INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse

Flerfagligt samarbejde mellem vektormodeller og kurvers geometri i 2 og 3 dimensioner og udvalgte bevægelsesmønstre i idræt under anvendelse af instrumentale teknikker.

Thomas Thrane

Specialerapport

august 2009

IND's studenterserie nr. 12

Alle publikationer fra Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) er tilgængelige via hjemmesiden www.ind.ku.dk.

.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)

Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)

Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)

Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)

Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)

Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)

Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)

Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)

Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)

Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)

Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)

Nr. 12: Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse (2009)

Abstract

Specialet omhandler design og analyse af et flerfagligt undervisningsforløb i vektormodeller og parameterkurver efter den didaktiske model Research and Study Course (RSC) indenfor teorien om didaktisk antropologi (ATD). Undervisningsforløbet efterprøves på en 3.g klasse, der har matematik på A-niveau indenfor det danske gymnasium (STX). Jeg vil efterprøve RSC som et nyt didaktisk redskab til matematikundervisningen i 2- og 3-dimensionale kurver. Undervisningsforløbet har to hovedformål: at give eleverne en faglig viden omkring emnet og at de skal opnå denne viden ved hjælp af genererede praxeologier, som eleverne selv mobiliserer ud fra besvarelsen af et hovedspørgsmål. Jeg vil i denne forbindelse diskutere de betingelser og begrænsninger, der kan opstå ved at undervise gymnasieelever efter RSC. Jeg vil også se på det flerfaglige samspil mellem matematikfaget og idrætsfaget, da jeg vil udvælge bevægelser fra sportens verden og anvende matematiske redskaber til at udføre en bevægelsesanalyse. Jeg vil diskutere, hvilken betydning inddragelse af flerfaglighed og instrumentale teknikker (CAS og Logger Pro) får for elevernes studieproces under RSC indenfor vektormodeller og parameterkurver.

IND's studenterserie *består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*

Indholdsfortegnelse

Abstract

This Paper focuses on the teaching of “vectormodels and parametric curves” in an interdisciplinary context during the third and final year of mathematic teaching on A level in a Danish highscool class. Within the frame of the Anthropological Theory of Didactic (ATD), I propose the design of Reseach and Study Courses (RSC) as a new didactic device to teach the mathematical qualities of two and three dimensional curves. It has two main purposes: to make students aware of the rationale of the mathematical contents they have to learn and to connect these contents through a study process where the students mobilize numerous praxeologies in order to answer “the leading question”. I will in the process discuss the conditions and constraints, there exists in the teaching of highscoolstudents under the influence of RSC. I will also look at the interdisciplinary work of mathematics in coherency with physical education, where I will do a mathematical analysis of an exhibition from sports with the help of an instrumented tool called Logger Pro. In light of the didactical analysis I will discuss the use of the interdisciplinary content and the instrumented tecnics influence on the study process under RSC.

Resumé

Specialet omhandler design og analyse af et flerfagligt undervisningsforløb i vektormodeller og parameterkurver efter den didaktiske model Research and Study Course (RSC) indenfor teorien om didaktisk antropologi (ATD). Undervisningsforløbet efterprøves på en 3.g klasse, der har matematik på A-niveau indenfor det danske gymnasium (STX). Jeg vil efterprøve RSC som et nyt didaktisk redskab til matematikundervisningen i 2- og 3-dimensionale kurver. Undervisningsforløbet har to hovedformål: at give eleverne en faglig viden omkring emnet og at de skal opnå denne viden ved hjælp af genererede praxeologier, som eleverne selv mobiliserer ud fra besvarelsen af et hovedspørgsmål. Jeg vil i denne forbindelse diskutere de betingelser og begrænsninger, der kan opstå ved at undervise gymnasieelever efter RSC. Jeg vil også se på det flerfaglige samspil mellem matematikfaget og idrætsfaget, da jeg vil udvælge bevægelser fra sportens verden og anvende matematiske redskaber til at udføre en bevægelsesanalyse. Jeg vil diskutere, hvilken betydning inddragelse af flerfaglighed og instrumentale teknikker (CAS og Logger Pro) får for elevernes studieproces under RSC indenfor vektormodeller og parameterkurver.

Introduktion

Den nye gymnasiereform har tilført mange nye aspekter til undervisningsformen i matematikfaget. Nogle af de nye markante ændringer er:

- Kravet om det flerfaglige samarbejde under faget Almen Studieforberedelse (AT) og under studieretningsprojektet (SRP) i 3.g.
- Anvendelse af instrumentale teknikker, herunder CAS – Computer Algebra System, i den daglige undervisning.
- Projektorienteret undervisning, hvor projekter skal udgøre en del af eksamensspørgsmålene til mundtlig eksamen.(fra skoleåret 2008-2009)

I denne forbindelse synes jeg, at det kunne være interessant at designe og gennemføre et undervisningsforløb, som fokuserer mere på arbejdsprocessen end på produktet, og som indeholder ovennævnte fokuspunkter. Til dette formål har jeg valgt modellen Research and Study Course (RSC) fra den antropologiske didaktik (ATD). RSC fokuserer på elevernes evne til at generere nye praxeologier ud fra hovedspørgsmålet i deres studieproces. Gennem dannelsen og behandlingen af genererende praxeologier skabes de teoretiske overvejelser, der er formålet med RSC.
Selvom projektorienteret undervisning er produktorienteret, hvilket RSC ikke er, mener jeg godt, at man kan sammenligne arbejdsprocesserne, hvis hovedspørgsmålet i sig selv inspirerer eleven til at generere nye spørgsmål. Arbejdsprocessen stopper i begge tilfælde, når eleven mener at have opnået en fyldestgørende besvarelse af hovedspørgsmålet, eller ved at begrænsningerne hos den enkelte elev bliver for store. En stor del af denne betragtning er selvfølgelig subjektivt fra elev til elev, men kan vi, som undervisere, ikke tilrettelægge dette forløb, så vi optimerer betingelserne for den enkelte elev? Vil elevernes, typisk opgave baserede, anvendte arbejdsproces fra matematikundervisningen kunne tilpasse sig RSC, og hvordan vil det påvirke deres indlæring af vektormodeller.

Jeg har designet et undervisningsforløb om bevægelsesanalyser i idræt ved anvendelse af parameterkurver og vektormodeller i matematik. Undervisningsprogrammet er designet ud fra RSC – modellen og afprøvet på en 3.g klasse fra det danske gymnasium, der har matematik på A-niveau. Arbejdet foregår meget af tiden i et computerprogram, der hedder Logger Pro, som bruges til at danne parameterkurver ud fra videooptagede bevægelser.

Under planlægningen af et RSC skal underviseren tage højde for en del parametre, der kan øge betingelserne for, at eleverne i deres udforskning af hovedspørgsmålet får mobiliseret relevante praxeologier, som kan skabe den tilsigtede teknologiske og teoretiske viden om emnet.

Til at forbedre nogle af disse parametre har jeg valgt at lave et samarbejde med idrætsfaget som kilden til det udforskende element. Herigennem kunne jeg godt tænke mig at finde ud af, om den idrætsfaglig tilgang til forløbet virker inspirerende og ligefrem vil løsne op for nogle af de matematiske ”barrierer”, vi ofte hører om hos gymnasieelever?

Også anvendelsen af de instrumentale teknikker i forbindelse med arbejdsprocessen vil blive interessante at følge, for at se om brugen af Logger Pro skaber bedre betingelser eller større begrænsninger for elevernes studieproces under arbejdet med RSC i dette undervisningsforløb.

Den antropologiske teori om didaktiske situationer (ATD)

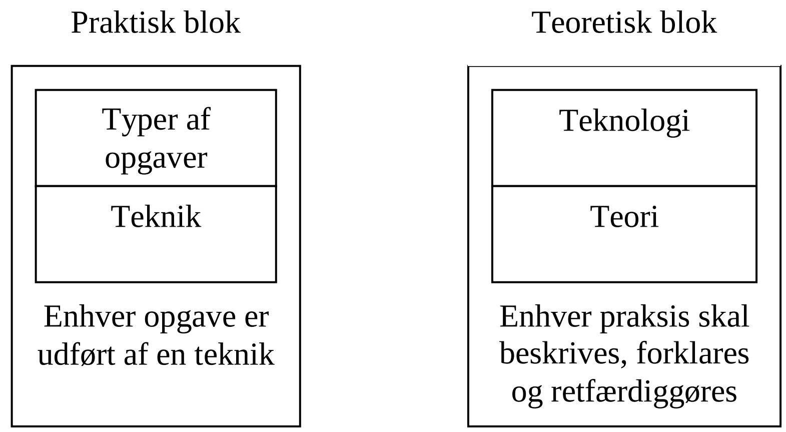
Teorien om den Antropologiske Didaktik (ATD) er udviklet af Yves Chevallard op gennem 90'erne. Denne teori kan bruges til at analysere generel menneskelig aktivitet og opdele denne aktivitet i praxeologier, der består såvel af en teoretisk del som en praktisk. En praxeologi[1] kan forklares ved, at "ingen menneskelig handling kan eksistere uden i det mindste delvist at være forklaret, retfærdiggjort, gjort rede for på en efter forholdene fornuftig måde"[2].

"Didactics of mathematics is the science of study and aid to study mathematics. Its aim is to describe and characterize the study processes (or the didactic processes) in order to provide explanations and solid responses to the difficulties which people (students, teachers, parents, professionals, etc) studying or helping others to study mathematics face" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 60)

En praxeologi

I enhver praxeologi skelnes der mellem to blokke.
Den praktiske blok, som består af de forskellige opgavetyper og teknikkerne til at løse dem. Ifølge ATD bliver enhver opgave løst vha. en teknik.
Den teoretiske blok, som består af teknologien og teorien bag den teknik, der er blevet brugt. Ifølge ATD kan enhver teknik beskrives og retfærdiggøres.
Teknologien refererer direkte til teknikken, mens *teorien* skal forstås som et dybere niveau af retfærdiggørelse af praksis (Barbé 2005, p. 237).

[1] Praxeologi: praxis = praktiske del, Logos = Græsk for menneskelig tænkning og fornuft.
[2] Bosch 2006 p. 59



Figur 1: En generel model til beskrivelse af menneskelig adfærd[3]

Disse to blokke kan bruges til at modellere faglige (f.eks. matematiske) og didaktiske praxeologier. Praxeologier kan have fælles indhold på forskellige niveauer (teknik, teknologi eller teori) og til dette formål, systematiserer Chevallard dem på følgende måde.

En præcis organisatione er simple praxeologier, som består af opgavetyper, der kræver samme teknik til løsningen / udførelsen.

De praxeologier, som indeholder teknikker, der er underlagt samme teknologi (evt. teori), tilhører samme lokale organisation, og de lokale organisationer som retfærdiggøres af samme teori[4] tilhører samme regionale organisation.

En regional organisation indenfor matematikken kan være et emne som vektorgeometri. Lokale organisationer kan derfor være vektoralgebra, funktioner af én variabel og analytisk geometri, som jeg kommer nærmere ind på under min opstillede referencemodel. Forskellige præcise organisationer ville i disse tilfælde kunne være styret af ”vinkel mellem vektorer”, ”differentialkvotienten til et andengradspolynomium”, vinkel fra linje til vandret $a = \tan(v)$.

Anvendelse af IT - baseret teknik vha. CAS[5] eller som i dette undervisningsforløb Logger Pro, hvor kurven kan indtegnes og analyseres, skaber i sig selv en præcis organisation.

[3] Bosch 2004
[4] Barbé 2005, p. 237-238
[5] ”Computer Algebra System” - som de studerende skal have adgang til i den daglige undervisning på A- og B-niveau.

En didaktisk praxeologi

Den didaktiske praxeologi bruges til at modellere læringsprocessen, ”the process of study”, hvilket både kan opfattes som den studerendes måde at tilegne sig viden på og lærerens måde at distribuere sin viden til den studerende på.

Chevallard nævner indenfor denne studieproces 6 niveauer:

Det første møde med organisationen

Det udforskende moment

Det tekniske moment - Udarbejd en teknik som kan generaliseres.

Det teknologiske - teoretiske moment - Begrund teknikken der anvendes.

Institutionalisationsmomentet - Identificere hvad den detaljerede organisation helt præcis går ud på.

Evalueringsmomentet – direkte sammenhæng til institutionalisationsmomentet.

(Barbé 2005, p. 238)

Lærerens rolle kan være mere eller mindre aktiv afhængig af hvilken didaktisk strategi, der er lagt for undervisningssituationen. Dog vil institutionaliseringen altid ske under lærerstyring.

En fundamental observation fra ATD er, at de faglige og didaktiske praxeologier, der dannes i en undervisningssituation, er et resultat af betingelser formet af et system af institutioner, som organiserer al menneskelig aktivitet i henhold til mål og regler. For bedre at kunne studere undervisningssituationer og hertil danne didaktiske praxeologier, har Chevallard konstrueret et hierarki af institutionelle niveauer, som bestemmer og begrænser lærerens didaktiske muligheder i undervisningssituationen. (Chevallard 2002)

På næste side ses Chevallards opstilling af det institutionelle hierarki samt en eksemplificering indenfor mit undervisningsforløb.

Institutionelle hierarki[6]:

Civilization
⇕
Society
⇕
School
⇕
Pedagogy
⇕
Discipline
⇕
Domain
⇕
Sector
⇕
Theme
⇕
Subject

Figur 2: Levels of didactic determination

Anvendt på det gennemarbejdede undervisningsforløb

Vesteuropæisk kultur

Danmark og Undervisningsministeriet

NGG - skole i Nordsjælland

Klasserumsundervisning, manglende flerfaglig indsigt.
Mange fagblokke á 2*45min.

Matematik / idræt

Vektormodeller, parameterkurver / bevægelsesanalyse

Modellering, geometri / Anatomi, fysiologi og biomekanik

Lineære, 2. gr. pol., Cykloide, spiral / løbetstil, kasteteknik, anaerobe processer, vinkelmoment.

Bestem f.eks. vektormodellen for parabelkurven / angiv forbedringer til 60m-løbet.

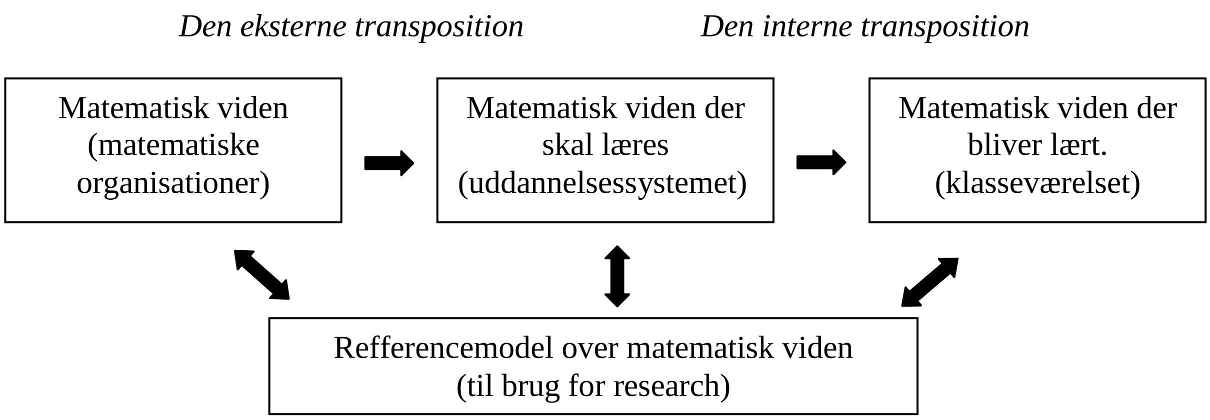
Den øverste del refererer til de generelle begrænsninger, der kommer fra måden hvorpå kulturen og samfundet (ministeriet) gennem skolen påvirker pædagogikken bl.a. ved udstedelse af bekendtgørelser og nedskæringer i f.eks. opgaveretning og forberedelsestid. Eller som nu ved ministeriets krav om projektorienteret eksamensform. Skolens planlægning af varigheden af fagligt modul og skolens, lærerens holdning til flerfagligt samarbejde er flere eksempler på generelle begrænsninger.

Den nederste del drejer sig om de faglige niveauer fra disciplinen til det konkrete problem eller spørgsmål. Disse niveauer kan bruges i analysen af de begrænsninger, processen ved den didaktiske transposition medfører og den måde, hvorpå processen organiserer undervisningsindholdet i skolen[7].

[6] Jfr. Barquero 2007(okt)
[7] Barquero 2007(okt)

Samspillet mellem de matematiske og de didaktiske organisationer

Til at analysere dette samspil mellem didaktiske organisationer (DO) og matematiske organisationer (MO), herunder specielt i klasseværelset, har Chevallard opstillet en referencemodel af den matematiske viden. Dette gøres for at have en fælles model til forskningsrelaterede aktiviteter.



Figur 3: Processen under den didaktiske transposition (Barbé 2005, p. 241)

Ifølge referencemodellen inddeles den regionale MO i to typer af lokale matematiske organisationer: MO_1 og MO_2; som har forskellige roller[8].

MO_1 indeholder de mere praktiskorienterede opgaver, som i højere grad fokuserer på løsningen af opgaverne ved en metode end på den teoretiske baggrund.

MO_2 derimod er opgaver, som fokuserer på baggrunden for teknikken dvs. teknologien og teorien. En opgave under MO_2 fremmer den teknologiske og teoretiske forståelse af emnet, mens den praktiske anvendelse er mindre synlig.

Disse to typer af MO behøver ikke at være disjunkte. Der findes opgaver af MO_1, hvor teknologidelen virker som en teknik under MO_2[9].

Eksistensberettigelsen "Raison d'être" skal findes i den brede MO, som indeholder både MO_1 og MO_2[10].

En studieproces, der gennemgår Chevallards 6 didaktiske niveauer, vil normalt ende med at have dannet en lokal matematisk praxeologi ud fra et startende spørgsmål (første møde) som leder til konstruktionen af en teknik (exploration). Om det teknologiske og teoretiske niveau nås afhænger

[8] Barbé 2005, p. 241
[9] Barbé 2005, p. 243
[10] Barbé 2005, p. 246

af, om den anvendte teknik er tilstrækkeligt udviklet. Hvis den er det, vil den lokale praxeologi få tilført en teoretisk blok[11].

ATD anvendt i flerfaglig sammenhæng mellem matematik og idræt

Idrætsfaget er et meget bredt favnende fag, som involverer alle tre fakulteter dog med den største fokus på den fysiske aktivitet. I mange af de fysiske aktiviteter undervises vha. metoden "vis – forklar – vis", hvilket ikke kræver den store teoretiske indsigt. Det er lærerens opgave at give den enkelte elev forudsætningerne for at kunne udføre opgaven, og det omfatter ikke altid en teoretiske baggrundsviden. Det står dog klart, at jo højere niveau man ønsker at løse opgaven på, des mere teoretisk viden er nødvendig.

Selvom fordybelse i teknik primært sker ude i idrætsklubberne, har den nye gymnasiebekendtgørelse medført, at underviseren i højere grad end før skal rette fokus på de tekniske detaljer i idrætsundervisningen.

Ved inddragelse af teknologi og teori til forklaring af den anvendte teknik opstår der, hvis vi bruger notationen fra før, praxeologier af type 2, hvis opgavetype bliver at begrunde og forklare den anvendte teknik. Den isolerede type 2 opgave eksisterer ikke i idrætsundervisningen på C-niveau, men er forbeholdt undervisningen på B-niveau. Med udgangspunkt i mit undervisningsforløb kunne det være at lave en bevægelsesanalyse af 3-pointsskuddet i basketball. Denne analyse kan foretages enkeltfagligt, men drager fordel af et flerfagligt samarbejde med matematik, eftersom man herved kan foretage en grundigere analyse (f.eks. mht. kastevinkel og kastehastighed).

I takt med at den observerede bevægelse bliver mere kompliceret, vil behovet for matematikfaget blive større, se f.eks. analysen af springserien, og i større grad bidrage til den biomekaniske teori indenfor idrætsfaget. Herved opstår tværfaglige praxeologier med en opgavetype fra idrætsfaget, mens teknik, teknologi og teori tilhører matematikfaget.

Flere forfattere fremhæver, at mangler i metakognitive aspekter er en fundamental årsag til, at elever mislykkes i at løse generelle problemer og herunder matematiske[12].

Problemet med at skabe dette ekstra niveau hos eleverne har været anerkendt længe bl.a. i forbindelse med Pólyas arbejde med problemløsning i 1980'erne. På baggrund af dette har Bosch & Gascón formuleret "Pólyas problem":

[11] Rodríguez 2008, p. 292
[12] Rodríguez 2008 p. 289

”Once students master ’basic’ or elementary techniques and have acquired the ‘necessary’ mathematical knowledge, how can we get them to build *complex strategies* to solve ‘real’ or ‘creative’ mathematical problems?” [13]

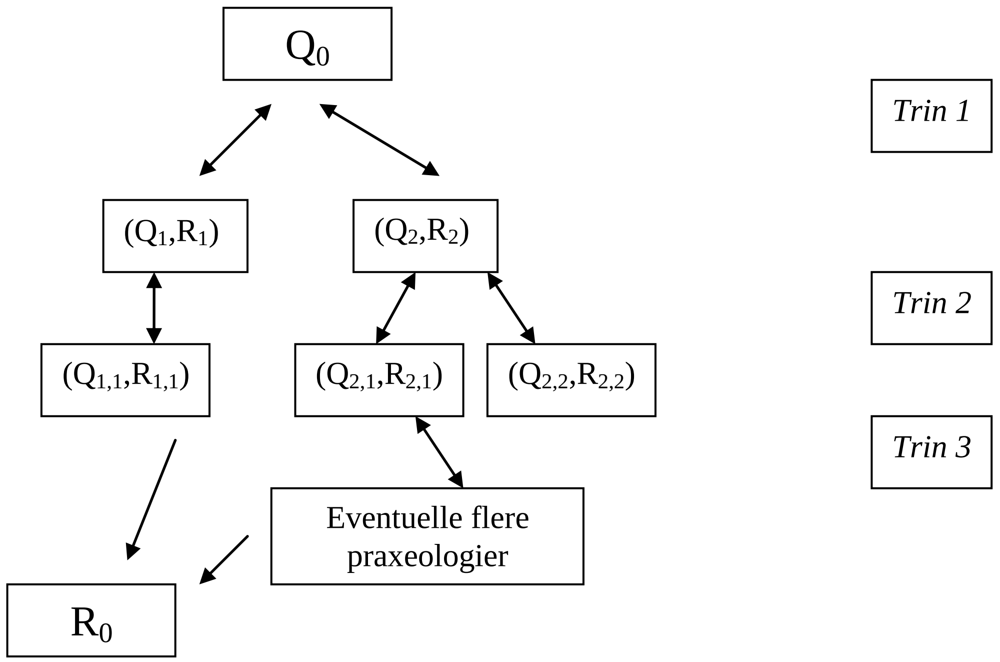
Research and Study Course er en didaktisk model under ATD, som fokuserer på den didaktiske proces som centrum for konstruktionen af funktionelle faglige praxeologier, hvorigennem ny viden etableres. Her er fokus rettet mod elevernes evne til at anvende deres viden på ”real-life” udfordringer i stedet for ”kun” at studere det som en del af curriculum[14].

Den didaktiske model ”Research and Study Course” (RSC)

Modellen Research and Study Course blev for nyligt introduceret af Chevallard (2004 og 2006), som en generel model til at designe og analysere studieprocesser[15]. RSC er ment som et didaktisk redskab til behandling af de faglige praxeologier. Altså en didaktisk praxeologi.
RSC er opstået som et forsøg på at få de studerende til at følge og forstå processen bag løsningen af en given matematisk problemstilling og ikke bare løse kortsigtede matematiske opgaver ved brug af givne aksiomer. Esther Rodríguez m.fl. kalder dette kortsigtede fænomen for ”Monumentalisme” i undervisningen.
Set fra en epistemologisk synsvinkel giver ATD os, at løsningsprocessen ved matematiske (eller generelt faglige) problemer (specielt de ikke rutineprægede) kun giver mening ved studiet af spørgsmål, der fører hen mod konstruktionen af en større matematisk praxeologi af minimum lokal størrelse.[16]
I denne forbindelse skal RSC være med til at fremhæve de egentlige problemstillinger, der grundlægger den teori, de studerende arbejder med, så ”meningen” med matematikken bevares.
RSC er baseret på et studium af et reelt spørgsmål Q_0, som er af relevans for de studerende, og som er stærkt nok til at frembringe mange nye spørgsmål. I processen til at løse spørgsmålet Q_0 frembringes således et system af praxeologier, hvor ethvert underspørgsmål Q_i har tilknyttet et svar R_i. Disse enkelte praxeologier, som fører til en sammenknytning af spørgsmål og svar eller problemer og teorier, er med til at konstruere en generel videnskabelig viden samt en viden om det

[13] Rodríguez 2008 p. 288
[14] Rodríguez 2008 p. 290
[15] Barquero 2007 p. 3
[16] Rodríguez 2008 p. 293

emne, der arbejdes med[17]. Derfor bliver den undersøgende og den teknologiske del af denne didaktiske praxeologi meget vigtig.
På den opstillede model herunder illustreres anvendelsen af RSC i form af et system af praxeologier. Strukturen på et sådant forløb fra hovedspørgsmål Q_0 til hovedsvar R_0 varierer afhængigt af hvor mange praxeologier, der genereres.
Trin 1, 2 og 3 indikerer, hvor detaljeret en undersøgelse den studerende foretager af de praxeologier, der skal bidrage til besvarelsen af hovedspørgsmålet.



Figur 4: Model over opbygningen af RSC

Ifølge Barquero m.fl. har systemet af praxeologier følgende karakteristika[18]:

- Emnet der arbejdes med bliver en central rolle i studieprocessen og virker som et centralt værktøj i opbygning af ny viden.
- Øget fokus på selve metoden til løsningen af underspørgsmålene der frembringes samt en løbende evaluering af metoden og det fundne delsvar. Det er ikke kun produktet, der er centralt.
- Klargøre, institutionalisere og evaluere processen i tilfælde af kontinuitet i studieprocessen.

[17] Barquero 2007 p. 3
[18] Barquero 2007 p. 4

- Hele drivkraften i denne proces er den løbende evaluering af den fundne delbesvarelse. Er den med til at besvare og anskueliggøre dele eller det hele af hovedspørgsmålet Q, eller skal besvarelsen modificeres.

En af de vigtige egenskaber ved RSC er, at der ikke findes nogen forudbestemt sammensætning af praxeologier, som studieprocessen skal følge for at nå svaret på hovedspørgsmålet. Formålet er at studere et problem, der gerne må være relevant i elevernes øjne, men som skal danne grundlag for, som minimum, en matematisk lokal praxeologi i overensstemmelse med diverse betingelser og begrænsninger indenfor de tidligere nævnte institutioner[19].

Institutionelle betingelser og begrænsninger

De institutionelle begrænsninger er med til at forklare i ATD forstand, hvorfor nogle faglige praxeologier nemt kan opstilles i klasseværelset, mens andre er meget svære at introducere[20].
Hvis vi ser på Pólya's problem i ATD forstand, drejer det sig netop om de institutionelle betingelser og begrænsninger, der hindrer udførelsen af didaktiske processer under en proces, der starter fra et genererende "alive"-problem, og efterfølgende lader de studerende gennemgå forskellige didaktiske niveauer, hvorfra de får genereret (konstrueret eller rekonstrueret) en følge af lokale matematiske praxeologier som svar på det initierende problem.[21]
RSC er en didaktiske praxeologi, der udfører ovennævnte didaktiske proces og, hvor det er vigtigt at få skabt de bedste betingelser for elevernes arbejdsproces og på den måde minimere deres begrænsninger i genereringen af udforskende praxeologier.
Det kan dog være svært at måle den direkte effekt af en didaktisk proces som RSC. Rodríguez skriver bl.a., at der opstår et forskningsmæssigt problem ved studiet af værdien af RSC inden for nuværende undervisningsinstitutioner og studiet af det endelige udbytte opnået ved den eksperimentelle tilgang i klasseværelset[22].
Nogle af begrænsningerne for den tilsigtede værdi af RSC er:

- Midler, den enkelte elev skal besidde for at behandle spørgsmålene, der danner processen. Er midlerne ikke tilstrækkelige, anvendes der en form for metodisk viden for at løse problemet, hvilket skaber en metakognitiv forhindring og processen går i stå.[23]

[19] jfr. Figur 2
[20] Rodríguez 2008 p. 293
[21] Rodríguez 2008 p. 294
[22] Rodríguez 2008 p. 294
[23] Rodríguez 2008

Det er vigtigt at styrke det udforskende og det teknologiske moment hos eleverne. Ved at fremhæve disse momenter kan eleven selv opstille hypoteser, spørgsmål, validere eksperimentet med virkeligheden og vælge det rette ”værktøj” til den efterfølgende proces.[24]

- Hovedspørgsmålet. Som tidligere nævnt er det vigtigt, at hovedspørgsmålet er af interesse for eleverne og samtidigt, som minimum, skaber muligheden for en lokal faglig praxeologi. Hovedspørgsmålet skal udgøre tråden gennem hele studieprocessen, hvilket skal få eleverne til at anvende de matematiske midler til at svare på de underliggende spørgsmål undervejs og ikke betragte de matematiske midler i sig selv som formålet med RSC.[25]
- Udbytte af studieprocessen undervejs. Hvis elevernes arbejde undervejs ikke bliver valideret, kan det have uheldige konsekvenser. Derfor er det vigtigt, at læreren ikke forholder sig passivt men observerer og evt. justerer elevernes arbejde, så den korrekte terminologi opnås.
  Berta Barquero m.fl. nævner i denne forbindelse, at det er nødvendigt at evaluere studieprocessen, da det drejer sig om et problem, der skal løses og ikke et koncept, der skal læres.[26] Som nævnt ovenfor er kontinuiteten i studieprocessen over en vis tid med til at skabe en institutionaliserende effekt.[27]
  For at mindske denne begrænsning i mit undervisningsforløb har jeg valgt at afholde en valideringssituation ved starten af hvert modul for at ensarte elevernes midler så meget som muligt med henblik på den efterfølgende studieproces.
- RSC ændrer det normale billede af, at det er lærerens ansvar at tilføje teoridelen i praxeologien og skabe sammenhængen mellem praxeologierne. Det med RSC tilføjede elevansvar skaber dog visse vanskeligheder i form af elevernes modvilje mod at overtage områder som planlægning, regulering og løbende evaluering af studieprocessen.
  Esther Rodríguez mfl. omtaler i denne forbindelse, at der skal ske en betydelig matematisering af didaktikken, hvis det skal lykkes at flytte det metakognitive ansvar over til eleverne[28]. Berta Barquero m.fl. tilslutter sig dette og nævner, at en indre dynamik i de matematiske processer under RSC kun kan opnås, hvis den pågældende modelleringsaktivitet kan få status som et studieobjekt i stedet for et didaktisk værktøj til at studere nogle matematiske organisationer. Kun herved vil eleven kunne formulere alle de

[24] Barquero 2007 p. 9
[25] Barquero 2007 p. 9
[26] Barquero 2007 p. 4
[27] Barquero 2007 p. 4
[28] Rodríguez 2008 p. 299

nødvendige spørgsmål relateret til matematisk og didaktisk teknik uden begrænsninger og kunne overtage det ansvar, der traditionelt tilhører læreren.[29]

I Burkhardts skrift fra 2006[30] fremhæver og diskuterer han bl.a. de uvelkomne komplikationer ved at inddrage ”den rigtige verden eller samfund i mange matematiske klasseværelser, den begrænsede udvikling af lærerne og udviklingen i undervisningen som nogle af de barrierer, som forhindrer en større implementering af matematisk modellering.
Michelsen påpeger samme år[31] en mere generel barriere, nemlig den manglende tværfaglighed mellem de naturvidenskabelige fag. Han kalder det en klar forhindring for udviklingen af de tilsigtede aktiviteter.[32]
Jeg vil i det næste afsnit behandle begrebet flerfagligt samarbejde, som, modsat tværfagligt samarbejde, adskiller de enkelte fag tydeligere i deres fælles bearbejdning af emnet.

Flerfaglighed i undervisningen

Som nævnt i indledningen er der kommet institutionelle (i dette tilfælde ministerielle) betingelser om flerfagligt samarbejde under gymnasieuddannelsen i forbindelse med den nye reform. Flerfagligheden (med matematik involveret) skaber og styrker forholdet mellem matematik og andre fag. Ifølge Michelsen, Glargaard og Dejgaard[33] er den manglende koordination i fysik og matematiks curricula den primære årsag til, at eleverne har problemer med at anvende matematik i fysikundervisningen. De mener desuden, at det er svært for eleverne at overføre ideer og procedurer lært i matematik til uventede situationer, som f.eks. kan opstå i fysikundervisningen.
Flerfaglige projekter kan endvidere være med til at øge elevernes interesse og engagement i matematikfaget. De flerfaglige projekter kan opfylde elevernes ønske om et samspil mellem matematikfaget og den ”virkelige” verden, som de oplever udenfor klasselokalet.
Mette Andresen og Lena Lindeskov beskriver i deres tekst ”New roles for mathematics in multi-disciplinary, upper secondary school projects”[34] en observation af et flerfagligt projekt mellem fagene matematik, fysik, kemi og Almen Studieforberedelse. Emnet er ”Raketter” og ud fra de observationer, der gøres i forbindelse hermed, er der tale om et veludført flerfagligt samarbejde.

