



IND's skriftserie

Nr. 58 Teachers' Practice and Knowledge on School Algebra with CAS (2021)

Nr. 59 Omlagt undervisning under corona-nedlukningen 2020 (2022)

Nr. 60 A Praxeological Study of Proportionality ... (2022)

Nr. 61 Dinosaurs on Display and Dissemination of Paleontology (2022)

Nr. 62 Teaching for Modelling Competence ... (2022)

Nr. 63 Inquiry based mathematics education and lesson study (2022)

Nr. 64 Matematiske modeller i videnskab, samfund og undervisning... (2023)

Other <http://www.ind.ku.dk/skriftserie/>

Matematiske modeller i videnskab, samfund og undervisning: eksempler fra Kandidatuddannelsen i STEM-undervisning

REDIGERET AF:

MORTEN MISFELDT

AXEL ANDERSEN ARIAS

BRITTA EYRICH JESSEN

ANDREAS LINDENSKOV TAMBORG

2023

**Matematiske modeller i videnskab, samfund og
undervisning: eksempler fra Kandidatuddannelsen
i STEM-undervisning**

IND's Skriftserie
Institut for Naturfagenes Didaktik
Københavns Universitet

Udgivet af Institut for Naturfagenes Didaktik,
Københavns Universitet, Danmark

E-versionen findes på <http://www.ind.ku.dk/skriftserie>

© forfatterne 2023

Matematiske modeller i videnskab, samfund
og undervisning: eksempler fra
Kandidatuddannelsen i STEM-undervisning, IND's
skriftserie nr. 64, 2023. ISSN: 1602-2149

Indhold

Forord

Andreas Tamborg, Britta Jessen & Morten Misfeldt iii

1 Risici for fatale drukneulykker i Danmark - en matematisk model og dens kvaliteter

Astrid Emilie Schröder, Bo Allan Gunthel, Sophieskolen, Line Karlshøj Hansen, Vestskolen, afd. Nordskov & Rasmus Frisch Henriksen, Damagerskolen 1

2 Forsøg med agentbaseret modellering af COVID-19

Peter Wied Stenkilde, Gilbjergskolen, Lasse Stege Hansen, Kildegård Privatskole & Anne Gottlieb, Højdevangens skole 23

3 Spring ud som søndagsbilist - matematisk modellering med fokus på benzinøkonomi

Lasse Skjerlie Gilling, Ny Hollænderskolen & Mette Bak Tang, Skolen på Grundtvigsvej 49

4 Socioøkonomisk reference - om talmagi i det offentlige

Lasse Skjerlie Gilling, Ny Hollænderskolen & Mette Bak Tang, Skolen på Grundtvigsvej 75

5 Modelleringsproces: "Skal Mads købe ny bil?"

Sine Flensbak Søltoft, Mads Bruun Birk, Camilla Guldborg Nielsen & Christian Skelmose Jensen 89

6 Matematiske modeller i samfundet: Udsatte boligområder

*Sine Flensbak Søltoft, Mads Bruun Birk, Camilla Guldborg Nielsen
& Christian Skelmosen Jensen 111*

Forord

Andreas Tamborg, Britta Jessen & Morten Misfeldt

Institut for Naturfagenes Didaktik
Københavns Universitet

Denne antologi udgives af Institut for Naturfagenes Didaktik på Københavns Universitet i forbindelse med den tværinstitutionelle kandidatuddannelse i STEM didaktik. Antologien er baseret på udvalgte artikler fra kurset “De matematisk modellerende videnskaber”, som handler om at omsætte aktuel naturvidenskabelig forskning og samfundsmæssige problematikker til matematiske modeller og modelleringsbaseret undervisning i grundskolen. Deltagerne har skrevet 3 artikler på kurset. Én hvor der udvikles en selvstændig matematisk model, én hvor der udvikles et undervisningsforløb og én hvor matematiske modellers betydning i samfundet diskuteres og belyses.

Antologien udgives i både trykt udgave, print-on-demand på lulu.com samt digitalt på Institut for Naturfagenes Didaktiks hjemmeside under publikationer. Vi vil gerne takke alle forfatterne for deres bidrag

Andreas Tamborg, Britta Jessen og Morten Misfeldt

Risici for fatale drukneulykker i Danmark - en matematisk model og dens kvaliteter

Astrid Emilie Schröder,
Bo Allan Gunthel, Sophieskolen,
Line Karlshøj Hansen, Vestskolen, afd. Nordskov &
Rasmus Frisch Henriksen, Damagerskolen

Abstract

In this article we will illuminate the individual risk factors governing the sport of sailing in Denmark. We will accumulate the individual variables influencing the risks of sailing and build a tool for helping prevent fatal drowning accidents relating to sailing. The tool will consist of a descriptive model that identifies what individual groups that are in special risk of experiencing a fatal drowning accident thereby helping these groups by informing them of the potential risks implied by those activities. We find that males in particular are at high risk, when venturing out on the water and hypothesize why this is the case.

Introduktion

Denne artikel bearbejder data for drukneulykker i Danmark, og hvilke faktorer der spiller ind i forbindelse med fatale ulykker ved fritidssejlads. Vi har samlet data fra rapporten af Sanne Pagh Møller og Bjarne Laursen: "Druknedødsfald i Danmark" som er udgivet af Statens institut for Folkesundhed i 2020 i samarbejde med Trygfonden og Syddansk Universitet. Vi har også inddraget data fra rapporten "Blåt friluftsliv i Danmark" af Berit C. Kaae, Anton Stahl Olafsson og Hélenè Draux som er udgivet af Københavns Universitet, Institut for geovidenskab og naturforvaltning i 2018. Rapporten indeholder data, der omhandler vandorienteret friluftsliv i Danmark.

Formålet med vores undersøgelse i denne artikel og modellen er at komme med en risikovurdering ved færdsel på vandet ud fra valgte variable. Hos Mogens Niss og Uffe Thomas Jankvist, 2022, beskrives det ud fra definitionen på matematisk modellering som, at vi modellerer det ekstra-matematiske domæne: "risiko ved færdsel på vand" i forsøget på at få svar på det praktisk/pragmatiske spørgsmål: "om det er klogt at færdes på vand?", så der kan træffes beslutninger og handlinger ud fra svarene. Vi kom frem til, at vi arbejder ud fra følgende problemformulering, forskningsspørgsmål og underspørgsmål:

Problemformulering

Vi vil undersøge, om vi kan lave en præskriptiv model, der kan bruges til at informere om risikoen for at drukne ved fritidsaktiviteter på vand.

Forskningsspørgsmål

Kan man ud fra den data, der er til rådighed lave en matematisk model, der beskriver risikoen for at drukne forbundet med færdsel på havet?

Vi har hertil valgt følgende underspørgsmål:

1. Hvordan spiller køn, alder og aktivitet ind på risikoen for at drukne?
2. Hvorfor drukner mænd i langt højere grad end kvinder?

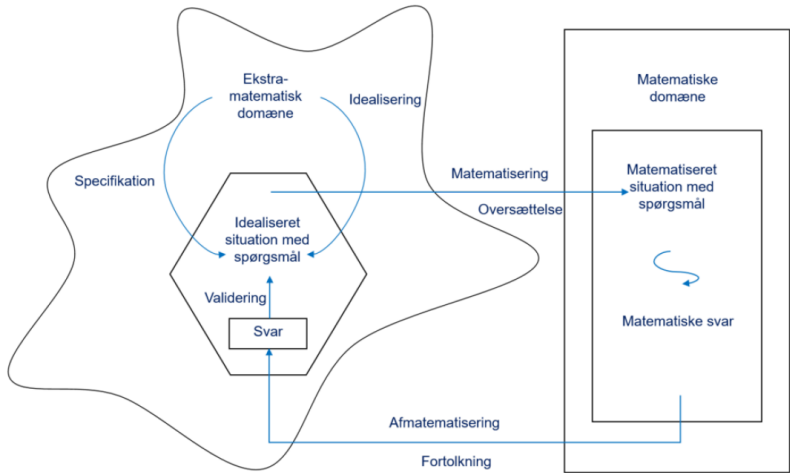
Et kig ind i litteraturen

I vores arbejde prøver vi at belyse den virkelige verden ved hjælp af matematiske begreber, matematisering, og i den proces arbejder vi indenfor modelleringskompetencen.

Modelleringskompetence har to sider: den analyserende side og den udførende side (Niss og Jankvist, 2022). Vi arbejder i vores bearbejdning med den udførende side af modelleringskompetencen. Vi har konstrueret vores model og i den proces bragt matematik i spil og brugt matematikken til at udsætte et område udenfor matematikken selv for en matematisk behandling, matematisering. (Niss og Jankvist, 2022)

I vores arbejde med bearbejdningen af det ekstra-matematiske domæne og oversættelsen af det til et matematisk domæne og en brugbar model ud fra det formål vi havde med at finde et svar på risikoen for at færdes på vand, så har vi været igennem en proces, der kan analyseres efterfølgende med

modelleringscyklussen, se figur 1.1. Figur 1.1 viser den udfoldede model af modelleringscyklussen. Denne model kan altså bruges til at beskrive de væsentlige dele som matematisk modellering kan bestå af - eller man kan sige at modelleringscyklussen består af de processer, der indgår i arbejdet med matematisk modellering. Arbejdet med matematisk modellering indebærer en række væsentlige ingredienser, og modelleringscyklussen giver en analytisk tilgang til disse. (Niss og Jankvist, 2022).



Figur 1.1: Figuren illustrerer en udvidet udgave af modelleringscyklussen (Niss og Jankvist, 2022)

Når vi ser på vores arbejde med vores model, så kan vi beskrive vores aktiviteter under de enkelte delprocesser således:

Præ-matematisering: Udvælgelse af variable og tilhørende data, hvor vi i første omgang identificerer, hvilke variable der kan være med til at beskrive risikoen for fatale drukneulykker i forbindelse med fritidssejls. Eksempler på fravalgte variable er: årstid, område, vejr og vind, aktiviteter nær land vs på vand, med eller uden erhverv. mm. Til sidst udvælges de 3 variable som skal være i den endelige model, altså køn, alder og aktivitet på vandet.

Matematisering: Databehandling på og normalisering af data. Efter at vi havde identificeret en række variable, som vi finder relevante for mo-

dellens validitet, starter arbejdet med at sikre, at vores data er objektive og ikke er forudindtagede. Dette er sket ved at tage højde for størrelsen af de relevante grupper mm. inden for de variable.

Problemløsning: Efter matematiseringen skal vi omdanne vores data til enkelte tal eller faktorer, som kan bruges til at udregne de individuelle risici indblandet i det område, vi undersøger og efterfølgende bruge de udarbejdede faktorer til at bygge den endelige model.

Afmatematisering: Intervalinddeling af de forskellige resultater for at finde de områder, der indeholder mest og mindst risiko i forbindelse med sejlads, for at finde kunne identificere “den risikofyldte sejl”.

Validering: Holder vores endelige models resultater op med, hvad der ses i virkeligheden, og kan vi forsvare de endelige resultater med den virkelighed, som vi lever i. Resultater og hypoteser vendes samt overvejelser til forbedring af modellen.

Vores proces med udviklingen af modellen er vi i refleksionerne over modelleringscyklussens delprocesser kommet frem til at have indeholdt, at vi egentlig har gennemført præmatematisering, matematisering og afmatematisering flere gange. Arbejdet med afmatematiseringen har ført til, at vi er gået tilbage til præmatematisering af flere omgange. Vi har gennemført flere iterationer af cyklussen, og den oprindelige tanke, vi havde, startede med en kun en kilde til data, og det er vi af flere omgange blevet nødt til at revidere og herefter udvide datasættet. I første omgang havde vi kun et datasæt som kilde til data, og i de efterfølgende omgange tilføjede vi et nyt datasæt for hver gang.

Vi nævner herover, at vi laver en deskriptiv model, der udvikles til en præskriptiv model, og vi arbejder her med begreberne præskriptiv og deskriptiv med udgangspunkt i Mogens Niss, 2015. En deskriptiv model er en model, der beskriver og opsummerer et ekstra-matematisk domæne i den virkelige verden. Den deskriptive models formål er derfor at muliggøre relevant handling. Derimod er den præskriptiv model en model, der søger, at omdanne matematik til en model der kan bruges aktivt i verden (Niss, 2015, s. 68). “... *a descriptive model, that concisely summarizes the real-life issue.*”(Groshong, Kimberly (2016), s. 21).

Vores model skal ses som empirisk stokastisk. Hos Kimberly Groshong, 2016, beskrives empirisk som data konstrueret og stokastisk som variabelbestemt. Vores model er konstrueret ud fra de data, vi har fundet i de aktuelle datasæt, og hvordan vi har forholdt os til de variable i forhold til data. Modellen er fremkommet ved hjælp af diskret data, hvor vi har arbejdet ud

fra data, der kan fremkomme ved optælling og kan indeles efter f.eks. køn, og kan dermed også ses som en diskret model (Groshong, 2016).

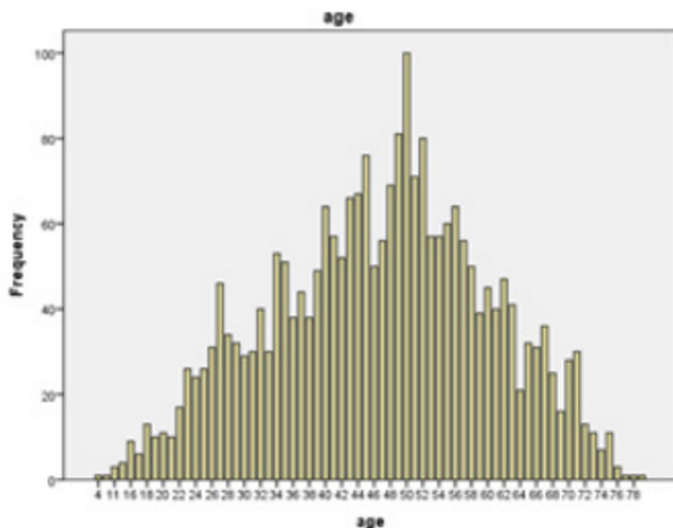
Metode

Vi har lavet en empirisk-stokastisk model baseret på diskret data fra rapporten TrygFondens nationale druknestatistik (Pagh Møller og Laursen, 2020) og rapporten “Blåt friluftsliv i Danmark” (Kaae et.al., 2018). Vi har i vores besvarelse af vores problemstilling lavet en deskriptiv model over den statistisk sandsynlighed for at drukne på havet fordelt på køn, alder og aktivitet. Efterfølgende udvikles den til den præsriptive model, som kan bruges til at informere om risikoen for at drukne.

Variable

Første skridt i processen var at afgrænse omfanget af modellen, da der er en utrolig mængde data til rådighed på området. Det betyder, at uden en streng afgrænsning, ville vi risikere at bygge en model, som bliver så bred og omfangsrig, at den ikke kan bruges til at generalisere de forskellige sejlere. De første variable, som vi har udvalgt, er som følger:

Alder: Den første variable der er blevet udvalgt er alder. Alder er en god variable til vores model, da der i vores datasæt er blevet lave aldersinddelinger. Det er også tydeligt fra datasættet at alder kan spille en rolle i vores model. Det første skridt var at kigge på Pagh Møller og Laursen, 2020’s opgørelse af drukneulykker. Her har de en opgørelse af drukneulykker som funktion af alder, men dette er ikke den “fulde historie”. For at kunne bruge tallene skal vi kende aktiviteten som funktion af alder, altså hvor mange bruger tid på vandet, og hvordan denne fordeling er i forhold til fatale ulykker. Dette er efterfølgende blevet gjort ved hjælp af rapporten “Blåt friluftsliv i Danmark” (Kaae et.al., 2018) som har lavet en opgørelse af aktivitet på vandet som funktion af *alder*.



Figur 1.2: Figur fra Kaae et.al., 2018 der viser aldersfordelingen i deres crowdsorce-baserede undersøgelser, som vi her har brugt til at finde aldersfordelingen i aktivitet på vandet.

Denne opgørelse er dog kun lavet ud fra de deltagende i undersøgelsen, se figur 1.2, og her gør vi den antagelse at dette er beskrivende for hele den danske befolknings aktivitet på vandet. For at styrke datasættet har vi også brugt “Dansk Sejlunions” data på området (Dansk Sejlunion, 2020,) se bilag 1. “Dansk sejlunion” har opgivet aldersfordelingen i deres medlemskaber, igen er det vigtigt at understrege, at dette ikke behøver at være retvisende for den reelle fordeling, men det kan give os et indblik i den reelle fordeling. Vi kan nu bruge den samlede data til at få indblik i hvor stor grad alder har indflydelse på drukneulykker. Dette har vi gjort ved at samle de omtalte aldersgrupper i rapporterne til vores egne grupper, her har vi valgt at tage udgangspunkt i 3 forskellige aldersgrupper, “Unge voksne (15-34)”, “midaldrende”(35-64) og “Ældregruppen”(65+). Dette valg sker på baggrund af det data vi har til rådighed, da Dansk Sejlunion, 2020 har én fordeling, Pagh Møller og Laursen, 2018 har en anden og Kaae et.al., 2018 har en helt tredje, så er vi her nødt til at sætte disse tre grupper sammen ud fra de eksisterende grupperinger.

Tabel 1.1: Opgørelse over aldersgrupper og sammenhængen med antal døde, drukneulykker i procent og aktivitetsfordelingen hos respondenter i procent.

Aldersgruppe	Antal døde	Drukneulykker i procent	Aktivitets fordelingen hos respondenter i procent
15-34	148	18,85%	20,34%
35-64	330	42,04%	69,84%
65+	307	39,11%	9,82%

Med grupperingerne er der nu mulighed for at regne på, hvordan alder påvirker risikoen for at være indblandet i en fatal drukneulykke. Dette er gjort ved at udregne, hvor stor en procentdel af de forskellige aldersgrupper der er aktive inden for sejlads, og hvor stor en procentdel de individuelle grupper udgør indenfor druknestatistikken. Tallet for drukneulykker i procent for aldersgruppen 35-64 er fremkommet ved udregningen:

$$(1) \frac{330}{148+330+307}=0,4204 \text{ svarende til } 42,04\%$$

Tabel 1.2: Respondenter i forhold til aldersgrupper

Aldersgruppe	Respondenter	%
15-34	495	20,34%
35-64	1700	69,84%
65-75+	239	9,82%

Tallet for respondenter i procent for aldersgruppen 35-64 er fremkommet ved samme metode som ligning (1).

Efterfølgende kan vi finde forholdet mellem disse tal og få en såkaldt aldersfaktor, som beskriver risikoforøgelsen hos de individuelle grupper.

Tabel 1.3: Aldersgrupperne og risikoforøgelsen hos de individuelle grupper som en aldersfaktor.

Aldersgruppe	Aldersfaktoren
15-34	0,93
35-64	0,60
65+	3,98

Udregningen af forholdet imellem procenttallene fra tabel 1.2, der giver os aldersfaktoren for aldersgrupperne:

$$(2) 0,42040,6984=0,6002 \text{ svarende til } 0,60$$

Vi ser her, at selvom ældregruppen 65+ kun udgør 9,82% af de aktive indenfor sejlads, står de stadig for 39,11% af drukneulykkerne. Dette resulterer i den relativt høje aldersfaktor for ældregruppen 65+, og vi ser også at de “unge voksne” 15-34 har en forhøjet aldersfaktor i forhold til de midaldrende.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at vores grupper ikke er lige store her, men at vi har skabt grupperne ud fra den data, vi har haft tilgængelig.

Aktivitet: Den valgte aktivitet har bestemt også en reel indflydelse på risikoen forbundet med ophold på vandet. Statistikken fra Pagh Møller og Laursen, 2020 har opdelt de forskellige aktiviteter ud fra fartøj, brug og formål. Pagh Møller og Laursen, 2020's opgørelse arbejder med kategorier så som erhvervs-fiskeri eller fritidsfiskeri og jagt som ikke bliver adresseret i denne undersøgelse. Der vil udelukkende være fokus på fritidssejlads. Vi står nu igen overfor for den samme problematik som tidligere, og vi bliver nødt til at finde ud af, hvor populære disse forskellige aktiviteter er. Alt-så hvor mange dyrker aktiviteterne i forhold til, hvor mange fatale ulykker der forekommer. Vi bruger her Kaae et.al. 2018 igen, da der her er lavet en opgørelse af, hvor mange der dyrker disse forskellige aktiviteter. Desværre oplever vi igen, at de forskellige grupperinger som er blevet lavet ikke

er ens. Pagh Møller og Laursen, 2020 har adskilt aktiviteterne i en meget højere grad end den Kaae et.al. 2018, og vi har derfor været nødt til at samle de forskellige aktiviteter i 4 grupper: sejlads, kano-kajak, vandski og wakeboard samt rosport, se tabel 1.4.

Tabel 1.4: Tabel over aktiviteterne og hvilke former der indgår under den enkelte aktivitet.

Sejlads	Alle former for sejlads i sejlbåd eller mindre motoriseret jolle
Kano-kajak	Alle former for fritids kano og kajaksejlads
Vandski og wakeboard	Her indgår vandski, wakeboard, motorbåd, RIB og speedbåd
Rosport	Alle former for rosport

Hos Kaae et.al. 2018 skrives der, at der ikke er en reel aldersforskel på de forskellige aktiviteter udover at flere unge mennesker dyrker vandski og wakeboard:

“Aldersmæssigt har tursejlads, sejlads i sejljolle og i jolle med motor en meget jævn fordeling mellem aldersgrupperne hvor aldersgrupperne over 50 år endda tenderer mod højere deltagelse. Kapsejlads i sejlbåde har flest deltagere blandt midaldrende og færrest blandt unge voksne. Sejlads i motorbåd, RIBbåd og organiseret turbådssejlads har derimod en højere deltagelse af unge voksne, og deltagelsen aftager generelt med alderen.” (Kaae et.al. 2018, s.103)

Vi har derfor valgt at se bort fra en aldersfordeling mellem aktiviteterne, og vi har gjort den antagelse, at alle 4 kategorier har en jævn aldersfordeling. Dog ved vi, at kønsfordelingen i disse 4 kategorier ikke er jævn. Kaae et.al.2018, s.30 refererer til tal fra “Dansk idrætsforbund” som beskriver medlemskabsfordelingen inden for de forskellige kategorier. Dette bruger vi nu til at antage at medlemsfordelingen inden for de forskellige aktiviteter kan bruges til at beskrive kønsfordelingen for aktiviteterne generelt.

Til sidst kan vi bruge disse tal til at udregne en risikofaktor bundet op på de forskellige aktiviteter, hvor kønsfordelingen er vægtet ind. Tallene kan ses i tabel 1.5 og 1.6.

Tabel 1.5: Tabel over fordelingen af fatale uheld indenfor hver aktivitets kategori, hvor mange der deltager i de forskellige aktiviteter i forhold til hinanden og den kønslige fordeling.

Fatale ulykker fordelt på aktiviteter			Andel der inden for det sidste år har deltaget i aktiviteterne		Kønsfordelingen i aktiviteterne	
					Mænd	Kvinder
Sejlads	123	72,35%	12,9	63,55%	68,94%	31,06%
Kano - kajak	21	12,35%	5	24,63%	57,60%	42,40%
Vandski og wakeboard	22	12,94%	1,6	7,88%	64,70%	35,30%
Rosport	4	2,35%	0,8	3,94%	54,30%	45,70%

Tabel 1.6: Tabel over farlighedsfaktoren ved fatale ulykker set i forhold til deltagelse i aktiviteterne.

Farlighedsfaktoren: Fatale ulykker i forhold til deltagelse	
Sejlads	1,14
Kano - kajak	0,50
Vandski og wakeboard	1,64
Rosport	0,60

Farlighedsfaktoren for fatale ulykker er udregnet på samme måde som aldersfaktoren. Vi kan nu finde en “farligheds faktor” for de individuelle aktiviteter. Her ser vi, at vandski og wakeboard gruppen står for over 12,9% af fatale ulykker men kun for 7,88% af aktiviteterne. Dette betyder, at vand-

ski og wakeboard har en høj “farligheds faktor” mens kajak-kano har den laveste.

Køn: Den sidste variable som vi skal arbejde med er kønsfaktoren. Køn fremstår som en central faktor for risiko for fatale ulykker. Ifølge Pagh Møller og Laursen, 2020 har der i perioden 2001-2018 forekommet 210 drukneulykker i forbindelse med fritidsaktiviteter på båd, hvor 203 af de omkomne er mænd og 7 af de omkomne er kvinder. Vi bliver herudfra nødt til at tage højde for kønnene i vores undersøgelse af risiko for fatale ulykker. Se tabel 1.7.

Tabel 1.7: Viser fordelingen af fatale ulykker hos kønnene

Fatale ulykker	mænd	kvinder	Mænd andel	Kvinder andel
båd,fritid	203	7	96,67%	3,33%

For at finde den reelle påvirkning har vi udregnet en kønsfaktor. Se tabel 1.8. Faktoren er udregnet ud fra, hvor mange der dyrker aktiviteten af hvert køn, og hvor mange fatale uheld der er forekommet, ligesom i de to andre faktorer.

Tabel 1.8: Viser kønsfaktoren ved de forskellige aktiviteter for kønnene

Aktivitet	Kønsfaktoren/Mænd	Kønsfaktoren/Kvinder
Sejlads	0,67	0,01
Kano - kajak	0,56	0,01
Vandski og wakeboard	0,63	0,01
Rosport	0,52	0,02

Her kan vi i tabel 1.8 se den sammenregnede fordeling, hvor vi har taget dødeligheds-fordelingen mellem mænd og kvinder og så sat denne i forhold til kønsfordelingen for aktiviteterne.

Konstant: For at bruge vores faktorer til at udregne en reel risiko for at sejle bliver vi nødt til at finde en baggrundsdødelighed. Med ordet bag-

grundsdødelighed mener vi, hvor mange der dør af at tage ud af at sejle i gennemsnit. Denne konstant: “Standard Jens” finder vi ved at finde den samlede mængde af medlemmer i alle sejlklubberne som der arbejdes med i denne undersøgelse. I Kaae et.al. 2018, s.50 skriver de, at der kun er 9,6% af de udøvende sejlere som er medlem af en klub. Dette bruger vi så til at estimere mængden af sejlere totalt, og efterfølgende multiplicerer vi de totale sejlere med 18 for at få mængden af aktive sejlere over 18 år. Det er så det interval som vores fatale drukneulykker er blevet laver over. Til sidst finder vi det forhold, der er mellem tallet for totale sejlere og tallet for drukneulykker for at finde baggrundsdødeligheden, som så kan ses i tabel 1.9.

Tabel 1.9: Viser baggrundsdødeligheden for sejlads.

	Standard Jens
medlemmer	50937
procentdel af medlemmer	0,096
sejlere i alt på ét år	530593,75
sejlere i 18 år	9550687,5
baggrundsdødelighed	0,00002199

Modellen

Efter arbejdet med de forskellige variabler har vi fået en model som forsøger at beskrive farligheden af de individuelle aktiviteter ud fra alder og køn:

Tabel 1.10: Den færdige model som viser en vægtet farlighedsfaktor ud fra de 3 variable.

Aktivitet	Køn	Alder	Faktor
Sejlads	mand	15-34	1,5464
		35-64	1,0042
		65+	6,6439
	kvinde	15-34	0,024
		35-64	0,0156
		65+	0,1032
Kano - kajak	mand	15-35	0,5691
		35-65	0,3696
		65+	2,4453
	kvinde	15-35	0,0144
		35-65	0,0094
		65+	0,0621
Vandski, wakeboard	mand	15-36	2,0929
		35-66	1,3591
		65+	8,9923
	kvinde	15-36	0,0394
		35-66	0,0256
		65+	0,1692
Rosport	mand	15-37	0,6387
		35-67	0,4148
		65+	2,7443
	kvinde	15-37	0,0185
		35-67	0,012
		65+	0,0796

Modellens resultater er opdelt i farver, hvor de grønne værdier står for de laveste 40% af alle værdier, de gule og orange farver står for de næste 40% mens de røde farver repræsenterer de sidste 20% i udfaldsrummet. Udregningen af disse faktorer er sket ved at multiplicere de individuelle faktorer for de brugte variable på en baggrundsdødelighed, som vi har fundet ved hjælp af Standard Jens.

Et eksempel på en udregning for faktoren for sejlads - mænd - aldersgruppen over 65 ville være:

$$(3) 0,00002199 * 1,14 * 0,67 * 3,98 = 0,000066439$$

Altså hvor vi starter med Standard Jens og multiplicerer de relevante faktorer på og ender med en samlet faktor for dødeligheden.

Resultater

Aktiviteter: Når vi kigger på resultaterne fra vores model er der en række faktorer, som er værd at dykke lidt mere ned i. Vi kan se at de to sikreste former for aktivitet på vandet er henholdsvis kano-kajak og rosport, mens traditionel sejlads og vandski og wakeboard har en signifikant højere risiko tilknyttet til aktiviteten.

Vandski og wakeboard er måske ikke så overraskende, da dette er to aktiviteter som indebære at bevæge sig hurtigt og som i daglig tale kunne beskrives som ekstreme aktiviteter, da de indeholder motorbåde og lignende. Normal sejlads derimod er den aktivitet som er klart størst repræsenteret i datasættet, og her kan der spekuleres i om fritidsfiskeri kan være en del af forklaringen eller om aktiviteten selv indbyder til længere ophold på vandet, som helt af sig selv vil føre til en højere risiko for uheld.

Det er også vigtigt her at se på kulturen om disse forskellige aktiviteter, der kunne spekuleres i om kajak-kanoe og rosport har en anden sikkerhedskultur end de andre aktiviteter. Dette kunne være at man generelt er bedre til at beholde redningsvest på eller er mere opmærksom på potentielt farlige situationer.

Til sidst kunne en faktor som afstand fra kyst være relevant. Det er ikke umuligt at kajak-kanoe og rosport er aktiviteter som foregår tættere på kysten, og de derfor har en mindre risiko for fatale uheld mens en aktivitet som

traditionel sejlsads generelt foregår længere fra kysten, og derfor indeholder den en øget risiko for at en ulykke kan eskalere til en fatal ulykke.

Køn: Modellen peger i høj grad på, at mænd generelt er udsat for en højere risiko for fatale ulykker end kvinder er. Meget af arbejdet med modellen har bestået af at forsøge at synliggøre, hvorfor mænd har den udregnede 29 gange højere risiko for fatale uheld i forbindelse med aktivitet på vandet end kvinder, men det viser sig at mænd generelt bliver udsat for mange flere fatale ulykker end kvinder gør, når man kigger tilbage på de sidste 18 års data på området. Selv når vi kontrollerer for faktorer såsom kønsfordelingen inde for aktiviteterne kan vi se, at hvis mænd ikke generelt opfører sig på måder som indbyder til flere ulykker, bliver de nødt til at dyrke aktiviteten i ekstremt længere tid i forhold til kvinder for at kunne forklare denne forskel. Tiden er noget, som vi i vores undersøgelse, ikke har kunne finde belæg for. Derfor bliver vi nødt til at konkludere, at mænd er i en signifikant højere risiko for at opleve en fatal drukneulykke end kvinder er bare ved at sætte sig i båden.

