INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

# Teaching the Formula of Centripetal Acceleration

## A qualitative case study on first year physics students' challenges with mathematical derivations in mechanics

Simon Arent Vedel
Kandidatspeciale – Fysik

Vejledere: Ricardo Karam & Steen Harle Hansen

**IND's studenterserie nr. 73, 2019**

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

## IND's studenterserie

39. Jeanette Kjølbæk: One-dimensional regression in high school (2015)
40. Anders Wolfsberg: A praxeological investigation of divergence – Exploring challenges of teaching and learning math-in-physics (2015)
41. Asger Brix Jensen: Number tricks as a didactical tool for teaching elementary algebra (2015)
42. Katrine Frovin Gravesen: Forskningslignende situationer på et førsteårskursus I matematisk analyse (2015)
43. Lene Eriksen: Studie og forskningsforløb om modellering med variabelsammenhænge (2015)
44. Caroline Sofie Poulsen: Basic Algebra in the transition from lower secondary school to high school (2015)
45. Rasmus Olsen Svensson: Komparativ undersøgelse af deduktiv og induktiv matematikundervisning (2016)
46. Leonora Simony: Teaching authentic cutting-edge science to high school students(2016)
47. Lotte Nørtoft: The Trigonometric Functions - The transition from geometric tools to functions (2016)
48. Aske Henriksen: Pattern Analysis as Entrance to Algebraic Proof Situations at C-level (2016)
49. Maria Hørlyk Møller Kongshavn: Gymnasieelevers og Lærerstuderendes Viden Om Rationale Tal (2016)
50. Anne Kathrine Wellendorf Knudsen and Line Steckhahn Sørensen: The Themes of Trigonometry and Power Functions in Relation to the CAS Tool GeoGebra (2016)
51. Camilla Margrethe Mattson: A Study on Teacher Knowledge Employing Hypothetical Teacher Tasks - Based on the Principles of the Anthropological Theory of Didactics (2016)
52. Tanja Rosenberg Nielsen: Logical aspects of equations and equation solving - Upper secondary school students' practices with equations (2016)
53. Mikkel Mathias Lindahl and Jonas Kyhnæb: Teaching infinitesimal calculus in high school - with infinitesimals (2016)
54. Jonas Niemann: Becoming a Chemist – First Year at University
55. Laura Mark Jensen: Feedback er noget vi giver til hinanden - Udvikling af Praksis for Formativ Feedback på Kurset Almen Mikrobiologi (2017)
56. Linn Damsgaard & Lauge Bjørnskov Madsen: Undersøgelsesbaseret naturfagsundervisning på GUX-Nuuk (2017)
57. Sara Lehné: Modeling and Measuring Teachers' praxeologies for teaching Mathematics (2017)
58. Ida Viola Kalmark Andersen: Interdiciplinarity in the Basic Science Course (2017)
59. Niels Andreas Hvitved: Situations for modelling Fermi Problems with multivariate functions (2017)
60. Lasse Damgaard Christensen: How many people have ever lived? A study and research path (2018)
61. Adonis Anthony Barbaso: Student Difficulties concerning linear functions and linear models (2018)
62. Christina Frausing Binau & Dorte Salomonsen: Integreret naturfag i Danmark? (2018)
63. Jesper Melchjorsen & Pia Møller Jensen: Klasserumsledelse i naturvidenskabelige fag (2018)
64. Jan Boddum Larsen, Den lille ingeniør - Motivation i Praktisk arbejdsfællesskab (2018)
65. Annemette Vestergaard Witt & Tanja Skrydstrup Kjær, Projekt kollegasparring på Ribe Katedralskole (2018)
66. Martin Mejlhede Jensen: Laboratorieforsøgs betydning for elevers læring, set gennem lærernes briller (2018)
67. Christian Peter Stolt: The status and potentials of citizen science: A mixed-method evaluation of the Danish citizen science landscape (2018)
68. Mathilde Lærke Chrøis: The Construction of Scientific Method (2018)
69. Magnus Vinding: The Nature of Mathematics Given Physicalism (2018)
70. Jakob Holm: The Implementation of Inquiry-based Teaching (2019)
71. Louise Uglebjerg: A Study and Research Path (2019)
72. Anders Tørring Kolding & Jonas Tarp Jørgensen: Physical Activity in the PULSE Exhibit (2019)
73. **Simon Arent Vedel: Teaching the Formula of Centripetal Acceleration (2019)**

***IND's studenterserie** omfatter kandidatspecialer, bachelorprojekter og masterafhandlinger skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*
*Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/*

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

# Teaching the Formula of Centripetal Acceleration

## A qualitative case study on first year physics students' challenges with mathematical derivations in mechanics

*Author:*
Simon Arent VEDEL

*Supervisor:*
Ricardo KARAM
Steen Harle HANSEN

*A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science*

*in the*

Department of Science Education
Faculty of Science
University of Copenhagen

March 4, 2019

UNIVERSITY OF COPENHAGEN

# *Abstract*

Faculty of Science
Department of Science Education

Master of Science

**Master's Thesis**

by Simon Arent VEDEL

Five different derivations of the formula for centripetal acceleration, $a_c = v^2/r$, were made into educational videos that were presented to first year physics students at University of Copenhagen. The students were able to participate in the research either in an online survey or as part of a semi-structured group interview. All obtained data was analyzed thematically in order to get insight into the students understanding of each derivation, to identify potential learning difficulties with focus on mathematical parts, and to see how physics students navigate in the interplay between physics and mathematics.

The students described a feeling of accepting rather than understanding when confronted to arguments based on geometry. Physics students are more familiar with the mathematical fields of limits and infinitesimal calculus, however, in the combination with vectors many lacked the ability to interpret the mathematics into the physics of the situation. Closely related to this, it was also found that there is a tendency for students to prefer more general and mathematically abstract types of derivations rather than the more concrete ones. Combined, the findings suggest that the students know how to deal with mathematical algorithms but have a hard time interpreting this into a physical context.

# *Acknowledgements*

Many people have actively been a part of the creation of this master's thesis and I would like to thank these persons for helping me through the project.

First of all, a special thanks to my main supervisor Ricardo Karam, Associate Professor at the Department of Science Education. You came up with the main idea for this project and provided the necessary guidance and feedback to complete the research. We have had many e-mail correspondences and several hours-long meetings in which you have always taken your time to be supportive and shown a great interest in the project. I have never had the feeling that you found any of my complications or issues trivial and a waste of your time. I'm really grateful for that.

Secondly, I would like to thank my secondary supervisor Steen Harle Hansen, Lector at the Niels Bohr Institute and the main coordinator of the Mechanics and Theory of Relativity course. Thank you for making it possible for me to be able to reach out to the students of the course. Also, I really appreciate the feedback you have given me on both the educational videos and my written work.

A special thanks to Marianne Vestergaard, Associate Professor at the Niels Bohr Institute and teacher in the Mechanics and Theory of Relativity course. At the time of data collection you did an incredible job helping me reach out to the students and engage them to participate in the project.

In the last six months I have shared office with the other master students at the Department of Science Education. It has always been the sun spot of the day to know that there was someone with whom to share (un)academical ideas, thoughts, and issues. Thank you for all the lunch breaks, talks about TV-shows, and good company.

Finally, to my wonderful girlfriend Laura: it is hard for me to describe how grateful I am for the support and help you have given me through this project. Even though this isn't your field, you have always showed a great interest in my work, listened to all my thoughts, and discussed any issue I had on my mind. You have done an enormous piece of work in the process of proofreading and suggested many structural changes that have improved many aspects of this thesis. I cannot imagine this projects without you by my side and I promise you that I will do everything to give you the same support when the time comes for you.

# Contents

# 1 Introduction

The purpose of this master thesis is to investigate potential learning difficulties that physics students face when they are presented to mathematical derivations in physics. The main focus is to map out specific areas of mathematics that cause problems and to understand why that might be. Another aspect is to explore how physics students understand and interpret the interplay between mathematics and physics. This insight can play an essential role in improving physics teaching as common misconceptions and errors are revealed. As a future teacher in the Danish high school with a major in physics and a minor in mathematics, this research is of high personal interest. Gaining insight into how students think and reason when working with different areas of mathematics and physics will be of great value as one of the steps towards becoming a competent high school teacher.

The topic of this thesis is circular motion in a historical and didactic perspective. Circular motion is a fundamental area of mechanics that has been shown to be a cause of misconceptions and alternative interpretations for students at university level (Canlas, 2015; Singh, 2009). This is ideal for the case of this project since it seeks to investigate whether any specific areas of mathematics contribute to these misunderstandings. The development of the theory behind circular motion as we know it today is placed in the aftermath of the paradigm shift to the heliocentric world view. The paradigm shift had a major impact on the understanding of circular motion which up until this point was regarded as a motion of perfection created by God. To formulate the new dynamics behind circular motion was not a trivial task for the big thinkers. Their struggles and wrong assumptions can serve both as a justification of modern students' misunderstandings within the topic and also give some clues on where the difficulties lie.

The students of interest are first year physics students at the University of Copenhagen. These students are an interesting case since they recently graduated from high school and are still in the process of getting used to the university way of studying. This research investigates how the students deal with different approaches to the formula for *centripetal acceleration*, $a_c = v^2/r$. The students are presented to five different ways to derive the formula in short educational videos. The videos represent a learning material and have been developed for this project. They are each about 6 minutes long and thoroughly explain the derivation. Altogether, the derivations contain several areas of mathematics such as infinitesimal calculus, trigonometrics, and vector analysis. These areas are of high level of abstraction but should also be known from high school. How students are able to navigate in these mathematical fields and how students interpret the mathematics into physics are of high interest in this research.

Two types of qualitative methods were employed in order to obtain the data for the project: an online survey and group interviews. The survey provides general data on the students' prior knowledge of circular motion and centripetal acceleration and makes the students point out specific areas of each derivation that are either confusing or helpful when dealing with the formula for $a_c$. The group interviews were videotaped and analyzed and thus provide a deeper understanding of the dynamics of a learning situation. The interviews were semi-structured, meaning that the participants were free to discuss the areas they found relevant. However, they were also asked to comment on specific areas (mainly mathematics) of each derivation that were of great interest related to the over all goal of this thesis. The data obtained through the online survey and group interview sessions was thematically analyzed. A thematic analysis goes through all obtained data in order to find specific pattern and themes. The goal is to find the general misconceptions and wrong interpretations as well as learning dynamics. Again, the main focus lies on the mathematical part of the derivations and its interplay with physics.

To sum up, this master thesis does the following: First, a theoretical chapter offers a historical perspective on the development of the theory of circular motion. Then, the project explores the didactics of physics education by presenting first year university physics students to five different derivations of the formula for centripetal acceleration $a_c$. Data from an online survey and group interviews will seek to answer the following questions:

*Which areas of mathematics act as obstacles for physics students? Why do these specific areas hinder a full understanding of the shape of the formula for centripetal acceleration, $a_c = v^2/r$? How do physics students interpret mathematics in order to gain a better understanding of the physics behind circular motion?*

# 2 History of Centripetal Acceleration

This section offers a historical perspective on the topic of circular motion. Investigating the ideas of and problems faced by the original formulators of this part of physics might provide a useful epistemological framework. Also, it gives a deeper understanding of the potential pitfalls when university students are presented to circular motion.

The seventeenth century saw some of the greatest natural philosophers and physicists revolutionizing and reforming the laws of mechanics to the ones we know today. Up until this time the understanding of circular motion and the dynamics behind it was highly dominated by the world view of Aristotle; an idea of circular motion as a symbol of perfection and a motion so natural that the celestial bodies would move uniformly in circles without any question of why (Stinner, 2001). This idea of circular motion is still present in the work of Galileo even though he is known for going against many of the old physical laws of Aristotle. However, a theory behind circular motion was formulated at this particular time in history but it was not an trivial task. Descartes describes an idea that circular motion is caused by three tendencies of motion (a circular, a tangential, and a centrifugal) that exists within objects. Very elegantly, Huygens is able to derive an expression for the centrifugal force he believes is responsible for circular motion. This expression is what today is known as centripetal acceleration. The one who describes circular motion as a result of linear inertia and a center seeking acceleration was Newton.

The goal of the following is to give insight into the development of the theory of circular motion, a period of approximate fifty years staring with Galileo and ending with Newton.

## 2.1 Galileo Galilei

Today Galileo Galilei (1564–1642) is known for as a pioneer of his time, arguing against the Aristotelian world view and bringing new concepts of mechanics into the science of physics. Especially his work on motion was groundbreaking for the start of the seventeenth century. In his last book *'Discourses of the Two New Sciences'* (1638), Galileo presents the kinematic law of free fall (constant acceleration) stating that distance traveled increases with the odd numbers within equal times, and he deals with Aristotle's claim that heavier bodies fall faster than lighter ones. Also, he describes how projectile motion is uniformly accelerated following a parabolic path, thereby being one of the first to mathematize the nature of motion (Machamer, 2017).

Some of the first seeds of the concept of inertia as we know it today can be found in the book *'Dialogue Concerning the Two Chief World Systems'* from 1632 by Galileo. The Aristotelian concept of motion says that a *mover* is the cause of any motion. Without a mover there can be no objects in motion. This statement is changed with

Galileo who, in a passage of the *Dialogue*, suggests that a movable object on a perfect, horizontal plane would continue to move uniformly as long as the objects does not meet any slopes on its way that would cause any acceleration of the object.[1] So, once set in motion, an external action is needed in order to change the initial motion (Henry, 2016). Later in the same passage, Galileo suggests an analogy for movement on the perfect, horizontal plane on Earth: a calm sea where a ship that once set in motion would continue to move forever if all external obstacles are removed. Now, since Earth is a sphere, the path of the ship would be circular and it seems that Galileo in this way suggests a circular inertia.

In fact, there are several places in the *Dialogue* where Galileo argues that inertial movement is circular and not linear:

> *...it may be immediately concluded that if all integral bodies in the world are by nature movable, it is impossible that their motions should be straight, or anything else but circular.*[2]

For Galileo, an object that is not forced to move in a special way is either at rest or moves with circular motion. Straight line motion is only assigned to objects in the universe that are out of order but a necessity in order to restore the inertia of circular motion:

> *...therefore circular motion is never acquired naturally without straight motion to precede it; but, being once acquired, it will continue perpetually with uniform velocity.*[3]

Clearly, Galileo still has the same view on circular motion as the Aristotelians. A perfect motion in a well ordered universe as God designed it - a fair view considering the motion of the heavenly objects and rotation of Earth that Galileo himself believed in. What is interesting is his understanding of the dynamics behind circular motion because it seems that to Galileo there is none. He sees no connection to linear motion once the circular motion is obtained. Likewise, he does not assign any acceleration to the circular movement:

> *For acceleration occurs in a moving body when it is approaching the point toward which it has a tendency ... and since in circular motion the moving body is continually going away from and approaching its natural terminus ... This equality [in circular motion] gives rise to a speed which is neither retarded nor accelerated; that is, a uniformity of motion.*[4]

In a passage of the *Dialogue* one sees how natural Galileo finds circular motion.[5] Galileo sets up a hypothetic situation in which a stone is dropped from a tower (see figure 2.1). He draws the trajectories for the top of the tower $CD$ and for the crust of the Earth $BI$, both circular since Earth is a sphere and rotates. With the assumption that objects tends to fall towards the center of the Earth with an accelerated straight line motion, Galileo concludes that the fall of the stone is the path $CI$, a part of the circumference of the semicircle going from the top of the tower $C$ to the center of Earth $A$. The resulting motion is the circular motion $CI$ - a combination of the straight line motion $CB$ and the rotational motion from Earth's rotation at the top of the tower $CD$. Later in the same passage, Galileo argues that the motion of the

[1] Page 147 in *Dialogue* (Galileo, 1632) translated by Drake (1967)
[2] Page 19 in *Dialogue* (Galileo, 1632) translated by Drake (1967)
[3] Page 28 in *Dialogue* (Galileo, 1632) translated by Drake (1967)
[4] Page 31-32 in *Dialogue* (Galileo, 1632) translated by Drake (1967)
[5] Page 164-167 in *Dialogue* (Galileo, 1632) translated by Drake (1967) found in Henry (2016)

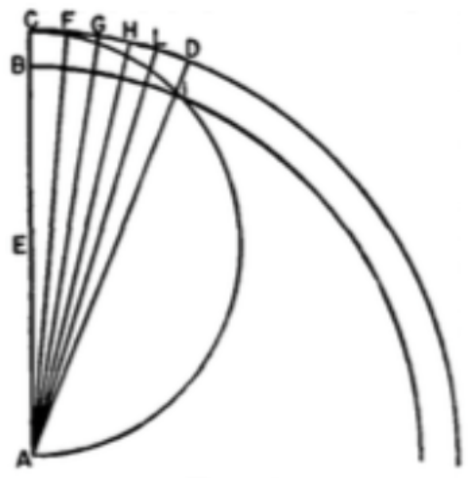


FIGURE 2.1: Earth with radius AB and a tower placed at point $B$ with hight $BC$. Due to the rotation of Earth two circular paths are created: one by the crust of Earth ($BI$) and one by the top of the tower ($CD$). A stone is dropped at the top of the tower and it falls towards the center of Earth and is stopped by the crust at point $I$ ($I$ is between $A$ and $D$). Due to the circular motion of objects its trajectory is the circular path $CI$ with center $E$ and radius half of $AC$. As seen from the radial lines drawn from the center of Earth there is an apparently acceleration of the stone for an observer standing at the bottom of the tower at point B. Original figure by Galileo from (Drake, 1967).

falling stone is just the same uniformly circular motion as if it had stayed in the top of the tower. This statement comes from the fact that $CD$ and $CI$ are of equal length and that the straight line accelerated motion that an observer would experience by standing at the bottom of the tower is an illusion. The observed acceleration can be explained by the equally spaced section lines that Galileo adds to figure 2.1. As seen on the figure, there is an increase in distance traveled by the stone between two section lines the further away the stones gets from the origin. So Galileo concludes that the stone is in fact never accelerated at all. It is just an illusion that an observer experiences as a consequence of Earth's rotation. The only real motion of the stone is uniform circular motion - the inertial motion of nature.

As pointed out by Henry (2016), the example of the falling stone and its exclusion of the dynamics behind the free fall seems to contradict with Galileo's later work on constant acceleration. As described in the beginning of this section, Galileo is known for mathematising this particular motion. The bits of the *Dialogue* presented here definitely do not show any connection between constant accelerated motion and uniform circular motion.

Whether it was the influence of the old Aristotle world view, the beauty of a mechanical system only consisting of kinematics or something else that drove Galileo into the theory of circular inertia is hard to say from this brief look into the *Dialogue*. Nevertheless, a concept of inertia was a first step in the right direction towards the mechanics of circular motion as we know it today.

## 2.2 René Descartes

Today, René Descartes (1596-1650) is mainly known for his contribution to philosophy, but in his time he was also an acknowledged mathematician and physicist. He published several books covering subjects such as optics, mechanics, meteorology, cosmology, etc. Like Galileo, the physics of Descartes lie in the borderland between the old Aristotelian world view and new modern ideas. He formulates laws of nature that focus on motion and collision of matter but he also considers God's role in these contexts. All of his work builds up towards his *vortex* theory on the motion of the celestial bodies. A theory excluding vacuum and gravity, since motion of the planets is fixed to circular bands of matter within the vorticies. The vortex theory was highly accepted at the time since it seemed to fit a sun centered system while still maintaining a stationary Earth within its own vortex (Slowik, 2017). The following will give an insight into how Descartes saw circular motion and the dynamics behind it by looking into sections of the publication *'Principles of Philosophy'* from 1644.

In part II of *Principles*, *'On the Principles of Material Things'*, Descartes introduces his concept of motion (Descartes, 1644 in Mahoney (1995)). In paragraph 24, he defines the common concept of motion to be *'the action by which some body is transferred from one place to another'*. However, according to him the proper definition of motion is:

> *...it [motion] is the translation of one part of matter, or of one body, from the vicinity of those bodies that are in direct contact with it and are viewed as at rest to the vicinity of others.*[6]

So for Descartes, the motion of an object is not just a quantity of change of place since *'the meaning of 'place' is varied and depends on our thinking.'*[7] Motion only exist in relation between two objects or more. In paragraph 36, he even states that motion is somehow a mode or state contained within objects and that God conserves the total amount of motion available in the world. Here, motion is seen as quantity equivalent to mass times speed which can be seen from the statement: *'when one part of matter is moved twice as fast as another, and this second [part of matter] is twice as large as the first, there is as much motion in the smaller as in the larger.'* As shown, as a reader of Descartes it is not completely clear how motion is defined. The same goes for the case of describing the dynamics of circular motion which can be seen from the following.

Later in part II, Descartes formulates three laws of nature that explains the behavior of motion. The first two are especially interesting considering circular motion.[8] The first law states:

> *That any object, in and of itself, always perseveres in the same state; and thus what is moved once always continues to be moved.*[9]

Like Galileo, Descartes argues for a principle of inertia and even states it as a law of nature. In the same paragraph, he explains that the state of motion (or rest) is preserved and that once movement is obtained then, only external causes can change it or cause it to the state of rest. The second law of nature states:

> *That every motion of itself is rectilinear; and hence what is moved circularly tends always to recede from the center of the circle it describes.*[10]

At first glance, it seems that the combination of the first two laws of nature are what today is known as the law of inertia. However, the explanatory text provides an example of how the law should be understood. A stone in a sling is rotated in circles (see figure 2.2) and Descartes explains that if the stone leaves the sling at point $A$ it will continue to move in at straight line $ACG$ that is tangential to the circular trajectory $ABF$ created by the sling. Again it seems that Descartes got it just right, however, later in part III of the book he explains what he means by the *tendency to recede* from the center of the circle.

[6] Descartes in Mahoney (1995) paragraph 25.
[7] Descartes in Mahoney (1995) paragraph 28.
[8] The 3. law considers colliding bodies.
[9] Descartes in Mahoney (1995) paragraph 37.
[10] Descartes in Mahoney (1995) paragraph 39.

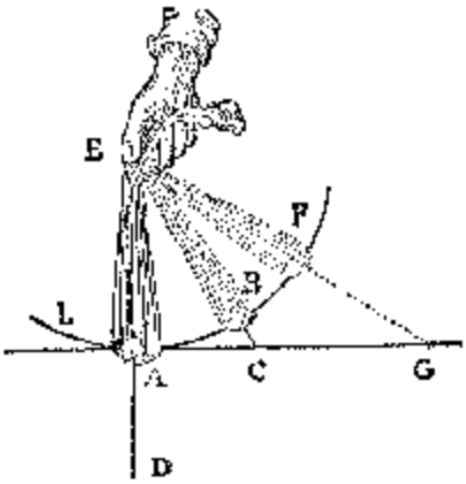


FIGURE 2.2: A stone is rotated in the sling *AE* along the circular path *ABF*. If the stone was to leave the sling at point *A* it would continue on the tangent line *ACG* as a product of the tendency to recede the center that is impeded by the circular motion created by the sling. Original figure by Descartes from Mahoney (1995)

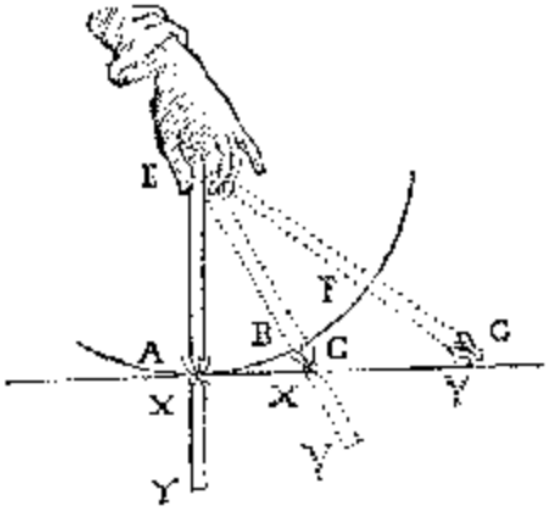


FIGURE 2.3: A bee is located at point *A* on the rod *EY* that is rotated around endpoint *E*. The bee is able to walk radially outwards on the rod. The tendency to recede the center of rotation should be understood as the motion the bee has to have in order for it to stay on the tangent line *ACG*. Original figure by Descartes from Mahoney (1995)

The tendency towards a certain motion is explicitly explained in paragraph 56. If the stone has a tendency to recede the center of the circular orbit, this means that it will in fact move in that direction unless some cause impedes it. In the next paragraph with the title *'How tendencies to different motions can be in the same body at the same time'*, Descartes elaborates more on the sling example. He states that when different causes act simultaneously on the same body, then the body will have tendencies to several motions in different directions at the same time - where some of the causes can impede each other. The circular motion is divided into three tendencies: a circular tendency provided by the sling, a radial outward (centrifugal) tendency, and the tangential tendency within the stone itself. Descartes states that the actual motion is the circular path *ABF* because *'in fact it is moved in that direction'*.[11] Furthermore, he states that the only part of the total tendency that is impeded by the sling is the tendency to recede from the center. So, when the stone is at point *A*, the only tendency impeded by the sling is the tendency to move towards *D* along the straight line *EAD*. The only tendency left is the tangential motion along the straight line *ACG* - the motion that occurs if the stone leaves the sling at point A. Despite stating that this motion is the only one within the stone itself, it seems that Descartes understands the tangential motion as a sum of the circular and centrifugal tendencies. This is even more evident in the next paragraph.[12] Here, Descartes explains how the tangential motion of the stone should be understood. He imagines a bee located on a rod *EY* that is rotated at the endpoint *E* (figure 2.3). The bee is able to walk radially outwards along the rod and it does so while the rod rotates. Now, if the motion of the bee is exactly matched in such a way that it always stays on the tangential line *ACG* while walking on the rotating rod, then this is the same tendency that the stone experiences when rotated in the sling. This means that the tangential tendency is the sum of the circular tendency and the tendency to recede the center.

[11]Descartes in Mahoney (1995) paragraph 57.
[12]Descartes in Mahoney (1995) paragraph 58.

In the literature, it is a common interpretation that circular motion for Descartes is more the rule than the exception (Westfall, 1972). This is especially supported by a passage in the *Principles* where Descartes describes that within every single motion lies *'a whole circle of bodies [that] are moved at the same time.'*[13] This somehow inertial circular motion has in the literature been understood as Descartes' way to avoid vacuum that did not fit into his vortex theory (Slowik, 1999). Even though it seems that Descartes has contradicting statements regarding inertial movement, he at least tries to bring some dynamics into his sling example and thereby into the theory of circular motion. This was completely absent in Galileo's treatment on the same subject.

## 2.3 Christiaan Huygens

Someone highly influenced by the work and ideas of Descartes was the Dutch physicist and mathematician Christiaan Huygens (1629-1695) who worked on many of the same subjects as his French colleague. Though inspired by Descartes, Huygens found his rational scientific method inconsistent and metaphysical. Instead, without being a empiricist, Huygens acknowledges the importance of empirical validation as part of the scientific praxis and, unlike Descartes, he works from the basis of observational effects towards the underlying causes (Elzinga, 1972). Regardless, his work is mainly mathematically theoretical with the quantization of physics as the goal.

Now, armed with the gravitational law of odd numbers stated by Galileo and the idea by Descartes that objects moved circularly have a tendency to move radially outwards, Huygens is ready to finish what Descartes could not. Namely, finding the magnitude of the *centrifugal force* as Huygens calls it. Huygens finishes his work on the subject in 1969, but the published paper *'De Vi Centrifuga'*, a collection of propositions and proofs, was not published until 1703, eight years after his death (Bell, 1950).

The publication begins with a description on object's *tendency to fall*. For Huygens, one way to measure this tendency is via the pull (tension) a heavy body creates, due to gravity, within a string the body is suspended from. After a short introduction regarding tendencies to fall in different situations, Huygens clearly states his goal:

> *Now let us see what [sort of] tendency and how great a tendency belongs to bodies attached to a string or a wheel that revolves, such that they recede from the center.*[14]

So, the outward tendency that builds up in the string of a revolving object is treated as a real force like gravity i.e. a movement of constant acceleration as the Galilean fall law suggests.

Huygens sets up a situation where a man is holding a string with a ball of lead attached in the other end. The same man is fastened to a big wheel that rotates uniformly. Huygens states through a technical and geometric argument that this (the man on the wheel) is equal to a situation where a string is attached on a horizontal plane and the ball of lead is moved uniformly in circles as shown in figure 2.4. He concludes:

[13]Descartes in Mahoney (1995) paragraph 33.

[14]Huygens in (Huygens, 1703)

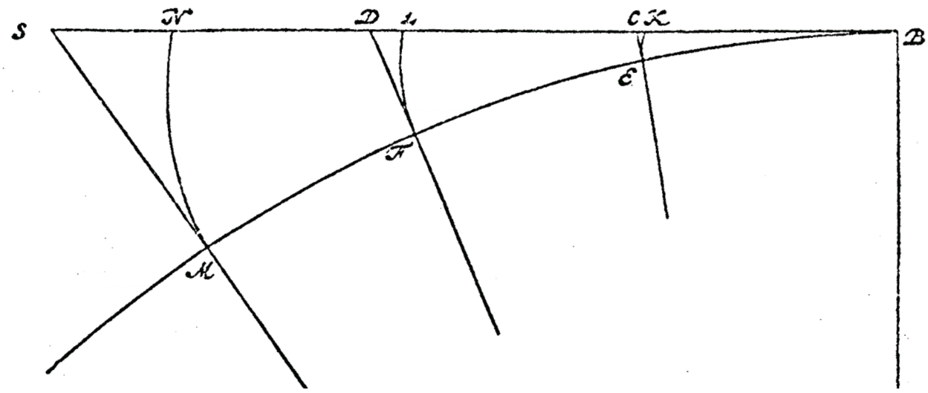


FIGURE 2.4: A ball attached to a string is moving uniformly in a circular path until reaching point $B$. Here, the ball either stays on the path $EFM$ or it detaches and continues uniformly on the tangent line $KLN$ - making $|BE| = |BK|$ etc. The growth rate of the curved separation lines $EK, FL, MN$ represents the tension (or the object's tendency to recede the center) in the string while the ball rotates. Making the time intervals infinitely small Huygens approximates the curved separation lines with the radially straight lines $EC, FD, MS$ i.e. the *centrifugal force* acts radially outwards from the center of rotation. Original figure from Huygens (1703).

> *... [the ball] tends to describe a curve with respect to the radius in which it is located, and one, in fact, that is tangent to the radius, it is clear that the string to which it is attached should be stretched no otherwise than if the ball tended to move along the radius itself produced.*[15]

As illustrated in figure 2.4, the ball has two options when reaching point $B$: to stay on the circular track reaching the points $E, F$ and $M$ within equal times or to get detached and continue with a straight line motion tangential to the circular path and reaching the points $K, L$ and $N$ within equal times, thus making the distances $BE = BK$ and so forth. Now, the growth rate of the curved separation lines $EK, FL$ and $MN$ are what Huygens sees as representative for the tension within the string and thus, the outwards tendency of the situation. The size of the curved line segments $EK, FL$ and $MN$ grow at a rate *'as the series of the squares from unity'* i.e. with a constant acceleration. Using a infinitesimal argument, Huygens approximates the curved separation lines with the straight lines $EC, FD$ and $MS$ that are extensions of the radius drawn through the points on the circular path. This simplifies the situation making the length $BK$ equal the lengths $BC$ and $BE$, and $BL = BD = BF$ etc. Further, the direction of the acting force is now radially outward from the center of rotation - hence the name *centrifugal force*.

With this general result, Huygens continues with several propositions that he proofs to be true via geometrical reasoning. Proposition I-III give the relation for the magnitude of the centrifugal force and they go as follow:

**Proposition I**

Two equal bodies move with equal angular frequencies in different circles with radius $AB$ and $AC$ (figure 2.5). From similarity of triangles and the general result that $BD = BF$ and $CE = CG$, the ratio of the outward tendencies (the forces $F_{DF}$ and $F_{EG}$) must be:

$$\frac{F_{DF}}{F_{EG}} = \frac{BF}{CG} = \frac{AB}{AC}. \tag{2.1}$$

[15] Huygens in (Huygens, 1703)

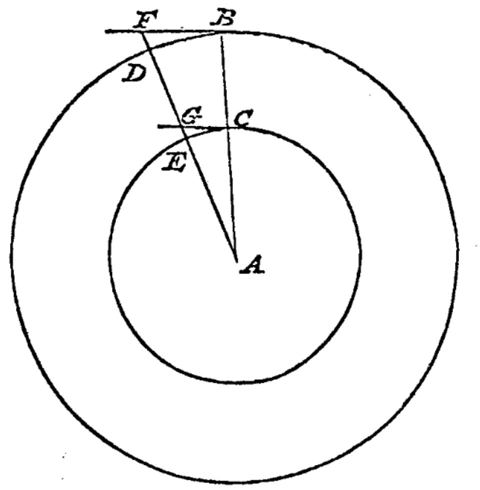


FIGURE 2.5: Proporsition I: Centrifugal force is proportional to the radius of the circular path for bodies with equal angular frequencies. Two equal bodies move with equal angular frequencies in the circles with radius $AC$ and $AB$. Original figure from Huygens (1703).

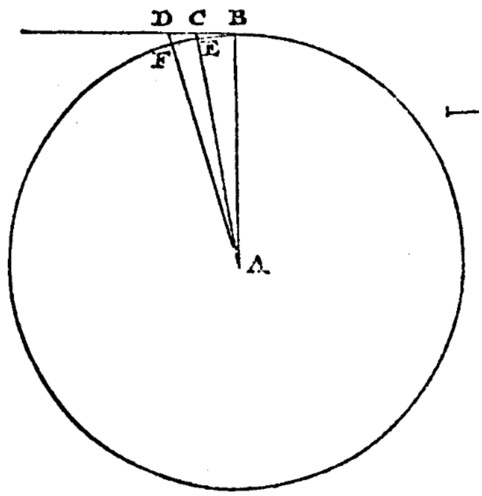


FIGURE 2.6: Proporsition II: The centrifugal force is proportional to the speed squared of the moving body. Two equal bodies move in the same circular path with radius $AB$ but with different speeds. One with speed $BC$ the other with speed $BC$. Original figure from Huygens (1703).

So, with equal angular frequencies, the centrifugal force is proportional to the radius of the circular path.

**Proporsition II**

Two equal bodies move in the same circular path with radius $AB$ but with different speeds. The faster body travels with a speed represented by the arc $BF$, and the slower by the arc $BE$ (figure 2.6). By taking the time to be infinitesimally short then $BF = DF$ and $BE = BC$ Now, as the general result states that the outwards tendencies measured by the line segments $CE$ and $DF$ have a growth rate that follows the law of odd numbers with respect to time. Therefore, $CE \propto BC^2$ and $DF \propto BD^2$ since the speeds are uniform. This gives the following ratio of the centrifugal forces $F_{DF}$ and $F_{Ec}$:

$$\frac{F_{DF}}{F_{EC}} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BF^2}{BE^2}. \tag{2.2}$$

In other words, the centrifugal force is proportional to the speed squared.

**Proposition III**

Two equal bodies are moving in two different circular paths. One with radius $AB$ the other with radius $AC$ (figure 2.7). The bodies are moving with same uniform speeds represented by the arcs $BD$ and $CF$, giving $BD = CF$. Now a third body is introduced equal to the first two. This body is also moving in the circle with radius $AC$ but with the speed $CE$, giving it the same angular frequency as the body moving in the outer circle. Then, from proposition I the ratio of the centrifugal forces of the body with speed $BD$ to the one with speed $CE$ must be:

$$\frac{F_{BD}}{F_{CE}} = \frac{AB}{AC}. \tag{2.3}$$

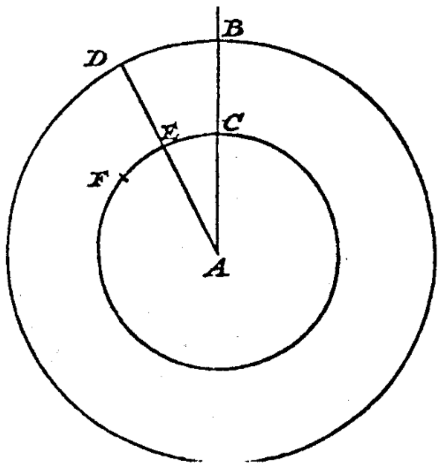


FIGURE 2.7: Proporsition III: Centrifugal force is inversely proportional to the radius of the circular path. One body is moving with speed $BD$ on the circular path with radius $AB$. Two bodies move on the circular path with radius $AC$. One with the same speed $(BD = CF)$ as the first body and the other with speed $CE$ having the same angular frequency as the first body. Original figure from Huygens (1703).

From proposition II the ratio of the centrifugal forces of the body with speed $CF$ to the one with speed $CE$ is:

$$\frac{F_{CF}}{F_{CE}} = \frac{CF^2}{CE^2} = \frac{AB^2}{AC^2}. \tag{2.4}$$

Since, speed $CF$ equals speed $BD$ and by combining 2.3 and 2.4, one get the relation:

$$\frac{F_{BD}}{F_{CF}} = \frac{AC^2}{AB^2}\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB} \tag{2.5}$$

which states that the centrifugal force varies inversely with the radius of the circular path. So, by proposition II and III, at any instant, the centrifugal force of a body in circular motion is proportional to the speed squared divided by the radius of the circle. That is what today is known as the formula for centripetal acceleration.

Huygens treatment of circular motion is somehow very similar to Descartes' view on the topic. It is a cause of an external constraint and an tendency within the moving body to recede the circular path radially outwards (Westfall, 1972). The dynamics of the situation is made into a static one of equilibrium between two forces in opposite directions as pointed out by Yoder (2004). Huygens concentrates more on the effect caused by circular motion than the circumstances that create it. Nevertheless, it is an elegant and groundbreaking result that justifies the nomination of being the first to derive the formula for centripetal acceleration.

## 2.4 Isaac Newton

The first to describe circular motion as we know it today - namely as a result of linear inertia and an acceleration pointing radially towards the center of rotation - was Newton (1643-1727) in 1684 (Meli, 1990). The story goes that Newton in 1679 received a letter from the fellow English natural philosopher, Robert Hooke (1635-1703). Hooke describes in this letter an idea that planetary motion could be a result of both a tangential and an attractive motion. Supposedly, there is no record of the same view on circular motion in any of Newtons publication and notes beforehand. On the contrary, Newton used to speak of circular motion like Descartes and Huygens. In his publication *De Motu Corporum in Gyrum* from 1684, he clearly changed his mind regarding the dynamics behind circular motion. It remains a mystery whether Newton was inspired by Hooke since Newton in a letter states that he

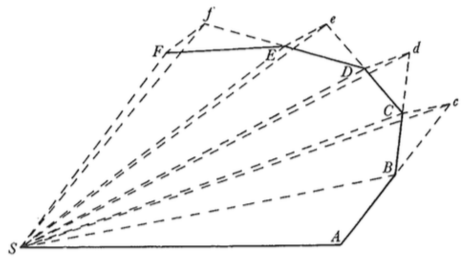


FIGURE 2.8: Figure associated with the proof of theorem 1 (Kepler's 2. law) in *De Motu*. A planet moves straight from point $A$ to point $B$ due to linear inertia. A central force acts in one instant at point $B$ deviating the original direction of the planet and it moves to $C$ instead of $c$. This mechanism continues at each new point $C, D, E, F$ etc. shaping the orbit of the planet. Original figure by Newton from Whiteside (1974).

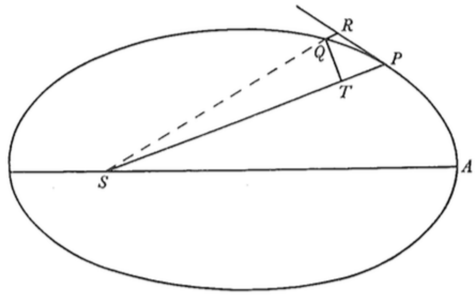


FIGURE 2.9: Figure associated with the proof of theorem 3 in *De Motu*. Body at point $P$ has a tendency to move to point $R$ that lies on the tangent line $PQ$. At infinitesimal times the body get deflected and moves via the curved line to point $Q$ because of the centripetal force that is proven to be $F \propto QR/(SP \cdot QT)^2$. i.e. the body undergoes a free fall of distance $QR$ within the time $SP \cdot QT$. Original figure by Newton from Whiteside (1974).

was not (Nauenberg, 2005). Regardless, Newton gets the credit and the following gives an insight into Newtons work on the matter.