[29] Barquero 2007 p. 10
[30] Burkhardt 2006 pp. 190-193
[31] Michelsen 2006
[32] Barquero 2007(okt) p. 2
[33] Michelsen 2005 p. 33
[34] Jfr. Andresen 2008

Som konkluderende bemærkninger nævner Mette Andresen og Lena Lindeskov, at der opnås en god flerfaglig undervisningspraksis, så længe læreren formår at:

- Vise forholdet mellem de involverede fag.
- Vise forskellen mellem de involverede fag.
- Engagere eleverne i projekter som på den ene side har klare bånd til det enkelte fag men som på den anden side også viser sammenhæng med de andre involverede fag.
- Organisere og udføre projektet med dets egen struktur og opfylde dets formelle krav.

Nogle af succeskriterierne ved projektet er at eleverne:

- Bliver klar over mulighederne ved at overføre koncepter og resultater mellem fag.
- Bliver klar over de fordele, fælder og misforståelser, der kan opstå ved overførslen.
- Reflekterer over forholdet mellem projektets involverede fag.

Projektet viser også, at matematik bliver et værktøj anvendt til problemløsning. Det, at matematik ikke i sig selv bliver målet med projektet, bliver betragtet som en succes indenfor dansk skolekultur.[35]

Faren ligger dog i, at elevernes matematiske udbytte af et flerfagligt undervisningsforløb kun bliver at finde og anvende formler og metoder i stedet for at få dybere indsigt i den matematiske teori. Derfor skal projektet indeholde nogle ”rene” matematiske overvejelser.

I den tværfaglige sammenhæng kan de matematiske teknikker sætte grænser for elevens formåen og videre arbejde i projektet. For at minimere disse begrænsninger kan man inddrage instrumentale teknikker i arbejdet, såsom CAS og Logger Pro. Anvendelsen heraf skaber mulighed for at arbejde indenfor en mere kompliceret mængde af matematiske udtryk, modeller, kurver mm.

Instrumentale teknikker

Anvendelse af instrumentale teknikker er centreret omkring løsning af opgaver, hvorimod gennemgang af beviser og teoretiske områder stort set bliver udført uden.[36] Derfor er det en vigtig del under det flerfaglige samarbejde, at ”opgaveløsningen” bidrager til en øget matematisk forståelse, hvis ikke en teoretisk forståelse så en forståelse for anvendelsen af matematikken. Det øjeblik, hvor de instrumentale teknikker kun bliver et isoleret middel til at løse opgaven uden at

[35] Andresen 2008 p. 17
[36] Andresen 2008 p. 4

give eleven bedre indsigt i den bagvedliggende matematiske teknologi og teori opstår begrebet "Black box", som er udtryk for opgaveløsningens manglende perspektivering til det matematiske emne.

I forbindelse med anvendelse af instrumentale teknikker i undervisningen har Luc Trouche og Dominique Guin udviklet en typologi til differentiation af individuelle instrumentale arbejdsmetoder. Her undersøges hvilke metavidenskaber, forskellige informationskilder er med til at danne hos den enkelte studerende. Der skelnes mellem første niveau af metavidenskab, som er den informationssøgende og andet niveau, som er den informationsbearbejdende. Når man indsamler ny viden, kan det være med til at bearbejde gammel viden og ændre denne. Erfaringen med lommeregnere er, at denne kognitive reorganisation har sværere ved at ske under en instrumentel proces.[37]

Der beskrives fem arbejdsmetoder, i forbindelse med brug af instrumental teknik (IT).[38]

- En *teoretisk arbejdsmetode* – der bliver arbejdet med matematiske referencer til at begrunde opgaveløsningen og lommeregneren bliver kun brugt til at verificere de fundne resultater. Primært arbejde med papir og blyant.
- En *rationel arbejdsmetode* – der bliver arbejdet med papir og blyant på at skabe sig overblik over problemet i starten. Herefter bruges IT til at skabe et svar på problemet. Til sidst bruges papir og blyant til at eftervise, om de indhentede påstande passer.
- En *vilkårlig arbejdsmetode* – opgaverne løses både i hånden og vha. IT pga. usikkerhed. Det er normalt den svage studerende, der benytter sig af forsøg og fejl og meget få matematiske referencer til teknologien.
- En *mekanisk arbejdsmetode* – Her bruger eleven udelukkende IT til at løse problemet. Der er helt mangel på matematiske referencer, og alt verificeres via IT.
- En *opfindsom arbejdsmetode* – Udforskning af alle kilder af information, papir-blyant, IT, matematiske referencer. Svaret på problemet dannes ved at sammenholde disse informationer med hinanden.

Resultatet af tidligere undersøgelser foretaget af Trouche 1997 viser, at den mekaniske arbejdsmetode er ved at udvikle sig hen imod den opfindsomme.[39]

[37] Trouche 2002 p. 206
[38] Trouche 2002 p. 207
[39] Trouche 2002 p. 208

Elevernes brug af IT (Logger Pro og CAS) i mit undervisningsforløb forventes at være en blanding mellem den mekaniske og den opfindsomme arbejdsmetode, eftersom arbejdet dels indledes med et krav om brug af Logger Pro som analysemiddel og dels, at studieprocessen er tilrettelagt som et RSC med det formål at etablere ny viden.

I det efterfølgende afsnit er de fire RSC beskrevet i detaljer for at give læseren et bedre overblik over mine intentioner med hele undervisningsforløbet.

A priori beskrivelse af de planlagte RSC

Hensigten med dette afsnit er at give læseren bedre indsigt i intensionerne med de fire problemstillinger samt at give en forståelse for brugen af computerprogrammet Logger Pro[40] som en vigtig teknik i arbejdsprocessen.
Beskrivelsen af de fire tiltænkte RSC er opstillet ud fra en arbejdsproces, der er fremkommet ved min besvarelse af det initierende og genererende hovedspørgsmål. Denne beskrivelse er ikke et udtryk for, hvad jeg forventer af eleverne for at besvarelsen er fyldestgørende, men blot et udtryk for nogle af de muligheder det genererende spørgsmål giver dem.

Eleverne skal gennemføre fire forløb, som stiger progressivt i omfang og sværhedsgrad.

RSC 1: "Sprinteres anaerobe tærskel"	(bevægelse i 1 dimension)
RSC 2: "Optimering af 3-pointsskud i basketball"	(forenklet bevægelse i 2 dimensioner)
RSC 3: "Bevægelsesmønstre i gymnastik"	(kompliceret bevægelse i 2 dimensioner)
RSC 4: "Bevægelsesanalyse af kunstskøjteløberen"	(bevægelse i 3 dimensioner)

De skal i hvert forløb arbejde med computerprogrammet Logger Pro, som fastlægger matematiske kurver og udtryk til videooptagede bevægelser.

RSC 1: "Sprinteres anaerobe tærskel"

- Bestem forsøgspersonens anaerobe grænse under 60m - spurten ved at foretage en bevægelsesanalyse af videoklippet vha. Logger Pro. Vurder, også ud fra andre betragtninger af spurten, de vigtigste forbedringer der kan foretages og giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser.

Svar:
Starthypotese gives: Forsøgspersonen øger hastigheden i starten, hvorefter denne holdes til slutningen, eller at tophastigheden falder igen – men hvornår?

Forsøgspersonens videoklip åbnes i Logger Pro, hvorefter gruppen indsætter *origo*, størrelsesforhold og udvalgte punkter der følger bevægelsen.

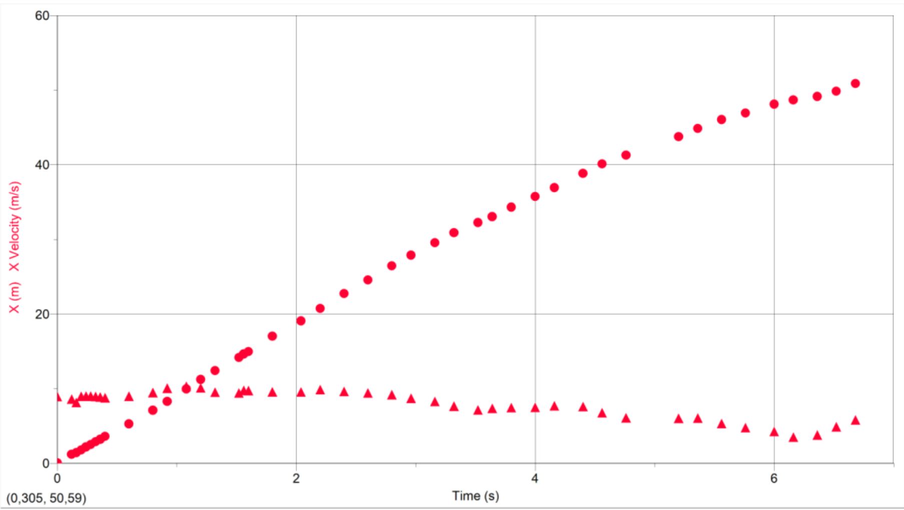
[40] Under bilag E er en eksemplificering af starten på arbejdet med Logger Pro.

Figur 5

Fejlkilder:

- Da kameraet er håndholdt er der opstået visse udsving, specielt i den vertikale retning.
- Da løberen løber en anelse væk fra kameraet, vil punkterne som følge heraf ligge tættere på hinanden hen mod slutningen. Dette skal selvfølgelig inddrages som fejlkilde i analysen.

Nu skal bevægelsen analyseres, og jeg har valgt at behandle et af forsøgspersonernes videoklip. Vi ser kun på bevægelsen i den horisontale retning, dvs. *x(t)*, da denne størrelse kan fortælle os noget om forsøgspersonens løbehastighed. Logger Pro giver os følgende kurver over stedfunktionen *x(t)* (rød prik) og hastighedsfunktionen *x'(t)* (rød trekant):



Figur 6

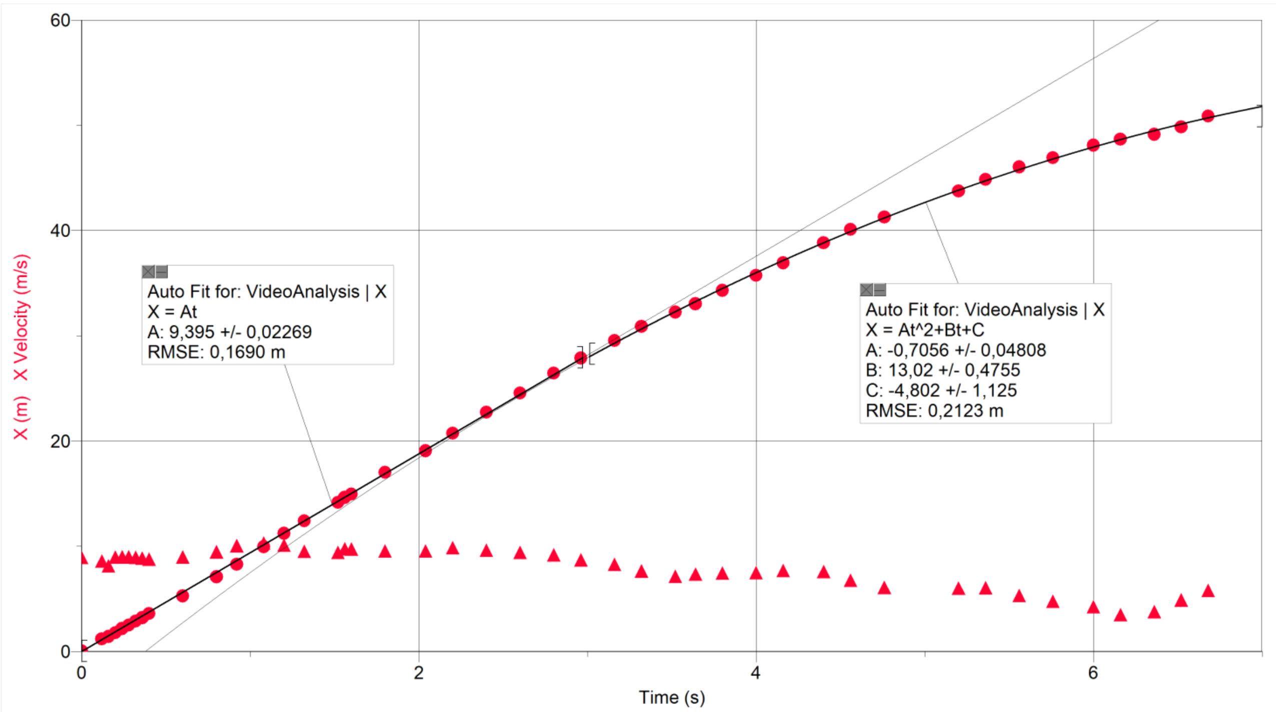
Af Figur 6 ses at hastigheden holdes konstant i ca. 3 sekunder (kan være lidt længere pga. kameraplaceringen), hvorefter den falder. Dette kaldes den anaerobe grænse. Her ophører lagrene af ATP og dannelse af nyt ATP fra CP (kreatinfosfat) nedsætter den maksimale ydeevne. Vektormodellen, der beskriver denne bevægelse, skal derfor være todelt. Logger Pro kan udlede et udtryk for bevægelsen, så længe eleven har den tilstrækkelige teoretiske indsigt i, hvordan bevægelsen ser ud. Se Figur 7 herunder.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 9{,}4t \\ k \end{pmatrix} & for\ 0 \leq t \leq 3 \\ \begin{pmatrix} -0{,}7t^2 + 13t - 4{,}8 \\ k \end{pmatrix} & for\ 3 \leq t \leq 6 \end{matrix} \right\}$$

Eller blot fokus på x(t):

$$x(t) = \left\{ \begin{matrix} 9{,}4t & for\ 0 \leq t \leq 3 \\ -0{,}7t^2 + 13t - 4{,}8 & for\ 3 \leq t \leq 6 \end{matrix} \right\}$$

Her er set bort fra accelerationen i starten, da analysen har vist, at den er meget kort og ikke er kommet med på videoen, men nogle grupper kan have den med!



Figur 7

Forbedringer ved forsøgspersonens 60m løb:

- Den anaerobe grænse. Ved anaerob træning og diæt kan grænsen skubbes, men det er minimalt.
- Løbestil. Forsøgspersonens løbestil er meget oprejst, og der kan godt trækkes mere med armene, brug overkroppen.
- Accelerationen og reaktionstiden kan ikke ses af videoen, men det er også et typisk træningselement for sprintere.

RSC 2: ”Optimering af 3-pointskud i basketball”

- Lav en matematisk bevægelsesanalyse af forsøgspersonens 3-pointskud vha. Logger Pro og vurder på baggrund heraf, hvilke forbedringer forsøgspersonen skal fokusere på. Giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser hertil.

Svar:

Starthypotese gives: Basketballskuddet bevæger sig langs en parabelformet kurve, og jo højere en bue des større indgangsvinkel mod kurven, hvilket medfører større chance for 3 point.

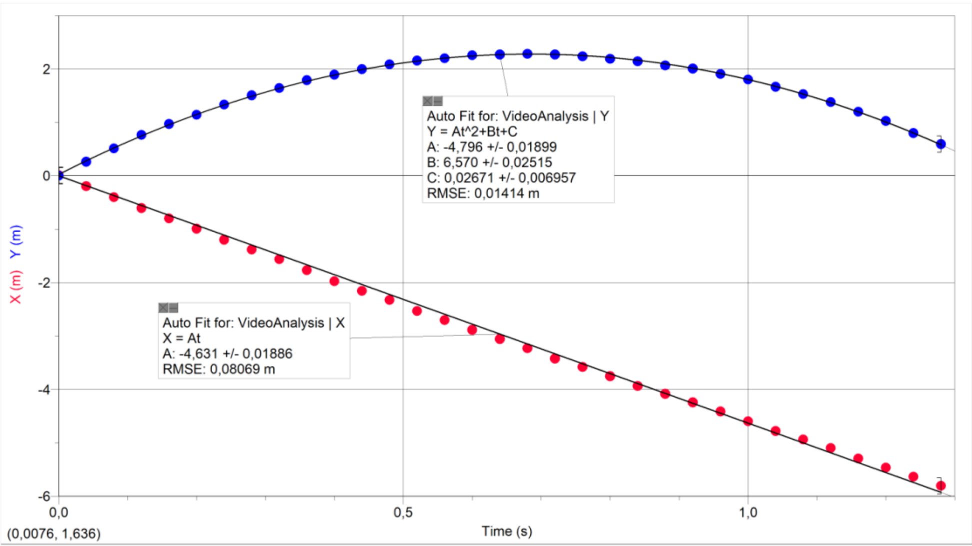
Forsøgspersonens videoklip åbnes i Logger Pro, hvorefter Origo, størrelsesforhold og punkter der følger bevægelsen afsættes.

Figur 8

Fejlkilder:

- Da kameraet er håndholdt er der opstået visse udsving, hvilket kan medføre unøjagtigheder.

Nu skal bevægelsen analyseres. Logger Pro giver os følgende kurver over stedfunktionen *x(t)* (rød prik) og *y(t)* (blå prik):

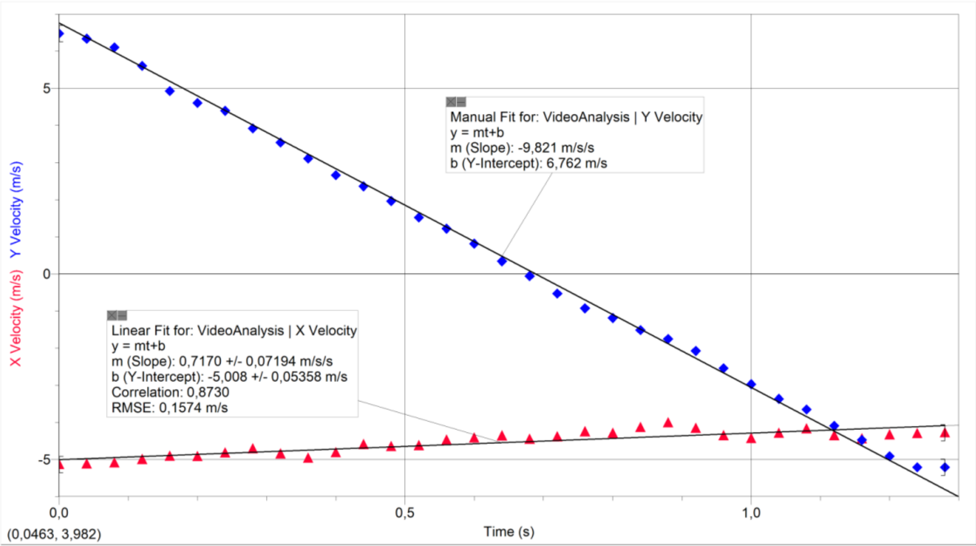


Figur 9

Heraf ses at *x(t)* er aftagende pga. skuddets retning i forhold til origo. Så den kan man spejle i *x*-aksen med henblik på den efterfølgende analyse. Ellers forestiller skuddet to velkendte kurver, en lineær horisontal bevægelse og en parabelformet vertikal bevægelse i forhold til tiden. Vektormodellen, der beskriver skuddet, fås af Logger Pro til at være:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}6t \\ -4{,}8t^2 + 6{,}6t \end{pmatrix} \qquad for\ 0 \leq t \leq 1{,}3\ sekunder$$

Hvis vi ser på hastigheden i de to retninger fås:



Figur 10

Her ses en detaljeret beskrivelse af hastigheden, hvor man igen skal spejle den horisontale bevægelse i *x*-aksen. Herved fås en vektormodel, der beskriver hastigheden således:

$$\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} -0{,}72t + 5 \\ -9{,}82t + 6{,}76 \end{pmatrix} \qquad for\ 0 \leq t \leq 1{,}3\ sekunder$$

Dette udtryk bør kunne udledes som $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ ud fra den før angivne stedvektormodel, men som det ses, forekommer der unøjagtigheder. Disse kan skyldes, at Logger Pro's estimat af de rette linjer for hastighederne er mere præcise end udtrykket for bevægelsens stedvektormodel. Hastighedsudtrykket $\overrightarrow{v(t)}$ ser fornuftigt ud idet, det indikerer gravitationskonstanten 9,82 i den vertikale retning samt en mindre luftmodstand i den horisontale retning.

Ud fra denne vektormodel over hastigheden kan vi udregne boldens begyndelseshastighed, dvs. til tiden $t = 0$: $\overrightarrow{v(0)} = \binom{5}{6{,}76}$ og farten: $\left|\overrightarrow{v(0)}\right| = \sqrt{5^2 + 6{,}76^2} = 8{,}4\ {}^{m}/_{s}$

Man kunne også have brugt den resulterende vektor ved at aflæse en vektor i hver af de to retninger *x(t)* og *y(t)* ud fra *(0,0)* på grafen og derefter adderer dem.

Det ses af $\overrightarrow{v(t)}$, at horisontalt taber bolden fart. Dette kan skyldes luftmodstand og "backspin", som får bolden til at "stoppe op" i luften. Forsøgspersonen udførte skuddet med "backspin".

Vertikalt er der ikke de store ændringer fra det forventede billede.

Forbedringer ved forsøgspersonens Basketballskud:

Forsøgspersonen skyder på videoen lidt for langt, dette kan også anskues visuelt. Ved bevægelsesanalysen kan man se på kastevinklen og gøre den lidt større, så bolden får tilsvarende større indgangsvinkel mod kurven.

Til at udregne kastevinklen kan man bruge formlen $a = \tan(v)$ fra analytisk geometri eller formlen for vinkel mellem vektorer $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\imath}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\imath}|}$, som kendes fra vektoralgebra.

Jeg starter med at bruge analytisk geometri. Her ses ud fra hastighedsvektoren $\overrightarrow{v(0)} = \binom{5}{6{,}76}$, som er en god repræsentant for kastets start, at hældningen hertil er $a = \frac{6{,}76}{5} = 1{,}352$. Heraf fås en vinkel på $v = tan^{-1}(1{,}352) = 53{,}5°$.

Hvis man bruger vektoralgebra til at finde vinklen mellem hastighedsvektoren og den horisontale retning(repræsenteret ved $\vec{\imath} = \binom{1}{0}$) fås:

$$\cos(v) = \frac{\binom{5}{6{,}76} \cdot \binom{1}{0}}{\sqrt{5^2 + 6{,}76^2}} = \frac{5}{8{,}41} \Leftrightarrow\ v = 53{,}5°$$

Udover kastevinklen kan forsøgspersonen få mere "backspin" i bolden og derved øge opbremsningen hen mod kurven, hvilket betyder, at bolden går stejlere ned mod kurven. Dette vil kunne ses i form af en mere negativ *x''(t)*.

Øvelser kan være skudtræning med fokus på ovennævnte, herunder speciel fokus på "backspin"-bevægelsen i håndleddet.

RSC 3: ”Bevægelsesmønstre i gymnastik”

- På videoen ses nogle gymnaster der udfører springserier. Skitsér føddernes bevægelse i hele den første springserie i videoklippet. Lav en matematisk bevægelsesanalyse af springserien som kan bruges til at give gymnasten feedback til brug i træningslokalet.

Svar:

Starthypotese gives: Føddernes bevægelse danner tilnærmelsesvis en cykloidebevægelse, hvor personen øger den vertikale fart hen ad måtten for at kompensere for tabet i den horisontale fart, så den resulterende hastighed forbliver konstant, og springserien derved ser symmetrisk ud.

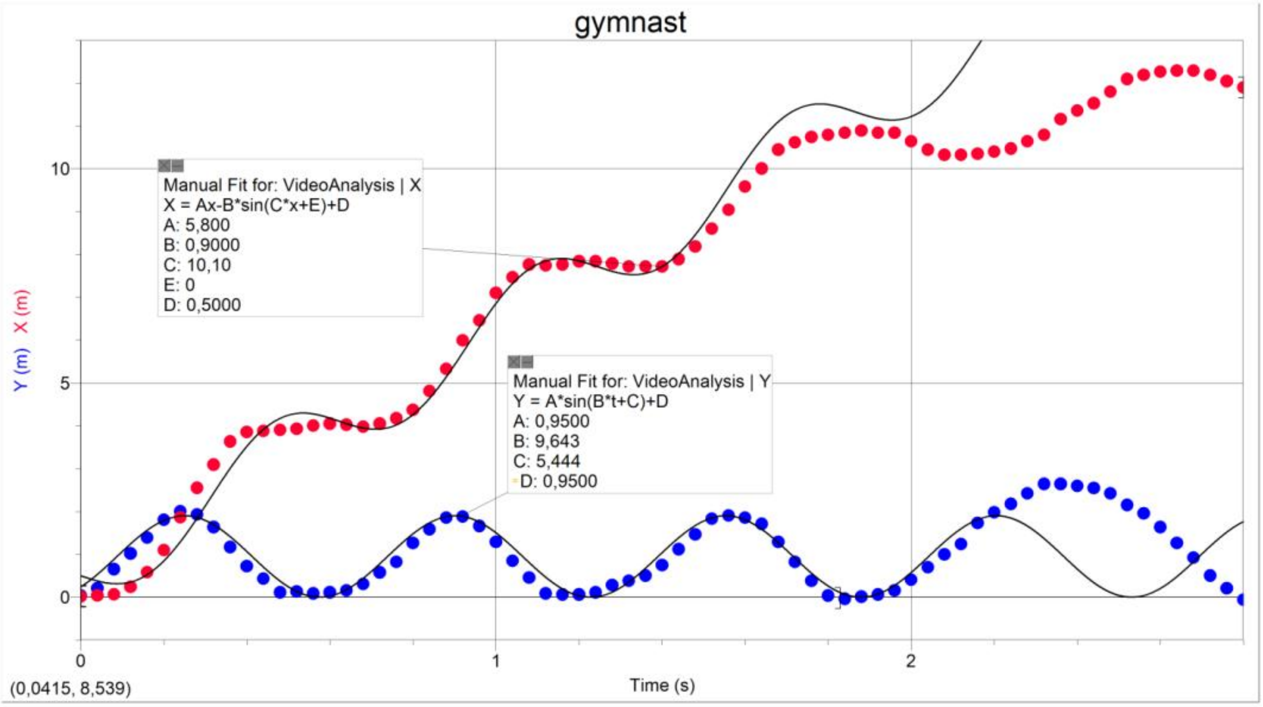
Videoklippet om gymnasten åbnes i Logger Pro, hvorefter Origo, størrelsesforhold og punkter der følger bevægelsen afsættes.

Figur 11

Fejlkilder:

- Igen er kameraet håndholdt, hvilket betyder mindre unøjagtigheder.
- Det er lidt utydeligt at se, hvor fødderne helt præcist er under overslaget.

Herefter ses på vektormodellen, hver dimension tages for sig. Logger Pro giver følgende data. Her har man været nødt til at udføre modellen for *x(t)* manuelt, da Logger Pro ikke kunne gøre dette automatisk.



Figur 12

Af kurven for *y(t)* ses, at den vertikale bevægelse er forholdsvis symmetrisk og tilnærmelsesvist følger sinuskurven $\boldsymbol{y(t) = 0,95\sin(9,64t + 5,44) + 0,95}$

Dette betyder, at gymnasten formår at holde sin krop strakt under hele springserien. Den sidste svingning er gymnastens afsæt til saltomortale og indeholder som følge heraf en større amplitude og mindre frekvens end de resterende svingninger.

Dette er helt i overensstemmelse med starthypotesen.

Hvis man ser på den horisontale bevægelse, ligner den en cykloidebevægelse, hvilket Logger Pro ikke kan tilpasse automatisk. Derfor skal man foretage en manuel tilpasning af parametrene i den fra teorien kendte formel for cykloidebevægelsen:

$$\boldsymbol{x(t) = \alpha t - A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \rho}$$

Man skal dog selv ræsonnere sig frem til denne formel ud fra formlen angivet over *x* radianer.

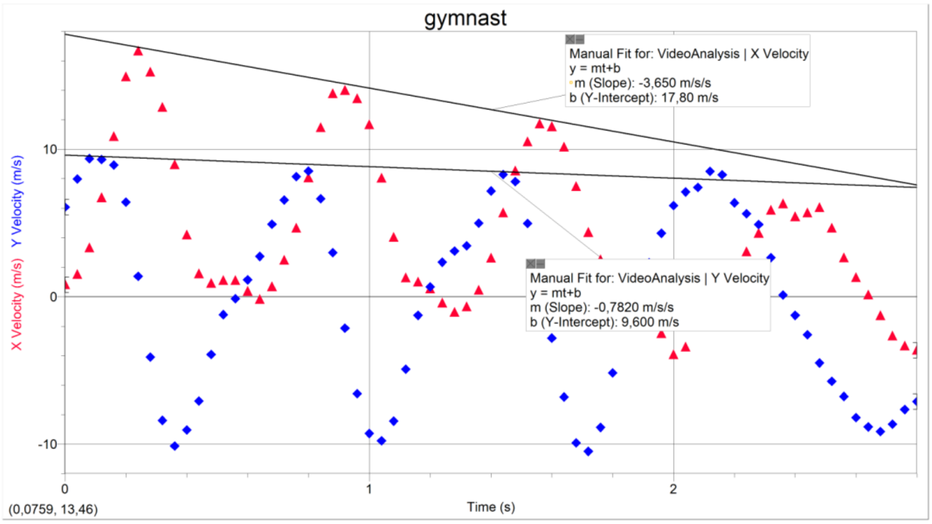
$$\boldsymbol{y = Ax - B \cdot sin(Ax)}$$

Når dette er gjort fås:

$$x(t) = 5{,}8t - 0{,}9 \cdot \sin(10{,}10t) + 0{,}5$$

Ud fra dette kan man bl.a. se, at gymnasten er *1,8m* høj (inkl. armene strakt), da amplituden er *0,9m*. Desuden kan man se, at indspringet til saltomortale-opspringet (det sidste udsving på kurven) afviger fra cykloidebevægelsen og giver en fladere kurve, dvs. hastigheden $\frac{dx}{dt}$ aftager, hvilket også er i overensstemmelse med starthypotesen.

Når man ser på hastighedskurverne fås følgende billede.



Figur 13

Her kan man se, at benenes maksimale hastighed i hvert spring aftager lineært med *3,65* m/s^2 i den horisontale retning, mens den aftager med *0,78* m/s^2 i den vertikale retning. Gymnasten mister altså fart i begge retninger, hvilket betyder, at så længe gymnasten bibeholder sin svingradius, øges svingningstiden, hvilket ses på Figur 13 i form af større afstand mellem nulpunkterne på hastighedskurven for *x(t)*.

Man ser også ud fra hastighedskurverne, at der er størst hastighed i føddernes toppunkt, og at der sker en jævn acceleration af fødderne i den vertikale retning efter, at de har været i gulvet og stå.

Man må konkludere, at bevægelsen kun følger en tilnærmet cykloideformet bevægelse, som ikke er jævn pga. acceleration og deceleration undervejs.

Feedback til gymnasten kan være at få en højere indgangshastighed og at prøve at få mere vertikal hastighed i sine opspring undervejs, så det kan kompensere for det naturlige tab af horisontal hastighed.

Øvelser kan være fokuseret på afsæt og ”kip” i overslaget.

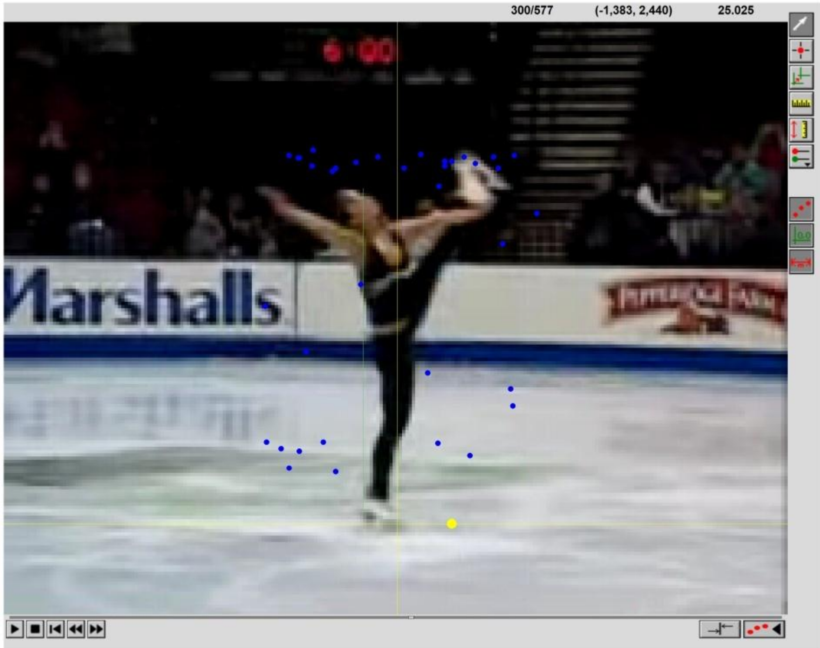
RSC 4: ”Bevægelsesanalyse af kunstskøjteløberen”

- På videoen ses en kunstskøjteløber. Fokuser på den ene skøjtes bevægelse (den skøjte der er fri af isen) der foregår i tidsrummet $[22;25]\,sek$. Lav en matematisk beskrivelse af den tredimensionelle kurve, som bevægelsen følger.
  Beskriv konkrete parametre ved bevægelsen som evt. ville kunne bruges i træningen for skøjteløberen.