Alder: Alder er en svær variabel at vurdere. Vi kan af gode grunde ikke vide hvor længe hver enkelte person i vores datasæt har dyrket aktiviteterne, hvilket er et problem for undersøgelses validitet. Vi ved ikke om en person på 68 år har dyrket sporten i to uger eller i 40 år, og vi ved heller ikke om den 68 åriges fatale drukneulykker er forekommet i forbindelse med et aldersbetinget ildebefindende som også kunne have implikationer på modellens validitet. Dog kan vi se, at gruppen 65+ har en signifikant højere risiko (op til 8 gange højere risiko end midaldrende) for at blive udsat for fatale drukneulykker. Dette kan skyldes, at de personer som ligger i gruppen 65+ har dyrket aktiviteten i så lang tid at en sådan ulykke skulle ske på et eller andet tidspunkt. Det er også et åbent spørgsmål om ekstra fritid spiller en rolle her, altså at man som pensionist har mere fritid og derfor en øget mulighed for at dyrke sine fritidsaktiviteter.

Diskussion

I ovenstående afsnit gjorde vi rede for, at der er 203 mænd, der er druknet i perioden 2001-2018, mens der kun er 7 kvinder, der er druknet. Vi vil i det følgende diskutere, hvad der kan skyldes denne heftige overdødelighed blandt mænd. Selvom der er flere mænd der opholder sig på havet end kvinder, så kan overdødeligheden blandt mænd ikke forklares med dette alene, da der er 29 gange flere mænd, der drukner. En mulig forklaring på

overdødeligheden blandt mænd kan være at mænd udviser mere risikovillig adfærd end kvinder. For at undersøge denne påstand vil vi komme med et bud på en mulig definition af risikovillig adfærd på vandet. Risikovillig adfærd på vandet definerer vi som mangel på redningsvest, påvirkning af alkohol eller stor tiltro til egne evner.

Vores hypoteser er:

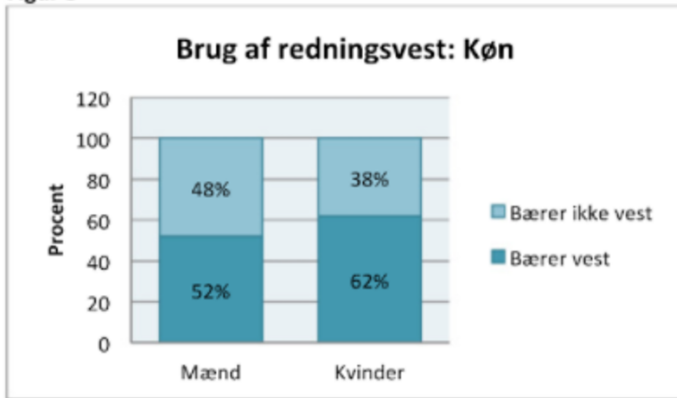
1. Mænd er mere tilbøjelige til at glemme redningsvesten, og de drukner derfor hyppigere
2. Der er en sammenhæng mellem mænds alkoholvaner og risikoen for at drukne
3. Mænd oplever flere ulykker end kvinder gør

Hypotese 1: Mænd er mere tilbøjelige til at glemme redningsvesten og de drukner derfor hyppigere.

Trygfonden har lavet et observationsstudie (ALS Research, 2015), hvor der observeres på brugen af redningsveste hos sejlere og fiskere hos 4184 sejlere. Vi tager udgangspunkt i dette studie, for at undersøge om der er en sammenhæng mellem mænds brug af redningsvest og den statistiske sandsynlighed for at drukne.

Ud fra nedenstående model, figur 1.3, kan vi se, at der er 62% kvinder, der husker redningsvest og 52% mænd. Der er altså 10 procentpoint flere mænd end kvinder der glemmer redningsvesten. Selvom dette kan forklare noget af den overdødelighed vi ser hos mænd forklare dette langt fra det hele. Ovenstående hypotese giver derfor ikke hele svare på vores diskussionsspørgsmål, og vi vil derfor gå videre til at diskutere alkohol og tiltro til egne evner.

Figur 8



Figur 1.3: Figur fra ALS Research (2015) der viser brugen af redningsvest fordelt på køn.

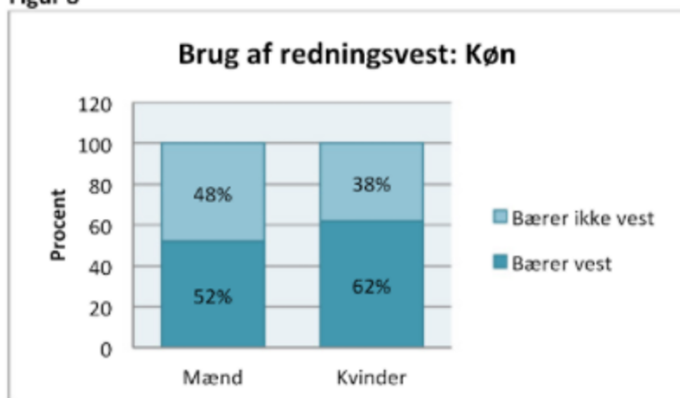
Hypotese 2: Der er en sammenhæng mellem mænds alkoholpåvirkning og risikoen for at drukne

Alkohol ser ud til at være en væsentlig risikofaktor ved fatale ulykker på vandet. Ulykker hvor alkohol er involveret sker oftest ved fald i havnen, men da disse ulykker ikke indgår i vores undersøgelse bortfalder de fra statistikken.

Ifølge Pagh Møller og Laursen, 2020 er langt de fleste alkoholrelaterede fatale drukneulykker udgjort af mænd. Der står:

“I de fleste drukneulykker hvor der er alkohol involveret, er der tale om midaldrende eller ældre mænd (72% var over 45 år og 91% var mænd). I 68 af de 285 drukneulykker hvor alkohol var involveret (24%), var der beskrevet kendte alkoholproblemer for den druknede”. (Pagh Møller og Laursen, 2020, S.40)

Figur 8



Figur 1.4: Tabel fra Pagh Møller og Laursen, 2020 der viser årsager til fatale ulykker ved fritidssejls i årrækken 2001-2018 fordelt på primære og medvirkende årsager for fiskeri, sejls og andet og uoplyst samt i alt, hvor vi her har kigget efter, hvor alkohol er medvirkende årsag til fatale ulykker.

Ud fra figur 1.4 kan vi se, at alkohol er en af de største medvirkende årsager til fatale ulykker, og alkohol tæller i alt 32 tilfælde hos sejlere og fritidsfiskere, da vi ikke har medtaget kategorierne "andet og uoplyst". Hvis vi antager, at alle disse er mænd, så ville det give os en god indikation af overrepræsentationen af drukneulykker blandt mænd, selvom det stadig ikke forklarer det hele.

Hypotese 3: Mænd oplever flere ulykker end kvinder gør

Vores sidste hypotese går på om mænd oplever flere ulykker end kvinder. Det kan være at den overdødelighed, der er blandt mænd skyldes, at de overvurderer egne evner, og at de derfor løber flere risici end kvinder.

For at undersøge om dette er tilfældet, kan vi sammenholde overdødeligheden blandt mænd, der omkommer på havet med mænd, der omkommer i trafikken. I publikationen "Kønsforskelle i trafikulykker" fra Vejdirektoratet, 2016, viser statistikken, at selv om mænd kun står for 54% af de kørte km i Danmark, så står de stadig for 66% af ulykkerne. Her er det vigtigt

at være opmærksom på at der ikke er tale om fatale ulykker udelukkende, men dette giver stadig et billede af, at mænd generelt er involveret i flere ulykker, end kvinderne er.

Perspektivering

Ingen af vores tre hypoteser kan forklare overdødelighed blandt mænd til fulde. Men alle tre hypoteser bidrager dog positivt til den samlede forklaring af overdødeligheden blandt mænd. Vores hovedkonklusioner er: Flere mænd end kvinder glemmer redningsvesten, ligesom flere mænd end kvinder er alkoholpåvirkede under sejlads end kvinder. At mænd er involveret i flere ulykker end kvinder er også noget vi ser i antallet af trafikulykker, hvor antallet af ulykker blandt mænd udgør 66% af alle trafikulykker.

Det samlede billede er, at der ikke er en enkelt årsag, der forklarer overdødeligheden blandt mænd men snarere flere forskellige medvirkende faktorer, der tegner det samlede billede.

Der kan være andre årsager til overdødeligheden blandt mænd end dem, som vi har medtaget i denne opgave. Det kunne eksempelvis være sygdoms- og helbredstilstande, tiden sejlerne bruger på havet og deres samlede sejlererfaring inden ulykken. Dette har dog ikke været undersøgelsesområdet for denne artikel, selvom det ville være relevant for fremtidige undersøgelser af emnet.

Afrunding

Arbejdet med modellen har vist os, hvor vanskeligt det kan være at bruge data til at sige noget om en population med sikkerhed. Den virkelighed, vi beskriver, er en virkelighed baseret på en masse valg og fravalg. Andre studerende havde måske valgt andre data og dermed kommet frem til en anden model. Det er med andre ord ekstremt svært at bruge dataene til at sige noget med sikkerhed omkring drukneulykker, da datasættet er en kompleks størrelse med mange faktorer og data.

Vi har siddet med et datasæt, der på den ene side er meget småt baseret på 207 drukneulykker, og på den anden side meget komplekst med mange tilgange i det til at se på dataene.

Arbejder man med modellering i folkeskolen kan matematiseringen være en udfordring for eleverne. Her i at lokalisere de rette data og hvilke matematiske stofområder, der kan tænkes at komme i spil.

Overordnet viser denne opgave os at modellerings cyklussen spiller en afgørende rolle i forhold til det endelige resultat. De matematiske modeller skal også ses i en samfundsmæssig kontekst og kan diskuteres og formes i forskellige retning alt efter hvad designerne bag modellen ønsker at lægge vægt på. Dette kan være en erkendelse for eleverne da de muligvis anser de matematiske modeller for eksakte indiskutable sandheder.

Gennem arbejdet med selv at designe en model oplever eleverne forhåbentlig en erkendelse af, at der kan træffes forskellige valg og dermed fremkomme forskellige modeller. Eleverne skal lære at vurdere de matematiske modellers rækkevidde og deres anvendelsesformål.

Referencer

ALS Research (2022, 21. marts). "Notat: Resultater fra observationsstudiet og survey undersøgelser 2015". <http://reader.livedition.dk/trygfonden/281/>

Dansk Sejlunion. (2022, 21. marts). "Nye medlemstal: Vækst i Sejlporten". <https://dansksejlunion.dk/nyheder/2020/nye-medlemstal-vaekst-i-sejlsporten>

Groshong, K. (2016): Different types of Mathematical Models. I *Hirsch, C.R. & McDuffie, A.R.(eds.) (2016). Employing Mathematical Modelling to Engage Students at All levels*. National Council of Teachers of Mathematics, 17-24.

Kaae, B. C., Olafsson, A. S., & Draux, H. (2018). Blåt friluftsliv i Danmark. Institut for Geovidenskab og Naturforvaltning, Københavns Universitet. IGN Rapport

Niss, M. (2015). Prespective Modelling - Challenges and Opportunities. I *Stillman, G.A.; Blum, W. & Biembengut, M. S.(eds.). Mathematical Modelling in Research and practice. Cultural, Social and Cognitive Influences*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8>

Pagh Møller, S., Laursen, B., (2020) Druknedødsfald i Danmark 2001-2018 - og udviklingen 1970-2018. Statens Institut for Folkesundhed. Elektronisk udgave: ISBN 978-87-7899-509-4

Niss, M., Jankvist, U. T.,(2022, 27. Marts). "Matematisk modellering". NCUM, Nationalt Center for udvikling af matematikdidaktik. Matematikdidaktik. 35038 - NCUM. <https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering>

Vejdirektoratet (2016). Kønsforskelle i trafikulykker. Vejdirektoratet, 2016. ISBN (NET): 978-87-93184-82-4

A Bilag 1

Tallene

Vis alle

▼

Søg

Alder	2018	2019
0 - 12 år	2.000	2.072
13 - 18 år	2.191	2.223
19 - 24 år	1.546	1.550
25 - 39 år	5.855	6.234
40 - 59 år	20.216	20.511
60+ år	20.391	20.419
I alt	52.199	53.009

Viser 1 til 7 af 7 linjer

1

Medlemstallene fordelt på køn

10

▼

Søg

Køn	2018	2019
Kvinder	12.228	12.564
Mænd	39.971	40.445

Viser 1 til 2 af 2 linjer

1

Forsøg med agentbaseret modellering af COVID-19

Peter Wied Stenkilde, Gilbjergskolen,
Lasse Stege Hansen, Kildegård Privatskole &
Anne Gottlieb, Højdevangens skole

Abstract

As part of the Master of Science in STEM Teaching, we were introduced to several different mathematical models. We became curious when we heard about agent-based simulation models (ABM) since none of us knew about it.

This paper is an investigation of how we can create a model in Star-Logo Nova that resembles the differential equations of classical mathematical modelling of epidemics. This will enable students at upper secondary school to work with disease modeling. ABM is based on randomness and repeated runs and result in varying results even when all parameters are constant. Therefore, we investigate how to present these data using graphs, boxplots, and calculations in a faithful manner. In the end we have a model that qualitatively shows what accelerates or slows an epidemic but not one to calculate real world numbers.

Indledning

Vores motivation for at simulere COVID-19, udsprang af lysten til at undersøge mulighederne i agentbaserede simuleringsmodeller (ABM), men også en generel lyst til at lære lidt om programmering. Traditionelt set indebærer epidemimatematik, at man anvender en klassisk epidemimodel som SIR-modellen. Denne model fordrer at man har kendskab til, og kan arbejde med differentiaalligninger, noget man ser i matematikundervisningen

på 3.g-niveau. Vores tilgang vil gøre stofområdet tilgængeligt for de ældste folkeskoleklasser. Spørgsmålet er om vi gennem programmering af en ABM, kan skabe en realistisk model af et epidemiforløb, der tilsvarende det vi ser når der anvendes differentialregning.

Da ABM delvist bygger på tilfældighed, vil gentagne kørsler med identiske parametre give forskellige resultater. Vi vil undersøge, hvordan denne variation kan behandles på redelig vis.

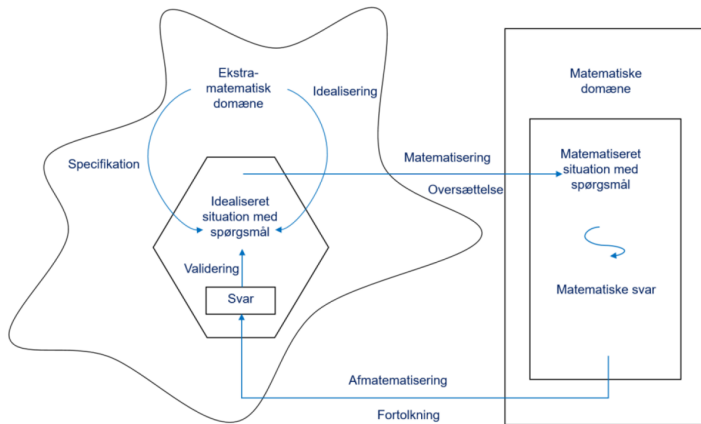
I begyndelsen gik meget af vores energi til at sætte os ind i selve programmeringssproget. Det gjorde, at vores tilgang til modelleringsarbejdet ikke fulgte en klassisk matematisk modelleringsstilgang, hvor et konkret ekstra matematisk problem skulle løses som beskrevet af Niss, (2015). Dette kom snarere som et sekundært mål, når først vi var trykke i selve programmeringen og havde en funktionel ABM, der i høj grad gav os mulighed for at fange, repræsentere, forstå eller analysere et ekstrapmatematisk fænomen.

Teori

Modelleringscyklussen

Vi anvender en oversat udgave af Niss' (2015) modelleringscyklus fra matematikdidaktik.dk

Modellen har til formål at beskrive en række processer, der indgår i den matematiske modellering. Modellens "amøbe"-form, skal illustrere den komplekse virkelighed problematikkerne ofte består i. Dette betegnes det ekstra-matematiske domæne og symboliserer en virkelighed med problemer, der endnu ikke er oversat til matematik. I arbejdet med matematisk modellering, forsøger man at idealisere indholdet i det ekstra-matematiske domæne, i tilstræbelser efter at kunne oversætte det til en matematiseret situation. Det er illustreret ved det mere "firkantede" matematiske domæne (Niss & Jankvist, u.å.). Idealiseringen er en vigtig proces i arbejdet med modellering, da ingen modeller er i stand til at medtage alle aspekter fra virkeligheden.



Figur 2.1: Modelleringscyklussen. Genoptrykt fra “Modelleringscyklussen” af Niss, M. & Jankvist, U. T. (u.å), Hvad er matematisk modellering? Modelleringscyklussen, Matematikdidaktik.dk.

Processerne i modelleringscyklussen

Forberedelsen: Her finder simplificeringen af det ekstra-matematiske domæne sted via processerne *specificering* og *idealisering*. Simplificeringen resulterer i, en idealiseret situation med spørgsmål, der er repræsenteret ved en hexagon i modellen.

Matematisering: Her oversættes alle aspekter af den idealiserede situation til matematiske repræsentationer, der er stedfindende i det matematiske domæne.

Håndtering af den matematiserede situation: Her anvender man matematiske færdigheder, teknikker og koncepter til at udlede og retfærdiggøre de matematiske løsninger man er kommet frem til. Denne process er illustreret med en snørklet pil.

Afmatematisering: Her oversættes de matematiske løsninger tilbage til den virkelige kontekst, som matematiseringen udsprang af. Her er ofte tale om en fortolkning af det matematiske resultat, til en virkelighedskontekst i den idealiserede situation.

Validering af modellen: Her valideres modellens udfald ud fra kendte parametre fra det ekstra-matematiske domæne (den virkelige situation),

samt i hvor høj grad svarene passer til modellens oprindelige formål. (Niss, 2015)

SIR-modellen

SIR-modellen er den grundlæggende matematiske model for infektiøse sygdomme. SIR-modellen findes i mange varianter, der er udbygget efter behov i forhold til den pågældende sygdom. Eksempelvis blev der under COVID-19-pandemien, af flere anvendt en udbygning af SIR-modellen navngivet SEIR-modellen, til f.eks. at undersøge effekten af masker (Kai, Goldstein, Morgunov, Nangalia, Rotkirch, 2020), eller effekten af kontaktopsporing (Statens Serums Institut. 2020a).

SIR-modellen i sin simpleste form, består af tre komponenter, svarende til tre grupper som individer i en population kan befinde sig i. De tre grupper, der også danner modellens akronym er:

- Susceptible, der betegner de personer der er modtagelige for sygdommen i en population.
- Infectious, der betegner de personer der er inficeret med sygdommen og som kan inficere andre i populationen.
- Removed, der betegner de personer der ikke kan inficeres og som heller ikke kan inficere andre. I denne kategori kan der både være personer som er immune, men også personer som er døde. (Baktoft, 2013)

SIR-modellens parametre i virkeligheden; Kontaktrate og removal rate

Kontaktraten betegnes β , og angiver antallet af smitsomme møder som en enkelt inficeret person i gennemsnit har på en enkelt dag. Der er flere forhold der spiller ind på kontaktraten, f.eks. sygdommens smittevej, befolkningstæthed, opførsel og restriktioner.

Removal rate, der betegnes γ , og angiver det daglige antal individer, der flyttes fra gruppen, inficerede til gruppen removed.

Removal rate afhænger af sygdomsperioden og kan beregnes ved:

$$\gamma = \frac{1}{T}$$

Hvor T angiver sygdomsforløbets gennemsnitslængde.

SIR-modellens parametre i virkeligheden; Det basale reproduktionstal og det effektive reproduktionstal

Det basale reproduktionstal er en vigtig, omend teoretisk, information at have om en given sygdom, da den angiver hvor smitsom sygdommen er, forudsat at, ingen har haft den før og alle opfører sig som vanligt, dvs. ingen immune eller restriktioner. (Fjastrup, u.å.). Det basale reproduktionstal betegnes R_0 og kan findes ved hjælp af parametrene *kontaktrate* og *removal rate* fra SIR-modellen. Her gør følgende sig gældende:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Under COVID-19-pandemien, var der tit fokus på sygdommens kontakttal. Kontakttallet, der tidligere blev kaldt smittetryk, betegnes også som det effektive reproduktionstal R_e . Så R_0 er i grunden sygdommens smitsomme natur, og vil kun komme til udtryk i en population hvor alle individer er modtagelige og der ingen restriktioner er. Hvor R_e beskriver smitten i en aktuel befolkning på et aktuelt tidspunkt. (Statens Serum Institut, 2020b)

Agentbaserede simuleringsmodeller (ABM)

ABM er en digital modellering, der nyere tid har vundet stort indpas i undersøgelsen af biologiske fænomener, som f.eks. arbejdet med epidemier. I ABM modellerer man et fænomen, ved hjælp af virtuelle agenter, der interagerer inde for det samme lukkede miljø. I arbejdet med ABM har man mulighed for at studere de udviklinger, der kommer gennem agents autonome ageren i et simuleret miljø. Ved brug af ABM får man derved mulighed for systematisk at teste hypoteser baseret på forskellige aspekter i simuleringen, f.eks. hvordan små adfærdsændringer i en population af interagerende agenter, kan have betydning for fænomener i stor skala (Crooks & Heppenstall, 2012)

Agenter, adfærd og miljø

Der er ikke nogen konkret litterær definition på en agent, men ifølge Crooks & Heppenstall (2012) går der en række af de samme egenskaber igen, når en agent beskrives. (s. 87).

Agenter kan kendetegnes ved følgende egenskaber:

- Autonomi: De er autonome enheder, der har mulighed for frit at interagere med hinanden, inde for de opsatte miljørammer.
- Heterogenitet: Blandt agenterne kan der være forskellighed. De kan tildeles karakteristika f.eks. alder, køn eller immunitet.
- Aktivitet: Agenter er aktive for modellen, da deres ageren har en uafhængig indflydelse på simuleringens forløb. Aktiv adfærd kan spænde så vidt som fra adaptive tendenser og kommunikation, til blot det at bevæge sig frit i det tildelte miljø.

Agenterne er udstyret med forprogrammerede egenskaber og opførsel, der er knyttet til enten alle, en kategoriseret gruppe eller til individuelle agenter. Agenterne er altså ikke styret fra centralt hold, men har hver deres opførsel. Denne opførsel styres delvist af tilfældigheder, men bundes i en række programmerede regler. Disse regler bundes ofte i konkret litteratur, ekspertviden eller dataanalyser, og er implementeret i modellen, for at skabe realistiske rammer, der kan afspejle virkeligheden. I selve programmeringen bygges disse regler op omkring *if-then* og *if-else* kommandoer, der udmønter sig i en hændelse, når et parameter er mødt. Disse regelsæt kan ændres og justeres, hvilket giver mulighed for at analysere og studere virkningen af disse ændringer i små parametre.

Det miljø, som agenterne befinder sig i, er også underlagt regler og begrænsninger. Miljøet er det område, der definerer hvori agenternes interaktion foregår. Agenterne kan både interagere med hinanden, men også med miljøet selv. Man kan se på disse miljøer som miniaturlaboratorier, hvori man kan afprøve forskellige gennemkørsler og se hvilke parametre, der påvirker hvilke forhold. (Crooks & Heppenstall, 2012)

Computational thinking

Arbejdet med programmering af en ABM i StarLogo Nova, fungerer vha. blokprogrammering som det kendes fra Scratch. Brennan & Resnick (2012) opstiller, i forbindelse med unge menneskers brug af Scratch, fire computationelle praksisser. I arbejdet med CT bevæger man sig i nedenstående praksisser.

Incremental and iterative. Arbejdet med at designe et projekt, beskriver Brennan & Resnick (2012), som adaptivt. Her kendetegnes det, at man udvikler, afprøver og videreudvikler, baseret på den erfaring man gør sig, så arbejdsgangen indeholder både gentagelser og tilføjelser.

Testing and debugging: Når man f.eks. programmerer, skal man lærer at håndtere og forvente problemer undervejs. Det kan være en svær proces at fejlfinde, og det er derfor vigtigt, at man tilegner sig strategier til dette, som f.eks. en trial and error-tilgang eller, at man lærer at vidensoverfører fra andre lignende projekter.

Reusing and remixing: Er når man genbruger og arbejder videre på allerede eksisterende projekter, så man ikke behøver starte fra bunden hver gang. Dette er en god strategi, da man får mulighed for at udvikle og forbedre ting, som derved kan blive mere komplekse end ellers.

Abstracting and modularizing: Karakteriseres som det at bygge noget større ved at sætte mindre dele sammen. Dette er et vigtigt træk i problemløsnings- og designprocesser.

Sengupta, Kinnerbrew, Basu & Biswas (2013) præsenterer den direkte sammenhæng mellem CT og ABM. De lægger særligt vægt på arbejdet med abstraktioner der af Wing er beskrevet som “the *“nuts and bolts”* in computational thinking” (s. 354) og kommer med eksempler på abstraktioner ifm. ABM. Videre argumenterer de med henvisning til Resnick for, at man med ABM kan repræsentere komplekse processer og fænomener vha. simple elementer og mekanismer.

Metode

Hvad er StarLogo Nova?

Det grønne kvadrat hvor vores turtles bevæger sig rundt, kaldes spaceland. Spaceland er delt ind i 100x100 felter som vores turtles kan bevæge sig rundt på. Funktioner kan tændes og slukkes med knapper, værdier kan tages ind som tal eller indstilles på skydere og der kan oprettes grafer over forskellige dage. Alle disse funktioner samt de regler vores turtles opfører sig efter, programmeres i programmeringsområdet. Et screenshot af simuleringen, koden for verdenen og koden for vores turtles, kan ses på hhv. bilag 1, 2 og 3.

Forberedelsen - Grundlæggende mekanismer

På baggrund af vores omfattende hverdagserfaringer med coronavirus, havde vi gjort os nogle indledende tanker om hvilke mekanismer, vi skulle bygge ind i vores simulation:

- Turtles skulle kunne findes i fire stadier: raske, syge, immune og døde
- Vi skulle kunne styre risikoen for at blive smittet når man mødte en inficeret
- Vi skulle kunne styre risikoen for at dø af sygdommen
- Vi skulle kunne bestemme chancen for at blive immun efter smitte
- Vi skulle kunne styre varigheden af sygdomsforløbet
- Turtles skulle kunne blive smittet mere end én gang. Enten fordi man ikke var blevet immun i første omgang, eller fordi man mistede sin immunitet med tiden (svarende til en ny mutation af virusset).

Idealisering

Som beskrevet i teori afsnittet om idealisering i modelleringscyklussen, kan ingen modeller medtage alle aspekter fra virkeligheden. Der vil altid være fravalg, således også i vores model.

Vi tildeler ikke vores turtles en alder, og alle turtles har derfor ens risiko for at dø af sygdommen. I begyndelsen vidste vi ikke hvordan en turtles alder kunne indbygges i koden, men det har vi faktisk en løsning på nu. Det vil således være en oplagt mulighed i det videre arbejde med modellen.

Vi styrer ikke de enkelte turtles interaktionsnetværk. En turtles bevægelser styres af en kode, som behandles nærmere i afsnittet “Bevægelsesmønstre”, men begrænses ikke på andre måder. Netop folks netværk spiller en afgørende rolle i de to ABM’er som Statens Serum Institut (2020a) benytter. Dette ligger fortsat ud over vores programmeringsevner.

I virkelighedens Danmark har test og isolation af inficerede været en nøglestrategi til at bremse epidemien. Vores turtles fortsætter deres dagligdag som om intet var hændt, selvom de er inficerede.

Ikke alle, der smittes i virkeligheden rammes lige hårdt og sygdommens varighed varierer dermed. I vores simulation varer sygdommen altid 10 dage, hvorefter man enten bliver immun, rask (uden immunitet) eller dør.

I virkeligheden er det ikke alle smittede, der får symptomer, og det er ikke alle med symptomer, der bliver testet. Man vil derfor have betydelige mørketal i forhold til antallet af smittede. Disse parametre er ikke indbygget i vores simulation. Alle smittede optræder i vores statistikker.

Et parameter vi ikke tog aktivt stilling til, var modellens skala. Modellede vi en by, et land, eller hele verden? Til tider oplevede vi, at epidemien rasede ud i én del af spaceland, mens andre dele var gået helt fri. Vores tanke var, at noget tilsvarende måske var sket i virkeligheden, hvis coronaepidemien var brudt ud for 200 år siden, da vi slet ikke havde samme

globale infrastruktur. I virkeligheden havde vi set, at flytrafikken spredte sygdommen, så vores løsning blev at indsætte lufthavne, der ville transportere turtles til andre dele af spaceland. Vi har ikke benyttet lufthavne i de kørsler, vi har medtaget i artiklen.

Virkeligheden er uendeligt kompleks og denne liste over fravalg, er på ingen måde udtømmende. Det handler i bund og grund om at foretage fravalg på et oplyst grundlag og med opmærksomhed på, hvad disse fravalg kan betyde for modellens anvendelighed. Omvendt kan man, når man har en velfungerende grundmodel, afprøve betydningen af yderligere variable.

Matematisering

Vores matematisering handlede om, hvordan vi kunne tage vores grundlæggende mekanismer og grundantagelser, og bygge dem ind i vores simulation på korrekt vis. Vi tog udgangspunkt i en skabelon der er indbygget i StarLogo Nova, som hedder "Biology Simulation". Den har bl.a. kodning, der bestemmer hvordan en turtle bevæger sig, hvordan en turtle smitter en anden og hvordan, der tegnes en graf over antallet af raske, syge og immune.

Ingen af vores grundlæggende mekanismer var færdigprogrammede i simulationen fra start af, så vi gik i gang med at videreudvikle (remixe) programmet, for at opnå en større kompleksitet. Det foregik iterativt, altså i små skridt med hyppige afprøvninger af koden. Vi var nybegyndere i StarLogo Nova, men langsomt lærte vi flere og flere af kommandoerne at kende. Det gav idéer til nye muligheder og udvidelser af modellen og gjorde, at koden voksede betragteligt. Til tider stødte vi på problemer. Enten stoppede programmet helt med at virke, eller også opdagede vi mindre fejl vi ikke kunne forstå hvor kom fra. (F.eks. opdagede vi på et tidspunkt, at døde turtles levede op igen). I begge tilfælde måtte vi i gang med at fejlfinde i koden. Sætte små dele af koden ud af kraft, eller forsøge at kode baglæns, indtil vi kom tilbage til et stabilt program (der er ingen fortryd-knap i StarLogo Nova). Vores oplevelser med programmeringsprocessen passer således fuldstændig med de opstillede praksisser fra Brennan & Resnick (2012) om computational thinking.

Hvordan modellerer vi sygdommen?

Vores ABM består i bund og grund af en lang række mindre modeller. Måden smitte overføres på, modelleres ved at to turtles står på samme felt

og med en vis procentdels chance smitter. Måden en turtles sygdomsstatus modelleres på, er ved hjælp af dens farve. Måden immunitetens varighed modelleres på er vha. en variabel der indstilles tilfældigt indenfor et interval, og derefter tæller ned. Vi har givet særlig opmærksomhed til den måde vores turtles færdes på. For hvordan bevæger en turtle sig egentlig og hvad betyder dens bevægelser for smitten?