The main focus in the first part of *De Motu* is quantifying a gravitational force law of planetary motion - the *centripetal force* as Newton names it. Newton does so very didactically by first introducing his new idea of centripetal force and then guiding his readers through different problems. He starts by finding a force law for a planet that has a circular trajectory with the sun placed on the periphery of this same path.[16] This makes the whole geometry of his argumentation easier to understand. Gradually he makes the problems harder and he ends up with the inverse square law that states $F(r) \propto r^{-2}$ for a planet on a elliptical trajectory with the sun in one of the foci of the ellipse.[17]

*De Motu* starts with 3 definitions where the first one goes:

> *Definition 1. A centripetal force I name that by which a body is impelled or attracted towards some point regarded as its centre.*[18]

So, Newton has clearly changed the view upon circular motion. How Newton understands this new force is best shown in theorem 1 where Newton proofs Kepler's second law. Figure (2.8) shows Newtons idea of how an orbital trajectory is created. First a planet moves from point $A$ to point $B$ due to rectilinear inertial motion (Hypothesis 2 in *De Motu*). Now at point $B$ the *'centripetal force acts in one single but mighty impulse'*[19] that causes the planet to deviate from its original path and reaching point $C$ instead of point $c$. At point $C$ the centripetal force acts again and within the same times the planet is constantly deviated and forced to reach $D, E, F$ etc. shaping the trajectory of the planet. Now, by letting the time between two endpoints be infinitesimally small a continuous orbit curve appears (see figure 2.9). The same figure (fig. 2.9) gives a good understanding in Newtons reasoning and treatment of his centripetal force. The planet at point $P$ has a tendency to move to $R$ but the centripetal force deflects the motion and forces it to move to $Q$. The configuration of $PRQT$

[16] Problem 1 in *De Motu* - Newton in Whiteside (1974)
[17] Problem 3 in *De Motu* - Newton in Whiteside (1974)
[18] Newton in Whiteside (1974)
[19] Theorem 1 in *De Motu* Newton in Whiteside (1974)

should be viewed upon as being infinitesimally small since the centripetal force acts in one instant. Now, since $Q$ is very close to $P$ Newton assumes the centripetal force to be constant within the time of movement i.e. the planet undergoes a 'free fall' of length $RQ$ within a time interval proportional to $SP \cdot QT$, since time equals swept out area. Thus, for Newton the centripetal force $F \propto RQ/(SP \cdot QT)^2$ is a geometric quantity, that make sense with the use of infinitesimal calculus[20]. The mathematical reasoning is somehow quite similar to the work of Huygens but Newton changes the dynamics of the physics.

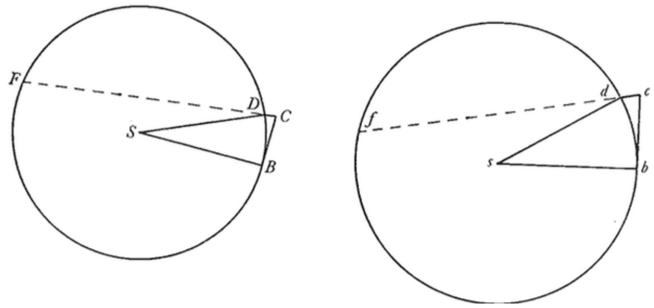


FIGURE 2.10: Figure associated with the proof of theorem 2 in *De Motu*. Two bodies $B$ and $b$ orbit uniformly the circles with radius $BS$ and $bs$ respectively. The speed of object $B$ is $v_B = BD = BC$ and $b$ has speed $v_b = bd = bc$. By adding the chord lines $DF$ and $fd$ the Euclidean tangent-secant theorem can be used to find an expression for the line segments $CD$ and $cd$ that are proportional to the centripetal forces in each case. By regarding $D$ and $d$ to be very close to $B$ and $b$ the secant lines $FC$ and $fc$ can be approximated to the diameter $2 \cdot BS$ and $2 \cdot bs$ respectively. Thus, the centripetal forces are proportional the the speed squared divided by the radius.Original figure by Newton from Whiteside (1974).

Regardless the orbital shape (circular, elliptic) and actual position of the impelling object (center, periphery, focus point), Newton calls the force centripetal, a term today used for circular motion. In theorem 2 in *De Motu*, Newton addresses the centripetal force for bodies that move circularly at constant speed. The procedure is very similar to the derivation made by Huygens. Newton considers two objects $B$ and $b$ in uniform circular motion (see figure 2.10). Within the same times the object $B$ travels distance $BD$ and object $b$ travels $bd$, thus giving the speeds $v_B = |BD|$ and $v_b = |bd|$. These speeds could also have been represented with the tangent lines $BC$ and $bd$ since those lines represent the inertial movement of the objects. Now, *'the centripetal forces (...) drag the bodies back from the tangents to the circumferences'*[21], a force that in size is proportional to the line segments $CD$ and $cd$ respectively, giving the ratio of the centripetal forces $F_B$ and $F_b$,

$$\frac{F_B}{F_b} = \frac{CD}{cd}. \tag{2.6}$$

By adding the chord lines $DF$ and $df$ and with the use of the Euclidean tangent-secant theorem (theorem 36 in book 3 by Euclid (Heath, 1956)), which in this example gives the relation $BC^2 = CD \cdot CF$, thus eq. 2.6 becomes

$$\frac{F_B}{F_b} = \frac{CD}{cd} = \frac{BC^2/CF}{bc^2/cf}. \tag{2.7}$$

[20]Theorem 3 in *De Motu* - Newton in Whiteside (1974)
[21]Theorem 2 in *De Motu* - Newton in (Whiteside, 1974)

With a infinitesimal argument Newton approximates the distance $CF$ to be $2BS$ giving $F_B \propto BC^2/BS$ i.e. the speed squared divided by the radius of the circular path (likewise for $F_b$).

## 2.5 Two Main Points

Within a timespan of around fifty years, the theory of circular motion developed from the circular inertia of Galileo, the summation of motion tendencies by Descartes, to Huygens' quantization of the tendency to recede the center (centrifugal force), and ending with Newton's formulation of the centripetal force. This was evidently not an easy piece of work that popped out of the blue. Two main points of this historical contribution should be highlighted before describing the case study.

### 2.5.1 Mathematical Development

A claim could be that the lack of the suitable math was responsible for some of the difficulties faced by our natural philosophers. Today, the kinematics of circular motion would be expressed in terms of vectors in Cartesian or even polar coordinates. Vector analysis as we know it today is a rather new invention, formulated by J. W. Gibbs and O. Heaviside in the beginning of the 20th century (Crowe, 1994). Together with the use of infinitesimal calculus one can easily go from expressions of position to velocity and acceleration. The first seeds of the modern calculus that we know today were planted at the same time as the breakthrough of circular motion, namely the seventeenth century (Rosenthal, 1951). This coincidence might suggest that developments in math play an essential role in the creation and formulation of new concepts in physics. As mentioned, infinitesimal mathematical arguments were used both in Huygens' (2.3) and Newton's (2.4) derivations. They both combined geometrics with calculus in order to approximate the curved line segments of circular motion into bits of straight line motion tangential to the circular path. This simplified the whole geometry into trigonometry and enabled the quantization of the centripetal acceleration. With a fully developed differential calculus theory, the kinematic description of circular motion might have been less problematic.

### 2.5.2 Change in Dynamics - A Learning Situation

The idea that inertial movement was circular, as Galileo describes it in section 2.1, was part of the geocentric model of the universe. The understanding of circular motion as perfect motion left the natural philosophers of the time with no reason to explain the dynamics behind the movement. However, the paradigmatic shift towards heliocentrism might have caused doubt and skepticism and thus ignited the search towards a new explanation of the phenomenon.

Despite being part of a bigger picture, the change from circular motion having no cause at all to the creation of a new set of dynamics represents a paradigmatic shift of its own. Within such a shift lies a period that Thomas S. Kuhn describes as a stage revolutionary science. During this period, the theories of the old paradigm are out of the picture (Allori, 2015). Now the revolutionary scientists have to create new ideas and theories that fit the new coming world view - a process of trails and errors until an acceptable theory is found. The attempts of describing the dynamics by Descartes and Huygens are highly influenced by a wrong physical approach. Why focus on an outward going tendency rather than inward? One might do the same after rotating a mass object in a string for the first time. For both Descartes and

Huygens it seems that they see the situation as an equilibrium of opposing forces somehow suggesting a zero net force. This seems understandable for the situation of uniform circular motion because why would an acceleration be needed when the speed is constant?[22] The work of Newton became the new paradigm behind the dynamics: Uniform circular motion is a result of rectilinear inertia and a radial inward acceleration.

The point of this being that many of the challenges that the seventeenth century natural philosophers faced might have some similarities with learning situations of today's physics students. Lack of suitable mathematics and physical understanding could easily guide students to wrong conclusions and misconceptions. This, as seen from this historical chapter, is part of a learning situation. In order to avoid unnecessary issues and improve teaching methods, the goal of this project is to map out the pitfalls when students are presented to circular motion and centripetal acceleration. A lot can be learned from the work of the biggest physicists - and if they struggled, so will today's students.

[22] Westfall (1971) in Stinner (2001).

# 3 Theory and Method of Investigation

This chapter serves two purposes. First, the five chosen derivations of the centripetal acceleration $a_c$ are presented, including some comments on interesting aspects of each method. This will be followed by the ideas and thoughts on how each derivation could be turned in to an educational video presentation that will play an important part in the research.

The second half of the chapter outlines the methodological framework. Data is collected via two different qualitative methods: an online survey and qualitative group interviews. Both the survey and the structure of the interviews will be described in detail, including how the subject fits the students' education and how one might engage the students to be part of the project. Finally, the chosen method of data procession, thematic analysis, is presented.

## 3.1 Five Derivations of Centripetal Acceleration

After a wide search online, in various physics textbooks, and with inspiration from Karam and Krey (2015), more than ten different derivations methods were found (including Huygens' and Newtons's proofs presented in 2.3 and 2.4). Out of all the methods, five were selected to be part of the investigation. Together these methods represent a wide range of mathematics that should be commonly known among first year physics. In this section, these five derivations are introduced, including comments highlighting relevant parts that might turn out to be problematic for the students.

### 3.1.1 Similar Triangles

In the book *'Principle & Practice of Physics'* by Mazur et al. (2015), the main text book of the course *'Mechanics and Theory of Relativity'*, the centripetal acceleration $a_c$ is derived in the following way:

A point particle with uniform circular motion with radius $r$ and speed $v$ moves from an initial position ($i$) to a final position ($f$) within the time $\Delta t$. By drawing vectors for both position ($\vec{r}_i, \vec{r}_f$) and velocity ($\vec{v}_i, \vec{v}_f$) at both instants and computing the vector difference ($\Delta\vec{r}_i, \Delta\vec{r}_f$) two triangles appear (figure 3.1). These two triangles are similar for two reasons:

- Both triangles are isosceles since the magnitude of the position and velocity vectors do not change.
- The angle $\theta$ swept out by the position vector is the same angle swept out by the velocity vector since the latter is always perpendicular to the position vector in uniform circular motion.

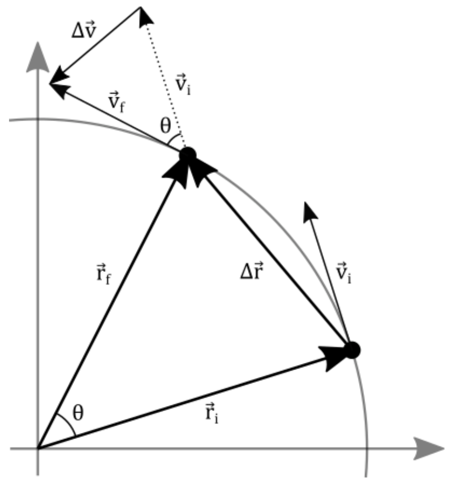


FIGURE 3.1: Point particle in uniform circular motion of radius $r$ and speed $v$. After a period of $\Delta t$ the particle moves from its initial point represented by $\vec{r}_i$ to the final point represented by $\vec{r}_f$ creating an angle $\theta$ between the two position vectors. The change in position is represented by the vector $\Delta\vec{r}$. The same conditions apply to the change in velocity within the same time $\Delta t$ and the two triangles that appear are similar. Figure drawn in Inkscape.

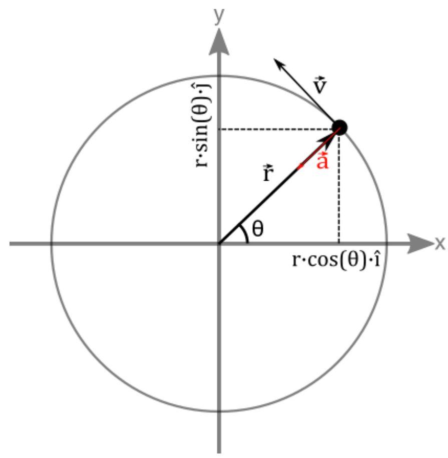


FIGURE 3.2: Point particle in uniform circular motion with radius $r$. Position vector $\vec{r}$ describes the position of the particle at any time. The linearly growing angle between the x-axis and the position vector is assigned $\theta$. The velocity vector $\vec{v}$ is the time derivative of $\vec{r}$ and the acceleration vector $\vec{a}$ is the time derivative of $\vec{v}$. Figure drawn in Inkscape.

Because of the similarity of the two triangles, the ratio of the corresponding sides is proportional and one gets

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}. \tag{3.1}$$

By rearranging, dividing with the time interval $\Delta t$, and taking the limit of $\Delta t \to 0$, the magnitude of the instantaneous acceleration that the particle undergoes is found, yielding $a_c$:

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}\cdot|\vec{v}| = \frac{v^2}{r}. \tag{3.2}$$

This derivation relies on the students' ability to apply knowledge of the physics behind uniform circular motion in order to understand the shape of the figure 3.1. It is a rather 'pedagogical' approach that reduces the geometry of the situation to the relatively simple theory behind similar triangles. The key point of the derivation is the argument that the two angles $\theta$ are equal. Another interesting aspect is to see how the students understand the mathematical operation of going to the limit of $\Delta t$ and how they link this to the physics of the situation. Also, the derivation creates a nice invitation to get some insights into the students' thoughts on average and instantaneous quantities.

### 3.1.2 Calculus Derivation

The following derivation of the centripetal acceleration is a standard method that uses the definitions of velocity and acceleration with respect to position.

Consider a particle with uniform circular motion at a distance $r$ from the origin and a vector $\vec{r}(t)$ describing the position of the particle at any time (figure 3.2). Since the angle between the x-axis and $\vec{r}(t)$ grows as $\theta = \omega t$, the position vector takes the form

$$\vec{r}(t) = r \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{i} + r \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{j}, \tag{3.3}$$

where $\omega$ is the angular frequency. By definition, the velocity vector $\vec{v}(t)$ and the acceleration vector $\vec{a}(t)$ are found to be

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -r\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{i} + r\omega \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{j} \qquad \text{and} \tag{3.4}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = -\omega^2(r \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{i} + r \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{j}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t). \tag{3.5}$$

Due to the minus sign, the expression for $\vec{a}(t)$ indicates that the particle has an acceleration that points radially towards the center of the trajectory. Taking the magnitude of $\vec{a}(t)$ yields $a_c$

$$a_c = |\vec{a}(t)| = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}, \tag{3.6}$$

since $\omega = \frac{v}{r}$.

This derivation is a straight forward standard method that uses the definitions between position, velocity, and acceleration. The mathematics is strict differentiation where the chain rule is used multiple times which might cause confusion amongst the students. An interesting aspect is to see whether the students realize what it means to derive a vector and to see if they are able to provide a physical interpretation of such a situation. The formulas $\theta = \omega t$ and $\omega = \frac{v}{r}$ are standard equations that the students are expected to know by heart. It might be the case that the students simply accept these types of equations without giving them any thoughts. A qualitative interview can reveal if the students are able to give any justification of the formulas.

### 3.1.3 The Fall of the Moon

In the book *'Gravity'*, George Gamow (1904-1968) presents a way to find an expression of the acceleration of the Moon assuming its path around Earth to be circular (Gamow, 1962). The following is a revised version of Gamow's original notation, but the procedure is the same (Corrao, 2012):

Imagine the Moon orbiting the Earth along a circular trajectory at a distance $r$ and with speed $v$ (figure 3.3). Suppose at some instant that Earth disappeared, then due to the law of inertia the Moon would, within a certain time interval $\Delta t$, continue to travel the distance $d = v \cdot \Delta t$ instead of the curved distance $s$. At this new position, the Moon is a distance $x$ further away from Earth compared to the starting position. The Pythagoras theorem gives

$$r^2 + d^2 = (r + x)^2, \tag{3.7}$$

and by rearranging and inserting values for $d$, eq. 3.7 becomes

$$x + \frac{x^2}{2r} = \frac{v^2 \Delta t^2}{2r}. \tag{3.8}$$

Gamow considers such a small time interval that he estimate $x \gg \frac{x^2}{2r}$ and thus excludes the latter term from eq. 3.8. Finally, Gamow sees the distance $x$ as the distance the Moon constantly "falls" towards Earth in order to stay in its circular orbit. Due to the infinitesimal time intervals, he describes the fall as a Galilean free fall of constant

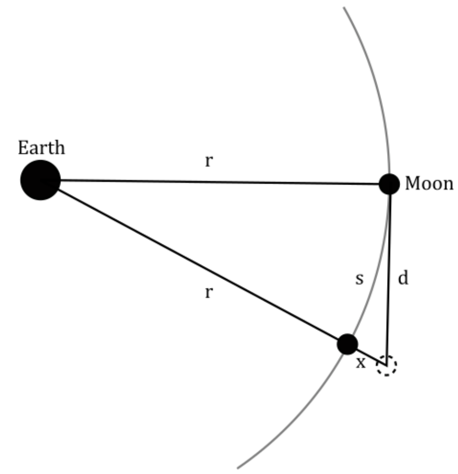


FIGURE 3.3: George Gamow's interpretation of the Moons orbit around the Earth. If the path is said to be circular with radius $r$ then by gravitational attraction, the Moon would travel the distance $s$ within a time interval $\Delta t$. Now, if the Earth was to disappear, the Moon would travel the straight line distance $d$ instead of $s$ making the distance to Earth $r + x$ after the time $\Delta t$. Figure drawn in Inkscape.

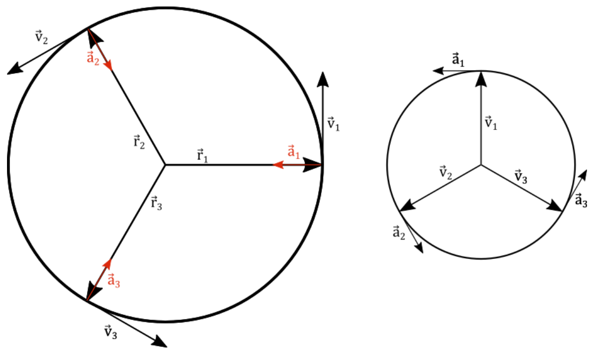

FIGURE 3.4: **Left:** Three instants of a position vector $\vec{r}$ that follows a point particle with uniform circular motion. At the same instants, three vectors representing the velocity $\vec{v}$ of the particle are drawn perpendicular to the position vectors. **Right:** The revolution period of the velocity vector. Likewise, the acceleration vectors $\vec{a}$ are drawn perpendicularly to the velocity vectors at the same instants. By tracing the acceleration vectors from the right figure to the left, a shift of $\pi$ with respect to the position vectors can be observed. Figure drawn in Inkscape.

acceleration, thus $x = \frac{1}{2}a\Delta t^2$. By inserting $x$ into the reduced eq. 3.8, Gamow gets:

$$\frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{v^2\Delta t^2}{2r}, \tag{3.9}$$

which then yields the centripetal acceleration $a_c = \frac{v^2}{r}$.

Once again, this is also a pedagogical derivation that sets up a concrete situation in order to reduce the level of abstraction. Though the simple use of trigonometry should be understandable for the students, it might not obvious why the mathematical representation of the line segments $d$ and $s$ have different forms. A key argument in the derivation is a rather loose use of the limit of $\Delta t$ that allows the exclusion of the term $\frac{x^2}{2r}$. This is a type of approximation that is very common and frequently used in physics, and therefore it is definitely interesting to get the students reaction to this type of argumentation.

### 3.1.4 Equal Revolution Periods

The following derivation is rather simple in terms of mathematics. It relies on a comparison of the revolution period of both the position vector and the velocity vector.

Figure 3.4 (left) shows three instants of a position vector $\vec{r}$ following a point particle with uniform circular motion. For each instant, the corresponding velocity vector $\vec{v}$ is drawn perpendicularly to $\vec{r}$ and the revolution period of $\vec{r}$ must be $T_r = \frac{2\pi r}{v}$. Now, by looking at the revolution of $\vec{v}$ (figure 3.4 right) at each instant, the particle has an acceleration (illustrated by the vector $\vec{a}$) that causes the rate of change in velocity. In order not to change the magnitude of the velocity, the acceleration must

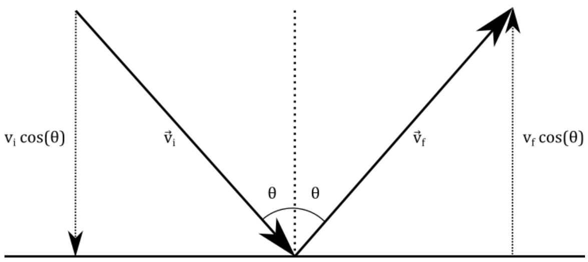


FIGURE 3.5: A ball with velocity $\vec{v}_i$ bounces elastically on a surface with an incident angle of $\theta$ with the respect to the normal. Due to conservation of kinetic energy the magnitude of the outgoing velocity $\vec{v}_f$ is the same as $\vec{v}_i$. Giving a total change in velocity of $2v\cos(\theta)$ due to the collision. The direction of the change in velocity points perpendicular to the surface. Figure drawn in Inkscape.

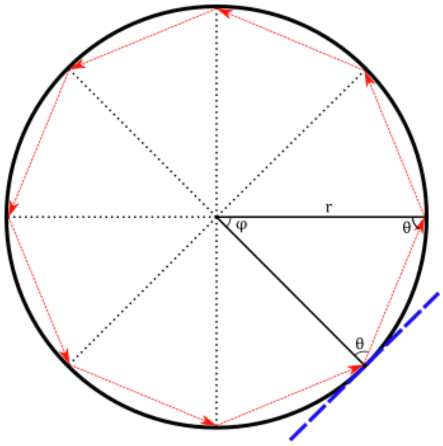


FIGURE 3.6: Example of Newton's polygon model with $n = 8$. A ball collides elastically with the periphery of a circle and each collision is as illustrated in figure 3.5. Here the blue line represents the surface. The straight line motion between two collisions creates a triangle of angles $\theta$ and $\varphi$. Notice that $2\theta + \varphi = \pi$ and $n\varphi = 2\pi$. For $n \to \infty, \varphi \to 0$ and $\theta \to \pi/2$. Figure drawn in Inkscape.

be perpendicular to $\vec{v}$ and the period for $\vec{v}$ must be $T_v = \frac{2\pi v}{a}$. Since all vectors ($\vec{r}, \vec{v}$ and $\vec{a}$) are moving with the particle, they must have the same period of revolution ($T_r = T_v$), giving

$$\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi v}{a}, \tag{3.10}$$

yielding the particle's acceleration of size $a = \frac{v^2}{r}$. By adding the acceleration vectors to the figure of revolving $\vec{r}$ (figure 3.4 left), it is clear that the acceleration truly is centripetal.

This derivation which is found in Wedemeyer (1993) has the advantage of being extremely easy regarding its algebraic use of mathematics. On the other hand it depends on the students' ability to understand and interpret mathematical vectors and how they affect one another. An interesting aspect is to see if the students are able to explain why the different vectors have to be perpendicular to each other. The diagrams in figure 3.4 include vectors for both position, velocity and acceleration assigned to the same point particle. Because of this the students might find the dimensions of the diagrams hard to grasp. Closely related to this is the use of different quantities for each period in equation 3.10.

### 3.1.5 Newton's Polygon Model

Newton's first attempt to mathematize circular motion can be found in his waste book. His model is revised in Newton and Henry (2000) in order to serve as an alternative method to obtain the equation of centripetal acceleration.

The model considers a ball that bounces inside a circle where its trajectory becomes different polygons depending on the numbers of collisions (see figure 3.6). Every collision between the ball and the periphery of the circle is elastic and the change in velocity $\Delta v$ for each bounce is $2|\vec{v}|\cos(\theta)$ due to conservation of momentum (figure 3.5), where $\vec{v}$ is the velocity of the ball and $\theta$ is the collision angle with respect to the normal. Considering a situation of $n$ bounces inside a circle of radius $r$ the total sum of change in velocity within one full revolution must be:

$$\sum \Delta v = 2n|\vec{v}|\cos(\theta), \tag{3.11}$$

where $\theta$ is the collision angle with respect to the normal as shown in figure 3.6. Now, if the number of impacts $n \to \infty$ then the circular shape is obtained. With the use of the trigonometric identity $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ and with the observations that $n\varphi = 2\pi$ and $2\theta + \varphi = \pi$ (see figure 3.6) then equation 3.11 can be written as:

$$\sum \Delta v = \frac{4\pi}{\varphi} \cdot v \sin(\frac{\varphi}{2}) \approx 2\pi v, \tag{3.12}$$

since $\varphi$ gets very small with increasing $n$. The acceleration $a$ that the ball has experienced during the $n$ collisions within the revolution time $T$ can now be found as:

$$a = \frac{\sum \Delta v}{T} = \frac{2\pi v}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v^2}{r}. \tag{3.13}$$

The acceleration $a$ calculated above is in fact the average acceleration during the $n$ bounces. That the instantaneous acceleration has the same value is a question of symmetry but it can be shown in a similar manner by analyzing a single collision.

Like *Similar Triangles* and *Fall of the Moon* this derivation is a rather concrete example that however tackles circular motion quite differently, namely as a result of elastic collision instead of, for instance, gravitational aspects. Two trigonometric arguments are made during the derivation: the identity that simplifies equation 3.12 and the use of the small angle approximation. These two steps might cause the students some trouble. This derivation is slightly more technical in its physical arguments and requires more ability to recall knowledge from other regions of physics. An advantage, however, might be that calculus is completely excluded in this derivation.

## 3.2 Video Presentations

The students participating in the project will be presented to the derivations in the form of short videos. This format makes it possible both to use the videos in interview sessions and to make an online version of the investigation in the form of a survey. Using the videos also ensures uniformity and thereby more objectivity since all the students will be presented to the exact same explanation of each derivation.

When making these videos, two opposing factors had to be taken into account. On the one hand, in order to make more students willing to participate in the project, the videos should be as short at possible to minimize the burden of participation. On the other hand, to gain information about which specific parts of each derivation that troubles the students, the videos need to be as explicit in every detail as possible. It could easily be a simple algebraic operation or standard physical assumption that the students find difficult. For this reason nothing should left out as '*common knowledge*'.

The videos are filmed in one take with top view (as shown in figure 3.7) showing only a piece of paper, the writings of the derivations, and the accompanying figure. To save time, the basic parts of each figure are drawn beforehand but the relevant parts are drawn continuously during the video (see figure 3.8). The duration of each

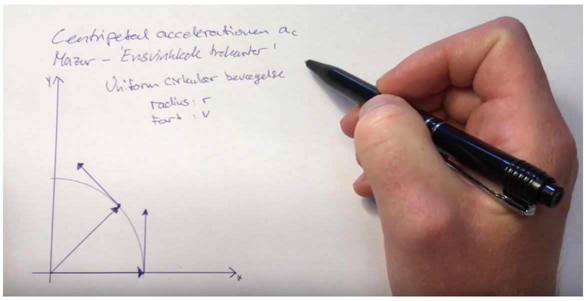


FIGURE 3.7: The beginning of the video *Similar Triangles* showing the basic part of the figure and the start assumption of the derivation.

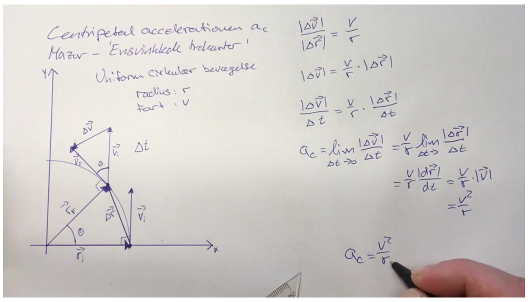


FIGURE 3.8: The end of the video *Similar Triangles* showing the complete figure and the mathematical part of the derivation.

video is in the range of 5:30 - 7:30 with a total time of 32:30 min. for all five videos. They can be seen via the links on the bottom of this page.[1][2][3][4][5]

## 3.3 Method of Data Collection

As this study seeks to get insight into how physics students think and reason when presented to theoretical derivations, two qualitative methods are used: an online survey, designed as a questionnaire with open ended questions, and multiple group interviews. It is argued in Smith and Tanner (2010) that qualitative investigations provide a better insight into the ways students think and into their actual knowledge. Despite being more time consuming, these methods have the advantage of moving beyond the limitation of standard concept inventory multiple choice tests. Hopefully it is possible to gain a deeper understanding of the students' cognitive abilities and reveal possible misconceptions since the participants are able to express all sorts of ideas and thoughts and not just the preconceived answers of a multiple choice test. The following subsections describe the structure of the survey and the interview and explain the main thoughts and ideas behind these methods.

### 3.3.1 The Online Survey

In board terms, this investigation aims to reach as many students as possible in order to have a large enough group to be representative of the students in the course *'Mechanics and Theory of Relativity'*. An online survey[6] is the best solution to reach this goal as it allows students to participate from home whenever they have the time.

The overall structure of the survey is rather simple and it can be seen in appendix E which also includes all the answers from the participants. First, the students are presented to the equation of centripetal acceleration and asked to explain in words how they understand the formula and why it has the shape that it has. The purpose of this first questions is to gain information about the students' immediate thoughts on the concept, to see how they read an equation and, finally, to tell if there is a large academical dispersion among the group.

[1] *'Similar Triangles'*: https://youtu.be/GOKjtUfmSJo
[2] *'Calculus Derivation'*: https://youtu.be/2XkF5e_VFTw
[3] *'The Fall Of The Moon'*: https://youtu.be/_T6d7z94FWg
[4] *'Equal Revolution Periods'*: https://youtu.be/ju2B7C8qkxU
[5] *'Newton's Polygon Model'*: https://youtu.be/VtPGxY7helo
[6] Created with the free and online questionnaire tool www.socrative.com.

The survey continues with the derivations presented one by one. After each video, the students are asked to answer the following two questions:

- Point out and describe the specific parts of the derivation (e.g. assumptions, simplifications, specific mathematics, etc.) that helped you gain a better understanding of the formula for $a_c$. Write a couple of lines in which you elaborate your answer.
- Likewise, describe the specific parts of the derivation that you did not understand or anything that confused you during the video. Explain why in a couple of lines.

Both questions are rather open and they are designed to make the students actively describe their thoughts and give their opinion on each method of derivation. Hopefully this will make the students feel more free to answer and allow a wide range of responses that can be used for further analysis. In the last part of the survey, the students are asked to choose a favorite method as well as the least helpful one. In both cases they are asked to specify the reasons for their choices.

### 3.3.2 The Interviews

The students were asked to sign up in pairs in the hope that a group interview would create a more relaxed situation where academic discussions might arise more easily. Much like the online survey, the interview starts with the beginning question of describing the formula for $a_c$. Then, the videos are watched one by one, followed by a talk and discussion of each derivation. At the end the students are asked to rank the best and worst method.

The interviews are semi-structured based on the students' own opinions and claims. The advantage of this type of interview is the similarity to a regular conversation where the students are free to speak out their minds. In order to make the interviews comparable, a set of concepts for each derivation are included in every interview (these concepts are described in more detail in section 3.1). This means that if the participants do not mention some of the interesting parts themselves, they are asked to comment on them. All the interviews are video taped. Besides audio this also includes physical reactions, the use of gestures and enables any drawings the students make to be part of the further analysis. In order to gain a better knowledge on the interviews and make it easier to use in further analysis, all the interviews are transcribed. The transcriptions can be seen in appendix A - D.

In order to secure a high quality of the data, some basic guidelines are followed as described in Kvale and Brinkmann (2009). Besides knowing every small detail and argument in the theory behind each derivation, there are some requirements for the interviewer. A semi-structured interview can go in many directions and for that reason the interviewer has to be able to interpret the answers continually to ensure a useful outcome. This also requires the interviewer to ask verifying questions during the interview to make sure that his/her interpretation of the participants' statements is correct. As before mentioned, there are some critical aspects of each derivation that should be discussed in each interview. It is the interviewer's responsibility to create the necessary structure. All in all, the interviewer should be open, listen carefully, but at the same time control and guide the interview in the right direction. A disadvantage to this approach is that leading questions can often occur, though these types of questions are not necessarily a bad thing in this context. Without dictating the right answers, leading questions can in fact be used intentionally to clarify the students' statements. They can also be used as a small "push" in the right direction that might help the students get past an obstacle or open up for a discussion on a higher academic level. When recruiting students to the interviews, it was underscored that participation would give them a deeper understanding of physics. For this reason, it would only be fair to assume that the students expect to learn something from the sessions. The use of leading questions might accommodate this expectation and provide a learning opportunity.

### 3.3.3 Engagement

Recruiting the first-year physics students to the online survey and the group interview was one of the main challenges and a necessity for the project to become a reality. First of all, the students had to be convinced that being part of the investigation was highly relevant for them. To accommodate this, the data collection was launched at the same time as the subject of circular motion and rotational kinematics was taught in the mechanics course. The students were presented to the project via e-mail and a ten minutes presentation during a lecture. In this presentation, the relevance of participating was explained. The main argument was that the videos would serve as alternative learning opportunities to obtain a deeper understanding of the subject. It was underscored that the investigation did not seek to test their knowledge in any summative manner and that all participants would be presented anonymously in any outlined data. Another argument was that gaining information on potential obstacles and learning difficulties that students face when they are presented to derivations would play an essential role in the development of better education for future physics students. Hopefully, the students would find the project interesting and be engaged to contribute to the investigation. Additionally, a lottery of two movie tickets was setup among all the participants of the online survey in order to get the attention of the students. Likewise, each group interview participant would receive a movie ticket as a small token of gratitude.

Note that the data collection of both the online survey and the interviews took place during the same time period and the interviewer did not read any of the survey answers before conducting the group interviews. For this reason no answers from the online survey affected the way the data was collected at the interviews. Also, the students were only allowed to participate in one of the two and the students who attended the interviews were told not to watch the videos beforehand.

## 3.4 Thematic Analysis

The total data set consists of all of the answers of the online survey and the full transcription of each interview recorded on videotape. As this is a qualitative investigation, the chosen method of processing the data is via thematic analysis. The following describes this as formulated by Braun and Clarke (2006). Thematic analysis is a very flexible analytic tool that has various ways of approaching obtained data. It seeks to address and clarify patterns or themes across the whole data set that relate to the goal of the project. In this case: to identify what sort of obstacles physics students face when presented to different methods of deriving the equation of centripetal acceleration and to understand why they might occur.

Most likely, many subsets of the full data will be interesting and relevant to analyze separately from the rest of the data. Since the data is collected in two different ways (the online survey and the interviews), this will more than likely be reflected in the data. For this reason, the analytic approach has to be adjusted to fit each subset of data.

The online survey is designed to create shorter and less profound answers than the interviews. Also, one would expect the number of participants to be higher for the online part of the data collection. For these reasons, the answers from the survey are going to be analyzed in a more inductive manner where the search of themes is driven more objectively by the data in relation to the overall goal of the investigation. This approach will also provide a wide description and overview of the students' opinions across this subset revealing some immediate themes that might provide a general framework for the analysis of the interviews.

The analysis of the interviews will be driven by the questions asked at the interviews. This theoretical thematic analysis is more deductive since it will dig into specific parts of the data set and try to describe the themes in greater detail. The analytic goal here is to explore the underlying reasons for any issue the students describe when dealing with a derivation. The interpretation of the interviews will follow the overall goal of the project namely to investigate mathematical obstacles and the students' ability to understand the interplay between math and physics.

Another natural division of the data would be to look at all the answers to one derivation at a time. The advantage of this structure is that it presents the entire data set clearly but also use the answers of the two different subsets at the same time. This would allow them to support each other hopefully give rise to even more clear interpretations of the data.

# 4 Results and Analysis

The goal of this chapter is to point out and analyze issues and problems that students face when they are presented to the different derivations of the centripetal acceleration $a_c$. The analysis maps out specific mathematics that might cause misconceptions or confusion and to get an understanding of the underlying reasons for this. Another aspect of the analysis will be to investigate how the students distinguish between mathematical and physical parts of the derivations and to see the how they navigate in the interplay between the two fields.

The analysis is based on the answers made by the students participating in the survey and at the interviews. After three weeks of recruitment, the final count of participants in the online survey was 18 students.[1] For the interviews, 7 students attended - 3 pairs and one single (see appendix A - D for full transcriptions).

The first section of this chapter describes the more general thoughts of each derivation. Also, this section gives an brief overview of the themes that are analyzed during the rest of the chapter. The next section describes the students' prior knowledge. It is shown that before the presentation of the derivations in the provided learning material, the students are not able to give arguments for the $v^2$ term in the equation for $a_c$. This finding validates the relevance of this project.

The data revealed five different themes that are highly relevant for this research. The rest of the chapter is divided into sections that each deal with one of these themes:

- **Arguments Based on Trigonometry**
  The students have a hard time understanding the geometrical arguments used in some of the derivations. Many describe a feeling of accepting rather than understanding when confronted with these types of arguments.

- **Interpretation of Calculus and Limits**
  Some of the derivations have an extensive use of infinitesimal calculus and arguments based on the use of mathematical limits. This area of mathematics is far more familiar to the students, but some lack abilities to interpret the arguments into physics.

- **Approximations**
  When presented to an argument that uses approximations, the students doubt the truth of the argument. Even though most students are able to explain the reasoning behind the arguments, there is still a lot of skepticism.

- **Vector Representation**
  The students' understanding of vectors in physics is very developed. This shows that many students have a rather mathematical mindset towards manipulation of vectors.

[1] 12 of whom provided full answers (see appendix E).

- **Pedagogical Trade-off**
  The last theme deals with a trade-off that happens in the more pedagogical derivations. The students find the motivation and argumentation behind these derivations rather arbitrary. The students think the methods use a lot of physics and mathematics irrelevant for the topic of circular motion and this causes confusion.

## 4.1 Reactions and Popularity

To provide an overview of all the students' immediate reactions, this section will briefly describe the overall comments for each derivation. In both the survey and at the interviews, the students were asked to vote for the derivation that provided the best understanding of the formula of centripetal acceleration and for the one they found provided the least insight. The following lists the derivations ranking from the most popular amongst the students to the least popular. Table 4.1 lists the exact votes from both the survey and interviews. For each method, the general opinions are described and the reactions serve as a first introduction to the general themes of the analysis.

**The Fall of the Moon**
Gamow's derivation is the most popular one in the survey. The students find it more intuitive than the others in its physics.[2] They mention that the intuition is due to the more concrete situation that is easy to follow and imagine yourself. Also, a common reaction is that the proof uses a simple trigonometry and an algebra that is easy to understand. Even though Gamow's derivation is the one that receives the most positive votes it in the survey it is actually quite unpopular in the interviews (see tabel 4.1). Especially two issues seem to cause confusion. First of all, many express a lot skepticism towards the exclusion of the term containing the $x^2$. They simply doubt this argument of approximation. Secondly, some students mention that the derivation seems rather constructed and arbitrary since it has many steps that seem disconnected and unrelated to circular motion. Both problems will be discussed in greater detail in the later sections.

**Calculus Derivation**
The overall reactions to this derivation from both the survey and the interviews are positive. It gets credit for using the relations between position, velocity and acceleration that are already familiar to them from one-dimensional motion.[3]. This recognition minimizes confusion since the students know what is going to happen in each step of the proof. Another positive comment is that students find it nice to see how the direction of the centripetal acceleration appears through this more mathematical treatment of uniform circular motion. Surprisingly, no one seems frightened by the extensive use of the chain rule - the only concern is towards fellow students that might find it hard to calculate derivatives. Very few students vote for this as being the worst derivation. A few mention that it is boring, having less physics within it, and that the notation of the vectors was confusing. [4] Also, the interviews show that physical interpretation of time derivatives of vectors is not a trivial task.

