, Vol. 25(6). s. 1159-1168.

Niss, Mogens og Højgaard, Tomas (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (KOM-rapporten), Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18, Undervisningsministeriet.

Produktivitetskommissionen (2014). *Uddannelse og innovation - analyserapport 4*.
http://produktivitetskommissionen.dk/media/162592/Analyserapport%204,%20Uddannelse%20og%20innovation_revideret.pdf

Rasmussen, Tina (2012). *Niveaudeling styrker både de svage og stærke elever*. Gymnasieskolen. <http://gymnasieskolen.dk/niveaudeling-styrker-b%C3%A5de-svage-og-st%C3%A6rke-elever>.

Retningslinjer (2006). Retningslinjer for universitetsuddannelser rettet mod undervisning i de gymnasiale uddannelser.
<https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=29265>

Ulriksen, Lars; Ebbensgaard, Aase B; Holm, Christine (2013). *Fag og gymnasiefremmede – rapporter fra to runer af udviklingsprojekter*. IND's skriftserie nr. 29, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet.
http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2013-29/.

Undervisningsministeriet (1999). *De humanistiske og naturvidenskabelige kandidater og deres arbejdsmarked*. København.

<http://pub.uvm.dk/1999/humnatkand/>

Undervisningsministeriets Databank (2015).

<http://uvm.dk/Service/Statistik/Databanken>

Undervisningsministeriet (2015). Evaluering af gymnasiale eksaminer. (Rapporter vedr. Matematik htx og Matematik stx og hf.)

<http://uvm.dk/Uddannelser/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Evaluering-af-gymnasiale-eksaminer>

Winsløw, Carl (2015). *Mathematical analysis in high school, a fundamental dilemma*. I: Refractions of Mathematics Education: Festschrift for Eva Jablonka, p. 197-213; Christer Bergsten & Bharath Sriraman eds.; Charlotte, NC, USA.

Wissing, Lisbeth (2008). *Kampen om lærerne*. Gymnasieskolen. 11. Aug. 2008.

<http://gymnasieskolen.dk/kampen-om-l%C3%A6rerne>

6.2 Andre kilder

STX bekendtgørelsen + bilag 35, 36 og 37

HF Bekendtgørelsen + bilag 15

HHX Bekendtgørelsen + bilag 20, 21 og 22

HTX Bekendtgørelsen + bilag 21 og 22

- samt de til hvert bilag hørende vejledninger.

Samtlige skriftlige eksamenssæt fra de 8 niveauer, der har en sådan i årene 2010-2014, begge inklusive.