Bevægelsesmønstre

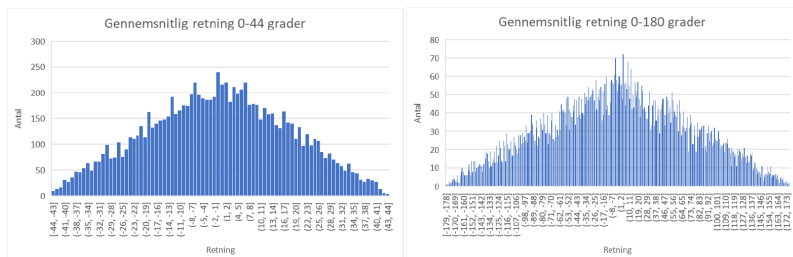
På et tidspunkt undrede vi os over, hvorfor den indbyggede skabelons kode, for styring af vores turtles, så ud som den gjorde. Nærmere bestemt, hvorfor der lige er valgt 44 grader, som det største udsving? Hvilken form for bevægelsesmønstre ville denne kode give anledning til, og hvad ville der ske, hvis vi ændrede koden til at vælge tilfældige tal mellem 0 og 180 for eksempel? Vi lavede hurtigt en ny simulation med to turtles der hver trækker et spor efter sig. Den røde turtle bruger den oprindelige kode, og den blå har erstattet 44 med 180.



Figur 2.2: Figuren viser bevægemønstret (tv.) og koden (th.) fra vores simulation.

Det ses tydeligt, at den røde turtle dækker langt mere af skærmen end den blå. Den vil dermed også møde flere forskellige turtles og som følge deraf have større risiko for at blive smittet. Som beskrevet i afsnittet om fravalg, har vi ikke indbygget sociale netværk som en del af vores model. Men denne ændring i bevægelsesmønstrene kan ses som en modellering af en restriktion, der nedsætter antallet af møder. F.eks. lukning af skoler, butikker, arbejdspladser mv. Effekten af denne ændring, undersøges i resultat afsnittet.

Hele metoden med først at dreje til venstre og derefter til højre fik os også til at undre os. Er det lige sandsynligt at dreje skarpt til højre som det er at bevæge sig lige ud? Det undersøgte vi i et regneark hvor venstre blev repræsenteret af negative tal og højre af positive tal. Med følgende 3 formler: $=\text{SLUMPMELLEM}(-44;0)$, $=\text{SLUMPMELLEM}(0;44)$ og $=\text{SUM}(A1:B1)$ fandt vi frem til hvilken retning vores turtle vil gå. Vi gentog denne simulation 10.000 gange og fik følgende histogram over retningerne:



Figur 2.3: Til venstre ses resulterende retninger med random “0 to 44 degs” og til højre ses tilsvarende med “0 to 180 degs”.

Det ses her tydeligt, at det er langt mere sandsynligt at fortsætte lige ud, end det er at foretage skarpe sving. Det passer fint med det man kan se på det røde spor. Når ydergrænserne sættes til 180 grader (grafnen til højre), vil langt flere sving opnå større vinkler, og sporet vil dermed blive mere kompakt og krøllet.

De endelige gennemkørsler

De endelige kørsler vi valgte at medtage i artiklen, udspringer fra et ønske om, at reducere variationen i vores gennemkørsler, uden at låse parametre, der ville gøre simulationen alt for kunstig. Som eksempel starter vores “patient zero” altid i midten af verdenen, da epidemien ofte døde ud hvis patienten startede i en meget yderlig position. Det gav en unødigt variation, der ikke stemmer med det vi ønsker at modellere.

De tre kørsler, som vi beskriver i resultatafsnittet, adskiller sig på følgende to parametre, bevægelsesmønster og forsvindende/blivende immunitet. Overvejelser og begrundelser præsenteres i de kommende afsnit.

Vi valgte at gennemføre hver gennemkørsel 20 gange, et antal der i vores optik var tilstrækkelige til at give et overordnet, men retvisende resultat. Efterfølgende erfarede vi at, forskere fra DTU Compute, til sammenligning udførte 40 gennemkørsler for hver ændret parameter (Statens Serum Institut, 2020a, s. 10). Hvilket underbygges af Abdou, Hamill, & Gilbert (2012), der siger at 30 gennemkørsler er tilstrækkeligt og at der som oftest gennemføres et sted mellem 30-50 kørsler. Mere ville være spild af tid.

Bevægelsesmønster 44, immunitet = 0. Vi har valgt, at alle turtles har samme bevægelseshastighed. Dette bevægelsesmønster kan oversættes til en normal hverdag, uden nogen form for restriktioner. Vi har valgt dette for at give et billede af en sygdomsspredning i et samfund, hvor man ikke aktivt forsøger at stoppe smittespredning. Databoksen “Mister immunitet?” er sat til 0 og betyder, at der ikke er risiko for at miste sin immunitet, når først den er erhvervet. Dette har vi valgt, da man som udgangspunkt ikke mister sin immunitet, når først den er der (Nicholson, 2016). Hvis det sker, er der ofte tale om en ny virus variant. Denne idealisering reducerer gennemkørslernes variation betydeligt og benyttes også i virkelighedens arbejde med ABM for COVID-19-pandemien (Badham, Barbrook-Johnson, Caiado, Castellani, (2021).

Bevægelsesmønster 44, immunitet = 0. Vi så, at 180-bevægelsesmønsteret gav en langt mere restriktiv bevægelse, og blev interesseret i hvordan dette havde betydning for smittespredningen. Vi valgte, at lave gennemkørsler med disse indstillinger, da vi gerne ville se hvordan et mere restriktivt bevægelsesmønster, ville påvirke udviklingen af sygdommen. Disse indstillinger kunne symbolisere virkelighedens restriktioner hvor fritidsidræt, serveringssteder og kulturinstitutioner lukkede ned, begrænsede folks færden og dermed mængden af tilfældige møder.

Bevægelsesmønster 44, immunitet = 1. I lang tid kørte vi med en simulation, hvor der var en risiko for at miste sin immunitet, ligesom der var risiko for slet ikke at erhverve sig immunitet efter sygdom. Med den indstilling (Mister immunitet? = 1) så vi gennemløb hvor mængden af inficerede steg igen, efter at være faldet. Dette gav bølger i epidemiens forløb, og resulterede i, at vi stod med nogle gennemløb med meget store variationer. Disse bølger virkede genkendelige fra virkelighedens coronapandemi, hvor vi har været vidner til flere smittebølger. I virkeligheden handlede bølgerne mere om årstidsvariationer og nye mutationer, end om egentlig mistet im-

munitet. Indstillingen “Mistet immunitet? = 1” bliver dermed en måde at indtænke påvirkningen af nye virusmutationer i vores model.

Resultater

Håndtering af den matematiserede situation

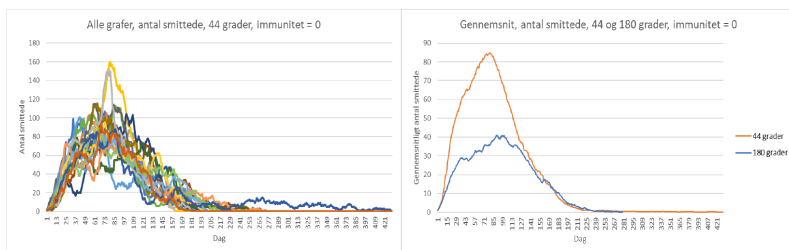
Med en fungerende model ved hånden, er det på tide at undersøge hvilke former for resultater den kan producere. I hver kørsel, er der for hver dag, registreret antallet af raske, syge, immune, døde og nysmittede. Disse data er alle blevet opsamlet i tre regneark, og repræsenterer resultater fra de ovennævnte 3 x 20 gennemkørsler.

Hvordan forholder vi os til variationerne?

Da agenternes startpunkter og bevægelser styres af tilfældigheder, varierer sygdommens forløb fra gang til gang. Nogle gange dør den hurtigt ud, med få smittede og døde til følge, og andre gange forløber den med høje smittetal over lang tid, og med mange dødsfald som resultat. Så hvordan kan vi sige noget meningsfuldt om resultaterne, når de varierer så meget?

En mulighed kunne være at lægge alle graferne fra én simulation, oveni hinanden.

Denne afbildning af data har både fordele og ulemper. Graferne dækker hinanden og er svære at skelne fra hinanden, så det kan være vanskeligt præcist at udtale sig om hvad trenden er. Til gengæld er det nemt at identificere de kørsler, der falder udenfor normalbilledet. F.eks. den blå epidemi der fortsætter, er meget længere end de andre.



Figur 2.4: T.v. alle grafer over antal smittede, fra simulationen 44 grader, immunitet = 0. T.h. grafer der viser gennemsnit over antal smittede for hhv. 44 grafer og 180 grader, immunitet = 0

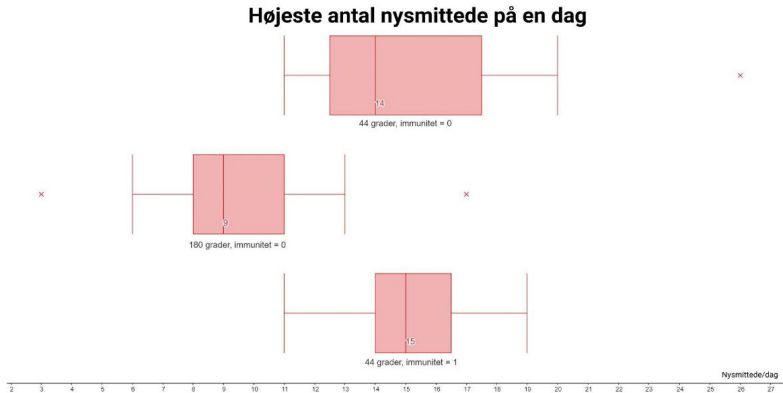
For at udtale sig om den generelle trend i kørslerne, kunne det være en mulighed at afbilde gennemsnittet af vores data. For samme datasæt som ovenfor, ser det ud som den orange graf på figur 2.4.

På denne måde får de mest afvigende datasæt mindre at skulle have sagt, og vi kan med rimelighed sige, at dette er det mest sandsynlige udfald af epidemien.

Metoden med at tage gennemsnittet, egner sig også til at sammenligne data på tværs af kørsler med forskellige indstillinger.

Her ses det tydeligt at bevægelsesmønstret med 180 grader, gennemsnitligt fører til langt mindre smitte end bevægelsesmønstret med 44 grader. Vi kan dermed konkludere at ændringer i bevægelsesmønstret er en virksom måde at efterligne restriktioner i samfundet, der har til formål at nedbringe antallet af kontakter.

Et af de tal der har været meget fokus på gennem pandemien har været det daglige antal nysmittede. Udviklingen i tallet har fungeret som pejlemærke i forhold til hvilken retning, pandemien var på vej og i de første dele af pandemien, var der direkte sammenhæng mellem antallet af smittede og antallet af indlagte på hospitalerne. I forhold til hospitalerne er det mest interessant at kigge på spidsbelastningen. Hvor mange nysmittede er der på en dag, når epidemien udvikler sig hurtigst?

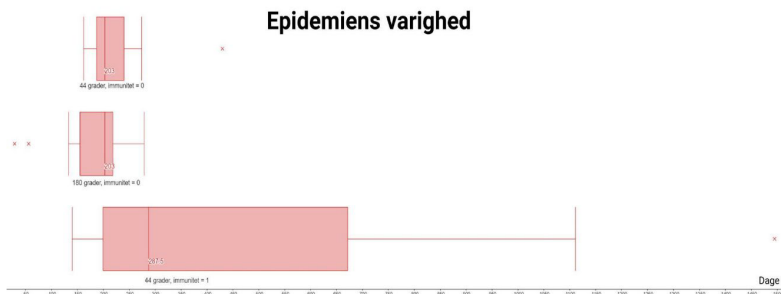


Figur 2.5: Boksplot for det maksimale antal nysmittede på en dag, fra de tre typer gennemkørsler.

Ovenstående boksplots afbilder det maksimale antal nysmittede/dag, i hver af de 20 kørsler, for hvert af vores datasæt. Det ses at “44 grader, immunitet = 0” og “44 grader, immunitet = 1” minder meget om hinanden. Det skyldes, at det højeste antal nysmittede altid ligger i starten af epidemien, og, at forskellen ift. immunitetens varighed derfor ikke spiller nogen rolle her. Til gengæld fører det restriktive bevægelsesmønster på 180 grader tydeligt til lavere smittebelastning.

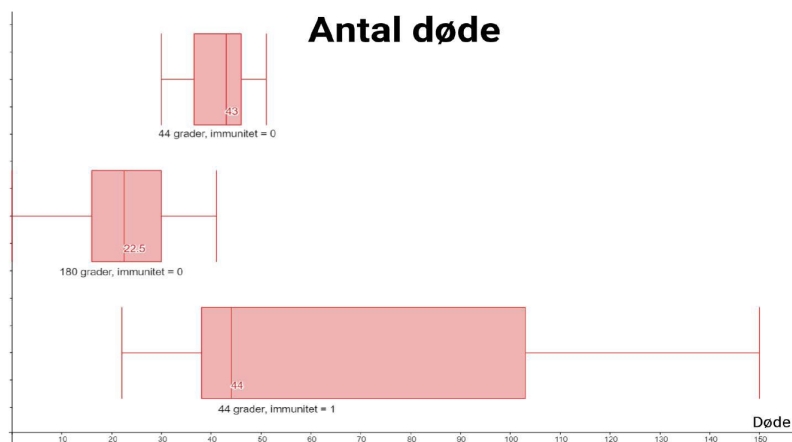
Bemærk at statistiske outliers er markeret med x. Det er datapunkter der ligger mere end $1,5 \times$ kvartilbredden fra medianen

En tilsvarende undersøgelse kan laves i forhold til epidemiens varighed.



Figur 2.6: Boksplot for det epidemiens varighed fra de tre typer gennemkørsler

Her ses tydeligt effekten af den faldende immunitet, som gentagne gange kan få epidemien til at blusse op igen. Men spørgsmålet er om dette også smitter af på antallet af dødsfald?



Figur 2.7: Boksplot for antal døde, fra de tre typer gennemkørsler

Her kan man se, at medianen for antal dødsfald er praktisk talt den samme for “44 grader, immunitet = 0” og “44 grader, immunitet = 1”. Til gengæld ligger det øvre kvartilsæt og maksimumværdien langt over for “44

grader, immunitet = 1". Dette sker når man oplever gentagne voldsomme opblusninger, hvor store dele af befolkningen i tiden forinden, har mistet deres immunitet.

Beregning af kontakttallet

Et andet tal vi har vænnet os til at holde øje med, er kontakttallet. Beregning af dette er gennemgået i teoriafsnittet. De tre parametre der indgår i udregningen, kan alle findes i vores simulerede datasæt.

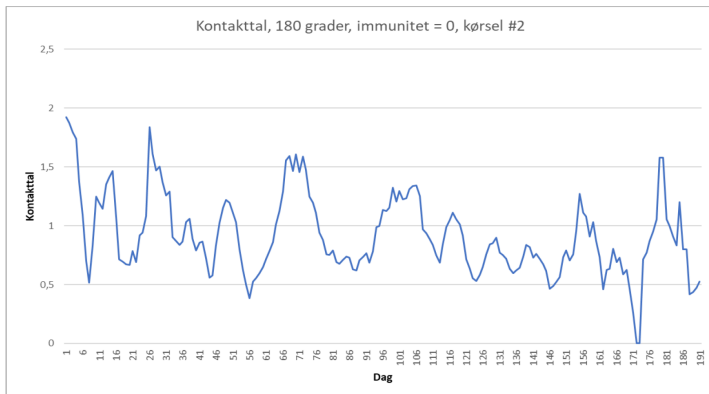
Det drejer sig om:

$\gamma = \frac{1}{T}$ Hvor T er tiden en smittet turtle er syg. I vores model er det 10 dage.

β er antallet af smitsomme møder som en enkelt inficeret person i gennemsnit har på en enkelt dag. Dette kan udregnes som $\frac{\text{antal nysmittede}}{\text{antal smittede}}$. Vi tager et gennemsnit for begge tal over de seneste 7 dage, for at få jævnet tallene en smule ud.

Kontakttallet $R_e = \frac{\beta}{\gamma}$ kan dermed beregnes som $R_e = \frac{\frac{\text{antal nysmittede}}{\text{antal smittede}}}{\frac{1}{10}} = \frac{\text{antal nysmittede}}{\text{antal smittede}} \cdot 10$

På baggrund af beregninger i Excel, kan kontakttallet præsenteres på denne måde:



Figur 2.8: Grafisk repræsentation over kontakttallet for simulering "180 grader, immunitet = 0, kørsel #2".

Diskussion

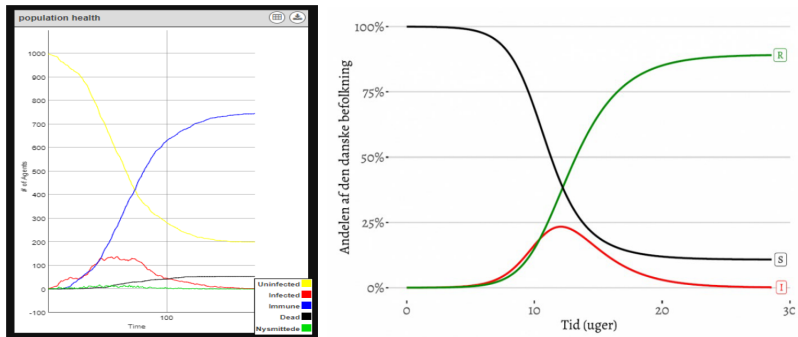
Hvorfor valgte vi ABM?

Meget af vores motivation for at simulere COVID-19 gennem en ABM, udsprang af lysten til at undersøge mulighederne i programmering, men også en generel lyst til at lære programmering.

Meget af energien gik i den første del af arbejdet, til at sætte sig inde i selve programmeringssproget. Dette gjorde også, at vores generelle tilgang til modelleringsarbejdet ikke fulgte en klassisk matematisk modellerings-tilgang, hvor fokus er på et konkret ekstra-matematisk problem der skal løses (Niss, 2015). Dette kom snarere som et sekundært mål, når først vi var trygge i selve programmeringen og havde en funktionel ABM, der i høj grad gav os mulighed for at fange, repræsentere, forstå eller analysere et ekstramatematisk fænomen (67).

Når vi kigger på en epidemisimulation, er den generelle måde at arbejde med det på, at anvende en klassisk epidemimodel som SIR-modellen. Denne model fordrer, at man har kendskab til, og kan arbejde med differentialligninger, noget man ser i matematikundervisningen på 3.g-niveau. Vi var interesseret i at se, om man kunne arbejde med dette gennem programmering og simulering og skabe en realistisk model af et epidemiforløb, der er tilsvarende det vi ser når der anvendes differentialregning.

Ser man på de grafer, der blev dannet under gennemkørsel af vores simulation opleves der en stor sammenlignelighed med den graf SIR-modellen danner.



Figur 2.9: Sammenligning af grafisk afbildning fra vores simulation (tv.) med grafisk afbildning af SIR-modellen (th), Genoptryk fra, ”Hvorfor er det svært at forudsige epidemier, lige efter de er gået i udbrud?” af Ekstrøm C., Budtz-Jørgensen E. & Jensen A. (2020), Videnskab.dk

ABM som matematisk model

Indvirkningen fra den hastige teknologiske udvikling har også haft betydning for måden man anskuer matematisk modellering på. Simulation er således også blevet en matematisk model, der også kombinerer træk fra de andre STEM-discipliner. Groshong (2016) beskriver simulation som “a method for implementing a model over time” (s. 19) og understreger, at simuleringen er afhængig af matematiske modeller som en del af selve kodingen.

Edwards & Hamson (fra: Groshong, 2016, s. 19) beskriver fire typer af matematiske modelkategorier, henholdsvis de deterministiske eller stokastiske og empiriske eller mekaniske. Vores model har mange kendetegn fra den stokastiske kategori, da en af hovedprincipperne ved simuleringen er, at den bygger på tilfældigheder. Vi arbejder netop med et output, der består af varierende resultater, som vi analyserer og behandler. Vores model er drevet af data, som er et kendetegn fra den empiriske kategori, og den placerer sig således i en kategorisering, der er stokastisk/empirisk. Modeller i den kategori kendetegnes ved, at de er “Built from analysis of variance” (Groshong, 2016, s. 19)

Afmatematisering og validering

Når der arbejdes med ABM, er det vigtigt at huske på, at der er tale om en konstrueret virkelighed. Netop en af fordelene ved ABM er, at der er flere mulige fremtidsscenarioer (Crooks & Heppenstall, 2012, s. 95). Det er også med til at rejse det grundlæggende spørgsmål *“hvor virkelighedstro er modellen?”*

Overordnet set har vi foretaget så mange idealiseringer/forsimplinger, at vores data ikke kan bruges kvantitativt i forhold til virkeligheden. Alene vores manglende overvejelser omkring modellens skala, gør at vi ikke kan udtale os om, at der vil dø x personer på y dage og at vi ikke kan forudsige, hvor længe der går før epidemien er overstået. Men betyder det, at vores model slet ikke kan bruges til noget? Nej, det mener vi ikke. Modellens mekanismer og de mønstre vi kan observere, er meget genkendelige fra virkeligheden og fra de traditionelle SIR-beregninger (Se figur 2.9).. Man kan sige, at Figur 2.9. Sammenligning af grafisk afbildning fra vores simulation (tv.) med grafisk afbildning af SIR-modellen (t.h), Genoptryk fra, ”Hvorfor er det svært at forudsige epidemier, lige efter de er gået i udbrud?” af Ekstrøm C., Budtz-Jørgensen E. & Jensen A. (2020), Videnskab.dk modellen kan bruges kvalitativt. Den kan give brugeren erfaringer med hvordan smitteudviklingen påvirkes, når afstanden øges eller når en ny mutation er mere smitsom. Vores kontakttal ligger generelt mellem 0,5 og 2,5, meget lig virkeligheden, men det har nok mere at gøre med kontakttallets natur, hvor 1 svarer til en jævn epidemi og kontakttal <1 svarer til en aftagende epidemi.

De variationer vi bearbejder i vores resultatafsnit, er også et glimrende eksempel på, hvordan tilfældighederne spiller ind og skaber et differentieret billede med mange “virkeligheder”. Vi ser ABM som et værktøj, til at teste forskellige parametres betydning, så man kan lære fra dem. Kigger vi på virkelighedens COVID-19-håndtering, har vi erfaret os, at ABM i den grad er blevet valideret som et anvendeligt værktøj, hvor både DTU og NBI (Statens Serum Institut, 2020a) brugte ABM til coronaberegninger.

Blackboxing

Blackboxing er et udtryk for, at det ikke er gennemsigtigt, hvad der foregår i en computermodel. Man giver modellen nogle inputs og får et output ud, uden at vide hvad der sker undervejs. Vi har forsøgt at undgå denne blackboxing, bl.a. ved at undersøge vores turtles bevægelsesmønstre. Vi havde

brug for at forstå, hvordan de bevægede sig og hvad det havde af betydning for smitten. For at forstå bevægelserne til bunds, trak vi endda modellens opbygning over i Excel, for at få et mere fuldkomment billede.

En af vores motivationer for at vælge ABM var, at vi ønskede at trække 3.g matematikken ud, så folkeskolens ældste klasser kunne arbejde med modellen. Men programmeringen har vist sig hurtigt at blive så avanceret, at de færreste udskolingselever vil kunne forstå hvad, der sker i detaljer uden forkendskab til programmering. Så hvis vi vælger at benytte modellen i folkeskolen, bliver der for alvor tale om en black box.

Referencer

Artikler:

Abdou, M., Hamill, L., & Gilbert, N. (2012). Designing and building an agent-based model. In *Agent-based models of geographical systems* (pp. 141-165). Springer, Dordrecht. DOI : 10.1007/978 – 90 – 481 – 8927 – 4₈

Badham, Jennifer and Barbrook-Johnson, Pete and Caiado, Camila and Castellani, Brian (2021) *Justified Stories with Agent-Based Modelling for Local COVID-19 Planning*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 24 (1). p. 8. DOI : 10.18564/jasss.4532 Url: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/24/1/8.html>

Brennan, K., & Resnick, M. (2012, April). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. In *Proceedings of the 2012 annual meeting of the American educational research association, Vancouver, Canada* (Vol. 1, p. 25). <http://scratched.gse.harvard.edu/ct/files/AERA2012.pdf>

Crooks, A. T., & Heppenstall, A. J. (2012). Introduction to agent-based modelling. In *Agent-based models of geographical systems* (pp. 85-105). Springer, Dordrecht. DOI : 10.1007/978 – 90 – 481 – 8927 – 4₅

Kai, D., Goldstein, G. P., Morgunov, A., Nangalia, V., & Rotkirch, A. (2020). Universal masking is urgent in the COVID-19 pandemic: SEIR and agent based models, empirical validation, policy recommendations.

<https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.13553>

Nicholson L. B. (2016). The immune system. *Essays in biochemistry*, 60(3), 275–301. <https://doi.org/10.1042/EBC20160017>

Niss, M. (2015). Prescriptive modelling—challenges and opportunities. In *Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 67-79) https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_5

Sengupta, P., Kinnebrew, J. S., Basu, S., Biswas, G., & Clark, D. (2013). Integrating computational thinking with K-12 science education using agent-based computation: A theoretical framework. *Education and Information Technologies*, 18(2), 351-380. DOI:10.1007/s10639-012-9240-x

Bøger:

Baktoft, A. (2013). *Matematik i virkeligheden: Bind 1*. Denmark: Forlaget Natskyggen.

Groshong, K. (2016). Different types of mathematical models. *Mathematical modeling and modeling mathematics*, 17-24. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Internetressourcer::

Ekstrøm C., Budtz-Jørgensen E. & Jensen A. (2020, 28. marts). *Hvorfor er det svært at forudsige epidemier, lige efter de er gået i udbrud?* Videnskab.dk: <https://videnskab.dk/forskerzonen/krop-sundhed/hvorfor-er-det-svaert-at-forudsige-epidemier-lige-efter-de-er-gaaet-i-udbrud>

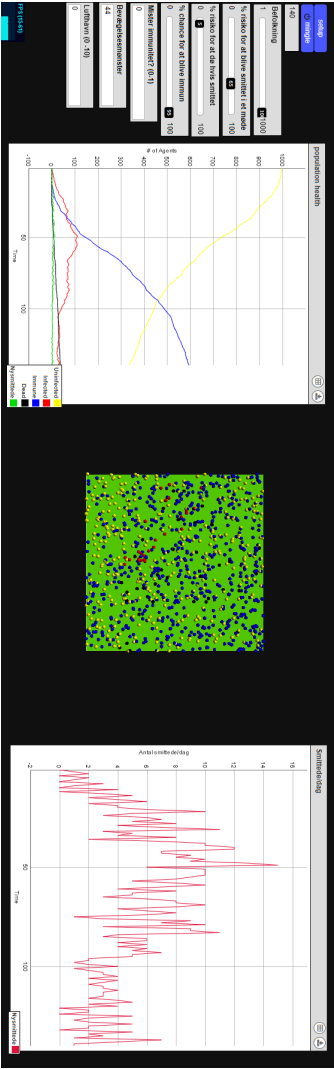
Fjastrup, L. (u.å.). *Epidemimatematik: Vaccination*. Matematikdidaktik. <https://matematikdidaktik.dk/temaer/epidemimatematik/epidemimatematik-vaccination>

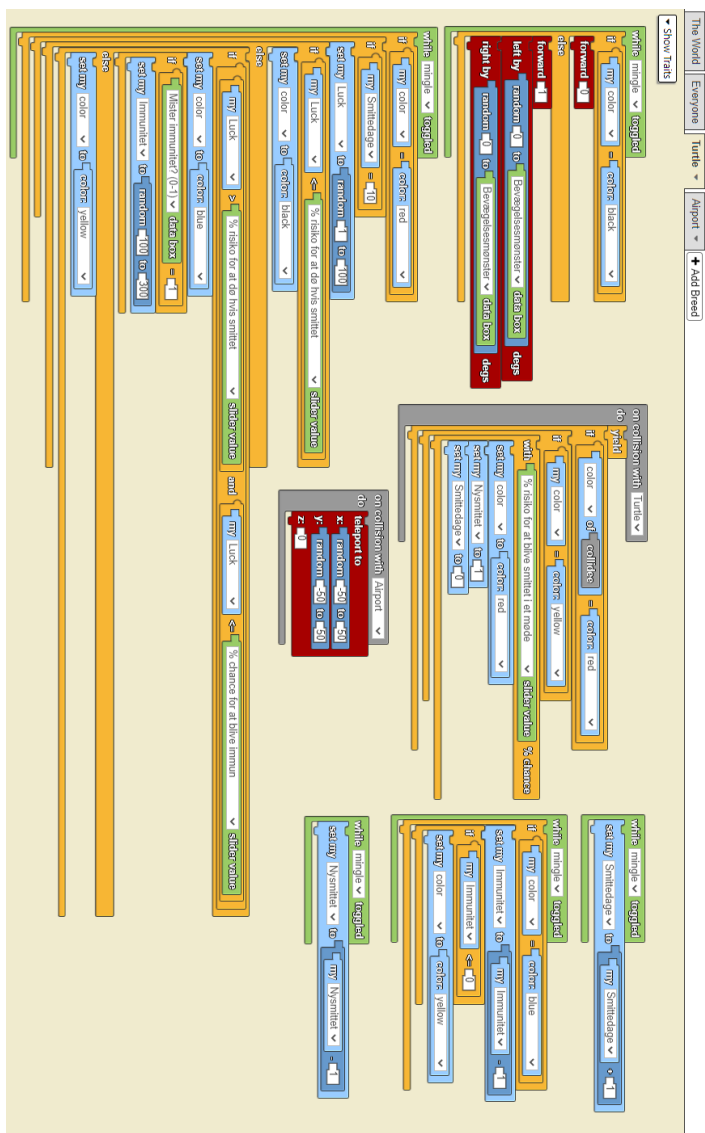
Niss, M. & Jankvist, U. T. (u.å.) *Modelleringscyklussen*. Matematikdidaktik. <https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/modelleringscyklussen>

Statens Serum Institut, (2020a), Ekspertrapport af den 10. december 2020 - effekten af kontaktopsporing. SSI. <https://covid19.ssi.dk/-/media/arkiv/subsites/covid19/modelberegninger/ekspertrapport-effekten-af-kontaktopsporing-10122020.pdf?la=da>

Statens Serum Institut, (2020b), COVID-19 i Danmark. *Epidemiologisk trend og fokus: Kontakttal.*: <https://files.ssi.dk/COVID19-epi-trendogfokus-11062020>

A Bilag 1





Spring ud som søndagsbilist - matematisk modellering med fokus på benzinøkonomi

Lasse Skjerlie Gilling, Ny Hollænderskolen &
Mette Bak Tang, Skolen på Grundtvigsvej

Abstract

In this article we examine through mathematical modelling to what extent we can reduce the gasoline usage, and thereby our economical expenses, by driving a specific distance with a lower and steadier speed than seeking the maximum speed limit. The modelling is based on both empiric and theoretical data as we seek to put forward multiple models and examine them from different angles. The empiric modelling provides a picture of an actual good reduction of the gasoline usage by driving the distance at a lower steadier speed than when seeking the maximum speed limit, while the theoretical modelling is too complex for us to get valid data. During the modelling we include time as a factor since the time spent on driving the distance also has a great influence on our choice of future driving style.