[2] Answers 2, 3, 4, 5, 8, 10 and 12 in question 4 of the survey - appendix E
[3] Answer 1, 2, 8, 13 of question 5 appendix E Interview 2 time 0:37:27. Interview 3 time 0:32:23.
[4] Answer 1, 7, 9 and 11 of question 5 in appendix E

**Equal Revolution Periods**
There are a lot of positive responses to this derivation method. Student 2 and student 7 from the interviews even go so far as to call it 'beautiful'. Many appreciate the simplicity of the mathematics and that the proof uses the intuition behind uniform circular motion.[5] A lot of the students from the survey also claim that the highly visual dependency of the relationship between the different vectors helped them gain a better feeling of the situation.[6] Despite this, some mention that this type of derivation seems too informal, perhaps because of the sparse use of mathematics or the less strict transition between the vectors.[7] The interviews reveal that even though the derivation seems very simple, there is some confusion on how the two circles are created.

**Similar Triangles**
As mentioned, this derivation is the one that the students have encountered in their textbook by Mazur et al. (2015). For this reason, the students have seen or even worked with the method before, which might be one of the reasons why many of the survey answers (3rd question in appendix E) state that nothing in the video causes any troubles. Many of the answers also point out that the simplicity of the geometry helps them understand the physics behind circular motion even better.[8] It also receives credit for how the use of limits creates a nice visualization of how to go from average to instantaneous quantities. Despite this, the derivation only receives one best vote. The main problem described by the students is the argument of the equal angles. Many state that it is because of a rather complicated figure and find it hard to follow all the steps that shape it.

**Newton's Polygon Model**
Even though the students complement this derivation for being creative, most of the reactions towards it are negative. In fact, this derivation only receives negative votes. However, one positive comment is that it visualizes the mathematical idea of going to the limit of infinity.[9] Most of the critique is reminiscent of Gamow's *The Fall of the Moon*; namely that the proof seems constructed. The method uses a lot of steps that seem illogical and difficult for the students to grasp.[10] Again, the problem is that the derivation is not a standard method where the students know the next step and this makes it hard. Especially the use of the small angle approximation ($\sin(x) \approx x$ for small $x$) and the trigonometric identity ($\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$) are causing a lot of trouble in both the interview and in the survey. The later sections will investigate this in greater detail.

## 4.2 Prior Knowledge and a Cognitive Obstacle

As mentioned, the investigation starts at just the same time as the curriculum of the mechanics course reaches circular motion. For this reason, all the students have had lectures addressing centripetal acceleration and they have been presented to the derivation *Similar triangles* both at lectures and in the book by Mazur et al. (2015). In order to see how much the students know beforehand, the first task in both the

[5] Answer 1, 2, 4, 7, and 9 of the survey appendix E.
[6] Answer 3, 4, 10, 12, and 13 of the survey appendix E.
[7] Answer 1, 2, 6, 9, 11 and 13 of the survey appendix E.
[8] Answer 3, 5, 14, 15 in question 3 of appendix E
[9] Answer 4 and 9 in question 7 of the survey appendix E.
[10] Answer 3, 4, 8, 11, 13 of question 7 of the survey appendix E

TABLE 4.1: Table of the Students Votes

| **Scoreboard** | Best | Worst | Best | Worst |
|---|---|---|---|---|
| *Similar Triangles* | 1 | .5 | - | - |
| *Calculus Derivation* | 3 | 1.5 | 2.5 | - |
| *The Fall of the Moon* | 6 | 1.5 | 1 | 3.5 |
| *Equal Revolution Periods* | 2 | 2 | 3.5 | - |
| *Newton's Polygon Model* | - | 5.5 | - | 3.5 |
| Total | 12 | 11 | 7 | 7 |
| | Survey | | Interviews | |

Table 3.1: The table shows the votes of the best and the worst derivation that the students gave both from the online survey and the interviews. If a student mentioned two derivation as the best or worst each derivations received half a point. One student from the survey did not mention a least favorite.

online survey and the interview is to describe their immediate thoughts on the formula. The students are asked to explain how they understand the formula of $a_c$ and if they can somehow explain why it has the form it has.

Most of the students formulate what the equation says: an increasing speed gives a higher centripetal acceleration and a larger radius equals a lower $a_c$. Explaining why gives a variety of answers. Some use dimension analysis as justification and some use an argument like the following based on the physics of the situation:

> *It makes sense since a larger velocity requires a larger centripetal acceleration in order to keep the circular trajectory. Likewise, for the radius it makes sense that a larger radius gives a longer distance to rotate on, which would make the instantaneous acceleration smaller.*[11]

It seems that this student has a feeling that centripetal acceleration causes a change in the direction of the velocity, and if an object speeds up, more acceleration is needed in order to stay on the circular path. The same goes for change in radius with constant speed: a larger radius gives a bigger circumference i.e. less acceleration is required to make the change in velocity. This type of argument might seem trivial but it is more the exception than the norm. Most students answer that they have no clue about the shape of the formula, give incorrect arguments, or do not mention it at all. The following extract from the second interview emphasizes this:

> **Simon:** *When you look at the equation for $a_c$ does it makes sense why it looks like this? What do you think about it?*
> **Student 4:** *It doesn't make sense to me. I believe in it, but...*
> **Simon:** *You believe in it. Does it make sense that you divided by r for instance?*
> **Student 3:** *I'm just thinking that if you tried to make some Pythagoras on it then I could get this part [v] squared but I cannot get the rest.*
> **Simon:** *All right, but what happens to $a_c$ if r increases?*
> **Student 4:** *It gets smaller.*
> **Simon:** *Does that make sense?*
> **Student 4:** *I don't think so.*
> **Simon:** *Why not?*
> **Student 4:** *Why would the distance have anything to do with the acceleration?*

[11] Answer 13 in question 2 of appendix E. Translated from Danish.

> **Simon:** *How about if the speed of the object increases, then what happens to the acceleration?*
> **Student 4:** *It increases exponentially.*
> **Simon:** *Does that make sense?*
> **Student 4:** *Yes I think that makes more sense.*
> **Student 3:** *Yes yes that is... [stops talking].*
> **Simon:** *Why does that make more sense?*
> **Student 4:** *Because acceleration is an increase in velocity. Or a change in velocity.*
> **Student 3:** *So that makes really good sense.*[12]

The students are able to comprehend the effect of changing the sizes of the variables in the formula. Student 4 acknowledges that acceleration is related to change in velocity but does not understand why the radius of the circular path has to be included. At this point neither is able to justify the mathematical expression of a specific situation through physical reasoning. It is a case of accepting rather than reflection. Student 3 suggests that the square of $v$ might come from an argument based on right triangles and student 4 confuses the power function with the exponential. The latter is a misconception also present in answer 9 and 11 in question 2 of appendix E of the online survey.

The square of $v$ seems to be the biggest issue among the answers that try to explain the shape of the equation for $a_c$. One suggests that it is because the acceleration has to be positive[13], another says that it is because the units have to fit[14], and one suggest that it is the way to make circular motion uniform.[15] A deliberate attempt comes from student 5 in interview 3:

> *'I think it makes good sense. For instance, if you think about r and it get twice as big and the velocity is the same, then it would take twice as long to get round. Then you would need half the acceleration. That is why a is inversely proportional to r. And if the velocity is twice as big then it would take half the time to make twice the change in velocity. That is why a is proportional to the second power of v.'*[16]

Without formulating a rigorous proof, the student makes two arguments that justify the proportionalities - at least for the case of double radius and double speed. The quote demonstrates that the student is able to combine the geometrical properties of circles with the vectorial aspects of the physical conditions in the situation. It is a very analytic approach that divides the situation into one proportionality at the time and then analyses how changes in that single variable affects the centripetal acceleration. The student's example could easily be generalized and made into a proof that combines calculus with the trigonometry of the vector displacement caused by the circular motion.

The answers to the first question in both the interviews and the survey clearly shows that there is a wide dispersion in the participants' cognitive/academic ability to understand and interpret a mathematical expression that describes a physical situation. Regarding the issue of $v^2$, it seems that there is a tendency to fix this by applying a

[12] Interview 2: Time 0:00:04 - 0:01:44 appendix B. Translated from Danish.
[13] Answer 14 in question 2 of appendix E.
[14] Answer 10 in question 2 of appendix E.
[15] Answer 16 in question 2 of appendix E.
[16] Interview 3: time 0:00:44 - 0:01:27 appendix C. Translated from Danish.

mathematical operation that squares a variable. This is a situation of a cognitive obstacle where a piece of knowledge that the students know works in some cases, does not fit this specific situation (Winsløw, 2006). In this case, the students assimilate the action of squaring a variable with other algorithms frequently used in physics. This obstacle hinders the type of reasoning that student 5 shows in the quotation above. A way to overcome the complication might be through a derivation that illustrates and explains how the squared part enters the equation. Surely this might create new and even bigger hurdles for the students.

Based on the students' answers and comments on each derivation method, the rest of the analysis aims to find and describe the obstacles encountered by the students and thereby hinder productive learning.

## 4.3 Arguments Based On Trigonometry

Several of the derivations use arguments that are based on the geometry of triangles. Gamow sets up a situation that allows the theorem of Pythagoras to be used, Mazur's *Similar Triangles* argument is based on the similarities of two triangles, and in *Newton's Polygon Model* the trigonometric identity $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ makes it easier to solve the essential equation. When reading through all the answers of the online survey and the interviews, one finds that the students do not always find these geometric arguments trivial.

As mentioned, many of the students in the online survey like the way circular motion is reduced to a simple situation of similar triangles in Mazur's derivation.[17] However, the argument behind the equal angle $\theta$ shared by the two triangles is hard for many to grasp.[18] The students in interview 3 find the argument rather arbitrary, and student 6 from this interview describes how (s)he gets stuck in the process of understanding why the two angles are equal.[19] This is also the case for student 7 in interview 4, whose immediate reaction to the Mazur derivation is that it is tangible, simple, and easy to follow. However, when the student is asked to explain why $\theta$ of the two triangles are equal, the student fails to reconstruct any of the arguments.[20] The student demonstrates knowledge of the basic ideas, but cannot reconstruct them in the given situation. The situation for student 7 could easily be the same for many of the students who in the online survey answered that they understood everything behind the derivation.

A reason for this issue can be found in interview 2. Here, both students have a hard time understanding the figure that accompanies the derivation and especially why the two angles are equal. Student 3 says that all the math makes good sense, but also *'I don't understand the idea of moving those vectors around.'*[21] Later in the same interview it is obvious that the two students get lost in the list of physical arguments behind the structure of the derivation. The situation demonstrates that the two students are incapable of integrating and interpreting the physics of uniform circular motion into the practice that lies behind the mathematical arguments of the proof. And as student 4 recognize - *'you have to accept this [the arguments], before you can continue with the math'*[22].

[17] Answer 1, 2, 3, 10, 14, 15 in question 3 of appendix E
[18] Answer 4, 5, 8, 11 in question 3 of appendix E.
[19] Interview 3: time 0:59:31 - 1:00:42 appendix C
[20] Interview 4: time 0:53:05 - 0:54:50 appendix D.
[21] Interview 2: time 1:02:23 appendix B - translated from Danish.
[22] Interview 2: time 1:02:35 appendix B - translated from Danish.

The derivation of *Similar Triangles* has the advantage of a simple use of mathematics that the students find easy to follow. However, the argument behind the similarity of the two triangles is not a trivial task to understand, and definitely hard for students to formulate by themselves. As pointed out, the derivation is reduced to a mathematical exercise with no meaning if the underlying arguments are simply accepted rather than understood.

Only one student from the online survey mentions that the use of the trigonometric identity $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ in the derivation *Newton's Polygon Model* is confusing since it is not explained why it is true.[23] The interviews, however, reveal a different story.

The students at the interviews were all asked to explain and visualize why the trigonometric identity is true. Both students in interview 2 had the feeling that they had never seen the expression before. The following shows how the two students react when they are confronted with such an expression:

> **Student 4:** *I did not understand it [the expression of the identity].*
> **Student 3:** *No that is a rule that I think we haven't seen before.*
> **Simon:** *What do you think when a rule like this enters a derivation, maybe at a lecture or like right now?*
> **Student 4:** *In this particular case in this video it was like you got stuck with it. And then you forgot to listen to the next steps.*
> **Student 3:** *I just accept it when it's a mathematical rule.*
> **Simon:** *Why do you get stuck with it? Did you try to visualize why it was true?*
> **Student 3:** *No. I just try to figure out if I can recognize it. You know, if I have seen it before and in this case I haven't. I was thinking: 'is this something we have been taught before?'*[24]

So, in order not to lose track of the derivation, the students had to just accept the identity without giving it extra thought. The interview continued in the hope that with some help, the students would be able to come up with an argument for the identity. Still, they were not able to explain it without full guidance.[25]

In both interview 1 and 3, the students try to explain the identity with the graphs of the trigonometric functions. They mention that there is a phase of $\pi/2$ between $\cos(x)$ and $\sin(x)$, and then try to draw the functions of the identity as seen in figure 4.1. When asked how to see from the figure that the identity is true student 6 answers: *'By seeing where the two graphs intersect'*.[26] It is as if the students read the angles in the equation as being shifted with $\pi/2$[27] or confuse the equation with $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$. Certainly, they do not realize what the equality sign means in this situation. If the two parts of the equation were equal, the graphs of each function would lie on top of each other which makes it hard to visualize why the identity holds. With guidance, the students get back on the right track.

The only student to draw the unit circle without any help is student 7 from interview 4 (see figure 4.2). The student is able to make an angle that is $\pi/2 - x$ and justifies why sine and cosine would read of the same value when you look at the axis that each represents. Unfortunately, the student makes the value for $x$ so big that it

[23] Answer 12 in question 7 of appendix E
[24] Interview 2 Appendix B: time 0:24:37-0:25:19 - translated from Danish.
[25] Interview 2 Appendix B: time 0:25:29-0:27:00.
[26] Interview 3 appendix C: time 0:23:13 - translated from Danish.
[27] Interview 1 appendix A time: 0:25:26 - 0:26:06

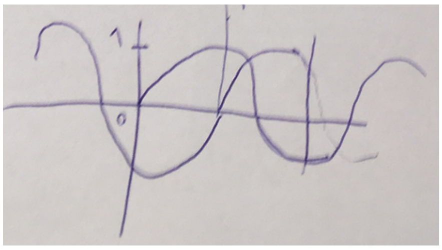


FIGURE 4.1: Student 6's way to visualize why the trigonometric identity is true. The student draws the functions of $\cos(\pi/2 - x)$ and $\sin(x)$ as seen in the figure.[a]

[a]interview 3 appendix C: time 0:23:13

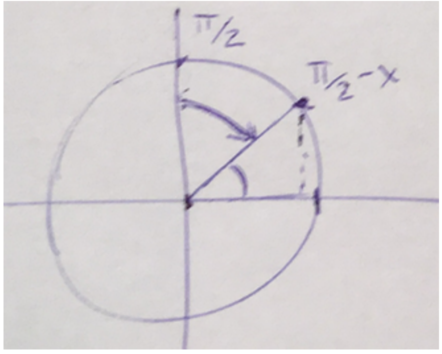


FIGURE 4.2: Student 7's way to visualize why the trigonometric identity is true. The student is able to find an angle of the size $\pi/2 - x$ and mark it on the unity circle. [a]

[a]Interview 4 appendix D: time 0:34:13.

looks more like a condition of $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$, which ruins the realization of the symmetry in the situation.[28]

As shown, arguments based on trigonometry is a branch of mathematics that cause trouble for first year physics students. Many of the students are able to recognize and accept the arguments. However, they are not able give the sufficient explanations or apply knowledge that would demonstrate understanding of the situation. Also, these types of arguments can cause students to get stuck during a derivation. This forces the students to either accept the argument or try to understand why it is true. An unfortunate circumstance, because if you get stuck with an argument, you might loose the overall understanding of the derivation. On the other hand, one should not just accept an argument to be true since that would ruin the depth of comprehension.

## 4.4 Interpretation of Calculus and Limits

Infinitesimal calculus and the study of limits are fundamental mathematics in most of the derivations. In the method *Calculus Derivation*, the proof depends on the student's ability to differentiate the position function twice in order to get the function of acceleration. In *Similar Triangles*, the limit of the time interval $\Delta t$ gives the instantaneous quantities, and in both *The Fall of the Moon* and *Newton's Polygon Model*, informal limit considerations make it possible to use approximations as part of the argument.

During the discussion part of the *Calculus Derivation*, all students from the interviews were asked to explain how they understand and to illustrate the time derivative of a vector. The purpose of this question is to determine whether the students are able to connect the mathematical operation with the physics of the situation. Two different types of answers came into play: four of the students answered that when you take the derivative of a vector, you just take the derivative of each component.[29] Student 6 added the "illustration" as seen in figure 4.3. Student 1, 2 and 5 answer

[28]Interview 4 appendix D: time 0:20:55.

[29]interview 2 appendix B: time 0:38:58.9. Interview 3 appendix C: time 0:34:56. Interview 4 appendix D: Time: 0:33:01.

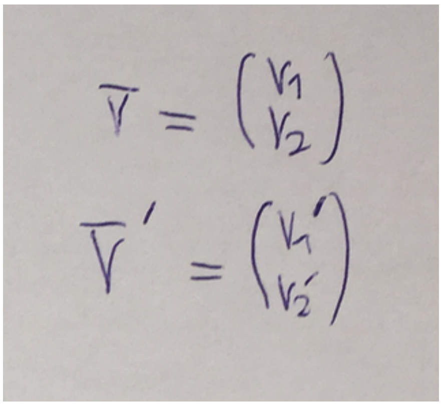

FIGURE 4.3: The illustration of the time derivative of a velocity vector of student 6. The student explains that the derivative of a vector is the derivative of the two components of the vector.[a]

[a]Student 6 in interview 3: time 0:34:56

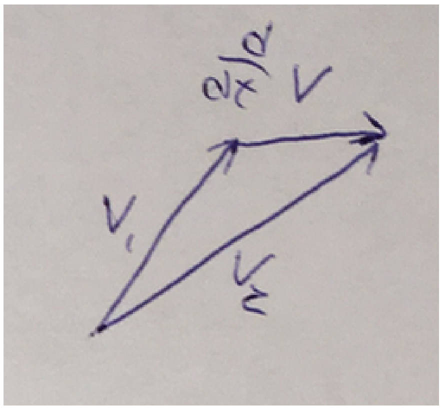

FIGURE 4.4: Student 1's interpretation of the time derivative of a velocity vector. The student explains that the derivative is the change that happens within the time interval $dt$.[a]

[a]Student 1 in interview 1. time 0:34:13.

with a more visual interpretation that shows a deeper understanding of the use of vectors in physics. They explain that if there is a change in size or direction of a vector within a time interval, then the derivative can be found as shown in figure 4.4.[30] The answer of the first four students is of course correct, but the difference in the two answers show that some students are more prone to think with a strategy of mathematics. Surely they know by heart that the time derivative of the velocity vector is the acceleration vector, but they seem to forget, or they are not able to interpret the mathematics into physics.

In interview 2, the discussion continued to deal with derivatives of vectors. A vector arrow was drawn by the interviewer, and the students were asked to explain what would happen to the vector if its derivative was zero:

> **Student 4:** *It would just become a null vector.*
> **Simon:** *So it would just disappear?*
> **Student 4:** *Yes.*
> **Simon:** *Null vector then.*
> **Student 3:** *You can see from the figure [the figure from the derivation 3.2] that no matter what, the vector becomes smaller each time it gets derived and it also changes direction.*
> **Simon:** *Are you thinking about these three vectors? [pointing at the figure 3.2]*
> **Student 3:** *But even when you look visually at the circle you can see that they get smaller each time.*[31]

This is an interesting misconception. Due to the different scaled vector arrows of position, velocity and acceleration (see figure 3.2) student 3 thinks that this effect is caused by the mathematical operation of differentiation. Despite acknowledging that a change of direction also happens, it seems more as a justification of student 4's claim that if a vector's derivative is zero, then the vector itself would vanish. Both ideas are unfortunate misinterpretations where the latter might stem from an idea that the acceleration of an object always has to be "smaller" than the object's velocity.

[30]Interview 1 appendix A: time 0:34:13. Interview 3 appendix C: time 0:35:53.
[31]Interview 2 appendix B: time 0:40:12 - 0:40:39. Translated from Danish.

As mentioned earlier, the use of infinitesimal time intervals plays an important role in the *Similar Triangles* derivation. Many of the survey answers are very positive towards this use of limits and, like the following statement, some even mention that it helps them understand the physics better:

> *'The elaborate explanation pointing out that $\Delta t$ was a big period [of time] giving the average [acceleration] helped [in order to understand] that one had to take the limit of t to get the instantaneous acceleration.'*[32]

During the talk about Mazur's derivation, the students were asked how they understood the idea of letting $\Delta t$ go to zero and how that might affect the physics of the situation. As mentioned in section 4.3, student 3 and 4 had no clue about the figure of the derivation and did not understand why the triangles were similar. Still, even without any help they could easily explain how, as $\Delta t$ got smaller, the two points $i$ and $f$ got closer and closer (figure 3.1). A situation where applying a mathematical operation helps them gain a better idea of the fundamental physics behind the derivation.

The same can be observed in interview 4. Student 7 had failed to reconstruct the argument of equal angles earlier in the interview. Nevertheless, the student is helped by the interpretation of the limit of $\Delta t$ later in the interview:

> **Simon:** *When $\Delta t \to 0$ what do you imagine will happen to the situation in the figure?*
> **Student 7:** *When we take the limit then I imagine that this part [points at $\Delta\vec{r}$] gets smaller and smaller.*
> **Simon:** *Exactly.*
> **Student 7:** *So the v's get closer and closer to each other. And in the end they are really just equal.*
> **Simon:** *And then can you see what happens to the angles?*
> **Student 7:** *Yes, they become equal too. So it is actually the same. Now I see it.*[33]

In fact, all the students from the interviews are able to apply the idea of taking the limit of $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$ and to describe what happens in the figure as $\Delta t$ approaches zero. So even if the figure at first can seem confusing and hard to grasp, it helps them gain a better visualization of the main ideas. Especially when analyzing the situation with a mathematical tool as limits. In the case of student 7, it even leads to a better understanding of the main argument of the derivations. The situation also shows that learning through self experience helps students become aware of their own lack of understanding, and thus, the mathematical interpretation might help them get a better physical insight. The same can be seen in interview 1. Here, the talk about the limit leads to an interesting discussion on whether average or instantaneous acceleration is more real than the other:

> **Student 1:** *The instantaneous [acceleration] doesn't really exist.*
> **Student 2:** *I would have said that the average [acceleration] doesn't exist.*
> **Simon:** *This is interesting. Can you give some arguments?*
> **Student 1:** *There is no such thing as instantaneous moments. We always measure specific quantities. But I agree that it is the instant [acceleration] that you want to use in calculations. With the average you will get into a lot of problems: they cancel each other out and stuff like that. In general, you want everything*

[32] Answer 10 in question 3 of appendix E - translated from Danish
[33] Interview 4: Time 0:55:01 - 0:55:30 appendix D - translated from Danish.

> *in one line so that you can parametertize and that can turn into some average.*
> **Student 2:** *I think that the instantaneous acceleration exists because in every instant you have a velocity that changes a little and that is the instantaneous acceleration. If you think about the average acceleration then that is just if we measure over a time interval and see what happens - yeah and then we have that stuff canceling each other. That is why I think that it makes more sense to think that the instantaneous is real.*[34]

Of course both are right since in theory an infinitesimal is as real as any number but not measurable in practice. Still, the issue is quite relevant and as previously shown in the historical chapter, it was the breakthrough of infinitesimal calculus that lead Huygens and Newton to their theoretical result of centripetal acceleration. The extract shows that the interplay between mathematics and physics can cause confusion but also cooperate in order to guide students to a higher cognitive level.

This section showed that students are more familiar with infinitesimal calculus and limits compared to mathematical arguments based on geometry. In the group interviews, the students were all able to interpret the operation of limits into the physics of the given situation. This action helped some students understand other arguments of the derivations and it even lead to more fundamental discussions of physics. However, it was not clear to everyone how to visualize the time derivative of a vector. Finally, it turns out that students tend to have a more mathematical mindset when it comes to interpreting calculus.

## 4.5 Approximations

The two main approximations that are part of the derivations are the small angles approximation used in *Newton's Polygon Model* and the estimation Gamow makes in *The Fall of the Moon*. By reading through the survey answers and the interviews, one gets a feeling that this type of reasoning is not a trivial task for the students.

Excluding a part in an equation by estimating it to be insignificantly smaller than another part is a common practice in physics. Gamow's own argument is that if the situation is viewed upon with infinitely small time intervals then the squared term ($x^2/2r$) of left side of eq. 3.8 is negligible compared to the other term ($x$) (Gamow, 1962). This argument causes some concern among the students, as can be seen in this student's comment:

> *'I'm still not completely confident with the idea of eliminating very small parts of an equation - it might help on the intuition if it were explained why that is all right to do'.*[35]

Even though it is explicitly mentioned in the video of the derivation, the student still doubts the truth behind the argument. Similar frustration can be found in answer 2, 3, 7, 10 and 12 in question 4 of the online survey. The students from the interviews explain in quite different ways why this type of argument is hard to accept as well as why it might still be okay to use.

Although the process behind the argument is well understood by student 1 of interview 1, (s)he describes a feeling of disappointment when confronted with this

[34] From interview 1: Time 0:58:52 - 1:00:20 Translated from Danish.
[35] Answer 2 in question 4 of the survey (appendix E) - translated from Danish

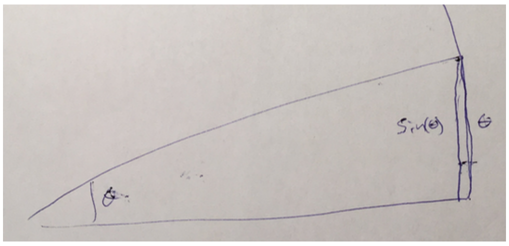


FIGURE 4.5: Student 5's way of validating the small angle approximation. The students has drawn the unit circle and argues that the line segment of $\sin(\theta)$ gets closer and closer to the curved line segment of $\theta$ the smaller $\theta$ gets.[a]

[a]Student 5 in interview 3 time: 0:20:28 appendix C

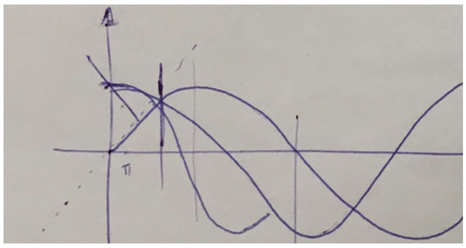

FIGURE 4.6: Students 2 argues for the small angle approximation with this figure. Drawn is the sine function (among other curves) and the student explains that close to $x = 0$ the sine function can be approximated with the straight line $x$. This is illustrated with the dashed line. [a]

[a]Student 2 in interview 1 time: 0:22:16. appendix A

type of argument since it seems to be a too easy way around the problem.[36] In the same interview, student 2 addresses an issue regarding the right side of equation 3.8:

> *'... when t gets very small then x squared is negligible compared to x. But we do not consider the right side of the equation ($v^2\Delta t^2/2r$). [...] I think it is confusing that we have two parts that are both squared and then we consider one to be zero and the other not to be zero.'*[37]

The same is pointed out by student 3 in interview 2 who also finds it weird that there is no mathematical way of expressing the argument.[38] This is followed up by student 4 who points out that the method contradicts the fact that you always have to do the same mathematical operation on both side of the equation.[39] Both students in interview 3 have an attitude of acceptance towards the "trick" and as student 6 says - *'If the error is smaller than we can observe, then it is okay for me.'*[40] This seems to be the core of the conflict. The students do not accept that the approximation is in fact an approximation that turns out to be correct when $x$ gets infinitesimally small and that it is only the terms containing $x$ that are comparable in this situation.

When it comes to the small angle approximation, everything seems to be a bit more clear. It is used in *Newton's Polygon Model* where the number of collisions $n \to \infty$ which causes the angle $\varphi$ to become infinitely small, allowing equation 3.11 to be simplified. Only one student from the online survey directly states that the approximation ruins the intuition within the derivation.[41]

In the interviews, the students validate the approximation in two different ways: most of them think in the same way as student 5 from interview 3: By drawing the unity circle (figure 4.5) and by imagining how as $\theta$ goes to zero, the line segment $\sin(\theta)$ and the curved segment of $\theta$ get closer and closer to each other, the student is convinced to believe in the approximation.[42] The other interpretation comes from student 2 in interview 1 who identifies the sine function as a straight line very close

[36]Student 1 in interview 1 appendix A: time 0:46:33.
[37]Student 2 in interview 1 appendix A: time 0:45:38 - translated from Danish.
[38]Student 3 in interview 2 appendix B: time 0:52:09.
[39]Student 4 in interview 2 appendix B: time 0:53:34.
[40]Student 6 in interview 3 appendix C: time 0:47:51 - translated form Danish.
[41]Answer 2 in question 7 of the survey (appendix E)
[42]Student 5 in C: time 0:20:28.

to 0. The student draws the sine function (figure 4.6) and illustrates that around zero, it is very similar to the function of $x$.[43]

Both interpretations are good ways to validate the approximation and it shows that the students are far more familiar with the small angle approximation than with the estimation used by Gamow. Many of the students also recognize the approximation as a Taylor-expansion which might be the proof they have seen before. The fact that they have seen an argument that explains and validates the approximation might be the reason why the students feel more familiar with the small angle approximation. Even though all the students have seen the approximation before and are able to visualize it geometrically, there is still a lot of skepticism towards it. They simply doubt the correctness of it and feel that the approximation is "cheating" since it seems to contradict with the strict rules of mathematics.

The skepticism towards approximations might be quite natural the first couple of times students are presented to them. However, as they are commonly used in physics, the students need to realize that when working theoretically with infinitesimals, the approximations are valid. It could be that the skepticism rises from the vagueness that has a tendency to accompany this type of reasoning. Nevertheless, it is also a good sign that the students do not believe everything they are told. Their doubts might even encourage them to work more on the derivations to test their validity.

## 4.6 Vector Representation

In four of the five derivations, vector representation is used to describe different physical quantities. It has already been addressed in section 4.4 that some of the students from the interviews struggle with the physical interpretation of the time derivative of a vector. This section seeks to describe whether other aspect of this mathematical tool cause any issues.

First, a small comment related to the method *Calculus Derivation*. A few students mention that the unit vector representation used in the derivation makes it more complicated than the more familiar column vectors.[44] The issue seems to be that the expressions in the derivation become very long and that one has to remember not to mix parts of each unit vector. In continuation of this, some seem to confuse the use of trigonometric functions with polar coordinates.[45] This potentially cause a barrier of unnecessary complexity since the students might be less familiar with the polar coordinate system.

The shape and uniformity of circular motion is caused by a velocity vector perpendicular to the position vector and an acceleration perpendicular to the velocity. This is the key physics behind the two diagrams (see figure 3.4) in the derivation *Equal Revolution Periods* (3.1.4) that leads to the simple equality of the periods. The Students were therefore asked to give their thoughts on the matter. The following extract from interview 3 shows very well the general understanding of the situation that all the students from the interviews were able to provide:

> **Simon:** *If it [the acceleration vector] wasn't perpendicular to the velocity then what would happen?*

[43] Student 2 in interview 1 appendix A: time 0:22:16.

[44] Answer 1 and 12 in question 5 E and interview 1 A: time 0:35:36 and interview 3 C: time 0:33:48.

[45] Answer 8, 12 in question 5 of the survey E and interview 1 appendix A: time 0:33:10.

> **Student 5:** *If it isn't perpendicular and if it looked like this [draws with the finger on the figure] then it would make the velocity move more in this direction. Then it wouldn't be a circle since it would move away from the center.*
> **Simon:** *So what happens to the velocity vector a short moment after?*
> **Student 5:** *Then it would be a little bit bigger or a little bit smaller depending on the direction of the motion. It is the thing that the parallel part - or if the acceleration is parallel then it increases or decreases the velocity.*
> **Simon:** *So you can divide the acceleration into?*
> **Student 5:** *A parallel part...*
> **Student 6:** *And a tangential part - I think it's called?*
> **Simon:** *Yeah at least a part that is perpendicular to the velocity. And what does that part do?*
> **Student 6:** *It controls the direction and the one that is parallel controls the size. Because we don't have a parallel part in this situation then the size doesn't change.*[46]

Though not convincing, it seems that both students have a good feeling about the use of vectors to describe position, velocity and acceleration. They also describe how to interpret visually the way the different vectors affect each other and how vector summation should be used to argue for the shape of circular motion. The same can be observed in the other interviews.

The issues arise when the students are forced to go a little deeper into the two circles. Student 2 in interview 1 (appendix A) finds the existence of the circle that represents how the velocity vector revolves less "real" compared to the other circle that represents position.[47] This, as the student realizes later, is because it is easier to imagine a revolving physical object with its respective position vector. It is more abstract to imagine how the velocity vector revolves since it does not 'point' at anything. This leads to a more fundamental problem regarding how vectors representing different quantities can even be in the same diagram.

All the students were asked to explain which units the axis would have if coordinate systems were drawn through the center of each circle. The students from interview 2 and 4 all thought that the position diagram would have time as the x-axis and distance as the y-axis. Likewise, the velocity diagram with time as the x-axis and velocity as the y-axis.[48] This misconception might be caused by the fact that the students are more used to work with the usual $r(t), v(t), a(t)$ graphs. More interestingly, it shows that the students might have misunderstood the graphical use of vectors like in the figure of this derivation (figure 3.4) or in physics textbooks. Here, $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ vectors might be assigned to a moving object to illustrate directions and magnitudes of the different quantities. Of course, each vector belongs to its respective space or domain and it is easy to become confused when they are seen together in the same diagram or figure.

To sum up, the students have a good understanding of uniform circular motion and how the different vectors ($\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$) affect each other among the students. Applying the rules of vector analysis and interpreting it into the physical situation does not pose any major challenges. When vectors of different quantities are placed in the same diagram (as part of concretizing a situation), however, the students find it hard to explain the dimension in the concrete example. This problem is highly related to

[46] Interview 3: time: 0:10:14 - 0:11:02 - translated from Danish.
[47] Interview 1 appendix A: time 0:07:36.
[48] Interview 2 appendix B: time 0:11:55 - 0:13:39. Interview 4 appendix D: time 0:08:59 - 0:10:40

the last theme of this analysis which describes how the attempt to be more concrete comes with a trade-off.

## 4.7 Pedagogical Trade-off

Three of the five derivations (*The Fall of the Moon, Newtons Polygon Model*, and to some extend also *Similar Triangles*) have one thing in common; they try to create derivations that are more 'pedagogical' in the argumentation. Pedagogical meaning that the derivations set up more concrete and specific examples of uniform circular motion. The motivation might be that using simpler arguments of mathematics and physics makes it easier for the students to understand how the formula of centripetal acceleration comes to be. However, these attempts come with a trade-off which can be seen from the following statements:

> *'The assumptions in the beginning of a derivation are not always easy to follow: Why is it that you are interested in the expression of the hypotenuse of a triangle. It feels like "now we just try this" and then with the help of mathematical magic we get the right expression.'* [Comment on *The Fall of the Moon*][49]

> *I think that it [the derivation] is rather arbitrary. Why do you draw exactly these things? Why to investigate that the triangles are similar? It seems harder, especially for someone who hasn't seen it before and tries to reproduces it.* [Comment on *Similar Triangles*][50]

> *It seemed to be more of a gimmick to divide it into a lot of collisions that intuitively didn't make any sense. The motivation behind the reasoning was not clear at all and that is confusing.* [Comment on *Newton's Polygon Model*][51]

The students simply find the more pedagogical derivations to be constructions rather than concrete ways to get to the equation of centripetal acceleration.

While discussing *The Fall of the Moon* in interview 4, student 7 shows a similar opinion. When the students are asked to explain why it is okay to cancel the term of $x^2$ and not the one of $\Delta t^2$ the student says the following:

> *'It is because in this particular case it turns out to be practical because you know later in the derivation this will turn up [points at $x = \frac{1}{2}a\Delta t^2$] and then we get rid of $\Delta t^2$ anyway'*[52]

This statement seems to be very similar to the quotes from the survey mentioned above: that these types derivations are disconnected constructions that work with the "magic of math". The whole setup and the steps of the derivations seem arbitrary to the students. The derivations that use elements from other parts of physics and math (Pythagoras, collisions, etc.) seem illogical to the students rather than of relevance to uniform circular motion. Student 5 from interview 3 describes that these derivations would be really hard to reproduce yourself since there are so many steps and separate elements to remember.[53] Some students complement the derivations for applying concreteness and a pedagogical setup. However, as shown, for some

[49] Answer 13 in question 4 of the survey (appendix E) - translated from Danish
[50] Student 5 in interview 3 time: 0:59:31. Appendix C - translated from Danish.
[51] Answer 4 in question 7 of the survey (appendix E) - translated from Danish
[52] Student 7 in interview 4 appendix D: time 0:43:28 - translated from Danish.
[53] Student 5 in interview 3: Time 0:50:47 - 0:51:55

students it comes with the trade-off of not being a standard method where one always knows what to do and what the next step is.

The method *Calculus Derivation* is a big contrast to the three discussed derivations. Following is the reason why student 3 and 4 favor this derivation:

> **Student 3:** *It is so familiar. You have done it so many times.*
> **Student 4:** *And you understand every step.*
> **Student 3:** *Yes. Because it is so basic. You only need to differentiate, and you know the relations, because that is what you have been force to do for so many years.*[54]

The recognition of the more standard procedure is the reason why the students favor it. The same students had a very hard time of physically interpreting the time derivatives of vectors (see sections 4.4). However, the feeling of understanding the algorithm behind the derivation makes it easier to understand the derivation itself. Many answers express the same as student 3 and 4. No one seems to be frightened by the extensive use of calculus. *'It's just some differentials'* - as student 6 mentions.[55].

The contrast between the pedagogical and the more standard methods demonstrates that the students favor the procedures that they recognize. This might seem obvious, but as shown in section 4.4 this recognition does not necessarily mean that the students fully understand the physics behind the derivation. The pedagogical methods are more concrete and try to reduce the level of abstraction within the arguments of the derivation. However, this comes with a cost. It is hard for the students to apply the necessary knowledge in these new situations, making it difficult to understand the underlying arguments. To be fair to the students, the pedagogical derivations have many steps that surely would be hard to figure out all at once. The trade-off shows that it is definitely not a trivial task for students to be confronted with new types of derivations. In a learning situation, one should not expect the students to be able to understand the underlying arguments behind each step of the derivation the first time they are presented to it.

To sum up the findings, this chapter showed that the first year physics students are able to read and give a physical interpretation of the equation of centripetal acceleration $a_c$. However, the students faced a cognitive obstacle when confronted with the $v^2$ term of the formula. This validated the need for derivations to overcome the obstacle. The obtained data showed that it is not a trivial task since each method of derivation presents several new problems and issues the to be dealt with. Five different themes were found in the data, and altogether they showed that there exits no one perfect type of derivation that suits all students. One answer from the online survey has a good point:

> *'I think that what helps the most is to have it explained and proved with different methods because we all understand the stuff differently.'*[56]

The purpose of this research was not to find the best derivation type but rather to find and clarify learning difficulties. As such, there is not one "perfect" derivation. The five themes presented in this analysis can serve as guideline for teachers to have extra focus on these areas. One might also suggest that the way derivations are used in learning situations has to be given a lot of thought. No matter what, the students

[54] Interview 2 time: 1:06:46 - appendix B.
[55] Interview 3 time: 1:06:00 - appendix C
[56] Answer 11 in question 8 from appendix E - translated form Danish.

will face many obstacles that hinder the overall learning goal of each derivation. Suggestions on how the derivations can be used in order to provide the best learning outcome is one of the topics to be discussed in the next chapter.

# 5 Discussion

The purpose of this chapter is to discuss and bring relevant points related to the method of data collection and the general results given in the chapter of analysis.

First, it is described how there is a big difference in the quality of the obtained data. The data from the online survey has a tendency to be more superficial and thus gives less information compared to the data from the interviews. The big difference in quality mirrors the difference in the two methods of data collections. Participating in the online survey was a rather passive activity that did not force the students to work with the derivations. At the group interviews on the other hand, each student had a partner to discuss the derivations with as well as guidance provided by the interviewer. Learning is better facilitated through activation which came naturally in the interview sessions. This highly suggest that the students from the interviews gained a higher learning outcome compared to the survey participants.

The next part of the discussion deals with the use of derivations in teaching. It is argued from a constructivist point of view that students need to work with the derivations themselves in order to obtain new knowledge. Students need to be aware of their own lack of knowledge before any learning can occur. In this context some suggestions are given on how the derivations presented in this project can be combined to give a better learning outcome depending on the learning goals.