Svar:

Starthypotese: Kurven er spiralformet med en jævn cirkelbevægelse i *xy*-planen og en tredelt lineær bevægelse i *z*-aksens retning (skøjte nede, opadgående skøjte, skøjte oppe). Parametre der kan vurderes kan være, hvor stabilt hun kan holde bevægelsen. Jævne bevægelser giver et mere æstetisk indtryk af skøjteløberen.

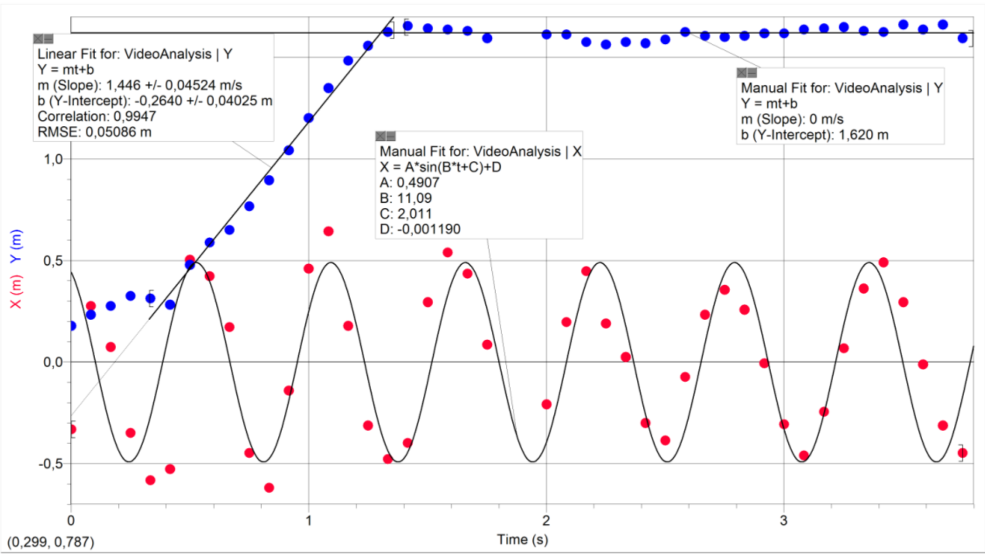
Videoklippet om skøjteløberen åbnes i Logger Pro, hvorefter origo, størrelsesforhold og punkter der følger bevægelsen afsættes.



Figur 14

Fejlkilder:

- Kameraet er også denne gang håndholdt, hvilket igen skaber nogen usikkerhed under evt. rystelser.
- Det kan være svært at se skøjteløberens frie skøjte, så længe den befinder sig med isen som baggrund, og da punkterne skal danne data for en cirkelbevægelse i *xy*-planen, kan for mange usikkerheder give en umulig tilpasning for Logger Pro senere.



Figur 15

Vektormodellerne for de to synlige dimensioner angives på Figur 15. Logger Pro kan godt finde de lineære vertikale beskrivelser men har problemer med for få punkter under estimering af den horisontale bevægelse, hvilket betyder, at man må tilpasse den manuelt med den viden, man besidder om sinuskurven og den jævne cirkelbevægelse.

$$y(t) = 0{,}49\sin(11{,}09t + 2)$$

hvilket repræsenterer bevægelsen i y-aksens retning i *xy*-planen.

$$z(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0{,}3 & for\ t \leq 0{,}4 \\ 1{,}45t - 0{,}26 & for\ 0{,}4 \leq t \leq 1{,}3 \\ 1{,}62 & for\ t \geq 1{,}3 \end{array} \right\}$$

hvilket repræsenterer den vertikale bevægelse.

Bevægelsen er tredelt med løftet i midten $for\ 0{,}4 \leq t \leq 1{,}3$ sek.

Ud fra starthypotesen og kendskabet til den jævne cirkelbevægelse, der foregår i *xy*-planen, genereres nu udtrykket i x-aksens retning:

$x(t) = 0{,}49\cos(11{,}09t + 2)$

Den fundne vektormodel antager, at bevægelsen følger en jævn spiral, og at radius ikke ændrer sig, hvilket den faktisk gør.

Hvis man udleder et udtryk for radius som funktion af tiden, dvs. $R(t)\ for\ 0{,}4 \leq t \leq 1{,}3$ fås, at *R(t)* i denne tidsperiode følger en parabelformet kurve. Ifølge vektormodellen fra før kan radius på cirkelbevægelsen til tidspunkterne hhv. *t = 0,4* og *t = 1,3* sekunder efter bevægelsens start sættes til at være *0,49m*:

$$R(0{,}4) = R(1{,}3) = 0{,}49$$

Og den maksimale radius ca. *0,85* sekunder efter bevægelsens start aflæses til *0,65m*:

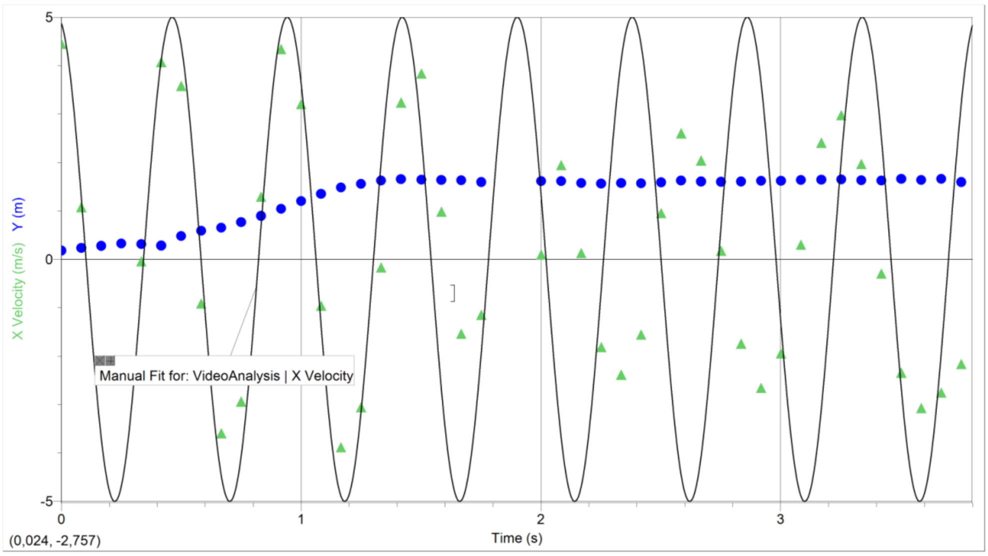
$$R(0{,}85) = 0{,}65$$

Dvs. man kan udlede forskriften for radius:

$R(t) = a(t - 0{,}4)(t - 1{,}3) + 0{,}49 \ \Leftrightarrow R(0{,}85) = a(0{,}85 - 0{,}4)(0{,}85 - 1{,}3) + 0{,}49 = 0{,}65 \ \Leftrightarrow$ $a = -0{,}79$

Dvs. $R(t) = -0{,}79(t - 0{,}4)(t - 1{,}3) + 0{,}49$ som nu kan indsættes i ovennævnte vektormodel i stedet for *R = 0,49*.

Hvis man ser på kurven over cirkelbevægelsens vinkelhastighed og sammenholder den med kurven for den vertikale bevægelse i Logger Pro får man følgende billede:



Figur 16

De få punkter man har genereret sætter en naturlig begrænsning for Logger Pros automatiske analyse, men man kan lave en manuel tilpasning. Under løftet af skøjten er radius på den cirkulære bevægelse som sagt størst på midten. Det bør i overensstemmelse med biomekanikkens love få hastigheden til at sænke sig på midten, da vinkelmomentet er så godt som bevaret (eneste kontakt er skøjte på is, lille friktion). Der kan på kurven for vinkelhastigheden ses ved 2. bue nederst, at de to afsatte punkter ser ud til at danne en mindre bue end den tegnede, dvs. hastigheden midt i opstigningen er mindre end ved rotationen nede og oppe. Det ville være en logisk følge da

$$vinkelmoment = Rotationsradius \cdot masse \cdot vinkelhastighed$$

Og da radius stiger midt i opstigningen, sænkes vinkelhastigheden, fordi momentet bevares, dog med den unøjagtighed i dette tilfælde at der forekommer ydre påvirkninger mellem den anden skøjte og isen. Det er dog meget svært at se, eftersom punkterne ved den 2. øverste bue viser, at hastigheden øges midtfor, dvs. det modsatte af før. Her er desværre for få punkter til at eftervise denne biomekaniske regel med større sikkerhed.

Det ses også af hastighedskurven, at hastigheden sænkes til sidst, når hun har strakt ben. Dette kan skyldes en bevidst handling, da det er en mere belastende stilling, end da skøjten var nær isen.

Efter at have udført den matematiske analyse må man konstatere, at skøjteløberens bevægelser følger jævne kurver i rummet, hvilket er med til at skabe det æstetiske indtryk af hendes performance. Man kan stille spørgsmål ved, ”om det var hensigten med den hurtige opstigning og den lavere hastighed til slut”, hvilket nok kun kan besvares af kunstskøjtekendere.
De punkter, der er plottet ind til sidst ($for\ t \geq 1{,}3$), hvor benet er strakt sammen med Logger Pros tegning af den lineære kurve, viser, at hendes skøjte stort set er i samme niveau i det 1½ sekund, hun har strakt ben. Uden at vide meget om kunstskøjteløb må denne observation siges at bidrage til det positive indtryk af bevægelsen.

For at kunne analysere den didaktiske transposition, der er foregået i forbindelse med afviklingen af de fire RSC, er jeg nødt til at have en referencemodel, der beskriver forholdet mellem de forskellige faglige organisationer af viden, der er intensionen med undervisningsforløbet, og den baggrundsviden eleverne besidder.

Referencemodel til efterfølgende analyse

Det stoffaglige eller fag-faglige[41] formål med undervisningsforløbet danner regionale organisationer indenfor hvert fag med underliggende lokale organisationer. Dette intenderede netværk af organisationer i forbindelse med mit undervisningsforløb vil jeg herunder beskrive og give eksempler på og efterfølgende bruge som min referencemodel under de kommende analyseafsnit. Jeg vil indlede med at beskrive idrætsdelen kort og efterfølgende matematikdelen mere detaljeret, hvor eksemplerne er taget fra hhv. den netop gennemgåede a priori beskrivelse og den efterfølgende a priori analyse under de mikrodidaktiske overvejelser.

Idrætsfaglige organisationer

Som tidligere nævnt danner idrætsfaget den ydre ramme om undervisningsforløbet. Det er meningen, at idrætsfaget skal bidrage med en form for "sammenhæng til samfundet" og herigennem skabe den nødvendige elevinteresse for de fire hovedspørgsmål undervejs.
Idrætsfagets overordnede regionale organisation er styret af "udførelse og anvendelse af bevægelsesanalyser indenfor sportens verden" og indeholder tre underliggende lokale organisationer, hvilket er skitseret herunder på Figur 17. De tre lokale idrætsfaglige organisationer omhandler: Træningsfysiologi, Sportstekniske elementer og Biomekanisk viden.

Teori	Udførelse og anvendelse af bevægelsesanalyser indenfor sportens verden		
Teknologi	Træningsfysiologi	Sportstekniske element	Biomekanik
Teknik	Anaerobe og aerobe processer, smidighed, muskelkæder, forspænding.	Løbe-, kaste-, spring-, skøjteteknik.	Vinkelmoment, Backspin-effekt, kraftpåvirkninger.
Opgavetype	Kroppens fysiske begrænsninger og forbedring heraf, f.eks. anaerobe grænse, spring- og rotationskraft	Øge præstationen ved at forbedre teknikken ved løbestil, kastestil, indspring, rotation, mm.	Analyse af skudafviklingen, springserien, rotationen

Figur 17: Undervisningsforløbets regionale idrætsfaglige organisation.

Disse tre indeholder et antal af præcise praxeologier, som er bestemt af den anvendte teknik. F.eks. kan viden om forbedring af muskelkæders samarbejde under løb anvendes som træningsfysiologisk

[41] Populær betegnelse i forbindelse med den nye gymnasiereform

teknik til forbedring af 60 m – løbet. Det samme kan viden om løbeteknik, f.eks. i forbindelse med brug af armene, og viden indenfor biomekanik f.eks. i forbindelse med tøjets aerodynamik. Dette samspil, som evt. fremkommer under elevfremlæggelserne, giver eleverne en bredere forståelse for bevægelsesanalysers betydning indenfor sportens verden. Den øgede forståelse for formålet med analyserne indenfor idrætsfaget er derved med til at skabe en større interesse for selve udførelsen heraf og i dette tilfælde at anvende matematikken som redskab.

Matematiske organisationer

Indenfor matematikfaget, beskæftiger undervisningsforløbet sig med vektormodeller af 1 variabel til at analysere kurver og modellere bevægelser i rummet, jfr. Figur 18.

Det er tiltænkt, at teorien skal udvikles ud fra forskellige teknologier (sprog) indenfor *1*-, *2*- og *3*-dimensionale kurver i en progressiv udvikling undervejs i forløbet. Undervisningsforløbet er designet efter tre lokale matematiske organisationer, som er repræsenteret ved hver deres teknologi. På Figur 18 har jeg skitseret den tiltænkte regionale organisation med et overordnet syn på de 3 lokale organisationer, som denne indeholder. Jeg vil i det efterfølgende give eksempler på praxeologier fra hver af de tre lokale organisationer, som tilhører den matematikfaglige intention ved undervisningsforløbet.

Teori	Vektormodeller af 1 variabel til at analysere kurver og modellere bevægelser i rummet		
Teknologi	Analytisk geometri	Vektoralgebra	Funktioner af reel variabel
Teknik (eks. fra dette forløb)	Koordinater til centrale punkter på kurveforløbet, ligninger mht. parabel: $y = a(x - r_1) \cdot (x - r_2)$ linjer: $a = \tan(v)$, cirkel: vinkelhastighed i den jævne cirkelbevægelse $\omega = \frac{2\pi \cdot r}{T}$	Kræfternes parallelogram, $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \lvert\cdot\vec{b}\rvert}$, $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, samt opskrivning af vektorbeskrivelse i plan og rum.(sted, hastighed, acceleration)	Lineære, trigonometriske og sammensatte funktioner mm. Differentialregningsregler såsom differentialkvotienten til andengradspolynomium, lineære og trigonometriske udtryk.
Opg. Type (eks. fra dette forløb)	Angive ligningen for bevægelsen i en retning, bestem vinkel til vandret. Aflæs toppunkt.	Bestem vinkel mellem vektorer, bestem den resulterende vektor. Find længden af vektor.	Bestem et funktionsudtryk for givent grafisk billede. Find hastighed ud fra differentialkvotienten.

Figur 18: Undervisningsforløbets regionale matematiske organisation.

I de følgende eksempler vil der blive refereret til RSC - diagrammerne i de senere a priori analyser af de fire RSC.
Den første lokale matematiske organisation indeholder teknologien ”Analytisk geometri”, som ”det matematiske sprog” for de underliggende præcise praxeologier.
I RSC 1 kan foretagelse af en bevægelsesanalyse af en stykvis retlinet bevægelse (opgavetype), som 60 m løbets graf viser, ske ved at se på linjens ligning med tilhørende hældningskoefficient som et udtryk for løberens hastighed (teknik = den rette linje), det samme kan gøres ved hastighedskurven.
I RSC 2 er det parabelbevægelsen for basketboldens bane, der skal analyseres (opgavetype) ud fra en andengradsligning, hvor toppunkt, stejlhed og ”endepunkt” (kurven) kan være en fordel at beregne (teknik = parabelbevægelser), jfr. a priori analysen spørgsmål Q_{1b} side 47.
I RSC 3 skal eleverne skitsere føddernes bevægelse som en approksimativ cykloidebevægelse, dog vha. Logger Pro. Ud fra det indlagte origo kan eleverne foretage afstandsberegning i forbindelse med bestemmelse af radius på den roterende bevægelse, jfr. spørgsmål Q_{2b} på side 51. I forbindelse med verificering af Logger Pro’s bestemmelse af sinussvingningen i den vertikale retning og det sammensatte udtryk (af linjen og sinussvingningen) i den horisontale retning, jfr. spørgsmål Q_{2a} på side 51 (opgavetypen) anvendes målinger for udsving, bølgelængde og parallelforskydninger som teknik.
I RSC 4 kan det ses på videoen, at radius på skøjtens cirkulære bevægelse maksimeres omkring midt i opstigningen. For at bestemme udtrykket for radius udvikling under opstigningen (opgavetype), skal skøjtedanserens bevægelse indsættes med et velplaceret origo, hvorved den efterfølgende afstandsberegning kan fortages (teknik).
Ved brug af Logger Pro skabes de grafiske situationer over bevægelserne med det samme og muliggør en mere udbredt brug af den analytiske geometri.
Den anden lokale organisation er indenfor vektoralgebraen. Her er formålet at anvende og regne med vektorer i plan og rum i forbindelse med bevægelsesanalysen.
I RSC 2 kan både bestemmelsen af kastevinklen samt kastehastigheden (opgavetype) bestemmes ud fra hhv. beregning af vinkel mellem vektorer og længden af den resulterende begyndelsesvektor, jfr. side 27, (teknikkerne). Logger Pro bidrager i denne forbindelse med koordinaterne til de to første fikserede punkter på bevægelseskurven(i hver retning), hvoraf de nødvendige vektorer kan beregnes og anvendes i kasteanalysen.
Bevægelsesanalysen af cykloidebevægelsen under RSC 3 kræver, at eleverne har en indsigt i den jævne cirkelbevægelse. En af de store forskelle mellem den teoretiske bevægelse af cykloiden og

den praktiske måling på gymnasten er bevarelsen af den resulterende hastighed, dvs. den resulterende vektor. På Logger Pros graf over hastighedsmålingerne, jfr. Figur 13 side 30, ses en aftagende resulterende fart, som fås ved at tage kvadratroden af summen af kvadratet på farten i begge retninger eller ved at addere vektorerne mellem to nabopunkter på grafen over bevægelsen for at få den resulterende hastighedsvektor. Det kan man nok ikke forvente fra eleverne, men de har mulighed for at underbygge deres formodede betragtning om tab af resulterende hastighed på graferne med beregninger indenfor vektoralgebraen.
For at forstå den samlede vektormodellering af cykloidebevægelsen, jfr. spørgsmål Q_{2b} side 51, kan det være en fordel at anvende vektorforskydninger som en del af teknikken.

Det forventes, at de to førstnævnte lokale organisationer er integreret hos eleverne, eftersom det er en naturlig del af strukturen i lærebøgerne[42]. Den analytiske geometri, der findes i gymnasielærebøger, indeholder mange sætninger, der bliver forklaret eller forholdsvist let kan forklares vha. vektoralgebra. Helt så nemt for eleverne er det ikke at tilkoble funktioner og modeludtryk af en variabel. Selvom det stadig drejer sig om at beskrive en bevægelse eller udvikling, har funktions- og modelbegrebet i lærebøgerne, og derfor antagelig også hos eleverne, sine egne isolerede teoremer til at analysere bevægelsen.

”Funktioner af reel variabel” eksisterer gennem hele forløbet, eftersom hver bevægelsesretning bliver beskrevet som funktionsudtryk af tiden. Logger Pro giver ved de simple bevægelser sit bud på den model, der bedst beskriver bevægelsen. Herfra kan eleven så bruge udtrykket i den analysesammenhæng, der ønskes.
I RSC 1 fås en stykvis ret linje, som det sås indenfor analytisk algebra, hvilket skaber en stykvis lineær funktion, jfr. spørgsmål Q_{1a} side 43 under a priori analysen senere. Dette er med til at beskrive bevægelsen og effekten af forbedring heraf (opgavetype). Teknikken her må betegnes som funktionsbegreberne ved den lineære funktion.
I RSC 2 kan en modellering af 3-pointskuddet med fordel anvendes i bestemmelsen af begyndelseshastighed vha. differentialkvotienterne $x'(0)$ og $y'(0)$, jfr. spørgsmål $Q_{1,1}$ på side 47.
I RSC 3 og 4 anvendes trigonometriske funktionsudtryk til at analysere bevægelserne i de pågældende 2 eller 3 dimensioner. På RSC - diagrammerne over RSC 3, side 51, og RSC 4, side 56, findes opgavetyper såsom Q_{2a} og Q_{2b} indenfor RSC 3 og Q_1 og Q_2 indenfor RSC 4, som mobiliserer

[42] Der henvises her til elevernes lærebog fra 1.g: Carstensen, Frandsen og Studsgaard: “MAT A1” kap. 5 ”linjer og vektorer”, kap. 6 ”Cirkler og vinkler” og kap. 7 ”Linjer og afstande”.

praxeologier indenfor netop denne lokale organisation. Teknikken til løsning af Q_{2a} vil bestå af koefficienttilpasning af sinuskurven indenfor Logger Pro, mens Q_{2b} skal løses ved brug af trigonometriske begreber såsom radianer, omløbstid og vinkelhastighed. Indenfor RSC 4 kan spørgsmål Q_1 besvares ved figurbetragtning og tilpasning af koefficienter som set før, mens spørgsmål Q_2 kræver indsigt i den jævne cirkelbevægelse som en vektormodel, evt. opnået ved betragtning af enhedscirklen. Dette skaber en bred vifte af teknikker som tilhører ”funktioner af reel variabel”.

Som man ser af ovenstående og af spørgsmålene i RSC diagrammerne herunder, har opgavetypen ofte flere løsningsteknikker også indenfor forskellige lokale praxeologier. Denne mulighed for at arbejde på tværs af lokale organisationer kan komme specielt til udtryk ved klassediskussionerne, hvor de mobiliserede praxeologier kan fremlægges og valideres for hele klassen. Dette er med til at synliggøre matematikanvendelsen og heraf måske matematikforståelsen, hvilket er en stor del af styrken ved RSC, hvor den tilsigtede viden skal genereres ud fra studieprocessen og specielt de mobiliserede praxeologier undervejs og i mindre grad fra det endelige svar på problemstillingen R_0. Samspillet mellem de lokale organisationer ses specielt i takt med, at niveauet bliver højere. Specielt under RSC 3 og RSC 4, skulle samspillet mellem modellering og vektoralgebra gerne skabe en ny viden indenfor vektormodellering i forbindelse med at analysere bevægelserne. Stadigvæk giver inddragelsen af Logger Pro eleverne mulighed for at visualisere sig kurven og anvende analytisk geometri til at skabe sig en bedre forståelse af bevægelsen inden den mere dybdegående analyse i samspil med de to andre lokale organisationer. Eksempler på disse samspil er anvendt under a priori beskrivelserne jfr. side 21ff.

Elevernes forudsætninger for at anvende de ovennævnte teknikker begrænser sig til deres kendskab til modellering og vektorer i 2 og 3 dimensioner opnået fra tidligere forløb. De har herfra kendskab til parameterfremstillinger af linjer samt af den jævne cirkelbevægelse, som de er stødt på i et tidligere flerfagligt AT-forløb (Alment studieforberedelse). For at supplere deres viden yderligere og mindske begrænsningerne under de senere RSC, har jeg valgt at indlede ”matematikdelen” i mit undervisningsforløb med 2*45 minutters introduktion til parameterkurver og vektormodeller, jfr. undervisningsprogrammet under bilag A.

Anvendelsen af Logger Pro i forbindelse med teknikkerne i de ovennævnte praxeologier bør også være med til at forbedre elevernes muligheder i arbejdet under RSC, såfremt de relevante handlebegreber er velkendte. Modul 3 er således indledt med en kort lærerstyret introduktion til Logger Pro, dvs. en institutionalisering af handlebegreber i forbindelse med Logger Pro, hvilket bør lette anvendelsen heraf og dermed også øge forudsætningerne for at mobilisere praxeologier under arbejdsprocessen.

Jeg ser midlerne som en af de grundlæggende faktorer for, at RSC kan opnå den tilsigtede virkning på eleverne og skabe en viden indenfor vektorgeometri, som i forvejen er ukendt for dem.
Midlerne til rådighed er dog kun en del af den didaktiske transposition.
Jeg vil i det næste afsnit se på makro- og mikrodidaktiske overvejelser under den interne didaktiske transposition i forbindelse med de fire RSC.

Den interne didaktiske transposition

Hele idéen med RSC er, at det skal foregå i et adidaktisk studiemiljø, hvor det er selve studieprocessen, der er i fokus. Det er derfor vigtigt i hvert forløb, at designet af hovedspørgsmålet muliggør en længere studieproces, hvor eleverne har mulighed for flere teknologiske og teoretiske overvejelser.
I forbindelse med designet af undervisningsforløbet har jeg gjort mig nogle antropologisk didaktiske overvejelser, som jeg har beskrevet nedenunder.
Til brug i undervisningssituationen har jeg udarbejdet en undervisningsmanual, jfr. bilag A. Heraf fremgår det, at undervisningsforløbet indledes med to lærerstyrede moduler, hvor videomaterialet skal indsamles i idræt, og hvor de grundlæggende begreber for vektormodeller præsenteres i matematik.

Makrodidaktiske overvejelser

Makrodidaktiske overvejelser skal primært omhandle de overordnede rammer ved undervisningsforløbet såsom læreplaner, materiale, arbejdsvilkår og elevernes forventede viden.
Designet af RSC kræver i sig selv visse overvejelser med henblik på den adidaktiske arbejdsproces.
Herigennem får eleverne, udover de faglige kompetencer, tildelt nogle ikke-faglige kompetencer, som er i overensstemmelse med kravene i læreplanerne.
Herunder er nogle overordnede overvejelser gjort i forbindelse med designet af de fire RSC.

1. Arbejdsprocessen i forbindelse med RSC skal foregå i grupper á ca. 4 elever. Da formålet med forløbet er i studieprocessen, finder jeg det vigtigt, at der kan foregå en faglig diskussion i forbindelse med besvarelsen af problemstillingen.

2. Det forventes, at eleverne er bekendte med vektorer i 2 og 3 dimensioner og for at sikre mig, at eleverne har så fælles faglige forudsætninger som muligt, har jeg indledt forløbet med et matematisk modul, hvis formål er at beskrive den grundlæggende viden indenfor vektormodeller og parameterkurver. Eleverne vil i den forbindelse få udleveret elevark med opgaver, som i mange tilfælde kræver viden, der endnu ikke er institutionaliseret. Disse elevark skal være med til at styre den information og viden, jeg videregiver til dem inden RSC. Elevarkene (inkl. svar) er vedlagt som bilag B.
3. Rækkefølgen på de fire RSC er dannet med henblik på at skabe en progressiv anvendelse af Logger Pro som instrumental teknik og RSC som undervisningsform. Intensionen er, at eleverne kan bruge den indsamlede og institutionaliserede viden fra et gennemarbejdet RSC til arbejdsprocessen under det næste RSC. De fire RSC er kreeret, så de stiger i kompleksitet og omfang i takt med, at eleverne bliver fortrolige med undervisningsformen og værktøjet.
4. I starten af hvert modul fremlægges og valideres elevernes arbejde. Dette sker ved, at den enkelte gruppe enten fremviser deres eget arbejde eller modargumenterer på en anden gruppes arbejde. Ved at skabe en valideringssituation sikrer jeg mig, at eleverne danner en fællesnævner for deres indsamlede viden og derved kan fortsætte deres efterfølgende studieproces på lige vilkår. Desuden giver det eleverne mulighed for at formulere matematik og lære at argumentere eller modargumentere for særligt udvalgte idrætslige og matematiske påstande. Når valideringssituationen foreligger ved afslutningen af de sidste RSC, vil jeg i forbindelse hermed foretage en institutionalisering af den regionale organisation, selvfølgelig indenfor de rammer eleverne har arbejdet med.
5. Eleverne afleverer ved afslutningen af hvert RSC en rapport, som beskriver deres arbejdsproces. Denne rapport skal bruges som led i evalueringen af gruppens studie af det genererende spørgsmål under RSC. Rapporten kan uploades elektronisk i en fælles mappe, så eleverne ikke behøver at bekymre sig om udskrivning til læreren og kopi til gruppens deltagere.
6. Afslutningsvis skal eleverne udfylde et evalueringsskema over deres egen individuelle indlæring ved de fire RSC. Her skal de beskrive arbejdsprocessen og evaluere brugen af instrumentale teknikker og den flerfaglige betydning. Jeg har valgt ikke at gøre det anonymt, så jeg kan sammenligne besvarelsen med gruppens arbejde og min observation af gruppens samarbejdsevner og seriøsitet omkring forløbet.

Mikrodidaktiske overvejelser

Jeg vil herunder kun beskrive de mikrodidaktiske overvejelser, jeg har gjort i forbindelse med de fire RSC og ikke i forbindelse med de to moduler inden. Overvejelserne er foretaget i overensstemmelse med de makrodidaktiske valg og efter teorien om den antropologiske didaktik. Da undervisningsforløbet foregår i et adidaktisk miljø, vil det være umuligt at forudse alle hændelser. Derfor er det ikke på forhånd muligt at planlægge i detaljer, hvordan de enkelte situationer skal håndteres.

Herunder er foretaget en a priori analyse af de fire forløb enkeltvis. Først er angivet et RSC – diagram, der illustrerer en mulig opbygning af studieprocessen til besvarelse af hovedspørgsmålet Q_0, jfr. Figur 4. De stiplede pile på figuren illustrerer idrætsfaglige overvejelser og de fuldt optrukne pile repræsenterer de matematiske overvejelser.
Dernæst har jeg analyseret forventningerne ved forløbene efter strukturen, der ses i nedenstående tabel[43].

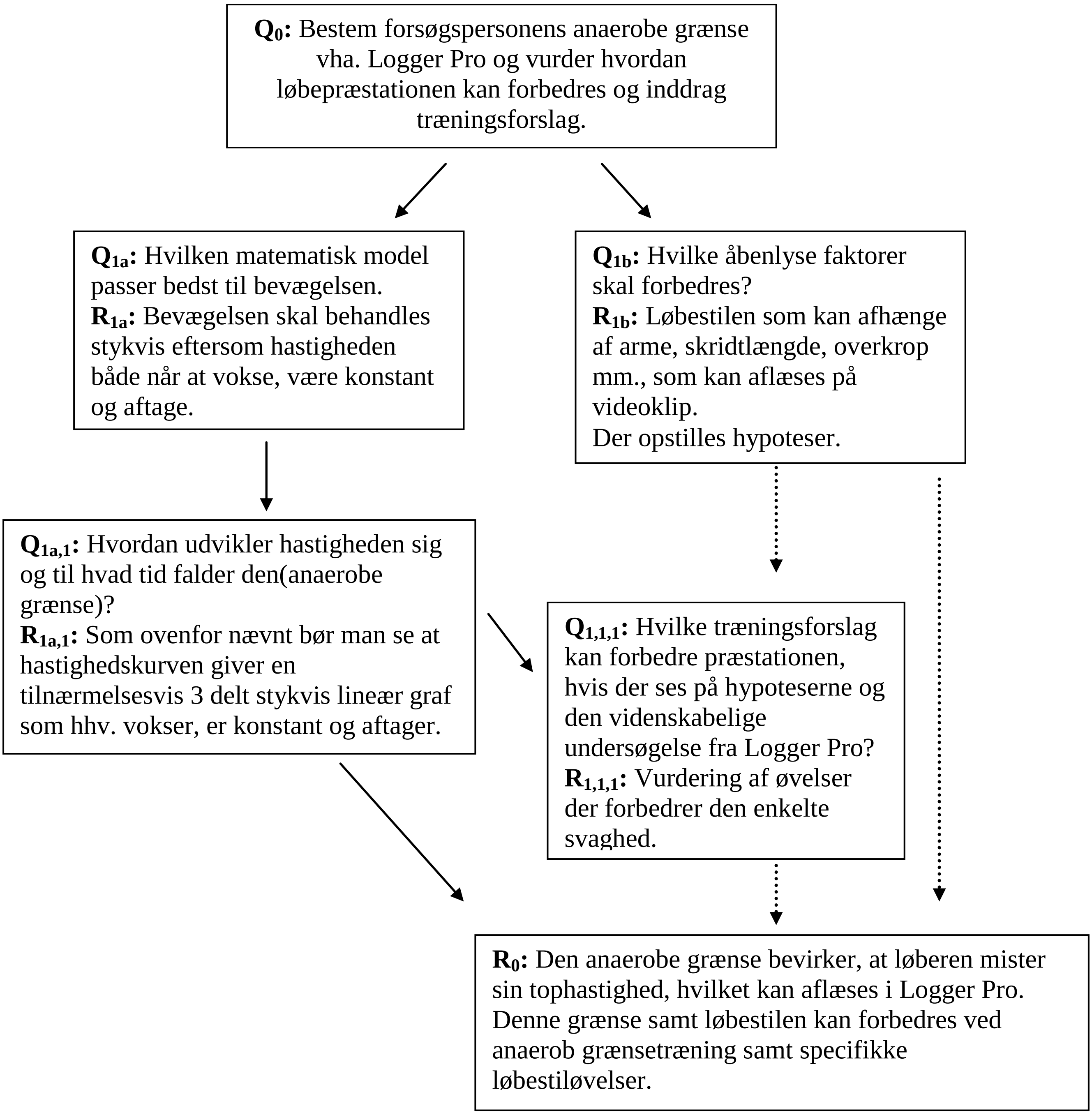
Trin	ATD – orienterede begreber	Hovedformålet	Forventet elevudbytte
Udspecificering af hovedspørgsmålet indenfor ATD.	• Tværfaglig organisation • Matematisk organisation • Idrætsfaglig organisation		
Elevernes studieproces	• Didaktisk organisation i form af anvendelsen af RSC • Instrumentale teknikker i form af anvendelsen af Logger Pro og CAS.		
Klassediskussion	• Valideringssituationerne i forbindelse med starten på et nyt modul.		