Introduktion

Lad det være sagt fra start: Økonomisk set kan det ikke svare sig for os som to studerende fra København at transportere os i bil fra Vanløse til Odense, når vi skal til undervisning på SDU. Tog, flibxus eller samkørsel med andre studerende er billigere alternativer. Imidlertid anvendes tiden i bilen til relevant studiearbejde, og komforten er høj, så vores udgangspunkt er, at vi ønsker at fortsætte denne transportform. Dog er vi interesserede i, at køreturen bliver så billig som mulig, og da vi kun har minimal mulighed for at begrænse udgiften til Storebæltsbroen ved at anvende brobizz, må vi

i stedet rette fokus mod, hvor meget vi kan reducere benzinudgifterne ved at ændre kørestil fra ”fuld fart frem” til ”søndagsbilist”?

Kørestilen ”fuld fart frem” defineres her som at søge den maksimalt tilladte hastighed på enhver given strækning, mens kørestilen ”søndagsbilist” defineres som at køre med den laveste forsvarlige hastighed. Fra Vanløse til SDU i Odense køres næsten hele turen på motorvej, og derfor er det især relevant at fastsætte den laveste forsvarlige hastighed ved motorvejskørsel. Ifølge Færdselslovens §44 (Transport- og Boligministeriet, 2013) er det kun tilladt at færdes på motorvej med køretøjer, der på vandret vej kan fremføres med mindst 50 km/t. Endvidere angives i Færdselslovens §41, at man ikke må være til hinder for ”andre kørendes normale kørsel ved uden rimelig grund at køre med overdreven lav hastighed” (Transport- og Boligministeriet, 2013). En bil, der kører bag en lastbil og holder samme hastighed som denne, vil ikke være til hinder for andres normale kørsel, og da en lastbil må køre 80 km/t på motorvej, defineres denne hastighed som den laveste forsvarlige hastighed. Den maksimale hastighed er på dele af motorvejen 110 km/t, mens den på andre delstrækninger er 130 km/t, som det fremgår af Figur 3.1.



Figur 3.1: Den gule streg på kortet illustrerer strækningen Vanløse - SDU i Odense. De orange strækninger er motorvej, hvor der må køres 130 km/t, mens den maksimale hastighed på de grønne strækninger er 110 km/t (Arent, 2021).

Definitionen af de to antagonistiske kørestile danner udgangspunkt for nærværende artikels behandling af en investigerende undersøgelse (Lindhardt & Larsen, 2021) ud fra følgende undersøgelsesspørgsmål:

I hvor høj grad kan vi nedbringe benzinforbruget på kørslen af strækningen Vanløse - SDU ved at køre bilen ved lavere og mere stabil hastighed frem for at søge at køre den maksimalt tilladte hastighed?

Undersøgelsen bygges op om en matematisk modelleringsproces, som den beskrives hos Niss (2015) og Niss & Jankvist (u.å.) med følgende delprocesser:

- Præ-matematisering
- Matematisering
- Problemløsning
- Af-matematisering
- Validering.

Delprocesserne udfoldes løbende gennem denne artikel, og tegningen herunder er udarbejdet i forbindelse med modelleringens indledende præ-matematiseringsproces, idet den bidrager til et overblik over mulige variable og perspektiver af betydning for benzinøkonomien. I den videre præ-matematiseringsproces konkretiseres og idealiseres det ekstra-matematiske område gennem udvælgelse af variable af væsentlig betydning for modellens validitet:



Figur 3.2: Variable og perspektiver af betydning for benzinøkonomien.

I det følgende redegøres for den teori, vi anvender i modelleringen, samt vores til- og fravalg i arbejdet med at konkretisere og idealisere det ekstrapræmatematisk område. Indledningsvis arbejdes med empirisk modellering, og dernæst søges en teoretisk tilgang til modelleringen ud fra de fysiske kræfter, der påvirker en bil med konstant hastighed. Slutteligt søges en validering af hver af de to modeller ved at indsamle data under afprøvning af de to antagonistiske kørestile.

Teori

Bilen

Strækningen mellem Vanløse og SDU i Odense køres i en Suzuki Swace 1.8 Hybrid med en 1.8 L benzinmotor, som yder 98 HK / 72 kW ved 5.200 omdrejninger/min, samt en elmotor på 72 HK / 53 kW. Samlet yder de to motorer maksimalt 122 HK / 90 kW (Suzuki Bilimport Danmark A/S, 2020).

Bilen vejer 1.365 kg uden last og personer. I beregningerne anvendes vægten 1.500 kg., da dette modsvarer to personer uden nævneværdig bagage. Bilen har dæktryksensor, som sikrer, at dæktrykket er korrekt i de påmonterede Continental WinterContact TS 870. Dette dæk har energimærke C (Continental, (u.å.)), og dækket er således placeret midt på skalaen fra A til E, når det kommer til rullemodstand og benzinøkonomi.

Fra d. 1. september 2017 blev Worldwide Harmonized Light-duty Vehicles Test Procedure (WLTP) gradvist indført som en ny EU-norm til at afløse den hidtidige EU-norm NEDC, idet WLTP giver mere valide resultater (Arent, 2018). EU-normen danner grundlag for EU's regulering af bilers CO₂-emissioner, og i WLTP-testen måles disse emissioner under gennemførsel af en nøje tilrettelagt hastighedsprofil, hvor hver af de fire hastighedskategorier testes fortløbende i løbet af en halv time (UNECE, 2021). Hastighederne i testen afhænger af bilklassen, og Suzuki Swace 1.8 Hybrid hører til klasse 3a grundet forholdet mellem motoreffekt og vægt (UNECE, 2021). I denne klasse testes bilerne ved højere hastighed end i klasser med et mindre forhold mellem motoreffekt og vægt, og brændstofføkonomien er angivet som følger:

Brændstofføkonomi iflg. WLTP-norm	
Lav hastighed (by), km/l	23,4
Mellem hastighed (forstad), km/l	27,0
Høj hastighed (landevej), km/l	25,0
Ekstra høj hastighed (motorvej), km/l	17,5
Blandet kørsel, km/l	22,2
CO ₂ udslip, gram/km	103

Figur 3.3: Brændstofføkonomi for Suzuki Swace 1.8 Hybrid iflg. WLTP-norm (Suzuki Bilimport A/S, 2020).

Kategorien "Ekstra høj hastighed" antages her at skulle simulere benzinforbruget ved motorvejskørsel med en hastighedsbegrænsning på 110 km/t, og i tabellen herunder er der derfor lagt 20 % ekstra benzinforbrug til for hastigheden 130 km/t (Brandt, (u.å.); Wichmann & Lassen, 2022):

Tabel 3.1: Estimerede hastigheder for WLTP-kategorier.

Estimerede hastigheder for WLTP-kategorier	
Hastighedskategori	Estimeret hastighed
Lav hastighed	50 km/t
Mellem hastighed	60 km/t
Høj hastighed	80 km/t
Ekstra høj hastighed	110 km/t
Uden for kategori	130 km/t

Kræfter, arbejde og energi i benzin

Som led i modelleringens idealisering vurderes, at en bil i bevægelse primært er påvirket motorens drivkraft, samt af luftmodstand og rullemodstand, som begge er kræfter modsat rettet bevægelsesretningen. Idet den resulterende kraft, F_{res} , er nul for et legeme med konstant hastighed, skal bilens elmotor og benzinmotor samlet set levere en kraft i bevægelsesretningen svarende til summen af luft- og rullemodstand. Den altovervejende del af turen tilbagelægges på motorvej med kun få variationer i retning og højdeniveau. Vejen er naturligvis tilpasset landskabet med deraf følgende retningsskift og højdevariationer, men i denne modellering tages ikke højde for accelerationerne i forskellige dimensioner, der følger af disse retningsskift og højdevariationer. Reelt vil et 90 graders sving på en landevej resultere i, at bilen decelereres fra 80 km/t til 0 km/t i én dimension, mens den accelereres fra 0 km/t til 80 km/t i en anden dimension, og da accelerationer er energikrævende, må vi på forhånd forvente, at vores idealiserede model vil resultere i et lavere estimeret benzinforbrug end det reelle.

Rullemodstand Rullemodstanden (F_{rulle}) afhænger af dæktype, dæktryk og vejbanens beskaffenhed, hvilket i nedenstående formel samles i faktoren μ (my), som multipliceres med normalkraften (F_n) på bilen. Idet vi ser bort fra højdevariation i vores modellering, og tyngdekraften dermed står vinkelret på bevægelsesretningen, bliver normalkraften lig med tyngdekraften på bilen. Rullemodstanden beregnes ved formlen:

$$F_{\text{rulle}} = \mu \cdot F_n = \mu \cdot m_{\text{bil}} \cdot g$$

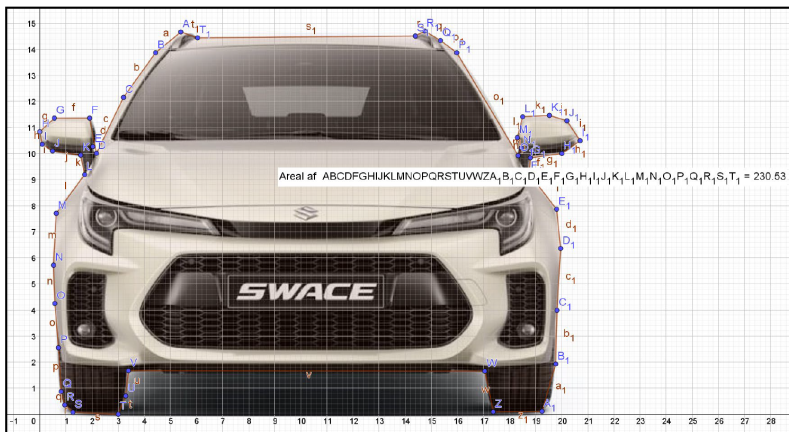
Luftmodstand Luftmodstanden (F_{luft}) afhænger af luftens densitet (ρ), bilens hastighed (v), overfladearealet af bilens lodrette tværsnit (A)

og luftmodstandskoefficienten (c_w), som for moderne biler kan sættes til 0,3 (Smith, Krag & Jonassen, 2014). Størrelsen på kraften beregnes ved formlen:

$$F_{\text{luft}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w$$

Luftens densitet (ρ) afhænger af temperaturen, det atmosfæriske tryk og den relative luftfugtighed. Ved 1 atmosfæres tryk varierer densiteten af tør luft fra 1,2 kg/m³ ved 20 grader celsius til 1,3 kg/m³ ved 0 grader celsius. Da modelleringen og de senere beskrevne valideringer er foretaget februar/marts med temperaturer omkring frysepunktet, er densiteten i beregningerne sat til 1,3 kg/m³.

Suzuki Bilimport Danmark A/S (2020) har angivet bilens højde til 1,46 m og bredden til 1,79 m. Arealet af bilens tværsnit er bestemt til 2,3 m² ved brug af Geogebra, hvor et billede af bilen er indsat i målestoksforholdet 1:100, og polygonværktøjet derefter er anvendt til at indtegne omridset af tværsnittet:



Figur 3.4: Modellering af Suzuki Swace i Geogebra

Motorernes arbejde Som det fremgår af formelen ovenfor, stiger Fluft med kvadratet på hastigheden. Imidlertid er hastigheden af endnu større betydning, når det kommer til det arbejde, bilens motorer skal yde for at opveje denne modsatrettede kraft, idet arbejde er lig kraft gange vej. Således udregnes motorernes leverede energi til at opveje luftmodstanden som følger:

$$E_{luft} = F_{luft} \cdot s = F_{luft} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^3 \cdot A \cdot c_w \cdot t$$

Det ses heraf, at den energi, motorerne skal levere, stiger med hastigheden i tredje potens, og derfor må det antages, at luftmodstanden ved høje hastigheder er af større betydning end rullemodstanden, mens rullemodstanden spiller en relativt større rolle ved lavere hastigheder.

Motorernes samlede leverede energi søges fundet ved følgende formel:

$$E_{motorer} = E_{luft} + E_{rulle} = (F_{luft} + F_{rulle}) \cdot s = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w + \mu \cdot m_{bil} \cdot g \right) \cdot s$$

Energi i benzin Benzin indeholder ca. 30 MJ pr. liter (Both & Henriksen, 2008), men i en benzinmotor er det langt fra al denne energi, der omsættes til fremdrift for bilen, idet størstedelen omsættes til varme. Forholdet mellem energien til fremdrift og den samlede kemiske energi i benzinen udtrykkes ved motorens virkningsgrad (η), som for moderne benzinmotorer er ca. 25-35 % (Jensen, 2017; Clausen, 2019). Med dette som udgangspunkt sættes virkningsgraden til 30 %, når der i resultatafsnittet forsøges at beregne et teoretisk benzinforbrug:

$$V_{benzin} = \frac{E_{motorer}}{\eta \cdot E_{benzin, 1 \text{ liter}}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w + \mu \cdot m_{bil} \cdot g \right) \cdot s}{\eta \cdot E_{benzin, 1 \text{ liter}}}$$

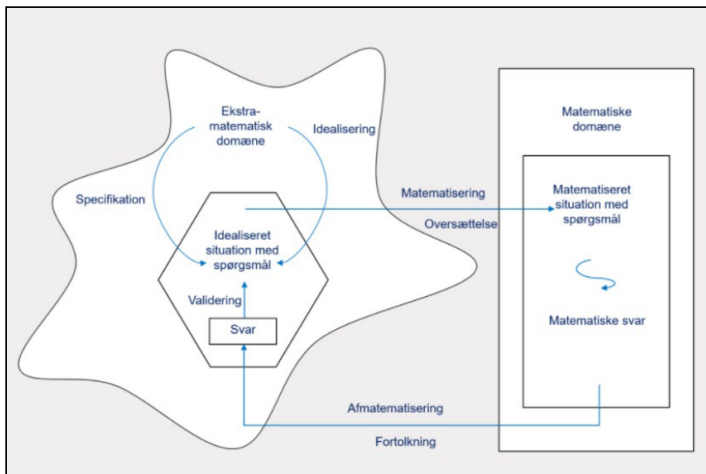
Metode

Vores tilgang til modelleringen har været iterativ og eksperimenterende. Modelleringen har både haft et empirisk og et teoretisk udgangspunkt, og

de resulterende modeller er søgt valideret gennem løbende indsamling af data på to køreture til og fra SDU. Brugen af disse data har været polyvalente, idet de både er anvendt i de iterative modelleringsprocesser og i valideringen af de endelige modeller.

Modelleringen kan ansues som værende, hvad Niss (2015, s. 68) betegner deskriptiv, idet et ekstra-matematisk område analyseres for at blive klogere på dette. Formålet med nærværende modellering er dog at anvende modellen præskriptivt (Niss, 2015, s. 69) som grundlag for mulige ændringer i vores kørestil og indstillinger af bilen. Her vil det også være relevant at inddrage overvejelser om ændringer i den forbrugte tid på køreturen samt den oplevede køreoplevelse for både fører af bilen og passager, ligesom de økonomiske overvejelser ikke kan stå alene, men må holdes op mod miljø- og klimamæssige perspektiver samt betydningen af en truende oliekrise som følge af sanktionerne mod Rusland (Wichmann & Lassen, 2022).

Som nævnt i introduktionen søgte vi igennem modelleringen at følge den matematiske modelleringsproces, som Niss (2015, s. 68-69) har beskrevet:



Figur 3.5: Modelleringscyklussen som den ses hos Niss (Fra Niss & Jankvist (u.å)).

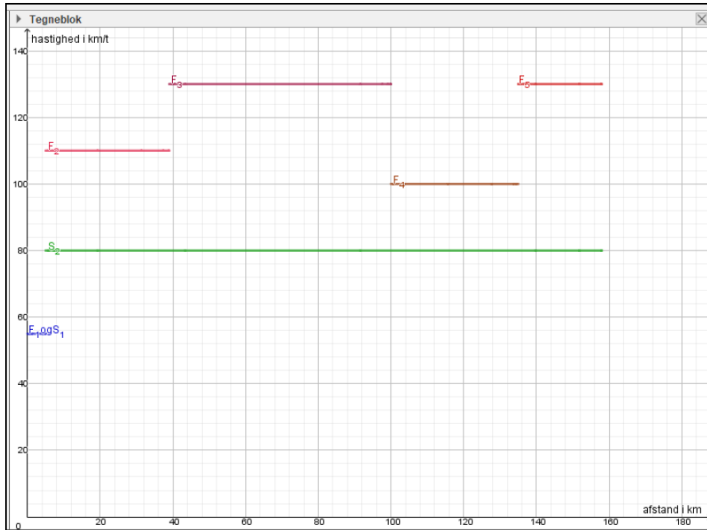
Hos Niss (2015, s. 68) indledes den matematiske modellering af en præ-matematisering, og som led i denne opstillede vi en idealiseret situation baseret på udvalgte variable fra tegningen på Figur 3.2. Udvælgelsen af variable har været med det for øje at sikre modellen størst mulig validitet, og da vi havde en formodning om, at hastigheden var den primære faktor af betydning for benzinforbruget, blev dette modellens fokus. Denne formodning kommer af, at den nødvendige motoreffekt for at opretholde en konstant hastighed stiger med lufthastigheden i tredje potens (Smith, Krag og Jonassen, 2014). Altså må en lavere hastighed medføre et betydeligt lavere benzinforbrug. Dernæst fastlagde vi rammen for undersøgelsen ved at definere to forskellige kørestile ”fuld fart frem” og ”søndagsbilist” som yderpunkter i modelleringen.

Som nævnt i introduktionen er langt størstedelen af køreturen motorvejskørsel, og det fremgår af Tabel 3.2, at det er tilladt at køre 130 km/t på hele 84 km af de 153 km motorvejskørsel. Data for delstrækningerne registreredes ved at køre turen og sammenholde færdselstavlernes angivne hastighedsbegrænsning med bilens triptæller. Disse data fremgår af Tabel 3.2 til brug for den videre modellering.

Tabel 3.2: Længde af delstrækninger defineret ud fra hastighedsbegrænsningen.

Delstrækning	Vej-/kørselstype	Distance
Vanlose - Motorvejstilkørsel, (F ₁) og (S ₁)	Bykørsel 50-60 km/t	5 km
Motorvejstilkørsel - Køge, (F ₂) samt del af (S ₂)	Motorvej 110 km/t - 80 km/t	34 km
Køge - Nyborg, (F ₃) samt del af (S ₂)	Motorvej 130 km/t - 80 km/t	61 km
Storebæltsbroen, (F ₄) samt del af (S ₃)	Motorvej 90-110 km/t - 80 km/t	35 km
Korsør - OK tank ved SDU, (F ₅) samt del af (S ₄)	Motorvej 130 km/t - 80 km /t	23 km
Distance i alt		158 km

I Figur 3.6 har vi anvendt GeoGebra til at illustrere undersøgelsens to køreprofiler, hvor køreprofilen med de maksimalt tilladte hastigheder ”fuld fart frem” (F) har røde nuancer, og køreprofilen med stabil hastighed ”søndagsbilist” (S) er grøn. Den fælles strækning, som enten køres først eller sidst på turen, betegnes F1ogS1 og er blå. Dataene, der ligger til grund for illustrationen, er de opmålte strækninger i km, og y-værdien for linjestykkerne F2-4 afgøres af hastighedsbegrænsningen som angivet på vejskilte på hver delstrækning. Y-værdien for linjestykket S2 afspejler, at vi indledningsvis har defineret den laveste forsvarlige hastighed til 80 km/t.



Figur 3.6: Illustration af de to forskellige kørestile. Lavet i GeoGebra.

I modelleringens matematiseringsproces kombinerede vi de empirisk indsamlede data fra Tabel 3.1 med WLTP-normens ligeledes empirisk indsamlede data fra Figur 3.3 for i problemløsningsprocessen at beregne de første estimater for benzinforbruget på hhv. ud- og hjemtur. I Bilag 1 ses forskellige grafiske illustrationer og beregninger med baggrund i den empirisk indsamlede data. Disse dannede grundlag for drøftelser af den videre matematiske behandling, som ledte os frem til et nærmere fokus på den tidsmæssige betydning af at have en økonomisk orienteret kørestil. Balancen mellem disse to parametre vil i sidste ende være afgørende for vores valg af fremtidig kørestil. Således opstillede vi i GeoGebra det beregnede benzinforbrug for hver delstrækning som funktion af den tid, det tager at køre den pågældende strækning, hvilket er illustreret på Figur 3.7. Beregningerne, der ligger til grund herfor, samt resultaterne af disse beregninger fremgår af Tabel 3.3 i resultatafsnittet.

Som supplement til resultaterne fra denne empirisk baserede modellering søgte vi dernæst en mere teoretisk tilgang til modelleringen med udgangspunkt i de kræfter, der påvirker en bil i bevægelse. I den her opstillede idealiserede situation er fokus kun rettet mod en endimensionel tilgang til

luftmodstand og rullemodstand. Rullemodstanden afhænger af normalkraften på bilen, og da vi i idealiseringen her ser bort fra højdevariation på ruten, er normalkraften på bilen lig med tyngdekraften. Dermed bliver bilens vægt også af betydning for benzinforbruget, om end denne vægt holdes konstant på ud- og hjemtur i nærværende modellering. Endvidere er det fælles for vores modeller, at de er opbygget stykvis lineært, idet vi i idealiseringen har valgt at se bort fra de løbende accelerationer og decelerationer, som er en naturlig del af trafikbilledet. For at opretholde en konstant hastighed på hver delstrækning, skal den resulterende kraft på bilen være nul, og således tager vores beregninger af motoreffekt afsæt i, at motoren skal yde en kraft, der er lige så stor og modsat rettet summen af luft- og rullemodstand. Selvom det ikke direkte fremgår af de stykvis lineære modeller, vil kørestilen ”fuld fart frem” uundgåeligt medføre flere accelerationer og decelerationer, og da accelerationer kræver, at motoreffekten overstiger summen af luft- og rullemodstand, mens opbremsninger - selv for en hybridbil - medfører energiomdannelse til varme, forventede vi, at en stabil hastighed ville have positiv effekt på benzinøkonomien.

Igen gennemgik vi en matematiserings- og problemløsningsproces, idet vi på baggrund af vores teoretiske viden om luft- og rullemodstand opstillede en dynamisk model i Excel, hvis oprindelige formål var at bidrage til et overblik samt til hurtig beregning af det teoretiske benzinforbrug ud fra hastighed og strækning. Imidlertid blev vi klar over, at rullemodstandskoefficienten (μ), som indgår i beregningen, ikke er en fast koefficient, men en variabel som ændrer sig med bilens hastighed og deraf følgende antal hjulrotationer. Vi søgte derfor i stedet at anvende modellen iterativt til at bestemme rullemodstandskoefficienten på hver delstrækning ved først at indtaste værdier for strækning og hastighed og dernæst at afprøve forskellige værdier for μ , indtil modellens beregnede benzinforbrug på den pågældende delstrækning svarede til, hvad vi havde beregnet i WLTP-normmodellen i Tabel 3.3. Beregningerne af rullemodstandskoefficienten viste lovende resultater ved lav kørselshastighed og kort distance, men ved stigende hastighed og længere distance blev det tydeligt, at den her opstillede model ikke kunne levere valide data. Således bevægede vi os mellem matematiserings- og problemløsningsprocesserne og af-matematiseringsprocessen ad flere omgange, da den fortolkede data ikke gav mening i det ekstra-matematiske domæne.

Slutteligt søgte vi at validere vores modeller ved at opstille en fysisk undersøgelse, hvor vi to gange kørte bilen fra Vanløse til SDU og retur med de to forskellige kørestile. Vi kørte med kørestilen ”fuld fart frem” fra Vanløse

med en helt optanket bil. Turen igennem søgte vi at køre den maksimale tilladte hastighed, som førte til accelerationer, nedbremsninger og vognbaneskift. Dog kørte vi med nedsat hastighed de første 15-20 kilometer pga. tæt morgentrafik. Endvidere havde vi indstillet bilen til "sportskørsel" samt tændt for bilens sædevarme og klimaanlæg for at maksimere benzinforbruget. På en tankstation tæt ved SDU tankedes bilen igen helt op. Vi registrerede den kørte tid og aflæste benzinforbruget på benzinstanderen. Retur til Vanløse kørte vi med kørestilen "søndagsbilist" og søgte at holde en stabil hastighed på 80 km/t. Vi kørte bag en lastbil, hvor det var muligt, for at søge læ og for at sikre, at vi ikke var til hinder for andre trafikanters kørsel. I denne situation var bilen indstillet til "ecokørsel", og ligeledes var bilens klimaanlæg indstillet på eco for at spare på benzinen. Igen tankede vi ved ankomsten til Vanløse og registrerede den kørte tid og benzinforbruget på benzinstanderen. Vores forventning til modellerne var at opnå mere valide resultater for vores hjemture som "søndagsbilister" end på udturene, hvor der var "fuld fart frem", idet de stykvis lineære modeller ikke tager højde for energitab i forbindelse med variationer i hastighed, og strømforbrug til klimaanlæg, varme i sæder og rat samt radio heller ikke har fundet plads i modellerne, i tabel 3.5 er denne data opstillet.

Resultater

Beregning af forventet benzinforbrug ud fra WLTP-norm

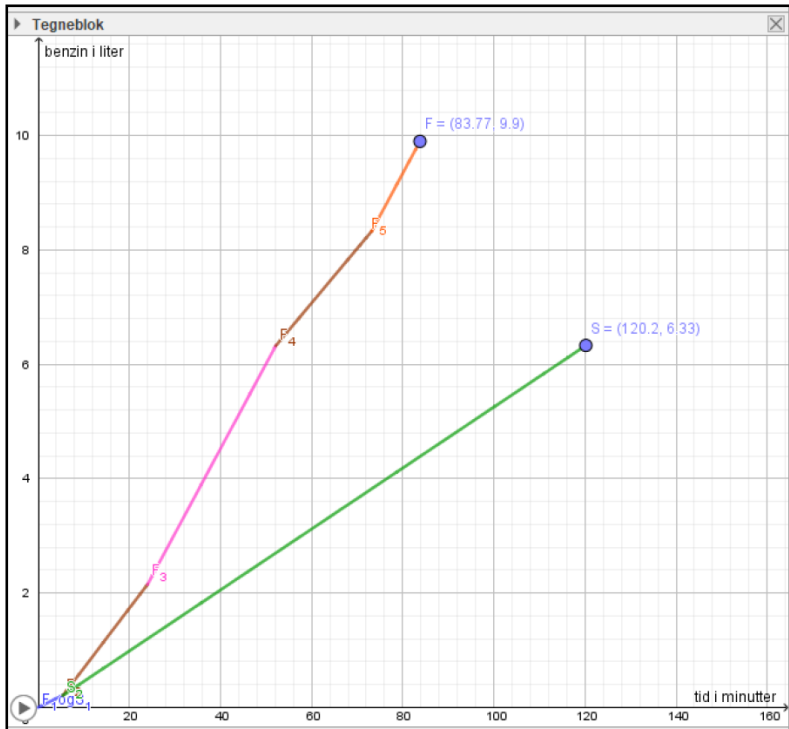
Beregningerne i Tabel 3.3 læner sig op ad vores estimerede hastigheder for hver hastighedskategori i WLTP-normen, som fremgår af Tabel 3.1, hvor lav hastighed estimeres til at være 50 km/t og meget høj hastighed til at være 110 km/t. I beregningerne har vi sidestillet bykørsel 50-60 km/t med WLTP-kategorien lav hastighed, ligesom motorvejskørsel 90-110 km/t sidestilles med WLTP-kategorien høj hastighed, idet de kørte hastigheder reelt ligger meget tæt på disse estimerede hastigheder.

Tabel 3.3: WLTP-normmodel, der viser benzinforbrug ved ”fuld fart frem” og ved ”søndagsbilist”.

Vanløse - SDU ved maksimalt tilladte hastigheder ("fuld fart frem")			
Delstrækning	Vej-/kørselstype	Distance	Estimeret benzinforbrug
Vanløse - Motorvejstilkørsel (F ₁)	Bykørsel 50-60 km/t	5 km	5 km / 23,4 km/L = 0,2 L
Motorvejstilkørsel - Køge (F ₂)	Motorvej 110 km/t	34 km	34 km / 17,5 km/L = 1,9 L
Køge - Nyborg (F ₃)	Motorvej 130 km/t	61 km	61 km / 14,6 km/L = 4,2 L
Storebæltsbroen (F ₄)	Motorvej 90-110 km/t	35 km	35 km / 17,5 km/L = 2 L
Korsør - OK tank ved SDU (F ₅)	Motorvej 130 km/t	23 km	23 km / 14,6 km/L = 1,6 L
Forventet benzinforbrug for hele turen			9,9 liter benzin
SDU - Vanløse ved stabil hastighed ("søndagsbilist")			
Delstrækning	Vej-/kørselstype	Distance	Estimeret benzinforbrug
OK tank ved SDU - Motorvejsafkørsel (S ₂)	Motorvej 80 km/t	153 km	153 km / 25 km/L = 6,1 L
Motorvejsafkørsel - Vanløse (S ₁)	Bykørsel 50-60 km/t	5 km	5 km / 23,4 km/L = 0,2 L
Forventet benzinforbrug for hele turen			6,3 liter benzin

Er ens udgangspunkt ved motorvejskørsel, at man altid kører benzinøkonomisk bag en lastbil, vil der være tale om en betragtelig procentvis stigning i benzinforbrug, hvis man en dag har travlt og derfor kører det maksimalt tilladte: 57 %. Vores udgangspunkt er det modsatte, idet vi som udgangspunkt kører til studiet så hurtigt, som loven og morgentrafikken tillader det, men også med dette større forbrug som udgangspunkt vil der være tale om en betragtelig procentvis besparelse: 36 %. På Figur 3.7 er sammenhængen mellem benzinforbrug og hastigheder illustreret, og Δ Benzinforbrug kan aflæses på y-aksen, ligesom Δ Tidsforbrug kan aflæses på x-aksen. Beregningerne, der ligger til grund for linjestykkernes y-værdier, fremgår af Bilag 2. Linjestykkets b-værdi er bestemt ved at indsætte koordinatsættet for linjestykkets startpunkt og derefter isolere b. Her vil vi nøjes med at vise beregningen for linjestykket F2:

$$F_2(x) = \frac{\frac{34}{17,5}}{\frac{34}{110} \cdot 60} \cdot X - 0,36, \quad \left(\frac{5}{55} \cdot 60 \leq X \leq \frac{5}{55} \cdot 60 + \frac{34}{110} \cdot 60\right)$$



Figur 3.7: Illustration af benzinforbrug som funktion af tidsforbrug. Lavet i GeoGebra.