Lastly, the results of this research are set into perspective in relation to the history of centripetal acceleration. It is described how the original derivations by Huygens and Newton could possible help students overcome the skepticism towards the small angle approximation. Also, it is pointed out how the students might get deeper insight in the physics behind circular motion by studying these old proofs.

## 5.1 Quality of the Obtained Data

As described in chapter 3 *Theory and Method of Investigation*, the data that this project is based on was collected in two different ways: the online survey and the group interviews. The idea behind this design was that an online part would give room for more students to participate since it would be easily accessible and less time consuming. However, this was not the case. It turned out to be difficult to recruit participants. The data collection lasted three weeks in total (up until the Christmas break) and despite several motivational talks and emails, only 12 students managed to complete the online survey. A small number that can be explained from the survey's duration (videos alone are 35 min.) and the fact that first year physics students have a lot of study work that has a higher priority to them. Reading through the obtained answers from the online survey, they show another questionable aspect of this method of data collection. Many of the answers are not of very high quality compared to the data obtained at the interviews. The following part of this section will address this in greater detail.

Even though many of the online survey answers are good and provide a nice overview of some aspects of each derivation, there are also a lot of superficial answers:

- *'More fun way of thinking but very understandable.'*[1]
- *'I think it was really nice explained. Good that every step was explained and why he did the way he did.'*[2]
- *'It made good sense. It was pretty straightforward.'*[3]

The students were asked after each derivation video to point out the specific parts that helped them gain a better understanding of the formula for $a_c$. It might be that the question was too open, giving the students a hard time to come up with qualified answers. Another possibility is that the students found the total length of the survey too long and, in order to get it over with, answered briefly to some of the derivations. Whatever the reason, this rather passive activity certainly did not engage all of the students to dig into the derivations. The outlined answers are evidence of the weakness of the online survey. The open design had the side effect that if nothing particular popped into the students minds after watching the videos they were not forced to give it any further thoughts. They just wrote something without giving any explanation of *why*. The above answers and the ones like them do not provide any useful information related to the survey question and for that reason they have not been taken into account in the analysis.

After each video, the students were also asked to point out parts of the derivation that caused any problems. The data of the online survey revealed another negative tendency related to this task. Many of the answers directly state that nothing in the particular derivation caused any trouble. This does not seem very likely. Also, many do not write anything to these questions or they state a problem on behalf of other fellow students. These types of answers, sum up to 36% of the total responses directly related to the derivations (question 3-7 of appendix E). Again, it shows that the rather abstract question has been hard for the students to respond to - at least for the online part of the research. This is in big contrast to the data obtained at the group interviews.

As anticipated, the data obtained from the interview sessions is of a higher quality compared to the survey. The students who participated were able to express all kinds of useful information revealing misconceptions, ideas of reasoning, interpretation patterns, etc. For this reason, the observations and conclusions in the analysis are mainly based on the data from the interviews. The semi-structured interviews (described in section 3.3) turned out to provide an optimal setting and are the main reason for the higher quality of data. Throughout every interview it can be seen how clarifying questions were used intentionally to make the students open their minds and provide more detailed answers. Also, the fact that the interviews included two students (except interview 4) created a calm atmosphere and a dynamic that gave better results. The group interviews gave the students an opportunity to discuss different elements, to see certain aspects from a different point of view, or to agree on an interpretation of a specific concept. It is possible that the online survey would have generated better answers if the students had been asked to make it in pairs. Lastly, there is some evidence in the data that the mindset of the interviewed students matched the expectations of the investigation better, meaning they were more motivated to learn and understand. If the expectations of the students from the online survey, going into the project, were different from those of the interviewed

[1]One student's positive comment on *The Fall of the moon* - Answer 14 in question 4 appendix E
[2]One student's only comment on *Similar Triangles* - Answer 9 in question 3 appendix E
[3]One student's only comment on *Newton's Polygon Model* - Answer 6 in question 7 appendix E

students, it should be reflected in the data. This could definitely be a reason for the more superficial answers of the survey as well. This is the topic for the next section.

## 5.2 Learning Outcome

This investigation did not explicit seek to give any final answers regarding the overall learning outcome of the derivations. However, since there is a big difference in the quality of data, it is possible that this is because the interviewed students learned more simply by actively participating. It comes down to a question of the difference between the two methods of data collection. Namely, the question is whether the setting of the survey and the situation of the interviews created two completely different learning situations which in turn affected the mindset of the participating students differently. The following gives some possible answers to this.

Other than the difference in quality of responses, there is another hit in the data that suggests radically different learning outcomes among the participating students. Looking at table 4.1, there seems to be a high agreement between the votes of the best and worst derivation in the interview. This suggests that when working in depth with the derivations, students agree upon pros and cons of the derivations. On the other hand, the votes are more randomly distributed in the survey which suggests that these students did not give the derivations as much thought and when asked, they perhaps picked one they could remember. However, because of the small data set this is hard to know for sure.

The starting point of each method of data collection are identical; namely, to watch the derivation videos. A rather passive process that very much resembles a standard lecture situation. The variation lies in the work following the videos. The difference in the quality of responses reveals that the interviews created a situation that activated the students more than the survey did. Active learning can be defined as activities that force students to be involved in the learning process rather than just listening. It relies on exercises that engage students to use higher order thinking processes that make the students reflect on their own level of knowledge and how they use it (Bonwell and Eison, 1991). In Michael (2006), it is argued that through active learning, students gain better learning of *how* concepts work instead of just learning facts. Moreover, it is worth noting that both cooperative working sessions and *self-explanation* exercises are activities of active learning that improve conceptual understanding and reasoning. All this was part of the group interviews but not the online survey, due to either the setup itself or the survey design. An important point regarding active learning is that it does not just happen by itself (Michael, 2006). It is something that has to be facilitated to occur by a teacher in a learning situation, which is exactly what was obtained at the group interviews.

To sum up, just by signing up, the interviewed students showed an open mindset towards the exercise and a willingness to learn. On top of that, the interview setting provided must better facilities for active learning which is mirrored in the quality of the data. The point being that the survey did not reach further than a passive learning situation, giving the participants worse odds of learning. If one was not activated or did not learn anything, it is hard to have an opinion about the situation.

## 5.3 The Use of Derivations in Teaching

The act of deriving equations has deep historical roots in physics (cf. section 2) and it is an important skill for university physics students to practise. The process provides information about the underlying physics of the given situation that is required to answer *how* and *why* questions. Making derivations is a natural way of understanding the interplay between mathematics and physics and it educates students to navigate between the two fields. Also, it serves a more pragmatic purpose. In order to solve real world problems or make new discoveries the just mentioned abilities are essential. However, this research has shown that derivations are not trivial for first year physics students. For this reason, lecturers should be very aware of how derivations are presented and used in teaching.

The analysis of the data (chapter 4) showed the need of derivations in order to overcome the obstacle of why $v$ is squared in the equation of centripetal acceleration $a_c = v^2/r$. However, the data also revealed that this process includes a cascade of pitfalls that the students have to deal with before getting to bottom of the first problem. On top of that, it has just been argued in the previous section that by activating students, it is more likely learning occurs. It seems that the classic lecture situation is not the ideal option for teaching derivations after all.

From a constructivist point of view, learning is not something that just transfers from one mind to another. When presented to new theories or situations, students make sense and meaning based on what they know beforehand. If the prior knowledge is not sufficient, then the learners have to develop old information and construct a new understanding (Angell et al., 2011). Another important point on the learning process is that the students have to realize their own misconceptions in order to make the conceptual change. This is of course a difficult task and as mentioned it is easier done by activating students. This is not bad news for the case of teaching derivations since overcoming all potential problems is a natural part of the process. However, the teacher plays a crucial role in this as a guiding facilitator rather than only as a lecturer. This was very obvious during the interviews. Several places in the interviews, the students only needed a small 'push' in order to move on in the right direction.

Another important role of the teacher is to make the specific learning goal completely clear. This influences which type of derivation you want to choose to teach centripetal acceleration. The knowledge about the potential problems students are going to face can be used as an advantage to seek a specific learning outcome. For instance, the students found the *Calculus Derivation* easy to follow but the analysis showed that it is hard for the students to visualize the time derivatives of vectors. This might be overcome by introducing the derivation *Similar Triangles* which quite explicitly describes the difference between $\Delta\vec{v}$ and $d\vec{v}$ and how they come to appear. Another option is to use the derivation *Equal Revolution Periods* as a tool to understand the motion of the vectors that is written mathematically in the *Calculus Derivation*. This combination would improve the students' understanding of trigonometric functions that are highly relevant for many areas of physics. Another perspective could be to gain a deeper understanding of the dynamics behind circular motion. Here, the relevant examples would be *Newton's Polygon Model* and *The Fall of the Moon*. By letting the students work with both cases it should become clear to them that it is not only gravity that creates a centripetal acceleration. Also, looking at these derivations in a more dynamic context might help the students to understand the motivations behind these rather constructed derivations.

Surely, many other combinations can be made depending on the motive. The overall point is that it is important to know what students struggle with. Whether to use that information to guide students in the right direction or to design problems that optimize learning outcome depends on the learning situation. In the case of this research, the possibilities are numerous based on the multiple reactions that have been detected.

## 5.4 Traces of History

This project started with a historical perspective on the development of circular motion and how the formula of centripetal acceleration came to be. The dynamics behind circular motion shifted from the idea of circular inertia, to be regarded as due to a outwards tendency, and finally to be understood as a result of linear inertia and a center seeking force. Truly, the search for the true meaning behind circulating objects is far more fundamental and complex than getting sense out of a derivation of the kinematic expression of centripetal acceleration. However, it is still possible to find related aspects between the working processes of the seventeenth century philosophers and first year physics students. The following describes some fundamental changes within the mathematical reasoning, and how the historical perspective can be used in a learning situation.

The arguments made by Huygens and Newton in chapter 2 are purely geometrical. All physical quantities are represented by line segment and the construction of both proofs of centripetal acceleration depends on the ability to reason through classic geometry. Even though mathematical vectors are a more abstract than line segments, they have nowadays become the standard representation form of physical quantities in most fields. This shift in methods can be seen in the analysis of the data for this research. The first year physics students show far greater ability to manipulate vectors than to understand an argument based on trigonometry. This might be the core of the shift in tradition, namely because vectors work better with other areas of mathematics such as infinitesimal calculus and functions; areas that have all been developed later in time. While the old natural philosophizers were definitely experts in classic geometric, the derivations of Huygens and Newton were also highly dependent on one other argument that is still relevant today, the small angle approximation.

Both Huygens and Newton compare two situations in the case of circular motion. One where an object stays on the circular trajectory and one where it flies of on the tangent line - exactly the same situation as *The Fall of the Moon*. In order to make their arguments of geometrically valid, they need to approximate the curved line segment of the circular path with the straight line segment of the tangent. They do so by regarding infinitesimal configurations of the physical setup. The result of the argument is exactly the same as the small angle approximation. To Huygens and Newton it seems as a standard way of arguing since neither of them comment on the way of reasoning or provide any proof to back it up. Presenting the students of today to the original derivations would illustrate that this type of argumentation has deep roots in physics. This could be a way to overcome some of the skepticism students have shown to have towards this approximation.

Using the original derivations in their raw forms in teaching would require a lot of today's first year physics students. The structure of the proofs is quite different and many important details are very subtle. However, despite all the difficult geometry, there is a lot of physics to be learned. Both derivations require the ability to interpret the physical situation of circular motion. In the proof by Huygens, one is forced to go through different situations of circular motion and compare how each result is related to one another. In the end, the combinations of these different situations reveal the final result of centripetal acceleration. This practise of assessing each situation and its physical implications, the participants of this study found harder than the more stand method of calculus. In the case of Newton, one is also presented to the original thoughts behind the concept of force as we know it today, an insight that might help students to concretize the idea behind force in general.

The full story of centripetal acceleration as presented in chapter 2 can serve as an explicit example of how the science of nature develops. First of all, it shows that the formulas as we know them today are not something that just came to existence naturally. It takes many attempts, wrong assumptions, and a lot of work to get to a result that survives for centuries. This leads to an even more fundamental fact behind the sciences of nature: we are only able to explain what we believe to be true. One day, objects move on circular paths just by themselves without any underlying cause. The next, objects tend to move in straight lines and circular motion only happens if something constantly provides an acceleration towards the centre of motion. This is a lesson that tells us that physics always has been (and still is) developing in order to fit the newest discoveries and results. Great paradigm shifts create division in the science societies, and the old and wrong ideas can be hard to get rid of. A final comment to this chapter (and mostly as a funny remark) shows that the idea of circular inertia is still among us:

> *'If Earth was to disappear wouldn't the Moon still have a curved trajectory around the next big object in space?'*[4]

[4]Comment on *The Fall of the Moon*. Answer 12 in question 4 in appendix E.

# 6 Conclusion

The aim of this master thesis was to get insight into the potential learning difficulties that physics students face when they are presented to theoretical derivations. The main focus of investigation was to find specific areas of mathematics that cause problems for physics students and to understand why these issues might arise. Also, the students abilities to use and interpret mathematical arguments into physics was of high interest in this project.

Circular motion was the chosen topic for this thesis. In a historical perspective, it was found that understanding the physics behind circular motion was not a trivial task for the natural philosophizers of the seventeenth century. Within fifty years, the dynamics behind circular motion changed from the idea of circular inertia to be regarded as a result of linear inertia and a centripetal acceleration. A result that underscored why physics students today might also struggle with this particular topic.

Five educational videos were made, each presenting a specific derivation of the formula for centripetal acceleration, $a_c = v^2/r$. These videos were presented to first year physics students from the University of Copenhagen who either participated via an online survey or in group interviews. The obtained qualitative data was analyzed thematically in order find specific areas of mathematics that acted as obstacles for the students and investigate how these areas in any way hindered full understanding of the shape of the formula for $a_c$. The following outlines the main findings.

Even though all the participating students had previously been presented to the derivation *Similar Triangles* before the data collection, most students were not able to provide sufficient arguments explaining the shape of the formula for $a_c$. It was especially hard for the students to grasp why the $v^2$ term arises.

When geometrical arguments are used in derivations, the students have a hard time understanding the underlying reasoning and are not able to explain the conditions behind the arguments. This creates a situation of 'accepting' the arguments rather than understanding.

The mathematical fields of infinitesimal calculus and limits are very familiar to first year physics students. Especially, interpreting the operation of limits into physics was natural for the students. Some even understood other arguments by the use of limits. However, students tend to think more mathematically when it comes to understanding time derivatives of vectors and the use of calculus in general.

When the derivations employed approximations, the students doubted the validity of the arguments. This skepticism was present even when the students very well understood and could explain the reasoning behind the arguments of approximation.

In the case of uniform circular motion, the participants demonstrated good understanding of the use of vectors and how they are manipulated mathematically. In fact, the students tend to have a rather mathematical mindset towards vectors and this causes dimensional confusion when different vectors are used in the same figures.

Several derivations try to be more pedagogical in the sense of creating a specific and concrete situation of circular motion, but this come with a trade-off. The students see these types of derivations as arbitrary constructions using arguments vaguely linked to circular motion. The students therefore prefer the more standard derivation using calculus since they know the mathematical algorithm behind each step.

In the light of the overall goal of this project, which was to investigate learning difficulties in physics, it has been shown that physics students indeed face many mathematical challenges. In the attempt of overcoming the first obstacle of understanding the reasons behind the $v^2$ term of the formula for $a_c$, the students faced even more struggles. In a mathematical context, the main difficulties lie in the field of geometry, but the interplay between calculus and vectors causes a lot of issues as well. The fact that many students prefer the mathematically more abstract derivation (*Calculus Derivation*) seems contradictory to the students' lack of ability to interpret the mathematics of the situation into physics. This suggest the core reason behind these obstacles; that there is a great tendency to regard physics and mathematics as two separated fields. The students are able to mathematically manipulate symbols, but when physical reasoning lie behind the arguments, their understandings are challenged. The same is true the other way around. It is not trivial for the students to interpret the physical consequences of mathematical operations.

The variety of didactic problems outlined in this investigation shows that there exist a wide cognitive/academic dispersion among students and this suggests that there is no perfect derivation that secures the optimal learning outcome. However, one thing is certain: in an educational setting one should not expect that students gain a full understanding the first time they are presented to a new type of derivation. It requires a lot of work just to understand the main arguments and this is best provided by activating the students. Finally, an important point is that being able to preform advanced mathematical algorithms does not equal a concrete physical understanding.

# A Interview 1

**Participants: Student 1 and Student 2**
**Interviewer: Simon**

0:00:05.0 Simon: Lige til at starte med, inden vi starter den der, så er det jo den der formel for centripetalacceleration, så når et eller andet objekt bevæger sig i en cirkelbane med konstant fart, så er den acceleration objektet har lig denne her formel $v^2$ over r (tegner og skriver på papir). Øhm, hvad tænker I når i ser den formel? Giver den mening?

0:00:37.8 Studerende 1: Altså den giver mening i form af at, det giver mening, at det er hastigheden, der påvirker. Det bliver intuitivt rigtigt god mening.

0:00:46.1 Simon: Hvorfor synes du?

0:00:47.0 Studerende 1: Øhm, fordi jo hurtigere den rejser, jo mere hastigheds skal der ligesom ændres retning på. Jo mere hastighed er der at ændre retning på. Og hvis man tænker lidt videre, så giver radius også god mening. jo mere - jo større radius jo mere plads har du ligesom til at ændre, jo længere strækning har du til at ændre hastigheden.

0:01:12.7 Studerende 2: Hvis du har en masse på en snor og du gør sådan her (snurrer den rundt) og når radius er større, så kan man lægge mærke til at kraften er ikke så stor. Hvis radius er mindre.. nej.. det ved jeg ikke

0:01:28.2 Studerende 1: Jo du skal bruge mere kraft, når du - tag den - så skal du snurre meget hurtigere.

0:01:36.6 Studerende 2: Ja!

0:01:37.7 Studerende 1: [Begge sidder og tænker lidt] Jeg er ikke sikker på, at det er sådan en effekt - men ja. Og så for at få den i anden, Det er vel dimensionsanalyse. Hvis de her to ting, de skal påvirke, øhh den her, så passer enhederne på den her måde

0:01:52.1 Simon: Super - så det vi skal se nu, det er, fem forskellige udledninger om, hvorfor den ser sådan her ud [formlen for $a_c$]. Øhm, og vi starter med denne her:

0:02:03.8 [Video med udledningen "Ens Perioder" ]

0:06:56.0 Simon: Så er den færdig. Så hvad - var der noget I ikke forstod? Var der noget, der ikke gav mening sådan rent logisk/fysisk?

0:07:05.0 Studerende 2: Til at begynde med havde jeg lidt svært ved at forstå den der periode.

0:07:08.6 Simon: Hvad tænker du på?

0:07:09.3 Studerende 2: Det er bare sådan, hvorfor det var divideret med v. Men det er jo når du har en afstand divideret med en hastighed, som selvfølgelig giver tid.

0:07:17.4 Simon: Ja - mmm.

0:07:18.8 Studerende 2: Og det er jo de to pi r.

0:07:21.4 Simon: Giver det så mening, at den anden [perioden for v vektor] ser anderledes ud? Altså det der, det var perioden for stedvektoren her over. Men for hastighedsvektoren her over, der ser perioden sådan her ud - så den er lidt anderledes. Giver det mening?

0:07:36.9 Studerende 2: Det giver mening, at den skulle være anderledes. Jeg vil faktisk sige, det jeg mest havde lidt problemer med at overbevise mig selv om, det var at den kunne være så ens. Især det der med, at de der to pi, de bare bliver ved med at være der. Fordi, Det giver intuitiv mening, når jeg snakker om en fysisk skive, som noget bevæger sig fysisk rundt på. Men den højre cirkel eksisterer jo ikke. Det er et konstruktion vi har lavet, og så skulle jeg ligesådan sidde og tjekke igennem - okay men jo, det er stadig en svingning. Det er stadig en periode og det er stadig en cirkelbevægelse - af en eller anden imaginær art.

0:08:11.9 Simon: Ja hvad mener du med, at den ikke eksisterer den højre cirkel?

0:08:15.9 Studerende 2: det er ikke noget fysisk du kan se eller noget. Det er bare sådan noget som vi bruger til at tænke på det på.

0:08:19.7 Studerende 1: Ja [nikker].

0:08:20.7 Simon: Så hvis man tegnede et koordinat system oven i den cirkel til højre, ikke. Hvad ville der så være på akserne?

0:08:31.1 [Begge tænker sig om]

0:08:32.1 Studerende 2: x og y?

0:08:34.2 Simon: Hvilke enheder vil der være, tænker jeg på?

0:08:34.8 Studerende 1: Det vil være hastighed. Tror jeg ja. øhm. Ja her over vil vi have sted, her over vil vi have hastighed. Vi har så en hastighed som så ændrer retning [laver armbevægelse], og den ændrer ikke størrelse. Så vi får bare, hvordan dens koordinater ser ud.

0:08:51.0 Simon. mmm. Lige præcis.

0:08:52.5 Studerende 1: Øhmm. og altså jeg mener. Nu hvor jeg sidder med det.

Det er lidt unfair og sige, at den ikke findes [cirkel for v], fordi altså jeg mener. Altså de der v'er, vores hastighedsvektor - de tangentielle hastighedsvektorer - de findes jo heller ikke. Det er ikke fordi, der flyver pile rundt i verden. Og især sådan stedvektoren, den er ofte et reb eller sådan noget. Men den findes heller ikke nødvendigvis. Øhm så sådan [griner lidt]. Den "findes" jo, hvis man kører logik i nogenlunde samme plan som, så er begge cirkler nogenlunde lige virkelige. Men fordi man kan forestille sig bevægelsen, så er det meget intuitivt at forstå den venstre cirkel. Men jeg ved ikke, jeg kan godt lide forklaringen. Den gør brug af det her lidt funky med at - jamen vi kan godt tegne en hastighedscirkel.

0:09:44.6 Simon: Ja. andet spørgsmål det er - øhm - det der med at, den har jo ens fart hele vejen rundt. Så skal hastighedsvektoren stå vinkelret på stedvektoren. Kan i sådan rent fysisk - hvorfor skal den stå vinkelret på? Nå ja undskyld - hvad hedder det - accelerationsvektoren står vinkelret på hastighedsvektoren. Hvorfor skal den det? Det var bare noget jeg sagde, at den skulle.

0:10:18.8 Studerende 2: Fordi, vi sagde jo at den har ens fart. Så det vil sige, at hvis der er en acceleration, så kan den ikke pege i den samme retning som hastigheden, fordi så vil vi jo få en ændring i farten.

0:10:29.9 Simon: Kan du prøve at tegne det?

0:10:30.4 Studerende 2: Så hvis, vi havde en hastighed i denne retning [tegner] og får en acceleration i den her retning - det betyder jo det er en del af accelerationen, som forhøjer ...

0:10:44.4 Simon: Ja så hvad ville der ske med hastighedsvektoren?

0:10:45.6 Studerende 2: Ja altså den vil både dreje og blive større. men her vil vi jo kun have at den drejer.

0:10:53.3 Simon: Ja okay. det er helt rigtigt. øhm Hvad synes I - var der noget der sådan gav noget afklaring på, hvorfor den her formel [$a_c$] ser sådan her ud?

0:11:04.9 [begge tænker]

0:11:09.8 Studerende 2: Jeg tror ikke jeg føler, at jeg har fået en sådan - altså jeg kan godt lide udledningen, for jeg synes, den er fiks - Jeg har lyst til at prøve at huske den, men det er ikke fordi, at jeg nu kigger på den der, og er sådan, det giver perfekt mening. Altså, jeg kan ikke se cirklerne i det endelige produkt - øhm. at nu, jeg føler ligesom jeg har fået viden om, at jamen der er den her cirkelrelation, du kan stille op, sådan du kan få det, men jeg ser ikke om med det samme genkender, at den er udledt for det her forhold, der skal gælde.

0:11:46.8 Simon: Nej okay. Lad os prøve at hoppe videre så. Der kommer en ny her

0:11:59.5 [Afspiller video: Newton polygonmodel]

0:19:30.3 Simon: Så er den igennem. Hvad er jeres umiddelbare tanker?

0:19:38.3 Studerende 2: Den var meget mindre intuitiv.

0:19:40.7 Simon: Hvorfor?

0:19:42.0 Studerende 2: Det ved jeg ikke [griner].

0:19:45.4 Simon: Prøv at tage en eller anden del, som du var - ikke var intuitiv.

0:19:50.8 Studerende 2: mmmm, såå - okay, det giver mening, at vi finder en ændring i hastighed, der peger ind af. Det får vi jo ud af det der trekant. og så ser vi, at summen af alle de der ændringer - ja jeg tror det er den, jeg har problemer med.

0:20:09.8 Simon: Så den - det der med at den bouncer rundt, og så har du en sum af en masse hastighedsændringer?

0:20:15.6 Studerende 2: ja - for de er jo vektorer, så burde ikke bare være lig med nul? for når du går en gang rundt så får du jo den samme hastighed igen, så ændringen i hastighed er vel nul.

0:20:28.5 Simon: Hvor kan du se, at det er en vektor henne [ændringen i v]?

0:20:31.5 Studerende 2: er det ikke en vektor? Okay det er ikke en vektor. [griner]

0:20:33.1 Simon: Nej - det er det faktisk ikke.

0:20:35.9 Studerende 2: Det er ændringen i farten.

0:20:39.4 Simon: Det er bare en skalar.

0:20:42.4 Studerende 1: men det er heller ikke helt bare ændring i farten, for farten er konstant. Den er - ja - jeg sad også lidt med samme tanke, men accepterede så bare, at vi lader som om at cirklen her - hvis vi forestiller os at den er foldet ud til et eller andet, hvor vi gør, at vi godt kan summere dem. Og det er jo heller ikke forkert - altså fordi, det er den mængde kraft, der skal påføres i løbet af en cirkelbevægelse. øhh men jeg har netop også den der, hey men vi bevæger os jo ikke rigtig, og det virker som om, at ting som hastighed og acceleration hører hjemme i vektorform ligesom. Og så derfor det der netop med at sige, så kigger vi på hele den her cirkel. Den er lidt if'y [tvivlsom], men jeg havde ligesom også et indtryk af, at okay altså, men så det er fordi vi laver et lidt nærmest statistisk argument. Vi siger den gennemsnitlige acceleration over en cirkelbue, bliver det her, og så må vi gerne summere absolutte værdier - hvilket er accelerationen. jeg synes taylor approximationen var den jeg var mest ify ved. At sinus til x lig med x, den har jeg hele tiden sådan en nnn [nej følelse].

0:21:56.2 Studerende 2: Det gælder jo kun, når vores n går mod uendelig.

0:21:58.7 Studerende 1: Ja ja, det er rigtigt.

0:21:58.4 Simon: Ja den gælder jo netop kun når phi er meget lille, ikke?

0:22:04.7 Studerende 1: Ja og det er sådan, og ved godt at det er rigtigt, øhmm.

0:22:09.0 Simon: Hvordan forestiller I jer i det? Sådan rent - hvis i skulle tegne det f.eks. Hvordan forestiller i jer den approximation. Kan I sådan forestille jer, hvorfor den gælder, ved sådan en tegning f.eks.

0:22:16.0 Studerende 2: Altså hvis man tegner sinus [tegner sinus funktionen] det er jo ca sådan der. og så vi sådan er meget tæt på nul, så har vi jo, at den approximere en lige linje ret meget. så meget tæt på x lig med nul.

0:22:45.3 Simon: Ja, lige præcis.

0:22:47.0 Studerende 1: Det ja, det er også måden jeg ser det på. Og så husker jeg på, at det bevises ved at lave en taylorudvikling. [begge griner] fordi, altså jeg kan lave mange af de der argument - nu har jeg lyst til at undersøge, om cosinus kan approximeres som 1 minus x.

0:23:09.5 Studerende 2: Nåå - Nej men så vil det jo se sådan her ud [tegner], men den er jo flad der. så-.

0:23:16.4 Studerende 1: Ja, jo. Men i hvert fald ja

0:23:20.0 Simon: Okay. Hvad så med den her oppe [trigonomisk id.], hvad synes I om det?

0:23:19.0 Studerende 2: Ja, jeg havde også problemer med den. Fordi cosinus er sådan her [tegner funktionen] og så er denne her også dens, det er pi, eller er det her. Det der er pi, så er det her pi halve. Så når sinus er maks. er ved pi halve. Og det giver mening, men det vi siger der, er hvis vi forskyder det til... [tænker] hmm.

0:23:56.2 Simon: Prøv at tegne enhedscirklen. og se om i kan få noget ud af det.

0:24:02.5 Studerende 2: [tegner] så det er cosinus og det er sinus.

0:24:07.8 Simon: Så hvordan vil den her se ud i enhedscirklen.

0:24:15.6 Studerende 2: så, nååå. Hvis vi siger det er x, så er to pi minus x det der [tegner]. for det der x.

0:24:28.7 Simon: Lige præcis.

0:24:30.7 Studerende 2: Så har vi sinus næh cosinus ... sinus. [giver lidt op]

0:24:36.6 Simon: så hvad er ens i det tilfælde? på de to akser.

0:24:46.7 Studerende 2: Hvad er ens på de to akser?

0:24:50.7 Studerende 2: Så altså vi har jo, at den her højde er lig, fordi vi spejler jo det jo i princippet.

0:24:56.5 Simon: Lige præcist. Giver det mening så at, at hvorfor den der gælder, sådan rent..

0:25:03.9 Studerende 2: Det er bare at, jeg er sådan vant til at have, cosinus til x minus pi halve.

0:25:10.8 Simon: Okay ja - jaja.

0:25:13.1 Studerende 2: fordi så har vi jo - så bliver x større, og det vil sige, at når x er lig med pi halve, så har vi sinus f.eks. ja [nikker]

0:25:26.6 Studerende 1: Jeg kan huske, at kæmpede meget med den i gymnasiet, fordi skråplan, synes jeg altid, har været mærkeligt. øhm men jeg havde det så okay med den her, fordi jeg kunne godt huske jo men hvis vi forskyder - øhm hvis vi forskyder med pi halve, så ender vi ved den anden trigonomiske funktion.

0:25:46.8 Studerende 2: Det er bare, at jeg aldrig er sikker på, om det, om man skal forskyde med plus pi halve eller minus pi halve.

0:25:57.6 Studerende 1: Ja - er det ikke invariant?

0:26:04.6 Studerende 2: nej fordi hvis du gør det den forkerte vej, så får du minus sinus.

0:26:06.7 Studerende 1: Ja. Ja det er rigtigt. Det tror jeg heller ikke, jeg ville være sikker på i en opgave. [alle griner], så vil jeg være nødt til at tjekke igennem.

0:26:16.4 Simon: Okay, jeg synes, vi skal komme videre. Så skal vi se om jeg kan sætte lyden lidt op.

0:26:32.4 [Afspiller video: direkte udledning]

0:33:00.5 Simon: Første umiddelbare tanker. Var der noget, der var svært at forstå?

0:33:10.2 Studerende 1: Der var meget matematik, men jeg kunne til gengæld godt lide, at vi kommer omkring en mere polær måde at tænke på det på. Altså det der med, at vinkelfrekvensen, den spillede mere ind. Det var meget rart, fordi altså sårn, v i anden gange r, synes jeg også virker som en intuitiv måde at forstå det på. øhm, men det tror jeg også er sådan er en af de måder, jeg generelt har husket den på - altså sådan, v i anden gange r. Det er en dejlig nem måde at huske den på, og så hvis man husker, at ...

0:33:36.6 Simon: Når du siger v, hvad mener du så?

0:33:39.0 Studerende 1: Nåh nej jeg mener omega. Ja men, men når man så husker, at omega det er hastighed over radius, så kan man så bare indsætte det i udtrykket, og finde det på den måde. Så det er meget rart at have de der to versioner af den, som man lidt nemmere kan skifte imellem.

0:33:58.8 Simon: øhm - i den her, der differentierer vi en masse vektorer. Rent fysisk hvad forstår i ved at differentiere en vektor?

0:34:12.4 Studerende 1: Man kigger på de der bitte små ryk.

0:34:13.1 Simon: Du må gerne tegne det, hvis du har lyst.

0:34:13.1 Studerende 1: Hvis du har en vektor, og du så har en vektor [tegner], til et senere tidspunkt. Så kigger du på den her. Vektoren imellem vektorspidserne - basically. Øhm så sådan - på den måde giver det egentlig ok mening - hvis vi kalder den der 1 og den der 2, og så er det her så sådan d dt af v. øhm så på den måde giver det ret god mening, at differentialet af en vektor også er vektor i sig selv. Øhm men ja, jeg tror dog sådan. I forhold til især sådan den første, hvor det der det virkede som et forhold man sådan kan lære at huske og få en eller andet intuition for, så kommer jeg ikke til at sidde og differentiere den der funktion i hovedet, når jeg til en prøve prøver at huske, hvordan det nu er.

0:35:09.5 Simon: er det svært, synes I, at skulle differentiere på den måde?

0:35:15.0 Studerende 2: Altså det er jo egentlig bare cosinus og sinus, man skal differentiere. Så, så længe man har øvet det nok, så er det okay. Man skal også huske selvfølgelig at, man skal holde ens x og y koordinater separate.

0:35:28.0 Simon: Mmm. Forvirrer det her med de der enhedsvektorer? øhm, når i ser dem?

0:35:36.6 Studerende 1: Ikke meget. Jeg tror jeg synes vektorformen vil være mere kompakt og ..

0:35:45.5 Simon: Altså de store parenteser, eller hvad tænker du?

0:35:45.8 Studerende 1: ja, så man har de, stående ovenpå hinanden. men nej, når man skal differentiere det, så er det her meget fint. man skal bare lige holde for øje, at jeg har de her to kasser, og jeg skal ikke tænke på - kan jeg reducere noget ud af dem. Øhm og så er der også lige sådan - jeg kunne forestille mig, at hvis man skulle lave udledningen, så lige det der med, at man skal huske, at det skal ende med at være retningsvektoren, kommer til at være nødvendigt. Jeg sad nemlig og tænke - hov men vi kan jo også faktorisere r ud, men det skal man så lade være med, fordi det kommer til at se pænere ud senere hen. Så der skal man bare lige huske, vi arbejder mod at få det skrevet op til at være retningsvektoren.

0:36:27.1 Simon: Ja det er jo meget klassisk. man skal vide, hvor man vil hen. Så de her to små ligninger her. De kom bare ud af det blå. Er det nemt for jer?

0:36:43.8 Studerende 2: Altså vi har jo haft om vinkelacceleration er lig hastighed er lig cirkelbuen. så det giver mening, at hvis vores vinkel stiger lineært, har vi vores vinkelhastighed gange tid.

0:37:02.7 Studerende 1: Ja jeg synes også sån altså

0:37:02.8 Studerende 2: Men det kan godt være for folk, der ikke har haft det før. Det ved jeg ikke.

0:37:07.3 Simon: Men spørgsmålet er, når man ser det - nåhh så er det sådan her det er. Tænker man så nåh ja - det accepterer man bare eller tænker man over ..

0:37:17.7 Studerende 1: Jeg tænkte det hvert fald lige igennem, for lige at være sådan. Jeg ved ikke, om jeg prøve ikke at genkende dem eller om jeg bare ikke rigtig genkendte dem. Men jeg kiggede lige på dem, nå ja okay de her størrelser - ja okay vi har en theta, så har vi en vinkelhastighed, vi ganger den med noget tid, og så får vi vinkel vi er nået tid. Det giver mening. Øhm

0:37:38.9 Studerende 2: Jeg synes, at du kaldte det en vinkelfrekvens.

0:37:45.1 Studerende 1: eller koefficient.

0:37:45.8 Studerende 2: Ja

0:37:47.0 Studerende 1: men ja, jeg lagde netop også mærke til, at det ikke var hastighed der blev brugt.

0:37:53.5 Studerende 2: Men det giver mening, det ikke er hastighed, der bliver brugt, for vi ganger den med tid.

0:37:56.6 Studerende 1: Ja men jeg...

0:37:57.1 Studerende 2: Nej det gør vi jo også med hastighed. never mind. ja det ved jeg ikke

0:38:00.6 Simon: Jeg er ikke helt med hvad I diskuterer.

0:38:03.6 Studerende 2: Så omega. det er bare sådan, at vi kalder det vinkelhastighed.

0:38:08.2 Simon: Så hvad sagde jeg? Vinkelfrekvens?

0:38:11.0 Studerende 1: Frekvens eller koefficient. Hvilket det selvfølgelig er - altså en koefficient som vinklen ændrer sig med, med henhold til tid. Men der var jeg bare sådan - det er omega. Vi kender den. Den står stadig i vinkeludregning, så ja. Det giver stadig mening. Til gengæld tror jeg omega lig med v over r. Det er en, som sådan, når jeg kigger på den og tænker over den, så kan jeg godt få den til at give mening. Men den er blevet så dybt nedgravet i mig, at det er bare sådan ja. Det er jo, det er en eller anden identitet, som sidder meget dybt fast i mig, så den stillede jeg ikke spørgsmålstegn ved. Men theta stedfunktionen, der var jeg lige sådan giver det mening? men med den anden så var det ja.

0:38:59.2 Simon: Cool. Jamen der er to tilbage. Jeg håber I kan holde det ud. Tag endelig noget slik eller tage mere kaffe. Det er med vilje, jeg går ned i detaljen i det hele, og ikke springer over noget, som det ville være til en forelæsning.

0:39:26.0 [Afspiller video: Månens fald]

0:45:07.0 Simon: Så er vi vist i mål. Første umiddelbare tanker?

0:45:14.1 Studerende 1: Jeg kunne godt lide måden at det sådan handler om fald. Det synes jeg er - jeg ved ikke - det er især noget med planter selvfølgelig. Jeg ved ikke hvor let det er at overføre på andre rotationelle problemer. Men ideen om at alt der er i kredsløb i rummet det sådan falder. Det synes jeg altid er pænt. Øhm og så se i matematikken.

0:45:38.8 Studerende 2: Det jeg synes, var lidt forvirrende er - øhm den der approximation, vi ser når x bliver. Altså vi siger jo faktisk at når delta t bliver meget lille, så bliver x i anden negligibel i forhold til x. Men vi siger ikke noget om den venstre side af lighedstegnet. Fordi jeg tænkte, måske kan det også være at vores v i anden gange vores t i anden bliver negligibel. Eller ca. nul måske. For jeg synes bare, det er lidt forvirrende for vi har to led som går i anden, og vi siger den ene er ca. nul og den anden er ikke ca. nul.

0:46:17.8 Simon: Det forstår jeg godt. Jeg kunne se i begge smilte lidt, da i lugtede lunten der ikke. Hvorfor gjorde i det?

0:46:23.9 Studerende 2: Fordi det er jo fysikkertricket. [griner]

0:46:27.3 Simon: Hvad synes I om det, når I - den kommer jo tit den der. Hvad tænker i om det, når den kommer

0:46:33.4 Studerende 1: Jeg har det sådan lidt skuffet. Det er sådan - Det er sådan, "Ej kunne I ikke lige finde noget bedre?". Sån - var det virkelig en, ja, en approximation af denne her slags, der gjorde det. Og jeg er sådan, altså Tayler det er lige som deeet. Taylor giver kun mening, føler jeg, når vi virkelig laver den fulde uendelighed. Hvorimod sån den der i anden, den er altså sådan lidt men okay, så sætter i en eller anden grænse, og vi siger, så meget her bekymrer vi os om det. og så giver den lidt mening, men man er altså altid sådan lidt if'y. og jeg havde altså ikke engang set det der med t'et, men nu når jeg ser den, så er den også endnu mere sådan. Altså fordi, jeg ved ligesom der skal være en relation mellem de størrelser, så hvis vi lader den ene gå mod nul, så virker det som om, at den anden, når den står i anden, også burde dø til det her.

0:47:35.0 Simon: Mmm. Så øhh - to steder bliver der udskiftet - d bliver udskiftet her med v gange delta t, og x bliver udskiftet med denne her størrelse. Er det underligt, at det er to forskellige ting? Hvorfor er det ene noget med acceleration og den anden er noget med hastighed? er det klart?

0:47:58.1 Studerende 2: Det der en halv a delta t i anden, det er også i princippet en gennemsnitshastighed gange en tid. Så det er jo i princippet det samme. bort set fra at d - når vi kigger på d, har vi jo en konstant hastighed, og når vi kigger på, og når vi kigger på x, har vi ikke en konstant hastighed.

0:48:17.0 Simon: Lige præcis.