[43] Inspireret af (Shimizu 1999) - figur 1 ”A Common Framework for Lesson Plans” .

Afslutningsvis har jeg forsøgt at løse og besvare nogle af de mulige problemer og spørgsmål, jeg kan forvente fra eleverne undervejs i deres forsøg på at udvikle det næste genererende spørgsmål under RSC.

A priori analyse af RSC 1

RSC 1 – diagram:



Udspecificering af hovedspørgsmålet Q_0:

Tværfaglig organisation:

Bestem den anaerobe grænse vha. Logger Pro.

Det tværfaglige formål er, at eleverne formår at bruge resultaterne fra modelanalysen til en idrætsfaglig bedømmelse og efterfølgende kan give feedback til løberen.

Det forventede elevudbytte er, at eleverne gennem det visuelle indtryk af kurven for $x(t)$ bliver bevidste om den aftagende hastighed efter et par sekunder og, at de hertil gennem Logger Pro kan knytte en vektormodel, som de kan bruge argumenterende i en idrætsfaglig begrundelse.

Matematisk organisation:

Vektormodeller anvendt på lineære 1-dimensionale bevægelser.

Det matematiske formål er, at eleverne kan forstå og kunne anvende vektormodellen $s(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ i stedet for den vante $f(x, y) = 0$. Herunder også at eleverne får arbejdet med begreberne hastighed og acceleration ved vektormodellen.

Jeg forventer, at eleverne kan bruge Logger Pro's modeludtryk til at udlede vektormodellerne for hhv. løbeafstand og hastighed i den horisontale retning og, at de forstår sammenhængen her imellem. Desuden forventer jeg, at de kan se relevansen i at inddele bevægelsen for at få mere nøjagtige modelestimeringer.

Idrætsfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af kortdistance sprint med efterfølgende anvendelse heraf i form af vurdering og træningsforslag.

Det idrætsfaglige formål er, at eleverne får en indsigt i eliteudøveres anvendelse af videooptagelser til optimering af deres træningsbetingelser og efterfølgende præstation under konkurrence.

Jeg forventer, at eleverne kan bruge bevægelsesanalysen til at udvikle relevant feedback til løberen og komme med kvalitative overvejelser mht. forbedrende træningsøvelser.

Elevernes studieproces:

Didaktisk organisation:

Anvendelse af RSC som indlærings-metode.

Formålet med dette RSC, som er tiltænkt snævert i forhold til de efterfølgende, er at få elevernes arbejdsmetode ændret fra den klassiske lærerstyrede til den elevstyrede, hvor de selv skal stille sig nye opklarende spørgsmål, som er relevante for løsningen af problemet. De skal vænnes til, at besvarelsen er forholdsvis åben, og at udbyttet af studieprocessen afhænger af deres fordybelse i besvarelsen.

Derfor er det også forventet, at eleverne får svært ved den nye undervisningsform, da de er vant til opgaveløsning på den mere direkte og lærerstyrede måde. De er vant til at få givet metode og redskaber til løsning af et givent problem. Den ”udforskning” som RSC lægger op til står i kontrast til dette, hvilket bliver en udfordring for eleverne og måske endda en forhindring i studieprocessen.

Instrumental organisation:

Anvendelse af Logger Pro og CAS som analyseredskaber.

Det instrumentale formål er, at eleverne lærer at anvende Logger Pro og CAS som analytiske redskaber på et simpelt niveau. I Logger Pro skal de kunne plotte bevægelsen og anvende ”Curve Fit” på såvel *x(t)* som *x'(t)*. På CAS skal de kunne tegne parameterudtryk i stedet for funktionsudtryk.

Det forventes, at eleverne vha. vejledningen, som var hjemmearbejde, og institutionaliseringen i klassen kan udføre arbejdet med Logger Pro. Det forventes ligeledes, at der undervejs vil opstå spørgsmål mht. visse handlebegreber indenfor Logger Pro og CAS.

Klassediskussion: **(generelt for alle fire RSC)**

Formålet med afholdelse af en valideringssituation i starten af det efterfølgende modul er som skrevet tidligere at få valideret elevernes arbejde i samarbejde med læreren og derved ensarte den faglige (og her flerfaglige) teknologiske og teoretiske viden anvendt i det forudgående modul.

Det forventes, at gruppen, der fremlægger deres arbejde, argumenterer for deres analyse og efterfølgende feedback, mens de resterende elever bruger udbyttet fra deres egen studieproces til at støtte, supplere eller modargumentere herpå. Denne proces styres af læreren, som står for valideringen af den forventede teknik, teknologi og teori, der er anvendt i forbindelse med studieprocessen under det afsluttede RSC. På den måde kan hele klassen medtage den samme validerede viden til næste RSC og derved udvide og forbedre de midler, de har til rådighed, og derved mindske denne type begrænsning, jfr. side 15.

Beskrivelsen gælder for alle de indlagte valideringssituationer. Grundet de forbedrede midler eleverne opnår ved studieprocessen under et RSC, kan jeg tillade mig at øge de faglige såvel som de didaktiske krav til eleverne i de efterfølgende RSC.

Som skrevet tidligere medfører den adidaktiske situation, at det er svært at forudse alle problemer relateret til elevernes studieproces. De overvejelser, jeg har gjort mig i denne forbindelse, er skitseret nedenfor.

Vanskeligheder:

1. Problemer ved downloading af videoklip.
2. Problemer med Logger Pro
3. Manglende forståelse af Logger Pro.
4. Manglende motivation til at udforske en problemstilling i længere tid ad gangen, hvilket medfører manglende fordybelse i problemet, som resulterer i en overfladisk løsning.
5. Manglende matematisk dybde i argumenterne.
6. Manglende sammenkobling af matematik og idræt til sidst under konklusionerne.

Løsningsovervejelser:

Ad 1: Videoklippene medbringes på USB-stik.

Ad 2: Programmet medbringes og alle PC'erne burde have det installeret.

Ad 3: Brugen af Logger Pro gennemgås i starten af modulet. Undervejs kan der højst sandsynligt være grupper, der ikke kan huske funktionerne i Logger Pro. Her vil jeg besvare konkrete spørgsmål af instrumentel karakter – ikke faglige til at starte med.

Ad 4 & 5: Motivationsfaktoren skal hele tiden være at besvare spørgsmålet fyldestgørende. Hvis de ikke selv kan nå der til, vil jeg stille spørgsmål i de områder, de ikke har dækket. F.eks. Er hastigheden konstant under hele løbet? Hvilken vektormodel beskriver bedst løbet, og hvordan ser den tilhørende vektormodel for personens hastighed ud? Hvis I skulle dele løbet op i to modeller, på hvilket tidspunkt skulle opdelingen være, og hvordan ser modellerne ud?

Ad 6: Sammenkoblingen er vigtig for idrætsudøveren som skal modtage konklusionen på sit svar. Derfor kan man spørge forsøgspersonen, om han/hun nu ved hvad der skal trænes detaljeret på for at forbedre indsatsen og hvorfor? Man kan også bede om en træningsøvelse med matematiske argumenter fra den udledte vektormodel.

A priori analyse af RSC 2

RSC 2 – diagram:

Q_0: På baggrund af en matematisk analyse: Hvordan forbedres forsøgspersonens 3-pointskud i basketball?

Q_{1a}: Hvilken matematisk model passer bedst til bevægelsen.
R_{1a}: Bevægelsen skal behandles som "det skrå kast" og følger derfor parabelkurven - men kan ved den øvede spiller som bruger underskru i bolden bremse op mod enden af kurven.

Q_{1b}: Hvordan er boldens bevægelse i forhold til basketballkurven?
R_{1b}: Er skuddet for kort, for langt, for fladt(ved at se på toppunktet), kastevinkel og begyndelseshastighed kan beregnes ved vektorbetragtning.

$Q_{1,1}$: Hvilke størrelser er interessante i hhv. x(t) og y(t) og hvordan ser idealkurven ud, hvis skuddet skal lykkes?
$R_{1,1}$: Vha. Logger Pro kan vi se på starttangenten som et udtryk for kastevinklen. Begyndelseshastigheden. Koefficienterne til vektormodellen ændres, så de tilpasses den optimale kurve, dvs. et mål givende skud.

$Q_{1,1,1}$: Hvilke bevægelsesændringer skal foretages, og hvilken basketballteknisk konsekvens har det?
$R_{1,1,1}$: Kinematik: Kastevinkel, kraft, underskru i bolden.

R_0: Det fundne under R4 med forslag til træningsøvelser som vil udbedre de observerede mangler ved skuddet.

Udspecificering af hovedspørgsmålet Q_0:

Tværfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af 3-pointsskuddet ud fra matematisk modellering.

Formålet er, at eleverne formår at bruge resultaterne fra modelanalysen som argument for en idrætsfaglig konklusion til basketballspilleren.

Det forventes, at eleverne bruger egenskaberne ved den parabel lignende kurve til at udtale sig om skuddets kastevinkel og starthastighed og herfra drager konkluderende ændringsforslag til skuddets afvikling.

Matematisk organisation:

Vektormodeller og parameterkurver i forbindelse med 2-dimensionale bevægelser.

Formålet er, at eleverne skal lære at arbejde med vektormodeller i 2 dimensioner og forstå udtrykkende for *x(t)* og *y(t)*'s betydning for kurven. De skal ligeledes forstå den resulterende hastighed $\overrightarrow{s'(t)}$ som sum af $\overrightarrow{x'(t)}$ og $\overrightarrow{y'(t)}$ for at kunne arbejde videre med begreberne acceleration og kraft.

Jeg forventer, at eleverne kan bruge Logger Pro til at skabe forståelse for bevægelserne *x(t)* og *y(t)* med tilhørende hastigheder, mens udregning af den resulterende hastighed og kastevinkel nok vil skabe problemer.

Idrætsfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af et enkeltstående teknisk element fra basketballspillet med efterfølgende anvendelse heraf i form af vurdering og træningsforslag.

Formålet er, at eleverne får en indsigt i eliteudøveres anvendelse af bevægelsesanalyser til optimering af deres præstation, og at eleverne finder ud af, hvad de kan fokusere på ved næste 3-pointsskud.

Jeg forventer, at eleverne kan give feedback til basketballspilleren med forslag til forbedrende træningsøvelser.

Elevernes studieproces:

Didaktisk organisation:

Anvendelse af RSC som indlærings-metode.

Formålet under det andet RSC er, at eleverne bruger Logger Pro til at skabe så mange matematiske forudsætninger som muligt for at lave en fyldestgørende bevægelsesanalyse af 3-pointsskuddet, og at de herved får tilegnet sig viden om vektormodeller og deres anvendelse.

Jeg forventer endnu ikke, at eleverne har vænnet sig til undervisningsformen, men der bør nu være forståelse for det "udforskende" element og det medfølgende elevansvar, der ligger i studieprocessen. Det forventes, at der stadig vil være brug for bekræftelse i, at det, man fokuserer på, er rigtigt, og måske er der brug for idéer, hvilket læreren kan bistå med.

Instrumental organisation:

Anvendelse af Logger Pro og CAS som analyseredskab.

Formålet er, at eleverne videreudvikler deres forståelse for anvendelsen af Logger Pro som analyseredskab, at de kan danne vektorudtryk for begge koordinater og for hastigheden hertil og, at de kan tilegne sig nye teknikker som at finde tangenthældning og sekanthældning til bestemmelse af en tilnærmet kastehastighed og kastevinkel.

Det forventes, at plotning af punkter og brug af *"Curvefit"* på denne bevægelse er forstået, og at nogle ser kinematikkens love i bevægelsen. Problemerne forventes at opstå ved handlebegreberne til angivelse af tangent- og sekanthældning.

A priori vanskeligheder:

IT - orienterede:

1. Problemer ved downloading af videoklip.
2. Problemer med handlebegreber indenfor Logger Pro og CAS.

RSC - orienterede:

3. Manglende motivation til at udforske en problemstilling i længere tid ad gangen, hvilket medfører manglende fordybelse i problemet, som resulterer i en overfladisk løsning.
4. Manglende generering af nye spørgsmål og svar til løsning af det stillede problem.

Matematisk – orienterede:

5. Manglende matematisk dybde i de bevægelsesanalytiske argumenter.
6. Manglende forståelse af sammensætning af en vektormodel over skuddet vha. x(t) og y(t).

Tværfagligt – orienterede:

7. Manglende sammenkobling af den matematiske analyse og den sportslige feedback til udvikling af relevante forbedrende træningsøvelser.
8. Manglende indsigt i hvilke matematiske parametre der er centrale for basketballspillerens forbedring af 3-pointsskuddet.

Idrætsligt – orienterede:

9. Manglende viden om basketball til at udvikle træningsøvelser til forbedring.

Løsnings-overvejelser:

Ad 1: Videoklippene medbringes igen på USB-stik.

Ad 2: Brugen af Logger Pro burde generelt set være problemfri pga. praktiseringen heraf under RSC - forløb 1. Konkrete spørgsmål kan stadigt opstå, og her vil jeg besvare spørgsmål af instrumentel karakter – ikke faglige til at starte med.

Ad 3 og 4: Motivationsfaktoren skal hele tiden være at besvare spørgsmålet fyldestgørende. Hvis de ikke selv kan nå dertil, vil jeg stille et enkelt spørgsmål i et af de områder, de ikke har dækket og få dem til at komme videre derfra. F.eks. hvordan ser initialhastigheden ud? Hvilken vektormodel beskriver bedst kastet, og hvad skal ændres for, at bolden går i kurven? Hvordan ser kastevinklen ud, og hvilken betydning kan den have for skuddet?

Ad 5: Stille matematiske spørgsmål såsom: Hvordan ser vektormodellen ud? Hvad er den horisontale og vertikale hastighed? Hvordan ser tangenthældningen ud til $t = 0$. Det er vigtigt, at de ved arbejdet med disse spørgsmål ser anvendeligheden til besvarelse af den initierende problemstilling.

Ad 6: Repetere for dem vektormodellens opbygning over 2 dimensioner. Eleverne skal have lov til selv at arbejde med spørgsmålet, inden svaret gives.

Ad 7 og 8: Sammenkoblingen er vigtig for idrætsudøveren, som skal modtage konklusionen på sit svar. Derfor kan man jo spørge forsøgspersonen, om han/hun nu ved, hvad der skal trænes detaljeret på for at forbedre indsatsen og hvorfor? Eller man kan bede om en træningsøvelse med matematiske argumenter fra den udledte vektormodel.

Ad 9: De må beskrive, hvad de ønsker at forbedre ved basketballspilleren.

A priori analyse af RSC 3

RSC 3 – diagram: ***(H_3 er ment som en hypotese der efterfølgende undersøges)***

Q_0: På baggrund af en matematisk analyse: Hvordan bevæger gymnasten sig og hvilken feedback kan gives?

Q_1: Hvilken parameterkurve beskriver bevægelsen i hver af de to dimensioner.
R_1: En sinuskurve i den vertikale bevægelse og en sinuskurve der følger en voksende ret linje i den horisontale bevægelse.

Q_2: Hvilken matematisk model beskriver bedst den horisontale bevægelse?

Q_{2a}: Hvordan designes en model indenfor Logger Pro, der beskriver den horisontale bevægelse? (Logger Pro indeholder ikke udtrykket fra start af)
R_{2a}: $A \cdot t - B \cdot \sin(C \cdot t + D) + E$, herefter skal koefficienterne tilpasses manuelt, så graferne passer.

Q_{2b}: Hvordan beskriver lærebogen cykloidens horisontale bevægelse?
R_{2b}: $A \cdot x - A \cdot \sin(x)$, hvor x er antallet af radianer gymnastens fødder har bevæget sig cirkulært omkring gymnastens kropsmidtpunkt med radius A. Herefter skal x omregnes til tid ved $x = \omega \cdot t$, vinkelhastighed $\omega = \frac{2\pi \cdot A}{T}$.

Q_3: Hvilke tidspunkter i springserien er interessante at se på og hvilke parametre er vigtige?
H_3: Når hhv. fødder og hænder er i gulvet, kan der ses på hastighed og acceleration i de to dimensioner.

Q_{3a}: Hvordan udvikler den horisontale hastighed sig?
R_{3a}: Gymnastens hastighed aftager i den horisontale retning. Dette er medvirkende til, at vinkelhastigheden aftager og at bevægelsen derfor afviger fra cykloidebevægelsen.

Q_{3b}: Hvordan udvikler afsætsaccelerationen sig?
R_{3b}: Gymnastens afsætsacceleration aftager med tiden. Dette er medvirkende til, at vinkelhastigheden aftager og at bevægelsen derfor afviger fra cykloidebevægelsen.

Q_4: Hvilke bevægelsesændringer kan gymnasten foretage sig for at forbedre springserien.
R_4: Den horisontale hastighed kan der ikke gøres noget ved. Den vertikale afsætsacceleration kan godt bibeholdes og skal faktisk øges for at bibeholde vinkelhastigheden og dermed bevare cykloideudseendet.

R_0: Det fundne under R_4 med forslag til træningsøvelser.

Udspecificering af hovedspørgsmålet Q_0:

Tværfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af gymnasts springserie (3 overslag efterfulgt af en salto) som en cykloideformet bevægelse.

Formålet er, at eleverne bruger de centrale tidspunkter på den cykloide lignende kurve til at foretage en idrætsfaglig feedback ud fra matematiske parametre.

Det forventes, at eleverne kan overføre kurvens udseende til gymnastens bevægelse og derved finde de tidspunkter på kurven, som er centrale for gymnastens springserie og analysere dem.

Matematisk organisation:

Cykloidebevægelsen med det observerede punkt liggende på cirkelperiferien.

Formålet er, at eleverne vha. Logger Pro skal angive en vektormodel for cykloidebevægelsen og lære cykloidens egenskaber i *x(t)* og *y(t)*'s retning. De skal desuden forstå cykloidens hastigheds-egenskaber undervejs i bevægelsen, og derved forstå bevarelsen af den resulterende hastighed $\overrightarrow{s'(t)}$ som sum af vekslende størrelser på $\overrightarrow{x'(t)}$ og $\overrightarrow{y'(t)}$, (på nær i afsættene, da det er en springserie, vi ser på).

Jeg forventer, at selvom teorien bag cykloidebevægelsen er læst som hjemmearbejde, vil der opstå problemer med beskrivelsen af et udtryk herfor. Udtrykket for *x(t)* vil give problemer, eftersom det er sammensat af en sinuskurve om en voksende retlinet bevægelse. Her kan det blive nødvendigt med lærerindblanding. Resten af egenskaberne for bevægelsen mht. *y(t)*, hastighed og acceleration bør ikke være noget problem at aflæse og forstå til videre tværfaglig anvendelse.

Idrætsfaglig organisation:

Angivelse af feedback på springserie med henblik på forbedrende træningsøvelser.

Formålet er, at eleverne får indsigt i eliteudøveres anvendelse af bevægelsesanalyser til optimering af deres præstation, og at eleverne får en biomekanisk indsigt i gymnastens bevægelse med henblik på, hvad der evt. kan forbedres.

Jeg forventer, at eleverne sammenholder deres hastigheds- og accelerationsobservationer med de gældende naturkræfter i forbindelse med tab af resulterende hastighed, og herved giver en realistisk feedback til gymnasten. Eleverne kan godt have svært ved at se forbedringsmuligheder (på en talentfuld gymnast), hvilket heller ikke er en nødvendighed.

Elevernes studieproces:

Didaktisk organisation:

Eleverne skal gennemføre et mere genererende RSC end de to forrige under mere fagligt udfordrende forhold.

Formålet er først at give eleverne en simpel viden om cykloiden, som de kan bruge i deres bevægelsesanalyse. Herefter at få eleverne til at generere praxeologier angående relevante egenskaber ved cykloiden som kan bruges til analyse af springserien, og som skaber større matematisk forståelse for denne type parameterkurve og vektormodel.

Eleverne forventes på dette tidspunkt at have vænnet sig så meget til undervisningsformen, at de i grupperne kan arbejde mere konstruktivt hen imod besvarelsen af problemstillingen. Dog kan der stadig opstå tværfaglige barrierer, som hæmmer den genererende proces, og som slører formålet med cykloideanalysen. Det forventes også, at eleverne bruger det læste hjemmearbejde om cykloidens udseende som middel undervejs, hvilket bør øge kvaliteten af midler til rådighed og mindske begrænsningerne for elevernes udvikling af praxeologier under dette RSC.

Instrumental organisation:

Anvendelse af Logger Pro og CAS som analyseredskab.

Formålet er, at eleverne videreudvikler deres forståelse for anvendelsen af Logger Pro som analyse-redskab. De skal udvikle deres forståelse for design af modeludtryk i Logger Pro og tilpasning af tilhørende koefficienter, så modellen passer til bevægelsen. Desuden skal de igen bruge hastighed og acceleration som vigtige analyserende redskaber.

Det forventes, at udtrykket for *y(t)* kan udledes, og at hastighed og acceleration kan aflæses og bruges.

Der kan opstå problemer ved handlebegreberne med tilpasning af udtrykket for *x(t)* i Logger Pro. Ved brug af lærebogens udtryk for *x(t)* som anvender radianer, som variabel, kan der opstå problemer i forbindelse med præcisionen ved aflæsning af svingningstiden på videoklippet.

A priori vanskeligheder:

IT - orienterede:

1. Problemer ved downloading af videoklip.
2. Problemer med handlebegreber indenfor Logger Pro i forbindelse med manuelt design af modeludtryk for x(t).

3. Problemer ved sammenligning af graf i CAS, hvor CAS viser bevægelsen i *(x,y)* -koordinatsystem med *t*-parameteren integreret i bevægelsen og Logger Pro, som viser bevægelsen som 2-delt i *(t,x)*- og *(t,y)*-koordinatsystem.

RSC - orienterede:

4. Den manglende projektorienterede indsigt som forhindrer eleverne i at udvikle deres arbejde hen imod svaret på hovedproblemet. Dette kan medføre en overfladisk beskrivelse af cykloidebevægelsen uden fokus på enkelte tidspunkters betydning for kurvens udseende og dermed for gymnastens bevægelse. Dette vil selvfølgelig hæmme gruppen i at generere nye praxeologier, som er centrale for bevægelsesanalysen.

Matematisk – orienterede:

5. Manglende matematisk dybde i de bevægelsesanalytiske argumenter. Dette burde ikke blive et væsentligt problem, da der er rigeligt at analysere på.
6. Manglende forståelse for bevægelsen *x(t)* og konvertering af radianer til tid vha. $s = \omega \cdot t$, hvor ω er vinkelhastigheden, *s* er radianer, *t* er tid

Flerfagligt – orienterede:

7. Manglende indsigt i accelerations- og hastighedsudviklingens betydning for springseriens forløb og derfor problemer med den sportslige feedback til udvikling af relevante forbedrende træningsøvelser.

Idrætsligt – orienterede:

8. Manglende viden om gældende biomekanik ved overslaget i gymnastik, hvilket giver problemer ved fejlretningen af gymnastens bevægelse og forslag til forbedrende øvelser.

Løsnings-overvejelser:

Ad 1: Videoklippene medbringes igen på USB-stik.

Ad 2: Hvis eleverne giver idéerne til et modeludtryk kan læreren være behjælpelig med selve handlebegreberne i Logger Pro.

Ad 3: Logger Pro kan sættes til at frembringe en *xy*-graf. Hvis man vil se billeder af de to bevægelser *x(t)* og *y(t)* på CAS, må x_1 sættes til *t* og y_1 sættes til hhv. *x(t)* og *y(t)*. Dette kan underviseren godt være behjælpelig med, da det er en del af verificeringen i elevernes arbejdsproces.

Ad 4: Hvis en gruppe går i stå i deres arbejde, er det vigtigt, at læreren formår at lede gruppen til andre analysevinkler og derfra lade dem inspirere til videre udforskning.

Læreren kan stille ledende spørgsmål såsom: Er der tidspunkter i springserien, som kunne være interessante at se på? Hvorfor bevæger kurven sig sådan set i forhold til springserien? Hvordan ser gymnastens hastighed og acceleration ud?

Ad 5: Stille matematiske spørgsmål såsom: Hvordan ser vektormodellen ud? Hvad er den horisontale og vertikale hastighed? Og hvordan udvikler den sig med tiden? Hvordan ser afsætsaccelerationen ud? Det er vigtigt, at de ved arbejdet med disse spørgsmål ser anvendeligheden i relation til besvarelse af den initierende problemstilling.

Ad 6: Læreren kan give dem omregningsformlen og forklare, hvordan man beregner ω vha. Logger Pro. Dette bliver kun nødvendigt, hvis gruppen vælger lærebogens udtryk for cykloidens horisontale bevægelse.

Ad 7: Det er vigtigt, at gruppen selv sammenligner deres resultater med videoen af gymnasten, så de kan se, hvad de regner på. Dette er et område, som gruppen godt selv kan udforske gennem diskussion uden lærerindblanding.

Ad 8: Her må gruppen angive de centrale observationer, der er gjort ved springserien, som eleverne mener, der har en effekt på springet. Heraf må nogle observationer være naturligt forekommende (i naturvidenskabens øjne) såsom den aftagende horisontale hastighed, hvilket der ikke kan ændres ved, mens andre kan forbedres ved evt. træningsforslag.

A priori analyse af RSC 4

RSC 4 – diagram:

Q_0: Beskriv den 3-dimensionale kurve bevægelsen følger og beskriv de centrale parametre ved bevægelsen som kan bruges i træningssammenhæng?

Q_1: Hvilken matematisk model passer bedst til at beskrive bevægelsen i hver af de to dimensioner der er plottet i Logger Pro.
R_1: Logger Pro giver (med elevernes manuelle estimering af punkterne) en tilnærmelsesvis lignende sinuskurve $R \cdot \sin(k \cdot t + c)$ i den horisontale bevægelse og en stykvis lineær graf i den vertikale bevægelse.
H_1: Hypotesen er, at bevægelsen i *xy*-planen er cirkulær.

Q_2: Hvordan beskrives den manglende dimension?
R_2: Hvis vi følger hypotesen om en cirkulær bevægelse, kan x(t) beskrives ved $R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ og y(t) ved $R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, hvor R er radius, ω er vinkelhastighed og φ er en forskydelsesparameter.

H_{2a}: Radius R er ikke konstant under den opadgående bevægelse.
Q_{3a}: Hvordan ser vektormodellen ud?
R_{3a}: Radius har sit maksimum ved ca. $t = 1½$ sek. på ca. 0,6m. Derfor kunne R vælges som følgende $R = -0{,}05(t^2 - 3t) + 0{,}5$, $0 \leq t \leq 3$
Dette tilføjes modellen.

H_{2b}: Radius R er konstant under den opadgående bevægelse.
Q_{3b}: Hvordan ser vektormodellen ud?
R_{3b}: R aflæses til ca. 0,5m og herved fås modellen for opstigningen:

$$s(t) = \begin{pmatrix} 0{,}5\cos(\omega t + \varphi) \\ 0{,}5\sin(\omega t + \varphi) \\ at + b \end{pmatrix}$$

Q_4: Hvordan ser bevægelsens hastighed ud? Den vertikale og rotationshastigheden ω?
R_4: Ifølge modellerne fundet ovenover er ω konstant, men hvis man ser på plottet i Logger Pro, viser punkterne en afvigelse her fra. Det forventes dog ikke, at eleverne medtager ændringen i ω i deres modeller men blot kommenterer herpå.
Da vinkelmomentet er bevaret under bevægelsen, som foregår med minimum kontakt med isen, vil der kun forekomme en hastighedsændring under hypotese H_{2a}, da en ændring i gyrationsradius (gennemsnitlig afstand af massen drejet til omdrejningsakse) vil betyde modsat ændring i hastighed ud fra formlen $L = mk^2$, hvor L er vinkelmoment, m er massen (ben og skøjte), k er gyrationsradius.

R_0: Grupperne har nu fremvist modellen og set på dens egenskaber og har derfor mulighed for at kommentere på bevægelsen med idrætsfaglige øjne.

Udspecificering af hovedspørgsmålet Q_0:

Tværfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af en kunstskøjteløbers cylinderformede bevægelse.

Formålet er, at eleverne gennem en visualisering af kunstskøjteløberens 3-dimensionale bevægelse får indsigt i vektormodeller i 3 dimensioner og deres anvendelse i en idrætsfaglig og specielt biomekanisk bevægelsesanalyse.

Jeg forventer, at eleverne godt kan gennemskue bevægelsens form, hvilket må ses af deres hypotese. Her forventes det, at de har kendskab til den jævne cirkelbevægelse til at danne en vektormodel for bevægelsen.

Matematisk organisation:

3-dimensionale vektorkurver i form af en cylinderformet bevægelse.

Formålet er, at eleverne vha. Logger Pro får en forståelse for 2 af dimensionerne i den 3-dimensionale bevægelse og heraf kan udlede hele vektormodellen ud fra deres viden om den jævne cirkelbevægelse.

Jeg forventer, at eleverne på nuværende tidspunkt i forløbet kan anvende Logger Pro til at modellere det visuelle indtryk af bevægelsen. De skal dog selv generere den manglende dimension i den jævne cirkelbevægelse, hvilket godt kan skabe problemer. Eftersom bevægelsen har størst radius midt på ”cylinderen”, forventer jeg, at der vil være elever, der prøver at udtrykke radius som en funktion af tiden t, evt. et andengradspolynomium.

Idrætsfaglig organisation:

Bevægelsesanalyse af en kunstskøjteløbers bevægelse, herunder biomekanisk viden såsom bevarelse af vinkelmoment.

Formålet er, at eleverne får indsigt i eliteudøveres anvendelse af bevægelsesanalyser til optimering af deres præstation, og at eleverne får en biomekanisk indsigt i kunstskøjteløberens bevarelse af vinkelmomentet under drejningen.

Jeg forventer, at eleverne vil få svært ved at påpege elementer, der kan forbedres, og at de derfor vil betvivle formålet med bevægelsesanalysen. Vinkelmoment og biomekanisk viden er indenfor idrætsfaget en del af idræt på B-niveau og forventes ikke kendt på C-niveau. Derfor kan jeg kun forvente denne indsigt fra de ca. 10 elever i klassen, som har idræt på B- niveau.

Elevernes studieproces:

Didaktisk organisation:

Dette sidste afsluttende RSC lægger op til et mere sammensat forløb end de forrige. Som diagrammet viser ovenover, vil der være mange mulige praxeologier at generere i forsøget på at analysere bevægelsens parameterkurve.

Formålet er, at eleverne får opstillet nogle hypoteser i grupperne angående bevægelsens form og udseende, og at de bruger deres visuelle indtryk af bevægelsen til at generere en følge af praxeologier, der fører til en besvarelse af hovedproblemet.

Dette forløb stiller større krav til elevernes didaktiske disciplin end de forrige, da Logger Pro ikke kan være med i 3 dimensioner. Eleverne skal selv generere den nye viden ud fra de midler, de har erhvervet fra de tidligere RSC og fra Logger Pro. På nuværende tidspunkt bør eleverne ikke være i tvivl om studieprocessens opbygning, hvilket gør, at de kan bruge mere tid på det faglige indhold.