I punktet F aflæses, at med kørestilen ”fuld fart frem” bruges ca. 9,9 liter benzin, og det tager knap 84 minutter at køre turen. I punktet S aflæses, at med kørestilen ”søndagsbilist” bruges ca. 6,3 liter benzin, og det tager ca. 120 minutter at køre turen.

Bestemmelse af værdier for konstanter

Af Tabel 3.4 fremgår den dynamiske model fra Excel, vi har anvendt iterativt i et forsøg på at bestemme rullemodstandskoefficienten (μ) på hver delstrækning:

Tabel 3.4: Dynamisk model til bestemmelse af rullemodstandskoefficient

Luftmodstand, rullemodstand, arbejde og benzinforbrug		
Konstanter		
Luftens densitet, ρ (rho)	1,3	kg/m ³
Bilens aerodynamik, C_w	0,3	(0,3 - 0,5 for personbiler)
Bilens største tværsnit, A	2,3	m ²
Bilens vægt inkl. to personer, m_{bil}	1500	kg
Tyngdeacceleration, g	9,82	N/kg
Energi i 1 liter benzin, $E_{benzin, 1\text{ liter}}$	30	MJ/L
Rullemodstandskoefficient, μ (my)	0,011	
Variable		
Bilens hastighed (km/t)	80	km/t
Bilens hastighed (m/s)	22,22	m/s
Delstræknings længde (m)	153.000	m
<i>Note: De angivne hastigheder er ift. underlaget og ikke luften, hvorfor der ikke her er taget højde for vindretning og vindhastighed. Dette er en fejlkilde ift. luftmodstand, men ikke rullemodstand</i>		
Resultater		
$F_{luft} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot C_w$	221	N
$F_{rulle} = \mu \cdot m_{bil} \cdot g$	162	N
$F_{motorer}$	384	N
$E_{motorer} = F_{motorer} \cdot s$	58.677.257	J
$E_{motorer}$ i kJ	58.677	kJ
$E_{motorer}$ i MJ	59	MJ
Motorens virkningsgrad, η	0,3	
$V_{benzin} = E_{motorer} / (\eta \cdot E_{benzin, 1\text{ liter}})$	6,52	liter

Denne iterative tilgang accelererede arbejdet, idet vi indtil da have anvendt WordMats ligningsløser til at bestemme μ i ligningen nedenfor. I det fremhævede eksempel tages udgangspunkt i det gennemsnitlige benzinforbrug på 22,2 km/L for en Suzuki Swace 1.8 Hybrid (Suzuki Bilimport Danmark A/S, 2020) og gennemsnitshastigheden på 46,5 km/t (12,92 m/s) for den samlede WLTP-test (Færdselsstyrelsen, 2020a):

$$E_{motorer} = \eta \cdot E_{benzin,1\text{ liter}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w + \mu \cdot m_{bil} \cdot g\right) \cdot s$$

$$0,3 \cdot 30000000 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 12,92^2 \cdot 2,3 \cdot 0,3 + \mu \cdot 1500 \cdot 9,82\right) \cdot 22200$$


Ligningen løses for μ vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\mu = 0,022$$

Desværre viste der sig at være betydelige udsving i værdien for rullemodstandskoefficienten, som ikke fulgte den forventede udvikling om at stige med stigende hastighed grundet flere hjulrotationer og dermed også flere deformationer af dækket. Tværtimod var tendensen faldende med stigende hastighed og med store udsving. Grundet modellens begrænsede reliabilitet er de øvrige resultater placeret i Bilag 3 sammen med de videre beregninger af et teoretisk benzinforbrug baseret på de fysiske kræfter, der virker på bilen. Dermed bliver kun WLTP-normmodellen genstand for undersøgelsens validering.

Validering

Tabel 3.5: Registreret benzinforbrug og kørselstid

	Vanløse - SDU "Fuld fart frem"	SDU - Vanløse "Søndagsbilist"	Forskel i benzin- og tidsforbrug
Tur 1	11,25 L 102 min.	6,14 L 125 min.	11,25 – 6,14 = 5,11 L 125 – 102 = 23 min.
Tur 2	11,14 L 97 min.	6,54 L 123 min.	11,14 – 6,54 = 4,60 L 123 – 97 = 26 min.
Gennemsnit	$\frac{11,25+11,14}{2} = \mathbf{11,20\ L}$ $\frac{102+97}{2} = \mathbf{99,5\ min.}$	$\frac{6,14+6,54}{2} = \mathbf{6,34\ L}$ $\frac{125+123}{2} = \mathbf{124\ min.}$	11,20 – 6,34 = 4,86 L 124 – 99,5 = 24,5 min.

Den gennemsnitlige benzinbesparelse på de to ture var altså 4,9 L, og selv om kun to ture er et meget spinkelt grundlag at vurdere reliabilitet ud fra, må det bemærkes, at der blot er en afvigelse på 10 % i benzinbesparelsen fra første til anden tur. Med udgangspunkt i gennemsnitsværdierne kan benzinøkonomien for "fuld fart frem" beregnes til 14,11 km/L og for "søndagsbilist" beregnes den til 24,92 km/L. Besparelsen i benzin resulterede omvendt i en gennemsnitlig stigning i rejsetid på godt 24 minutter. Igen med en fornuftig reliabilitet - om end på et spinkelt grundlag - idet forskellen i tidsforbrug på tur 2 blot afveg med 3 minutter i forhold til forskellen i tidsforbrug på tur 1. Dette svarer til en procentvis afvigelse på 13 %.

Diskussion

Gennem matematisk modellering ønskede vi at undersøge, i hvor høj grad vi kunne nedbringe benzinforbruget på kørslen af strækningen Vanløse - SDU ved at køre bilen ved lavere og mere stabil hastighed frem for at søge at køre den maksimalt tilladte hastighed. Vi forsøgte os både med en empirisk baseret modellering og en teoretisk funderet modellering til beregning af benzinforbruget, men måtte konstatere, at vores teoretisk funderede model med fokus på luftmodstand og rullemodstand ikke kunne rumme den enorme kompleksitet, der er forbundet med aerodynamik. De beregnede resultater af den empiriske modellering sammenholdt med valideringen i kørselseksperimentet levner ingen tvivl om, at det rent økonomisk kan betale sig at køre langsommere og mere stabilt. Således opnåede vi i kørselseksperimentet en gennemsnitlig besparelse på 4,9 liter benzin, hvilket svarer til en procentvis reduktion af benzinforbruget på hele 44 %. Dette matcher fint forholdet mellem høj og ekstra høj hastighed i WLTP-normen: 42,9 %. Ved brug af WLTP-normmodellen fra Tabel 3.3 kom vi frem til en estimeret benzinbesparelse på 36 %. Nok ligger dette tal under resultaterne fra valideringen, men retrospektivt må afvigelsen siges at være forventelig, idet WLTP-normmodellen er en matematisering af en idealiseret situation, hvor der bl.a. ses bort fra energiforbrug til klimaanlæg, varme i sæder og rat, som kan være bekosteligt at have kørende med en udendørstemperatur omkring frysepunktet. Hertil kommer energitabet fra de mange små hastighedsvariationer, som er en naturlig del af trafikbilledet, men som ikke finder plads i modellens stykvis lineære opbygning.

Fejlkilderne til trods leverede modellen især ved kørsel som ”søndagsbilist” resultater af høj validitet, idet det beregnede benzinforbrug var på 6,34 L, mens det i valideringen blev målt til 6,3 L. Dette giver en minimal afvigelse på 0,6 %. Kørestilen er dog heller ikke påvirket nævneværdigt af de ovenfor nævnte fejlkilder, som til gengæld får betydning, når man ser på benzinforbruget forbundet med kørestilen ”fuld fart frem”. Her blev afvigelsen da også på 11,6 %.

Den anseelige stigning i benzinforbrug ved højere hastighed kan kobles til, at hybridteknologien, hvor der lagres elektrisk energi til elmotoren ved nedbremsninger, sættes ud af spil ved konstante hastigheder over længere afstande (Færdselsstyrelsen, 2020b), samt at især luftmodstanden stiger drastisk ved høje hastigheder. Således ses en stigning i benzinforbrug på hele 20% alene fra 110 km/t til 130 km/t. Som følge af sanktionerne mod Rusland er prisen på råolie og dermed også på benzin i udvikling, og i me-

diebilledet spekuleres der i, at benzinprisen kan stige til op imod 20 kr. pr. liter (Zacho, 2022; Kjeldsen, 2022). Altså vil der være en skattefri gevinst på 200 kr. for en retur ved at køre som "søndagsbilist" frem for at køre "fuld fart frem". Som "søndagsbilister" forsøgte vi at holde os i læ bag en lastbil på hele turen. Endnu større effekt ville det have at køre så tæt på lastbilen, at man kan opleve drag og dermed ikke alene reducere luftmodstanden, men tillige tilføre en gratis ekstra fremdrift for både forankørende og bagvedkørende (Stage, 2017), hvorved der kan opnås en yderligere 8 % brændstofbesparelse. Dette kræver dog, at man reducerer afstanden fra de lovpligtige to sekunder til blot et halvt sekund. Ved at videreudvikle eksisterende teknologier som automatisk opbremsning vil det måske i fremtiden være muligt at gøre brug af decideret platooning ("Vil du følge udviklingen i lastbil platooning?", 2017), hvor lastbiler og evt. personbiler kører så tæt, at de kan opnå denne effekt af drag.

Dog er der mange andre faktorer end økonomi, der spiller ind, når man skal træffe beslutningen om, hvordan man vil køre sin bil. Den gennemsnitlige køretid steg med godt 24 minutter, og køretiden blev dermed ca. en fjerdedel længere. På længere ture vil en del af denne tid kunne indhentes ved et færre antal stop på tankstationerne, men der vil være et betragteligt større tidsforbrug. Til gengæld bør det for chaufføren opleves mere afslappende at slippe for konstant at skulle orientere sig mod en eller to yderligere vejbaner og de omkringkørende biler, og i vores tilfælde kan chaufføren dermed komme frem til SDU med et større overskud til en hel dags undervisning. På vej tilbage vil de sparede 200 kr. kunne finansiere pizzaer til familien, og dermed er tiden allerede indhentet.

Et yderligere perspektiv er den miljø- og klimamæssige belastning fra fossilt brændsel. Benzin består primært af oktan, og ved forbrændingen af et oktanmolekyle dannes otte CO₂-molekyler. Da carbonatomerne fra benzinen binder sig til atmosfæriske iltmolekyler, overstiger massen af den dannede CO₂ massen af benzinen. Således udledes ca. 90 kg CO₂ ved afbrændingen af en tankfuld benzin på 40 liter (Hansen, 2019), og en reduktion af benzinforbruget på 10 liter for en returrejse til SDU vil tilsvarende reducere CO₂-udslippet med 22,5 kg.

Krisen i Ukraine og den deraf truende oliekrise har netop bragt på den politiske dagsorden at sænke hastighedsbegrænsningen på motorvejen til maksimalt 110 km/t for at spare olie (Wichmann & Lassen, 2022). Dog behøver den enkelte ikke afvente en politisk beslutning for at sænke hastigheden, idet der er talrige argumenter herfor, om man så er drevet af klima, miljø, bekvemmelighed, trafiksikkerhed eller slet og ret af ussel mammon.

I sidstnævnte tilfælde kan WLTP-normmodellen bidrage til et overblik over sammenhængen mellem bilens hastighed, benzinforbrug og tidsforbrug, da værdierne for hver enkelt bil og turens delstrækninger nemt kan indtastes, når først der er indsamlet data til brug for køreturens hastighedsprofil. Således har WLTP-normmodellen en værdi, der rækker ud over den idealiserede situation, som her har været genstand for modelleringen, og måske kan den være med til at få flere til at springe ud af skabet som søndagsbilister sammen med os.

Referencer

Abildgaard, B. J. (2018). Hvordan designer man sin aerodynamik uden en vindtunnel? <https://ing.dk/blog/hvordan-designer-man-sin-aerodynamik-uden-vindtunnel-212977>

Arent, T. (2018). Ny målemetode: Det betyder WLTP. <https://fdm.dk/nyheder/nyt-om-biler/2018-08-ny-malemetode-det-betyder-wltp>

Arent, T. (2021). Sæt farten op på motorvejen. <https://fdm.dk/nyheder/trafik/2021-09-saet-farten-op-paa-motorvejen>

Both, E. & Henriksen, H. (2008). Kosmos - fysik og kemi: Grundbog B. Gyldendal A/S. København

Brandt, T. (u.å.). Sænk hastigheden og spar penge. <https://www.dcu.dk/da/artikler/saenk-hastigheden-og-spar-penge>

Clausen, J. E. (2019). Miljørigtig Formel 1-teknik i hverdagen. <https://www.bmf1.dk/nyheder/miljorigtig-formel-1-teknik-i-hverdagen-14616>

Continental. (u.å.). EU dækmærkat, generator. <https://eulabel21.s-undp.net/img.php?900&sl=0355463.01.EU.png>

Færdselsstyrelsen. (2020a). Målemetode for brændstofforbrug WLTP og NEDC. <https://www.fstyr.dk/da/Krav-til-koeretoerjer/Regler-om-energi-og-miljoegenskaber/Maalemetode-for-braendstofforbrug-NEDC-og-WLTP#ny-metode-wltp>

Færdselsstyrelsen. (2020b). Viden om drivmidler. <https://fstyr.dk/da/Krav-til-koeretoer/Regler-om-energi-og-miljoeegenskaber/Viden-om-drivmidler#hybridbiler>

Hansen, J. L. (2019). Når du fylder 40 liter på din bil, slipper du 90 kilo CO₂ ud i atmosfæren. <https://vejr.tv2.dk/2019-05-15-naar-du-fylder-40-liter-paa-din-bil-slipper-du-90-kilo-co2-ud-i-atmosfaeren>

Jensen, M. (2017). Forbrændingsmotoren skal ikke dø. <https://sciencereport.dk/forside/forbraendingsmotoren-skal-ikke-doe/>

Kjeldsen, N. P. (2022). Frygt for energikrise: "Vi kan sagtens ende i en situation, hvor en liter benzin kommer op i over 20 kroner". <https://www.bt.dk/forbrug/frygt-for-energi-og-miljoeegenskaber/vi-kan-sagtens-ende-i-en-situation-hvor-en-liter-benzin>

Lindhardt, B. & Larsen, D. M. (2021). Fem former for undersøgende aktiviteter. <https://emu.dk/grundskole/matematik/fagets-didaktik/fem-former-undersogende-aktiviteter>

Niss, M. (2015). Prescriptive modelling - challenges and opportunities. I Stillman, G.A., Blum, W. & Biembengut, M.S. (Red.), *Mathematic modelling in education research and practice* (s. 67-79), Switzerland: Springer International Publishing

Niss, M. & Jankvist, U.T. (u.å). Matematisk modellering. <https://matematiskdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/>

Smith, A., Krag, F. & Jonassen, N. (2014). Luftmodstand. <https://denstore danske.lex.dk/luftmodstand>

Stage, M. (2017): Spørg Scienariet: Kan man spare brændstof ved at lægge sig bag andre biler? <https://ing.dk/artikel/spoerg-scientariet-kan-man-spare-braendstof-ved-at-laegge-sig-bag-andre-biler-193832>

Suzuki Bilimport Danmark A/S. (2020). Suzuki Swace. <https://brochurer.suzuki.dk/biler/suzuki-swace-brochure/?page=19>

The United Nations Economic Commission for Europe (UNECE). (2021). UN Regulation No. 154 - Worldwide harmonized Light vehicles Test Procedure (WLTP). <https://unece.org/sites/default/files/2021-08/R154e.pdf>

Transport- og Boligministeriet. (2013). Bekendtgørelse af færdselsloven. <https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2013/1386>

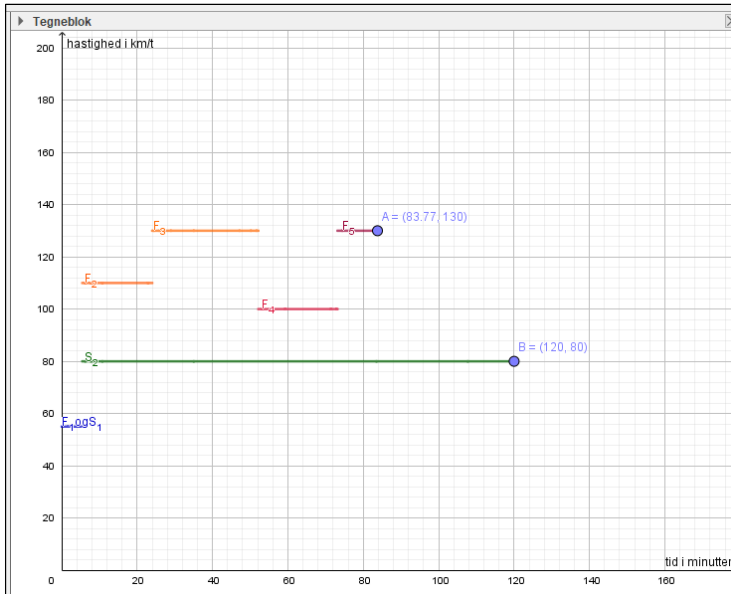
Vil du følge udviklingen i lastbil platooning? (2017, 17. marts). <https://www.tipeurope.dk/knowledge-and-news/nyheder/vil-du-foelge-udviklingen-i-lastbil-platooning>

Wichmann, M. R. & Lassen, S. B. (2022). Partier vil sænke fartgrænse for at spare olie. <https://nyheder.tv2.dk/politik/2022-03-25-partier-vil-saenke-fartgraense-for-at-spare-olie>

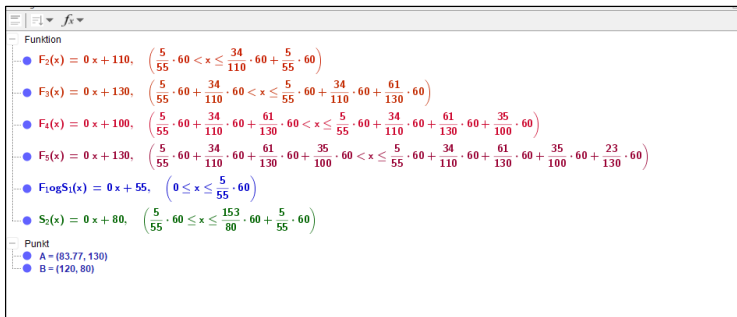
Zacho, A. (2022). Prisen eksploderer: Kan ramme 20 kroner literen. <https://ekstrabladet.dk/nyheder/samfund/prisen-eksploderer-kan-ramme-20-kroner-literen/9161703>

A Bilag 1

Et udvalg af grafiske illustrationer og tilhørende bagvedliggende beregninger fra matematiserings og problemløsningsprocessen i modelleringen med empirisk data.



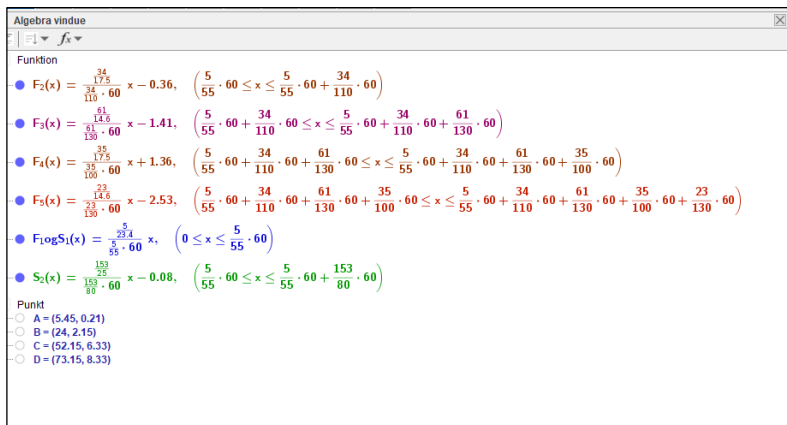
Figur 1a. Illustration af de to forskellige kørestile, hvor den kørte hastighed ses i forhold til køretiden. Punktet A viser, at med kørestilen ”fuld fart frem” tager køreturen knap 84 minutter, mens med kørestilen ”søndagsbilist” tager køreturen 120 minutter. Lavet i GeoGebra.



Figur 1b. De bagvedliggende beregninger til illustrationen i Figur 1a. Lavet i GeoGebra.

B Bilag 2

Beregningerne, der ligger til grund for figur 3.7.



Figur 1. De bagvedliggende beregninger til illustrationen i Figur 7. Punkterne A, B, C, D er anvendt til at bestemme b-værdien i de lineært stykvisse funktioner, idet de er kendte startpunkter for linjestykkerne. Lavet i GeoGebra.

C Bilag 3

Tabel 1. Bestemmelse af rullemodstandskoefficient (μ) for hver delstrækning.

Vanløse - SDU ved maksimalt tilladte hastigheder			
Delstrækning	Vej-/kørselstype	Distance	Rullemodstands-koefficient (μ)
Vanløse - Motorvejstilkørsel	Bykørsel 50-60 km/t (15,28 m/s)	5 km	0,017
Motorvejstilkørsel - Køge	Motorvej 110 km/t (30,56 m/s)	34 km	0,0057
Køge - Nyborg	Motorvej 130 km/t (36,11 m/s)	61 km	0,0024
Storebæltsbroen	Motorvej 90-110 km/t (27,78 m/s)	35 km	0,011
Kørsør - OK tank ved SDU	Motorvej 130 km/t (36,11 m/s)	23 km	0,0028
SDU - Vanløse ved stabil hastighed			
Delstrækning	Vej-/kørselstype	Distance	Rullemodstands-koefficient (μ)
OK tank ved SDU - Motorvejsafkørsel	Motorvej 80 km/t (22,22 m/s)	153 km	0,0093
Motorvejsafkørsel - Vanløse	Bykørsel 50-60 km/t (15,28 m/s)	5 km	0,017

Nedenfor ses de videre beregninger i et forsøg på at finde rullemodstandskoefficienten ud fra WLTP-normen og dernæst et teoretisk benzinforbrug baseret på de fysiske kræfter, der virker på bilen. Her indsættes værdierne for Suzuki Swace 1.8 Hybrid for køreturen fra SDU til Vanløse med stabil, lavere hastighed.

Bestemmelse af rullemodstandskoefficient ud fra WLTP-normen for høj hastighed:

$$0,3 \cdot 30\,000\,000 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 22,22^2 \cdot 2,3 \cdot 0,3 + \mu \cdot 1\,500 \cdot 9,82\right) \cdot 25\,000$$



Ligningen løses for μ vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\mu = 0,0094$$

Bestemmelse af rullemodstandskoefficient ud fra WLTP-normen for lav hastighed:

$$0,3 \cdot 30\,000\,000 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 13,89^2 \cdot 2,3 \cdot 0,3 + \mu \cdot 1\,500 \cdot 9,82\right) \cdot 23\,400$$



Ligningen løses for μ vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\mu = 0,020$$

$$V_{\text{benzin}} = \frac{E_{\text{motorer}}}{0,3 \cdot E_{\text{benzin,1liter}}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w + \mu \cdot m_{\text{bil}} \cdot g\right) \cdot s}{0,3 \cdot E_{\text{benzin,1 liter}}}$$

$$V_{\text{benzin,motorvej}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 22,22^2 \cdot 2,3 \cdot 0,3 + 0,0094 \cdot 1\,500 \cdot 9,82\right) \cdot 153\,000}{0,3 \cdot 30\,000\,000} = 6,12 \text{ L}$$

Socioøkonomisk reference - om talmagi i det offentlige

Lasse Skjerlie Gilling, Ny Hollænderskolen &
Mette Bak Tang, Skolen på Grundtvigsvej



Abstract

The socio-economic reference is a value telling which average grade the graduating pupils at a specific school is supposed to get, based on parameters from their background such as their heritage, parents' income level and level of education. It is used throughout the public administrations as

e.g. as a distribution key for economic fundings of schools, and for parents evaluating and rating schools to see in which school they wish their child to cross the threshold.

The socio-economic reference is based on a mathematical multilevel model which we in this article seek to understand, while we exploit which points of attention one must have to be able to use this reference accordingly. We discovered a rather significant uncertainty that one must be aware and take into concern if the socio-economic reference is used as an argument.

Introduktion

Tal er magiske! I hvert fald i eventyr. Men kan talmagien også transcendere grænsen fra eventyrenes verden til hverdagslivet? For mange lærere og skoleledere kan det måske *virke* magisk, når de højere offentlige magter - som med et trylleslag - år efter år lykkes med at melde en meget præcis reference ud for en skoles forventede karaktergennemsnit netop det år. Selvfølgelig er dette tal hverken magisk eller grebet ud af den blå luft, og de mere matematikkyndige gennemskuer hurtigt, at der ligger en matematisk model bag. Dog vil de færreste nok kunne redegøre for, hvordan de forskellige faktorer i modellen vægtes i beregningen af denne socioøkonomiske referencekarakter. Ikke desto mindre har den i mange år været en del af den obligatoriske kvalitetsrapport og har dermed haft betydning for vurderingen af skolers kvalitet både internt i skolevæsenet og eksternt i forhold til borgernes syn på den lokale folkeskole.

Kvalitetsrapporterne erstattes nu af årlige skoleudviklingssamtaler mellem skoleleder og kommunalbestyrelse eller skoleforvaltning (Møller, 2022), hvad der lægger op til en mere formativ tilgang til skolens formål, virke og udvikling. Lokalt er det oplagt, at udgangspunktet for samtalerne bliver skolens værdier samt skoleledelsens prioriteringer i skoleplanen. Nationalt vil den socioøkonomiske reference fortsat spille en rolle, idet det nationale kvalitetstilsyn med skolerne har fokus på undervisningseffekten, og en skoles undervisningseffekt beregnes som forskellen på den socioøkonomiske referencekarakter og skolens faktisk præsterede gennemsnit i de bundne prøver (Christoffersen & Larsen, 2012). En indsigt i modellen bag den socioøkonomiske reference og de usikkerheder, der knytter sig hertil, er afgørende for den demokratiske diskussion (Misfeldt & Jankvist, 2020)

og muligheden for at handle på et oplyst grundlag - om man så er skolebestyrelsesmedlem, skoleleder, skoleforvaltning eller lokalpolitiker.

Dette leder os frem til følgende undersøgelsesspørgsmål, som vil blive behandlet i denne artikel:

- Hvilken matematisk model ligger bag den socioøkonomiske reference?
- Hvilke forbehold bør man på administrativt og politisk niveau tage, når man refererer til den socioøkonomiske reference?

Teori

Matematik og matematiske modeller i samfundet

Misfeldt & Jankvist (2020) og Johansen & Sørensen (2014) påpeger, at vi i hverdagen er omgivet af matematik, som ikke umiddelbart er synlig for os. Den er skjult i modeller og værktøjer, der bruges som styringsværktøjer i vores samfund. Som aktive samfundsborgere, der handler på et oplyst grundlag, må vi være, hvad Misfeldt og Jankvist (2020) kalder demokratisk kompetente. Dette indebærer, at vi har udviklet en vis grad af matematisk kompetence, idet matematisk kompetence er afgørende for, hvordan og i hvilken grad vi har mulighed for at påvirke vores egne liv (Skovsmose i Misfeldt & Jankvist, 2020). Et opmærksomhedspunkt er, at modeller altid er udviklet med et bestemt formål, som er af betydning for, hvilke værdier der vægtes i modellen (Johansen & Sørensen, 2014), ligesom de til en vis grad afspejler politiske tendenser i samfundet (Misfeldt & Jankvist, 2020). Den skjulte matematik i modellerne bliver dermed, hvad Misfeldt & Jankvist (2020) betegner en demokratisk udfordring, idet den besværliggør gennemskueligheden af modellerne som argument i demokratiske diskussioner. Johansen & Sørensen (2014) pointerer, at matematik anses som en særligt pålidelig viden, og at tal derfor kan vinde diskussioner. Da tal og statistik kan manipuleres og bearbejdes til at understøtte ens argumenter, er det afgørende, at den enkelte er i stand til at forstå og forholde sig kritisk til de matematiske og statistiske modeller, vi møder i hverdagen (Johansen og Sørensen, 2014). Fratages man denne mulighed, opstår et demokratisk underskud. Endvidere fremhæver Misfeldt og Jankvist (2020) behovet for, hvad de kalder en teknokritisk matematikundervisning med fokus på, hvordan teknologi kan anvendes til både at skjule og fremhæve matematikken. Særligt vigtigt er det, at eleverne trænes i at få øje på den skjulte matematik og bliver vidende om, at anvendelsen af teknologi bevæger sig i et

spænd fra black boxing (Misfeldt & Jankvist, 2020), hvor erkendelsesmæssigt vigtige processer skjules, til white boxing (Misfeldt & Jankvist, 2020), hvor teknologien anvendes med et epistemologisk sigte til at fremhæve og afdække væsentlige processer og sammenhænge.

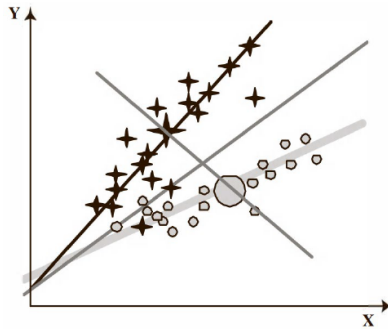
Socioøkonomisk reference

Børne- og Undervisningsministeriet (2022c) definerer socioøkonomisk reference som ”et statistisk beregnet udtryk, som viser, hvordan elever på landsplan med samme socioøkonomiske baggrundsforhold som skolens elever har klaret afgangsprøverne”. I 2006 offentliggjorde CEPOS første gang tal for skolernes eksamensresultater samt tal korregeret efter elevsammensætning (Christoffersen & Larsen, 2012), og fra 2010 har Børne- og Undervisningsministeriet stået som afsender. I den forbindelse gik man over til at beregne den socioøkonomiske reference ved brug af en multilevel-model (Wittrup, 2011), der bedre kan rumme kompleksiteten af differentierede effekter for f.eks. forskellige sociale baggrunde, foruden at den kan bidrage til at afdække estimaternes anseelige usikkerhed. Samtidig blev der foretaget enkelte ændringer i de parametre, der ligger til grund for den socioøkonomiske reference. Disse parametre kan trækkes fra Danmarks Statistik på individniveau (Christoffersen & Larsen, 2012) og fremgår af Bilag 1. Overordnet set er de hos Børne- og Undervisningsministeriet (2022b) beskrevet som:

- Elevens køn, alder, herkomst og oprindelsesland
- Forældrenes højeste fuldførte uddannelse, arbejdsmarkedsstatus, bruttoindkomst og ledighedsgrad
- Familietype og antal børn og placering i børneflokk.

Multilevel-modeller

Dataene bag samfundsaglige statistiske analyser er ofte hierarkisk opbygget (Andersen, 2007), og med henblik på at sikre størst mulig reliabilitet er der behov for en type modeller, der kan håndtere disse forskellige niveauer separat såvel som i et hele. Det kan de såkaldte multilevel-modeller, som der ses et eksempel på i Figur 4.1. Det særlige for disse er, at de viser regressionen for det samlede datasæt, men samtidig også rummer en regression for hver gruppe. I Figur 4.1 ses endvidere en illustration af den såkaldte mellem-grupper-effekt, der illustrerer tendensen *mellem* de to grupper.