0:48:17.9 Studerende 1: Jeg vil også sige det samme. Når vi bevæger os tangentielt til banen, så har vi den der visse mængde energi, der ligesom er låst i systemet. Hvorimod, når vi kigger i den anden parameter, så kan vi hele tiden hente noget energi fra faldet. Så derfor - ja det giver meget god mening. Jeg synes også, det var ret pænt. Der synes jeg også ligesom, at jeg fornemmede, at lige så snart den der x kommer op, så kan se, at så uhh så går alt det her ud, og så er vi tilbage med den rigtige.

0:48:46.2 Studerende 2: Det var måske lidt forvirrende på en måde, for man starter jo bare med de der trekanter, og man ved ikke sådan helt, hvor det går hen, synes jeg.

0:48:56.3 Simon: Du synes den var lidt forvirrende.

0:48:59.5 Studerende 2: Altså jeg forstod den godt nok, men til at begynde med var det sådan - nåhh okay, hvad er det faktisk vi prøver at gøre?

0:49:05.1 Simon: Ja okay. Sidste video er den som der er i jeres egen lærebog. Den måde, jeg ved ikke om i har læst den? Men det kan være det gør den lidt nemmere. Vi får se.

0:49:25.3 [Afspiller video: Ensvinklede trekanter]

0:56:09.7 Simon: Så er vi i mål igen. Hvad synes I om Mazur?

0:56:17.1 Studerende 2: Jeg synes den måde du forklarede det på er meget bedre end den måde Mazur gjorde.

0:56:22.6 Simon: Ja hvorfor? Hvad mener du med det?

0:56:24.1 Studerende 2: Jeg ved det ikke, jeg synes bare det var meget mere - sådan intuitivt - det du forklarede der.

0:56:31.1 Simon: I forhold til, da du læste det i bogen eller hvad? Hvad tænkte du der?

0:56:33.0 Studerende 2: Jeg kan ikke helt huske det. Jeg var lidt forvirret til at begynde med, og her var det meget klart, det er faktisk ens trekanter. Man kan faktisk godt sige, at de vinkler er de samme.

0:56:55.0 Studerende 1: Jeg vil også sige, at jeg forventede ensvinklede ville være et større problem end det blev, fordi jeg har også siddet med skråplan, og jeg synes altid, når man begynder at lave argumenter om, at de der to de er jo ensvinklede, og så kan vi gøre det her. Og så synes jeg ofte, at det er svært at se. Her var det meget lettere - sådan nå ja okay - samme rotation bare med en vinkelret forskydning - de er nødt til at være ensvinklede. Øhm ja og så.

0:57:18.7 Simon: Når man tager sådan en grænseværdi der, når delta t går mod nul. Hvad forestiller I jer så for sådan setup'et. Det fysiske setup.

0:57:26.9 Studerende 2: Vi ser bare at den der theta mindre og mindre og mindre. Så kigger vi på en uendelig lille trekant.

0:57:40.9 Studerende 1: Ja kigger på et eller andet instantant lille rum rundt om der, hvor det sker. Og der føler jeg næsten, sådan - jeg var i hvert fald sådan forholdsvist - jeg ved ikke om det bare er fordi, jeg er naiv - men jeg var forholdsvist overbevist her oppe før vi begyndte at snakke om grænseværdier. Øhm fordi, så var jeg sådan - nåhh ja jo, vi har en eller anden gennemsnitlig ting over en vis størrelse, og den kommer til at være den her størrelse, og når vi lader det gå ned, så har vi en længde - altså når vi lader det gå mod nul, så har vi denne her længde divideret med en tid. Jeg synes især det sidste, det var meget intuitivt. Øhm at lige så snart vi havde de der forhold sat op - jamen selvfølgelig det sker inden i at ændringen i hastighed over tid, den er ændring i placering over tid i anden - øhh divideret med r.

0:58:40.5 Simon: Hvad, øhh, hvad tænker I, forskellen på en øjeblikkelig acceleration og en gennemsnitlig acceleration. Hvad tænker i om det?

0:58:52.8 Studerende 1: Den øjeblikkelige findes ikke rigtigt. øhh igen .. [griner]

0:59:02.3 Studerende 2: Jeg ville have sagt at den gennemsnitlige ikke findes. [begge griner]

0:59:05.4 Simon: Det er interessant - det skal vi lige have argumenter på banen omkring.

0:59:08.9 Studerende 1: Jeg vil - altså sådan fordi - der er jo ikke sådan øjeblikke. Vi måler altid over specifikke størrelser. øhm men jeg er så enig i at så til gengæld så den instantane, så er det altid den man har lyst til at regne med. Fordi den gennemsnitlige der er sådan - der er der alle mulige problemer i, at de går ud med hinanden og sådan noget. øhm så man har generelt altid lyst til at prøve og have alting som en eller anden pæn linje, som man kan parameterisere, og så sige, her var alle de instantane ting, der bliver til denne her, til det her gennemsnit.

0:59:40.4 Studerende 2: Ja altså jeg synes, at den instantane acceleration er det der findes, fordi at til et hvert tidspunkt har man jo en hastighed som ændrer sig en lille smule og det er jo den instantane acceleration. Men hvis man tænker på en gennemsnitlig acceleration, så er det jo bare, sådan hvis vi kun måler i på et tidsinterval og så ser hvad der, er sket, det giver jo ikke sådan - ja fordi har nemlig at ting går ud med hinanden, når man kigger på den gennemsnitlige acceleration. Derfor synes jeg det giver mere mening, at tænke på at det er den instantane der findes.

1:00:20.3 Studerende 1: Jeg tror også det er eksperimentalisten i mig der snakker.

1:00:25.7 Simon: Nej det er slet ikke uvæsenligt.

1:00:37.8 Studerende 2: Men øhh. Vi har jo, vi kigger jo på størrelsen af delta v divideret med størrelsen af delta r. Og mit spørgsmål er her, hvorfor vi ikke bare kan gøre det med vektorerne? Hvorfor skal vi kigge på størrelsen.

1:01:02.3 Studerende 1: Vektordivision er ikke så godt defineret.

1:01:05.6 Studerende 2: Ja altså det jeg tænkte, er at, når man dividere komplekse tal ikke også. Så har man jo et z divideret omega og z divideret med størrelsen af omega i anden. og man kunne jo sagtens gøre det samme her, hvor man siger: Delta v i anden gange delta r [jeg er usikker på, hvad der bliver sagt er: men han tegner så se lige på det]. tænker jeg .

1:01:28.9 Studerende 1: Dividere deres prikprodukt med størrelsen med den ene i anden?

1:01:32.0 Studerende 2: Fordi så får man nemlig også at, fordi det der delta r - så får man nemlig også det der minus, at det peger i den rigtige retning. Men jeg ved ikke om man kan gøre det.

1:01:44.8 Simon: Det ved jeg heller ikke. Det er da interessant.

1:01:49.4 Studerende 1: Ja det er en spændende ide. Det jeg i hvert fald også kan nikke genkendende til, det er sådan, der var, jeg kan ikke huske hvilken en det er. Der var en af udledningerne, hvor jeg hvert fald sad og sådan, nej nej vi har et minustegn. Lad være med at tage absolutværdien. Det der det er information. Hvilket er sådan. Det er sådan, at formlen jo bare skal kigge på størrelsen. Øhm men det er lidt pænt når man - nåh jo det var den der direkte udledning - hvor vi havde det der minustegn fra omega. Og det virkede så pænt, da det var der inde. Så ved du jo - nåh ja det er nogle pile og så ved jeg at den her pil altid er modsatrettet.

1:02:31.8 Simon: Mmm. ja. Nu kommer vi så til det store spørgsmål: hvilken kunne i bedst lide? og hvorfor?

1:02:39.1 Studerende 2: Den første i hvert fald.

1:02:42.2 Simon: Den kunne du bedst lide? Det var ...

1:02:45.6 Studerende 2: Den med de to cirkler.

1:02:45.1 Simon: Hvorfor synes du den var god?

1:02:47.1 Studerende 2: Jeg synes den var meget smuk. [griner].

1:02:49.6 Simon: Ja - hvorfor?

1:02:49.4 Studerende 2: Jeg ved det ikke. Det er bare sådan at man faktisk kan komme til det der hastighedscirkel og hastighedsvinkel og så er det jo selvfølgelig acceleration, der peger ind ad [tegner imens]. Jeg synes det er meget smukt.

1:03:06.4 Simon: Har det noget at gøre med, at du synes matematikken - nu var det jo klart den med den mest simple matematik -

1:03:11.7 Studerende 2: Måske er det også det, at det er meget overskueligt.

1:03:16.7 Studerende 1: Men jeg vil også sige, det der med, den reneste matematik. Vi behøvede ikke at lave taylorudvikling, vi behøvede ikke at approximere sinus - det var sådan alle de der ting med at tage - og det er jo selvfølgelig fordi, den ikke rigtigt tage udgangspunkt i noget sådan reelt. Den siger bare, hvis du har et eller andet, der bevæger sig i en cirkel, så tegner du hastighedscirklen ved siden af, så laver du nogle resonomenter. øhm men det gjorde ligesom også sådan, at hele formlen faldt perfekt ud af den. Der var ikke noget hvor vi lige var nødt til at - og nu tager vi absolutværdien, nu gør vi det her for at få den til det vi gerne vil have. Det var JA. De der to cirkler fortalte dig ligesom bare, det er sådan det hænger sammen. Uden vi behøvede at bekymre os om, hvad vil instantan bevægelse og sådan noget sige. så det var en meget klar overgang.

1:04:15.0 Simon: Hvorfor en kunne i så mindst lide? og hvorfor? ... Skal jeg lige sige, hvad vi har været igennem. Nummer to var den der newtons n-kant, så kørte vi noget direkte udledning tror jeg, hvor det var rent kalkulus, så var der den med månen der faldt ind mod jorden. Og så var der Mazurs ensvinklede trekanter til sidst.

1:04:48.6 Studerende 1: Jeg startede med at være glad for månen, fordi månens fald var dejligt illustrativt. Men så var der meget matematik, øhm og noget af det, hvor vi - nummer et bruger den der ting med at sige, at andenordensleddet forsvinder og førsteordens leddet bliver der. øhm og det der med, at der stadig var et t på venstre side, fordi vi kigger ikke på venstre side lige nu. Øhm som jeg tror afgjorde, at det var min mindste favorit. øhm og det var også lige som om at mad bevægede sig igennem to meget forskellige - ligesom måder at tænke på det på. Man starter med noget meget praktisk, som var en planet og en jord der forsvinder, og så flyver månen lidt videre, og så kommer jorden tilbage, og så begynder den at falde. Altså den startede fra en ret stor ting og så begyndte vi at regne tilbage og prøvede at passe det ind. Og vi fik rigtig mange led som vi så skulle skaffe os af vejen med ved at sige, nu går x mod nul og sådan. Så den virkede på den måde sådan - større, mere rodet og som om den havde en masse unødvendige ting i sig. Ja.

1:06:01.1 Studerende 2: Jeg tror den jeg mindst kunne lide var Newtons. Fordi - mest fordi på grund af den der sum af delta v'er, hvor jeg ikke sådan er sikker på, hvad det betyder endnu. Fordi det ikke er lig med nul, fordi nu når vi kører hele vejen rundt. ja.

1:06:16.0 Simon: Ja fordi der lige var noget matematik, der ikke lige gav og der kombineret med fysik ikke rigtig gav mening?

1:06:19.3 Studerende 2: Ja, men det kan være jeg bare skal kigge på det igen, og så giver det selvfølgelig mening. Og ellers ville det også være den samme med månen. Fordi, den samme grund med at det der delta t i anden.

1:06:31.5 Simon: Ja den køber i ikke helt.

1:06:32.1 Studerende 2: Ja at det ikke går mod nul.

1:06:38.2 Simon: Ja det er helt i orden. Så lige en aller sidste ting. Som i faktisk selv har nævnt. Det er det her med, at man kan skrive centripetalaccelerationen sådan her, men man kan også skrive den på den måde du sagde. Denne her ikke. Den øverste der ligner det at, accelerationen er omvendt proportional med radius og her der ligner det, at den er proportional med. Er det et problem?

1:07:06.8 Studerende 2: Altså hvis man siger her, at det er proportionalt med radius, så glemmer man jo, hvad det der vinkelhastighed betyder. Fordi det er jo i virkeligheden v divideret med r.

1:07:19.6 Simon: Så du synes ikke det er et problem?

1:07:19.4 Studerende 2: Jeg synes faktisk, det her er - jeg kan bedre lide det her, for så har man, så kan man jo se - fordi det er jo faktisk minus og så har man jo, altså, radiusvektoren og så kan med det samme se i hvilken retning det peger, og det kan man jo ikke med denne her. Ikke så nemt i hvert fald.

1:07:40.3 Studerende 1: Jeg synes også denne der er dejligt let at orientere sig i. At sådan netop fordi du har de her vektorer, du ved præcis hvor r-vektoren er. Det er ret intuitivt, at nåh jamen omega følger cirkelbanen, hvorimod i denne der, der er jeg altid nødt til at tænke, hov men hvilken v er det vi tænker? Nåh jo det er en eller anden tangentiel hat jeg putter på min cirkel, og så kan jeg begynde at regne på den. øhm så sådan, den der virker som en naturlig måde at falde ud. Men jo, jeg bar ikke opmærksom på problemet før, og jeg kan selvfølgelig godt se, at sådan, at hvis man gerne vil sætte sig ned og overveje hvad påvirker min acceleration. hvis man så sidder med den der og prøver skrue på variablerne og lader som om, de er helt uafhængige af hinanden. Hvad man ofte gør. Så kan jeg godt se at det kunne blive et problem. Jeg tror afgjort - jeg er i hvert fald glad for, at jeg kan huske at skifte imellem dem her. Fordi, ellers kunne jeg godt se mig selv lave sådan en fejl.

1:08:39.1 Simon: Cool. Jeg tror sgu vi er igennem.

# B Interview 2

**Participants: Student 3 and Student 4**
**Interviewer: Simon**

0:00:04.2 Simon: Lige inden, vi går i gang med den her video, så er det jo den her formel. $a_c$ lig med v i anden over r, som er den acceleration et eller andet objekt har, når det bevæger sig uniformt rundt i en cirkel. Når i ser den her formel, giver det så god mening, at den ser ud som den gør? Hvad tænker i om den?

0:00:30.0 [begge tænker]

0:00:32.0 Studerende 4: Ikke umiddelbart for mig. Altså jeg tror på den, men ...

0:00:38.6 Simon: Ja du tror på den. Giver det mening at der bliver divideret med r f.eks.

0:00:44.6 Studerende 3: Altså, jeg tænkte bare, hvis man prøvede at lave sådan lidt Pythagoras over det, så kan jeg godt få det der i anden, men jeg kan ikke få resten - synes jeg ikke.

0:00:56.1 Simon: Nej okay - men hvad - f.eks. hvis r bliver et større tal, hvad sker der så med a?

0:01:04.2 Studerende 4: Den bliver mindre.

0:01:04.1 Simon: Giver det mening?

0:01:07.8 Studerende 4: Det synes jeg ikke.

0:01:10.5 Simon: Hvorfor ikke?

0:01:14.2 Studerende 4: Altså hvorfor skulle afstanden have noget at gøre med accelerationen?

0:01:18.4 Simon: Hvad så med, hvis hastigheden eller farten for objektet, hvis den stiger, hvad sker der så med accelerationen?

0:01:26.5 Studerende 4: Den stiger eksponentielt.

0:01:30.5 Simon: Giver det mening?

0:01:29.2 Studerende 4: Ja det synes jeg giver mere mening

0:01:32.2 Studerende 3: ja ja det er...

0:01:35.6 Simon: Hvorfor - hvorfor giver det mere mening?

0:01:38.5 Studerende 4: Fordi accelerationen det er jo en stigning i hastighed. Eller en ændring i hastighed.

0:01:44.5 Studerende 3: Så det giver jo meget god mening.

0:01:48.5 Simon: Altså hvis man har højere hastighed så er der højere acceleration?

0:01:50.1 Studerende 3: Mmm...

0:01:51.9 Simon: Super. Lad os prøve at se om, om det giver mere mening efter nogle af de her videoer. Vi starter med denne her, og som sagt så stopper I den bare, hvis I har lyst.

0:02:03.7 [Afspiller video - Ens perioder]

0:06:58.4 Simon: Det var en udledning. Hvad synes I om den sådan bare umiddelbart? Gav det mening?

0:07:06.6 Studerende 3: Det er ikke en udledning, man har set før, vil jeg sige. Altså den der måde at være og lave flere diagrammer og sådan noget. Det er egentlig - altså ja en ny måde, så det er egentlig meget fedt.

0:07:16.0 Studerende 4: Ja jeg tror ikke, den ville være så hjælpsom for mig. Jeg synes, det er lidt uoverskueligt, at skulle sammenligne to i stedet for sådan - som regel så har man sådan nogle mere matematiske udledninger, som jeg synes er lidt mere trivielle at se. Altså når du når ned til at sammenligne de to perioder, synes jeg det bliver lidt mere overskueligt, end du bare tegner de der hastigheder vinkelret på r-vektoren og accelerationen på ...

0:07:44.2 Studerende 3: Hvorfor er det egentlig at accelerationen er vinkelret på?

0:07:46.1 Simon: Ja det kan vi prøve at snakke om. Giver det mening - altså jeg siger bare sådan ud af det blå at accelerationen skal være vinkelret på hastighedsvektoren.

0:07:56.2 Studerende 3: Ja den synes jeg ikke var så triviel.

0:07:58.5 Simon: Nej...

0:07:59.0 Studerende 4: Det er det med, at den så ændre retningen på øhm, på øhm, på øhm hastighedsvektoren - kan du huske det vi havde med, at hvis den var ganget på, så blev den længere, og hvis den var vinkelret på så ændrede den bare retningen.

0:08:16.5 Studerende 3: Nej [griner].

0:08:18.6 Simon: Nå men det er faktisk rigtigt. Det du siger det er, at når den er vinkelret på, hvad sker der så med hastigheden?

0:08:25.2 Studerende 4: At dens vinkel ændrer sig i forhold til udgangspunktet.

0:08:29.4 Simon: Og hvad sker der ikke med den?

0:08:30.7 Studerende 4: Den bliver ikke - altså størrelsen er den samme.

0:08:34.0 Simon: Lige præcis. Og jeg sagde faktisk i starten, at det var en konstant fart, den bevæger sig rundt med. Så hvis den ikke havde været vinkelret på, så ville det ikke have været konstant fart - giver det mening?

0:08:52.2 Studerende 3: Ja - Det var bare den første cirkel, den havde man ligesom haft om før, men den anden cirkel den var underlig.

0:08:56.8 Simon: Ja for det ville have været det samme - hvad ville der ske, hvis hastighedsvektoren her ikke var vinkelret på stedvektoren?

0:09:08.3 Studerende 4: Spørger du mig? Altså så ville den jo ændre størrelse.

0:09:17.1 Simon: Og hvad ville der så ske med det der objekt, der bevæger sig rundt?

0:09:18.7 Studerende 4: Så ville den have ændret radius.

0:09:22.1 Simon: Ja lige præcis så ville den have lavet en anden type bane.

0:09:22.2 Studerende 3: Ja.

0:09:26.1 Studerende 4: Men det giver jo også lidt mening, at det er altså at det er accelerationen, der ændrer på hastigheden, og det er hastigheden, der ændre på stedvektoren. Men jeg synes bare ikke, at det er noget vi har set før - at det bliver skrevet på den måde i hvert fald.

0:09:42.3 Simon: Der står to perioder her ikke - giver det mening, at formlen for dem er forskellig?

0:09:46.3 [begge]: Ja.

0:09:47.9 Studerende 3: Det er bare forskellige måder man definere de der vektorer hedder - altså du kunne have kaldt dem alverdens ting og sager.

0:09:58.9 Simon: Ja okay, men giver det mening så at de to cirkler lige her ikke er lige store?

0:10:05.2 Studerende 3: Ja den tænkte jeg egentlig over. Det er vel fordi, at den skal passe til størrelsen af de vektorer, der var før.

0:10:15.5 Simon: Ja hvad tænker du? Hvad skulle passe?

0:10:16.5 Studerende 3: Jeg tænker, at radius er taget ud fra hvor stor - ja - længden er af hastighedsvektorerne der var før.

0:10:28.1 Simon: Ja lige præcis. Den her den er netop radius her over, som du siger, så derfor - jeg kunne bare have tegnet den her længere, så kunne den godt have været lige så stor.

0:10:36.8 Studerende 3: Jo men altså - jeg tænker også bare - for at være lidt mere realistisk, så er hastigheden vel ikke sådan lige så stor som længdevektoren. [griner] man har bare aldrig set, at den skulle være lige så stor eller større. Det er sådan rent proportionelt.

0:10:55.4 Studerende 4: Jeg synes heller ikke, at det er helt indlysende, at deres perioder skulle være ens. Eller hvorfor de skulle det.

0:11:01.0 Simon: Nej, det er jo ret essentielt for at denne her giver mening overhovedet, ikk?

0:11:04.2 Studerende 4: Ja.

0:11:09.8 Studerende 3: Jeg tror også det er fordi, at vi ikke har haft så meget om perioder. Altså i gymnasiet synes jeg.

0:11:17.1 Simon: Hvorfor burde de ikke være ens?

0:11:21.0 Studerende 4: Nej det giver jo faktisk meget god mening, fordi v den ændrer sig jo sammen med r og v1 den hører jo til den ene v1 og de ændrer sig samtidig. Det giver selvfølgelig meget god mening.

0:11:34.4 Simon: Så har objektet både position, en hastighed og en acceleration samtidig?

0:11:39.2 Studerende 4: Hvad?

0:11:40.6 Simon: Har det her objekt alle tre ting samtidig - altså både en position, en hastighed og en acceleration?

0:11:50.4 [begge]: Ja.

0:11:55.8 Simon: Ja, og det vil den også have her oppe. På den måde så følger de med hele tiden. Sidste spørgsmål til denne her, det er. Hvis vi nu tegnede et koordinatsystem, der lå lige præcis oveni her og oveni her - hvad tror I så, der vil være af enheder på akserne over i denne her f.eks.?

0:12:19.3 Studerende 3: Øhh - meter [laver en vandret armbevægelse] og meter pr. sekund [laver en lodret armbevægelse]. Tænker jeg - nej jeg ved det ikke.

0:12:26.1 Simon: Hvad så med denne her? Hvis vi tegnede et koordinatsystem her.

0:12:35.1 Studerende 3: Altså hvis det andet var rigtigt, så ville jeg sige meter pr sekund [lodret] og meter pr sekund i anden [vandret]. Hvis det er rigtigt [griner usikkert].

0:12:47.1 Studerende 4: Jeg ved ikke hvad der skal være på akserne.

0:12:52.2 Simon: Nej det er også lidt forvirrende. Hvorfor er det forvirrende?

0:13:03.8 [begge tænker i lang tid]

0:13:06.6 Simon: Fordi hvad for en enhed har den position her?

0:13:10.5 Studerende 4: Meter.

0:13:15.2 Simon: Ja, og hvilken enhed har denne her?

0:13:15.7 Studerende 4: Meter pr sekund.

0:13:17.0 Simon: Lige præcis, så hvis det skulle være inde i samme koordinatsystem.

0:13:20.9 Studerende 3: Nåh så tæller tid. Skulle det ikke? være sådan [vandret bevægelse].

0:13:26.4 Studerende 4: Jeg ved det ikke. Jeg ved ikke helt hvad det er du gerne vil have.

0:13:29.8 Simon: Nej, det er bare, jeg prøver bare at få jeres tanker ud. Men det er også okay.

0:13:39.1 Studerende 3: Er det ikke, at den ene af akserne, nu ved jeg så ikke hvad for en der så skal være y eller x aksen, men den ene skal være meter og den anden skal være tid. Sådan så hældningen bliver væk sådan at det vil være, at der vil være meter pr sekund - så det må være meter ud af y-aksen og tid ud af x-aksen.

0:14:00.1 Simon: Ja - måske - [griner]. Skal vi prøve at gå videre til en mere?

0:14:16.2 [Afspiller video - Newtons polygonmodel]

0:21:53.3 Simon: Nå - hvad synes I?

0:21:55.3 Studerende 4: Jeg synes, den var ret uoverskuelig.

0:21:58.8 Studerende 3: Jeg tænker sådan, unødvendige beregninger og ting man lige skal vide, før man kommer ned til...

0:22:07.0 Studerende 4: Man skal virkelig have styr på sin sinus og cosinus...

0:22:11.4 Studerende 3: Ja det er mere sådan ...

0:22:11.7 Studerende 4: Og elastisk stød og ja. Der er mange ting, man skal holde styr på og lige forstå sådan, før man kan forstå noget af beviset.

0:22:21.3 Simon: Hvor synes I det gik galt først?

0:22:24.0 Studerende 4: Altså jeg synes allerede, at det blev uoverskueligt, da man - allerede før du gik i gang med at snakke, så så man den der, hvor man sad og tænkte - åhh nej der sker et eller andet. Der kommer til at ske et eller andet lige pludselig.

[griner].

0:22:31.1 Simon: Altså de tog tegninger der?

0:22:33.2 Studerende 3: Mine var [problemer?] altså, vi kan jo godt finde ud af det der med vinkler og sådan noget, men det er bare lige så snart, at man begynder at få sådan, altså tegn summen op og så er det bare sådan - okay ja... Det er jo nok rigtigt nok, men man havde bare ikke lige selv var kommet der hen. Den er ikke så triviel - ja det synes jeg ikke. Det giver mening, når man ser den, men det virker som en masse rigtig unødvendige matematik.

0:22:56.4 Studerende 4: Også hvis man kiggede på den forrige, som var så simpel i forhold til denne her.

0:23:00.6 Studerende 3: Og man kommer ned til det samme jo. Altså det med at vi skal ind og have perioden og sådan.

0:23:05.8 Studerende 4: Ja, det er sådan lidt unødvendigt, synes jeg.

0:23:09.3 Simon: Mmm... Lad os lige prøve at tage nogle af delene. Øhm f.eks. så laver jeg den der lille vinkel approximation. Har I set den før?

0:23:17.4 Studerende 3: Nåh ja - øhm ja, men hvordan kan vi, altså, når man bare ser vinklen her over, hvordan kan vi sige, at vinklen den er så lille, så den kan vi se bort fra. Det kan vi vel kun, hvis vi siger, at der er så mange stød, så den bliver så lille. Altså ud fra den illustration kan man jo ikke gøre det.

0:23:37.1 Simon: Nej nej, men så siger jeg også, at man skal forestille sig, at det er en n-kant, med uendelig mange stød inden i, ikk. Og så derfor, så må den her blive rigtig rigtig lille, og så bruger jeg den. Men giver det mening, at det der med, at sinus til en meget lille vinkel bare er lig med vinklen? Hvad tænker I, når I ser det? Det må komme en gang i mellem til forelæsningerne også.

0:24:01.5 Studerende 3: Jeg tror bare, vi har lært det - og sige ok.

0:24:06.3 Simon: I accepterer det - I forestiller jer ikke et eller andet inde i hovedet om, hvorfor det gælder?

0:24:11.0 Studerende 4: Nej men altså, hvis man kigger på enhedscirklen, så [tegner] hvis vi tager vinklen i forhold til der, så har vi jo sinus her over, som vi aflæser, så jo mindre den her bliver, så går den jo mod nul, så går sinus jo også mod nul.

0:24:29.4 Simon: Ja, det er en god måde at tænke det på. Synes jeg også.

0:24:35.0 Studerende 3: Det har jeg godt nok aldrig tænkt men ja.

0:24:37.6 Simon: Så er der også denne her oppe. Der skriver jeg, at cosinus til pi halve minus en eller anden vinkel, det er bare lig med sinus til vinklen.

0:24:47.4 Studerende 4: Den var jeg ikke med på.

0:24:47.0 Studerende 3: Nej. Det er en regneregel, som jeg tror... Vi har ikke stødt på den.

0:24:53.4 Simon: Når I ser sådan en regneregel der, i f. eks. til en forelæsning eller nu her. Hvad tænker I så, når den popper op?

0:25:01.6 Studerende 4: Jeg synes at i den her video, der hang man sådan lidt ved den, og så fik man ikke lige hørt efter hvad der skete efter det.

0:25:12.2 Studerende 3: Jeg accepterer det bare når det er en regneregel.

0:25:16.2 Simon: Hvad hænger du ved? Prøver du sådan at visualisere dig hvorfor den ser ud som den gør?

0:25:19.3 Studerende 3: Nej, jeg prøver sådan at se om jeg kan genkende den og sådan. Altså om jeg har hørt det før og her, der kan jeg ikke genkende den. Og så tænkte jeg sådan, er det noget vi har haft om eller ja.

0:25:29.5 Simon: Vi kan faktisk prøve med enhedscirklen her også, der kan man faktisk ret nemt lige visualisere sig om, hvorfor det gælder. Fordi hvis vi har - kan I huske hvor pi halve er henne på enhedscirklen? [begge peger] Ja det er helt oppe toppen. Og hvis vi så trækker en eller anden vinkel fra, hvor kunne vi så være henne, hvis vi er her henne og trækker lidt fra.

0:26:00.8 Studerende 3: [tegner] så tænker jeg, at vi er sådan her over.

0:26:03.2 Simon: Lige præcis. Og hvor måler vi så cosinus henne til den vinkel?

0:26:07.9 Studerende 4: [peger]

0:26:08.5 Simon: Ja så der er en eller anden stiplet der nede. Og hvor er vi så henne, hvis vi kun ser på den vinkel, og det så er sinus? Hvor er vi så henne? Her der tog vi pi halve minus den der vinkel, så er vi her henne. Hvis vi nu ser på sinus kun til den vinkel, hvor er vi så henne?

0:26:35.4 Studerende 4: Så er vi vel her nede? [tegner]

0:26:41.0 Simon: Ja, og hvor måler vi sinus henne? [Peger nr 4] Giver det mening, at de to ting skulle være ens?

0:26:50.2 Studerende 4: Ahh, ja. Altså den afstand er lig den afstand.

0:27:00.0 Simon: Lige præcis. Så der er sådan en symmetri omkring pi halve ikke, for cosinus og sinus, så den vil ligge her. Så her nede har vi jo den vinkel, men her oppe er den vinkel også. Så det er egentlig bare det. Men ja det er jo, altså man skal vi lige. Der kommer mange af sådan nogle trigonomiske identiteter, som man skal holde styr på. Så var der vist lige et lille spørgsmål - nåh jo. Det her med at den totale ændring i hastighed, når vi har det her elastiske stød. Giver det mening hvorfor det var to gange v gange cosinus til theta? Når den bare støder en gang.

0:27:48.4 Studerende 4: Altså ud fra tegningen så ja, men sådan fysisk set synes jeg ikke.

0:27:50.9 Simon: Hvorfor giver det mening ud fra tegningen?

0:27:52.2 Studerende 4: Altså du havde de to v cosinus til theta på den ene side og på den anden side, og så ganger du dem sammen - nej vent lægger dem sammen.

0:28:03.2 Simon: Så hvorfor skal der være to? Hvorfor er det ikke bare en?

0:28:14.0 Studerende 4: Jeg ved det ikke.

0:28:18.7 Simon: Kan I se hvilken retning ændringen peger i? Vi har noget der først pegede i den her retning, og så efter stødet så peger det faktisk i den her retning. Så den totale ændring hvilken retning, vil den pege i, tror I? Først peger den ned, og så sker der noget, og så peger den op.

0:28:54.5 Studerende 4: Det er som om det gik ud med hinanden.

0:28:57.3 Simon: Ja det er lidt det. Men hvis vi nu kun ser på den ene side, hvis vi skulle få den til at forsvinde. Hvad for en pil skal vi så have?

0:29:13.7 Studerende 3: En lige stor og modsatrettet?

0:29:13.9 Simon: Lige præcis. Og hvad er der så? Hvis vi satte en lige så stor og modsatrettet oven på den der, hvad er der så?

0:29:23.0 Studerende 3: Ingen ændring?

0:29:25.1 Simon: Ja, så er der hvert fald ikke nogen hastighed tilbage.

0:29:28.2 Studerende 3: Ja okay.

0:29:28.1 Simon: Så ville de lige som udligne hinanden. Så var vi på nul hastighed. Men vi vil jo gerne have den op og være så stor, så hvad skal vi så lægge til bagefter? Først så har man denne, så lægger vi en pil helt magen til oven på den. Så er den annulleret. Så er vi bare her og der sker ingenting, men vi skal faktisk have den til at komme der op, så der skal være en hastighed tilbage.

0:29:55.1 Studerende 4: Så der er derfor der skal være to eller hvad?

0:29:57.5 Simon: Lige præcis. Den første lige som bare annullere den hastighed den havde til at starte med og den anden får den så skud op i samme hastighed som den havde bare modsatrettet. Så den totale ændring i hastighed, hvad for en retning peger den.

0:30:18.2 Studerende 4: Op ad?

0:30:19.3 Simon: Ja den peger nemlig op af. Hvor peger det hen her nede?

0:30:25.9 Studerende 3: Ind mod centrum.

0:30:30.5 Simon: Lige præcis. Lige som?

0:30:30.7 Studerende 3: Accelerationen.

0:30:35.5 Simon: Det håber jeg giver lidt mening. Men I synes det var en lang video. Så kommer der en ny video her.

0:30:55.6 [Afspiller video - Direkte udledning].

0:37:25.1 Simon: Så er vi igennem endnu en.

0:37:27.9 Studerende 3: Den var meget god.

0:37:27.4 Studerende 4: Ja den kunne jeg også godt lide.

0:37:28.9 Simon: Hvorfor?

0:37:29.4 Studerende 4: Den var øhh, den var - hvad hedder det - det var også igen meget matematisk, i forhold til de andre. Men stadigvæk også visuel med cirklen at se på, og hvordan man har de der sinus og cosinus fra.

0:37:42.7 Studerende 3: Det er meget hvad man har haft om før. For alt det der med differentiering, det sidder heldigvis på rygraden. Der er vi hjemmevant.

0:37:52.1 Studerende 4: Mmm, og jeg tror også det er denne her man har i gymnasiet.

0:37:55.7 Studerende 3: Ja det. Ja det lyder meget korrekt. Der er det bare det der med at have tungen lige i munden, hvis man selv skal huske, at sætte de der vinkler på, og hvordan de skal sættes ind. Men det der med at man får at vide hvordan sammenhængen er nede i hjørnet - Godt. Og så bruge sin helt almindelige - ikke noget nyt - bare helt almindelig differentiering af de helt almindelige sammenhænge man kender, så.

0:38:24.7 Simon: I synes ikke sådan en kæderegel der nede er svær?

0:38:25.2 Studerende 4: Nej den har vi brugt så meget tid på i mat intro.

0:38:30.7 Studerende 3: Og den har man jo også brugt i gymnasiet.

0:38:37.0 Simon: Så et spørgsmål. Alle de her, r og v og a, de er jo vektorer. Og her står der jo faktisk, at vi differentiere r vektoren med hensyn til tiden. Hvad forstår I ved sådan en vektor, der bliver differentieret? Og vi må gerne tegne, hvis I har lyst.

0:38:58.9 Studerende 3: Altså en vektor har jo bare en forskrift, når man skriver det op på denne der måde. Så er det jo ligesom - ja det er jo bare en funktion. Bare en lineær funktion så, der tænker jeg bare at det er som at gå tilbage til.

0:39:10.7 Simon: Ja som du ser det som dens komponenter, du bare differentiere? Men kan I forestille jer en vektor, der bliver differentieret sådan rent visuelt? Hvis man tegner en pil.

0:39:23.2 Studerende 4: Jeg kan ikke.

0:39:24.7 Studerende 3: Altså nej. Vi ved jo hvad de her lige præcis bliver til fordi, altså det er man blevet tæsket igennem med stedvektor og med hastighedsvektor og sådan.

0:39:38.5 Studerende 4: Den visuelle - skal man ikke, som du sagde bare sammenligne den med en lineær funktion.

0:39:48.8 Simon: Så hvis jeg tegner f.eks. denne her vektor. Så vil jeg gerne differentiere den med hensyn til tiden. Hvis nu f.eks. hvis nu at resultatet gav nul. hvad ville der så være sket med den pil her?

0:40:12.7 Studerende 4: Den vil bare være nul vektor?

0:40:17.7 Simon: Så den ville bare forsvinde?

0:40:18.6 Studerende 4: Ja.

0:40:20.9 Simon: Så nulvektor.

0:40:22.7 Studerende 3: Altså man kan se på tegningen, at lige meget hvad, så sådan, bliver vektoren mindre for hver gang den bliver differentieret, og så skifter den retning.

0:40:34.4 Simon. Du tænker på de her tre?

0:40:39.0 Studerende 3: Men også bare når man ser visuelt på cirklen, så kan man jo se, at de bliver jo en del mindre for hver gang.

0:40:48.4 Simon: Så et andet spørgsmål. De her, de kom også bare lidt ud af de blå. Jeg sagde bare at, fordi den bevæger sig med konstant fart, så må vinklen vokse, sådan der. Så den her theta her - ligningen for den, den ser sådan der ud. Vinkelhastigheden gange tiden. Giver det mening.

0:41:09.2 Studerende 4: Det synes jeg. Det er ligesom bare normalt - hvad hedder det - stedfunktion med at den bevæger sig med hastigheden gange tiden. Altså til et vist tidspunkt er den hastigheden gange tiden.

0:41:22.7 Simon: Hvad så med den neden under? At vinkelhastigheden er lig med farten divideret med radius. Giver den mening?

0:41:37.9 Studerende 3: Jeg tror bare, det er en ting, jeg har accepteret.

0:41:43.6 Simon: Sådan ender det jo også nogle gange med at blive ikke, fordi man ser de der ting hele tiden.

0:41:52.1 Studerende 3: Nogen gange får man bare at vide, at det her, det kan I finde ud af senere.

0:41:57.1 Simon: Nå men den siger jo at vinkelhastigheden, som er den rate som vinklen vokser med ikk, den siger at, hvis hastigheden af objektet bliver større, hvad sker der så med den?

0:42:07.0 Studerende 3: Så stiger vinkelhastigheden.

0:42:08.7 Simon: Ja. Giver det mening? og hvorfor?

0:42:10.0 Studerende 4: For den stiger jo sammen med hastigheden.

0:42:19.2 Simon: Ja for hvad sker det med objektet, hvis den får højere hastighed?

0:42:19.4 Studerende 4: Så stiger vinklen hurtigere.

0:42:21.8 Simon: Så ryger den hvert fald hurtigere rundt i cirklen. Så det giver god mening. Hvad så med, hvis radius af cirklen vokser. Hvad sker der så med vinkelhastigheden?

0:42:32.4 Studerende 3: Den bliver mindre.

0:42:37.6 Simon: Og giver det god mening?

0:42:39.3 Studerende 4: Ja, for så vil det jo tage længere tid at nå hele vejen rundt om radius eller jeg mener omkredsen.

0:42:45.5 Simon: Ja, hvorfor hvis radius bliver større, hvad sker der så med omkredsen?

0:42:45.9 Studerende 4: Den bliver større.

0:42:47.8 Simon: Ja. Fedt, så er der altså kun to tilbage.

0:43:27.9 [Afspiller video - Månens fald]

0:49:25.9 Simon: I ser helt sådan øhh.

0:49:27.1 Studerende 4: Ja, der er en ting, jeg sådan ikke helt forstår. Her hvor, hvor vi, jeg kan godt forstå, hvorfor vi ser bort fra det, men hvorfor vi så ikke ser bort fra delta t i anden på den anden side. For den lader vi jo gå mod nul.

0:49:45.1 Simon: Ja det er lidt mærkeligt ikke. Så, den kommer jo tit den her, det der fysikkertrick. Hvad tænker I, når I møder det? I det her tilfælde, der tænkte du, at du ikke forstod det. Men sådan generelt, når I møder det det der - det her led er meget mindre end det andet led, fordi det er i anden f.eks.

0:50:11.3 Studerende 4: Det synes jeg generelt ikke er noget problem. Men her synes jeg, det er irriterende, fordi at delta t på den anden side, er i anden. Og det er jo den, vi lader gå mod nul. Så hvorfor bliver det andet led ikke bare nul?

0:50:27.3 Simon: Ja altså venstre side?

0:50:27.9 Studerende 4: Ja venstre side.

0:50:34.4 Simon: Ja hvorfor gør det ikke det? Eller hvorfor kan vi kun fjerne denne her? Og ikke noget her over? Har I et bud?

0:50:42.3 [begge ryster på hovedet]

0:50:53.9 Simon: Det ham Gamow her han gør, han sammenligner leddene med hinanden. Kan I se, hvorfor det er bedre at sammenligne de her to led, end det er f.eks. at sammenligne de her to led?