Instrumental organisation:

Anvendelse af Logger Pro som analyseredskab.

Formålet er, at eleverne bruger Logger Pro som hjælpemiddel til estimering af en vektormodel for denne 3-dimensionale bevægelse, og at eleverne under dette eksperiment supplerer resultaterne fra Logger Pro med deres egen viden om bevægelsen skabt på baggrund af deres visuelle indtryk af bevægelsen.

Eftersom skøjtens præcise placering er utydelig på visse tidspunkter, kan afbildningen blive upræcis og give problemer ved Logger Pro’s tilpasning af model. Dette gør, at eleverne selv manuelt må tilpasse modellen, hvilket de også bør kunne.

A priori vanskeligheder:

IT - orienterede:

1. Problemer ved downloading af videoklip.
2. Problemer med plotningen af punkter eftersom skøjtens bevægelse kan være lidt utydelig.
3. Problemer med handlebegreber indenfor Logger Pro i forbindelse med manuelt design af modeludtryk, eftersom plotningen af punkter kan variere for meget og derved ikke skaber et jævnt billede som Logger Pro kan analysere.

RSC - orienterede:

4. At hovedspørgsmålet er for direkte til at generere yderligere praxeologier.

Matematisk – orienterede:

5. Manglende matematisk dybde i de bevægelsesanalytiske argumenter. Dette burde ikke blive et væsentligt problem, da der er rigeligt at analysere på.
6. Manglende forståelse for den 3-dimensionale parameterbevægelse ud fra de to modeludtryk genereret af Logger Pro.

Flerfagligt – orienterede:

7. Da bevægelsen er forholdsvis kompliceret, kan det være sværere for eleverne at fremhæve enkelte parametre, som er af afgørende betydning for bevægelsen, hvilket gør analysen sværere.

Idrætsligt – orienterede:

8. Manglende viden om gældende biomekanik, herunder bevarelse af vinkelmoment, kan skabe problemer i fejlretningen. Desuden vil den manglende indsigt i kunstskøjteløb også sætte sine naturlige begrænsninger for fejlretning og øvelsesvalg.

Løsnings-overvejelser:

Ad 1: Videoklippene medbringes desuden på USB-stik.

Ad 2: Læreren kan hjælpe med plotningen af punkter, hvis der skulle opstå problemer. Eleverne må afsætte dem tilnærmelsesvis og skrive det i deres fejlkilder.

Ad 3: Eleverne burde have lært så meget fra sidste forløb, at de kan tilpasse modellen til plotningen, i modsat fald kan forslag til nogle af koefficienterne gives.

Ad 4: I starten af modul 7 fremlægges arbejdet fra modul 6 som en del af valideringsprocessen, hvilket bør inspirere til en videregående arbejdsproces.

Ad 5: Stille matematiske spørgsmål såsom: Hvordan ser vektormodellen ud i 2 af dimensionerne? Hvilken dimension kan ikke ses? Hvilken bevægelse foregår i *xy*-planen? Kan den vertikale bevægelse tredeles? Hvordan udvikler radius sig under løftet af skøjten? Det er vigtigt, at eleverne ved arbejdet med disse spørgsmål ser anvendeligheden i relation til besvarelse af den initierende problemstilling.

Ad 6: Eleverne kan stilles spørgsmålene: Hvad er bevægelsen i *xy*-planen? Hvordan beskrives enhedscirklen? – og en vilkårlig cirkel? Hvilken betydning har vinkelhastighed? Hvordan kan vi udlede den manglende dimension, når Logger Pro giver os et sinusudtryk?

Læreren kan selv afgøre, hvor mange spørgsmål der skal stilles, og hvilke eleverne selv kan generere.

Ad 7: Det er vigtigt, at eleverne fokuserer på de forrige tre forløb i deres udvælgelse af matematiske begreber til bevægelsesanalysen. Læreren kan påpege enkelte interessante fokusområder såsom opstigningen og skøjtens hastighed og position med strakt ben. Eleverne kan også se på vinkelhastigheden og sammenligne med bevarelsen af vinkelmomentet, når rotationsradius er maksimal halvvejs i løftet af skøjten.

Ad 8: Læreren kan påpege reglen om vinkelmomentbevarelse, som eleverne så selv kan efterprøve om passer med observationerne i Logger Pro.
Hvad angår mangel på viden om kunstskøjteløbsteknik, må gruppen angive de centrale observationer, der er gjort ved bevægelsen, som de mener, påvirker det æstetiske indtryk. Forslag til forbedring kan stadig gives, men positiv bevægelseskritik kan og skal også være en del af konklusionen.

Generelt set kan de forholdsvis mange fejlkilder og unøjagtigheder ved de tilpassede matematiske modeller skabe et usikkerhedsmoment hos eleverne i deres studieproces, bl.a. i forbindelse med formålet med den matematiske modellering. Dette kan medføre en manglende motivation til at udvikle de efterfølgende praxeologier, der danner fundamentet af RSC. Her vil det være lærerens opgave at sørge for bevarelsen af incitamentet ved evt. at komme med input i form af områder, eleverne kan undersøge i deres analyse.
Det forventes, at effekten af den stigende matematiske sværhedsgrad medfører mindre fokus på det idrætsfaglige og dermed det tværfaglige formål ved processen. Det har jeg valgt at acceptere, da det primære formål med undervisningsforløbet er at skabe og udvikle elevernes matematiske forståelse indenfor parameterkurver og vektormodeller under RSC, hvilket også er specialets primære fokuspunkt.

Metodologi

Som empiri til den efterfølgende a posteriori analyse har jeg elevernes afleverede rapporter, som giver et indblik i gruppernes arbejdsproces i forbindelse med hvert RSC, jfr. bilag C. Rapporterne er udarbejdet med det formål, at jeg som underviser bagefter kan følge med i de overvejelser, grupperne har gjort sig under det pågældende RSC. Det har dog vist sig efterfølgende, at nogle af rapporterne har indeholdt for få eller for upræcise oplysninger til, at jeg har kunnet foretage en ufortolkende analyse heraf. Jeg har udvalgt 7 rapporter til nærmere analyse. Jeg har valgt 2 indenfor de første 3 RSC og én under den sidste, hvor jeg i stedet analyserer valideringsprocessen ud fra en transskription af videooptagelsen. De 7 rapporter er udvalgt, som værende de mest præcise i angivelsen af gruppernes studieprocesser under det pågældende RSC. Eftersom rapporterne er meget kortfattede, er teknikken i nogle tilfælde foregået implicit. Her har jeg analyseret gruppens overvejelse i den samlede kontekst for at gennemskue strukturen af den mobiliserede praxeologi. Det har også været muligt at anvende egne observationer og notater gjort over studieprocessen i undervisningen.

Det var intensionen, at jeg ville have videofilmet studiemiljøet i klassen, men måtte erfare at det ikke var muligt at få et indblik i gruppernes interne arbejdsproces, eftersom lyden var for lav. Set i bakspejlet kunne jeg have videofilmet forskellige grupper enkeltvis, hvilket kunne have givet et større indblik i diskussionerne, end rapporterne afslører. Jeg har derfor kun indført videooptagelser over elevfremlæggelserne, som ses af transskriptionen i bilag C.

Jeg har valgt selv at stå for undervisningen, da jeg finder det vigtigt for gennemførelsen af RSC at kontrollere den informationsmængde, der gives til eleverne og dermed give dem mulighed for selv at udvikle studieprocessen. Denne undervisningsform er stadig ret ukendt (og stadig mindre anerkendt) og derfor mindre efterprøvet i det danske undervisningsmiljø. Derfor besluttede jeg, at det var mere hensigtsmæssigt at stå for undervisningen selv. Fordelen er, at jeg ved helt præcist, hvornår den enkelte gruppe har haft brug for en hjælpende bemærkning eller et opklarende spørgsmål for at videreudvikle praxeologierne og har kunnet kontrollere hvornår og hvilken hjælp, der skulle gives. En ulempe er, at jeg ikke objektivt har kunnet bedømme lærerens rolle i forløbet, men da RSC primært skal foregå i et adidaktisk miljø, bør lærerens rolle blive minimal under arbejdsprocessen men til gengæld central under valideringsfasen, som jeg videooptager.

En anden ulempe er, at jeg ikke har kunnet følge med i de enkelte gruppers konstruktive arbejdsproces, bl.a. når jeg har været påkrævet hos en gruppe, hvis arbejdsproces var gået i stå.

Derfor har jeg valgt at betragte elevrapporterne og de videooptagede elevfremlæggelser som min primære empiri under analyseafsnittet.
Jeg vil inddele min analyse i de fire forløb, hvor jeg som sagt har udvalgt 2 grupperapporter til nærmere analyse. Her vil jeg se på de praxeologier, grupperne mobiliserer i deres studieproces, og sammenligne dem med min referencemodel.
Afslutningsvis vil jeg under hvert forløb analysere valideringsprocessen under elevfremlæggelsen for at give et billede af, hvilke nyopståede faglige og processuelle midler, der medtages til det efterfølgende RSC.

A posteriori analyse af undervisningsforløbet

Analysen vil tage udgangspunkt i teorien om strukturen bag RSC[44], hvorfra udvalgte praxeologier vil blive behandlet efter teorien om den antropologiske didaktik. Der vil i analysen også blive indført begreber fra teorien om instrumenterede teknikker, hvor arbejdsprocesserne undervejs bliver sammenlignet med Trouche instrumenterede teorier, jfr. s. 19. Også den flerfaglige betydning vil blive kommenteret ud fra Andresen og Lindeskovs iagttagelser om god flerfaglig anvendelse, jfr. side 18.

RSC 1: Fastsættelse af den anaerobe grænse

Arbejdsark 3 blev udleveret, jfr. bilag B, og grupperne fik at vide, at de skulle lave en hypotese og nedskrive alle deres overvejelser i forbindelse med arbejdet hermed.
Jeg har valgt at analysere to rapporter:

Rapporten fra gruppe 4 viser, at gruppen mobiliserer og udvikler følgende præcise matematiske praxeologier under RSC 1:

Opgave	Hvilken matematisk model beskriver løbet bedst?
Teknik	Anvendelse af Logger Pro samt stykvise funktionsbeskrivelser.
Teknologi	Handlebegreber indenfor Logger Pro, såsom indplotning af punkter og *"Curve fit"*. Anvendelse af intervalbestemte forskrifter med *1.*- og *2.gradspolynomiet*.
Teori	Handleteoremer indenfor Logger Pro samt teorien om funktioner af én variabel i en "vilkårlig arbejdsmetode" næsten helt "mekanisk arbejdsmetode".[45]

Tabel 1

Først bestemmer gruppen et udtryk for den matematiske model, der beskriver 60 m-løbet. Hertil anvender de Logger Pro til at estimere udtrykket. De skal dog selv vurdere, at bevægelsen skal deles op i to funktionsudtryk og herved beskrive den samlede bevægelse stykvis.

Den næste praxeologi afspejler to anvendte teknikker til at fastslå og sammenligne udtrykkene for hastighedsmodellen. Som det ses herunder i RSC – diagrammet, kræver den ene et udtryk for

[44] Jfr. Figur 4, side 14.
[45] Jfr. Trouche instrumenterede teorier p. 17

bevægelsen, mens den anden kan udledes direkte fra Logger Pro under samme forudsætninger som den forrige praxeologi.

Opgave	Hvilken matematisk model beskriver løberens hastighed bedst?	
Teknik	Differentiering af *1.* og *2.gradspolynomium.*	Estimering i Logger Pro.
Teknologi	Anvendelse af algebraiske differential-regningsregler såsom $(ax^n)' = anx^{n-1}$	Handlebegreber indenfor Logger Pro
Teori	Funktioner af én variabel.	Handleteoremer indenfor Logger Pro.

Tabel 2

Her anvendes den "vilkårlige arbejdsmetode" igen, eftersom resultaterne findes ved både en teoretisk og en mekanisk tilgang for at sikre resultatets og metodernes validitet.

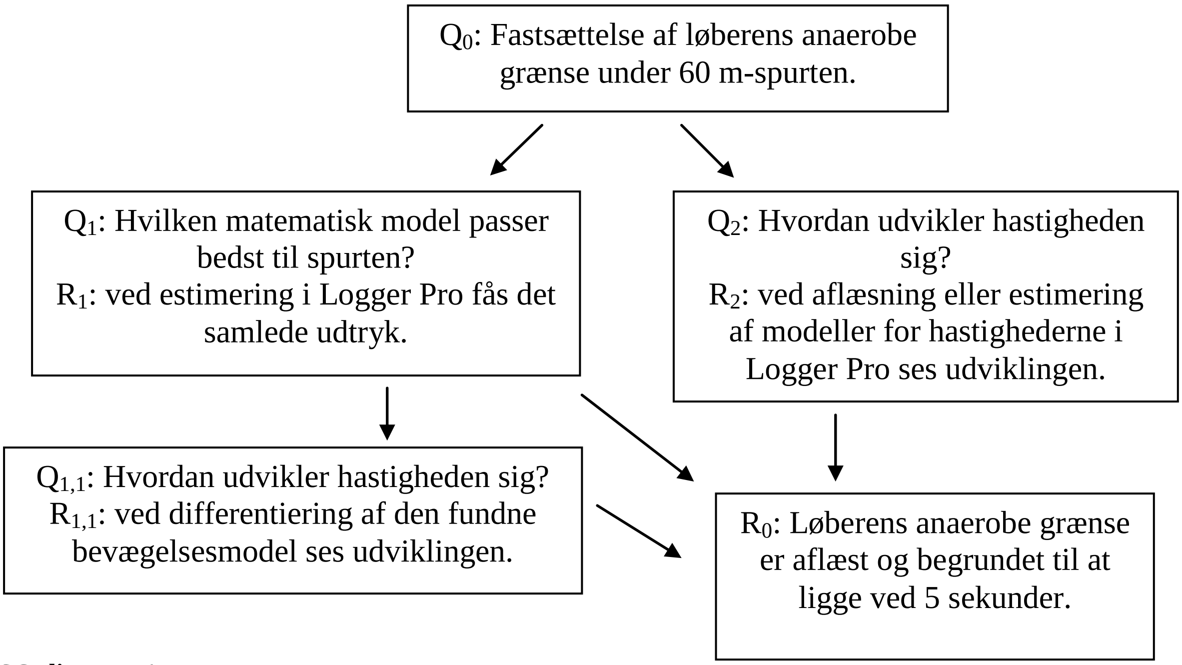
Disse tre praxeologier er med til at danne den lokale tværfaglige praxeologi, som gruppen udvikler i denne rapport.

Opgave	Fastsættelse af den anaerobe grænse?
Teknik	Aflæsning af bevægelseskurven og modellering heraf og sammenligning med hastighedskurven og hældningen på de rette hastighedslinjer.
Teknologi	Sammenligning af hældningskoefficient på de to hastighedsudtryk samt viden om de anaerobe processers betydning for løbehastigheden*.
Teori	Funktioner af 1 variabel samt træningsfysiologi

Tabel 3

*Dette er baseret på gruppens kommentar om, at den anaerobe grænse er " den grænse hvor kroppen går fra ikke at bruge ilt, til at bruge ilt". Her inddrager gruppen nogle træningsfysiologiske overvejelser, som i samarbejde med den matematiske analyse af kurven skaber den tværfaglige praxeologi. Hvor meget disse overvejelser har fyldt i gruppens arbejdsproces bliver et fortolkningsspørgsmål, men baseret på den begrænsede fokus som overvejelsen har fået i rapporten, tilnærmes man til at tro, at det blot har været en oplysende bemærkning, som gruppen tager med i deres videre betragtning af bevægelses- og hastighedskurven.

Herunder ses praxeologierne opstillet i et RSC – diagram som beskriver denne gruppes arbejdsproces, der tager udgangspunkt i hovedspørgsmålet på arbejdsark 3.



RSC-diagram 1

Antallet af besvarede delspørgsmål og undersøgte praxeologier danner basen for den udforskende del af RSC, jfr. Chevallards 6 didaktiske niveauer. Det bliver også et udtryk for, hvor fyldestgørende gruppen har valgt at besvare hovedspørgsmålet. Jo flere dokumentationer af påstanden des bedre begrundelse og mere solide argumenter for resultatet. Gruppen har fundet ”knækket” på grafen og derved den anaerobe grænse allerede under spørgsmål Q_1, men de vælger at begrunde det ud fra den ændrede hastighed, som de har aflæst af hastighedsmodellen og beregnet ud fra differentiering af bevægelsesmodellen. Gruppen vælger altså at udforske hastighedsændringen ud fra deres observation af den stykvise model af 60 m-løbet og får derved udforsket problemet grundigere.

Ved deres differentiering af bevægelsesmodellen som supplement til estimeringen i Logger Pro viser de en interesse i at få verificeret deres arbejde i Logger Pro, hvilket ligner det, Trouche beskriver som en vilkårlig arbejdsmetode med i øvrigt meget få referencer til teknologien.

Det ses ud fra diagrammet at gruppen mangler at besvare den idrætsfaglige del af spørgsmålet om forbedringer og feedback til løberen.

Ved at fokusere på en anden gruppe (gruppe 6) opdager jeg en delvist anden strategi til at løse hovedspørgsmålet. Denne gruppe fokuserer ikke på modellen for bevægelsen men udelukkende på det geometriske forløb af hastighedskurven.
Herunder ses nogle af de præcise praxeologier gruppen udvikler i deres rapport.

Opgave	Hvordan udvikler løberens hastighed sig?
Teknik	Stykvise funktionsbeskrivelser med et startende lineært og sluttende eksponentielt udseende ved aflæsning i Logger Pro.
Teknologi	Plotning af punkter og Origo. Aflæsning af kurvens forløb sammenholdt med lineære og eksponentielle forløb.
Teori	Funktioner af én variabel og handleteoremer fra Logger Pro.

Tabel 4

Gruppen angiver i denne forbindelse intet konkret udtryk for en model over løbet men beskriver processen til at finde den, hvorved praxeologien er opstået.
Gruppen vælger i stedet at kreere følgende praxeologi:

Opgave	Hvornår opnås topfarten og hvad er den?
Teknik	Aflæsning af koordinaterne til hastighedskurvens maksimum i Logger Pro.
Teknologi	Anvendelse af punktbestemmelse på kurvens maksimum i Logger Pro.
Teori	Analytisk geometri samt handleteoremer fra Logger Pro.

Tabel 5

Disse to praxeologier antyder en ”mekanisk arbejdsmetode”, eftersom alle overvejelser og konklusioner sker ud fra et isoleret arbejde med IT, suppleret med matematisk viden uden verificering med matematiske aksiomer.
De to praxeologier viser også at gruppen både arbejder indenfor teorien om funktioner af én variabel (mht. eksponentielle og lineære funktioner) og analytisk geometri (mht. aflæsning af kurveforløb og toppunkt).
Gruppen forklarer ganske kort, hvad følgerne af den anaerobe grænse er men giver ikke udtryk for teknikken og teknologien hertil. Det er dog alligevel taget med som en praxeologi i RSC - diagrammet herunder, eftersom rapporten viser, at gruppen har gjort sig overvejelser herom.

Disse overvejelser med til at udvikle den lokal tværfaglig praxeologi, som ses nedenunder.

Opgave	Fastsættelse af den anaerobe grænse?
Teknik	Aflæsning af hastighedskurvens stykvise forløb og aflæsning af koordinaterne til toppunktet.
Teknologi	Fysiologisk indsigt i den anaerobe grænses betydning for hastigheden sammenlignet med koordinaterne til maksimum på den stykvise hastighedskurve.
Teori	Analytisk geometri samt træningsfysiologi

Tabel 6

Af denne praxeologi kan man se et tværfagligt samspil, hvor idrætsfaget bidrager med den fysiologiske viden om deceleration i forbindelse med den anaerobe grænse. Gruppens kommentar om at*" kroppen er begyndt at løbe på mælkesyre og trættes undervejs"* siger dog ikke meget om, hvilken bagvedliggende udforskning gruppen har foretaget. Matematikken bidrager med kurven over løberens hastighed, som viser, hvornår den idrætsfaglige observation sker.

Gruppen samlede arbejdsproces er skildret i det efterfølgende RSC – diagram, som ses på næste side.

Q_0: Fastsættelse af løberens anaerobe grænse under 60 m-spurten og forbedring af løberens præstation generelt.

Q_1: Hvad er den fysiologiske betydning af den anaerobe grænse.
R_1: Kroppen begynder at løbe på mælkesyre hvilket virker trættende og nedsætter hastigheden.

Q_2: Hvordan kan løbepræstationen forbedres?
R_2: Kropsholdning mere fremadlænet, øge springkraft i ben så der opnås højere acceleration i starten.

$Q_{1,1}$: Hvordan udvikler hastigheden sig?
$R_{1,1}$: Stykvis i 2 faser: en voksende eksponentiel indtil 3 sekunder og en lineært aftagende efterfølgende.

$Q_{1,1,2}$: Hvordan kan løbepræstationen forbedres?
$R_{1,1,2}$: Kondition kan rykke den anaerobe grænse.

$Q_{1,1,1}$: Hvornår opnås topfarten og hvad er den?
$R_{1,1,1}$: Ved at aflæse koordinaterne til maksimum på hastighedskurven fås 9 m/s efter ca. 3 sekunder.

R_0: Løberens anaerobe grænse er aflæst og begrundet til at ligge ved 3 sekunder. Forbedringer som ovenfor nævnt kan foretages sammen med, at konditionen trænes, så den anaerobe grænse rykkes, og decelerationen rykkes.

RSC-diagram 2

Spørgsmål Q_1 opstår ved en sen konstatering i rapporten *"Dette giver også mening ved, at kroppen er begyndt at løbe på mælkesyre og trættes undervejs"*. Jeg har på grund af formuleringen antaget, at gruppen har gjort sig denne overvejelse allerede i starten, og at det dermed har medvirket til idéen om at undersøge udviklingen af hastigheden på løberen. Derfor er praxeologien medtaget som en af de første i diagrammet.

Modsat den forrige gruppe afslutter gruppen her deres rapport med overvejelser gjort omkring forbedringer for løberen. Jeg har anført overvejelserne der, hvor jeg mener, at gruppen har kunnet anskueliggøre deres antagelser ud fra et tværfagligt synspunkt. Gruppen har altså ikke indført forbedringerne i den samme rækkefølge som diagrammet. F.eks. kan overvejelserne i forbindelse med løberens acceleration godt foretages ud fra et generelt synspunkt inden den matematiske analyse, men eftersom forbedringerne bliver nævnt efter denne, er jeg gået ud fra, at gruppen har medtaget dette i deres overvejelse, hvorved placeringen i diagrammet kan retfærdiggøres. Det er dog svært at angive nogle idrætsfaglige praxeologier, eftersom gruppen ikke beskriver de bagvedliggende overvejelser i forbindelse med R_2 og $R_{1,1,2}$.

Den afsluttende elevfremlæggelse fandt som planlagt sted i begyndelsen af det efterfølgende modul for at skabe en sammenhæng til det næste forløb og for samtidig at få valideret nogle af de anvendte begreber. Gruppe 1 fremlagde deres resultater, hvilket ses under transskriptionen i bilag C. Her blev diskuteret, den af gruppen anvendte model (eksponentielle funktion) med andre såsom: Stykvist sammensatte funktioner, lineære funktioner og andengradspolynomiet og deres betydning for kurven over den horisontale bevægelse under 60 m-løbet set i sammenhæng til hastighedskurven. Herunder blev gruppens manglende sammenhæng mellem bevægelsesmodellerne og hastighedsmodellerne anfægtet med argumenter indenfor differentialregningsteorien.
Det blev fastslået, at kurven skulle betragtes stykvis, evt. med en accelererende del (hvis den kan ses), en hastighedsbevarende del og en decelererende del, hvor den anaerobe grænse befandt sig ved overgangen til den decelererende del.
Udover at skabe en opsamling af den anvendte teknologi og teori ved en 1-dimensional bevægelse er formålet, at den fremlæggende gruppe bliver nødt til at argumentere for deres valg gjort undervejs i arbejdsprocessen samt, at alle i gruppen bliver bekendt med denne argumentation.
Under fremlæggelsen virker det ikke, som om gruppen har opnået begge disse kriterier. *"Den passer da meget godt"* og *"Ja – men vi har sammenlignet med andre typer"* er to af gruppens argumenter for valget af model til bevægelsen. Her savnes selvfølgelig en mere matematisk orienteret indsigt i kurveforløbet, hvilket underviseren efterfølgende får etableret vha. en klassediskussion.
Også indenfor det idrætsfaglige bliver der etableret en diskussion, som bygger på observationerne mht. hastigheden. *"Intervaltræning giver evnen til at løbe hurtigere. Styrketræning er for at gøre hans muskler større, så han har mere kraft til at accelerere."* bliver efterfølgende diskuteret ivrigt, eftersom eleverne i klassen har forskelligt syn på den ideelle sprinters kropsbygning. Valideringen af argumenterne sker i tæt samarbejde med underviseren.

RSC 2 Optimering af 3-pointsskud i basketball

Efter valideringsprocessen i forbindelse med RSC 1 fik eleverne udleveret arbejdsark 4, jfr. bilag B. Jeg har igen valgt at se på to grupper:

Jeg har valgt at se på rapporten fra gruppe 1, da jeg synes, at den har nogle gode relevante overvejelser mht. analyse af kastet. Gruppen formår at fremhæve de centrale områder i kastet og analysere dem matematisk, mens de idrætsfaglige kommentarer hertil mangler. Nedenfor er fremhævet de præcise praxeologier, som gruppen skaber:

Opgave	Hvilken vektorfunktion passer bedst til skuddet?
Teknik	Opdeling af bevægelsesudtrykket i to retninger med to parameterfremstillinger samt anvendelse af estimering i Logger Pro på begge retninger i vektormodellen.
Teknologi	Handlebegreber indenfor Logger Pro, såsom plotning af punkter og ”Curve fit”, betydningen af omvendt kasteretning (højre mod venstre medfører minus på x(t)). Fremstilling af udtryk for parameterbevægelser i 2 retninger (parabeludtryk samt lineært udtryk)
Teori	Handleteoremer indenfor Logger Pro samt teorien om funktioner af én variabel i en ”mekanisk arbejdsmetode”.

Tabel 7

Gruppen udvikler denne praxeologi mekanisk, dvs. med IT redskaber (Logger Pro) uden referencer til teorien (ud fra det der kan ses i rapporten). For at gøre brug af Logger Pro skal de dog have de korrekte matematiske overvejelser. Derfor har jeg også nævnt ”opdeling i to parameterfremstillinger” under teknikken og fremstilling af parameterfremstillinger for udtrykkene under teknologien.

De to efterfølgende præcise praxeologier udvikles under anvendelsen af CAS men i disse tilfælde med teoretiske referencer undervejs:

Opgave	Hvilken vinkel v skydes der med?
Teknik	Gruppen differentierer udtrykkene i begge retninger og finder hastighedsvektoren til $t = 0$, hvorefter hældningen måles og anvendes i $a = \tan(v)$.
Teknologi	Anvender regler om differentialkvotienter for lineære udtryk samt anvende CAS til differentiering af andengradspolynomiet. Danne vektor i $t = 0$ og anvendelse af $a = \tan(v)$.
Teori	Differentialregning indenfor funktioner af én variabel. Vektorer i 2 dimensioner (tangenter og hastigheder). Analytisk geometri (vinkel mellem linje og vandret, $a = \tan(v)$).

Tabel 8

Denne praxeologi er interessant, eftersom gruppen anvender teknik og teknologi, der implicerer alle tre teoriområder, som er intensionen med undervisningsforløbet. IT anvendes kun i meget begrænset omfang (i forbindelse med verificering). Under denne praxeologi foretages der mere matematiske referencer til teoretiske aksiomer, hvilket kan ses under teknologien. Arbejdsmetoden kan beskrives som teoretisk.

Gruppen slutter af med at se på kastehastigheden, hvilket danner følgende præcise praxeologi:

Opgave	Hvilken fart skydes der med?
Teknik	Finder længden af den resulterende hastighedsvektor, som blev udviklet under forrige praxeologi.
Teknologi	Verificering af den resulterende hastighedsvektor ud fra ”kræfternes parallelogram”, herefter bruges udtrykket for længden af en vektor $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$
Teori	Vektoralgebra.

Tabel 9

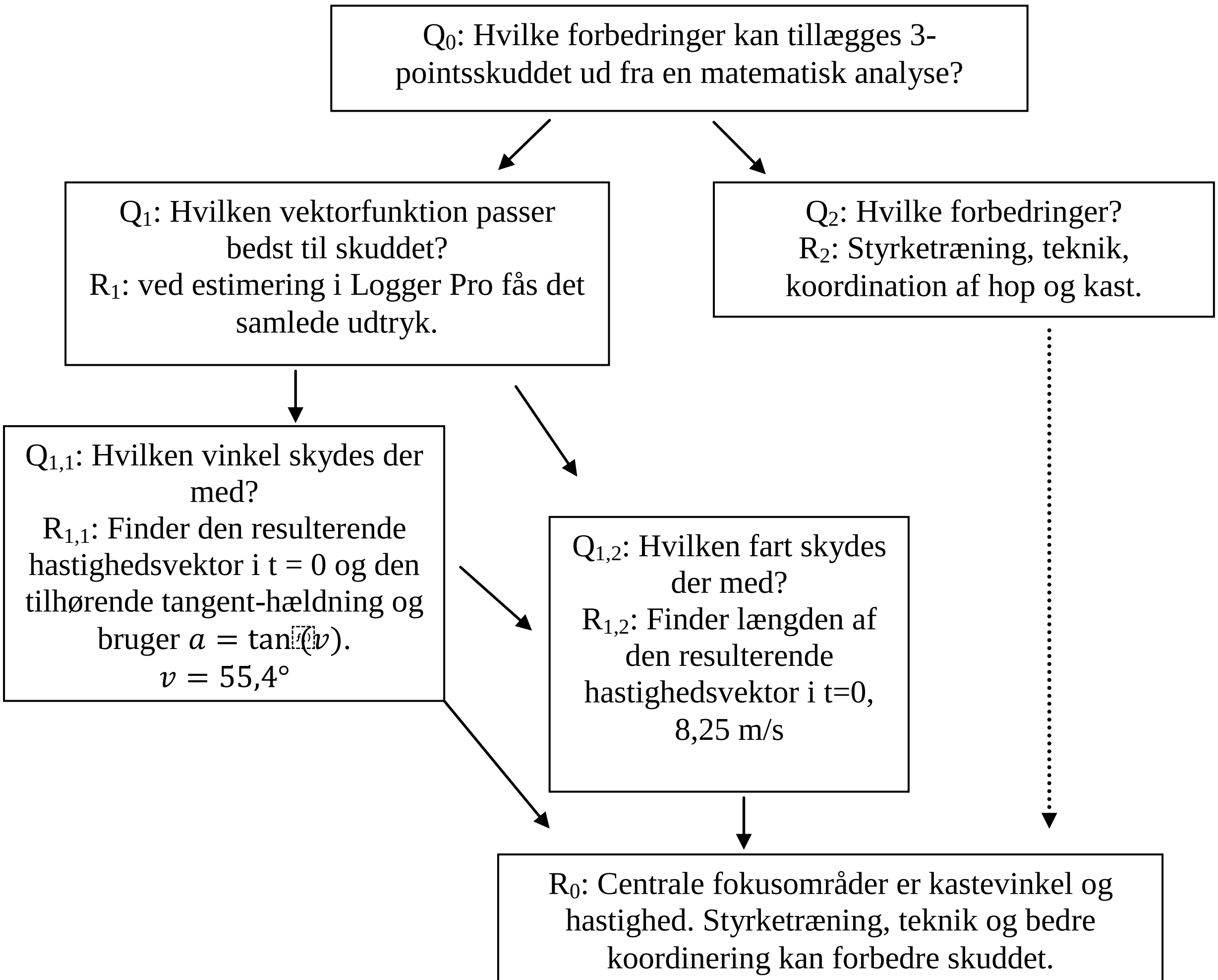
Gruppen anvender her igen en teoretisk arbejdsform for at mobilisere praxeologien.

Gruppen bruger samlet set en bred vifte af matematiske begreber for at analysere kastet, hvilket jeg har beskrevet nedenfor i en samlet regional praxeologi.

Opgave	Hvilke forbedringer kan tillægges 3-pointsskuddet ud fra en matematisk analyse?
Teknik	Bestemmelse af: modeludtryk ved Logger Pro, kastevinkel ved differentiation og $a = \tan(v)$ samt kastehastighed ved længde af resulterende vektor.
Teknologi	Vektoralgebra, analytisk geometri og funktioner af én variabel samt instrumentale
Teori	Vektorfunktioner

Tabel 10

Gruppen giver i deres rapport forslag til forbedring af kastet, men de hænger som nævnt ikke sammen med den matematiske analyse, og ud af rapporten kan de bagvedliggende idrætsfaglige praxeologier ikke gennemskues, hvilket gør, at de ikke er nævnt her.
Jeg har til gengæld tilføjet dem i RSC - diagrammet, hvor det fremgår, hvilken sammenhæng de har med resten af besvarelsen.