Figur 4.1: Multilevel-model med stokastiske skæringspunkter og positive hældningskoefficienter for grupperegressioner og den samlede regressionslinje samt separat mellem-grupper-effekt, der i dette tilfælde er med negativ hældningskoefficient (Andersen, 2007).

Ser man på mellem-grupper-effekten alene, vil man kunne konkludere, at der er en faldende tendens på 2. akse med stigende værdier på 1. akse. Imidlertid viser grupperegressionerne den modsatte tendens, idet værdierne på 2. akse i begge grupper tilfælde stiger med stigende værdier på 1. akse. Denne mulighed for fejltolkning er vigtig at holde sig for øje, ligesom det er vigtigt at udvælge de rette parametre at gruppere observationerne ud fra. Fælles for multilevel-modeller er bl.a. at residualerne - dvs. afvigelserne fra regressionslinjerne - for hvert niveau er normalfordelte, og at residualerne er homoskedastiske, hvilket indebærer, at de varierer lige meget fra regressionslinjen uafhængigt af X -værdien (Andersen, 2007). En modsætning hertil vil være, at observationerne breder sig som en vifte, og at variansen dermed øges med stigende X -værdier. Dette gør sig f.eks. gældende for den samlede regressionslinje i Figur 4.1.

Metode

For at opnå et bredere og dybere kendskab til den socioøkonomiske reference og dennes anvendelse i samfundet har vi bl.a. læst materialer tilgængelige på Børne- og Undervisningsministeriets hjemmeside (Børne- og Undervisningsministeriet, 2022a, 2022b, 2022c; Børne- og Undervisningsministeriets Datavarehus, 2022), rapporten Folkeskolens faglige kvalitet -

Analyse af skolernes undervisningseffekt fra Det Kommunale og Regionale Evalueringsinstitut (Wittrup, 2011) og arbejdsrapporter om den socioøkonomiske reference fra CEPOS (Christoffersen & Larsen, 2012). Særligt Børne- og Undervisningsministeriet bidrager med et metodenotat og et bilag, der offentliggør både den matematiske model bag referencen, samt hvordan modellens forskellige parametre vægtes i forhold til hinanden. Endvidere kontaktede vi Styrelsen for It og Læring (STIL) under Børne- og Undervisningsministeriet både telefonisk og skriftligt (se Bilag 3). Et kortfattet svar henviste blot til de materialer, vi allerede havde læst på Børne- og Undervisningsministeriets hjemmeside samt uddannelsesstatistik.dk.

Herefter fokuserede vi på den matematiske modeltype bag referencen med særligt fokus på, hvor stor usikkerhed der er forbundet med værdien af den socioøkonomiske reference.

Resultater

Modellen bag den socioøkonomiske reference

Multilevel-modellen bag den socioøkonomiske reference fremgår af Figur 4.2 ledsaget af Børne- og Undervisningsministeriets (2022b) beskrivelse heraf:

$$y_{ij} = x_{ij}\beta + u_j + e_{ij}$$

hvor y_{ij} er karakteren for elev i på institution j , x_{ij} er elevens baggrundsvariable og β er de tilhørende parameterestimer, u_j er varianskomponenten svarende til variationen mellem skolerne, og e_{ij} er residualen svarende til variationen mellem eleverne på skolen.

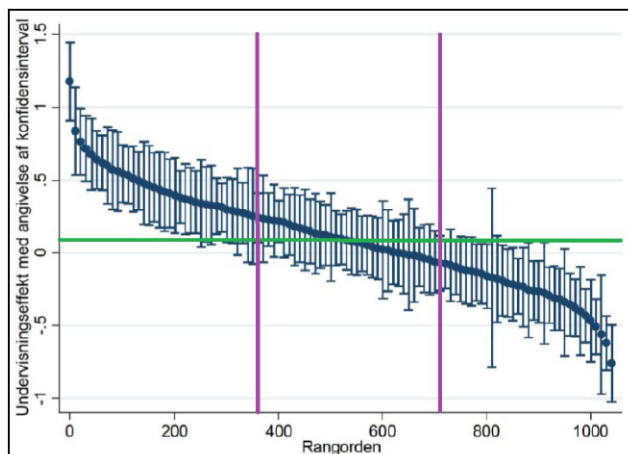
Figur 4.2: Multilevel-model bag den økonomiske reference (Børne- og Undervisningsministeriet, 2022b).

Parameterestimer, varianskomponenter, residualer og forklaringsgrader fremgår af Bilag 1, men som supplement har vi for overblikkets skyld anvendt hjemmesiden www.mentimeter.com til at illustrere vægtningen af hver enkelt af parameter (se Bilag 2). De forskellige parametre er tastet ind x antal gange svarende til deres forklaringsgrad (Børne- og Undervisningsministeriet, 2022a), der er den procentuelle vægtning i den socioøkonomiske reference, og størrelsen på ordene modsvarer denne vægtning.

Det fremgår tydeligt af Bilag 2, at særligt forældrenes indkomst og længden på deres uddannelse spiller en stor rolle for den socioøkonomiske reference, og det er altså ikke uden grund, at man taler om ”social arv”.

Analyse

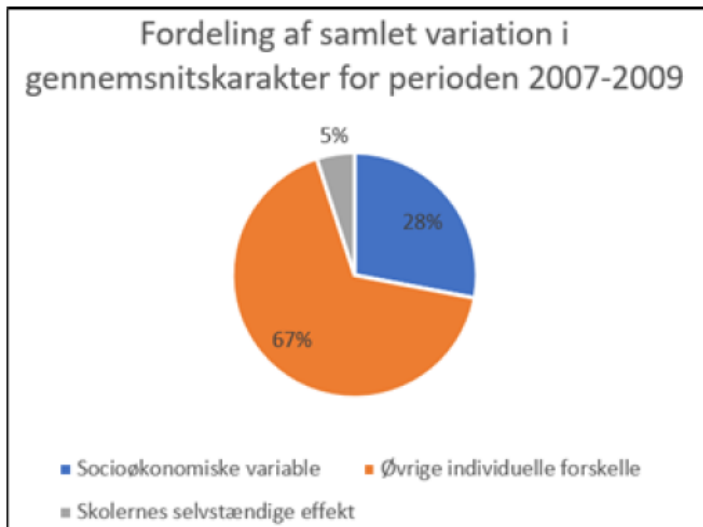
Det Kommunale og Regionale Evalueringsinstitut, KREVI, udgav i 2011 rapporten Folkeskolens faglige kvalitet, hvori multilevel-modellering for første gang anvendes til at analysere skolernes undervisningseffekt. I rapporten fremhæves, at en af de største fordele ved multilevel-modellen er, at den giver indblik i den betydelige usikkerhed ved estimerne. På Figur 4.3 fremgår undervisningseffekten med tilhørende konfidensinterval, som gennemsnitligt ligger på knap 0,5. Hvis konfidensintervallerne for to skoler på grafen ikke overlapper, kan man med 95 % sikkerhed konkludere, at skolernes undervisningseffekt rent faktisk varierer fra hinanden (Wittrup, 2011).



Figur 4.3: Folkeskolernes undervisningseffekt med angivelse af konfidensintervaller. Blot hver tiende skole er taget med for overblikkets skyld (Wittrup, 2011). De violette linjer er tilføjet af forfatterne for at illustrere en approksimeret tredeling af skolerne. Den vandrette grønne linje illustrerer, at den første tredjedel ikke overlapper med den sidste tredjedel i undervisningseffekt.

De lodrette violette linjer på Figur 4.3 markerer en tredeling af landets skoler, og det fremgår, at den første tredjedel med få undtagelser ikke overlapper med den sidste tredjedel. Altså kan disse to grupper med god sikkerhed adskilles fra hinanden i en vurdering af undervisningseffekt. Tilsvarende gælder ikke for midtergruppen. Det er interessant, at den overordnede lineære tendens afbøjes i både top og bund af modellen. Altså er der skoler i begge ender af skalaen, der synes at klare sig signifikant anderledes end alle andre skoler. Dette kan være årsagen til, at folkeskoleforligskredsens i oktober 2021 præsenterede et nyt tiltag i form af en udviklingsliste med de 10 % af skolerne med dårligst undervisningseffekt (Trier, 2021).

Dog pointeres det også i rapporten, at skolernes selvstændige effekt på den samlede variation i gennemsnitskarakteren langt overstiges af effekten af den socioøkonomiske variable og især af øvrige individuelle forskelle (Wittrup, 2011), hvilket er anskueliggjort i Figur 4.4.



Figur 4.4: Fordeling af samlet variation i gennemsnitskarakter for 2007-2009. Udarbejdet på baggrund af Wittrup (2011).

Det skal endvidere bemærkes, at der i konfidensintervallerne ikke er taget højde for den såkaldte kammerateffekt (Wittrup, 2011), hvor især elever med svagere social baggrund får et præstationsløft af at være på skoler med en generelt høj social baggrund. Dette kan kobles til, hvad Skovsmose (2011) kalder forgrund, som er en betegnelse for oplevelsen af egne muligheder på basis af en given social, politisk, økonomisk og kulturel situation. De unge fortolker situationen med reference til en række forskellige sociale grupper så som vennerne, forældrene og forskellige forbilleder (Skovsmose, 2011), hvoraf der kan udspringe læringsrettede motiver og intentioner (Skovsmose, 2011).

Diskussion og konklusion

Andersen (2007) betoner, at ”formålet med Folkeskolen er væsentligt bredere, end hvad der kan måles med karakterer”. Imidlertid er der et politisk ønske om at kunne anvende den socioøkonomiske reference som udgangspunkt for en sammenligning af elevpræstationer på landsplan, og da det er

nødvendigt med en høj reliabilitet, og karakterer regnes for at have relativt høj validitet og reliabilitet i vurderingen af faglige færdigheder, er det disse data, der danner udgangspunkt for den socioøkonomiske reference. Man må dog holde sig for øje, om man værdsætter, hvad der kan måles, eller måler, hvad man værdsætter.

Skjult matematik

Den socioøkonomiske reference er for nogen et magisk tal, et tal at styre efter og et tal at fordele midler efter. Men har skoleledere, skolebestyrelser, skoleforvaltning og politikere en reel mulighed for at gennemskue, hvad der ligger bag tallet, og hvilke usikkerheder, der knyttes hertil? På Børne- og Undervisningsministeriets datavarehus (2022) ligger et metodenotat, der bl.a. forklarer hvilken matematisk model, der ligger bag den socioøkonomiske reference. Dette synes umiddelbart at være et tiltag i retning af gennemskelighed og gennemsigtighed. Spørgsmålet er dog, om dette notat er tilstrækkeligt for at undgå de negative blackboxing-effekter (Jessen, 2021), der kan være ved at overlade vurderingen af undervisningens kvalitet til algoritmer i en kompleks matematisk multilevel-model. Selv har vi taget kontakt til Børne- og Undervisningsministeriet såvel telefonisk som på skrift (se Bilag 3), men uden at møde en medarbejder med tilstrækkeligt overblik over modellen til at kunne besvare vores spørgsmål. Vi ser her en demokratisk udfordring, idet vi ikke ser os i stand til at gennemskue vægtningen af parametrene eller de til- og fravalg, der er taget i forbindelse med udviklingen af modellen. Dermed kan det også være vanskeligt at identificere mulige tiltag. Trods de betragtelige usikkerheder ved estimaterne og modellens begrænsede gennemsigtighed anvendes den socioøkonomiske reference som et styringsredskab af kommunerne. Et eksempel herpå er, at Frederiksberg kommune i indeværende år fordeler en pulje på godt 1 mio. kr. til skolerne alene ud fra den socioøkonomiske reference (Referat til mødet i Undervisningsudvalget 2022-25 den 7. februar 2022 kl. 19.15 i Udvalgsværelse 2, 2022).

I KREVI-rapporten (Wittrup, 2011) findes ikke overraskende en positiv sammenhæng mellem skolernes faglige kvalitet, elevernes tilfredshed med skolen samt deres sociale trivsel. På baggrund af dette konkluderes, at der ikke er noget ”modsætningsforhold mellem at fokusere på det faglige og at give eleverne et godt skoleliv”. Det er en interessant formulering, idet det kan læses som, at et fokus på det faglige er udgangspunktet for et godt skoleliv. Denne kausalitet kan dog ikke læses af analysen, men blot at der

er en positiv sammenhæng. Således kan det være fristende at opstille den omvendte kausalitet - at der ikke er et modsætningsforhold mellem at *fokuserer på et godt skoleliv* og at hjælpe eleverne til en høj faglighed. Det kan måske synes som en petitesse, men fortællingen om tallene i analysen kan være afgørende for hvilke tiltag, man vælger at iværksætte.

Når det er så vanskeligt at komme til bunds i den socioøkonomiske reference, kan man i stedet søge at undgå et demokratisk underskud ved, at man gennem en alternativ teknokritisk tilgang arbejder for, at alle, der refererer til den socioøkonomiske reference, bliver bevidste om den store usikkerhed, den er behæftet med, og hvor påpasselig man skal være med at drage konklusioner på skoleniveau ud fra denne.

Referencer

Andersen, S.C. (2007). Multilevel-modeller: En introduktion og et eksempel. *Politica*, (3), 394-116. https://pure.au.dk/portal/files/42052535/Andersen_Multilevel_modeller.pdf

Børne- og Undervisningsministeriet. (2022a). Bilag 3: Parameterestimer og forklaringsgrader. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjkgv_v4Yb4AhUASvEDHZjtAN4QFnoECAoQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.uvm.dk%2F%2Fmedia%2Ffiler%2Fuvvm%2Fstat%2Fpdf17%2F171207-soc-ref-bilag3-parameterestimer-og-forklaringsgrader.pdf%3Fla%3Dda&usg=AOvVaw3VIsEAtdS4nEl2_NEyFS8I

Børne- og Undervisningsministeriet. (2022b). Metodenotat: Bag om de socioøkonomiske referencer for grundskolekarakterer. <https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvvm/stat/pdf22/apr/220419-metodenotat---bag-om-de-sociooekonomiske-referencer-for-grundskolekarakterer.pdf>

Børne- og Undervisningsministeriet. (2022c). Socioøkonomisk reference for grundskolekarakterer. <https://www.uvm.dk/statistik/grundskolen/karakterer-og-test/sociooekonomisk-reference-for-grundskolekarakterer>

Børne- og Undervisningsministeriets Datavarehus. (2022). Datadokumentation for Karakterer og Socioøkonomisk Reference - Grundskolen. <https://uddannelsesstatistik.dk/Documents/Grundskole/datadokumentation/D>

VH_Grundskole_Karakterer.pdf

Christoffersen, H. & Larsen, K.B. (2012). Når befolkningen får viden om grundskolens kvalitet - Et studie af forskellen mellem markedsløsninger og politiske løsninger. CEPOS arbejdspapir nr. 20. CEPOS FORLAGET. https://cepos.dk/media/1221/arbejdspapir_20_-_naar_befolkningen_faar_viden_om_grundskolernes_kvalitet_-_web.pdf

Jessen, B. E. (2021). Hvordan undgås negative black box-effekter? <https://matematikdidaktik.dk/temaer/digitale-teknologier/hvordan-undgaas-negative-black-box-effekter>

Johansen, M. W. & Sørensen, H. K. (2014). Invitation til matematikkens videnskabsteori. Samfundslitteratur.

Møller, E. B. (2022). Slut med kvalitetsrapporten. Nu skal skolelederne til samtale på rådhuset. <https://www.folkeskolen.dk/kvalitetsrapporter-skolelederforeningen/slut-med-kvalitetsrapporten-nu-skal-skolelederne-til-samtale-pa-radhuset/4608494>

Misfeldt, M. & Jankvist, U.T. (2020) Tekno-kritisk matematikundervisning: at åbne den skjulte matematik i samfundets tjeneste. I: C. Haas, & C. Mathiessen (Eds.), *Fagdidaktik og demokrati* (pp. 331-348). Samfundslitteratur.

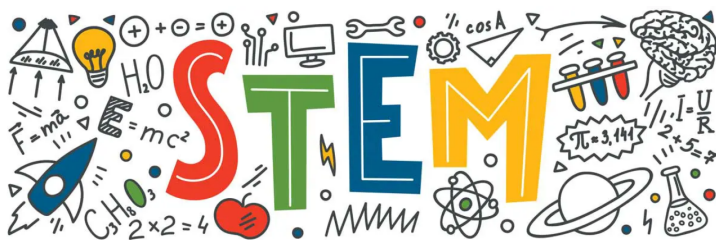
Referat til mødet i Undervisningsudvalget 2022-25 den 7. februar 2022 kl. 19.15 i Udvalgsværelse 2. (2022). <https://www.frederiksberg.dk/referat-til-moedet-i-undervisningsudvalget-2022-25-den-7-februar-2022-kl-1915-i-udvalgsvaerelse-2>

Skovsmose, O. (2011). *An Invitation to Critical Mathematics Education*. Sense Publishers.

Trier, M. B. (2021). Ny liste: 10 procent af skolerne forventes at have bekymrende lav kvalitet. <https://www.folkeskolen.dk/ledelse-skoleledelse-skolen-i-samfundet/ny-liste-10-procent-af-skolerne-forventes-at-have-bekymrende-lav-kvalitet/1377179>

Wittrup, J. 2011. Folkeskolens faglige kvalitet - Analyse af skolernes undervisningseffekt. KREVI - Det Kommunale og Regionale Evalueringsinstitut. <https://www.vive.dk/media/pure/9748/2060248>

Sine Flensbak Søltoft,
Mads Bruun Birk,
Camilla Guldborg Nielsen &
Christian Skelmose Jensen



Denne artikel behandler tilgange til modellering med udgangspunkt i en virkelig case omkring, hvorvidt en af forfatterne skal erstatte en ældre dieselbil med en ny elbil. Arbejdet med denne problemstilling blev delt i to aspekter, der blev identificeret som vigtige i beslutningsprocessen. Den første er det økonomiske aspekt, som behandler prisforskellen på de to handlinger.

Modellerne viser, at ud fra et økonomisk og et psykologisk perspektiv er det ikke på nuværende tidspunkt fordelagtigt for forfatteren at købe en elbil. Men disse konklusioner er blevet sværere at foretage på baggrund af

den stigende usikkerhed på brændstofpriser og psykisk pres som grund af den nuværende verdenssituationen.

Engelsk abstract

This article discusses approaches to modeling based on a real case around whether one of the authors should replace an older diesel car with a new electric car. The work on this question was divided into two aspects that were identified as important in the decision-making process. The first is the economic aspect that deals with the price difference between the two courses of action.

The second is the psychological aspect which deals with some selected psychological parameters which may be important in the decision-making process. Mainly in this part is the difference between a risk averse and a risk willing personality type.

The models show that from an economic and a psychological perspective that it is not currently advantageous to buy an electric car for the author. However, these conclusions have become more difficult to make in light of the growing uncertainty of prices and psychological pressure due to the world situation at the time of writing.

Introduktion

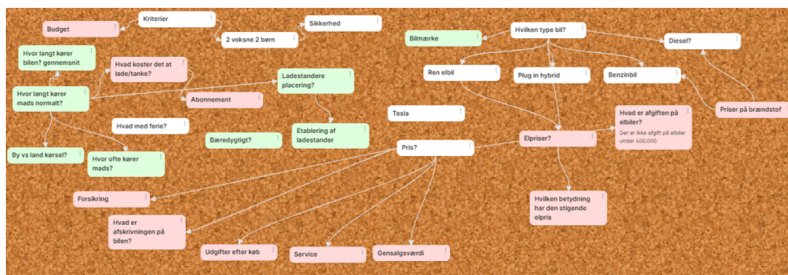
Vi vil i denne artikel belyse, hvordan vi kan opstille en matematisk model og benytte den som værktøj i en beslutningsproces. Vores artikel vil tage udgangspunkt i problemstillingen: “Skal Mads skifte sin gamle dieselbil med en ny elbil?”

Matematisk modellering er en proces, der kan være med til at besvare et spørgsmål eller være et værktøj til at løse en problemstilling. Problemstillingen kan ligge i et område uden for matematikken og kaldes ifølge Niss og Jankvist (2021a) et “ekstra-matematisk domæne”. De kan defineres som videnskabelige, pragmatiske eller en kombination af begge. Vi anskuer, i denne artikel, vores problem som pragmatisk, da vi ønsker at benytte modellen som grundlag for at træffe et valg.

Problemstillingen belyser, hvorvidt det ud fra et økonomisk synspunkt er rentabelt, at Mads skifter sin 10 år gamle dieseldrevne Peugeot 5008 ud med en helt ny elbil fra MG.

Derudover vil vi arbejde med modellering af det psykologiske aspekt, som specifikt omhandler fænomenet “lade-tilgangs-angst” (bekymring for tilgængelighed af ladestandere). Dette for at kunne tage denne parameter med i den endelige beslutningsproces, hvilket forudsætter en undersøgelse af antal af ladestandere sammenholdt med antal elbiler.

Selve processen, startede med en brainstorm i en padlet, omhandlende, hvad vi gerne ville vide, hvis vi skulle skifte bil, og hvad vi vidste om typer af elbiler.

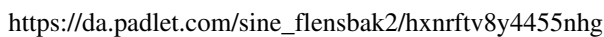


<https://padlet.com/birkmads/3omjzmxcdmt0w5tt>

I padleten fremgår der to helt store perspektiver, som var gennemgående i forhold til overvejelsen af at skifte til elbil, nemlig det økonomiske- og psykologiske aspekt.

Det økonomiske aspekt omhandlede, hvad det reelt set vil koste at skifte bil. Her undersøgtes blandt andet forsikringspriser, serviceaftaler og brændstof- vs. elpriser. Undersøgelsen krævede en ny viden og indsigt i, hvad det vil sige at være elbil ejer, hvor nye begreber og udtryk var nødvendige for forståelsen og for at kunne foretage en mere præcis modellering.

I processen med det psykologiske aspekt valgte vi at udarbejde en ny padlet, for at kunne samle artikler, links og andet som kunne tænkes at være brugbart. Begreberne rækkevideangst og ladestress var gennemgående efter nogle søgninger. Disse har vi valgt at undersøge i denne artikel. For at kunne undersøge dette - både på det psykologiske plan og det praktiske plan, var en undersøgelse af antal ladestandere, antal elbiler og batteriernes rækkevidde vigtig.



- Lette oversættelige objekter - elementer som umiddelbart kan oversættes til matematiske objekter ved simple opslag (eksempelvis vægtafgift kan omsættes til prisen på vægtafgift)
- Moderat oversættelige objekter - elementer som ved få overvejelser eller udregninger kan omsættes til matematiske objekter (eksempelvis bilens rækkevidden baseret på bilens brændstofforbrug og tankens størrelse)
- Svært oversættelige objekter - elementer som kræver en dybere analyse og evt. omfattende beregninger her vil objekterne ofte kræve deres egen matematisk model. Herunder desuden de psykologiske aspekter.

I det ovenstående har vi afdækket de parametre, der kan have indflydelse på beslutningen om et bilskift fra dieselbil til elbil. I denne artikel belyser vi to parametre, som vi mener, har stor indflydelse ved valget af en ny bil.

1. Det økonomiske aspekt - Vi ønsker at undersøge, hvad de månedlige omkostninger er ved at beholde dieselbilen og sammenholder det med en MG marvel elbil.
2. Det psykologiske aspekt - Vi ønsker at se på, hvordan den enkeltes personlighedstype påvirker beslutningen om køb af elbil.

Opgaven er dermed delt i to, og vi behandler det økonomiske og psykologiske aspekt separat fra hinanden. Vi begynder med teori, metode og resultater for den økonomiske del, hvorefter vi behandler det samme for det psykologiske aspekt. Diskussionsafsnittet vil forsøge at sammenflette de to aspekter af opgaven og diskutere problematikkerne ved beslutningstagning i et så kompliceret felt.

Det økonomiske aspekt

Empirisk baggrund

I det følgende vil vi omtale de matematiske objekter, som er nøgletal i den økonomiske model. Nøgletallene vil blive opstillet i en dynamisk matematisk model i excel således, at der er mulighed for senere at kunne ændre på nøgletal i tilfælde af ny viden eller, hvis vi vil analysere andre biler.

Disse nøgletal er dels fakta omkring Mads' eget forbrug og dels fakta vedrørende bilerne. Andre nøgletal er estimater foretaget af os eller fra uafhængige kilder. For at gøre modelleringen overskuelig har vi herunder indsat nøgletal i kategorierne defineret tidligere.

Økonomiske Nøgletal

Lette oversættelige objekter:

- **Anskaffelses pris:** Priserne på bilerne ved anskaffelsestidspunktet.
- **Rækkevidde:** Mest relevant for elbilen givet en mindre opladningsinfrastruktur i forhold til tankstationer.

- **Kørselsbehov:** Dette er et estimat af Mads' eget forbrug henover et år med muligheder for udsving.
- **Forsikring:** Forsikringspriserne er fundet på Lærerstandens Brandforsikrings hjemmeside (LB, n.d.).
- **Markedsværdi:** Det som Peugeot'en er værd, vurdering foretaget af Jesper Lemvig fra Volkswagen Aalborg ved hjælp af det digitale værktøj "Autoprof".
- **Vægtafgift:** Vægtafgift (Grøn ejerafgift) er en fast pris bilejere betaler hvert halve år. Prisen bliver bestemt alt efter bilens brændstof og hvor langt den kører pr. liter brændstof. Peugeotens vægtafgift er den aktuelle afgifts pris Mads betaler. MGens afgift er opgivet på forhandlerens hjemmeside.

Moderat oversættelige:

- **Brændstofpris:** Priserne på brændstof kan variere en del, udregninger for pris på diesel er lavet på priserne fra 28-02-2022. Priserne på el er taget fra et estimat lavet af bilbasen (2020). De antager 2 dkk. pr. kwh de 0,2 kommer fra et estimeret effektivitetstab på 10%.
- **Service:** Da det ikke var muligt at finde den præcise servicepris på den nye MG. Det kan også være svært at finde service priserne på ældre biler så vi valgte at bruge et gennemsnit af priserne på en række konventionelle- og elbiler foretaget af FDM (2015). Prisen bliver udregnet pr. km.
- **Lån:** Vi har valgt ikke at medregne renter på lån for at reducere kompleksiteten men også fordi at renter på lån til køb af elbil er holdt på 1% i et forsøg på at få forbrugere til at købe elbiler. Derfor er det ikke et brugt nøgletal, men vi er bevidste om at det er et nøgletal.
- **Reparation.** Nøgletallet er fundet ved at finde tidligere faktiske udgifter til reparation (deskriptiv) og finde et gennemsnit for dette. Dertil har vi medregnet at i takt med at bilen bliver ældre stiger prisen til reparation. Dette nøgletal kunne i sig selv være modelleret yderligere ved at anskue det ud fra et sandsynlighedsprincip ud fra usikkerheden om, hvornår en fejl på bilen opstår, som medfører en reparation. I så fald ville dette nøgletal skulle ansues som svært oversætteligt. Vi har derfor fastlagt nøgletallet ud fra både gennemsnitlig beregning og skøn, altså præskriptivt.

Svært oversættelige:

- **Afskrivning:** Afskrivning er en funktion af bilens værditab over tid. Det er en måde, hvorpå vi kan holde bilernes værdi op imod hinanden på trods af, at den ene er betalt, og der til den anden potentielt skal optages lån ved anskaffelsen. De 23% afskrivning på Peugeotten er udregnet ud fra antagelsen om, at bilen kun er skrotprisen værd om 8 år. De 17% afskrivning på elbilen er fremkommet ud fra en antagelse om, at elbiler over 300.000 dkk. vil have 25% mindre årlig afskrivning end en tilsvarende konventionel bil (Overgaard, 2020).

Metode

Den økonomiske dynamiske model

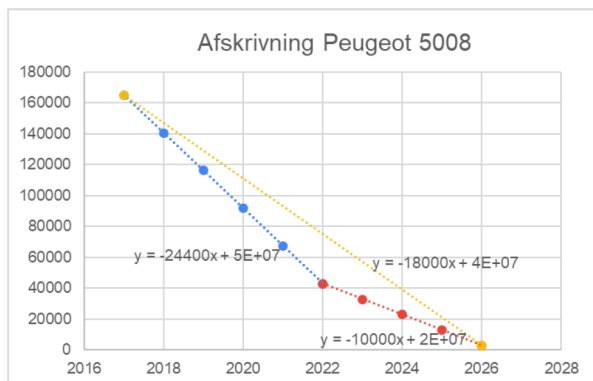
Som beskrevet tidligere er der udvalgt nøgletal, som er relevante og nødvendige for at opstille en økonomisk matematisk model, der sammenholder udgifterne for de to biler. På tabel 1 ses udsnit af det regneark hvori, de lette og moderate oversættelige nøgletal er indsat.

Tabel 5.1

Generelle Nøgletal		Nøgletal EL-bil		Nøgletal Diesel-bil	
Årligt kørselsbehov	20000	Mærke	MG	Mærke	Peugeot
Elpris hjemme kr/kWh	2,2	Model	Marvel	Model	5008
Elpris ude kr/kWh	5,5	Årgang	2022	Årgang	2011
Diesel kr/L	13	Drivmiddel	EL	Drivmiddel	Diesel
Service alm bil pr kørt km	0,2925	Ny pris	360000	Nypris	400000
Service elbil pr kørt km	0,325556	Anskaffelsesår	2022	Anskaffelsesår	2017
		Markedsværdi		Anskaffelsespris	165000
		Vægtafgift	680	Markedsværdi	42000
		Forsikring	5872	Vægtafgift	9020
		Service	6511	Forsikring	6900
		Reparation	0	Service	5850
		Forbrug wh/km	0,2	Reparation	5000
		Batteri størrelse (kWh)	69,9	Forbrug l/km	12
		Rækkevide (km)	400	Tank størrelse	65
		Afskrivnings procent pr år	17%	Rækkevide	780
				Afskrivningsprocent pr. år	23%

Under arbejdet med modellen blev det tydeligt, at det vigtigste nøgletal var afskrivningen. For at finde afskrivningen tog vi i første omgang udgangspunkt i dieselbilens anskaffelsessværdi, markedsværdi, anskaffelsesår

kalenderår, skrotpris samt det forventede antal år før bilen vil nå skrotprisen. På denne baggrund kunne vi plotte værdierne og udføre regression og herved opstille følgende model.



Figur 5.1

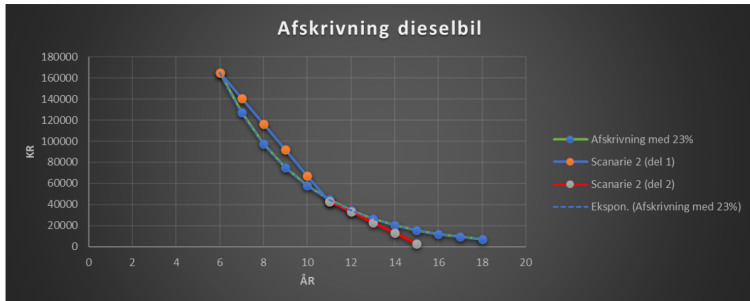
Modellen indeholder to scenarier.