0:51:11.0 Studerende 3: Ikke rigtig.

0:51:13.1 Studerende 4: Altså når vi sammenligner de der to brøker, så ender vi bare med at få nul er lig nul.

0:51:25.6 Simon: Ja måske. Men er der noget der indikerer, at det er bedre sammenligne de her to led, end med noget, der er ovre på den anden side?

0:51:35.1 Studerende 4: Øhm, fordi vi har x i de to led?

0:51:41.2 Simon: Ja præcis. Så man kan godt side, at den her side går mod nul, men vi har rigtig noget at sammenligne det med. Hvis det giver mening?

0:51:56.5 Studerende 4: Lidt, altså. Jeg synes det er lidt, at man snyder. Altså at man ikke gør det på begge sider.

0:52:07.4 Simon: Ja jeg kender godt den følelse. Man kan godt føle, at det er lidt snyd.

0:52:09.0 Studerende 3: Jeg synes også lidt, man mangler at få sådan, hvordan det matematisk kan skrives ned, at det er det vi gør. Fordi, jeg sådan, det må vel kunne skrives på en måde. Men netop hvis man siger, at man tager grænseværdien, og lader delta t i anden gå mod nul, så vil ... Så vil jeg sige, at den bliver nul. Så det er sådan. Ja.

0:52:37.6 Simon: Men, jeg vil mene, det er. At grunden til at man kan fjerne det her, det er fordi, man kan kun fjerne det, hvis man kan sammenligne det med noget. Og vi ved, at du kan lægge de der - altså denne her størrelse - fordi der er et x her over og her har vi et x i anden, så kan vi fjerne det der er i anden, fordi det her bliver meget større. Men du kan ligesom ikke sige noget om det her over, fordi der er også ganget alle mulige andre tal på. I kender jo godt det der fra matintro, at et nul over nul udtryk kan faktisk godt give et tal. Så vi kan ikke rigtig gøre noget her over, for vi har ikke noget at sammenligne det med. Giver det mening. Eller er det også snyd?

0:53:18.6 Studerende 4: Jeg synes stadig det er lidt snyd.

0:53:22.4 Simon: Det er også helt okay.

0:53:24.4 Studerende 3: [griner] Jeg tror ikke sådan at en matematikker ville sådan ...

0:53:27.3 Simon: Nej men det er jo også derfor det er kendt som sådan et fysikker-trick. Nogle matematikere ville nok synes det var træls.

0:53:34.5 Studerende 4: Ja, det er nok, at når man har fået banket ind i hovedet, at man altid skal gøre det samme på begge sider.

0:53:36.8 Studerende 3: Ja, altså vi er egentlig sådan lidt.

0:53:39.5 Simon: Nåh du tænker på at fjerne noget?

0:53:41.0 Studerende 3: Ja.

0:53:41.6 Studerende 4: Ja eller bare lade ... Ja.. det var det jeg mente.

0:53:49.9 Simon: Øhm... jo, så har jeg lige et spørgsmål mere. Der er ligesom to stykker streg. Størrelse af den her, som jeg kalder d, den udskifter jeg med v gange delta t.

0:54:04.0 Studerende 3: Ja det er fint.

0:54:07.3 Simon: Men så udskifter jeg den anden streg her over - altså x - den udskifter jeg med en halv gange a gange delta t i anden. Giver det mening, at det er to forskellige udtryk, jeg udskifter med?

0:54:18.2 Studerende 4: Det synes jeg, fordi med d, der er der jo ikke nogen acceleration, der påvirker, der er jo ikke nogen kraft der påvirker den, så den får ikke nogen acceleration. Men med x, der ser han det som er det et frit fald mod jorden, så der har vi tyngdeaccelerationen, eller a.

0:54:32.1 Simon: Ja så det, måden man bevæger sig et stykke d på.

0:54:37.4 Studerende 4: Ja det er bare en konstant hastighed.

0:54:39.5 Simon: Ja lige præcis.

0:54:40.3 Studerende 3: Det er også en fidus, som man har opdaget før. Det er rimligt normalt det der med, at så finder man et andet udtryk, for det samme, og så sætter man dem op mod hinanden. Eller prøver at omskrive det sådan så at man får nogle af de samme variable, så det kan gå ud med hinanden.

0:54:59.2 Simon: Mmm, ja. Fedt. Sidste video, jeg håber I kan holde til det. Det er den fra jeres egen lærebog.

0:55:15.3 [Afspiller video - Ensvinklede trekanter].

1:02:02.7 Simon: Så er vi igennem den sidste. Hvad synes I om Mazur og hans trekanter.

1:02:10.1 Studerende 3: Jeg synes tegningen er forvirrende.

1:02:11.7 Studerende 4: Ja.

1:02:12.0 Studerende 3: Fordi lige så snart, altså. Hvis man ser bort fra tegningen og kun ser på matematikken, så giver det fin mening.

1:02:18.6 Studerende 4: Ja det synes jeg også.

1:02:19.7 Simon: Hvorfor synes I tegningen er forvirrende?

1:02:23.4 Studerende 3: Jeg forstår ikke ideen i, hvorfor man skal flytte rundt på de der vektorer?

1:02:25.8 Studerende 4: Jeg synes ikke, det er helt trivielt hvorfor, det er ensvinklede trekanter. Det fangede jeg ikke helt.

1:02:32.9 Simon: Nej.

1:02:35.2 Studerende 4: Øhm, og det skal man lige som godkende før at man kan lave resten af argumentet.

1:02:39.2 Simon: Det er nemlig rigtig, så man er lidt nødt til at have tegningen med, før man kan få lov at lave matematikken.

1:02:44.4 Studerende 4: Ja.

1:02:47.6 Simon: Så det med de ens vinkler der. Forstår I hvorfor der opstår en vinkel her?

1:02:54.4 Studerende 4: Ja fordi at den har rykket sig.

1:03:00.4 Simon: Ja lige præcis. Og så her er der en hastighedsvektor tilførende den første, og den er vinkelret her oppe. Så er der også en hastighedsvektor her, som også er vinkelret. Giver det så mening, og så tager jeg bare at forskyder den der her op. Så det her er den samme vektor, der er her oppe. Den er bare rykket her op, så man kan se dem ved siden af hinanden. Er det den der er træls?

1:03:29.9 Studerende 4: Lidt. Jeg synes... Ja. Jeg synes ikke det er helt indlysende.

1:03:37.1 Simon: Nej men det er det heller ikke. Helt sikkert. Men man skal så forestille sig, at de begge to er vinkelrette på, så drejer de lige så meget som stedvektoren gør.

1:03:52.8 Studerende 4: Ja.

1:03:56.9 Simon: Fordi den hele tiden holder den der rette vinkel på stedvektoren. Jeg tror det er det, der er det svære sådan lige. Men forstår I så det der med at jeg skal tage grænseværdien. Så jeg laver delta t om til en græseværdi. Hvad gør det ligesom med situationen her over - sådan rent fysisk.

1:04:27.1 Studerende 4: At den rykker sig mindre.

1:04:29.3 Simon: Hvad for en rykker sig mindre?

1:04:31.6 Studerende 4: $r_i$. Altså theta bliver mindre.

1:04:36.7 Simon: Ja lige præcis, så den der mindre ikke. Så hvad der sker der med de her to steder, hvor den er.

1:04:45.0 Studerende 4: Der er at den bliver kortere fra den afstand.

1:04:47.8 Simon: Ja så de er uendeligt tæt på hinanden, ikke?

1:04:49.2 Studerende 3: Ja.

1:04:51.2 Simon: Nå så det er I med på. Men så snakkede jeg om, at grunden til at man gør det, det er fordi man vil gerne have den øjeblikkelige acceleration frem for den gennemsnitlige. Hvad tænker I forskellen er på de to ting?

1:05:06.4 Studerende 4: Det er jo bare over et større tidsinterval.

1:05:09.4 Studerende 3: Ja.

1:05:11.1 Simon: Hvad er over et større tidsinterval?

1:05:12.1 Studerende 4: Hastighedsændringen. Altså den gennemsnitlige.

1:05:20.8 Simon: Ja lige præcis. Så det synes I heller ikke, der er bøvlet at forstå. Nej.

1:05:30.1 Studerende 3: Altså igen, det er sådan en ting man har haft i matematik i så mange år. Så det er okay.

1:05:38.6 Simon: Mmm okay helt sikkert. Jamen så tror jeg faktisk ikke at jeg har så mange flere spørgsmål. Så er der bare lige det tilbage, at jeg godt kunne tænke mig at vide, hvilken I bedst kunne lide og hvorfor I bedst kunne lide den. Af de fem. Skal jeg lige opremse, hvad vi har været i gennem?

1:05:55.6 [begge griner]

1:05:55.5 Studerende 4: Ja tak det må du gerne.

1:05:56.3 Simon: Vi startede med, øhm, den med ens perioder, de der to ens cirkler der og alle pilene. Så gik vi tik Newton og den der, der bouncer rundt inden i. Så var der den helt matematiske, sådan rent differentiering. Og så var der den med månen og Gamow - månen der falder. Og så var der her til sidst Mazur.

1:06:24.3 Studerende 4: Jeg kan nok bedst lide den matematiske.

1:06:24.8 Studerende 3: Ja. Det vil jeg også sige. Det kommer selvfølgelig meget an på, hvordan man har det med matematikken, og hvordan man har ser tingene. Så i det hele taget bare at få så mange som muligt. Det synes jeg, er rigtig godt. Øhm, men ja personligt er jeg nok også mest til den med differentieringen.

1:06:44.0 Simon: Og hvorfor var det, at den var bedst, synes du?

1:06:46.0 Studerende 3: Det er bare, det er så genkendeligt. Det har man lavet så mange gange. Altså det er... Vi har både lavet det her og...

1:06:52.1 Studerende 4: Og man forstår også hvert skridt.

1:06:53.7 Studerende 3: Ja. Fordi det er, sådan en helt basis ting. Du skal bare ned og differentiere, og du kender sammenhængene, fordi dem har du fået tæsket ind i gennem de sidste mange år.

1:07:04.7 Studerende 4: Jeg kan også godt meget godt lide den med månen. Altså at man også havde noget fysik med.

1:07:11.1 Studerende 3: Ja, den gjorde det sådan lidt mere spændende i det. Fordi det andet det var bare sådan, matematik som man kan finde ud af. Og det andet det er sådan mere interessant.

1:07:18.6 Simon: Men synes du, at der er mere fysik i den med månen end i den med direkte udledning? Hvad mener du med det?

1:07:25.4 Studerende 4: Hmm altså jeg tænker, at så kigger man på kræfter og sådan noget. Frem for at kigge på nogle tal og vektorer.

1:07:35.8 Simon: Ja okay, så der er noget med trekants sider, som man nemmere kan forholde sig til?

1:07:36.8 Studerende 4: Ja.

1:07:38.6 Simon: Okay, så I er enige om, at det er den direkte udledning. Så hvilken kunne I mindst lide?

1:07:45.5 Studerende 3: Newton. [griner]

1:07:48.6 Studerende 4: Ja Newton. Jeg synes den var mere kompliceret end en udledning behøver at være. Specielt med sådan en - altså - når nu vi har set, at de andre, at der er nogle der kunne blive forklaret på en fire fem minutter og den tror jeg skulle - og vi snakkede om den bagefter i godt t minutter før at jeg sådan fattede. Og der var også mange af de små ting - altså de forskellige led som man ikke fangede. Ja.

1:08:20.1 Studerende 3: Altså ja det virkede som om, det var før måske at vektor og vektorregning var blevet opfundet. Det virkede bare unødigt besværligt. Her altså det er meget flot matematisk udledning...

1:08:34.7 Studerende 4: Og en fin tegning [griner].

1:08:35.4 Studerende 3: Ja og en rigtig fin tegning. Øhm men øhh.

1:08:39.2 Simon: I synes ikke det er sjovt det der med at forestille sig en bold, der hopper rundt inden i en cirkel?

1:08:42.6 Studerende 4: Nej. Den var nu eller også meget fysisk med elastisk stød. Det jeg synes, det var, at der var lidt for mange ting, som man skulle tage højde for, synes jeg.

1:08:51.5 Studerende 3: Jeg vil sige, jeg kunne egentlig også godt lide den sidste her fra Mazur, hvis man lige sådan accepterer det der med, at vi rykker lidt rundt på den, sådan vi kan se, at vi har to forskellige trekanter som er ensvinklede. Fordi så er den suuuper nem at se på. Den er kort og simpel, og der er ikke så mange...

1:09:13.0 Studerende 4: Helt sikkert.

1:09:13.9 Simon: Så har jeg lige det aller sidste spørgsmål. Det er sådan et lille dilemma. Nu har vi set på centripetal accelerationen, som vi regner ud med farten i anden over r. Men man kan også regne den ud ved at sige, vinkelhastigheden i anden gange med r. Så i den øverste her, der ligner det lidt at, accelerationen er omvendt proportional med radius og i den her nede, der ligner den er proportionel med radius. Kan I se, at det virker sådan lidt kontraintuitivt? Hvad tænker I om det?

1:09:49.0 Studerende 3: Altså lige så snart man får skrevet vinkelhastigheden ud og reducerer, så er det jo det samme.

1:09:57.2 Studerende 4: Ja man kan sagtens få lavet det der om til det der.

1:09:58.5 Simon: Nej okay, så det ser I ikke noget problem i? Perfekt.

# C Interview 3

**Participants: Student 5 and Student 6**
**Interviewer: Simon**

0:00:01.6 Simon: Godt. Yes, det vi skal i det, det er, som sagt når et eller andet objekt bevæger sig rundt i en cirkelbane [tegner] - måske sådan her, selv om det ikke er så flot en cirkel. Og hvis der er en radius ind til cirklen, og det har objekt har en eller anden fart v, jamen så den acceleration, der skal til for at holde den i denne her cirkelbane, den er givet ved v i anden over r. Og inden vi går i gang med videoerne, så vil jeg bare lige høre jer. Synes I det, giver det god mening, at det ser sådan der ud?

0:00:35.9 Studerende 6: Mangler der ikke et minustegn?

0:00:37.7 Simon: Jo det er bare størrelsen af den, vi kigger på.

0:00:39.5 Studerende 6: Okay ja.

0:00:41.2 Simon: Så vi dropper lige det minus der.

0:00:44.8 Studerende 5: Altså jeg synes, det giver god mening. Man kan jo også se på at, altså jeg tænker hvert fald på, at radius, hvis den bliver dobbelt så stor og hastigheden er den samme, så tager det dobbelt så lang tid at komme rundt. Og så skal der nok den halve acceleration til. Så derfor invers proportional med r. Og hvis hastigheden f.eks. er dobbelt så stor, øhm så tager det halvt så langt tid, til det er en dobbelt så stor ændring i hastighed. Så derfor skal den være kvadratisk. Eller så skal a være kvadratisk proportionel med v.

0:01:27.7 Studerende 6: Det giver god mening.

0:01:31.5 Simon: Ja, det synes jeg også det gør. Skal vi gå i gang med videoerne. Som sagt er det fem forskellige måder at udlede dem på, og som sagt, så stopper i dem bare undervejs, hvis I har lyst, og ellers så snakker vi bare om den bagefter.

0:01:47.3 [Afspiller video - Ens perioder]

0:06:34.2 Simon: Så er vi igennem den første. Hvad er jeres sådan umiddelbare reaktioner på det her. Hvad synes I, var der noget der var svært at forstå?

0:06:46.9 Studerende 6: Nej ikke umiddelbart. Jeg kunne godt lide at det er tegnet tydeligt op. Øhm,

0:06:56.4 Simon: Hvad mener du med, at det er tegnet tydeligt op?

0:07:05.0 Studerende 6: Altså selve det visuelle. Det at jeg kan se det. Altså en ting der måske kunne hjælpe med udledningen, det kunne måske være at gøre cirklen større - altså cirkel to lige så stor som cirkel et.

0:07:13.4 Simon: Ja lad os prøve at snakke om det. Tror du der er en grund til, at de ikke er lige store?

0:07:19.2 Studerende 6: Øhh nå ja - klart.

0:07:20.5 Studerende 5: Fordi omkredsen er ikke nødvendigvis lige store i dem.

0:07:22.7 Simon: Hvad repræsenterer den første cirkel?

0:07:25.6 Studerende 5: Position.

0:07:26.9 Simon: Ja, så hvis vi nu tegnede koordinatsystem her, hvad for nogle enheder ville der så være på akserne?

0:07:35.5 Studerende 5: Længdeenheder.

0:07:38.6 Simon: Og hvis vi nu tegnede et koordinatsystem her, hvad ville der så være af enheder der?

0:07:45.0 Studerende 6: Hastighedsenheder.

0:07:47.0 Simon: Ja lige præcis. Så det er faktisk lidt med vilje, at de ikke er lige store. Øhm, et spørgsmål mere. De er to omløbstider, giver det mening, at det ikke er de samme størrelser, der er inde i dem.

0:08:05.5 Studerende 5: Ja. Fordi man kigger bare på hver af cirklerne, og uden at kigge på den anden cirkel, så skal vi bare finde ud af, hvad omløbstiden for denne her. Og så ser vi eksternt på at de vil være lige store. Så det synes jeg giver god nok mening.

0:08:18.4 Studerende 6: Enig.

0:08:22.3 Simon: Var der noget I synes, der var godt ved den her udledning?

0:08:28.2 Studerende 5: Altså det giver sådan lidt, det man vist kalder et geometrisk-båndforståelse for udledningen i forhold til, hvis man udleder den vha. algebra bare - altså bare sådan ved hjælp af vektorer. Så ja så giver den lidt mere forståelse for hvorfor - altså et lidt mere geometrisk-bånd forståelse, man også kan bruge i andre sammenhænge. Man kan måske bruge den til andre ting.

0:08:55.1 Studerende 6: Så man måske får en lidt mere intuitiv forståelse af, hvad det betyder.

0:09:02.2 Simon: Hvad hvad betyder?

0:09:02.6 Studerende 6: Altså hvordan man udleder det.

0:09:08.9 Simon: Så siger jeg også det der med at, fordi det er uniform cirkulær bevægelse, vi arbejder med, så skal der være en ret vinkel imellem f.eks. denne her hastighedsvektor og denne accelerationsvektor. Giver det mening for jer? Altså hvorfor kan jeg bare sige, at der skal være det?

0:09:31.9 Studerende 6: Jeg tænker bare, at det er analogt til stedvektoren og hastighedsvektoren.

0:09:37.7 Simon: Ja, men hvorfor skal der lige være en ret vinkel?

0:09:47.4 Studerende 5: Fordi, hvis den ikke er ret her, så er det ikke, hvis den ikke altid bevæger sig parallelt med - et eller andet - man kan sige her at accelerationen er hastigheden af hastighedsvektoren, og hvis hastigheden ikke er - altså hastigheden er altid parallel med den bane den tager, øhm fordi det er ændring...

0:10:14.1 Simon: Kan du prøve at tegne? Hvis den nu f.eks. ikke var vinkeret på, hvad ville der så ske?

0:10:18.2 Studerende 5: [tegner] Hvis den ikke var vinkelret på, og så sådan her ud, så ville den ligesom gå i den retning. Så ville den ikke være en cirkel, og så ville den komme længere væk fra.

0:10:27.1 Simon: Så hvad ville der ske med hastighedsvektoren? Et øjeblik efter f.eks.?

0:10:30.4 Studerende 5: Så ville den være lidt større, eller lidt mindre alt efter hvilken retning, den bevæger sig i. Det er det med, at det altid er den parallelle - eller - altså hvis accelerationen er parallel, så øger eller mindsker den hastigheden.

0:10:48.8 Simon: Så man kan dele accelerationen op i ... ?

0:10:49.8 Studerende 5: Ja i en parallel del...

0:10:54.1 Studerende 6: Og en tangentiel del - tror jeg det hedder.

0:10:59.5 Simon: Ja hvert fald en, der står vinkelret på. Og den ene den får...? Hvad gør den der er vinkelret på?

0:11:02.9 Studerende 6: Den styrer retningen, og den der er parallel, den styrer så størrelsen. Og fordi der ikke er nogen, der er parallel, så ændres størrelsen ikke her.

0:11:20.7 Simon: Nej fedt. Har I andet, I synes, I vil tilføje?

0:11:31.7 Studerende 5: Altså det eneste jeg synes, jeg synes og så det ville være en god ide at have nogle gode tegninger til det her, for det er meget en geometrisk forståelse for. Det med de der cirkler, så det behøver man hvert fald at have med, hvis man tage den her.

0:11:48.8 Simon: Lad os hoppe videre, så er det lidt anderledes her. Det er en af Newtons måder:

0:12:03.5 [Afspiller video - Newtons polygonmodel].

0:19:31.8 Simon: Det var en anden måde. Første umiddelbare reaktioner. Hvad synes I om den her udledningsmetode?

0:19:38.9 Studerende 5: Altså i forhold til den anden, så føles som om lidt mere teori i denne her. I forhold til at vi bruger en trigonomisk enhed og sinus til en vinkel kan approximeres. Men altså den var stadigvæk lidt at forstå og nem at følge.

0:19:57.7 Simon: Så lad os prøve at snakke lidt om de der to ting. Især den der lillevinkel-approximation, den støder i på hele tiden i fysik. Når I ser den, hvad tænker I så?

0:20:11.4 Studerende 5: Taylorapproximation tænker jeg.

0:20:14.9 Studerende 6: Mmm. Samme her.

0:20:19.9 Simon: Kan I prøve sådan at tegne det? Hvordan kunne man vise det vha. en tegning? Hvordan forestiller I det jer, sådan rent geometrisk?

0:20:28.6 Studerende 5: [tegner] Hvis man har en cirkel her, og man så har en lille vinkel, så har vi en eller anden højde her. Det her det er vores sinus til theta, og den her ude det er theta. Når vinklen bliver meget lille, så er det næsten det samme.

0:20:56.9 Simon: Ja så du ser det på den der enhedscirkel agtig måde.

0:20:59.4 Studerende 5: Eller man kan også Taylor approximere den, men det giver selvfølgelig ikke den samme intuitive fornemmelse af hvorfor.

0:21:09.4 Simon: Hvad så med denne her oppe? Hvad synes du[6], da du så den. Sagde du bare okay, den gælder nok fordi han sagde det, eller tænkte du lidt over det? Skulle du lige sådan...

0:21:20.8 Studerende 6: Jeg tænkte, øhh... Primært i noget i retningen af at, man har jo at - jeg mener jo at sinus og cosinus det er bare lig med hinanden, men hvor cosinus er faseforskudt i forhold til sinus - så.

0:21:39.7 Simon: Hvor meget faseforskudt?

0:21:40.4 Studerende 6: Pi halve.

0:21:42.7 Simon: Så hvis du skulle prøve at tegne hvorfor denne her den gælder?

0:21:50.2 Studerende 6: Hmm... Nok ikke uden en lineal. Nå jeg tegner bare et koordinatsystem. [tegner]. øhm, hvis vi har - nå lad os se - nul her - hvordan er det nu den går. Sinus til nul det nul. Så har vi - jeg er ikke særlig god til at tegne. Se så har vi sådan ca. - så tror jeg vi har... cosinus gående her. Igen min tegning er ikke til skala.

0:23:03.4 Simon: Nej det er helt fint. Og hvordan kan man så se, at der gælder den her sammenhæng ud fra den tegning?

0:23:13.3 Studerende 6: Hmm... Ved at se hvor de to, øhm kurver skærer hinanden tænkte jeg umiddelbart - ville være oplagt.

0:23:29.7 Simon: Okay. Så lad os prøve at hoppe videre til det her med at - jeg snakkede meget om den her hastighedsændring. Forstod i hvordan det der to tal f.eks. dukkede op?

0:23:40.6 Studerende 6: Det kom fra at, den skal ændres. Altså først skal den sådan set ændres - så skal man trække den fra en gang, for at få den til nul, og så skal den lægges til en gang mere, for at få den op til modsatrettet.

0:23:57.6 Simon: Præcis, så det var nemt at være med på?

0:23:59.4 Studerende 5: Ja en ting man evt. kunne sige, det vil være at, det eneste, der ville påvirke den, det er en normalkraft, og den peger vinkelret på fladen. Og derfor så det eneste, der kan ændres, det er den hastighed, som er vinkelret på. Og hvad for en begrundelse for at den parallelle hastighed ikke ændrer sig.

0:24:23.4 Simon: Og hvad tænker I så? Så sagde jeg, at retningen, det sagde du også lige, den peger vinkelret på fladen ikke. Altså hastighedsændringen - men hvad har det med centripetalaccelerationen at gøre?

0:24:40.3 Studerende 5: Altså acceleration det er jo hastighedsændring over tidsændring.

0:24:46.1 Studerende 6: Så den vil pege i samme retning som i hastighedsændringen.

0:24:49.2 Simon: Ja, så her nede, hvordan ville den så pege?

0:25:02.4 Studerende 6: Altså hvis man står der, så ville den pege i den retning - altså ind mod centrum.

0:25:06.7 Simon: Ja okay. Lad os prøve at hoppe videre?

0:25:09.6 Studerende 5: En ting. Det er også, du sagde, at der var impulsbevarelse der, og så gælder det der. Men elastisk stød det betyder vel, at der er energibevarelse... men ja det giver jo det samme resultat.

0:25:29.1 Simon: Lige præcis.

0:25:33.9 Studerende 6: Ja du tænker vel at impulsbevarelse er kortere at skrive ud. Nå lad os gå videre.

0:25:48.7 [Afspiller video: Direkte udledning].

0:32:18.2 Simon: Nå hvad synes I? Hvad var godt ved denne her video, hvis vi skal starte med det?

0:32:23.7 Studerende 5: Altså jeg synes hvert fald det var godt, at man her får en forståelse for retningen af den. Det gør man ikke lige så meget i de andre.

0:32:31.4 Studerende 6: Ja her fremgår det mere eksplicit i udledningen.

0:32:36.8 Simon: Og hvor er det, I ser det henne?

0:32:38.8 Studerende 6: Der omkring.

0:32:42.7 Simon: Ja ved det minus der, ikk?

0:32:43.8 Studerende 5: Ja som du også sagde i videoen. Og det fremkommer sådan ret naturligt i udledningen. Det er ikke noget man som sådan skal søge efter. Så det giver rigtig god mening.

0:32:56.5 Simon: Var der noget I ikke brød er om ved videoen, eller udledningsmetoden?

0:33:00.9 Studerende 6: Hmm... Det var let at forstå men øhm... I fremtiden, altså der mangler måske et minus der?

0:33:15.4 Simon: Der er faktisk et lille minus, som jeg satte, men det er næsten ikke til at se, men det står faktisk der. Jeg satte det sådan lidt og jeg sagde, at der var et minus, men jeg kan godt se, at det er røget lidt oven i minustegnet der.

0:33:30.6 Studerende 5: Så, personligt så kan jeg bedst lide den her type udledning. Bare fordi jeg stoler ikke så meget på min egen geometriske fortolkning [griner] - jeg har regnet nok sandsynlighedsregning til, at jeg ikke stoler på den.

0:33:46.5 Simon: Og der er ikke noget, man skal stole på her, tænker du?

0:33:48.7 Studerende 5: Det er mere sådan bare... logik, frem for at bruge min egen intuition. Men dog kan jeg godt se, at der er nogle ting, der måske kan være lidt svære for nogle. Altså, det at, de geometriske beviser, der er ret lette at gå til, altså at forstå, hvor tingene kommer fra. Her er det måske lidt en smule sværere at forstå, hvor den her formel kommer fra. Altså, det var i hvert fald - jeg synes, det var en god udledning. En anden ting det er, vi er ikke særlig vant til at se vektorer på den her form, så det tror jeg også, kunne være forvirrende for nogle. Vi er vant til at se dem på søljevektorform. Øhm jeg tror der er mange, som godt kunne blive forvirrede over at se i og j hat.

0:34:41.8 Simon: I denne her, der differentierer vi vektorer hele tiden. Hvad forstår du ved sådan en vektor, vi differentierer?

0:34:50.3 Studerende 6: At vi bare differentiere x og y, altså koordinaterne hver for sig.

0:34:52.1 Simon: Kan du sådan prøve at illustrerer, hvad du tænker, når man differentierer en vektor.

0:34:56.8 Studerende 6: Altså, hvis vi har en vektor, som vi kalder for v, som er lig med et eller andet v1, v2. Så, øhm, ville jeg hvert fald mene, at den differentierede bare er lig med v1′, v2′.

0:35:29.9 Simon: Ja. Kunne I forestille jer, hvis man nu så på en vektorpil. Hvad er så, hvis man differentierer en vektorpil, hvad kan man så forestille sig?

0:35:42.8 Studerende 6: Vektorpil?

0:35:39.4 Simon: Altså den pil, man ligesom bruger som vektor. Den måde man tegner en vektor på, er sådan en pil her. Hvad kan man forestille sig, når man differentierer den? Hvad betyder det så?

0:35:53.8 Studerende 5: [tegner] Så, hvis den har en eller anden ændring, altså hvis der er et eller andet delta t, der har fået den til at gå derfra og dertil, så det vi gerne vil finde, det er jo ændringen. Øhm og fordi, når vi lægger vektorer sammen, så lægger vi komponenterne sammen hver for sig, så kan vi også bare sige, det her er jo bare, forskellen på x komponenten og forskellen på y komponenten.

0:36:19.7 Simon: Ja så det er faktisk det samme, men bare sådan en lidt mere geometrisk forståelse.

0:36:21.4 Studerende 5: Og så skulle vi så tage limit'et, men det vil ikke ændrer på noget.

0:36:29.2 Simon: Sidste spørgsmål - lige til den her video i hvert fald - det var, at de her to simple formler, dem slyngede jeg bare sådan ud af det blå. Hvad tænker I når i ser sådan nogle, så ved I jo, at det ser sådan her ud. Accepterer I det eller tænker I lige... Nåh ja det ved jeg jo godt hvorfor, eller det ved jeg ikke hvorfor.

0:36:49.0 Studerende 5: Jo altså - jeg har set det så mange gange, at jeg accepterer det. Men i hvert fald med denne her - lad mig prøve at se, jo det der det er vinkelhastigheden, så hvad sker der over øhm... Hvis vinkelhastigheden f.eks. er to pi radianer pr sekund, så burde det også gælde at efter et sekund så har den bevæget sig en hel cirkel. Og ja det gælder også fordi, ja så theta. Øhm så på den måde, så giver det hvert fald god mening. Og den nedenunder...

0:37:28.2 Simon: Det kan være, du vil tage den [6]? Hvad tænker du, når du ser den der. At vinkelhastighed er lig med fart over radius. Hvad tænker du om vinkelhastighed bare, hvis vi tager den først.

0:37:57.2 Studerende 6: Det er hvor hurtigt vinklen ændrer sig i en cirkelbane eller i en bevægelse.

0:37:58.5 Simon: Ja. Giver det så mening, at det er objektet fart divideret med den radius, der er i cirkelbanen. Hvordan kan man sådan tænke, at det giver mening, eller om det overhovedet giver mening?

0:38:13.4 Studerende 6: Hmm... [tænker længe]. To sekunder.

0:38:38.5 Simon: Så hvis v bliver større, hvad sker der så med vinkelhastigheden?

0:38:43.8 Studerende 6: Så bliver den også større.

0:38:43.3 Simon: Ja. Giver det mening?

0:38:45.7 Studerende 6: Ja, for så kommer man hurtigere rundt i cirklen. Og i det andet tilfælde, hvis r bliver større, så og v ikke ændrer sig, så kommer man langsommere rundt i cirklen, fordi så har man en større bane at skulle tilbagelægge.

0:39:07.2 Simon: Ja lige præcis. Er det det samme du tænker på?

0:39:08.5 Studerende 5: Øhm ja, man kan også... En eller anden distance en.. cirkelomkreds det er vinklen her divideret med den totale vinkelsum som er to pi, og så gange omkredsen, som er to pi radius, så det er theta radius, og så hvis man differentierer på begge sider, så får man v er lig med omega r. Så dividerer man med r.

0:39:38.8 Simon: Ja lige præcis. Cool. Skal vi hoppe videre. To videoer tilbage. Jeg håber I kan klare det.

0:39:52.1 [Afspiller video - Månens fald]

0:45:38.8 Simon: Endnu en måde. Hvad tænker I? Vil du starte? [6]. Var der noget, du synes, der er godt ved den her måde at gøre det på, eller var der nogle ting, du synes ikke var så gode, eller som være sværere at forstå?

0:46:11.9 Studerende 6: [Tænker i lang tid] Umiddelbart kan jeg godt forstå den men...

0:46:30.5 Simon: Skal vi hopper over? Hvad synes du?

0:46:32.2 Studerende 5: Ja altså, umiddelbart så, altså hvert trin er ligesom let at følge. Der var bare lige den del med, at vi fjernede x i anden, hvilket måske kunne være forvirrende for nogle. Igen noget Taylor-approximation agtigt noget.

0:46:46.5 Studerende 6: Noget med at x i anden går hurtigere mod nul end x gør.

0:46:52.6 Simon: ja det er jo en typisk fysiker ting, at man vurderer noget mindre end noget andet, og så behøver vi ikke at se på det.

0:46:55.3 Studerende 6: Hele tiden.

0:46:57.7 Simon: Hvad synes I, hvad tænker I om det?

0:46:59.7 Studerende 5: Det.. Jeg har arbejdet nok med det til at det er helt normalt for mig.

0:47:07.4 Simon: Så du accepterer det bare og siger, ja det passer.

0:47:11.9 Studerende 5: Ja fordi når, øhm... Man kan altid gøre delta t lille nok til at x bliver meget større end x i anden leddet.

0:47:25.2 Simon: Ja lige præcis, det er jo det man gør.

0:47:29.8 Studerende 6: Hvis det ikke har nogen indflydelse på, hvad hedder det nu... Hvis det stadigvæk gør at ens model stemmer overens med de observationer man har, så har jeg det også fint med det.

0:47:46.3 Simon: Så du mener at hvis fejlen er så lille, at det ikke gør noget, så er det okay.

0:47:51.0 Studerende 6: Altså hvis fejlen er mindre, end vi kan observere, så øhm.. så er jeg ok for den.

0:48:08.4 Simon. Okay så øhm... To steder i den her video, der udskifter jeg denne her afstand d med v gange delta t, og så den her størrelse x, den udskifter jeg med en halv gange a gange delta t i anden. Giver det mening, at det er to forskellige, for det er jo begge to afstande jeg udskifter. Giver det mening, at det er to forskellige måder, de bliver udtrykt på, eller hvorfor er de forskellige?

0:48:39.4 Studerende 5: Altså, jeg kan godt se hvordan de kommer, men modsat de andre, som har været ret intuitive, så kan det godt være lidt sværere at følge helt præcist, hvorfor de her ting gælder. Også fordi, at man har hørt fra gymnasiet, at x lig med en halv a delta t i anden skal man være påpasselig med at bruge.

0:49:02.7 Simon: Hvorfor?

0:49:04.3 Studerende 5: Hvis det ikke er konstant acceleration. I det her tilfælde er det så konstant acceleration, men øhm, bare sådan i lidt et andet tilfælde, end man er vant til, så kan det godt være lidt sværere end de andre eksempler i hvert fald.

0:49:19.8 Simon: Kan I se hvorfor det er to forskellige - altså hvorfor det skal se sådan ud her, og skal se sådan ud her over?

0:49:32.0 Studerende 5: Ja, hvis den jo bare var fortsat med konstant hastighed der, så er formlen bare v gange delta t.

0:49:44.2 Studerende 6: Og i forhold til den anden, så hvis vi bare har et frit fald, og vi ikke har nogen begyndelseshastighed, og har en initialposition på nul, så får man også det udtryk ved at integrer to gange.

0:50:02.3 Simon: Så hvordan, synes I det her med det frie fald, måden at tænke det på, synes I det giver god mening at tænke det på i forhold til en cirkelbevægelse?

0:50:11.4 Studerende 5: Igen, det er lidt. Det er ikke lige så intuitivt.

0:50:16.0 Studerende 6: Jeg synes, det... Umiddelbart vil jeg synes det virker lidt mystisk, at vi kan se bort fra den hastighed som månen har, øhm mens den bevæger sig. Men det har vi jo også med sådan set...

0:50:39.9 Simon: Men måden som vi lige som får den cirkel frem, som vi ender med, er den til at forstå med den her måde at gøre det på?

0:50:47.9 Studerende 5: Ja det synes jeg, men igen, jeg synes det er mere intuitivt med de andre måder. Det er mindre intuitivt med denne her, synes jeg. Og i mordsætning til de andre, som også har været, sådan ret lette at reproducere selv de andre, fordi det er en eller anden geometrisk tegning, som man tegner, og derfra går det ret let af, hvad man skal gøre. Her der er det lidt mere arbitrært, hvad det er man gør, synes jeg. Altså i modsætning til, hvor let det vil være for at reproducere det, så vil jeg sige, at det her er den sværeste, at dem vi har set. Hvis jeg selv skulle gøre det.

0:51:21.0 Simon: Og det er på grund af?

0:51:21.4 Studerende 5: Ja fordi det er lidt mere arbitrært, og ikke lige så intuitivt som de andre, synes jeg.

0:51:26.0 Simon: Og kan du pege på, hvad det er gør det arbitrært?

0:51:28.9 Studerende 5: Altså bare det at vi tegner sådan r og så besluttede vi os for at tegne den der d og så lille x, og så ser vi på, hvad har den der afstand x og sådan noget. Det er lidt sådan, at man gerne skal have en intuitiv fornemmelse af hvad bliver x og sådan noget, før man gør det. For ellers kunne det godt blive ret hurtigt en blindgyde. Så derfor hvis man ikke er lige så vant til at arbejde med sådan noget, så kunne det godt virke lidt mere arbitrært.

0:51:55.8 Simon: Helt sikkert. Skal vi tage den sidste?

0:52:01.6 Studerende 6: Ja. Det virker som en sjov måde at bevise det på, men hvis man ikke har lært om det før, så ville jeg nok foreslå en af de andre.

0:52:10.5 Simon: Altså man skal ligesom kende til ideen. Der er ikke en fremgangsmåde man kan følge. Den sidste er den der også er i jeres lærebog af Mazur med de ensvinklede trekanter.

0:52:30.2 [Afspiller video - Ensvinklede trekanter]

0:59:13.6 Simon: Så kom vi igennem Mazur. Hvad synes I? Var der noget der gav god mening her? Eller var der noget, der ikke gav god mening?

0:59:31.9 Studerende 5: Altså igen, så minder den lidt om det vi også gjorde med perioderne. Øhm synes jeg i forhold til, at det med at vi kigger på, øhm hastighedsvektoren og stedvektorerne. Og ser på nogle forhold der. Og på den måde, kunne man følge mange af de ting, som også blev sagt der, synes jeg. Også det med, at det kan brede forstås med et geometrisk bånd og sådan noget. Men dog synes jeg også, at den er sådan lidt arbitrer, hvorfor tegner man lige præcis de her ting, hvorfor lige at se, at den der ensvinklet den der trekant - det kan godt være lidt svære - i hvert fald hvis en, der aldrig har set det før skal prøve at reproducere det.

1:00:25.7 Studerende 6: Jeg synes, at det Mazur gør det unødigt kompliceret, eller mere kompliceret end hvad nødvendigt er. I forhold til første den metode og den tredje metode.

1:00:40.5 Simon: Så hvad synes du, der er kompliceret ved den?

1:00:42.8 Studerende 6: Øhm... Lige nu der det stadig væk at forstå, at det er ensvinklede trekanter. Den er stadigvæk lidt arbitrer for mit vedkommende.

1:01:09.2 Simon: Her nede der tager vi det der med grænseværdien for delta t, der går mod nul. Hvad betyder det for selve setup'et her? At delta t går mod nul.

1:01:21.6 Studerende 5: Det betyder at vektorerne de havner nede i bunden, oven i hinanden nærmest. Men ja, at vinklen går mod nul.

1:01:30.0 Simon: Lige præcis, så den her den kommer her ned? Er det det du mener?

1:01:37.9 Studerende 5: Ja.

1:01:41.6 Simon: Så sagde jeg det der med, at der var noget, der hed gennemsnitlig acceleration og øjeblikkelig acceleration. Hvad tænker I om de to begreber? Hvad synes I forskellen er på det?

1:01:54.1 Studerende 6: At gennemsnittet som vi også snakker om i øhm, i videoen, det er f.eks. hvis man har et normalt stort, eller et tidsinterval, som er stort i forhold til dagligdagen, at så kan man sammenligne hastighedsændringen i fra et øjeblik til et andet, og så snakker man om gennemsnitlig acceleration. Og når det er instantant eller øjeblikkeligt, så er det meget mindre end vi kan måle - altså tidsintervallet.