RSC-diagram 3

Det ses af diagrammet, at gruppen har en god RSC – struktur i sin arbejdsproces, hvor dybdegående og relevante spørgsmål undervejs bliver genereret ud fra den forrige udforskede praxeologi.
(Model over bevægelsen) – (begyndelsestangent, vinkel) – (begyndelsesfart)

Det ses også, at gruppen mangler den tværfaglige indgangsvinkel, eftersom matematik og idræt bliver behandlet hver for sig. Basketballskuddet er selvfølgelig indgangsvinklen til den matematiske arbejdsproces, som gruppen foretager, men analysen bliver efterfølgende ikke brugt som en naturvidenskabelig argumentation for forbedringsforslagene, som det var tilsigtet med forløbet.

En anden gruppe (gruppe 6) anvender i hele dette RSC-forløb en mere rationel arbejdsmetode, hvor IT og teoretiske referencer bruges i samarbejde. Gruppen viser i deres rapport nogle interessante overvejelser i deres studieproces, hvilket blandt andet mobiliserer de efterfølgende 2 praxeologier. Desværre udarbejdes meget af gruppens arbejde under den fejlagtige forudsætning at den horisontale hastighed er konstant med 1 m/s. Gruppen betragter den vertikale bevægelse $y(t)$, som funktionen $y(x)$. Det ses ved, at gruppen finder hældningen på begyndelsestangenten for $y(t)$ som en begyndelseshældning for hele kastet. Alligevel har jeg valgt at medtage gruppens overvejelser, da de mobiliserer nogle anderledes praxeologier end forventet som samtidigt indeholder nogle sammenhængende flerfaglige overvejelser.

Opgave	Hvilken resulterende hastighed skal der kastes med (når V_x er 1 m/s) for at kaste med en vinkel på 85°?
Teknik	Anvendelse af $a = \tan(v)$, hvilket gruppen overfører til den resulterende hastighedsvektor, som de finder hældningen af (som er fejlagtigt, da tangenthældningen kun angiver hastigheden ved en horisontal hastighed på 1 m/s).
Teknologi	Anvendelse af formlen $a = \tan(v)$, samt overførsel af hældningskoefficient til vektorer i planen.
Teori	Analytisk geometri samt vektoralgebra i planen.

Tabel 11

Denne praxeologi har et tværfagligt formål, eftersom den går ud på at optimere skuddet i forhold til den antagne hypotese om indgangsvinklen. Gruppen har skabt denne matematiske praxeologi som et led i en idrætsfaglig feedback til basketballspilleren.
Gruppens rapport indeholder desuden overvejelser mht. en matematisk praxeologi, som afspejler en anderledes tankegang i forhold til a priori analysen:

Opgave	Hvordan ligger toppunktet i forhold til spilleren og kurven og, hvordan skal det ligge?
Teknik	Aflæsning af toppunkt på kurven over den horisontale bevægelse i Logger Pro samt afviklingssted og basketballkurv. Estimering af forskydning af toppunkt.
Teknologi	Koordinataflæsning, samt kendskab til parablens symmetri og forløb.
Teori	Analytisk geometri

Tabel 12

Mobiliseringen af denne praxeologi giver igen gruppen mulighed for en konkret feedback til basketballspilleren. Det virker som om, at gruppen udforsker dette område for at give basketballspilleren et ekstra område at fokusere på, når denne skal tilpasse sin kastevinkel og hastighed.

Den samlede sammenhæng kan ses nedenunder i RSC – diagrammet.

Q_0: Hvilke forbedringer kan tillægges 3-pointsskuddet ud fra en matematisk analyse?

Q_1: Hvilken type model passer bedst til at beskrive bevægelsen?
R_1: fejlagtigt ses kun på den vertikale bevægelse: En parabel, konstateret ved estimering i Logger Pro.

Q_2: Hvordan skal bolden nærme sig kurven for at have størst chance for at gå i?
H_2*: jo større indgangsvinkel des bedre.

$Q_{2,1}$: Hvilken vinkel skydes der med?
$R_{2,1}$: Aflæser tangenthældningen til parablen 7 m/s (den vertikale hastighed), men glemmer den horisontale hastighed, hvilket betyder at vinklen bliver for stor 81°, her omskrives hældningen til en vektor og vinklen må bestemmes ud fra vinkel mellem vektorer eller $a = \tan(v)$

$Q_{2,2}$: Hvordan ligger toppunktet i forhold til spilleren og kurven?
$R_{2,2}$: Eftersom kurven er højere end kastehøjden bør toppunktet ligge længere væk fra spilleren dvs. ca. 3,25 m i stedet for de 3 m, som afstanden aflæses til i Logger Pro.

$Q_{2,1,1}$: Hvilken hastighed svarer en vinkel på mere optimale 85° til?
$R_{2,1,1}$: På baggrund af forrige praxeologi fås en kastehastighed på 11,4 m/s.

R_0: Forbedringer: skyde hårdere og med større indgangsvinkel, hvilket bør give bolden en mere direkte kurs ned i kurven. Toppunktet af skuddet bør ligge lidt længere væk fra spilleren.

RSC-diagram 4

H_2 er en hypotese gruppen laver, "at jo større indgangsvinklen er des bedre". Denne hypotese er skabt på baggrund af kendskabet til basketballkurvens udformning.

Jeg har medtaget denne gruppes struktur, selvom der er fejl i gruppens besvarelse, fordi den illustrerer en særlig tværfaglig orientering samt nogle praxeologier, som jeg ikke tog højde for i a priori analysen.
Gruppen indleder med at give en basketballteknisk vurdering af, hvad der er essentielt at se på ved skuddet (spørgsmål Q_2). Ud fra hypotesen lavet i forbindelse hermed prøver gruppen at finde sammenhængen mellem kastevinkel og kastehastighed, hvilket bliver løst fejlagtigt pga. den manglende dimension, men den idrætsfaglige orientering er hele tiden til stede i udregningerne. Specielt ved at danne spørgsmål $Q_{2,1,1}$ prøver de at optimere skuddet direkte ud fra matematiske beregninger.
Som tidligere nævnt er praxeologien udledt af spørgsmål $Q_{2,2}$ speciel, fordi den tager udgangspunkt i et område, der ikke er overvejet i a priori analysen.
Hele diagrammet giver en god flerfaglig sammenhæng, hvor fagene både udforskes hver for sig og i en tværfaglig sammenhæng. Det giver også et indtryk af, at gruppen formår at reflektere over forholdet mellem idræt og matematik, og at de er klar over mulighederne ved at overføre koncepter og resultater mellem matematik og idræt. F.eks. giver resultaterne ved den beregnede kastehastighed og vinkel mulighed for at ændre idrætsfaglige parametre ved kastet, og omvendt giver det visuelle billede af kastet, bolden og kurven bedre betingelser for forståelsen af, hvilke parametre der er centrale at udregne, og hvordan bevægelsen ser ud.

Under gruppe 5's afsluttende elevfremlæggelse, jfr. transskriptionen bilag C, blev der fokuseret meget på bevægelsens to retninger, mht. udtryk, betydning for kastet og dannelse af vektormodellen over to dimensioner, jfr. linje 41-56 i transskriptionen. Gruppen viser en god matematisk argumentation i deres fremlæggelse af vektormodellen, hvilket gør, at underviseren kan forholde sig mindre synlig og på den måde overgive noget af ansvaret til eleverne i forbindelse med selvevalueringen af studieprocessen. På den måde kan det metakognitive ansvar delvist flyttes over til eleverne, som Ester Rodríguez omtaler, jfr. side 16. Som det ses af transskriptionen, er der dog stadig behov for løbende spørgsmål for at dirigere klassediskussionen i den ønskede retning.
Herefter forklares der om udledning af hastighedsmodellen, i hvilken retning accelerationen befinder sig, og hvor stor den bør være, jfr. linje 56-78. Dette er indledningen til at foretage nogle

tværfagligt orienterede observationer i form af resulterende hastighed samt kastevinkel, jfr. linje 78-101. Her ses det, at flere af grupperne benytter sig af den vertikale bevægelseskurve som et udtryk for hele kastet (som en *xy*-graf) på trods af den netop udledte vektormodel, f.eks. med udtalelsen *"Er det så ikke 22,7?"* (hvilket er gruppens starthastighed i den vertikale retning), jfr. linje 80. Her er underviseren nødt til at få udviklet den rette metode hos eleverne. Undervejs i spørgsmålene giver den fremlæggende gruppe selv et bud på kræfternes parallelogram, jfr. linje 88. Afslutningsvis spores diskussionen ind på de idrætsfaglige forbedringer, der forekommer som en naturlig følge af den netop foretagne matematiske analyse, jfr. linje 102-107.

RSC 3 Bevægelsesanalyse af gymnastens springserie

Eleverne fik udleveret et videoklip af en gymnast, der udfører en springserie og arbejdsark 5, jfr. bilag B. Det blev hurtigt klart for eleverne, at Logger Pro ikke har egenskaberne til en automatisk estimering af et udtryk for bevægelsen i den horisontale retning. Det kræver manuelle input fra eleverne. Dette resulterede i en delt anvendelse af Logger Pro, hvor nogle af grupperne i stedet valgte at anvende lærebogens beskrivelse af cykloidebevægelsen, som er udtrykt ved x (radianer) i stedet for t (sekunder). Dette variabelskift overså mange af de involverede grupper og glemte derved at konvertere x om til t for at frembringe en vektormodel for parameterkurven udtrykt ved t. Det medførte en del forvirring, da eleverne prøvede at tegne deres fundne udtryk for bevægelsen i CAS. Det betød, at jeg, som underviser, måtte blande mig og justere deres arbejdsproces, så de opnåede den korrekte terminologi. Desværre brugte mange grupper megen tid på dette, hvilket resulterede i, at rapporterne blev mangelfulde pga. tidmangel. Det er dog lykkedes mig at udtage 2 grupper, hvoraf den ene får medtaget konverteringen i deres overvejelser og oven i købet får sammenlignet de to metoder for estimering af vektormodellen (lærebogens og Logger Pro's). Den anden gruppe, som jeg har valgt, har fejl i dette, men de formår at skabe andre praxeologier i deres arbejdsproces under dette RSC.

Den første gruppe, jeg har valgt, er gruppe 1, da deres rapport afslører en klar arbejdsproces og struktur mod bearbejdelsen af bevægelsen. Nedenfor har jeg udvalgt nogle af de praxeologier, som gruppen udvikler:

Opgave	Hvilken matematisk model beskriver springserien bedst?	
Teknik	Anvendelse af vektormodellen for en cykloide samt konvertering af radianer til omløbstid og bestemmelse af radius på den genererende cirkel ved aflæsning på gymnasten i Logger Pro.	Anvendelse af estimering i Logger Pro med manuel tilpasning af koefficienter.
Teknologi	Lærebogens beskrivelse af vektormodellen for cykloidebevægelsen. Konvertering af x til t vha. $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \cdot t$ i den jævne cirkelbevægelse.	Handlebegreber indenfor Logger Pro, såsom plotning af punkter og ”Manual Curve fit”.
Teori	Analytisk geometri og trigonometriske funktioner i én variabel.	Handleteoremer indenfor Logger Pro

Tabel 13

Arbejdsmetoden virker ”vilkårlig” eftersom udtrykket skal findes på to måder. Gruppen anvender en helt teoretisk arbejdsmetode ud fra lærebogens udtryk med den rette konvertering samt en mekanisk tilgang i form af estimering af koefficienterne i Logger Pro, som dog er gjort manuelt. Herefter sammenlignes de to udtryk i CAS for at verificere arbejdet og gruppen konkluderer efterfølgende at sammenligningen stemmer overens, når man inddrager de fejlkilder, der hører med til praktiske forsøg.

Herefter bruges udtrykket for bevægelsen til at finde et udtryk for hastighed og acceleration.

Opgave	Hvilken vektormodel beskriver bedst gymnastens hastighed og acceleration?
Teknik	Differentiering af udtrykket for bevægelsen. (én eller to gange).
Teknologi	Anvendelse af regneregler for differentialkvotienter bl.a. til trigonometriske funktioner.
Teori	Differentialregning indenfor funktioner af 1 variabel.

Tabel 14

Gruppen anvender her en ”teoretisk arbejdsmetode”, hvor regneregler fra differentialregningen bliver anvendt i stedet for en estimering i Logger Pro. Gruppen inddrager i forbindelse med denne praxeologi også teori fra vektormodellen over den jævne cirkelbevægelse, som accelerationen bliver sammenlignet med.

Gruppen kombinerer ikke denne praxeologi med en vurdering af hastighedsudviklingen. Denne foretages på baggrund af aflæsning af hastighedskurven i Logger Pro, som jo også giver et mere reelt udtryk for den faktiske udøvelse af gymnasten. Her ses bl.a. fravigelser fra den teoretiske jævne cykloidebevægelse.

Dette fører til udviklingen af en tværfaglig praxeologi.

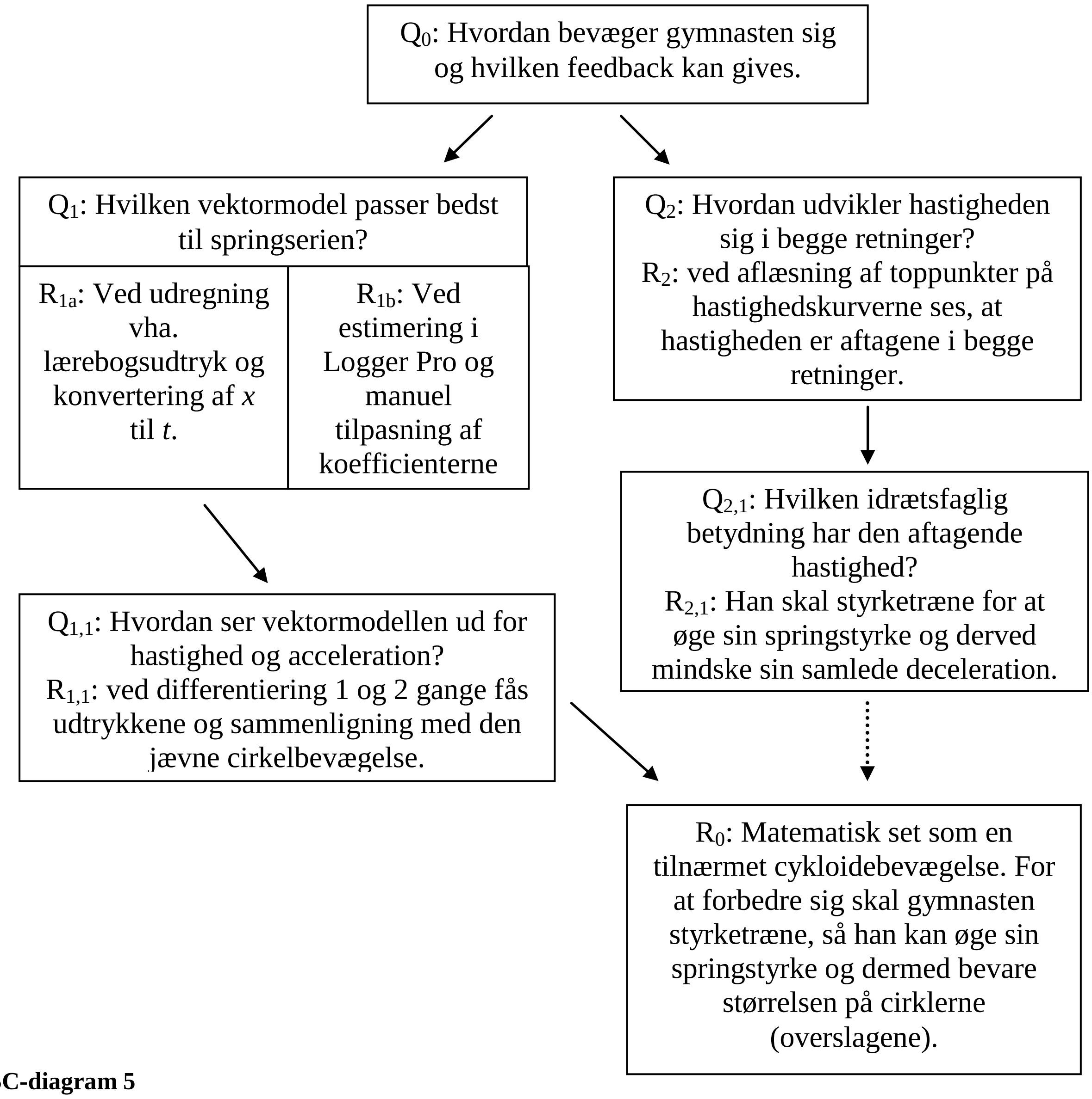
Opgave	Hvordan udvikler hastigheden sig i begge retninger?
Teknik	Aflæsning af toppunkterne på hastighedskurven undervejs i springserien og anvendelse af idrætsfaglige kommentarer på gymnastens udøvelse.
Teknologi	Aflæsning af kurveforløb i Logger Pro sammenlignet med springteknik.
Teori	Analytisk teori og gymnastik-teknik.

Tabel 15

Gruppen overfører koncepter og resultater mellem matematik- og idrætsfaget, idet ekstremumspunkterne på hastighedskurven bliver overført til en idrætsfaglig anvendelse og argumentation. Omvendt kan man også sige, at den idrætsfaglige viden om gymnastens springteknik giver nogle ”punkter” i springserien, der kunne være interessante at studere nærmere indenfor matematikfaget.

Hvis man ser på gruppens samlede anvendte arbejdsform i de tre beskrevne praxeologier ses en ”opfindsom arbejdsmetode”. I den forrige praxeologi arbejder de teoretisk for at udlede et udtryk for hastigheden, mens de under denne praxeologi anvender IT kombineret med teoretisk viden om centrale punkter i forløbet. Samlet får gruppen dannet sig et billede over gymnastens hastighed undervejs og kommenterer herpå i deres feedback.

Jeg har samlet hele deres arbejdsproces i RSC - diagrammet på næste side.



RSC-diagram 5

Spørgsmål Q_1 er splittet op, eftersom gruppen anvender to metoder i løsningsprocessen. Det ene resultat (det teoretiske) bliver herefter anvendt i udledningen af hastighedsmodel og accelerationsmodel, hvorfor der kun er pil fra den ene praxeologi. RSC – diagrammet er todelt, eftersom gruppen ikke anvender modeludtrykkene idrætsfagligt i feedback processen men kun i beskrivelsen af bevægelsen. I spørgsmål Q_2 skaber gruppen nogle centrale fokuspunkter på hastighedskurven og inddrager her idrætsfaglige observationer og kommentarer til analysen, hvilket skaber den førnævnte tværfaglige praxeologi, som direkte bidrager til besvarelsen af hovedspørgsmålet.

Den anden gruppe, jeg har valgt, er gruppe 3, som tidligere nævnt ikke får rettet konverteringen, men hvor rapporten viser, at arbejdsprocessen indeholder en udbredt tværfaglig tilgang i de udviklede praxeologier.

Herunder er beskrevet to tværfaglige praxeologier udledt af rapporten.

Opgave	Hvordan udvikler bevægelsen sig?
Teknik	Aflæsning af bevægelseskurven, evt. også på filmklippet, sammenligning af radius på den genererende cirkelbevægelse med idrætsfaglig argumentation i den horisontale retning.
Teknologi	Cirkelbevægelsen afbildet over tid, aflæsning af sinuskurven, og sammenligning med springteknik og hastighed.
Teori	Analytisk teori og gymnastik-teknik.

Tabel 16

Praxeologien afspejler, at gruppen kreerer den med det formål at sige noget om gymnastens teknik. Bagefter sammenligner gruppen hastigheden i de to retninger for at give en konstruktiv feedback i forbindelse med gymnastens afsæt fra gulvet undervejs. Herved opstår følgende tværfaglige praxeologi:

Opgave	Hvordan udvikler hastigheden sig i begge retninger?
Teknik	Aflæsning af toppunkterne på de to hastighedskurver undervejs i springserien og anvendelse af idrætsfaglige kommentarer på gymnastens udøvelse med fokus på føddernes hastighed i forhold til deres placering i bevægelsen.
Teknologi	Aflæsning af kurveforløb i Logger Pro over hver retning. Monotoniforhold med bestemmelse af lokale ekstrema sat i en springteknisk sammenhæng.
Teori	Analytisk teori og gymnastik-teknik.

Tabel 17

Denne praxeologi forekommer tydeligere hos denne gruppe end hos gruppe 1, som blev analyseret før, skønt intensionen er den samme hos begge grupper. Her ses det tydeligt, at ved sammenligning af de to retninger i stedet for at betragte dem enkeltvis opnår gruppen en større indsigt i, hvor gymnasten kan forbedre sig. Nemlig i den vertikale hastighed, så denne kan kompensere for den naturligt aftagne horisontale hastighed, som er sværere at ændre.

Gruppens studiestruktur følger nedenstående RSC – diagram.

Q_0: Hvordan bevæger gymnasten sig og hvilken feedback kan gives.

Q_1: Hvilken vektormodel passer bedst til springserien?
R_1: Logger Pro giver et udtryk for *y*, men gruppen glemmer konverteringen i forbindelse med *x*-koordinaten.

Q_2: Hvordan udvikler bevægelsen sig?
R_2: radius bliver mindre, dvs. hastigheden aftager, og afsættene bliver mindre kraftfulde.

$Q_{1,1}$: Hvordan ser hastighedsudtrykkene ud i de to retninger?
$R_{1,1}$: ved differentiering på CAS fås udtryk for *x'* og *y'*.

$Q_{2,1}$: Hvordan udvikler hastigheden sig i begge retninger?
$R_{2,1}$: Højest vertikal hastighed når der sættes af og højest horisontal hastighed, når fødderne er i højeste position samt i starten af springserien.

R_0: vertikalt set som en sinuskurve mens horisontalt som en "blanding" af en ret linje og en sinuskurve. For at forbedre sig skal gymnasten lave mere kraftfulde afsæt fra jorden hen mod slutningen af serien.

RSC-diagram 6

Denne gruppe sørger for, at deres arbejdsproces for det meste er målrettet mod besvarelsen af hovedspørgsmålet. Der eksisterer en "rød tråd" i mange af deres overvejelser. Den matematiske modelbeskrivelse er lidt isoleret, hvilket den også var hos den anden gruppe. Udtrykket for bevægelsen i den horisontale retning mangler konverteringen fra radianer, men den samlede vektormodel er dog givet for at beskrive bevægelsens form. Den efterfølgende differentiering virker isoleret, eftersom den ikke bliver brugt i en idrætsfaglig eller bevægelsesanalytisk sammenhæng. Ellers mobiliserer gruppen som sagt nogle tværfaglige praxeologier, hvor gruppen viser, at de kan anvende resultater fra den matematiske analyse til at argumentere for en idrætsfaglig feedback.

Jeg har valgt at placere praxeologien om hastighedsudviklingen, der udspringer af spørgsmål $Q_{2,1}$ i direkte relation til svaret R_2, da indsigten i bevægelsens udvikling gennem denne praxeologi giver et bedre udgangspunkt for den efterfølgende hastighedsbetragtning.

Den afsluttende fremlæggelse[46] blev meget lærerstyret, eftersom dette RSC efterlod flere ubesvarede spørgsmål samt en uafklaret tvivl om metoderne. Der blev fokuseret meget på den horisontale bevægelse og det matematiske udtryk herfor og på at få udryddet eventuelle misforståelser opstået undervejs i grupperne. Logger Pro's estimerende udtryk blev sammenlignet med lærebogens, og de problemer grupperne erfarede med radiusfastsættelse og konvertering af x radianer til t sekunder blev diskuteret først og valideret efterfølgende af underviseren. Herefter blev der talt om vinkelhastighedens omtrentlige bevarelse (den aftager lidt) med symmetriske ændringer i hhv. vertikal og horisontal hastighed. Supplerende hertil nævnes den naturlige deceleration i den horisontale retning og hvad gymnasten kan gøre for at kompensere herfor med fokus på den vertikale hastighed.

RSC 4 Bevægelsesanalyse af kunstskøjteløberens cylindriske bevægelse

Eleverne fik givet et videoklip af en kunstskøjteløber, som udfører et "spin" på isen med sin ene skøjte strakt fra kroppen, først nede langs isen og senere løftes den op over hovedet og danner i sin bevægelse en "cylindrisk bevægelse", som dog udvider sin radius hen mod midt på cylinderen. Eleverne fik efterfølgende udleveret arbejdsark 6, jfr. bilag B.

Det stod hurtigt klart for grupperne, at bevægelsen gik så hurtigt, at antallet af markeringer blev et problem for Logger Pro's estimering, hvilket betød, at grupperne selv skulle tilpasse modellen til den punktvise kurve ved manuelt at ændre koefficienterne. Den manglende dimension, som Logger Pro ikke kan se og estimere, blev også genstand for diskussion, men eftersom eleverne lige havde stiftet bekendtskab med anvendelsen af den jævne cirkelbevægelse, var det den, de fleste grupper gik ud fra.

Jeg har valgt at se på gruppe 4's rapport, da den giver det mest præcise billede af arbejdsprocessen sammenlignet med de resterende rapporter. Gruppen vælger at mobilisere følgende praxeologi i deres studie af hovedspørgsmålet:

[46] Der foreligger ingen videooptagelse af denne fremlæggelse, som derfor er gengivet på baggrund af observationer gjort i undervisningen.

Opgave	Hvilken matematisk model beskriver kunstskøjteløberens bevægelse bedst?
Teknik	Anvendelse af Logger Pro til at estimere bevægelsens to synlige dimensioner med hjælp fra radiusbestemmelse og manuel tilpasning af trigonometrisk udtryk. Anvendelse af vektormodellen for den jævne cirkelbevægelse til at bestemme den manglende dimension. Anvendelse af et eksponentielt udtryk til beskrivelse af z-koordinaten.
Teknologi	Udførelse af begrebet "Manual fit for videoanalysis" af sinuskurven i Logger Pro, afstandsbestemmelse (radius), anvendelse af trigonometriske funktioner, vektor-repræsentant i den jævne cirkelbevægelse. Udførelse af "Automatisk fit" i Logger Pro ved estimering af z-retningens eksponentielle funktion.
Teori	Analytisk geometri (mht. beskrivelse af cirkelbevægelser), funktioner af én variabel, vektorbegrebet i rummet samt handleteoremer bag Logger Pro, såsom tilpasning af en kurve til forholdsvis få fixpunkter afsat på videoen over bevægelsen.

Tabel 18

Gruppen anvender en mekanisk arbejdsmetode, hvor alle udtryk bliver fundet vha. Logger Pro uden en efterfølgende teoretisk verificering. Det kræver dog den ovennævnte teknologiske og teoretiske viden at udvikle den endelige vektormodel gennem Logger Pro.

Som det ses, er teorien ganske sammensat i denne praxeologi. Gruppen anvender viden om den jævne cirkelbevægelse indenfor analytisk geometri og trigonometriske funktioner til bedre at kunne tilpasse koefficienterne til udtrykket i Logger Pro. Dette ses af gruppens formulering omkring den anvendte teknik (teknologi): "Ved at aflæse længden af hendes ben fik vi en ide om radius, som vi brugte som *A*". Desuden anvender gruppen udtryk fra teorien om vektorbegrebet i 3 dimensioner bl.a. "jævn cirkelbevægelse i *xy*-planen" og "z-retningen". Gruppen anvender disse supplerende teknikker og begreber fra de tilsigtede tre teoriområder til at forme denne praxeologi, som giver gruppen en parameterfremstilling over bevægelsen i tre dimensioner.

Herefter beskriver gruppen hastighedsudviklingen ud fra aflæsning af hastighedskurverne (i de to synlige dimensioner) og inddrager idrætsfaglige overvejelser, hvorved gruppen skaber en tværfaglig praxeologi:

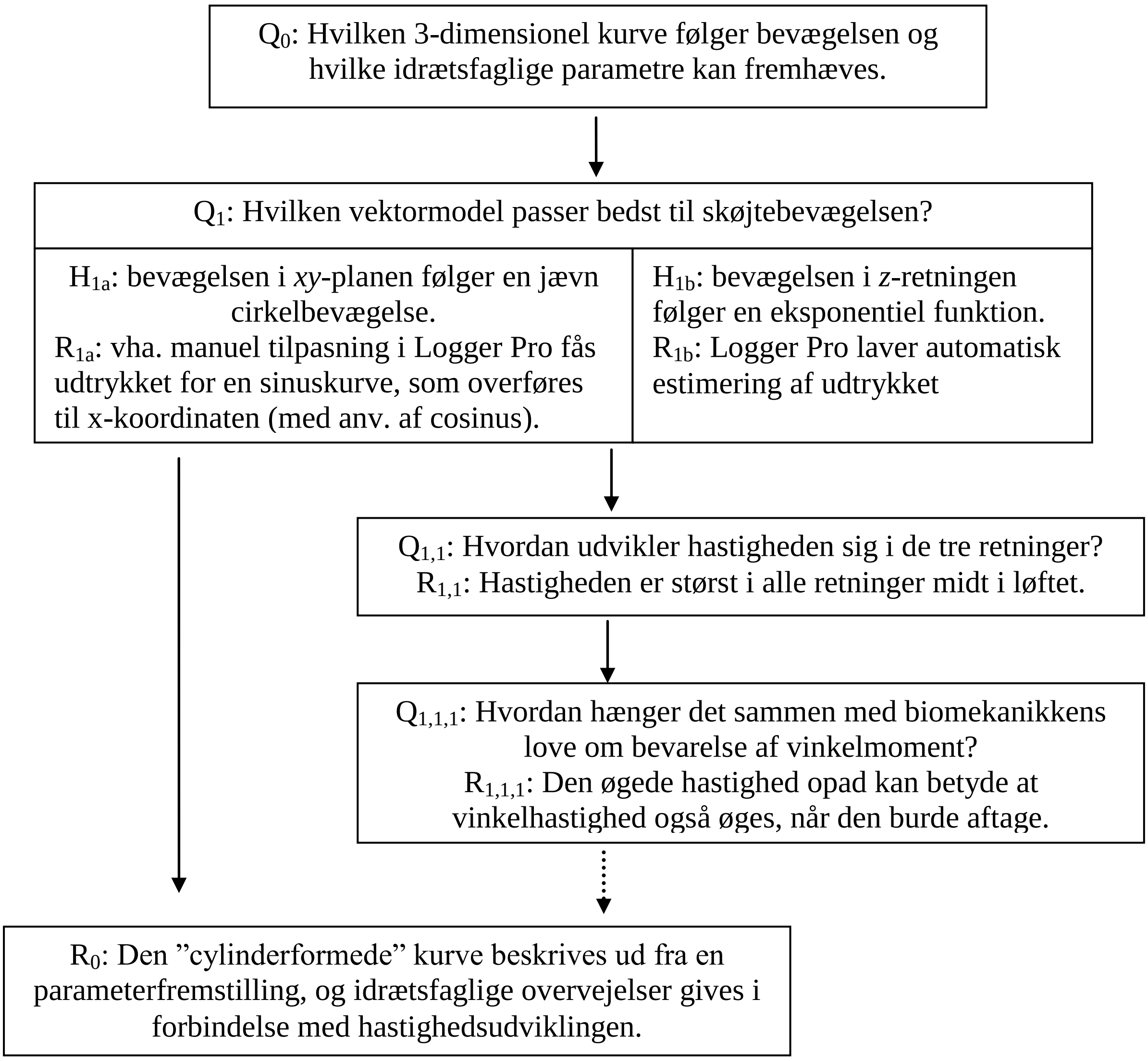
Opgave	Hvordan udvikler bevægelsens hastighed sig i de tre retninger, og hvilken betydning har det for skøjteløberen?
Teknik	Aflæsning af toppunkterne på hastighedskurven undervejs i rotationen og vurdering af udviklingen heraf sammenholdt med hastigheden på løftet af foden (i z-aksens retning).
Teknologi	Aflæsning af udviklingen for amplituden på sinuskurven over hastigheden (i den ene dimension af den jævne cirkelbevægelse) sammenholdt med skøjteløberens vertikale maksimale hastighed under anvendelse af skøjtetekniske og biomekaniske overvejelser.
Teori	Analytisk geometri Biomekanik

Tabel 19

Det tværfaglige består i gruppens anvendelse af den matematiske hastighedsanalyse i en biomekanisk overvejelse. Gruppen udtrykker, at de har tilegnet sig en biomekanisk viden, som ikke stemmer med deres hastighedsanalyse, hvilket får dem til at anvende dette til at ræsonnere sig frem til andre mulige forklaringer herpå, evt. med biomekanik eller resulterende vektorer i tankerne udtrykker gruppen: *" ...måske også, at der overføres noget af den lodrette hastighed under løftet til hastighed i rotationen"*.