Scenarie 1: Den gule, som viser bilens værdi fra anskaffelsesår til det år, hvor vi antager, at bilen er afskrevet bortset fra skrotprisen. Ud fra dette scenarie ville en gennemsnitlig afskrivning på 18.000 kr årligt kunne aflæses på grafens hældningkoefficient.

Scenarie 2: Den stykvis lineære (blå og rød). Den blå graf er deskriptiv og er baseret på anskaffelsesprisen, som startpunkt og markedsværdien som slutpunkt. Ud fra hældningstallet ses det, at den årlige afskrivning fra 2015 til 2022 har været 24400 kr om året svarende til ca 2000 kr pr mdr. Herefter ses det af den røde graf, som er præskriftiv, at bilens afskrivning vil falde til 10.000 årligt, som svarer til ca 800 kr pr. mdr.

Efter at have konstrueret en model for afskrivningen ønskede vi jf. modelleringscyklussen (Niss & Jankvist, 2021b) at fortolke den tilbage til virkeligheden og validere den. Først holdt vi scenarie 1 (den gule) og 2 (den blå og røde) op imod hinanden og konkluderede, at scenarie 2 var mest tro mod virkeligheden, da bilen i scenarie 1 (den gule) ellers ville repræsentere en værdi på ca. 75.000 kr. i 2022. Herefter ønskede vi at validere modellen op imod andet data for afskrivning fra (Overgaard, 2020) her fandt vi, at en bil gennemsnitlig afskrives med 16-25% årligt. På baggrund af det-

te opstillede vi endnu en model, hvor vi vha. excel afsøgte, hvilken årlige afskrivning i procent der matchede vores stykvis lineære graf fra scenarie 2.



Figur 5.2

Vi har derfor besluttet, at vi fremadrettet vil benytte den eksponentielle funktion som model for afskrivningen, da vi vurderer, at denne model giver det bedste billede af virkeligheden. Fordelen ved at anvende den eksponentielle funktion, som model for afskrivningen af dieselbilen, er derudover, at den kan benyttes når afskrivningen på elbilen skal findes. Som skrevet tidligere har vi benyttet en lavere afskrivningsprocent ved elbilen.

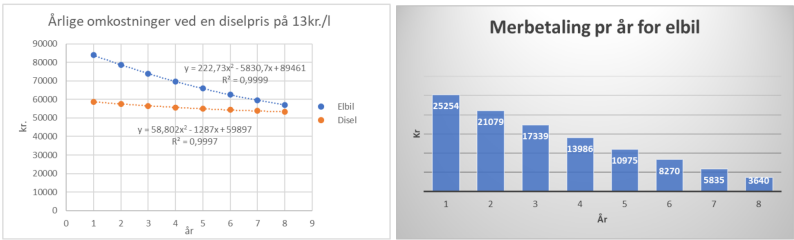
Resultater

Efter at have oversat de elementer fra det ekstra matematiske domæne til matematiske objekter (nøgletal), er vi nu i stand til at opstille og sammenholde de to modeller for de to biler. På tabel nr. 2 ses et eksempel for sammenligning af udgifterne for de to biler, hvis vi forudsætter at bilerne beholdes i 4 år. I tabellen er forskellen farvekodet så det ses, hvor det er fordelagtigt, at have hvilken bil. Elbilen er fremhævet med grøn og dieselbilen med blå. Den største forskel findes på afskrivningen, hvor den ældre dieselbil profiterer af en markant mindre afskrivning. Udover afskrivningen ses det, at elbilen er fordelagtig i stort set alle andre parametre bortset fra service hvor udgiften er stort set den samme. Elbilen profiterer markant på udgifterne til el/diesel samt en lavere vægtafgift.

Tabel 5.2

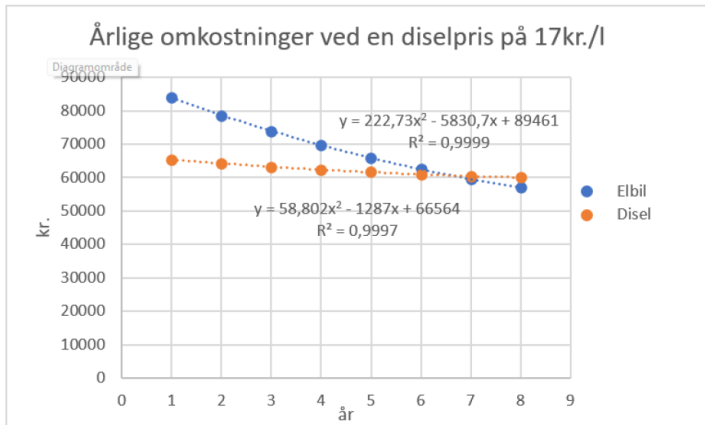
	Udgifter bil el	Udgifter bil diesel	Forskel
Vægtafgift	680 kr.	9.020 kr.	8.340 kr.
Forsikring	5.872 kr.	6.900 kr.	1.028 kr.
Service	6.511 kr.	5.850 kr.	-661 kr.
Reparation	0 kr.	5.000 kr.	5.000 kr.
Udgift el/diesel	8.800 kr.	21.667 kr.	12.867 kr.
Afskrivning	47.800 kr.	7.240 kr.	-40.559 kr.
			0 kr.
Udgifter uden afskrivning	21.863 kr.	48.437 kr.	26.574 kr.
			0 kr.
			0 kr.
Årlig udgift	69.663 kr.	55.677 kr.	-13.986 kr.
udgift pr mdr	5.805 kr.	4.640 kr.	-1.165 kr.

Ved at beholde bilerne i flere år, vil den gennemsnitlige afskrivning for begge biler falde, men da afskrivningen er eksponentiel, vil den gennemsnitlig afskrivning falde mest for elbilen og forskellen på de samlede udgifter vil reduceres. Udgiften kan anskueliggøres ved følgende modeller.



Figur 5.3

Modellerne viser tydeligt, at jo længere tid bilerne beholdes jo mere nærmere de samlede udgifter sig hinanden. Som skrevet ovenfor, er et af de parametre, hvor elbilen udmærker sig udgifterne til el/diesel nedenfor ses en revideret model hvis dieselprisen stiger til 17 kr./l. Heraf ses det, at det omkring det 6 år vil være økonomisk fordelagtigt at vælge elbilen.



Figur 5.4

Det psykologiske aspekt

Metode

I vores fokus på psykologien ved køb af elbil, tager vi udgangspunkt i 2 typer af personlighed defineret af Høgh-Olesen (2001) samt hans begreb OSN (Optimalt Stimulationsniveau). Vi har set på, hvordan personlighedstyper i hver yderposition påvirkes og dermed, hvor stor indflydelse personlighedstypen har på købet af elbil. Vi har forsøgt at matematisere dette. Vi har undersøgt, hvor let tilgængelige ladestander er på turen fra Aalborg til Odense og opstillet en matrix for dem. Ladestanderne er fundet på hos Clever og afstandene mellem er fundet ud fra google maps.

I forhold til om der også i fremtiden bliver en udfordring med offentlige ladestander i Danmark, har vi estimeret mængden af elbiler i fremtiden vs. ladestanderne, der forventes at blive sat op. Antallet af elbiler i 2021 er fundet gennem Danmarks Statistik. Den danske regering har en målsætning på 1 mio. eldrevet køretøjer i Danmark i 2030. Vi antager at antallet af elbiler vil kunne beskrives med en voksende eksponentiel udvikling, da der med tiden bliver bedre elbiler. Disse vil formodentlig også blive billigere, da brugtbilsmarkedet for elbiler, forventes at vokse, så den brede befolkning har mulighed for at erhverve sig en elbil. Derudover antager vi at forholdene

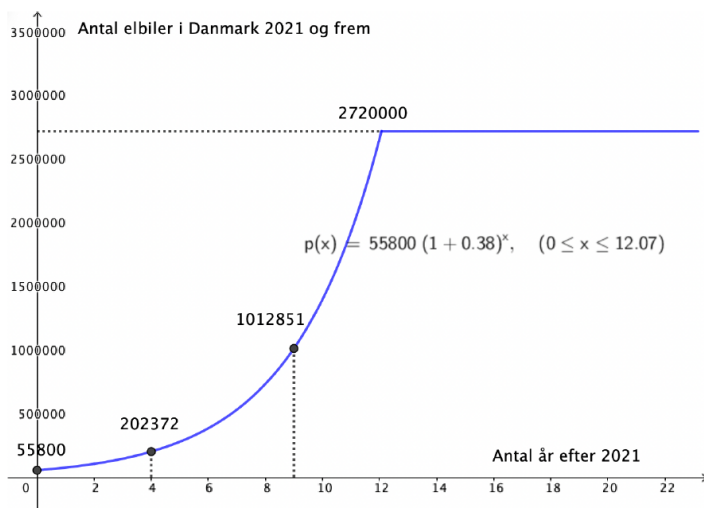
bliver bedre for elbilsejere med tiden, og at vi får et elnet som kan følge med.

Vi har beregnet en vækstprocenten fra 2021-2030 i antallet af elbiler er på 38%:

$$1000000 = 55800 * (1 + x)^9$$

$$x = 0,38$$

Dette er gjort for at kunne finde et estimat af antal af elbiler i 2025. Til sammenligning bruges det forventede antal af nye ladestandere, på 23000 i 2025 (Ny brancheaftale, 2021), som Clever har planer om at etablere, for at kunne vurdere om forholdene bliver bedre end i 2021. Modellen er desuden fladet ud ved 2,72 mio. elbiler, da det er mængden af biler på nuværende tidspunkt, og der forventes ikke at komme flere eller færre biler med årene, da antallet af personer i Danmark ikke antages at være i vækst. Det antages at der på et tidspunkt kun vil være elbiler i Danmark, da det også er et mål for den danske regering.



Figur 5.5

Teori

Norge har på elbilområdet været et foregangsland og herfra kommer begreberne “lade-stress” og “rækkevidde-angst”, som har været bundet op på langsomme ladestandere samt elbilernes batterier. Batterierne er dog i stigende grad blevet mere effektive og kan således bruges til længere ture. Dermed er begrebet “rækkevidde-angst” ikke længere så betydningsfuldt, men er blevet erstattet af begrebet “lade-kø-angst” eller “lade-tilgangs-angst”. Problematikken er nu, at der ikke er ladestandere nok tilgængeligt uden for eget hjem og egen ladestation (Nettavisen.no, 2019). Man er dermed ikke på samme måde som tidligere nervøs for rækkevidden af bilens batteri, men nervøs for tilgængeligheden af ladestandere. En tilsvarende problematik forekommer tænkelig i Danmark, da der har været en stor stigning i antallet af elbiler over de sidste 3-4 år, samtidig med, at antallet af offentlig tilgængelige ladestandere ikke er fulgt med (Transportministeriet, 2021).

Personlighedstyper og OSN.

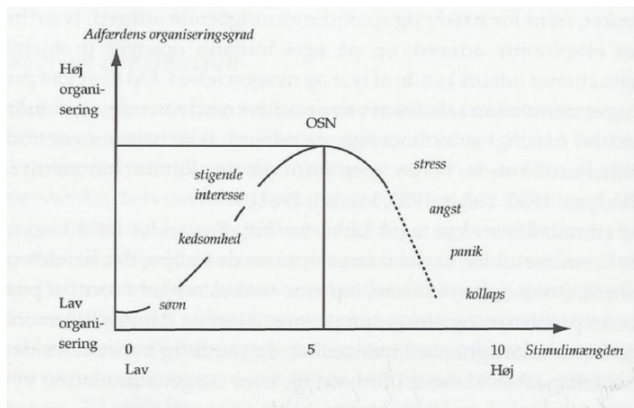
Høgh-Olesen (2001) definerer 2 forskellige personlighedstyper “den forsigtige og den risikovillige”. Disse 2 anskues som ekstreme yderpunkter og derimellem forekommer blandingsforhold.



Figur 5.6

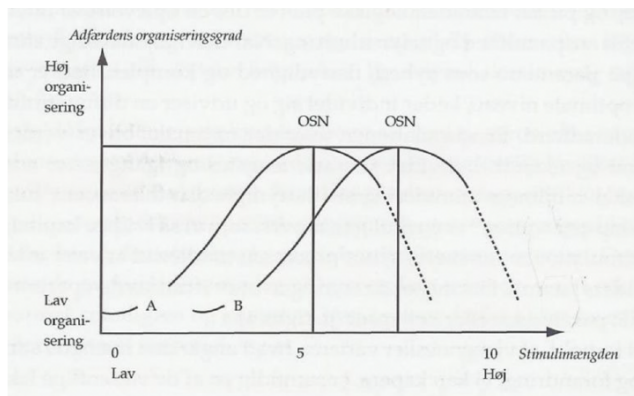
Den forsigtige type vil være mindre villig til at tage chancer og vil derfor i højere grad være mere tilbageholdende med at foretage ændringer i sit liv, der ikke er nøje gennemtænkte og overvejede. I det andet yderpunkt ligger den risikovillige type, som i langt højere grad er villig til at tage chancer og som af den grund vil være mere tilbøjelig til at foretage livsændringer uden at have gennemtænkt alt, men derimod løser problemerne, som de opstår. Modellen til højre beskriver en persons optimale stimulationsniveau (OSN). Dette er afhængig af persontype.

Modellen er udviklet i forhold til ledelsespsykologi men kan overføres på andre områder. Y-aksen beskriver situationens “organisering” og x-aksen beskriver mængden af stimuli.



Figur 5.7: (Høgh-Olesen, 2021)

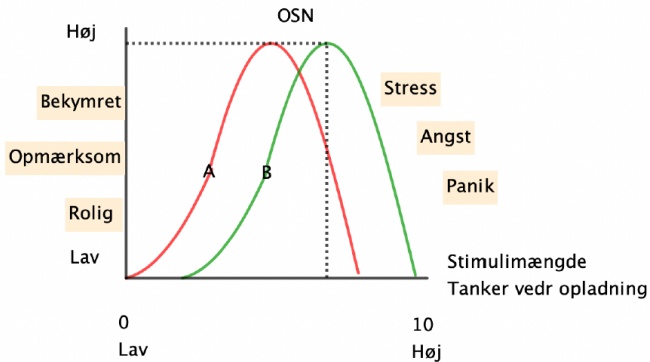
Afhængig af personlighedstype kan man håndtere mere eller mindre organisering i kombination med mere eller mindre stimuli. Se modellen til højre. Den forsigtige type (A) vil tidligere nå sit optimale stimulationsniveau i forhold til den risikovillige typer (B). Herefter bliver kurven nedadgående og indtrykkene/stimuli ændres til symptomer som stress/angst.



Figur 5.8: (Høgh-Olesen, 2021)

Resultater

Organisering af hverdagen
vedr opladning



A (rød) er den forsigtige type B (grøn) er den risikovillige type

Figur 5.9

Modellen i figur nr. 5.9 er en bearbejdet udgave af figur nr. 5.8, og illustrerer stressniveau hos elbilsejeren. På y-aksen findes organiseringen af hverdagen i forhold til planlægning og mulighed for strukturering af opladning. X-aksen beskriver stimulismængden, hvor der er tale om alle de tanker og bekymringer samt muligheden for opladning, som en elbilejer oplever.

Dermed kan denne model bruges til at sige noget om, hvor hurtigt en person, afhængig af persontype, oplever sit optimale stimulationsniveau. Det mener vi, er med til at påvirke personens villighed - eller mangel på samme - til at skifte til elbil.

Den forsigtige type, A, vil være mindre villig til at tage chancer og vil derfor i højere grad være mere tilbageholdende med at foretage ændringer i sit liv, der ikke er nøje gennemtænkte og overvejede. Denne type vil derfor være længere om at skifte til elbil i forhold til den risikovillige type, hvis det overhovedet sker. I det andet yderpunkt ligger den risikovillige type, B, der i langt højere grad er villig til at tage chancer og ikke påvirkes så meget af ændringer. Person B vil derfor være hurtigere til at tage beslutningen om skifte til elbil.

Tilgængelighed af ladestandere

Matrixen er med udgangspunkt i at sikre at turen fra Aalborg og Odense reelt kan lade sig gøre i forhold til ladestandere på selve turen. Da turen mellem Aalborg og Odense er omkring de 500 km, tur-retur, er det derfor nødvendigt at lade mindst en gang på selve turen.

Tabel 5.3

	Aalborg	Circle K Nørager	Rasteplads Gudena	Circle K Vejle	Fredericia UFC	McDonalds Middelfart	Bilka Odense
Aalborg	0	35	87	184	206	210	258
Circle K Nørager	35	0	52	149	171	175	223
Rasteplads Gudena	87	52	0	97	119	123	171
Circle K Vejle	184	149	97	0	22	26	74
Fredericia UFC	206	171	119	22	0	4	52
McDonalds Middelfart	210	175	123	57	4	0	48
Bilka Odense	258	223	171	109	39	48	0

Circle K Nørager	Industriparken 2, 9610, Nørager
Rasteplads Gudena Øst	Nordjyske motorvej 401, 8920, Randers NV
Circle K Vejle	Fredericiavej 151, 7100, Vejle
Fredericia UFC	Strevelinsvej 3, 7000, Fredericia
McDonalds Middelfart	Nyvang 4, 5500, Middelfart
Bilka Odense	Niels Bohrs Alle 150, 5230, Odense

Modellen fortæller ikke noget om, om ladestanderne reelt er ledige. Derfor har vi undersøgt, antallet af elbiler i Danmark vs. antallet af ladestandere.

Der var ifølge Danmarks Statistik 55800 elbiler registreret i Danmark i 2021 (Moric & Dalbro, 2021). På samme tid var der ifølge transportministeriet ved udgangen af 2021 4828 offentligt tilgængelige ladestandere i landet. Ifølge et notat fra transportministeriet (2021) er der generelt mangel på offentlige ladestandere i Danmark. Notatet fortæller, at i 2018 var 1 ladestander pr. 4 elbil, mens der 2021 var 1 ladestander pr. 11 elbiler. Altså vokser bestanden af elbiler hurtigere end bestanden af ladestandere i Danmark.

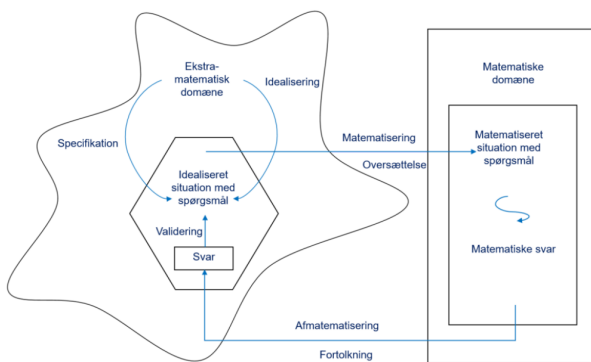
Regeringen lavede tilbage i 2020 et mål om 1 mio. eldrevet køretøjer i Danmark i 2030. Hvis det bliver en realitet vil der i 2025, og hvis bestanden stiger eksponentielt, kan det forventes at der vil være 202.372 eldrevet køretøjer i Danmark. Dette er aflæst på graf (se metode), som er lavet ud fra gennemsnitlig årlig stigning på 38% set ud fra antal elbiler i 2021 og målet om 1 mio. elbiler i 2030. I 2025 forventer Clever (Ny brancheaftale, 2021)

at have 23.000 ladestandere i Danmark, og med det udgangspunkt er der 8,8 elbil pr. offentligt tilgængelige ladestander. Dermed vil der i 2025 være bedre forhold for at kunne lade end i 2021, med udgangspunkt i regeringens mål for bestanden af eldrevet køretøjer i Danmark i 2030.

Diskussion

Modelleringscyklus

For at arbejde med den problemstilling vi opstillede i starten, har vi skulle arbejde med en vis mængde af matematisering. For at få en forståelse for den process har vi hovedsageligt brugt den udvidet modelleringscyklus (Niss, 2010) som vist nedenfor. For at systematisere analysen nedenfor brugte vi de udpenslede processer af modelleringscyklussen (Niss & Jankvist, 2021b)



Figur 5.10: Niss & Jankvist (2021b)

For at arbejde matematisk med problemstillingen skulle vi først specificere, hvad det var vi ville undersøge ved elbiler, dette gøres ved at præ-matematisere vores undersøgelse. Vi specificerede, de to virkelighedsnære scenarier, at beholde en nuværende bil eller anskaffe en elbil. I dette stadie startede udvælgelsen af de parametre som har en effekt på den økonomiske situation. I matematiseringen oversatte vi objekter til tal og funktioner.

I problemløsnings fasen opsatte vi vores model der sammenlignede de to økonomiske scenarier. I af matematiseringsfasen kunne vi analysere vores data for, hvad Mads skulle betale mere eller mindre, hvis han skiftede lige nu. Til slut i valideringsfasen kunne vi begynde at kontekstualisere tallene med de andre faktorer, som vi har undersøgt. Hermed har vi skabt et velfunderet beslutningsgrundlag.

Vi har på baggrund af teoretiske modeller argumenteret for, at den risikovillige type i højere grad er villig til at foretage skift til elbil.

For at køber kan medtage sin persontype som en del af beslutningsprocessen, har vi diskuteret forskellige måder, at finde en faktor for persontypen via matematisering. Denne faktor bør indeholde oplysninger omkring personlighedstype. Spørgsmålet er dog, om man kan matematisere psykologiske faktorer. Det vil kræve ekstra undersøgelse samt udarbejdelse af spørgeskemaer, der kan bearbejdes statistisk for herudfra, at kunne udarbejde en scoringstabel i forhold til det persontype-afhængige OSN.

I forhold til det psykologiske aspekt har vi derfor brugt en betydelig mængde tid i præ-matematiserings fasen, i et forsøg på at opstille en fremgangsmåde. Vi anser derfor også arbejdet med det psykologiske aspekt som en stor mulighed for læring.

Udover personlighedstype er der også andre psykologiske parametre der bør overvejes at tages med. Dette være sig fx:

- prestige i forhold til hvilken bil man kører i - hvor meget betydning har det?
- hvilken type bil? Hatchback, stationcar, coupe, land rover?
- hvor meget betyder bæredygtighedsaspektet?
- hvilken økonomi har køberen?

Den grønne omstilling

I samtalen om omstilling til elbiler, høres ordene “grøn omstilling” ofte. Dette er et område vi ikke har valgt at tage med i denne artikel, da spørgsmålet om elbiler reelt er bæredygtige, er et helt nyt spørgsmål i sig selv. Dog tænkes det at den grønne tanke angående elbiler, kunne være en faktor for flere

Olie priser

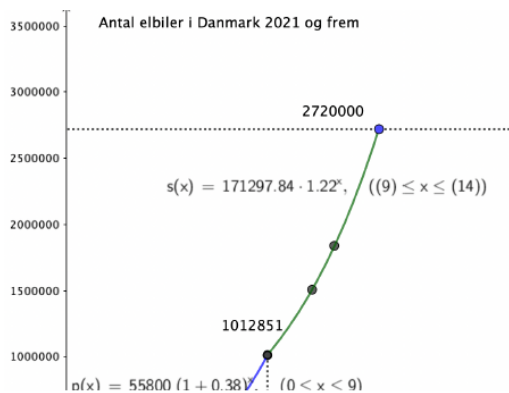
Den økonomiske model er blevet skabt på et tidspunkt hvor dieselpriserne var signifikant lavere end den nutidige pris, som er steget grundet krigen

i Ukraine. I modellen har vi brugt en dieselprijs på 13 dkk./L. og nu er de ifølge OK tanken 16,59 dkk./L. I en hypotetisk situation hvor dieselpriiserne stiger til 20 dkk./L. Og alle de andre priser er statiske ville det være fordelagtigt for Mads, at anskaffe en elbil hvis han beholdte den 5 år eller mere. Priser kan også ændre sig drastisk for afgifter i takt med at den danske regering forsøger at udfase elbiler (Regeringen, 2020). Regeringen har planlagt løbende at øge afgiften for dieselmotorer med 10% frem mod 2026. Men i samme aftale er det også bestemt at registreringsafgiften for elbiler vil stige fra 2026 frem mod 2035.

Skæv sammenligning

Vi er klar over at sammenligningen af en ny elbil og en gammel dieselmotor ikke er en analyse af to lige elementer, da der er stor forskel i afskrivningsbeløb, levetid mm. Denne analyse er foretaget for at give Mads et beslutningsgrundlag for, hvor længe han skalkan vente, før han køber en elbil. En mere jævnbyrdig sammenligning havde været mellem en ny elbil og en ny diesel/benzin bil. Et andet aspekt hvor sammenligningen ikke er en til en, er den psykologiske påvirkning der ligger i at eje en ny bil. Det giver ofte en følelsesmæssig påvirkning på selvet, at have en helt ny bil i forhold til at have en bil som er et par år gammel (Hay, Nehlsen, Renstrup, 2022).

Virkelighed i modellen



Figur 5.11

Ovenover ses en tilrettet version af figur nr.5.5, hvori det antages at anskaffelsen af elbiler stadig er eksponentie stigende, men at den årlige vækstprocent falder til 22%. Ud fra EU's mål (KOM, 2021) om udskiftning af fossildrevne biler med eldrevne i 2035 Umiddelbart er der 2 meget modsattede scenarier i forhold til prisen på eldrevne køretøjer frem mod 2035. Ifølge Bloomberg New Energy Finance (2021) vil prisen falde, da batterierne bliver op mod 58% billigere at fremstille. Det andet scenarie er, i følge Reuters.com/buisness (2021), at prisen stiger, da batterierne fremstilles af sjældne metaller, hvor efterspørgslen stiger og deraf også prisen. Der er tilsyneladende ikke fuldstændig enighed om dette. Vi vælger dog at antage, at prisen falder og, det derfor bliver lettere for den almindelige dansker at anskaffe en elbil. Desuden vil markedet for brugte elbiler, indenfor de næste år, med al sandsynlighed også vokse.

Afsluttende bemærkning

Vi har i artiklen belyst spørgsmålet "Skal Mads skifte sin gamle dieselbil med en ny elbil?". Vi har igennem matematisering, modelleret det økonomiske aspekt og udvalgt psykologiske parametre, som har betydning og indflydelse for beslutningen. På baggrund af de opstillede modeller kan vi konkludere følgende:

- Det er rentabelt, at skifte til en MG Marvel, hvis dieselprisen er på mindst 17kr./l og den elbilen beholdes i mindst 6 år
- At afskrivningen på en ny elbil har stor betydning for de samlede omkostninger
- At prisen på diesel har afgørende betydning for, hvornår de er rentabel at skifte bil
- At der på turen Aalborg - Odense og retur i elbil skal foretages en opladning
- At antallet af elbiler pr. ladestandere på nuværende tidspunkt 11 og i 2025 er dette tal faldet til 8,8.
- At der ved anskaffelse af en elbil vil være forbundet en usikkerhed i tilgængeligheden af ladestandere, hvilket kan påvirke beslutningen om et skifte til elbil afhængig af personlighedstype.

Ud fra ovenstående vurderer vi, at Mads med fordel kan vente et par år med at udskifte hans nuværende bil. Dette er både ud fra et økonomisk aspekt, da han ikke vil spare penge, men faktisk ville skulle betale mere pr.

måned. Derudover kan vi konkludere ud fra vores estimater at der på nuværende tidspunkt ikke er let tilgængelighed til tilstrækkelig mange offentlige laderstandere i Danmark. Vi mener dog, at kunne se, at der lagt op større fordele for elbilsejere i de kommende år.

Litteratur

Bilbasen, (2020), Hvad koster det at lade en elbil op. Lokaliseret på <https://blog.bilbasen.dk/elbil-opladning-pris-207694/>, Sidst set 07.03.2022

Bloomberg NEF, (2021), Hitting the EV Inflection Point, lokaliseret på https://www.transportenvironment.org/wp-content/uploads/2021/08/2021_05_05_Electric_vehicle_price_parity_and_adoption_in_Europe_Final.pdf

FDM, (2015), Det koster service på en elbil, Lokaliseret på <https://fdm.dk/nyheder/bilist/2015-12-det-koster-service-paa-en-elbil>, Sidst set 07.03.2022

Hay, P., Nehlsen, G. & Renstrup, P. (2022) Intro til HHX - Hvorfor køber vi overhovedet noget?. Systime

Høgh-Olesen, H. (2003), Personlighedens positioner (Illustration: Schultz Larsen, O., Systime (2003), Psykologiens veje)

KOM (2021, 8.september), Grund- og nærhedsnotat til Folketingets Europaudvalg, lokaliseret på [https://www.eu.dk/samling/20201/kommissionsforslag/KOM\(2021\)0556/bilag/1/2443291.pdf](https://www.eu.dk/samling/20201/kommissionsforslag/KOM(2021)0556/bilag/1/2443291.pdf)

LB, Lærerstandens Brandforsikring, (n.d.) <https://www.lb.dk/> Sidst set 08.03.2022

Moric K. & Dalbro S. (2021, 10. November). Højeste elbilandel i regionerne, laveste i staten. Lokaliseret på <https://www.dst.dk/da/Statistik/nyheder-analyser-publ/nyt/NytHtml?cid=33096>, sidst set 24.03.2022

Nettavisen.no (2019), Ladetilgangsangst» er i ferd med å overta for rekkeviddeangst. Lokaleriset på <https://www.nettavisen.no/livsstil/ladetilgangsangst-er-i-ferd-med-a-overta-for-rekkeviddeangst/s/12-95-3423848140>

Niss, M., Jankvists, U. T., (2021a), Hvad er matematisk modellering?, Nationalt center for udvikling af matematik undervisning. Lokaliseret på [https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/hvad-er-matematisk-mo dellering/](https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/hvad-er-matematisk-mo-dellering/), Sidst set 11.03.2022

Niss, M., Jankvists, U. T., (2021b), Modelleringscyklussen, Nationalt center for udvikling af matematik undervisning. Lokaliseret på <https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/modelleringscyklussen> Sidst set 23.03.2022

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., & Hurford, A. (Eds.) Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13 (pp. 43-59). New York: Springer.

Ny brancheaftale: Om fem år vil der være fem gange så mange ladestandere i Danmark (2021, 5. Februar). Lokaliseret på <https://klimamonitor.dk/nyheder/art8091643/Om-fem-%C3%A5r-vil-der-v%C3%A6re-fem-gange-s%C3%A5-mange-ladestandere-i-Danmark>, sidst set 24.03.2022

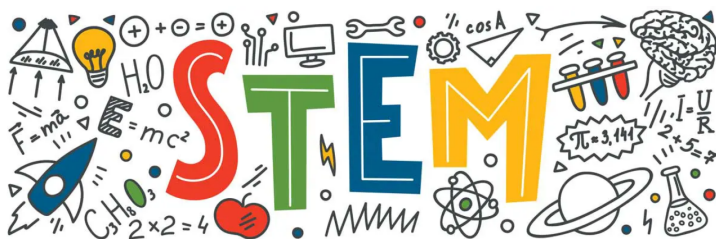
Overgaard, J., (2020), FDM: Det er billigst at køre elbil, FDM. Lokaliseret på <https://www.sn.dk/danmark/fdm-det-er-billigst-at-koere-elbil/>, Sidst set 08.03.2022.