1:02:45.9 Studerende 5: Altså sådan, min fortolkning ville f.eks. være hvis jeg sad i en bil og kørte, så ville farten fluktuere lidt op og ned. Fordi jeg ikke er et perfekt, der ikke kan holde på speederen lige præcis så meget, at den altid bevæger sig med konstant fart. Men så efter en time, så kører jeg måske med den samme fart, som jeg startede med at køre, så der ville den gennemsnitlige acceleration være nul. Men den instantane acceleration, den varierer hele tiden, fordi min fart fluktuerer.

1:03:23.6 Simon: Ja sådan kan man også se på det. Nu har I så set fem forskellige, så nu kunne jeg godt tænke mig at vide, hvilken en I bedst kunne lide. Og hvilken en gav mest indblik hvorfor formlen ser sådan her ud, som den gør. Lad os starte med dig.

1:03:39.6 Studerende 6: Jeg kunne bedst lide enten 3eren eller 1eren.

1:03:57.1 Simon: Kan du forklare hvorfor?

1:03:58.7 Studerende 6: Jeg tror, førstepladsen går nok til den direkte udledning fordi, at det hele fremgår eksplicit af udledningen, så længe man bare holder tungen lige i munden, i forhold til at differentiere korrekt. Og den første fordi den giver et , den giver et, i hvert fald for mit vedkommende, den bedste geometriske forståelse af det. 3eren følger på en tredjeplads, mens at 4'eren og 5eren de deles på en fjerdeplads.

1:05:00.8 Simon: Lad os snakke om de dårlige bagefter. Hvad synes du?

1:05:01.4 Studerende 5: Lad mig se. Den direkte udledning, vil jeg også sige er den jeg bedst kan lide. Den algebraiske måde at løse den på, og det fremgår også eksplicit hvilket retning den er i, og det er noget svære at lave fejl i ens intuition end i det andre. Og så den første med perioderne igen, så synes jeg også, at det giver den bedste geometriske forståelse for det.

1:05:46.2 Simon: Det er sjovt, at i nævner de to som de bedste, for det er måske de to, der mest forskellige matematikmæssigt. Kan I se det. Den er meget simpel i det første, man skal næsten ikke regne noget ud, og den anden den er meget tung matematisk. Hvad tænker I om det?

1:06:00.2 Studerende 6: Jeg vil ikke sige at den er tung. Det er bare nogle differentialer.

1:06:07.2 Studerende 5: Jeg vil heller ikke sige, at den er tung, fordi jeg har også løst mange. Jeg har differentieret meget før. Men jeg kan godt se, hvordan den er den tungeste sådan matematisk set.

1:06:22.2 Studerende 6: Altså hvis man nu er på et gymnasium, hvor man skal lære om det her, så kan det godt være, at ens meninger vil være lidt ændret. Men...

1:06:39.5 Studerende 5: Det med at de er meget forskellige. Jeg tror og, at det er derfor, at vi har valgt de to. Fordi den ene har den ene pol , at det er meget intuitivt, altså det er let at gøre selv, med at du skal bare skrive formlen op også differentiere den to gange. Mens den anden den er rimelig simpel og det fremgår rimelig let, altså periodemåden at udlede den på. Der fremgår det let de geometriske bånd og sådan noget.

1:07:20.4 Simon: Så lade os tage de dårlige. Du nævnte...

1:07:22.5 Studerende 6: Jeg er på eller øhmm.. Jeg er stadig lidt usikker på 2eren - den er sjov, men jeg er bestemt ikke fan af de to sidste måder at udlede den på.

1:07:57.9 Simon: Lad os tage Gamow først. Hvorfor ikke?

1:07:58.9 Studerende 6: Hmm... Umiddelbart kan jeg bare ikke se en årsag til at, hvad hedder det nu. Der er ligesom ikke rigtig grund.

1:08:32.5 Studerende 5: Jeg er også enig i, at det er de to sidste, som sådan er dem jeg mindst kan lide. Det har noget at gøre med, at jeg synes at udledningen af dem er lidt mere arbitrær, og jeg synes, at det vil være lidt svære at reproducere dem, for der er mange flere småting og tricks og sådan noget, som man skal huske. Specielt med den der med Gamow, den synes jeg var - altså der var rigtig mange ting - så skal man lige tænke på, så er der konstant acceleration der, og jeg vælger lige den og den ting, som jeg vil se i forhold til hinanden. Hvor jeg kunne have valgt en masse ting, men jeg vælger lige de ting, fordi det viser sig at passe. Så synes jeg også, at den er lidt svære at acceptere 100 % - altså hvorfor man kan bruge konstant acceleration formlen, når den bevæger sig en cirkelbane. Det skal man tænke sig lidt mere grundtig over, hvorfor man egentlig godt må gøre det. Og i den sidste - den fra Mazur. Igen lige at se at det er ensvinklede og sådan noget. Det er sådan lidt mere arbitrært. Så det ville være lidt svære at reproducere dem. Så jeg synes bare at alternativerne er bedre.

1:09:55.6 Simon: Så har jeg faktisk et lille sidste spørgsmål. Det her er formlen som vi har fokuseret på, men man kan også regne med den ud, ved at tage vinkelfrekvensen og sætte den i anden, og så gange med radius af cirkelbanen. Den her formel den siger ligesom at accelerationen er omvendt proportional med radius, men den anden siger, at den er proportionel med radius. Er det et problem?

1:10:28.6 Studerende 6: Nej for vi kan jo indsætte udtrykket for omega, og så går r ud med hinanden.

1:10:37.4 Simon: Så denne her den afhænger af r, ikk?

1:10:39.8 Studerende 6: Ja v og r, så jeg ser ikke noget problem med det.

1:10:45.3 Simon: Nej, godt. Det var bare lige for at høre.

# D Interview 4

**Participants: Student 7**
**Interviewer: Simon**

0:00:02.4 Simon: Lige inden vi starter med den første video her, bare lige for at forklare, hvad det er vi skal, så er det altså et eller anden objekt, der bevæger sig i en cirkelbane. Der har den acceleration, der peger ind mod midten af cirklen, som er givet ved v i anden over r. Og når du ser den der formel, giver det så mening for dig, at acceleration har den størrelse der? Eller hvad tænker du, når du ser formlen.

0:00:27.3 Studerende 7: Jamen når jeg ser formlen så tænker jeg sådan lidt sådan rent... Aller først så tænker jeg bare sådan rent enhedsmæssigt, og kigge på, om det giver mening. Det gør det jo selvfølgelig, fordi vi har meter pr. sekund. Så det er ligesom meter i anden pr sekund i anden og så divideret meter, hvorved vi får meter pr. sekund i anden i stedet for. Så det giver fint mening for mig. Sådant rent metodisk for mig, så synes jeg også det giver ganske fin mening i og med, at øhm... Hvad skal man kalde det? Det er sådan lidt svært at forklare, synes jeg. [Tegner] I hvert fald hvis man har acceleration som peger her ind af, så for at kunne holde den i den her bane, så må der jo... Der bliver jo ikke foretaget en ændring i størrelsen af hastigheden, men der foretages en ændring i retningen, som er... retningsvektoren er jo her. Og så på den måde kan jeg forstå, at den retning peger hastigheden jo så også. Og på den vis giver den mening for mig, men jeg ved ikke helt hvordan specifikt skal...

0:01:35.5 Simon: Nej, men giver det mening f.eks. at når radius i den cirkel, den bevæger sig i, bliver større.

0:01:41.9 Studerende 7: Ja ja, så giver det fin mening. Så bliver vinkelhastigheden, eller så bliver hastigheden jo mindre i og med at den bevæger sig en kortere distance på samme tidsperiode, hvor med at hastigheden jo må blive mindre, hvormed at hvis at radius hvis den bliver mindre, og dermed cirklen bliver mindre, så kan den så dække en meget større distance af cirklen på samme tidsperiode.

0:02:08.5 Simon: Cool - lad os gå i gang med den første video.

0:02:23.2 [Afspiller video – Ens perioder]

0:07:02.1 Simon: Lad os bare stoppe der. Hvad tænker du, efter du har set den her udledning?

Studerende 7: Jo jeg synes faktisk at det er en simpel og forholdsvist smuk udledning, vil jeg sådan set mene. Fordi, jeg synes, at den - det kræver selvfølgelig at man ved hvad perioden er, men det er jo generelt meget nemt at sætte sig ind i. Det er jo bare bevægelsen rundt i cirklen. Og sådan det her med diagrammer, det synes jeg faktisk fungerer rigtig fint, hvor man har de her to forskellige cirkler hvor man sådan - det er meget illustrativt på den måde, at selv hvis man ikke helt er med på sådan vektorregning og det forskellige, så giver det egentlig god nok mening - den vektor der peger der og der, og der ligger den så, og så de har alle sammen samme retning. Det eneste er sådan set, at man stadig skal have den forståelse at grunden til at det er en cirkelbevægelse er, fordi den står vinkelret på, men det tror jeg også sådan generelt sådan, at de fleste vil have en fin forståelse for.

0:07:59.2 Simon: Ja for hvad ville der ske, hvis den her ikke stod vinkelret på?

0:08:01.8 Studerende 7: Jamen hvis den ikke stod vinkelret på, så ville der jo også være en translationel del af accelerationen, og hvormed det ikke ville blive en jævn cirkelbevægelse, men hvor den også ville accelerere rundt i cirkelbevægelsen og der med ville bevægelsen ændre sig jo.

0:08:24.9 Simon: Ja hvert fald hastigheden.

0:08:25.1 Studerende 7: Ja hastigheden lige præcis.

0:08:28.2 Simon: Ja øhm, og du tænker ikke at det er mærkeligt, at periodeformlen for denne her cirkel ser sådan her ud, men at den ser sådan her ud for den anden cirkel.

0:08:42.7 Studerende 7: Nej det synes jeg egentlig er ganske fint beskrevet ud fra at du bruger radius fra de forskellige cirkler, hvor at i denne her cirkel, der har du jo bare taget hastigheden for den ene og så brugt som radius til en nu cirkel. Det synes jeg egentlig fungerer rigtig fint, også på en eller anden måde pædagogisk faktisk sådan.

0:08:59.4 Simon: Lige et sidste spørgsmål. Hvis vi nu forestiller os, at vi lagde et koordinatsystem ind her og et koordinatsystem i den anden her. Hvad ville du så tro, at der var af enheder på akserne over i denne her?

0:09:11.4 Studerende 7: Så ville jeg mene, at der vil være... altså akserne de her veje eller hvad?

0:09:15.9 Simon: Ja x og y, hvis de skulle have nogle enheder. Hvis vi lagde dem her.

0:09:25.6 Studerende 7: Ja jeg ville mene, at det ville være.. øhm, den synes jeg måske er lidt svær at tænke på eller se.

0:09:33.1 Simon: Hvorfor?

0:09:35.8 Studerende 7: Jeg ved det ikke helt, jeg tror bare det er det der med at cirkeldiagrammet, jeg kan ikke helt få den til at passe ind sammen med de andre vektorer, men det må vel være sådan, at det er... Altså hvis vektorerne skulle passe overhovedet, så ville det jo være tid hen af x-aksen og så distance på af y-aksen.

0:09:52.9 Simon: Og hvad tænker du her over?

0:09:55.0 Studerende 7: Jamen der ville det jo være, så ville det i stedet være... Stadig tid hen af x-aksen og så hastigheden op af y-aksen. Ja.

0:10:11.2 Simon: Hvad er det, der gør det svært, synes du?

0:10:12.4 Studerende 7: Nej jeg tror bare, at det er sådan lidt på grund af, at man nu har så mange forskellige typer af vektorer i den sammenhæng. Ja fordi at så skal man lige til at have alle dimensionerne til at passe sammen, og så skal man have, nåh nej den der skal faktisk ikke lige tages med, for det er bare noget, der lige er tegnet ind. Så det gør det lige sådan - den skal man lige have vendt lidt. Det vil jeg gerne indrømme, den er sådan lidt mere kompleks, men alt det andet, det synes jeg egentlig fungerede meget godt.

0:10:40.0 Simon: Jamen det synes jeg, du har ret i. Fedt, lad os hoppe videre til den næste.

0:10:50.8 [Afspiller video - Newtons Polygonmodel]

0:18:23.1 Simon: Hvad tænker du?

0:18:25.7 Studerende 7: Jo men, jeg synes det er en meget interessant måde og udlede den på. Jeg kan meget godt lide ideen den der med n-kanten der, og jeg synes, det er en meget sjov og interessant ide. Jeg synes bare ikke, at hvis den sådan skulle bruges i undervisning, så synes jeg bare ikke, at den er helt lige så pædagogisk, som den tidligere var før.

0:18:45.2 Simon: Hvorfor ikke?

0:18:45.5 Studerende 7: Mest af alt fordi at den... Mere eller mindre, så når vi jo frem til det samme selvfølgelig, hvilket er det vi ønsker. Den her kræver bare rigtig mange flere omveje, og rigtig meget mere indlemmelse af alt muligt andet synes jeg. Til at starte med, der kigger vi jo på fuldkommen elastisk stød og det er jo også selvfølgelig meget godt at kende til og sådan. Men hvis vi bare sådan skal fokusere på at kun det her bare kun skal handle om cirkelbevægelse, så synes jeg, det er meget at inddrage til en helt almindelig skoleelev. Altså okay, så skal vi lige ind forbi det her, og skal vi også lige over i noget trigonometri, og bruge den her formel osv. Jeg synes selv, at den er meget fin den her, men jeg tror bare generelt sådan til undervisningsformål både på gymnasiet men også, hvis det kom til universitetsniveau, så ville den sådan... Den virker bare på en eller anden måde lidt for snørklet, synes jeg. Den prøver netop at komme rundt på mange forskellige måder og indlemme mange forskellige ting, for at få det til at virke. Jeg kan meget godt lide det historiske aspekt i det. Det gør jo at nogle får lidt interesse i det osv. Men det der med at man sådan skal til at lave de her trigonometriske approximationer også med sinus og sådan noget... Det tror jeg også mange vil synes er sådan lidt.

0:20:02.0 Simon: Ja lad os lige snakke om det. Når du ser sådan en lille vinkelapproximation, hvad tænker du så? Tænker du... Forestiller du dig noget inde i hovedet eller accepterer du det bare.

0:20:09.5 Studerende 7: Nej men jeg forestiller mig selvfølgelig at vinklen bliver mindre og mindre, og derved kommer tættere og tættere på bare at være, det der nu står inden i. Men jeg tror mange har svært ved at lave den, sådan approximation selv, fordi de føler at sinus er en funktion til noget, som der giver noget andet.

0:20:26.6 Simon: Ja selvfølgelig - det er jo også en approximation.

0:20:26.9 Studerende 7: Ja netop. Så det, specielt den approximation kan være lidt forvirrende for nogle. Specielt for dem, der ikke sådan helt har den fysiske intuition til at.. men mere sådan ser på det rent matematisk, at sinus det er noget, hvor du putter ind og får noget anden ud.

0:20:45.7 Simon: Har du set den her før?

0:20:46.4 Studerende 7: Jeg har set den før ja, men det er ikke sådan... jeg tror ikke den er så gængs heller.

0:20:49.4 Simon: Nej, kan du på en eller anden måde prøve at tegne et eller andet, hvor man kan forestille sig, hvorfor det her gælder?

0:20:55.0 Studerende 7: Tjo... Hvis vi tegner enhedscirklen hvert fald, så ved vi jo hvert fald, at hvis vi har en længde her, så cosinus, den ligger jo her til og så vores sinus, den kommer til at ligge er. Så hvis vi har sinus til pi halve ja, det må jo... Ja hvis vi siger det her er pi halve, nej pi halve det vil være her oppe. Så cosinus til pi halve minus - lad os se - det her det er pi halve minus x, så den ligger der, så giver det jo selvfølgelig mening, at hvis du tager cosinus til den her minus den her, så vil du jo bevæge dig her ned til hvor den nu ligger. Og så lige pludselig så bliver det punkt, der ligger her ude jo, det bliver så sinus til den vinkel, vi har tegnet ind her. Så det giver jo selvfølgelig god nok mening. Men jeg tror bare stadig, at den prøver at indlemme flere ting, end der er nødvendig. Og det er selvfølgelig interessant at høre om alt sammen, og jeg tror, at mange ville have godt af at lære om det osv. Men jeg tror når det kommer til en enkelt udledning, så bliver det meget at bede om.

0:22:35.7 Simon: Helt sikkert. Det er jeg enig i. Et spørgsmål mere. Det her med at ændringen i hastighed er to gange v gange cosinus til theta. Giver det mening for dig, hvorfor det er...

0:22:49.9 Studerende 7: Ja for den går fra at pege ned af her, og så hvis den bare var en, så ville den bare være flad. Så for at den kan komme op igen, så må det jo være to. Så den synes jeg egentlig...

0:22:59.2 Simon: Så den samlede ændring hvor peger den hen?

0:23:02.6 Studerende 7: Den samlede ændring den er jo... Den må jo så pege op, nej den jo... Den er bare flad er den ikke?

0:23:17.4 Simon: Den er jo ikke nul i hvert fald.

0:23:18.4 Studerende 7: Nej, så må den jo pege op.

0:23:17.7 Simon: Ja, og hvordan ville den så pege her nede, hvis det nu var rundt i cirklen?

0:23:24.1 Studerende 7: Så ville den så pege ind i cirklen.

0:23:26.1 Simon: Ja så det giver god mening?

0:23:26.7 Studerende 7: Ja det giver fin mening ja.

0:23:28.9 Simon: Cool - lad os prøve at hoppe videre til en mere.

0:23:34.7 [Afspiller video - Direkte udledning]

0:30:06.5 Simon: Det var endnu en måde.

0:30:07.5 Studerende 7: Ja, og det er den måde jeg lærte det på. Det er sådan hvert fald den måde, som jeg fik gennemgået da jeg lærte om cirkelbevægelse i gymnasiet, kan jeg huske. Sådan når man arbejder, i sammenhængen med at man lærer om differntiering, og generelt når man opererer i kartesiske koordinater, så synes jeg også at den fungerer rigtig fint. På nogen punkter kan den godt virke lidt forvirrende. Specielt hvis man ikke er særlig god til at differentiere, så bliver det lidt en helvede det her...

0:30:44.0 Simon: Hvorfor?

0:30:45.6 Studerende 7: Fordi at det jo netop er jo et langt bevis omkring, at hvor man bruger sammenhængen mellem at hastighedsfunktionen er den afledte af stedfunktionen og accelerationen det er den afledte af hastighedsfunktionen. Så hvis man ikke er så meget til, differentiering generelt, så bliver det meget tungt på en eller anden måde. Personligt så har jeg på en eller anden måde altid synes godt om, fordi der netop var den her at du brugte, det meget klassiske, som du har lært i fysik og så kombineret med matematik, at den er afledt af den her og den er afledt af den her, og derfor må det også gælde for en jævn cirkelbevægelse. Og det synes jeg egentlig fungerer meget godt, og sådan det med at vinklen kan skrives sådan der, og vinkelhastigheden kan skrives sådan som nede i bunden der.

0:31:35.8 Simon: Ja det sagde jeg jo sådan bare lidt ud af det blå. Giver det mening hvorfor, de ser sådan der ud?

0:31:38.0 Studerende 7: Ja det giver mening for mig i hvert fald. Altså det kræver nok lidt forklaring for de fleste, altså hvordan cirklen er bygget op, fordi hvis du har en cirklen jo [tegner], så giver det jo selvfølgelig mening, at hvis du har et punkt her, og du starter her, så kører du en hvis vinkel her, og hvis du gør det på et tidsrum, lad os kalde det t, så må theta jo kunne beskrives, som en eller anden hastighed, som er angivet i enten grader eller radianer, hvad du nu regner med, gange den tid, som så vil være omega t, hvor omega så f.eks. vil være...

0:32:25.0 Simon: Men kræver det ikke noget af den hastighed?

0:32:28.0 Studerende 7: Jo det kræver selvfølgelig at den er konstant. Men så længe man er fokuseret på det, at det er en jævn cirkelbevægelse med konstant hastighed, så synes jeg egentlig det er meget lige til. Og det samme, når det kommer til den der, så længe hastigheden forbliver konstant osv. Selvfølgelig kunne man også sætte en tidsvariable ind der, men det tror jeg, det er bare noget man kan putte på senere, hvis det var.

0:32:52.3 Simon: Et spørgsmål til. Her der står der faktisk, en vektor differentieret. Hvordan forestiller du dig en vektor differentieret?

0:33:01.4 Studerende 7: Jamen så forestiller jeg mig egentlig bare, at du tager hver koordinat for sig. Du har jo uafhængighedsprincippet, hvor og med at du kan behandle hver, henholdsvist x og y og alle de dimensioner hver for sig. Så det er hvert fald den måde, jeg gik til den dengang, altså at vi bare tog hver koordinat hver for sig. Og så satte det sammen til sidst.

0:33:29.9 Simon: Hvis det nu var en pil, som man også kan beskrive som. Hvis du skulle forestille dig at pilen blev differentieret, hvad forestiller du dig så?

0:33:39.0 Studerende 7: Ja den vil jeg så. Det synes jeg måske er sådan lidt. Det er ikke sådan helt så nemt at kigge på. Hvis du bare har vektorer sådan i hovedet som en pil jo, så er den jo lidt svær at kigge på. Med mindre du selvfølgelig deler den op i, hvad det nu end er...

0:33:58.1 Simon: Men hvis nu den her pil netop flyttede sig, ikk. Nu er den her pil bevæget sig her hen, og nu ser den sådan her ud efter noget tid. Kan man så finde den afledte?

0:34:14.1 Studerende 7: Ja den afledte vil så være den ændring der er sket over ja..

0:34:23.9 Simon: Ja fordi der står jo også her, at den næste afledte her, det er jo også en vektor, så den ville du også kunne tegne som en vektorpil.

0:34:28.7 Studerende 7: Præcis.

0:34:33.9 Simon: Og du forestiller dig - hvis vi nu siger, at det er et meget kort tidsrum.

0:34:38.2 Studerende 7: Så... [tegner]

0:34:43.7 Simon: Ja, det er også sådan jeg ville forstå det. Men det er rigtigt, at man kan se det koordinatvist, som du sagde.

0:34:50.0 Studerende 7: Ja det er hvert fald sådan jeg er vant til koordinaterne den gang... Hvis man har fået den her mere... Jeg ved ikke hvad man skal kalde det, jeg ved ikke om man kan kalde det geometrisk, men hvert fald sådan mere grafik baseret form for ideer blandt vektor, så tror jeg også, at det vil give fin mening for en jo. Så jeg synes... hvert fald for mit synspunkt, der er det en meget klassik metode, som jeg synes fungerer meget godt. Jeg synes den er... den er ikke helt ligeså, indtil videre så er min favorit stadig den første, fordi den er lidt pænere på en eller anden måde, og den er meget simpel.

0:35:33.0 Simon: Lad os prøve at hoppe videre til en mere, der er to tilbage.

0:35:37.7 [Afspiller video - Månens fald]

0:41:25.3 Simon: Så var vi der igen? Hvad synes du om det frie fald, månen laver?

0:41:31.3 Studerende 7: Jeg synes egentlig det er en meget sjovt måde at kigge på jævn cirkelbevægelse, fordi at det kan godt være det bare er mig, men jeg tror det er sådan en ting, folk godt kan relatere til og synes er lidt sjovt, fordi at man... Månen er jo noget som vi alle sammen kender til, som bare befinder sig oppe på himlen, og det der med at beskrive, hvordan det egentlig kan være at, den hele tiden bevæger sig rundt omkring, uden at den bare sådan lige pludselig falder. Det synes jeg egentlig er en meget sjov udgangspunkt. Jeg ved ikke, om den sådan til den første introduktion, om det er det bedste, for jeg synes, at det er en rigtig sjov tankeksperiment, men jeg tror måske, at det godt kan blive lidt for abstrakt for nogle måske, hvis det var deres aller første visning eller introduktion til cirkelbevægelse.

0:42:37.5 Simon: Hvorfor synes du, det er for abstrakt?

0:42:37.7 Studerende 7: Nej men jeg ved ikke - jeg tror måske bare at det er det her med at øhm... Jeg synes, nej det kan godt være, at det faktisk slet ikke er det.

0:42:51.3 Simon: Lad os prøve at tale om den der, for jeg skiller mig af med det led der. Hvad tænkte du, da det skete?

0:42:53.9 Studerende 7: Jamen det er jo, det kan selvfølgelig også være, at jeg er skadet af fysikken jo, men der giver det for mig rigtig fin mening, at hvis du har, altså hvis x bliver forsvindende lille og sætter den i anden, så giver det selvfølgelig mening, at det tal det er endnu mindre. Og så selvfølgelig så dividerer du med to r, som også gøre det mindre, så det..

0:43:16.5 Simon: Så i forhold til at faktisk delta t står også i anden.

0:43:20.9 Studerende 7: Ja netop, den bliver også forsvindende lille.

0:43:22.6 Simon: Så hvorfor er det den her, vi får lov at smide væk?

0:43:28.5 Studerende 7: Det er fordi, at bare lige i den her sammenhæng, hvor det viser sig at være praktisk, hvor du ved at senere i udledningen, så kommer den her, hvor vi alligevel kan få lov at smide delta t væk.

0:43:38.5 Simon: Ja vi havde noget ikke fået det samme frem, hvis vi smed det den her væk her.

0:43:42.2 Studerende 7: Nej netop.

0:43:43.8 Simon: Hvorfor giver det god mening, at smide det her væk? Altså vi sammenligner jo med noget andet i ligningen, så hvorfor giver det god mening at sammenligne de her to og ikke de her to?

0:43:55.7 Studerende 7: Jamen fordi... De der to de er jo begge to meget, altså de afhænger jo begge to af x. Hvor du ikke har noget afhængighed af x her over, så der kan du ikke rigtig bruge samme analogi. De giver jo selvfølgelig sagtens relatere til hinanden, men før du inddrager det der, så ved du det jo ikke. Så derved ved du ikke, om det her udtryk er forsvindende lille i forhold til x. Det kan sagtens være, at det faktisk være, at det er nogle ret store tal, der befinder sig der over. Altså ud over delta t, som bliver lille.

0:44:30.2 Simon: Lige præcis. Det her linje stykke, ikk, som hedder d til at starte med. Det udskifter jeg med v gange delta t. Men så det her linjestykke, som hedder x, det udskifter jeg med en halv gange a gange delta t i anden. Giver det mening for dig, hvorfor det er to forskellige?

0:44:47.6 Studerende 7: Ja, hvis man har, hvis man kender til objekter i frit fald, så ved man jo at, altså sådan hvis man kigger på dem, sådan rent idealistisk, at de så har, at de arbejder med en konstant acceleration, i og med tyngde accelerationen. Hvor imod at hvis vi antager, at der ikke er nogen luftmodstand eller noget der bremser den ned, eller speeder den op på nogen måde. Dermed må den bevæge sig med konstant hastighed i den akse og så vi jo bruge uafhængighedsprincippet igen.

0:45:23.8 Simon: Ja lige præcis.

0:45:24.4 Studerende 7: Det kræver selvfølgelig også lige at det bliver sådan, at det enten er blevet forklaret, eller at folk de får det fortalt undervejs. Jeg synes også det er en sjov måde at gøre det på i hvert fald. Den er lidt mere interessant end den f.eks. med de kartesiske koordinater, hvor den bare sådan bliver meget matematisk og afhængigt af en tilfældig cirkel, hvorimod det her er sådan lidt mere grounded på en eller anden måde, som jeg godt kunne forestille mig ville virke for en del.

0:46:00.2 Simon: Jamen lad os springe til den sidste. Så er vi ved at være i mål.

0:46:04.0 [Afspiller video - Ensvinklede trekanter]

0:53:00.2 Simon: Sidste udledning. Hvad tænker du?

0:53:05.8 Studerende 7: Jo jeg synes egentlig også... Den er forholdsvist simpel, og den gør det den skal. Jeg synes, den minder meget om det Mazur han prøver med hele sin bog. Det er sådan at gøre det hele sådan håndgribeligt. Den er forholdsvist kort og forholdsvist simpel. Det eneste den sådan afhænger af, det er at du lige kender til ja det her med de ligebenede trekanter og så øh... at det her med sted og hastighedsafledte. Så det...

0:53:44.7 Simon: Hvad med den vinkel der? At de er lige store der. Kan du forklare det?

0:53:51.5 Studerende 7: Kan man vel forklare det i og med, at hvad skal man sige... At øhm... Som du gør her, du rykker den her op jo, og så finder du, og så den vinkel der, der er i mellem dem, det vil man jo også på sin vis bare have gjort med en ny radius på... og så have taget udgangspunkt i denne her og hvor denne her ville have haft samme størrelse, og så... [tænker] Det er sådan lige at skulle forklare. Det er ikke sådan set det mest, hvad kalder man den, sådan åbenlyse ting selvfølgelig, at man ved det fra trigonometrien af.

0:54:49.5 Simon: Ja det er rigtigt.

0:54:50.9 Studerende 7: Men fordi det er sådan... Jeg synes hvert fald ikke selv, at det sådan er nemt at stå i det og forklare det sådan lige præcist.

0:55:01.2 Simon: Nej det forstår jeg godt. Så tager vi grænseværdien her nede. Hvor delta t går mod nul. Hvad forestiller du dig i det her setup, at der sker, når vi gør det?

0:55:09.2 Studerende 7: Når grænseværdien går mod nul, så er det at, så forestiller jeg mig bare at, det her stykke det bliver mindre og mindre og mindre...

0:55:17.2 Simon: Ja lige præcis.

0:55:19.3 Studerende 7: Hvor så at dine v'er de kommer til at ligge mere og mere oven i hinanden, hvor det til sidst bare egentlig er hinanden jo.

0:55:29.0 Simon: Ja og kan du så se noget med de vinkler faktisk?

0:55:30.6 Studerende 7: Ja så bliver de ens, ja. Så bliver det præcis den samme. Ja det kan jeg faktisk godt se at det er ja. Så på den vis, giver det egentlig meget god mening.

0:55:44.2 Simon: Så snakkede jeg om det der gennemsnitlig acceleration og øjeblikkelig acceleration. Hvad tænker du om forskellen der?

0:55:50.0 Studerende 7: Som du selv nævner jo. Det gennemsnitlige det er jo over et større tidsintervel, og det er jo netop også derfor at du prøver at tage grænseværdien der, og gør tidsrummet uendelig lille sådan at du får det i et enkelt øjeblik.

0:56:09.3 Simon: Ja for hvor lille skal det egentlig være?

0:56:11.4 Studerende 7: Jamen det skal jo teknisk set være ikke eksisterende, og det er jo en måde og illustrere det på, det der med at tage grænseværdien, hvilket jo bare er differentiering jo.

0:56:21.1 Simon: Så for dig, hvad er mest virkelig? Hvis man kan snakke om det?

0:56:29.1 Studerende 7: Jeg vil sige, at de begge to er relevante. De begge to eksisterer jo på en eller anden vis, men de er ikke er nødvendigvis er den samme. Det afhænger jo meget af hvilken type bevægelse, den har. Men, øhm, den mest rigtige, vil jeg mene, det vil være den øjeblikkelige hastighed, hvis man sådan skulle snakke om noget, der bevæger sig. Uanset hvad du snakker om, så er den mest rigtige måde at fortolke det på den instantane hastighed med mindre den selvfølgelig bevæger sig med konstant hastighed, hvormed det jo er den gennemsnitlige.

0:57:17.9 Simon: Ja, så kunne jeg godt tænke mig at vide, hvad for en du bedst kunne lide og hvorfor?

0:57:21.7 Studerende 7: Jeg tror, at den jeg bedst kunne lide sådan rent... Det er sådan lidt forskelligt for den jeg selv er blevet lært, det er den med de kartesiske koordinater, men det er ikke den jeg bedst sådan kan lide, men i hvert fald den jeg er mest familiær med og den jeg synes, der sådan giver sådan... Det er den der sådan giver bedst forståelse for den på en eller anden måde. Dog vil jeg så sige, at den jeg synes er bedst, når det kommer til at være simpel og lettest forståelig, det er den aller første der med cirklen og perioden, som jeg egentlig synes er... Jeg synes på en eller anden måde, at den kan beskrives som flot og smuk på en eller anden måde. Den tager bare en cirkelperiode og så beskriver den det ud fra det. Så den synes jeg er min favorit af dem.

0:58:16.7 Simon: På grund af simpelheden?

0:58:17.9 Studerende 7: Ja bare sådan hvor simpel den egentlig er. Hvor nemt det egentlig det kan gøre på en eller anden måde. Selvfølgelig du får mere ud af det i den længere bane, så får du nok mere ud af at kende til de kartesiske koordinater på en eller anden måde, men hvis du bare sådan tager...

0:58:28.3 Simon: Synes den du den med de kartesiske koordinater, giver dig et bedre indtryk af hvorfor ligningen ser sådan ud?

0:58:34.1 Studerende 7: Jeg synes, den giver et bedre indtryk af, ja hvorfor det er sådan her, og det samme... Nej det ved jeg nu ikke - jo det er den der giver hvert fald mig det bedste sådan indtryk af, hvorfor det præcis er sådan her formlen ser ud.

0:58:51.4 Simon: Og kan du forklare hvorfor du har det sådan?

0:58:54.0 Studerende 7: Jeg tror det er fordi at sådan, det er selvfølgelig også bare, at jeg er så lidt partisk overfor, at det er den jeg selv har lært det ud fra. Men jeg tror bare, at det er generelt er fordi at, at netop den inddrager meget, at hvis du kigger på det sådan henholdsvist dimensionsmæssigt, så kan du kigge på uafhængighedsprincip og du kan kigge på differensation og sådan videre. Så på den måde synes jeg både, at det giver en fysisk fortolkning af det samtidig med at den kobler det sammen med matematikken, hvormed at der bliver etableret sådan lidt mere fast bånd mellem de to, i stedet for en tilfældighed at vi har det her, der sådan kan lige præcis kan bruges i den her sammenhæng. Fordi det synes jeg, selvom den første er meget flot, så bliver det sådan lidt mere en tilfældighed - altså tilfældigvis er det den her cirkel vi arbejder med øhh...

1:00:05.0 Simon: Ja det kan være det leder lidt videre til hvilken du mindst kunne lide og gav dig mindst forståelse for ligningen.

1:00:14.9 Studerende 7: Jeg synes egentlig at Newtons metode gav mig god forståelse, den tager bare en masse omveje, synes jeg. Så den bliver kompliceret på en eller anden måde, men den giver rigtig god forståelse for det, vil jeg mene. Og Gamows den.. Jeg tror måske det er den, der giver mindst forståelse af det, vil jeg mene.

1:00:36.7 Simon: Hvorfor?

1:00:38.7 Studerende 7: Jeg ved det ikke helt. Jeg tror måske, at selv om det den tager udgangspunkt i en meget fast fortolkning af det, så bliver det stadig sådan lidt... øhm, så bliver den på en eller anden måde lidt for pæn og ikke helt nok matematisk til at man får en dyb nok forståelse af sammenhængen. Der er stadig alle de fysiske aspekter, som er fint forklaret, og bliver brugt rigtig fint, men sådan rent matematisk, der bliver der ikke gravet dybt nok til at man sådan får en direkte forståelse af, at arh okay det er den afledte og det er bevægelse og sådan. Det er mere noget som der sådan bliver brugt i den, som man ikke rigtigt sådan... Det bliver ikke rigtig krævet at man forstår det, det er mere bare noget som man bruger i det. Og det fungerer selvfølgelig også rigtig fint, men jeg ved ikke hvor læringsmæssigt det er. Matematikken skal selvfølgelig ikke forstyrre ens læring, men den skal heller ikke bare være en del af det, for bare at være en del af det. Den skal stadig forstås, for at man får et helhedsbillede, synes jeg jo.

1:01:53.5 Simon: Ja, så har jeg kun et enkelt lille dilemma her til sidst. For det her er jo den ene måde at skrive det på, men der findes også en anden formel, som siger, at hvis man tager vinkelfrekvensen og sætter den i anden og ganger den med r. Og denne her oppe, den antyder jo at acceleration er omvendt proportionelt med radius, og her nede ligner det at den er proportionel med. Er det en fejl eller?

1:02:19.9 Studerende 7: Nej det er jo ikke en fejl i og for sig jo.

1:02:27.7 Simon: Nej men det ser jo lidt mærkeligt ud?

1:02:28.6 Studerende 7: Jo men det har jeg nemlig også selv sådan kæmpet lidt med, kan jeg huske, da jeg selv blev introduceret til det. Det giver sådan lidt et tvetydigt billede af det.

1:02:40.4 Simon: Hvordan ville du forklare dig ud af det her, hvis du skulle?

1:02:42.1 Studerende 7: Jamen så ville jeg inddrage... Jeg tror bare jeg ville inddrage definitionen af den der, for så ville vinkelhastigheden jo kunne beskrives som... v over r. og så når du sætter den i anden, så lige pludselig så får du den er i anden og den her i anden, og så ganger du med radius og så forsvinder den ene radius.

1:03:15.9 Simon: Lige præcis ja.

1:03:17.2 Studerende 7: Øhh så det er den måde, jeg ville forklare det på ja. Det er måske ikke sådan en fysisk forklaring i sig selv.

1:03:27.2 Simon: Nej, kunne man forklare det fysisk?

1:03:29.8 Studerende 7: Øhm, hvorimod denne her, det er jo bare ændring i vinkel gange radius mens det her det så bare er en bevægelse ude på periferien... [tænker] Der er klart en god måde at forklare det på. Jeg kan bare ikke selv lige formulere det.

1:03:52.7 Simon: Det er klart den hurtige nemme løsning, det er den der.

1:03:55.1 Studerende 7: Ja præcis.

1:03:57.8 Simon: Men helt sikkert. Jeg tror egentlig vi er igennem. Det var virkelig fedt ud gad at være med...

# E Survey

## E.1 Question 1: Information About the Survey

1. Hej og tak fordi du har valgt at deltage i mit projekt.

I det følgende skal du se 5 videoer hver af ca. 6 min. længde, og bagefter skal du svare på et par spørgsmål til hver video. Husk at dette spørgeskema på ingen måde er en test, der handler om at finde rigtige og forkerte svar. Jeg er interesseret i at få indblik i, hvordan du forstår og tænker om de forskellige metoder. Svar derfor så ærligt som muligt efter hver video - alle svar er rigtige svar. Husk også I vil fremstå anonyme i alt data, der bliver præsenteret.

På forhånd tak - Simon

## E.2 Question 2: Immediate Knowledge

2. Når et objekt bevæger sig uniformt i en cirkelbane, så er centripetalaccelerationen ac givet ved:

$a_c = v^2/r$,

hvor v er objektets fart og r er radius af cirkelbanen.

Hvad forstår du ved formlen for ac, og kan du forklare med ord (skriv et par linjer), hvorfor den ser ud som den gør?

**Answer 1:** Den betyder at jo mindre en radius og jo større en hastighed på cirkelbanen jo større en acceleration. For det første kan vi se at enhedsanalyse passer. Vi kan også omskrive til $a_c = \omega^2 r$. Derudover er accelerationen altid vinkelret på hastigheden så den ændre kun hastighedens reting. Det vil sige at hvis den har samme hastighed men $k$ gange større radius, så tager den $k$ gange længere tid til at lave samme ændring i hastighed så $a_c$ er proportional med $1/r$ og hvis den bevæger sig k gange så hurtigt har $1/k$ gange så lang tid til at lave k gange ændringen i hastighed så $a_c$ er proportional med $v^2$.

**Answer 2:** Det er oblagt at større fart giver større acceleration, da hastighedsændringen da bliver større når man bevæger sig i en cirkelbue. Tilsvarende ændres retningen mere per cirkelbue længde ved mindre diameter, og derfor giver det mening at radius er i nævneren.

**Answer 3:** Jeg er ikke klar over, hvorfor den ser ud, præcist som den gør, men det giver god mening, at $a_c$ er omvendt proportionalt med $r$, sam t at $a_c$ stiger, når $v$ stiger. Dog er det ikke klart, hvorfor $v$ er i anden.

**Answer 4:** Det er en formel for accelerationen ind mod centrum, ved ikke hvorfor den ser ud som den gør.

**Answer 5:** Den accelration man har ind mod omdrejningspunktet bliver meget stor som hastigheden man har bliver større, da man skal ændre sin retning hurtigere.

**Answer 6:** m

**Answer 7:** Jeg forstår at når farten øges har det større indflydelse på end radiussen har. Men jeg kan ikke helt regne ud hvorfor. En stor radius giver en mindre $Ac$ og en større hastighed giver en større $Ac$, hvilket jeg synes er meget logisk.