Herunder er skitseret strukturen bag gruppens arbejdsproces, som den fremgår af rapporten. Jeg har valgt at opdele svaret på Q_1 efter de to hypoteser (H_{1a} og H_{1b}), der bliver angivet i rapporten for hhv. bevægelsen i xy-planen og i z-retningen. Det har jeg gjort for at tydeliggøre, at gruppens hypotese er meget afgørende for, hvilken modellering de anvender på bevægelsen i Logger Pro og dermed, hvilken geometrisk viden de kan mobilisere for at beskrive bevægelsen.

Desuden har jeg placeret problemet $Q_{1,1}$ om at vurdere hastigheden, som værende afhængig af den praxeologi, gruppen udvikler under spørgsmål Q_1. På trods af at gruppen ikke anvender det algebraiske udtryk for bevægelsen i hastighedsvurderingen, kræver det alligevel en klar forestilling om, hvilken bevægelse der analyseres på (bl.a. den jævne cirkelbevægelse). Dette kan være svært at afgøre ved kun at kigge på kurven uden en forudgående matematisk analyse af bevægelsesforløbet.



RSC-diagram 7

De resterende rapporter mangler indhold og engagement. De indeholder højst én overvejelse, og det er i forbindelse med Logger Pro, hvor de estimerer sinuskurven. Dette gør det svært for mig at beskrive en ordentlig arbejdsproces og bruge det i analysen. Jeg ved fra observationer gjort i undervisningen, at mange af grupperne arbejdede med at beskrive den opadgående bevægelse og "den skjulte dimension", men som åbenbart ikke fik skrevet overvejelserne ned i rapporten. I forbindelse med de valideringsprocesser der blev foretaget under dette forløb, kunne jeg så danne mig et billede af en studieproces hos de pågældende grupper. Det har jeg samlet under et RSC-diagram nedenunder. Men først vil jeg angive en praxeologi, som jeg er stødt på i rapporten fra gruppe 1. I forbindelse med en kort beskrivelse af den jævne cirkelbevægelse som bevægelsen i *xy*-

planen foretager sig, angiver de omløbshastigheden ud fra den fundne sinuskurve, hvilket genererer følgende praxeologi:

Opgave	Hvad er omløbshastigheden?
Teknik	Anvendelse af ω i udtrykket for sinuskurven A·sin(ωt+φ) og indsættelse i formlen $\tau = \frac{A\cdot 2\pi}{\omega}$.
Teknologi	Trigonometriske formler i form af $\tau = \frac{A\cdot 2\pi}{\omega}$ hvor τ er omløbshastigheden.
Teori	Analytisk geometri og trigonometriske funktioner.

Tabel 20

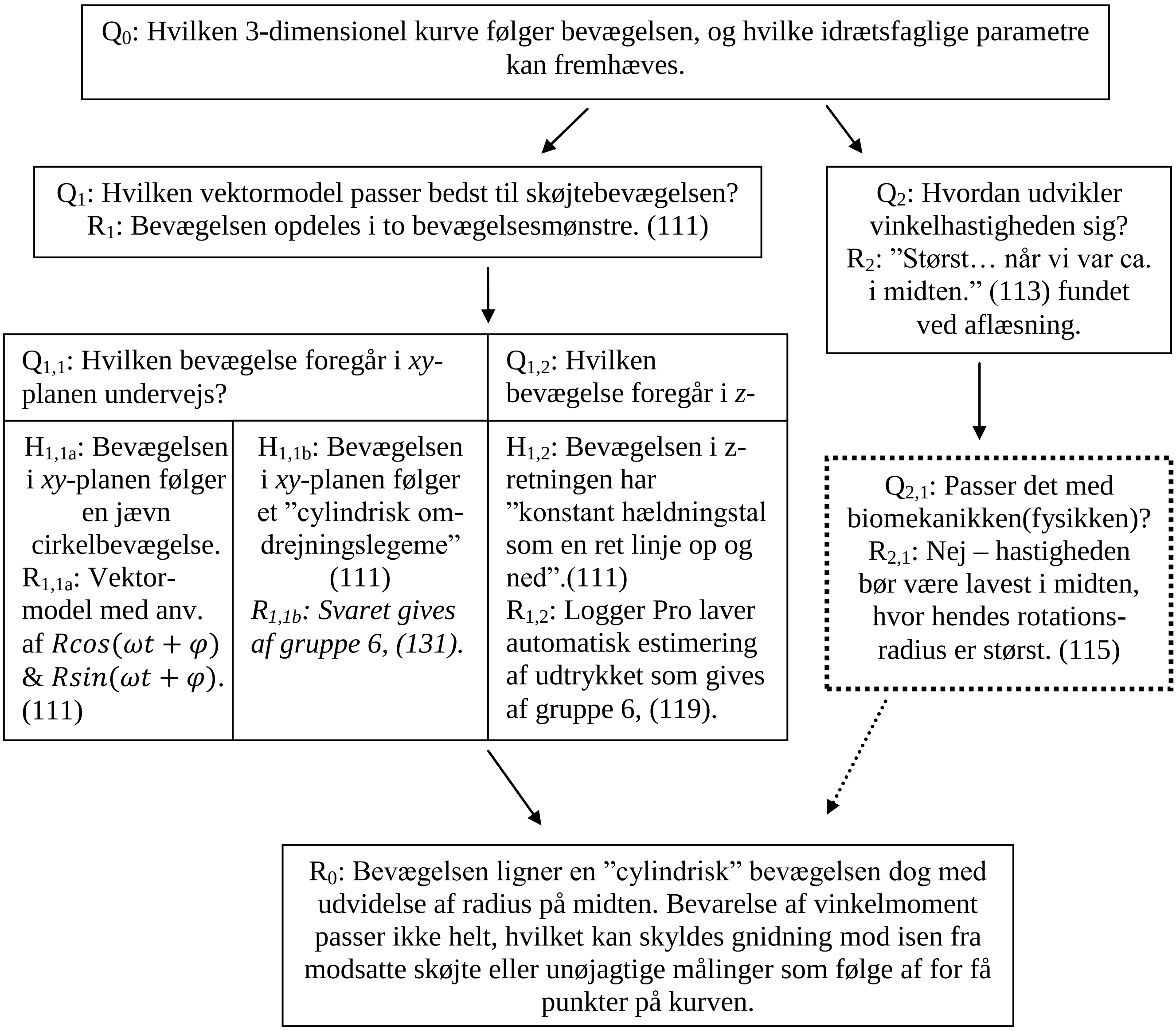
Jeg har medtaget denne praxeologi, da den er et eksempel på, at man anvender det matematiske udtryk, man udvikler i Logger Pro, til at give en bevægelsesrelevant udregning, som nu pludselig giver en fornemmelse af bevægelsen. Det, at ” $\tau = 0{,}29\ sek.pr.omgang$”, giver jo et billede af, hvor hurtigt bevægelsen forgår på videoen og dermed i ”virkeligheden”. Gruppen kunne have anvendt dette til en videre sammenligning af omløbshastigheden på andre tidspunkter på kurven, men konkluderer i stedet for, at der højst sandsynligt ikke er tale om en jævn cirkelbevægelse i praksis, hvilket selvfølgelig også er en interessant betragtning, da det forkaster gruppens indledende hypotese. Dette tilkendegiver gruppen ved deres konklusion: *”Alle vores resultater forudsætter, at det er en jævn cirkelbevægelse, hun udfører, hvilket højst sandsynligt ikke holder stik i praksis.”*

Det efterfølgende er en analyse af fremlæggelserne fra hhv. gruppe 3 og gruppe 6, jfr. transskriptionerne i bilag C. Som tidligere nævnt fik grupperne ikke afleveret noget af særlig høj kvalitet i deres rapporter, som derfor ikke er medtaget, men de viser her under fremlæggelsen, at de har haft nogle interessante synspunkter undervejs i deres arbejdsproces.

Fremlæggelsen fra gruppe 3 består af en opsamling mellem 6. og 7. modul, da grupperne skulle arbejde videre med RSC 4 under modul 7. Efterfølgende afholdt gruppe 6 den afsluttende elevfremlæggelse hvorunder teknologien i fællesskab blev valideret og efterfølgende institutionaliseret ved underviseren.

Nedenfor er vist et RSC-diagram, som beskriver den samlede struktur, der opstod under klassediskussionen. Den afspejler gruppe 3’s ideer og arbejdsmetode med input fra to andre grupper. Gruppe 6 udregner resultaterne under den afsluttende validering, jfr. transskriptionen bilag C. Specielt $R_{1,1b}$ giver gruppe 3 ikke udtryk for at ville udregne, men de har overvejet hypotesen bag. Desuden er spørgsmål $Q_{2,1}$ ikke overvejet af gruppe 3 men et input fra gruppe 5 i forbindelse med valideringsprocessen.

I diagrammet er anvendt tal i parentes, som står for linjenummeret i transskriptionen under bilag C.



RSC-diagram 8

Ved den første valideringssituation (opsamlingen) viste gruppe 3 nogle interessante overvejelser i forbindelse med bevægelsesanalysen. Som før nævnt afspejler næsten hele strukturen i ovenstående diagram gruppe 3’s arbejdsproces (på nær $Q_{2,1}$ som er markeret med en stiplet boks og svaret $R_{1,1b}$ som er skrevet med kursiv). De splitter bevægelsen op i to typer (R_1) og laver 2 hypoteser i forbindelse med den cirkulære bevægelse, jfr. spørgsmål $Q_{1,1}$. Da det er midtvejs i forløbet, bliver der ikke gået i detaljer med konkrete udtryk under fremlæggelsen. Derfor er det gruppe 6, der senere under den afsluttende valideringsproces, giver vektormodellen for de tre dimensioner mht. detaljerne i $R_{1,1a}$, $R_{1,1b}$ og $R_{1,2}$. Et andet interessant element i diagrammet er, da gruppe 3 vurderer på vinkelhastigheden under løftet af skøjten. Deres fundne resultater bliver kommenteret af en anden gruppe (gruppe 5): *"Jeg ville altså tro, at hvis hun fortsat havde benet strakt ude på midten, at hastigheden så ikke ville være den største"*, linje 115 i bilag C. Denne kommentar skaber herved muligheden for at udvikle en ny praxeologi, der er med til at inddrage idrætsfaglige overvejelser, ved at mobilisere biomekaniske regler for sportsbevægelser - ikke blot hos gruppe 3 men hos alle grupperne. Det bidrager selvfølgelig til at få skabt en mere fyldestgørende besvarelse af hovedspørgsmålet.

Disse to valideringsprocesser bærer desuden også præg af, at det idrætsfaglige i dette forløb kun eksisterer i en tværfaglig kontekst, dvs. f.eks. i forbindelse med analyse af hastighedskurven. Det samme kan aflæses i rapporterne, som ikke indeholder enkeltstående idrætsfaglige overvejelser, som er set under de foregående tre forløb.

Gruppe 6 skaber med sin besvarelse $R_{1,1b}$ en enestående praxeologi, eftersom de vælger at arbejde videre med gruppe 3's observation om udvidelsen af radius i forbindelse med løftet af skøjten.

Opgave	Hvordan tilpasses radius, så det passer med en udvidelse midt i "løftet" af skøjten?
Teknik	Bruge aflæsning af rødder og toppunkt til at danne et andengradspolynomium for radius ud fra formlen om faktorisering af et andengradspolynomium.
Teknologi	Aflæsning af punkter i koordinatsystem, anvendelse af $y = a(x - r_1)(x - r_2)$ for et andengrads polynomium for at skabe udtrykket for radius: $R(t) = at^2 + bt + c$
Teori	Analytisk geometri og funktioner af 1 variabel

Tabel 21

Gruppen tager udgangspunkt i en "teoretisk" hypotese knyttet til en antagelse om, at bevægelsens vandrette radius varierer med tiden som et andengradspolynomium. Punkterne bliver aflæst i Logger Pro, men alle udregninger foregår i hånden med kendte verificerede formler. Med skabelsen af denne praxeologi viser gruppen, at matematikkens behandling af "virkelighedsnære" emner ikke behøver at ske på bekostning af præcisionen i matematematikken, hvilket gruppe 3's bemærkning vidner om: *"… Det ville være det helt præcise, men vi valgte så at tage udgangspunkt i en cylinder, for så kunne vi bedre regne på den."*, linje 111.

I det efterfølgende afsnit vil jeg sammenligne min a posteriori analyse med mine overvejelser a priori, både i forbindelse med min opstillede referencemodel og mine mikrodidaktiske overvejelser. Jeg vil herigennem forsøge at belyse i hvor stor grad, anvendelsen af RSC som didaktisk organisation, den flerfaglige fokus og anvendelsen af de instrumentale teknikker har bidraget til elevernes arbejdsproces under dette undervisningsforløb.

Opsamling og diskussion

De rapporter, jeg har behandlet under a posteriori analysen, repræsenterer de grupper, der har foretaget de mest præcise nedskrevne overvejelser mht. deres arbejdsproces under det pågældende RSC. Mine observationer fra undervisningen viser, at andre grupper også har haft mange lignende diskussioner indbyrdes, men disse er ikke kommet til udtryk i deres rapporter. Eftersom det kun har været muligt at bruge videooptagelserne fra valideringssituationerne, er rapporterne den bedste dokumentation på arbejdsprocessen undervejs, hvorfor præcisionen heri har været et vigtigt kriterium.

Anvendelse af RSC som didaktisk organisation

For at RSC får de rette betingelser at operere under, er der visse områder, der er centrale: Hovedspørgsmålet, midlerne, det udforskende og det teknologiske moment i den didaktiske proces samt at give eleverne et løbende udbytte af studieprocessen.
Formuleringen af hovedspørgsmålet er ”Det første møde” med organisationen, og det er vigtigt, at indholdet inspirerer eleverne til at udforske organisationen og bl.a. skabe teknologisk-teoretiske momenter undervejs.
Hovedspørgsmålet skal mobilisere den røde tråd i studieprocessen, virke inspirerende og motiverende for eleverne og generere minimum en lokal matematisk praxeologi.
Mit undervisningsforløb har indeholdt fire RSC med fire hovedspørgsmål. Intensionen har været, at hovedspørgsmålene skulle udvikle sig progressivt i matematisk omfang og sværhedsgrad og på den måde skabe en rød tråd indenfor den regionale organisation.
For at få et overblik over den effekt hovedspørgsmålet har haft på gruppernes studieproces, vil jeg se på de RSC-diagrammer, der er lavet under a posteriori analysen og sammenligne dem med de tilsigtede diagrammer i a priori analyserne.

De angivne RSC-diagrammer viser, at arbejdsprocesserne indeholder 2 til 3 trin af praxeologier til belysning af hovedspørgsmålet, hvilket svarer til a priori diagrammerne for RSC 1 og RSC 2. Derimod var intensionen med de to sidste RSC, at de genererede praxeologier afhang mere af hinanden og af overvejelserne til den forrige, så der derved blev skabt flere trin. Her ses det, at eleverne genererer flere praxeologier uafhængigt af hinanden, hvilket gør RSC-diagrammerne brede i stedet for lange. Det kan selvfølgelig skyldes, at empirien består af skriftlige rapporter, hvor det kan have været svært for gruppen at udtrykke deres overvejelser bag. Denne opdeling af strukturen

behøver ikke at betyde en dårligere sammenhæng, men udtrykker blot en anden måde at udforske hovedspørgsmålet på. F.eks. udtrykker RSC-diagram 5 og 6 både en analytisk og en uafhængigt heraf geometrisk tilgang til beskrivelse af hastighedsmodellen, som derfor skaber en opdeling i diagrammet. Når de sammenligner den matematikteoretiske model med målinger fra ”den rigtige verden”, opstår der da også divergerende observationer, hvilket er med til at skabe ”uvelkomne komplikationer” i form af usikkerhed ved de anvendte matematiske redskaber.
Mange af de udvalgte rapporter har vist en god rød tråd i arbejdsprocessen, hvilket kommer til udtryk ved den store sammenhæng, der er imellem de genererende praxeologier og besvarelsen af hovedspørgsmålet R_0 i de tilhørende RSC-diagrammer. Eksempelvis kan jeg fremhæve gruppe 1's beskrivelse af RSC 2, som er illustreret på RSC-diagram 3. Her får de ved (Q_1,R_1) – $(Q_{1,1},R_{1,1})$ – $(Q_{1,1,1},R_{1,1,1})$ skabt en god sammenhængende beskrivelse af hovedspørgsmålet. Også gruppe 6's besvarelse indeholder lignende sammenhængende overvejelser i forbindelse med RSC 2.
Der ses også eksempler på grupper, der mobiliserer praxeologier, der ikke bruges i sammenhæng med de resterende. Q_2 under RSC-diagram 2 og 3, Q_1 under RSC-diagram 4 og $Q_{1,1}$ under RSC-diagram 6 er isolerede fra et ellers sammenhængende system af praxeologier. Det virker, som om hovedspørgsmålet i disse situationer har virket forkert overfor disse grupper og derved tvunget dem til at skabe en praxeologi, som de ikke selv har kunnet se et formål med i den store sammenhæng.

Det har også vist sig, at hovedspørgsmålene har genereret de lokale matematiske praxeologier, som var tilsigtet under referencemodellen hos nogle af grupperne. Der er blevet dannet præcise praxeologier, som tilhører flere lokale organisationer, jfr. tabel 8, 11, 13, 18, 20 og 21, mens resten er præcise praxeologier, som holder sig indenfor én lokal matematisk organisation og samlet set, bidrager disse præcise praxeologier til mindst én lokal praxeologi fra den opstillede referencemodel, jfr. f.eks. praxeologi 3 under a posteriori analysen. Gruppe 1 får endda mobiliseret en regional praxeologi gennem deres arbejdsproces under RSC 2, som indeholder teknologimomenter fra alle tre lokale organisationer fra referencemodellen, jfr. tabel 10.
Hvis jeg ser samlet på de genererede praxeologier fra rapporterne, har det været mest oplagt for eleverne at bruge teknologierne *funktioner af én reel variabel* og *analytisk geometri*, hvorimod anvendelsen af *vektoralgebra* har været sværere at få inddraget. Det kan selvfølgelig skyldes, at anvendelsen af Logger Pro giver mulighed for aflæsning af koordinater og modellering, som derfor er nemmere tilgængeligt. Vektorforståelse bl.a. i form af koordinatbehandling under sammenligning med hældningskoefficient er selvfølgelig også en del af vektorbegrebet, men selve vektoralgebraen

i form af vinkel mellem vektorer, længden af vektor og anvendelse af kræfternes parallelogram ses kun i praxeologierne illustreret i tabel 8, 9 og 11.
De praxeologier, der er skabt undervejs, har næsten alle været forventet i a priori analysen. På nær gruppe 6's besvarelse af RSC 2, som indeholder overvejelser mht. forskydningen af toppunktet i forhold til basketballkurven. Samtidig viser de deres kreativitet ved også at foretage den omvendte beregning af kastehastigheden ud fra en optimal kastevinkel. Rapporten viser dog fejlagtige udregninger, men da arbejdsprocessen under RSC i mindst lige så høj grad skal bedømmes ud fra evnen til at generere nye praxeologier, er denne gruppes kreative overvejelser medtaget.

Netop validiteten af de genererende praxeologier, der former arbejdsprocessen, kan være en stor begrænsning ved RSC. Derfor er det som tidligere nævnt vigtigt at få valideret udbyttet af elevernes studieproces løbende. Under RSC er det vigtigt, at underviseren får justeret elevernes arbejde, så den rette terminologi opnås. Det har jeg opnået ved at indlægge valideringsprocesser i forlængelse af hvert modul. Under disse processer, jfr. transskriptionen bilag C, fik jeg ført en lærerstyret klassediskussion med udgangspunkt i en gruppes fremlæggelse, hvor vi i fællesskab fik valideret de resultater og metoder der var udviklet gennem det netop bearbejdede RSC. Det forhindrede, at en misforstået terminologi bredte sig til de efterfølgende arbejdsprocesser, som derfor både kunne koncentreres om at få etableret netop tilegnet viden og få tilegnet ny viden. Ud fra de udvalgte rapporter synes jeg, at man kan se en forbedring i terminologien hos de fleste grupper jo længere frem i undervisningsforløbet de kommer. Hvis man ser på gruppe 4, som jeg har udvalgt under RSC 1 og RSC 4, ser man en markant forbedring i både formulering, opstilling af vektormodel og matematisk argumentation bl.a. ved kurvebetragtning. Også gruppe 1's mangelfulde besvarelse af RSC 1, som derfor ikke er medtaget i analysen, men som er medtaget under bilag D, udvikler sig til sammenhængende beskrivelser med korrekt matematisk vektormodelterminologi under RSC 2 og 3. Ser man til gengæld på gruppe 6, som er analyseret under RSC 1 og 2, og som fremlægger RSC4, sker der ikke den store ændring i terminologien. Kommentarer som *"Jeg forstår ikke helt spørgsmålet"*, linje 125 bilag C, til spørgsmålet om udtryk for vektormodellen og *" …vi nåede ikke helt at få et udtryk for cirklen"* viser, at gruppen ikke har fået den tilsigtede viden ud af undervisningsforløbet. Gruppen bevarer under fremlæggelsen deres terminologi, indenfor de lokale organisationer f.eks. den analytiske geometri i form af arbejdet med formlen $a(x - r_1)(x - r_2)$, hvilket forløber uden problemer. Til gengæld får de aldrig vist forståelse for den regionale sammenhæng (under emnet vektormodeller) i deres fremlæggelse.

De fleste grupper har vist, at de har fået meget ud af valideringsprocessen, men man kan som ved klassisk tavleundervisning ikke sikre sig, at alle elever får lige meget ud af det. Her bør det så være en fordel at arbejde i grupper, så nogle af medlemmerne i gruppen forhåbentligt hører det. Dette drejer så fokus på udvælgelseskriteriet, hvor grupperne er valgt af eleverne selv. Hvilke typer, der tiltrækker hinanden til gruppearbejde, er en diskussion, jeg dog ikke vil komme ind på her.
Efter valideringsprocessen over det sidste RSC brugte jeg tid på at institutionalisere den bearbejdede regionale matematiske organisation nævnt under referencemodellen, for at sikre mig, at alle eleverne fik etableret en korrekt indsigt i anvendelsen af vektormodeller og parameterkurver. Det samme er selvfølgelig vigtigt at gøre med bevægelsesanalyser indenfor idrætsfaget.

En af de vigtigste betingelser for at eleverne kan mobilisere relevante praxeologier under arbejdet med RSC, er de midler, eleverne har til rådighed. De matematiske midler afspejles i de tre lokale organisationer under referencemodellen, analytisk geometri, vektoralgebra og funktioner af reel variabel, som alle burde være velkendte i udbredt grad, eftersom eleverne har matematik på A-niveau i 3.g. Det har dog ikke helt været tilfældet undervejs, hvor rapporterne (mest de frasorterede) viser en mere isoleret brug af Logger Pro end tilsigtet. Anvendelsen af Logger Pro og CAS skal sammen med ovenstående lokale organisationer bidrage til det udforskende og det teknologiske moment, som er meget centrale for et vellykket RSC. Hvis de instrumentale teknikker erstatter den matematikfaglige viden, bliver der ikke skabt noget teknologisk-teoretisk moment, der skaber en ”metodisk” viden, hvilket får studieprocessen til at gå i stå.
Eksempel på den isolerede brug af Logger Pro ses i gruppe 1's besvarelse af RSC 4, hvor gruppen ikke formår at opstille en vektormodel ud fra Logger Pros estimering af den ene koordinat. De fleste af de udvalgte rapporter viser dog en gennemgående god teoretisk anvendelse i arbejdsprocessen, hvilket kan aflæses i de genererede praxeologier. Enkelte grupper formår at sammenligne arbejdet med instrumentale midler gennem Logger Pro med matematisk-teknologiske midler, jfr. tabel 2 og 13.
Det ser også ud som om, at arbejdsprocessen skifter efter de to første RSC. Midlerne bliver færre i takt med, at bevægelserne er ukendte, og Logger Pro derfor ikke genkender dem så godt. Derfor bliver betingelserne sværere at arbejde under for eleverne, hvilket får rapporterne til at blive mere upræcise og mangelfulde. Dette fremgår bl.a. af Gruppe 3's studieproces under RSC 3, hvor analysen suppleres med observationer foretaget i klassen, eftersom rapporten kun indeholder mindre detaljerede overvejelser.

Som Bertha Barquero siger, skal vi måske tilstræbe at bruge matematikken som værktøj her i form af matematiske praxeologier, hvis formål er at belyse et idrætsfagligt emne. Dette lykkedes kun under de to første RSC, hvorefter matematikken overtog centrum for udforskningen i takt med at bevægelserne blev sværere. Den matematiske sværhedsgrad i forbindelse med tilegnelse af ny viden blev for høj for mange af eleverne, hvis midler ikke var tilstrækkelige.

Under den afsluttende evaluering sagde 7 ud af 18 elever i forbindelse med spørgsmålet om det *"projektorienterede gruppearbejde"*, at *"det var godt med forandring"*, mens 3 ud af 18 sagde, at de foretrak den klassiske undervisningsmodel. Dette underbygger den begrænsning som Burckhardt fremlagde om "udviklingen i undervisningen". I denne sammenhæng skal nævnes, at klassens deltagelse i projektorienterede gruppearbejder indenfor de naturvidenskabelige fag har været meget begrænset, hvilket har forhindret en naturlig tilgang til denne arbejdsform. Det hæmmer selvfølgelig nogle grupper, når de under RSC skal gennemgå en arbejdsproces, hvor de selv skal udforske og udvikle matematiske, idrætsfaglige og tværfaglige praxeologier uden indblanding fra læreren. Det kan selvfølgelig detekteres gennem rapporter og observationer fra undervisningsmodulerne undervejs, der afspejler umotiverede og dårlige arbejdsprocesser, hvor specielt matematisk anvendelse og læring er svær at opnå. Det kan resultere i individuelle præstationer indenfor den enkelte lokale praxeologi uden kontekst til den regionale organisation, jfr. gruppe 6, som gennem sine 3 rapporter og sin fremlæggelse af RSC 4 ikke formår at få skabt ét udtryk for en vektormodel på trods af nogle udmærkede matematiske observationer indenfor de lokale organisationer. Det ses også af kommentaren fra før *"Jeg forstår ikke helt spørgsmålet"*[47] til spørgsmålet om vektormodellen under RSC 4.
Selvom det projektorienterede gruppearbejde er velkendt på forhånd, så er studieprocessen ikke den samme som under RSC, hvor det mere er selve studieprocessen, der er i fokus i stedet for den endelige besvarelse R_0. Gennem anvendelsen af RSC vendes der også om på det normaliserede billede af undervisningen. Ansvaret under arbejdsprocessen flyttes fra lærer til den enkelte elev eller gruppe, som nu skal stå for sammenhængen, planlægning, regulering, evaluering og udvalg af teknologiske og teoretiske elementer.
Det er ikke lykkedes at tilvænne eleverne arbejdsformen i samme grad som forventet under a priori analysen af RSC 1, jfr. side 44.

[47] Jfr. linje 125 i bilag C

Det har været meget tydeligt at se, hvilke grupper der er vant til at arbejde sammen, og som derfor fra start af har bedre betingelser for at opnå den tilsigtede viden med forløbet.

Det kan også nævnes, at 5 ud af 18 syntes, at arbejdsformen havde tvunget dem til at tænke selvstændigt og kreativt, og det samme antal syntes, at det havde været rart at få feedback fra resten af gruppen. Samtidigt syntes 3 ud af 18, at gruppearbejdet fungerede meget ”uheldigt”, når gruppens medlemmer manglede eller var for ”dovne”[48]. Dette stemmer meget godt overens med den netop foretagne diskussion om velfungerende grupper.

Anvendelse af instrumentale teknikker

Hele undervisningsforløbet er afhængigt af Logger Pro, eftersom bevægelsesaktiviteterne, man kender fra sportens verden, skal overføres til de redskaber, man kender indenfor matematikkens verden. Derfor er det forventet, at eleverne i deres besvarelser tager udgangspunkt i Logger Pros funktioner, herunder estimering af bevægelsesmodel, tangenthældninger og hastigheder. Af de analyserede praxeologier fra a posteriori analysen ses, at grupperne bruger Logger Pro under meget blandede arbejdsmetoder. Ved de to første RSC er grupperne mere tilbøjelige til at bruge den mekaniske arbejdsmetode, hvilket sikkert skyldes, at bevægelserne, som sagt før, er simple nok til, at Logger Pro kan bearbejde dem ordentligt. Den mekaniske arbejdsmetode suppleres typisk af teoretiske overvejelser i form af ”aflæsning af tophastighed”, ”opdeling af kurven som stykvis funktion”, ”betragtning af monotoniforhold”, ”flytning af toppunkt”, mv., hvilket IT - anvendelsen indenfor matematikfaget. Det er vigtigt at skelne mellem, hvornår Logger Pro kun er et tegneredskab, og hvornår det også bliver et analytisk redskab. De teoretiske overvejelser, nævnt før, drejer sig om betragtninger af kurven, som indeholder referencer til matematiske organisationer såsom analytisk geometri og funktioner af reel variabel. Herefter anvendes Logger Pro til at udforske de teoretiske overvejelser. Derfor er det stadig en mekanisk arbejdsproces, men den indeholder teknologiske elementer, der kan bygges videre på i henhold til referencemodellen. Under de to sidste RSC bliver de teoretiske referencer mere synlige i arbejdsprocessen, hvor den opfindsomme arbejdsmetode bliver mere hyppig. Logger Pro bliver stadig anvendt i det omfang, det er muligt, men bevægelsen kræver en supplerende teknologisk indsigt fra mindst et af de tre hovedområder. Det får nogle grupper til at give en ufuldstændig besvarelse, jfr. gruppe 3 og 6’s besvarelse af RSC 3, mens andre grupper får skabt den tilsigtede viden indenfor den regionale

[48] Jfr. bilag F.

organisation, under det pågældende RSC, jfr. gruppe 1's besvarelse af RSC 3 og gruppe 4's besvarelse af RSC 4.

Under elevevalueringen fremhævede 13 ud af 18, at Logger Pro har hjulpet til forståelsen af vektormodeller. Det kan godt virke lidt misvisende, eftersom mange af rapporterne fra RSC 3 og 4 har afsløret en manglende forståelse. Desuden udspecificerer 4 elever, at Logger Pro har hjulpet dem med ”matematikanvendelsen i hverdagen”. Herved opstår spørgsmålet, om den hjælp, Logger Pro giver, kun består i at gøre matematikken anvendelig eller, om det også hjælper til den faglige forståelse. Eleverne mener ud fra deres evaluering, at ved at forstå anvendeligheden af matematikken så øges deres faglige forståelse. Det samme mener Bertha Baquero ved at sige, at det skal tilsigtes (som den røde tråd), at vi undervejs i RSC anvender de matematiske midler til at finde svar på løbende spørgsmål, og at vi ikke skal betragte de matematiske midler som formål i sig selv. Anvendelsen af matematikfaget kommer specielt til udtryk, når faget indgår i et flerfagligt samarbejde med idræt, som betragtes som et meget praktiskorienteret fag. Her er intensionen, at med inddragelse af et idrætsfagligt problem i hovedspørgsmålene gøres studieprocessen mere relevant og ”alive” for eleverne. Det kan nævnes, at 7 af eleverne kommenterer på dette i evalueringen ved at påpege, at idrætsfaget har en bedre effekt under de forløb, hvor man selv har udført den analyserede bevægelse (RSC 1 og RSC 2). Dette understreger ”alive”-delens betydning i hovedspørgsmålet, og den effekt det har på elevernes røde tråd gennem studieprocessen.

Logger Pro er med til at skabe mange muligheder i det flerfaglige samarbejde mellem idræt og matematik. Ved at inddrage Logger Pro skabes der en langt større matematisk anvendelsesgrad, her i form af vektormodellering, på sportslige bevægelser, hvilket godt kan ses hos eleverne, som i nogen grad betragter arbejdet med Logger Pro som en motivations- og inspirationskilde i sig selv. Det man skal passe på er, at der hos eleverne ikke opstår begrebet ”black box”, dvs. at opgaveløsningen via Logger Pro mangler perspektivering til det matematiske emne. Det synes jeg ikke har været tilfældet i dette undervisningsforløb, hvilket nok skyldes, at eleverne har arbejdet under RSC, hvor spørgsmålene ikke er genereret på forhånd, men hvor eleverne selv skal generere dem på baggrund af udforskende overvejelser.

Anvendelse af flerfaglighed

Som det ses af de detaljerede praxeologier under a posteriori analysen er mange af de genererede praxeologier enkeltfaglige, hvor det er matematiske organisationer, der udforskes. Dette er helt i overensstemmelse med det tilsigtede hovedformål med undervisningsforløbet. Samtidigt ses der også eksempler på den tværfaglige anvendelse, hvilket var et andet formål med de fire RSC, nemlig at gennemføre et flerfagligt undervisningsforløb, som supplerer eleverne med en tværfaglig indsigt i samspillet mellem matematik og idræt under foretagelse af bevægelsesanalyser.