Regeringen, (2020), Aftale om grøn omstilling af vejtransporten, <https://fm.dk/media/18300/aftale-om-groen-omstilling-af-vejtransporten.pdf>

Scheyder, E. (2021), Lithium producers grow bullish as EV revolution turbocharges demand. Lokaliseret på <https://www.reuters.com/business/energy/lithium-producers-grow-bullish-ev-revolution-turbocharges-demand-2021-05-07/>, Sidst set d.28.marts 2022.

Transportministeriet (2021) Udvikling i ladeinfrastruktur og bestand af el- og plug-in-hybridbiler

Sine Flensbak Søltøft,
Mads Bruun Birk,
Camilla Guldborg Nielsen &
Christian Skelmose Jensen



Denne artikel undersøger de kriterier, der ligger til grund for udarbejdelsen af den tidligere navngivne Ghettoliste, der benyttes til at udpege udsatte boligområder. Artiklen belyser og diskuterer, hvorledes validiteten af matematisk modeller i samfundet har betydning for demokratiske beslutninger.

Artiklen illustrerer, hvordan de matematiske begreber Gini-koefficienten og Lorenz-kurven kan benyttes som analyseværktøj til modellering af økonomisk ulighed. Afslutningsvis beskrives et undervisningsperspektiv til grundskolens matematikundervisning med fokus på elevernes oplevelse af relevance samt brugen af digitale hjælpemidler.

Indledning

Siden 2010 har skiftende regeringer bedt embedsfolk om at udarbejde lister med ghetto-områder. I 2021 blev ordet ”ghetto” streget, fra listen og områderne fik i stedet betegnelsen parallelsamfund, udsatte boligområder og omdannelsesområder (BL, n.d.). Denne artikel belyser, hvordan udarbejdelse af denne liste kun er muligt ved inddragelse af matematisk modellering. Matematisk modellering er den proces, der kan være med til at besvare et spørgsmål eller være et værktøj til at løse en problemstilling. Problemstillinger, der ligger uden for matematikken, kaldes ifølge Niss og Jankvist (2021) et ”ekstramatematisk domæne”. Niss og Jankvist (2021) definere problemstillinger som intellektuel/videnskabelige, praktisk/pragmatiske eller kombination af begge. I de intellektuel/videnskabelige problemstillinger er målet ved modellering, at opnå mere viden om og forstå væsentlige træk ved domænet, til forstå, forklare eller forudsige. I de praktisk pragmatiske problemstillinger er målet ved modellering, at træffe beslutninger og iværksætte handlinger. Da ”ghetto” listerne skal danne grundlag for politiske valg og beslutninger med støtte i matematiske modeller, kan vi anskue dette som en pragmatisk problemstilling.

Et af de bærende parameter, for at et område defineres som et udsat boligområde, er ulighed. Derfor vil vi først belyse hvordan, en matematisering af begrebet ulighed i Danmark kan anskues ved hjælp af Gini-koefficienten og Lorenz-kurven fra et makro perspektiv og herfra flytte perspektivet til en meso perspektiv ved specifikt at kigge på, hvilke kriterier og matematiske modeller, der danner grundlag for, at netop områderne udpeges. Vi har valgt konkret at se på området Gellerup/Toveshøj i Aarhus Kommune.

Slutteligt vil vi i artiklen belyse, hvorledes det er muligt at bringe matematiseringen af denne samfundsrelevante case ind i skolen, som et undervisningsforløb. Samt diskutere, hvilke læringspotentialer et samfundsrelevant område fra det ekstra matematiske domæne kan tilbyde matematikundervisningen.

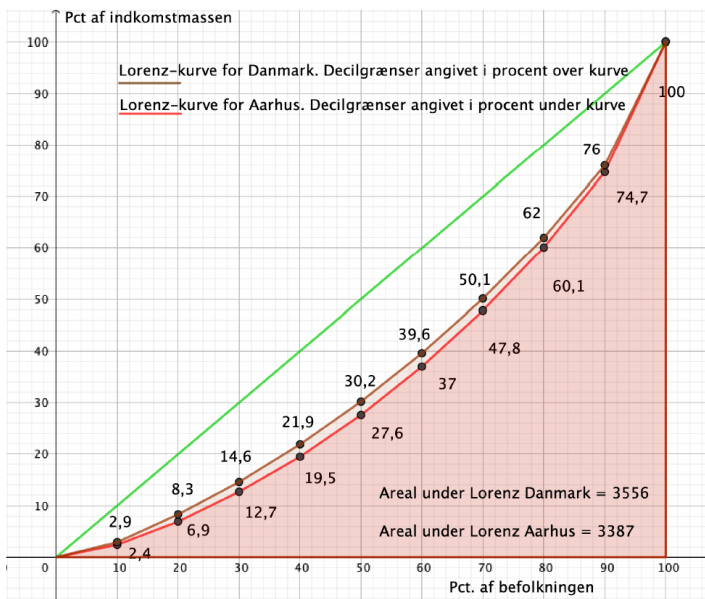
Et makro perspektiv - Gini-koefficienten og Lorenz-kurven

Vi ønsker i dette afsnit, at belyse, hvordan matematiseringen af indkomstmassen er fordelt i befolkningen vha. Lorenz-kurve og Gini-koefficienten.

Vi vil i følgende afsnit belyse forskellige tilgange at beregne Gini koefficienten. Flere metoder til beregning af Gini koefficienten medtages, for senere at kunne diskutere brugen af relevante digitale hjælpemidler i matematikundervisningen i forhold til fænomenerne “white boxing” og “black boxing” (Misfeldt & Jankvist, 2020).

Gini-koefficienten er et mål, der fx bruges for ulighed i et samfund, og er et tal mellem 0 og 100. Hvis alle personer i et samfund havde den samme indkomst, ville Gini være 0 = diagonalen i figur 6.1. Hvis kun 1 person havde den samlede indkomst, ville Gini være 100. Gini-koefficienten påvirkes meget af enkelt personers indkomst. Fx hvis 1 person i 10.decil har en meget stor indkomst eller omvendt, hvis 1 person i 1.decil har haft negativ indkomst (fx tab på aktier, konkurs ell. lign). På figur X ses det, at 20% af befolkningen råder over 8,3 % af indkomstmassen.

Ved indhente data fra Danmarks statistik (dst.dk). over decilgrupperne i forhold til ækvivaleret disponibel indkomst (se bilag 1), har vi kunnet fremstille Lorenz-kurven for Danmark 2020 samt Aarhus Kommune 2020.



Figur 6.1: Lorenz-kurven i Danmark og Aarhus i 2020

Gini-koefficienten fremkommer gennem flere skridt. Først summeres decil grupperne og plottes. Derefter forbindes de med rette linjer, og her ved fremkommer Lorenz-kurven, der består af stykkevis lineære funktioner med forskellig hældningskoefficient. Arealet mellem diagonalen og Lorenz-kurven kan herefter findes ved brug af flere metoder:

- Metode 1/ Områderne mellem hvert enkelt punkt og diagonalen kan beregnes ved at anskue dem som værende trekanter eller trapezer.
- Metode 2/ Området beregnes ved brug af integralregning for de enkelte områder mellem punkterne.
- Metode 3/ Området aflæses ved at bruge areal-værktøjet i Geogebra. Punkterne forbindes til en polygon via punkt (0,0) og (100,100), hvorved arealet under Lorenz-kurven kan aflæses.

Det aflæste areal trækkes fra det samlede areal under diagonalen og ganges med 100. I denne opgave benytter vi en geometrisk formidling ved at bruge Geogebbras funktioner til aflæsning. Arealet under Lorenzkurven er aflæst, og Gini-koefficienten kan nu beregnes på følgende måde:

$$\text{For Danmark: } 100 - (3560/5000 * 100) = 28,80\%$$

$$\text{For Århus: } 100 - (3387/5000 * 100) = 32,26\%$$

Det ses, at ud fra den beregnede Gini-koefficient, at der er større økonomisk ulighed i Aarhus end på landsbasis.

Et meso perspektiv - Hvordan udpeges udsatte boligområder?

Dette afsnit afdækker baggrunden for loven om ghettoer, samt hvilke kriterier der skal opfyldes før et boligområde, kan betegnes som et udsat boligområde eller andre af de udvalgte kategorier.

I marts 2018 vedtog folkettingen loven om ghettoer, som havde til hensigt at reducere mængden af de såkaldte ghettoer (DR, 2018). Regeringen ønskede at opnå dette ved at skabe en bredere sammensætning af borgere i disse boligområder. Der blev identificeret en række tiltag for at igangsætte denne ændring, bl.a. skulle boligforeningerne rive almene boligbyggerier ned og sælge nogle af deres lejligheder til private.

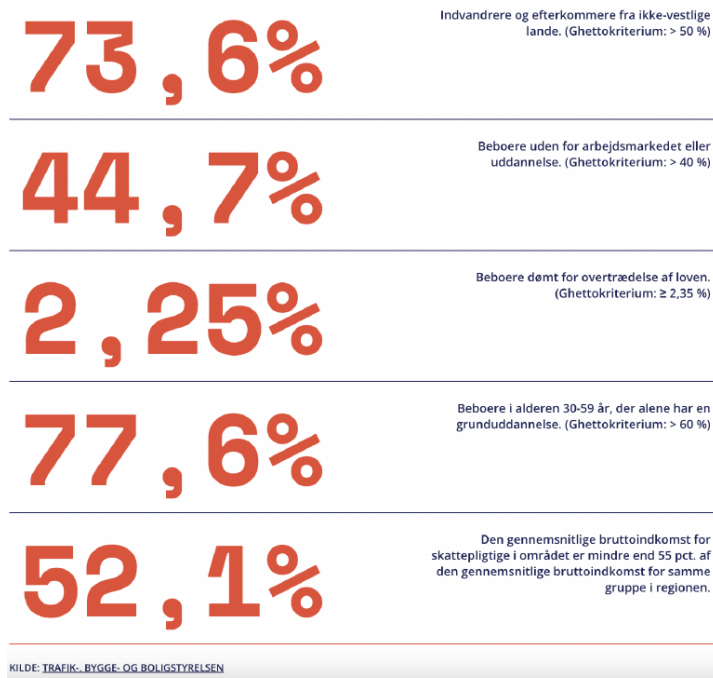
Men før disse tiltag kunne igangsættes, jævnfør loven om ghettoer, skulle regeringen have en måde, hvorpå de kunne identificere disse områder. Der blev udvalgt 5 kriterier, som kunne modellere et givent områdes tilstand og om, hvorvidt det kan kaldes en ghetto.

- Beboerne har en mindre end gennemsnitlig tilknytning til arbejdsmarkedet
- Beboerne er dømt for lovovertrædelser i højere grad end den gennemsnitlige befolkning
- Andelen af beboere der ikke har en uddannelse højere end en grunduddannelse overskrider 60%
- Den gennemsnitlige bruttoindkomst for beboerne er mindre end 55% af den gennemsnitlige bruttoindkomst for borgerne i regionen.
- Andelen af beboere med en anden baggrund end vestlig overstiger 40%

Senere er navngivningen af boligområderne ændret, således at der ikke er brugt ordet ghetto til at kategorisere et område. Kategorien med de sværeste opfyldelige krav er et udsat boligområde, som skal opfylde 2 af de første 4 kriterier vist ovenfor. Kategorien parallelsamfund dækker over boligområder med over 50% indvandrere med en ikke vestlig baggrund. En underkategori af parallelsamfund er omdannelsesområde, et område indgår i denne kategori, når den har været kvalificeret til at være et parallelsamfund i 5 år (Bolig- og planstyrelsen, 2021). Til sidst er der kategorien forebyggelsesområde, hvor kravene er de samme som ved et udsat boligområde, omend er kravene, lidt mindre strikse.

Lovforslag L38, (2018-19, vedtaget den 22. november 2018, som ændrede i lov om ændring af lov om almene boliger m.v., lov om leje af almene boliger og lov om leje), har modtaget en del kritik, bl.a. fra menneskerettighedsrådet i FN (Arbejderen, 2021), som udtaler, at Danmark diskriminerer mod ikke vestlige indvandrere, på baggrund af at et område kan kvalificeres som et parallelsamfund, ved høj andel af mennesker med ikke vestlig baggrund. Regeringen er også blevet kritiseret for at ramme socialt udsatte samt mennesker med handicap ved at nedrive sociale boligbyggerier (Holck, 2021).

Data fra Udsatteområder.dk viser følgende over Gellerup/Toveshøj i Aarhus kommune:



Figur 6.2: Data fra Udsatteområder.dk

Det første vi bemærker er, at der må være en fejl omkring punkt nr 3, “beboere dømt for overtrædelse af loven”, da kriteriet er $\geq 2,35\%$ og tallet for området er 2,25%. Dermed burde dette kriterium have været farvet blå. Vi ønskede at finde data bag de angivne procenter, men det har vist sig sværere end først antaget, da sådanne oplysninger krævede en betaling på 4000 kr. til danmarks statistik.

Et samfundskritisk perspektiv på modellen

Dette afsnit er et forsøg på at analysere de problematikker, som loven om ghettoer har frembragt. Der vil være et specielt fokus på appropriationen af matematik i udviklingen af statens model. Misfeldt & Jankvist (2020) peger på, at den skjulte matematik i Finansministeriets regnemodeller er under

løbende beskyldning for at være politisk “biased», fordi modeller ikke kan undgå at afspejle en bestemt værdi. Misfeldt & Jankvist (2020) påpeger, at dette ikke gør modellerne forkerte, men den skjulte matematik kan være en demokratisk udfordring. Alle modeller bygger på forskellige eksplícitte og implícitte valg og fravalg der er truffet ud fra det man ønsker at foretage en modellering over. Derfor er det vigtigt at have opmærksomhed på modellens gyldighedsområde, da en model altid er lavet med et bestemt formål. Johansen & Sørensen (2014, s.180) citerer Box & Draper (1987:424) “*Essentially, all models are wrong, but some are useful*” — “*I bund og grund er alle modeller forkerte, men nogle er nyttige*”, da de kun siger noget om virkeligheden men ikke ER virkeligheden. Johansen & Sørensen (2014) definerer 3 former for modeller; den fænomenologiske, den teoretiske og en pseudomodel. Den *fænomenologiske* model vil bygge på udvalgte parametre, hvorefter man forsøger at få modellen til at passe til de data man har dermed er modellen *datareven*. Karakteristika for den *teoretiske* model er, at den er deduktivt udledt og trækker på nogle kendte og grundlæggende matematiske principper. En egentlig skelnen mellem disse to modeller kan dog være vanskelig, men definitionerne er et vigtigt redskab i arbejdet med vurderingen af modellens holdbarhed. Den tredje modeltype betegnes som en *pseudomodel*, der dog ikke er en egentlig matematisk model men en model, der opstiller pointer ved at låne noget af matematikkens slagkraft og autoritet.

Baggrunden for loven om ghettoer starter allerede tilbage i starten af 00’erne, hvor Dansk Folkeparti (DF) og deres politiske dagsorden begynder at få fodfæste i dansk politik. Ved folketingsvalget i 2015 får DF 21,3% af stemmerne og bliver dermed Danmarks andet største parti (Danmarks statistik, 2015). De etablerede partier kan derfor ikke længere ignorere DFs mål og retorik, derfor skal der forsøges at efterkomme ønsker omkring strammere indvandrerpolitik.

Idet et politisk ønske ikke var nok til at støtte op Lovforslag L38 (2018), skulle regeringen skabe et grundlag for at udpege problematiske områder. Uden en synlig begrundelse blev der valgt en række kriterier, som er nævnt i afsnittet ovenfor. Der er ikke opgivet tydelig videnskabelig baggrund for udvælgelsen af kriterier på statslige hjemmesider, der oplyser omkring den såkaldte ghettoliste. Der kan stilles spørgsmålstejn, ved, om ghettolistens kriterier er blevet udvalgt udfra en politisk dagsorden for at kunne udpege forud tænkte områder som ghettoer. Disse forud tænkte områder har været udsat for stor kritik af specielt de indvandrerkritiske partier. Ud fra ovenstående kan der argumenteres for, at den skjulte matematik netop bliver

den demokratiske udfordring, som Misfeldt & Jankvist (2020) peger på, og dermed vanskeliggør den demokratiske diskussion.

Der kan yderligere stilles spørgsmålstejn ved om det at stemple bolig-områder, og dermed også de mennesker, som er bosat der, kan være med til at forstørre uligheden. Dette tænkes i forbindelse med den stigmatisering, der bliver fremsat i bl.a. medier om de mennesker, som bor, bl.a. i Gellerupparken og Vollsmose. Disse områder bliver især i medier fremsat som parallelsamfund med store udfordringer i forhold til kriminalitet og gadekamp - altså et farligt sted at være, bl.a. med artiklen fra Fyns politi (2021).

Derved bliver tal og matematik et argument i hænderne på dem, der ønsker mindre ikke-vestlig kultur. Da det er regeringen, der udvælger kriterierne og grænseværdierne, kan det virke umuligt at kritisere. Denne manglende kritiserbarhed er yderligere forværet af besværligheden af at verificere tallene, idet disse tal kun tilgås, hvis man betaler Danmarks Statistik 4000 kroner. Johansen & Sørensen (2014) peger på, at matematikkens sprog indimellem bliver misbrugt til at opstille noget, der ligner matematiske modeller uden at være det. Sådanne modeller defineres som pseudomodeller. Argumentet for, at modellen for udpegelse af udsatte boligområder kan kvalificeres som en pseudomodel, er måske knebent, men det er tydeligt, at definitionen/modellen har lånt noget af den autoritet, som matematikken har (Johansen & Sørensen, 2014).

Modellen til brug for ulighedsberegning (Lorenz og Gini) må anses at være en teoretisk model, hvorimod de modeller der bruges til at beregne og udpege udsatte områder må anses for at være en fænomenologisk model (Johansen & Sørensen, 2014). Det er problematisk, at der bruges matematik til at udvikle en model for at udpege udsatte områder, da matematik er rent fornufts viden og logisk tænkning og dermed ikke har noget med virkeligheden at gøre. Selve det at opsætte en model over ikke-matematiserbare domæner (som i denne case menneskers valg af boligområder) kan påvirke det, der forsøges at matematiseres. Dermed er det af største vigtighed at kunne forholde sig kritisk til matematiske modeller, der behandler samfundsvidenskabelige aspekter (Johansen & Sørensen, 2014). De teoretiske modeller der behandler ren matematik og naturvidenskab opstilles ved at iagttage og forkastes og ændres, hvis de ikke passer til det undersøgte. Derimod kan en model over menneskelig adfærd direkte påvirke den menneskelige adfærd og hele grundlaget for modellen ændrer sig dermed.

Et undervisningsperspektiv

I det ovenstående har vi belyst, hvordan matematisk modellering af samfundsrelevante problemstillinger kan danne grundlag for politiske beslutninger, og hvordan disse beslutninger har betydning for de borgere, som berøres. Misfeldt & Jankvist (2020) beskriver, hvordan det meste matematik er skjult i matematiske modeller, apps, computerprogrammer mm., og at det derfor er nødvendigt at besidde matematisk indsigt for, at blive en kompetent demokratisk samfundsborger. Vi belyser i dette afsnit, hvordan arbejdet med en samfundsrelevant problemstilling, som udsatte boligområder, kan styrke elevernes matematiske indsigt samt, hvilke andre fordele der forekommer ved at inddrage et område, som normalt ligger uden for skolematematikken. Alrø, Skovsmose og Valero (2009) peger på, at skolematematikken syntes at forme sit eget isolerede univers, hvor eleverne har svært ved at se meningen med matematikken. Ved at trække områder fra “det ekstra matematisk domæne” (Niss & Jankvist, 2021) ind i skolematematikken, kan de ud fra Skovsmoses (2011) begreb om forgrund, være med til at gøre aktiviteterne meningsfulde. Skovsmose (2011) betragter læring, som en handling, der inkluderer intentioner og motiver for denne læring. Det er altså vigtigt, at en opgave er relevant for den enkelte elev, da meningen med den stillede opgave skal tillade, at eleven har mulighed for at spejle sig selv i den, og dermed kan se udbyttet af den. Denne spejling afhænger af elevernes syn på sig selv i et fremtidigt perspektiv, som Skovsmose (2011) betegner som forgrund. Hvis den beskrevne case skal benyttes som fundamentet for et undervisningsforløb, hvor eleverne har mulighed for at udvikle den matematiske indsigt, som Misfeldt & Jankvist (2020) peger på, er vigtig for, at kunne blive en relevant samfundsborger, er der flere matematikdidaktiske overvejelser, som er relevante. Vi fokuserer i denne artikel kun på følgende overvejelser:

- Elevernes opfattelse af mening med opgaven
- Digitale hjælpemidlers betydning i matematikundervisningen

Elevernes opfattelse af mening med opgaven

Som beskrevet ovenfor peger Skovsmose (2011) på, at elevernes forgrund har afgørende betydning for, om eleverne oplever, at en opgave giver mening og danner grundlag for læring. Derved bliver iscenesættelsen af problemstillingen afgørende for at pirre elevernes interesse for at understøtte

en mere stabil, situationel interesse. Målet vil i sidste ende være, at eleverne finder problemstillingen så interessant, at de udvikler en personlig interesse og tager det med ud af klasselokalet (Hidi & Renninger, 2006, ref. Petersen, 2012). Ved at inddrage en samfundsrelevant problemstilling som "Hvordan defineres udsat boligområde" er det ikke givet, at denne stemmer overens med elevernes forgrund, og at eleverne vil finde problemstillingen relevant. Stuckey, M., Hoffstein, A., Mamlok-Naaman, R., Eilks, I., (2013) opstiller tre dimensioner af relevance i naturvidenskabsundervisning. Den individuelle dimension (personlige), samfunds dimensionen (samfundsmæssige) og ansættelses dimensionen. Elevernes alder har ifølge Stuckey et. al (2013) stor betydning for, i hvor høj grad dimensionerne er relevante for eleverne. I folkeskolen vil, den den individuelle dimension vil være repræsenteret, og først senere vil den samfundsmæssige dimension blive relevant for eleverne. Ved at sammenholde Stuckey et. al's (2013) relevance begreb og Skovsmoses (2011) begreb om forgrund, kan der argumenteres for, at Skovsmoses (2011) begreb om forgrund, ikke i så høj grad tager højde for, om eleverne er "klar" til, at se meningen med problemstillinger i samfundet. På denne baggrund kan der argumenteres for, at problemstillingen ikke er tilstrækkelig personlig relevant, og kan ligge så langt fra nogle af eleverne, at de ikke kan se meningen med den. For elever, som enten bor i et udsat boligområde eller i områder lige omkring, vil relevansen være åbenlyst personlig. Derfor vil det, som underviser være nødvendigt, at tilpasse forløbet, så det iscenesættes og giver mulighed for personlig relevance. Et eksempel på en tilpasning kunne være, at anskue ulighed i forbindelse med, det nyligt vedtagne fordelingsprincip til gymnasier. Fordelingsprincipperne bygger på, at eleverne i fremtiden til dels fordeles på baggrund af deres forældres indkomst, for at gøre gymnasierne mere mangfoldige (mindre ulige).

Om der perspektiveres til "fordelingsprincipper til gymnasiet" eller "udsatte boligområder", kan det med fordel i begge tilgange tilrettelægges, så det tager udgangspunkt i "ulighed i elevernes egen klasse". Data kunne stamme fra eleverne selv eksempelvis lommepenge eller indkomst fra fritidsjob mm. I arbejdet med at matematisere "ulighed i klassen" ville flere elever sandsynligvis vælge, at benytte et boksplot som diagram. Herfra vil det være oplagt at benytte den viden om kvartilsæt, vi finder i skolematematikken (fra boksplot) og perspektivere den over i begreberne decilsæt som benyttes til at udregne Gini-koefficienten og som normalt ligger uden for skolematematikken. På den måde er vi med til at nedbryde det isolerede univers, som Alrø, Skovsmose og Valero (2009) peger på eksisterer. Disse

eksempler understreger samtidigt behovet for, at undervisere redidaktisere forløb og iscenesætter dem, så det er målrettet deres egne elever.

Digitale hjælpemidlers betydning i matematikundervisningen

Vi fokuserer i denne artikel på, hvordan brugen af digitale hjælpemidler kan være med til at åbne matematikken op for elever. Misfeldt & Jankvist (2020) peger på, at der inden for matematikdidaktisk forskning er to perspektiver på skjult matematik i digitale teknologier: et positivt og et negativt. Fænomenet “black boxing” dækker over, hvor den matematiske proces overlades til digitale teknologier. Denne proces kan være u hensigtsmæssig, idet elementer, der underbygger forståelsen, overlades til den digitale teknologi. Dog kan fænomenet “Black boxing” også opfattes positivt, som en løftestang til at frigive mere energi til elevernes arbejde med mere krævende matematik. Fænomenet “white boxing” anskuer derimod de digitale teknologiers mulighed for at åbne op for matematiske processer på en for eleverne forståelig måde (Misfeldt & Jankvist, 2020).

Ved at præsentere eleverne for Gini-koefficienten ved brug af en geometrisk formidling kontra integral-formidling kan der “lukkes op for” en del af matematikken, som ellers er for komplekst for deres faglige niveau. Den matematisk proces bliver her “white-boxed” ved brug af Geogebra og CAS. De digitale hjælpemidler bliver yderligere en “løftestang”, da eleverne kan bruge Geogebra til at aflæse arealet under Lorenz kurven, og dermed hurtigt kan beregne Gini-koefficienten. Brugen af digitale hjælpemidler i denne case understøtter elevernes begrebsudvikling og mulighed for deltagelse i diskussioner. Eleverne kan hurtigt generere flere eksempler ved brug af Geogebra og CAS til fx at sammenligne forskellige kommuners økonomiske ulighed, forskellige klassers ulighed i lommepenge eller timer brugt på lektier. Når et digitalt værktøj benyttes til hurtigt at generere flere eksempler, beskriver Misfeldt & Jankvist (2020) det digitale værktøj som en “forstærker”. Ved brugen af digitale hjælpemidler får eleverne mulighed for at gå ind bag et svært forståeligt begreb som Gini-koefficient. Det kan dermed skabe grobund for en større forståelse for, og en større indlevelse i diskussioner omkring ulighed og matematikken er ikke længere lukket om sit eget univers, men giver mening i virkeligheden (Alrø, Skovsmose & Valero, 2009).

Konklusion

I denne opgave har vi analyseret en case vedrørende udvælgelse af udsatte boligområder ved brug af pseudo matematiske begrundelser. I cases, hvor menneskers livsgrundlag kan blive påvirket i så stor grad som indgrebene, der er foretaget som følge af loven om ghettoer, er det vigtigt at have et stærkt matematisk bevæggrund og ikke blot holdninger og synsninger.

Denne opgave har også formuleret tanker og ideer, om hvordan en underviser kan inkorporere tunge sociale problemer af denne karakter i matematik undervisningen. Vi ser et stort læringspotentiale i, at lade elever få en matematisk omgang med politiske beslutninger og derigennem udvikle en større forståelse for samfundet som helhed.

Her giver de digitale hjælpemidler gode muligheder, da eleverne via fx Geogebra bliver i stand til at lukke op for den komplekse matematik, der ligger til grund for beregning af uligheden i Danmark.

Litteratur

Arbejderen (2021, Maj 21), Regeringen til eksamen: FN's menneskeretsråd kritiserer Danmark for racisme og ghettolov, sidst set 30-05-2022, <https://arbejderen.dk/indland/regeringen-til-eksamen-fns-menneskeretsraad-kritiserer-danmark-for-racisme-og-ghettolov/>

<https://arbejderen.dk/indland/regeringen-til-eksamen-fns-menneskeretsraad-kritiserer-danmark-for-racisme-og-ghettolov/>

BL, Danmarks Almene boliger, (n.d.), <https://bl.dk/politik-og-analyser/temaer/her-er-listen-over-parallelsamfund/> Sidst set 20-05-2022

Bolig og planstyrelsen. (2021, December 2). Udsatte områder og parallelsamfund. bpst.dk/. <https://bpst.dk/da/Bolig/Udsatte-boligomraader/Udsatte-omraader-og-ghetoomraader#omraadeafgraensninger> sidst 1-06-2022

Danmarks Statistik, IFOR32: Gennemsnitlig ækvivaleret disponibel indkomst efter decil og kommune, (n.d). Lokaliseret på <https://www.statistikbanken.dk/IFOR32>. Sidst set 26-05-22.

Danmarks Statistik (2015), Folketingsvalg Torsdag 18 Juni 2015, Sidst ændret 20-06-2015, Sidst set: 30-05-2022, <https://www.dst.dk/valg/valg1487635/valgopg/valgopghl.htm>

DR (2018). Folketinget har vedtaget lov om ghettoer. <https://www.dr.dk/ligetil/indland/folketinget-har-vedtaget-lov-om-ghettoer> Sidst set 23-05-2022

Folketinget , (2018), Lov om ændring af lov om almene boliger m.v., lov om leje af almene boliger og lov om leje. Lokaliseret på <https://www.retsinformation.dk/eli/ft/201813L00038>

Fyns politi. (2021, December 16). Fyns Politi: Vi holder et meget vågent øje på Fyrreparken i Vollsmose i øjeblikket | Nyheder | Fyns Politi. politi.dk/. Retrieved May 30, 2022, from <https://politi.dk/fyns-politi/nyhedsliste/vi-holder-oeje-med-vollsmose/2021/12/16>

Holck, L. (2021), DEBAT: Ghettoeloven er stadig en barriere for minoriteter og udsatte, udgivet 16-10-2021 på menneskeret.dk, Sidst set 30-05-2022, link: <https://menneskeret.dk/nyheder/debat-ghettoeloven-stadig-barriere-minoriteter-udsatte>

Johansen, M. W., & Sørensen, H. K. (2014). Invitation til matematikkens videnskabsteori. Samfundslitteratur.

Landsbyggefonden. (n.d.). Evaluering af udsatte boligområder. <https://xn-udsatteomrder-yfb.dk/>. <https://xn-udsatteomrder-yfb.dk/static/500/index.html?aspxerrorpath=/> sidst set 1-06-2022

Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2020). Teknokritisk matematikundervisning: at åbne den skjulte matematik i demokratiets tjeneste. I C. Haas, & C. Mathiessen (red.), *Fagdidaktik og demokrati* (s. 331-348). Samfundslitteratur.

Niss, M., Jankvists, U. T., (2021), Hvad er matematisk modellering?, Nationalt center for udvikling af matematik undervisning. Lokaliseret på <https://matematikdidaktik.dk/temaer/matematisk-modellering/hvad-er-matematisk-mo-dellering/>, Sidst set 30.05.2022

Petersen, M. R., (2012), Interesseudvikling i naturfagene gennem faglig progression. Kap. 3: Interesseudvikling. Center for Naturvidenskabernes og Matematikkens Didaktik

Skovsmose, O., (2011), An Invitation to Critical Mathematics Education

Stuckey, M., Hoffstein, A., Mamlok-Naaman, R., Eilks, I., (2013), The meaning of 'relevance' in science education and its implications for the science curriculum, Routledge Taylor & Francis Group.