**Answer 8:** Umiddelbart giver den meget lidt forståelse. Jeg ved at jeg kan bevise hvordan formlen opstår, ud fra vinkelhastigheder og vinkel positioner, men ville have svært huske formlen, for den giver ikke intuitivt mening

**Answer 9:** $a$ udvikler sig eksponentielt mht hastigheden og er omvendt proportional med radius af cirkelbanen.

**Answer 10:** Kan umiddelbart kun sige at den ser ud som at den gør, for at enheden ender i $m/s^2$. Jeg har ingen intuitiv forståelse for hvorfor at v skal være i anden. At $v^2$ divideres med $r$, må bunde i at man ser på et forhold mellem de to led. Men kan ikke bevise formlen på stående fod.

**Answer 11:** accelerationen er hvilken kraftpåvirknin objektets masse oplever. Denne afhænger eksponentielt af hastigheden, men bliver mindre jo stærre cirkelbanen er.

**Answer 12:** accelrationen af et objekt i en cirkelbanen er afhængig af hvor stor radius af cirkelbanen er. En større radius giver objektet en laver fart eller hvis den fast holder sin fart kræver det en større accelration.

**Answer 13:** Det kan ses, at centripetalaccelerationen stiger, når hastigheden stiger, og falder, når radiusen stiger. Dette giver mening, da en større hastighed kræver en større acceleration, hvis cirkelbanen skulle bibeholdes. Ligeledes giver det mening i forhold til radius, da en større radius vil give en større længde at skulle dreje på, hvilket gør den øjeblikkelige acceleration mindre.

**Answer 14:** For at et objekt skal bevæge sig i en cirkelbane, skal det have en acceleration ind mod centrum der er lige så stor som dens øjeblikhastighed i anden over radiussen af cirkelbevægelsen. Dette er fordi accelerationen altid skal være positiv, så begge dele af produktet skal være positive, og fordi accelerationen skal være stor hvis objektet er tæt på, da den skal krumme dens bevægelse meget mere.

**Answer 15:** Den ser ud som den gør, da der skal være en centreret acceleration, hvis størrelse kan findes ved at tænke på vinkelfrekvensen den acceleration må afhænge af før vi bevæger os i en perfekt cirkel. Derfra får vi formlen $a_c = mr\omega^2$ som så laves om til den formel der ovenover er angivet ved at bemærke at $r\omega = v$.

**Answer 16:** Acceleration er en vektor, indad mod centrum. Acceleration defineres normalt som v/t, men i en jævn cirkelbevægelse skal hastigheden i anden for at det bliver en jøvn bevægelse. (?)

**Answer 17:** Jeg kan godt forklare, hvad jeg forstår ved centripetalacceleration, men jeg kan ikke sige så meget om det netop ud fra formlen. Vi har fået den udledt således, at ændringen i hastighed divideret med ændringen i tid er lig med hastighed divideret med radius gange ændringen i sted divideret med ændringen i tid. Dvs. delta $v/\Delta t = v/r \cdot \Delta r/\Delta t$, hvilket giver $a = v^2/r$.

Og hvad jeg forstår ved centripeltacceleration er, at idet vi antager, at et objekt bevæger sig i en cirkelbevægelse med konstant hastighed, så er der ingen acceleration i bevægelsesretningen, derimod skal der en acceleration (en hastighedsændring pr. tidsenhed) til at ændre hastighedens retning. Denne acceleration skal være vinkelret på bevægelsen og ind mod centrum, for at få objektet til at bevæge sig i en uniform cirkelbane. Det er ikke nogen kraft i sig selv, men kan tage form som snorkraft, friktionskraft osv.

**Answer 18:** Der er en acceleration ind mod midten af banen, dette gør at objektet hele tiden ændrer retning, så accelerationen og farten er vinkelret på hinanden.

## E.3 Question 3: Similar Triangles

Følgende link indeholder en video, hvor centripetalaccelerationen ac bliver udledt vha. metoden 'Ensvinklede trekanter':

https://youtu.be/GOKjtUfmSJo

Kopier linket og åben videoen i en ny fane. Når du er færdig med at se videoen så svar på følgende spørgsmål:

1. Udpeg og beskriv de dele af videoen (fx. antagelser, simplifikationer, specifik matematik osv.), der hjalp dig til at få en bedre forståelse af formlen for ac. Skriv et par linjer, hvor du uddyber dit svar.

2. Ligeledes, beskriv specifikke dele af udledningsmetoden, du ikke forstod eller som på anden vis forvirrede dig undervejs i videoen. Forklar hvorfor i et par linjer.

**Answer 1:** Det er meget godt med en geometrisk forståelse udover den normale aritmetiske forståelse. Så den del med at tegne de ensvinklede trekanter var god da jeg ikke har tænkt på det før. Jeg har set på disse typer beviser før og selv lavet mange af dem så det var ikke forvirrende for mig.

**Answer 2:** Det var rart at det blev udpenslet at de rette vinkler sikrede at de to trekanter var ensvinklede. Det hjalp også at definitionen af en cirkel og den konstante fart blev benyttet til at fortælle at de to trekanter er ligebenede.

**Answer 3:** 1. Det at du udelukkende bruger helt basale matematiske begreber så som trekantsgeometri og grænseværdier gjorde det helt klart, hvorfor udtrykket ser ud som det gør, og jeg har dermed lært noget nyt, så mange tak.

2. Der var ikke noget.

**Answer 4:** Situaionen i begyndelsen af videoen er nem at forstå. Gerne lidt forståelse af hvordan vektorerne delta-v og delta-r rent faktisk beskriver forskellen i hastighed og position. Forstod ikke hvorfor de to trekanter var ensvinklede. Udledningen er rigtig god.

**Answer 5:** 1) Det hjalp at det hele blev simplificeret til trekanter, så man let kunne se hvorfor formlen måtte se ud som den gjorde.

2) Når man kigger på det med trekanter kan jeg godt føle at jeg mister noget af fysikken, da meget af den forståelse for trekanter som jeg har er selv følge, så jeg ikke bruger så meget tid på at overveje fysikken i hvert skridt.

**Answer 6:** j

**Answer 7:** Jeg synes da der blev skrevet ved trekanterne kom der mange ting man skulle holde styr på. Det gjorde det ret indviklet.

**Answer 8:** 1. Den simplicistiske antal trin for at nå frem til accelerationen var en stor hjælp, dette gjorde det nemmere at kunne følge med og huske (forhåbelig).

2. Måden trekanterne bliv bevist det samme bliv gjordt for hurtigt, og tvang mig til at stoppe videoen og spole tilbage, for at forstå, specielt at vinklen var det samme for begge trekanter.

**Answer 9:** Jeg synes det var rigtig godt forklaret. Fint at der blev beskrevet hvert skridt, og hvorfor han gjorde hvad han gjorde.

**Answer 10:** 1. Det visuelle geoemetriske aspekt hjalp med at få et overblik. Den uddybende forklaring med at delta var en stor periode, hvilket vil give gennemsnittet, og at man derfor var nød til at tage limit af t for at få øjebliks accelerationen hjalp.

2. Ingen klager

**Answer 11:** 1. Det faktum, at man kunne se på det som to trekanter. Også fint at nævne det med "store" og "små" tidsintervaller.

2. Det gav mening, men der blev gået rimelig hurtigt over, hvorfor de to trekanter var ensvinklede, hvilket der nok kunne være brugt 2 sekunder mere på.

**Answer 12:** At hastigheden og radiussen er konstant, derfor er der en skaleringskonstant der kan findes fra hastighedsændring og positionsændring.

**Answer 13:** Hastighedsvektorerne er altid vinkelrette på stedvekoren. Forholdet i de to trekanter der dannes ved forskydning er ens. Delta t som normalt indgår i ligningen for acceleration indgår ikke her, da $a_c$ ønskes at være øjebliksaccelerationen, og derfor tages grænseværdien for t gående mod nul. delta r/delta t, når t går mod nul, bliver dr/dt, hvilket er det samme som hastighed - Derfor er v i anden.

Jeg forstår udledningen, men tror det er en af dem der skal tages et par gange for den rigtig sidder. Det der med bare lige at dividere med delta t, det var jeg sgu ikke selv kommet på. Og hvorfor er det kun de abselutte værdier der divideres med?

**Answer 14:** 1. Beviset for, at vi har fat i en ensvinklet trekant, og at vi derfor kan sætte forholdet mellem nogle af siderne lig med hinanden var rar at se, også fordi det er starten på udledningen/den antagelse, udledningen bygger på, og så giver det pludselig bedre mening, at man sætter det op sådan. Generelt kan jeg godt lide udledningen, da den har det visuelle aspekt, som giver god mening, og det, at udledningen bygger på noget så basalt (folkeskolestof tror jeg) som ensvinklede trekanter, gør den meget lige til.

Generelt vil jeg sige, at det ikke så meget er udledningen, der er svær at forstå, men normalt glemmer man bare, hvor formlerne kommer fra, så husker man bare den specifikke formel for centripetalkraft og husker ikke hvorfor, den egentlig ser ud, som den gør.

**Answer 15:** 1) Overskuelig tegning, godt at se det geometrisk.

2) nemt forståeligt så blev ikke forvirret

## E.4 Question 4: The Fall of the Moon

Følgende link indeholder en video, hvor centripetalaccelerationen ac bliver udledt vha. metoden 'Månens fald':

https://youtu.be/_T6d7z94FWg

Kopier linket og åben videoen i en ny fane. Når du er færdig med at se videoen så svar på følgende spørgsmål:

1. Udpeg og beskriv de dele af videoen (fx. antagelser, simplifikationer, specifik matematik osv.), der hjalp dig til at få en bedre forståelse af formlen for ac. Skriv et par linjer, hvor du uddyber dit svar.

2. Ligeledes, beskriv specifikke dele af udledningsmetoden, du ikke forstod eller som på anden vis forvirrede dig undervejs i videoen. Forklar hvorfor i et par linjer.

**Answer 1:** Det var en god indførsel af taylor approximering hvis man ikke har haft om taylorudvikling før. Dog kan det måske virke lidt forvirrende at vi kan bruge $1/2adt^2 = ds$ da vi normalt kun har set denne i andre sammenhænge og har fået at vide at vi skal passe på med at bruge den f.eks. når vi taler om gravitationskraft. Jeg kan dog godt se at man godt kan gøre det da accelerationen er konstant. Men det kunne godt potentielt være forvirrende.

**Answer 2:** Det var rart at der var mere fysiske intuition i dette eksempel.

Jeg er stadig ikke tryg ved ideen om at lade værdier blive forsvindende små og derfor udelade dem helt fra formlen, så en forklaring af hvorfor det er i orden vil måske hjælpe på intuitionen.

**Answer 3:** 1. Det er rigtig godt for forståelsen, at x erstattes med $1/2 * a * t^2$ og at leddet $(x^2)/2r$ ignoreres, da det er meget småt. Det givet en mere solid intuition, da det er lidt mere fysikagtigt og ikke så stringent matematisk.

2. Jeg var rigtig godt tilfreds, men nogen ville helt klart undre sig over, at du bare sletter et led.

**Answer 4:** Nemt at forstå situationen og følge med i videoen, på den måde rigtig godt. Men det kan virke lidt svært at generalisere formlen for a når man har fået den fra en specifik situation.

**Answer 5:** 1) Det hjalp at det var et fedt eksempel, og især at få en ny måde at tænke på cirkelbevæglser på vha. det her konstante fald som giver god intuition om fysikken. På den måde giver ligningerne undervej også meget mere mening, selvom de kun er led i en udledning.

2) Intet var rigtig forvirrende

**Answer 6:** m

**Answer 7:** Jeg synes denne metode er rigtig god fordi der er meget færre ting man skal have styr på og samtidig bruger den nogen man i forevejen kender rigtig godt, nemlig pythaguras. Det eneste jeg havde lidt svært ved at se var det faktum at vi kunne se bort fra det led du stregede over ved 4.18 sekunder. Men synes bestemt det var en bedre metode og mere forståelig end den forrige

**Answer 8:** 1. Dette gav en mere "dagligdagsforståelse" altså at disse størrelser nævnt i videoen var brugt siden gymnasiet og kan huskes. Beviset giver en god forståelse i at det passer på grund af det, da man kan visuelisere sig det fra virkelighedsprincipper.

2. Beviset har mange flere trin i forhold til hvad man skal gøre og "fiske frem" altså størrelser man kender udefra, og medtager i beviset, for at man kan komme til et svar. Dette gør det meget besværligere at huske.

**Answer 9:** Jeg synes ikke det er trivielt at x er et frit fald, det må gerne forklares i et på ord mere.

**Answer 10:** 1. Jeg kunne forestille mig, at nogle ville foretrække denne form for en mere "fysiks" udledning overfor ren geometri.

2. Jeg kunne omvendt forestille mig, at approksimationen med "meget lille tal gange meget lille tal er nærmest nul" måske også ville irritere nogle.

**Answer 11:** 1: Den antager ikke konstant hastighed i cirklen, bare at bevægelsen er en cirkel og den har en hastighed til en vidst tid, så det føles mere rigtigt.

**Answer 12:** Denne metode er rigtig god - og meget håndgribelig. Lidt bedre synes jeg hvis man også skrev ned, hvorfor det ene led bliver så uendeligt småt så det kan ignoreres. Det giver mening, men det kan vel skrives matematisk? Det ville hjælpe mig. Hvis Jorden forsvandt ville Månen ved stasig have en afbøjet bane, blot rundt om det næste store objekt i rummet? Eller er det forkert? Antagelsen med $x = 12adt^2$ forstår jeg ikke. Det er meget specifikt at man skal se det som et "frit fald". Ikke helt trivielt synes jeg. Men når så de antagelser er gjort, så giver udtrykket til sidst fint mening.

**Answer 13:** 1. Virkelig smart at se det som små ryk/frie fald ind mod centrum og bruge galileis formel. Igen er matematikken ret simpel og ligetil, og man forstår trinene.

2. Startantagelserne i en udledning er ikke altid lige klare, her f.eks. hvorfor man lige præcis er interesseret i at udtrykke hypotenusen i trekanten. Det er altid sådan lidt "nu prøver vi lige at gøre det her", og så vha. lidt matematisk trylleri kan vi nå frem til vores ønskede udtryk.

**Answer 14:** 1) Sjovere tankegang, men meget forståelig

2) Lidt forvirrende hvor du ville hen med x i starten.

## E.5 Question 5: Calculus Derivation

Følgende link indeholder en video, hvor centripetalaccelerationen ac bliver udledt vha. metoden 'Direkte udledning':

https://youtu.be/2XkF5e_VFTw

Kopier linket og åben videoen i en ny fane. Når du er færdig med at se videoen så svar på følgende spørgsmål:

1. Udpeg og beskriv de dele af videoen (fx. antagelser, simplifikationer, specifik matematik osv.), der hjalp dig til at få en bedre forståelse af formlen for ac. Skriv et par linjer, hvor du uddyber dit svar.

2. Ligeledes, beskriv specifikke dele af udledningsmetoden, du ikke forstod eller som på anden vis forvirrede dig undervejs i videoen. Forklar hvorfor i et par linjer.

**Answer 1:** Det var godt at regnereglerne blev brugt også lige blev nævnt så det ikke virkede som magi. En ting er at det muligvis er lidt forvirrende at se vektorer skrevet op som en sum i stedet for som en søjlevektor.

**Answer 2:** Det er rart at metoderne der benyttes for sammenhænge mellem sted, hastighed og acceleration i 1d kan benyttes her. Jeg synes at den her forklaring bygger på metoder og sammenhænge man ser i meget anden mekanik, og derfor er den rigtig god. Dog ville jeg også supplere med et grafisk eksempel, evt. det første med de ens trekanter.

**Answer 3:** 1. Super lækkert, denne metode bruger i højere grad begreberne fra emnet og er derfor rigtig god til at binde emnet "roterende legmer" sammen.

2. Det vil for nogen være for svært at følge udledningen, da alle ikke er så gode til at differentiere.

**Answer 4:** Jeg kendte ikke til udtrykket for vinkelhastigheden.

**Answer 5:** 1) Det var let at gå til da det hele var baseret på meget formel matematik, som man har set og bearbejdet meget før. Sepcifikt at vi skal differentiere for at finde acceleration har man gjort meget før mht. translatorisk bevægelse, så det gør det lettere at forså når det samme gøres for rotationel bevægelse.

2) Det var meget forståeligt, dog skal man holde tungen lige i munden nå kædereglen skal anvendes så mange gange.

**Answer 5:** n

**Answer 6:** Det var en meget kedelig udledning. Jeg havde svært ved at holde koncentrationen under udledningen og glemte faktisk et øjeblik at følge med. Og når jeg så prøvede at følge med igen var det svært fordi der stod så meget.

**Answer 7:** 1. Denne hjælper til at forstå det med henblik på de polære koordinater, og kan dybbere se sammenhængen med den. Denne føles dog dejlig til at benytte som sit eget bevis (måske som en opgave) for at selv nå frem til den åbenbaring af løsning, da den ikke kræver så meget tænkning ud af boksen.

2. Denne er væsentlig længere at skrive per trin, og føles ikke som en god "genbliks" bevis, og er derfor ikke så god til at huske med.

**Answer 8:** fint med en matematisk udledning, der beskriver hvordan man kan finde frem til $a_c$, men der er ikke så meget fysik med ift. de forrige videoer

**Answer 9:** 1. God blanding af matematik og fysik og en mere "direkte" metode. Fint med brug af simpel og enkel matematik til udledningen.

2. Kræver bare lige, at folk kender til de forskellige emner inden for trigonometri, vektorer og en for introduktion til rotation i planen.

**Answer 10:** 1: det gav mig en bedre forståelse for hvordan formlen er en anden måde at skrive accelerationen op, i stedet for at skrive den op med vinkelhastigheden.

**Answer 11:** Personligt giver polære koordinater aldrig mere mening - samt î og j... Jeg ved godt hvad de er, meeen ikke just det nemmeste eller logiske. - Synes jeg. Kan dog godt lide at man først starter med at få opskrevet de kendte sammenhænge man kommer til at benytte i udledningen.

**Answer 12:** 1. Det, der var godt ved denne metode, er, at man udleder accelerationen ved at differentiere stedfunktionen og hastighedsfunktionen, hvilket er stof, der er godt kendt i forvejen, så man kan direkte se, hvor formlen for centripetalacceleration kommer fra, og det er faktisk bare stedfunktionen, og man kommer også frem til, at den skal have modsat retning af stedfunktionen, og det er rart, at man kan se det rent matematisk.

2. Der var ikke noget, der forvirrede.

**Answer 13:** 1)

2) Mindre intuitiv, nok grundet at det mere handlede om sinus og cosinus. Krævede mere bagrundsviden at følge med.

## E.6 Question 6: Equal Revolution Periods

Følgende link indeholder en video, hvor centripetalaccelerationen ac bliver udledt vha. metoden 'Ens perioder':

https://youtu.be/ju2B7C8qkxU

Kopier linket og åben videoen i en ny fane. Når du er færdig med at se videoen så svar på følgende spørgsmål:

1. Udpeg og beskriv de dele af videoen (fx. antagelser, simplifikationer, specifik matematik osv.), der hjalp dig til at få en bedre forståelse af formlen for ac. Skriv et par linjer, hvor du uddyber dit svar.

2. Ligeledes, beskriv specifikke dele af udledningsmetoden, du ikke forstod eller som på anden vis forvirrede dig undervejs i videoen. Forklar hvorfor i et par linjer.

**Answer 1:** Jeg synes at det var godt for at få en mere intuitiv forståelse, en god idé at kigge på perioderne, men jeg synes også at det det krævede lidt mere at følge logikken i denne i modsætning til f.eks. aritmetikken , formentlig fordi der blev tegnet en masse og jeg er bedre til formler.

**Answer 2:** Jeg kan godt lide hvor simpelt det er, men intuitionen glipper lidt ved selve konceptet i at tegne de to cirkler og sætte perioden for hastighed og sted lig hinanden. Jeg tror godt at jeg forstår det, men det giver ikke lige så god intuitiv mening som de tre foregående eksempler gør for mig.

**Answer 3:** 1. Jeg lærer meget ved at se ting og denne video er meget visuel, hvilket er godt.

2. Intet

**Answer 4:** 1) Meget af matematikken og fysikken er super intuitiv, så man ikke behøver at tænke meget over hvorfor de 2 perioder skal være lige store. Visulaiseringen af de forskellige vektorer var en stor hjælp.

2) Intet var forvirrende

**Answer 5:** k

**Answer 6:** På en eller anden mpde gav den en god ide om at kraften peger ind mod midten, men jeg mangler (måske bare mig) en lidt bedre forståelse for hvorfor man kan gå fra r til v til a ved at overfører det på den måde. Men ellers synes jeg egentlig metoden var okay, den var til at følge med i og forstå og jeg synes den gav nogle gode pointer.

**Answer 7:** 1. wow! det er en virkelig simpel og nem måde at se det på, samt bevise det. Det er enkelt, da det kræver få trin samt ikke kræver meget grundviden eller nyintroducerende emner/størrelser, og det er visuelt og kan nemt forstås.

2. alle trin fungerede fint

**Answer 8:** fint at udledningen var så hurtigt, men den var ikke speciel beskrivende.

**Answer 9:** 1. Det er et simplere bevis, og er ikke så tungt i matematiken eller fysiken.

2. Bevisets udformning for det måske til at virke mindre "formelt". Afhængigt af niveau (gymnasie/universitet) skal den sidste udledning af den endelige formel i hvert fald indeholde et trin til, da det måske ville gå for hurtigt for nogle, der så lige skulle bruge 3 sekunder mere og måske missede noget af det, der blev sagt efterfølgende.

**Answer 10:** 1: den giver en rigtig god geometrisk forståelse for formlen.

**Answer 11:** Denne udledningsmetode har jeg aldrig set før, men den virker faktisk. En sammenhæng jeg ikke har tænkt over før. En formel for periode ville jeg gerne have var skrevet op først - men nu kan jeg også bare godt lide at se (og dermed huske) hvilken ligning der skal benyttes. Ellers rigtig god udledning. Det er en sammenhæng forklaret jeg aldrig har tænkt over.

**Answer 12:** 1. Dét var smart. Det visuelle hjalp meget til at forstå formlen, og det med at man kan se, hvordan vektorerne vender i forhold til hinanden. Og så var det bare en super simpel udledning, fordi der ikke skulle man antagelser til.

2. Heller ikke noget forvirrende her, det gav god mening.

**Answer 13:** 1) Fine tegninger, overskueligt

2) mangler grund til at hastighedsvektorene nødvendigvis ligger vinkelret på stedvektoren

## E.7 Question 7: Newton's Polygon Model

Følgende link indeholder en video, hvor centripetalaccelerationen $a_c$ bliver udledt vha. metoden 'Newtons polygonmodel':

https://youtu.be/VtPGxY7helo

Kopier linket og åben videoen i en ny fane. Når du er færdig med at se videoen så svar på følgende spørgsmål:

1. Udpeg og beskriv de dele af videoen (fx. antagelser, simplifikationer, specifik matematik osv.), der hjalp dig til at få en bedre forståelse af formlen for $a_c$. Skriv et par linjer, hvor du uddyber dit svar.

2. Ligeledes, beskriv specifikke dele af udledningsmetoden, du ikke forstod eller

som på anden vis forvirrede dig undervejs i videoen. Forklar hvorfor i et par linjer.

**Answer 1:** Det var godt med tegningerne da dette er et meget geometrisk bevis.

**Answer 2:** Sjov udledning, men igen giver approksimationen sinx=x for små vinkler ikke intuitiv mening for mig. Det er en spøjs måde at kigge på en cirkelbevægelse, men ikke en jeg ville lægge ud med når der skal undervises i emnet for første gang.

**Answer 3:** 1. Meget visuelt og håndgribeligt

2. Alt for besværligt, man lytter ikke, når man godt ved, at der er nemmere metoder.

**Answer 4:** 1) Matematikken var pæn, og en god visualisering af at tage en grænseværdi som polygonet fik flere sider

2) Udledningen blev meget matematisk og virkede distanceret fra fysikken. Derudover virkede det lidt som en "gimmick" at opdele det i en masse stød, som ikke rigtig gav så intuitiv mening. Motivationen bag hvorfor man ville gøre sådan er altså ikke helt klar, hvilket kan forvirre

**Answer 5:** k

**Answer 6:** Den gav meget god mening. Den var sådan ret ligefrem.

**Answer 7:** 1. Fik mig til at se det på en helt anden måde, men det er for fjern en måde til at nemt bruge det til at huske med.

2. Skulle pause videoen for at få fuldkommen fat i de 4:21 (den hurtige introduktion af vinkler, hvor jeg forventede et 180 grader, men fik, pi)

**Answer 8:** ikke særlig intuitiv ift.forrige videoer

**Answer 9:** 1. Rent konceptuelt er det nok nemt for folk at forestille sig polygonet ligne en cirkel med og mere ved større n.

2. Der kunne tænkes at være modvilge mod at approksimere sin(x) med x.

**Answer 10:** 1: Det er godt at der gives

2 tegninger der hænger sammen

**Answer 11:** Igen, jeg forstår godt når man bruger vinkler og cos/sin, men for mig er det ikke den nemmeste måde at forstå det på. Det bliver en kringlet udledning. Dog synes jeg, det allerbedste er, netop at få en udledning eller sammenhæng forklaret på flere måder.

**Answer 12:** 2. Denne metode virker umiddelbart mere forvirrende, især fordi man går ud fra, at punkpartiklen støder på noget (elastiske stød) i cirkelbevægelsen, hvilket jo ikke er hvad, der får Månen til at dreje om Jorden. Der er også mange flere antagelser og led i udledningen, og man skal tilmed bruge en trigonomisk identitet, som man ikke lige får forklaret, hvorfor gælder, og man skal også bruge, at

$\sin(x) = x$ ved små vinkler, som det heller ikke lige er alle og enhver, der ved, hvorfor det gælder.

**Answer 13:** 1) Sjovere, så måske lettere at huske.

2) Unødvendig teknisk, men flot.

## E.8 Question 8: Likes and Dislikes

Efter du nu har set fem forskellige måder at udlede centripetalaccelerationen på så beskriv hvilken metode, du bedst kunne lide, og hvilken du mindst kunne lide, hvor du i begge tilfælde uddyber hvorfor.

**Answer 1:** jeg kunne bedst lide den algebrariske måde og mindst lige månens fald, jeg kan bedst lidt at se på algebrariske da jeg bedst kan forstå ting ved at regne på dem og mindst lide månens fald fordi den sammenblander nogle forskellige metoder, og jeg har lavet nok sandsynlighedsregning til at vide at min intuition om hvornår jeg kan gøre bestemte ting ikke altid er lig god.

**Answer 2:** Jeg brød ming mest om den dobbelt afledede, da det kobler cirkelbevægelse til en allerede etabletret intuition om bevægelse i 1d. Jeg synes også at den grafiske representation som Mazur giver er udemærket, da den styrker ens forståelse af bevægelse evalueret ved vektorer og passer godt med anden bevægelse i 2d.

Jeg brød mig ikke om de to sidste, da disse tog hvad jeg så som unødigt abstrakte veje for at beskrive noget der findes meget simplere veje til at nå frem til.

**Answer 3:** Den bedste var månens fald, da den var nem at følge og gav en mere fysisk intuitiv forståelse frem for en stringent matematisk definition.

Den dårligste var Newtons polygonmodel, da man godt ved, at der findes langt mindre komplicerede udledninger. Derfor mister man hurtigt koncentrationen.

**Answer 4:** Jeg kunne bedst lide månen som falder, da det er et fedt eksempel som gør at udledningen har et form for formål, og at man i høj grad kan brug sin fysiske intution til at komme frem til konklusionen.

Det jeg mindst kunne lide var Newtons polygoner da, selvom matematikken og geometrien var pæn, virkede som om man havde startet med konklusionen, og så fundet et sjovt sted at starte fra.

**Answer 5:** 5

**Answer 6:** Jeg kunne bedst lide den med månen tror jeg fordi den var til at overskue og det var noget man i forvejen kendte. Den virkedede nemmest at huske.

Jeg er lidt usikker på hvilken jeg mindst kunne lide. Det var den hvor jeg skrev at det var en kedelig udledning. Tror det var video 4, måske 3. Men den var lang og indviklet. Brød mig helle rikke så meget om den første. Der var også rigtig mange ting at holde styr på. De mere simple og logiske fremgangsmåder virker nemmere.

**Answer 7:** Min favorit var nr 4 (ens perioder) for dens simple opbygning og gennemgang. Jeg var også stor fan af nr. 3 (direkte udledning), for dens mere intuitive, dog besværlige gennemgang, som man altid kan bruge for virkelig at forstå det intuitivt eller med en opgave.

Mine mindst elskede var nr. 5 (Newtons) og nr.2 (Gamow). nr. 5 fordi den benyttede en tilsyneladende fjern ide, og ikke gav så meget forståelse, men mere "det er ret cool at man også kan se det på den måde" men ikke huskebar. nr.2 fordi den introducede for mange elementer (eller emner), til at det egentlig rigtig gav intuitiv mening.

**Answer 8:** Jeg foretrækker de to første videoer, som var ret simple, og havde en mere fysisk synsvinkel frem for matematisk. De to sidste var ret uoverskuelige

**Answer 9:** Jeg kunne bedst lide den direkte metode, da den havde en god blanding af matematik og fysik, samtidig med den var enkel i sin opbygning. Dette gjorde, at man ikke var i tvivl om formålet og det, som man arbejdede med. I nogle af de andre udledninger kunne det godt føles som om, at man tog en omvej for til sidst at ende med det rigtige resultat.

Jeg kunne mindst lide den med de ens perioder, da den virkede lidt tilfældig og upræcis.

**Answer 10:** Jeg kunne bedst lide "månen falder", og jeg kunne ikke så godt lide den direkte udledning. Månen falder kommer med konkret eksemple med få nye ideer som man skal holde styr på, mens den direkte udledning tager i brug af vinkelhastigheden som virker tilfældelig. Det kunne også være fordi at jeg er vandt til den direkte udledning at jeg ikke følte jeg lærte meget fra den.

**Answer 11:** Jeg kan bedst lide de måder hvor almindelig pythagoras bruges til forklaring, og mindst lide når polære koordinater (og eller lignende) bliver benyttet. Jeg kunne bedst lide metoden med Månen (dog lige nogle ting i den som ikke var helt trivielle - synes jeg) og den med Perioden. Den med perioden var en sammenhæng jeg ikke havde tænkt på. Og det med månen var dejlig konkret og håndgribelig - og lidt sjovere når man inddrager interessante emner (mekanik i sig selv er brugbart, men kedeligt). Dog mener jeg også, at det hjælper mest, ved netop at få det forklaret og bevist med flere metoder, da vi forstår tingene forskelligt.

**Answer 12:** Der er to metoder, jeg umiddelbart bedst kan lide til udledningen, og det er den metode, hvor man udleder fra stedfunktionen ved at differentiere, og den metode med ens perioder. Jeg kan godt lide den med ens perioder, fordi den er meget simpel og ikke bygger på for mange antagelser eller approximationer / simplifikationer, og den har det visuelle aspekt. Den med udledning ved differentiation kender man godt fra, hvordan man normalt finder accelerationen fra en stedfunktion, og igen kræver den heller ikke for mange antagelser, man skal stort set bare opskrive stedfunktionen ud fra en retvinklet trekant og differentiere der fra.

Den metode, jeg mindst kunne lide, var Newtons pylogon. Det var forvirrende, at man lod som om, at cirkelbevægelsen skyldtes en masse små elastiske stød, og så skulle der identiteter og approximationer til for at komme frem til den velkendte formel. Nu da vi har haft MatIntro, kender vi jo godt til disse approximationer, men hvis jeg havde gået i gymnasiet, ville jeg ikke have kendt til dem eller forstået, hvorfor de galdt, og så skulle man ligesom bare affinde sig med, at det var sådan, det var, uden rigtig at forstå hvorfor.

**Answer 13:** Den jeg bedst kunne lide var den med månens frie fald, for det var en sjov tanke og ret let forståeligt hvad der lige skete. Den jeg mindst kunn elide var den med Newtons polygoner for den var for teknisk, og der skulle flere antagelser til, hvilket gjorde det mindre simpet.

## E.9 Question 9: Last Question

Ofte bliver formlen for centripetalaccelerationen skrevet som vist i alle eksemplerne, men der findes også en anden formel for $a_c$. De to formler er:

$a_c = v2/r$, hvor $v$ er objektets fart og $r$ er cirkelbanens radius

$a_c = w^2 r$, hvor $w$ (omega) er objektets vinkelfrekvens og $r$ er cirkelbanens radius.

Den første formel for $a_c$ siger at centripetalaccelerationen er omvendt proportional med radius af cirkelbanen, mens den anden formel siger, at der er en proportional sammenhæng mellem de to størrelser.

Er dette ikke en modsigelse? Prøv at forklare hvad du tænker, når du ser de to forskellige måder at udregne $a_c$ på.

**Answer 1:** nej fordi $w = v/r$ så det er samme formel

**Answer 2:** I det omega er en vinkelhastighed, vil en større radius resultere i en større hastighed. En forøget radius med samme vinkelhastighed vil ikke være mulig i et isoleret system, da en større cirkelbue da vil blive dækket i sammen tidrum. På den måde giver det god mening at en forøget radius med konstant vinkelhastighed resulterer i en større fart af objektet og derved en forøget acceleration.

**Answer 3:** Det giver super god mening, da $v$ er givet ved $w \cdot r$

**Answer 4:** Når jeg tænker på centripetalacceleration, tænker jeg altid at det siger hvormeget retningen af hastighedsvektoren skal ændre sig. I første udtryk giver dette god mening da, desto længe væk du kommer fra centrum desto mindre bliver den mængde hastighedsvektoren skal "dreje", for at holde sig vinkelret på radius.

I det andet urdtryk siger omega noget om hvor hurtigt objektet bevæger sig i cirkelbanen, og derfor ikke dens translatoriske hastighed. Hvis radius bliver større, men omega forbliver hens, må hastigheden altså pludselig blive meget større. Hvis dette sker skal mængden som hastighedsvektoren skal dreje igen også blive større, og derfor også centripetalaccelerationen

**Answer 5:** m

**Answer 6:** Jeg tænker at enhederne går op så derfor må det passe. Derudover tænker jeg at når du er længere ude men at den rotere ligeså hurtigt på grund af vinkelfrekvensen så må man også bevæge sig med en større fart. Derfor kan det for mig godt give mening man bliver påvirket med en større kraft. Lidt ligesom på de der snurrerundt nogle på legepladser. Men når farten er konstant giver det mening at når radiussen bliver større vil restningen man ændre være mindre, da hele cirklen bliver større.

**Answer 7:** Jeg tænker ikke på r som proportional alene, men mere i forhold til hvilke størrelser den er med. Jeg kan dog bedst lide at se og bruge formel 1, da den benytter en mere intuitiv størrelse, hastighed. Grunden til at det ikke er en modsigelse, er at $w = v/r$, dermed siger de det samme. Forstår ikke helt spørgsmålet, så giver disse to svar

**Answer 8:** Vinkelfrekvens og fart er ikke samme størrelser, så jeg synes ikke det er en modsigelse

**Answer 9:** Jeg tænker, at det bare er en omskrivning af $a_c$, hvor det er brugt, at $v = wr$, hvilket giver fint mening.

**Answer 10:** $w$ er hvor langt rundt man kommer i vinklen (i radianer) pr. tidinterval, mens $v$ er hvor langt man kommer i meter pr. tidsinterval. Derfor er det naturligt at $w$ ganget med radiussen vil være $v$, altså $v = wr$. Derfor er det ikke merkeligt at $v^2/r = w^2r$.

**Answer 11:** Vinkelfrekvens er $2\pi/T$, så jeg ville skulle udregne en sammenhæng der for at sammenligne.

**Answer 12:** Umiddelbart virker det som en modsigelse, men når man ved, at $w = v/r$, så ved man, at der egentlig bare står det samme. Jeg tænker, at formel to giver god mening, fordi med en større vinkelfrekvens, skal der større centripetalacceleration til.

**Answer 13:** Dette kommer vel af at $v = wr$, så $v^2 = w^2r^2$, så $a_c = w^2r^2/r = w^2r$ Det giver altså fin sammenhæng

# Bibliography

Allori, Valia (2015). "Quantum Mechanics and Paradigm Shifts". In: *Topoi* 34.2, pp. 313–323.

Angell, Carl et al. (2011). "Fysikkdidaktikk". In: *Physics education]. Kristiansand: Høyskoleforlaget*.

Bell, Arthur Ernest (1950). *Christian Huygens and the development of science in the seventeenth century*. E. Arnold, pp. 117–123.

Bonwell, Charles C and James A Eison (1991). "Active Learning: Creating Excitement in the Classroom. ERIC Digest." In:

Braun, Virginia and Victoria Clarke (2006). "Using thematic analysis in psychology". In: *Qualitative research in psychology* 3.2, pp. 77–101.

Canlas, Ian Phil (2015). "University Students' Alternative Conceptions On Circular Motion". In: *International Journal of Scientific & Technology Research* 4.8, pp. 25–33.

Corrao, Christian (2012). "Gamow on Newton: Another look at centripetal acceleration". In: *The Physics Teacher* 50.3, pp. 176–176.

Crowe, Michael J (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.

Drake, Stillman (1967). *Galileo: Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*.

Elzinga, Aant (1972). "Huygens' theory of research and descartes' theory of knowledge II". In: *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie* 3.1, pp. 9–27.

Gamow, George (1962). *Gravity, Science Study Series*.

Heath, Thomas Little et al. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Henry, John (2016). "Hobbes, Galileo, and the Physics of Simple Circular Motions". In: *Hobbes Studies* 29.1, pp. 9–38.

Huygens, Christiaan (1703). "On centrifugal force". In: *MS Mahoney, Trans. http://www. princeton. edu/˜ hos/mike/texts/hu ygens/centriforce/huyforce. htm*.

Karam, Ricardo and Olaf Krey (2015). "Quod erat demonstrandum: Understanding and explaining equations in physics teacher education". In: *Science & Education* 24.5-6, pp. 661–698.

Kvale, Steinar and Svend Brinkmann (2009). *Interview: introduktion til et håndværk*. Hans Reitzel.

Machamer, Peter (2017). "Galileo Galilei". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Summer 2017. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Mahoney, M.S. (1995). "PRINCIPLES OF PHILOSOPHY - On Motion". In:

Mazur, Eric et al. (2015). *Principle & Practice of Physics*. Pearson, pp. 282–284.

Meli, Domenico Bertoloni (1990). "The relativization of centrifugal force". In: *Isis* 81.1, pp. 23–43.

Michael, Joel (2006). "Where's the evidence that active learning works?" In: *Advances in physiology education* 30.4, pp. 159–167.

Nauenberg, Michael (2005). "Robert Hooke's seminal contribution to orbital dynamics". In: *Physics in perspective* 7.1, pp. 4–34.

Newton, Isaac and Richard Conn Henry (2000). "Circular motion". In: *American Journal of Physics* 68.7, pp. 637–639.
Rosenthal, Arthur (1951). "The history of calculus". In: *The American Mathematical Monthly* 58.2, pp. 75–86.
Singh, Chandralekha (2009). "Centripetal acceleration: Often forgotten or misinterpreted". In: *Physics Education* 44.5, p. 464.
Slowik, Edward (1999). "Descartes, spacetime, and relational motion". In: *Philosophy of Science* 66.1, pp. 117–139.
— (2017). "Descartes' Physics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Fall 2017. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
Smith, Julia I and Kimberly Tanner (2010). "The problem of revealing how students think: concept inventories and beyond". In: *CBE—Life Sciences Education* 9.1, pp. 1–5.
Stinner, Arthur (2001). "Linking 'the book of nature'and 'the book of science': using circular motion as an exemplar beyond the textbook". In: *Science & Education* 10.4, pp. 323–344.
Wedemeyer, Bill (1993). "Centripetal acceleration a simpler derivation". In: *The Physics Teacher* 31.4, pp. 238–239.
Westfall, Richard S (1972). "Circular motion in seventeenth-century mechanics". In: *Isis* 63.2, pp. 184–189.
Whiteside, Derek Thomas (1974). *The Mathematical Papers of Isaac Newton: Vol.: 6: 1684-1691*. At the University Press, pp. 30–39.
Winsløw, Carl (2006). *Didaktiske elementer-En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Biofolia.
Yoder, Joella G (2004). *Unrolling time: Christiaan Huygens and the mathematization of nature*. Cambridge University Press, pp. 16–23.