Jeg synes, at undervisningsforløbet opfylder de fire centrale punkter, der betragtes som lærerens opgave ved oprettelse af et tværfagligt forløb.

- At vise forholdet mellem matematik og idræt, hvilket er sket gennem arbejdet med Logger Pro, som har knyttet matematiske kurver til sportslige bevægelser.
- At vise forskellen mellem matematik og idræt har vist sig at forekomme klart, da fagene i den daglige undervisning ikke kombineres i særlig udbredt grad.
- At engagere eleverne i projekter med klare faglige bånd og sammenhæng til et andet fag. Dette er sket gennem de fire hovedspørgsmål, f.eks. under RSC 2, *"matematisk bevægelsesanalyse"* og *"forslag til træningsøvelser"*, som er klare faglige bånd, mens sammenhængen kommer i form af *".... og vurder på baggrund heraf, hvilke forbedringer forsøgspersonen skal fokusere på."*. Og under hovedspørgsmålet til RSC 3 opnås samme effekt ved sætningen: *"Lav en matematisk bevægelsesanalyse af springserien som kan bruges til at give gymnasten feedback til brug i træningslokalet"*.
- At organisere og udføre projekterne med egen struktur og opfylde formelle krav. Strukturen ligger i RSC, gruppearbejde, indlevering af rapporter, jfr. de makrodidaktiske overvejelser. De formelle krav indenfor matematik indeholder bl.a. 1/3 som supplerende stof, hvor parameterkurver og vektormodeller er et af de mere hyppigt anvendte emner. Som nævnt tidligere er der med den nye gymnasiereform kommet større teoretiske krav til idræt på C-niveau i forbindelse med udførelsen af idrætsaktiviteterne. Her kan bevægelsesanalyser bruges i sammenhæng med en hvilken som helst udøvelse.

For at måle om undervisningsforløbet har skabt en flerfaglig succes hos eleverne, beskriver Mette Andresen og Lena Lindskov, som tidligere nævnt, nogle succeskriterier, jfr. side 18. Den samlede a posteriori analyse viser, at elevernes arbejdsproces i mange tilfælde ikke opfylder de nævnte succeskriterier.

Gruppe 6's rapport over RSC 2, gruppe 1 og 3's rapport over RSC 3 og gruppe 4's rapport over RSC 4 viser gode tværfaglige overvejelser, hvor grupperne formår at blive bekendte med mulighederne ved at overføre koncepter og resultater mellem fagene, og hvor de samtidig viser, at de kan reflektere mellem fagene, jfr. RSC-diagram 4 og praxeologierne i tabellerne 15, 16, 17 og 19. Om de er klar over fordele, fælder og misforståelser ved overførslen af resultater kan være svært at vurdere. Der har været nogle misforståelser ved at overføre en visuel bevægelse fra idrætsbetragtningens *xy*-graf til Logger Pro's angivelse i *tx*-, *ty*- og *tz*-kurve, men det tilskriver jeg lige så meget forståelsen af de nye begreber indenfor matematikfaget. 12 ud af 18 elever tilkendegav i deres evaluering, jfr. bilag F, at inddragelsen af idrætsfaget havde været en fordel for matematikforståelsen, for de flestes vedkommende, som en kobling til "hverdagen". I den forbindelse opstår der ifølge Burchardt "uvelkomne komplikationer", som er med til at skabe naturlige begrænsninger i undervisningen. Selvom mange af grupperne har taget højde for fejlkilder i deres besvarelser, vil "hverdags matematikkens" afvigelser i form af den kun *tilnærmede* cykloidebevægelse og den *manglende bevarelse* af vinkelmoment få eleverne til at tvivle på deres mobiliserede teknologiske og teoretiske viden.

En af fordelene ved at arbejde med idrætsfaget i en projektorienteret sammenhæng er, som eleverne beskriver det i deres evaluering, at det er "sjovt" at arbejde med, og at det virker "motiverende". Ved at bruge idrætten som emne for hovedspørgsmålet øger det betingelserne for en god arbejdsproces, fordi hovedspørgsmålet bliver motiverende, og de matematisk genererede praxeologier kan betragtes som "værktøj" i en større idrætsfaglig kontekst. Det sidste vurderes kun at være delvist opfyldt i de to sidste RSC, hvor de matematiske midler bliver for krævende, og hvor bevægelsen ikke bliver udført af gruppen selv. Det medfører, som tilsigtet med undervisningsforløbet, at teknologien og teorien bag vektormodeller og parameterkurver bliver gjort mere synlig, mens de idrætslige observationer og kommentarer, der kan inddrages, bliver sværere at få øje på. Dette fremgår også af elevrapporterne for de to sidste forløb, hvor RSC-diagram 5,6,7,8 viser, at den tilnærmede ene idrætsfaglige observation, der er i hver rapport, sker i en direkte forlængelse af en genereret matematisk praxeologi. Her er altså ingen enkeltstående idrætsfaglige praxeologier. Dette er med til at skabe en dybere forståelse indenfor de matematiske organisationer og samtidig skabe sammenhængen og anvendeligheden til "det virkelige liv" uden, at det sker på bekostning af fagligheden i hverken matematikfaget eller idrætsfaget.

Konklusion

At arbejde med RSC som didaktisk redskab i matematikundervisningen i gymnasiet har været en udfordrende og lærerig oplevelse. Jeg har erfaret, at omfanget af de fire RSC krævede mere tid, end jeg havde afsat, og at mobilisering af faglig viden under angivelse af et hovedspørgsmål eller emne kræver træning og øvelse, som de færreste af de 24 gymnasieelever, jeg underviste, besad.
Måske skal der institutionelle ændringer til i form af dem, der er på vej fra undervisningsministeriet for at fremme den projektorienterede undervisningsform i matematikundervisningen i gymnasiet, så den bliver mere naturlig for eleverne. Dette burde øge betingelserne for at introducere RSC som undervisningsform i gymnasiet. Der er ingen tvivl om, at eleverne får langt større mulighed for at tænke kreativt og selvstændigt i forhold til den klassiske tavleundervisning.
Udbyttet af studieprocessen begrænses yderligere af parametre som hovedspørgsmålet, midlerne til rådighed og den løbende evaluering af studieprocessen. Derfor er det vigtigt i planlægningen af et RSC, at man tager sig tid til øge kvaliteten på disse områder, så man øger betingelserne for succes.
Ud fra de erfaringer jeg har gjort mig i forbindelse med dette undervisningsforløb, har det flerfaglige samarbejde med idrætsfaget og den instrumentale anvendelse, i form af brugen af Logger Pro og CAS, hjulpet med at mindske begrænsningerne under RSC.
Det idrætsfaglige samarbejde har gjort det ”inspirerende” og ”sjovt” at arbejde med matematiske redskaber og har samtidigt visualiseret anvendeligheden af vektormodeller, som den regionale matematiske organisation i ”den virkelige verden”.
Anvendelsen af Logger Pro, som instrumentel teknik, har anskueliggjort bevægelserne fra idrætsfaget indenfor den matematiske terminologi og på den måde skabt sammenhængen mellem de to fag. På den måde har Logger Pro forbedret midlerne, som eleverne har til rådighed til at skabe sig gode betingelser for at mobilisere relevante praxeologier under studieprocessen.

Undervisningsforløbet har også vist nødvendigheden af den løbende evaluering af elevernes arbejde. Når arbejdsprocessen forgår adidaktisk, er det vigtigt at sørge for, at eleverne undervejs anvender den korrekte terminologi. Her har elevfremlæggelserne sørget for en passende valideringsproces, hvor eventuelle misforståelser er blevet afklaret, og hvor relevante praxeologier er blevet diskuteret og til sidst valideret.

Jeg synes, at dette undervisningsforløb har vist, at anvendelsen af RSC som didaktisk organisation i matematikundervisningen indeholder mange muligheder, men også en del begrænsninger, som ved hjælp af de rette betingelser kan minimeres af underviseren. Jeg mener også, at det tydeligt har vist, at det flerfaglige samarbejde mellem idræt og matematik har gavnet begge fag. Idrætsfaget har medvirket til at tilgangen til matematikfaget er blevet mere ”anvendelsesorienteret” og ”spændende”, mens matematikfaget har fremhævet den naturvidenskabelige del af idrætsfaget og dermed styrket fagets altid omdiskuterede relevans for gymnasieuddannelsen.

Bilag A: Program for undervisningsforløbet

Modul 1: Onsdag d. 18/3 kl. 9.50 - 11.30 Idræt

Formål: At få eleverne til at reflektere over brugen af bevægelsesanalyser. I denne forbindelse skal de udføre to eksperimenter, som der skal indsamles videodata fra.

9.50 – 9.55:

Omklædning

9.55 – 10.10:

Introduktion til projektet. Inddeling i grupper á 3-4 elever. Udlevering af arbejdsark, hvor de skal: Redegøre for emnet ”bevægelsesanalyser” ved at svare på følgende spørgsmål:

- Hvad kan man bruge bevægelsesanalyser til indenfor sportens verden?
- Hvilke metoder ville I benytte til at analysere en bevægelse.

(se arbejdsark 1A)

10.10 – 10.20:

Validering: Diskussion i samlet forum om ovenstående svar.

Forklaring til næste øvelse: ”60 m sprint”. Hver gruppe vælger en udøver som skal filmes.

10.20 – 10.30:

Hver gruppe planlægger en opvarmning med fokus på underekstremiteten, som forsøgspersonen i gruppen gennemfører med fokus på efterfølgende sprint. Sprinten skal foregå udendørs. Opvarmningsprogrammet skrives ned.

(se arbejdsark 1B)

10.30 – 10.45:

Videodata indsamles ved optagelse af 60 m sprint.

10.45 – 10.50:

Næste eksperiment forklares: ”3 pointskud mod basketballkurven”. Hver gruppe vælger en forsøgsperson. Dette eksperiment foregår indendørs.

10.50 – 11.00:

Hver gruppe ”coach’er” nu forsøgspersonen til at udføre det ”ideelle skud”. Motivationen og forberedelsen af forsøgspersonen skrives ned.

(se arbejdsark 1C)

11.00 – 11.15:

Videodata indsamles fra hver gruppes 3 pointskud.

11.15 – 11.20:

Hver gruppe formulerer en hypotese om bevægelsesforbedringer på baggrund af de to forsøg. (se arbejdsark 1D)

11.20 – 11.30:

Omklædning

Hjemmearbejdet består i at læse om parameterkurver s. 179-181 og 184-194 i MAT A3 af Carstensen & Frandsen.

Modul 2: **Torsdag d. 19/3 kl. 09.50 – 11.30** **Matematik**

Formål: At introducere vektormodeller i 2 og 3 dimensioner på en sådan måde at de kan bruge det som analyseværktøj i de efterfølgende moduler.

9.50 – 9.55:

Diskuter i grupperne hvordan man kan beskrive en bevægelse matematisk? (se arbejdsark 2A)

9.55 – 10.05

Tegn vha. CAS kurven $\mathcal{P}$ der opfylder

$$x^2 + 2y - 4x + 3 = 0 \; .$$

Og angiv så mange egenskaber til $\mathcal{P}$, som I kan. (se arbejdsark 2B)

10.05 – 10.10:

En elev til tavlen og tegne.

10.10 – 10.20

Kan I beskrive kurven som en vektormodel: $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, måske som flere forskellige? (se note- og arbejdsark 2C)

10.20 – 10.26:

2 elever til tavlen samtidig hvor de skal vise resultatet.

10.26 – 10.36

$\overrightarrow{s_1(t)} = \begin{pmatrix} t \\ -½t^2 + 2t - 1½ \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{s_2(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t^2 + 4t - 1½ \end{pmatrix}$ beskriver 2 bevægelser der følger kurven $\mathcal{P}$. Diskutér i gruppen forskellen på de to bevægelser og angiv en tredje bevægelse langs kurven $\mathcal{P}$ med betingelsen $x(t) = ½t - 1$ og forklar forskellen til de to andre. (se arbejdsark 2D)

Løsning: Forskellen er at $\overrightarrow{s_2(t)}$ *bevæger sig dobbelt så hurtigt i x-aksens retning som* $\overrightarrow{s_1(t)}$, *hvilket kan ses ud fra* $x'(t)$.

Løsning: $\overrightarrow{s_3(t)} = \begin{pmatrix} ½t - 1 \\ -\frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{2}t - 4 \end{pmatrix}$, *forskellen er at bevægelsens fart i x-aksens retning er halveret i forhold til* $\overrightarrow{s_1(t)}$.

10.36 – 10.45:

Pause

10.45 – 11.00: Validering

En gruppe præsenterer deres resultat ved tavlen mens de andre grupper forholder sig kritiske.

11.00 – 11.07:

Find et udtryk for den jævne cirkelbevægelse med radius r og centrum i (0,0) og beskriv bevægelsens hastighed og acceleration. (se arbejdsark 2E)

Løsning: $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} r * \cos(t) \\ r * \sin(t) \end{pmatrix}$, hastighed: $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{s'(t)} = \begin{pmatrix} -r * \sin(t) \\ r * \cos(t) \end{pmatrix} = \widehat{s(t)}$

acceleration: $\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{v'(t)} = \overrightarrow{s''(t)} = \begin{pmatrix} -r * \cos(t) \\ -r * \sin(t) \end{pmatrix} = -s(t)$

11.07 – 11.12: *Formulering og Validering (med lærerindblanding)*

En elev til tavlen og forklare dette.

11.12 – 11.20: *Devolution*

Giv eksempler på bevægelser i 3 dimensioner. (se arbejdsark 2F)

Løsning: De kender allerede den rette linje fra rumgeometri, men ved at arbejde videre med cirklen i 2 dimensioner og lade z-koordinaten være lineær kan de udvikle bevægelsen langs en cylinder.

11.20 – 11.30: *Formulering og Validering*

2 grupper til tavlen og forklare deres påstande, diskussion i klassen med læreren som aktiv deltager.

Hjemmearbejdet består i at læse dokumentet om videoanalyse af bevægelser.

Modul 3: **Mandag d. 23/3 kl. 09.50 – 11.30** **Matematik**

Formål: At give eleverne en indsigt i Logger Pro's metoder samt at give eleverne et visuelt indtryk af vektormodeller og anvendelsen her af. Desuden skal de blive klar over betydningen af den anaerobe tærskel.

Rent didaktisk er formålet med modulet at introducere eleverne til ny læreproces i form af selvstændig fordybelse i et problem med henblik på at generere ny læring.

09.50 – 10.15: *Institutionalisering*

Kort introduktion til programmet Loggerpro. Beskrivelse af videooverførsel, videoanalyse i form af indlæggelse af kurve og enhedsfastsættelse og optimering af banekurvens bevægelsesmodel.

10.15 – 11.20: (pause 10.35 – 10.45)

RSC – forløb 1 "Sprinteres anaerobe tærskel" (arbejd med vektormodeller i 1 dimension)

- Bestem forsøgspersonens anaerobe grænse under 60 m - spurten ved at foretage en bevægelsesanalyse af videoklippet vha. Logger Pro.
  Vurder, også ud fra andre betragtninger af spurten, de vigtigste forbedringer der kan foretages og giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser. (jfr. arbejdsark 3)
  Anvend Video: "navn" 60 m-løb som ligger i gruppens mappe på lectio.

11.20 – 11.30:

Hver gruppe afslutter deres rapport over modulets arbejde og afleverer den, når timen ender. Rapporten skal indeholde starthypotesen og analysens resultater.

Modul 4: **Mandag d. 23/3 kl. 11.55 – 13.35** **Matematik**

Formål: At lære eleverne at fremlægge deres arbejde med én dimensional bevægelse foran resten af klassen og at give eleverne en bredere viden om arbejdet med vektormodeller i 2 dimensioner.

11.55 – 12.15: *Formulering og Validering*

Resultaterne fra sidste modul diskuteres ved, at en gruppe fremviser deres arbejde og resten af grupperne kommenterer herpå. Læreren er aktiv i diskussionen.

12.15 – 13.25: (pause 12.40 – 12.50)

RSC – forløb 2 ”Basketball teknik” (arbejd med vektormodeller i 2 dimensioner)

- Foretag en matematisk analyse af forsøgspersonens 3-pointskud vha. Logger Pro og vurder på baggrund her af, hvilke forbedringer forsøgspersonen skal fokusere på. Giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser. (jfr. arbejdsark 4)
  Anvend Video: 3-pointskud ”navn” som ligger i gruppens mappe på lectio.

13.25 – 13.35:

Hver gruppe afslutter deres rapport over modulets arbejde og afleverer den, når timen ender. Rapporten skal indeholde starthypotesen, analysens resultater og en sportslig vurderingen heraf.

Hjemmearbejdet består i at læse s. 195-197 i MAT A3 af Carstensen & Frandsen om Cykloider.

Modul 5a: Onsdag d. 25/3 kl. 09.50 – 11.30 Matematik

Formål: At give eleverne en bredere viden om cykloidens udseende og dens egenskaber ved egen research. At få eleverne til at indse, at deres matematiske analyser og konklusioner kan bruges af sportsudøveren som feedback med henblik på næste træningssession.

09.50 – 10.10 *Formulering og Validering*

Resultaterne fra basketballkastet i 2 dimensioner valideres og læreren sørger for at eleverne tilegner sig viden om vektormodeller i 2 dimensioner.

10.10 – 10.25: Grupperne danner en hypotese om den jævne cirkelbevægelses kurve. Cykloide kurven og modellen beskrives kort med forventning af at hjemmearbejdet er lavet.

10.25 – 11.30: (pause 10.35 – 10.45)

RSC – forløb 3 ”Bevægelsesmønstre i gymnastik” (arbejd med cykloider i 2 dimensioner)

- På videoen ses nogle gymnaster der udfører springserier. Skitsér føddernes bevægelse i den første hele springserie i videoklippet. Lav en matematisk bevægelsesanalyse af springserien som kan bruges til at give gymnasten feedback til brug i træningslokalet. (jfr. arbejdsark 5)
  Anvend Video: ”gymnast” som ligger i bevægelsesanalyse mappen på lectio.

Modul 5b: **Onsdag d. 25/3 kl. 12.50 – 13.35 (samme dag)** **Matematik**

12.50 – 13.25

Grupperne fortsætter nu arbejdet med **RSC – forløb 3**

13.25 – 13.35

Rapporten over modulet færdiggøres og afleveres.

Hjemmearbejdet: Læs noter om vectorfunctions, og forbered fremvisning af projekt 3.

Modul 6: **Torsdag d. 26/3 kl. 08:00 – 09.40** **Matematik**

Formål: At få en matematisk diskussion om cykloidens model og egenskaber. At eleverne gennem deres eget arbejde med kurver i 3 dimensioner får et større indblik i 3-dimensionelle vektorkurver, deres bevægelser og tilhørende egenskaber.

08.00 – 08.20 *Formulering og Validering*

Resultaterne fra sidste modul diskuteres ved, at en gruppe fremviser deres arbejde med gymnast-videoen på projektor og angiver modellen, egenskaberne samt giver idrætsfaglige kommentarer herpå..

08.20 – 09.30: (pause 08.45 – 08.55)

RSC - forløb 4 (arbejd med vektormodeller i 3 dimensioner)

- På videoen ses en kunstskøjteløber[49]. Fokuser på den ene skøjtes bevægelse (den skøjte der er fri af isen) der foregår i tidsrummet $[22; 25]sek$. Lav en matematisk beskrivelse af den tredimensionelle kurve bevægelsen følger.

  Beskriv konkrete parametre ved bevægelsen som evt. ville kunne bruges i træningen for skøjteløberen. (jfr. arbejdsark 6)

Anvend Video: ”kunstskøjteløb” som ligger i bevægelsesanalyse mappen på lectio.

09.30 – 09.40:

Igen noteres starthypotese, resultater og analyse ned i rapporten som afleveres.

Hjemmearbejdet består i at angive en forbedret hypotese på baggrund af sidste moduls resultater.

[49] Skøjteløberens højde sættes til 1,65 m.

Modul 7: **Mandag d. 30/3 kl. 11.55 – 13.35** **Matematik**

Formål: At få eleverne til at bruge resultaterne fra arbejdet i de tre dimensioner til en sportslig feedback situation i en træningssammenhæng og se bevægelsen fra 3 dimensioner beskrevet ved en vektormodel..

11.55 – 12.10: *Formulering og Validering*

Resultaterne fra sidste modul diskuteres ved, at en gruppe fremviser deres foreløbige arbejde evt. vha. en projektor og angiver deres nye hypotese. De andre grupper kommenterer. Det hele forgår lærerstyret.

12.10 – 12.40:

Arbejd videre med: **RSC – forløb 4.**

12.40 – 12.50:

Pause

12.50 – 13.00:

Rapporten afsluttes og gøres klar til aflevering.

13.00 – 13.15: *Formulering og Validering*

En gruppe går til tavlen og afslutter analysen, mens de andre elever kommenterer herpå. Det hele forgår lærerstyret.

13.15 – 13.25:

Der samles op på alle rapporter som skal foreligge i gruppernes mapper.

13.25 – 13.35:

Evaluering af undervisningsforløb.

Alle afleveringer kan ske elektronisk over internettet, hvor der er oprettet en speciel mappe til dette projekt.

I alt 1 modul á 90 min idræt

6 moduler á 90 min matematik + 1 modul á 45 min.

Bilag B: Elevark (med svar)

Arbejdsark 1.A

- Hvad kan man bruge bevægelsesanalyser til i sportens verden?

Svarmuligheder:

- At se hvordan bevægelsen så ud og fokusere på enkelte dele af bevægelsen.
- At finde og rette evt. fejl ved efterfølgende træning for at optimere bevægelsen.
- At finjustere sine bevægelser ved at tilrettelægge træningen herefter.
- At opdage en evt. modstanders svage punkter eller områder.

- Hvilke metoder kan man benytte til at analysere en bevægelse i matematisk forstand?

Svarmuligheder:

- Funktionsudtryk såsom $f(x, y) = 0$
- Parameterfremstillinger, såsom den rette linje fra rumgeometri.
- Trigonometri ved den cirkulære bevægelse $\left(Rcos(x), Rsin(x)\right)$
- Kinematik fra fysik såsom begyndelseshastighed, vinkel, kraftpåvirkninger mm.
- Geometriske udtryk såsom $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Arbejdsark 1.B

Eksperiment 1:

Forsøgspersonen i gruppen skal udføre en 60m sprint om 10 min udenfor.
I andre skal stå for opvarmningen indtil da.

Nedskriv øvelser og overvejelser hertil mens I opvarmer forsøgspersonen.

Svar:

- Løbeopvarmning er det hurtigste og mest effektive, og da der kun er 10 min., må det formodes, at man vælger denne opvarmningsform med stigende intensitet afsluttende med løb af 80 % intensitet (ikke sprint).

Arbejdsark 1.C

Eksperiment 2:

Forsøgspersonen skal foretage et 3-pointsskud (dvs. et skud fra en afstand på min. 6,25 meter) mod basketballkurven om 10 min indenfor.
I andre i gruppen skal nu give forsøgspersonen de bedste betingelser for at udføre det mest optimale skudforsøg.

Nedskriv jeres valg af instruktioner og overvejelser hertil undervejs.
Svar:

- Kvantitetstræning: Skyd så mange skud man kan nå
- Teknisk: Udføre få skud mod kurven med fokus på den tekniske udførelse men ikke for mange. Mange skud på kort tid svækker koncentrationen og dermed teknikken.
- Teknisk: Skudtræning – prøv først fra den halve afstand i forhold til 3-pointslinjen, hvorefter man bevæger sig længere og længere ud
- Koncentration: Vær meget fokuseret på enkelte skud
- Mentalt: Fokuser på sætningen ”Jeg scorer – jeg kan godt”. Få positive kommentarer fra gruppens medlemmer. Ingen skud, ingen dårlige oplevelser inden skuddet.
- Taktisk: Find et sted på 3-points buen, som du føler dig godt tilpas på og øv skud mod kurven kun derfra.

Arbejdsark 1.D

Angiv gruppens fælles hypotese om hvilke bevægelsesforbedringer der vil have den største præstationsfremmende effekt for forsøgspersonen i hvert af de 2 eksperimenter.

60 m – sprint:

Svar:

- Løbeteknik – mindre oprejst, træk mere med armene, længere skridt
- Hurtigere acceleration og derved hurtigere opnåelse af tophastighed.
- Længere anaerobisk udholdenhed – hvilket opnås ved anaerobisk træning.
- Stærkere benmuskler – opnås ved styrketræning.

3 – pointskud:

Svar:

- Få højere bue på skuddet – teknisk træning.
- Få mere bagspind på bolden – teknisk træning.
- Enkelthåndsskud og ikke brug af begge hænder – teknisk træning.
- Få resten af kroppen med i afviklingen af skuddet – teknisk træning.
- Få den mentale del og koncentrationen forbedret – mental træning.

Arbejdsark 2.A

Diskuter i grupperne hvilke matematiske metoder I kender til beskrivelse af bevægelser og angiv dem herunder.

Svarmuligheder:

- Funktionsudtryk såsom $f(x, y) = 0$
- Parameterfremstillinger, såsom den rette linje fra rumgeometri.
- Parameterfremstillinger af generel art: $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

  (Eleverne har læst om denne type til i dag (som hjemmearbejde).
- Trigonometri ved den cirkulære bevægelse $\left(Rcos(x), Rsin(x)\right)$
- Kinematik fra fysik såsom begyndelseshastighed, vinkel, kraftpåvirkninger mm.

Geometriske udtryk såsom $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Arbejdsark 2.B

Tegn vha. CAS kurven $\mathcal{P}$ der opfylder

$$x^2 + 2y - 4x + 3 = 0.$$

Og angiv så mange egenskaber til $\mathcal{P}$, som I kan.

Svar:

- Graf (kommer senere)
- En parabel $\mathrm{y} = -½\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1½$ med rødder $\mathrm{r}_1 = 1$ og $\mathrm{r}_2 = 3$ og toppunkt i $\mathrm{T}(2, ½)$
- $\mathcal{P}\ vokser\ i\ \left]-\infty; 2\right]\ og\ aftager\ i\ ]2; \infty]\ maximum\ er \frac{1}{2}\ som\ finder\ sted\ når\ x = 2.$

Note- og arbejdsark 2.C

De vektormodeller (også kaldet parameterkurver), som vi skal beskæftige os med, beskriver bevægelsen i 2 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ eller 3 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ dimensioner i forhold til parameteren t, som ofte er et udtryk for tiden.

For at tegne parameterkurver og vektormodeller på CAS skal man indstille den til parametric under

Mode – Functions – Parametric.

Herefter fremkommer $x_i(t) og\ y_i(t)$ i stedet for $y_i(x)$ i Y-editoren.

- Beskriv kurven $\mathcal{P}$ som en vektormodel: $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?
- Er der flere muligheder?

Svar:

- Her er flere muligheder. 2 af dem er:

$\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} t \\ -½t^2 + 2t - 1½ \end{pmatrix}$ *eller* $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t^2 + 4t - 1½ \end{pmatrix}$

Problemer: (som jeg skal være opmærksom på som lærer)

- At legitimere substitutionen $x = t$.
- At indtegne vektormodellen på CAS, mht. tekniske problemer ved graf – opsætning.

Arbejdsark 2.D

Nedenfor ses to vektormodeller som beskriver 2 bevægelser, der følger kurven $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{s_1(t)} = \begin{pmatrix} t \\ -½t^2 + 2t - 1½ \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{s_2(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t^2 + 4t - 1½ \end{pmatrix}$

Diskutér i gruppen forskellen på de to bevægelser og angiv en tredje bevægelse langs kurven $\mathcal{P}$ med betingelsen $x(t) = ½t - 1$ og forklar forskellen til de to andre.

Svar:

- Forskellen er, at $\overrightarrow{s_2(t)}$ *bevæger sig dobbelt så hurtigt i x-aksens retning som* $\overrightarrow{s_1(t)}$*, hvilket kan ses ud fra* $x'(t)$.
- $\overrightarrow{s_3(t)} = \begin{pmatrix} ½t - 1 \\ -\frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{2}t - 4 \end{pmatrix}$*, forskellen er at bevægelsens fart i x-aksens retning er halveret i forhold til* $\overrightarrow{s_1(t)}$.

Problemer:

- Hvad er $x'(t)$'s betydning for bevægelsen?
- Hvordan er $\overrightarrow{s_2(t)}$ fremkommet?
- Hvad betyde en lineær bevægelse i x-aksens retning og en parabel i y-aksens?

Arbejdsark 2.E

Udtryk den jævne cirkelbevægelse som har radius r og centrum i (0,0) som vektormodel og beskriv bevægelsens hastighed og acceleration.

Svar:

- $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} \mathrm{r} * \cos(t) \\ \mathrm{r} * \sin(t) \end{pmatrix}$
- hastighed: $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{s'(t)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{r} * \sin(t) \\ \mathrm{r} * \cos(t) \end{pmatrix} = \widehat{s(t)}$
- acceleration: $\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{v'(t)} = \overrightarrow{s''(t)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{r} * \cos(t) \\ -\mathrm{r} * \sin(t) \end{pmatrix} = -s(t)$

Muligt forkert svar:

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, men her vil eleverne få svært ved at beskrive hastighed og acceleration.

Problemer:

- Forståelsen af enhedscirklen og dennes fremstilling $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$
- Sammenhængen mellem accelerationsvektor, hastighedsvektor og stedvektor.

Arbejdsark 2.F

Giv eksempler på bevægelser i 3 dimensioner. Og forklar i hvert tilfælde hvordan bevægelsen er sammensat. (Her tænkes på en beskrivelse af den enkelte bevægelse i hver af de tre retninger).

Svar:

- Den rette linje: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$
- Ellers er det fantasien der sætter grænser.

Arbejdsark 3

Bevægelsesanalyse af 60 m – spurten.

- Bestem forsøgspersonens anaerobe grænse under 60 m - spurten ved at foretage en bevægelsesanalyse af videoklippet vha. Logger Pro[50].
  Vurder, også ud fra andre betragtninger af spurten, de vigtigste forbedringer der kan foretages og giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser.
  Anvend Video: "navn" 60 m-løb som ligger i gruppens mappe på lectio.

[50] Afstanden mellem keglerne midt for er 5 meter.

Arbejdsark 4

”Optimering af 3-pointskud i basketball”

- Foretag en matematisk analyse af forsøgspersonens 3-pointskud vha. Logger Pro[51] og vurder på baggrund her af, hvilke forbedringer forsøgspersonen skal fokusere på. Giv i denne forbindelse forslag til træningsøvelser.
  Anvend Video: 3-pointskud ”navn” som ligger i gruppens mappe på lectio.

[51] Brug personens højde som målestok eller at der er 6,25 meter ind til kurven.

Arbejdsark 5

Bevægelsesanalyse af gymnastens springserie

- På videoen ses nogle gymnaster der udfører springserier. Skitsér føddernes bevægelse i den første hele springserie i videoklippet[52]. Lav en matematisk bevægelsesanalyse af springserien som kan bruges til at give gymnasten feedback til brug i træningslokalet. *Anvend Video: ”gymnast” som ligger i bevægelsesanalyse mappen på lectio.*

[52] Gymnastens højde sættes til 1,80 m.

Arbejdsark 6

Bevægelsesanalyse af kunstskøjteløberen

Arbejd med vektormodeller i 3 dimensioner

- På videoen ses en kunstskøjteløber[53]. Fokuser på den ene skøjtes bevægelse (den skøjte der er fri af isen) der foregår i tidsrummet $[22;25]sek$. Lav en matematisk beskrivelse af den 3-dimensionelle kurve bevægelsen følger.
  Beskriv konkrete parametre ved bevægelsen som evt. ville kunne bruges i træningen for skøjteløberen.

Anvend Video: "kunstskøjteløb" som ligger i bevægelsesanalyse mappen på lectio.

Start igen med at opstille en hypotese over bevægelsens banekurve.

Starthypotese, mellemresultater, analysepunkter, konkluderende bemærkninger om bevægelsens egenskaber og forslag til analysens brug nedskriver I undervejs i gruppens rapport over dette modul. Rapporten afleverer I elektronisk i jeres oprettede mappe på Lectio, når modulet er slut.

[53] Skøjteløberens højde sættes til 1,65 m.

Bilag C: Transskription af elevfremlæggelser

Elevernes navne er ændrede, så eleverne kan forblive anonyme.

Tegnforklaringer:

…… Betyder at der er en pause

( ) Bemærkninger - er for at give læseren bedre idé om sammenhængen.

[…] Betyder, at noget irrelevant er udeladt som f.eks. ”vi kan ikke se noget”.

Jeg har nummereret udsagnene for at kunne henvise til dem under analysen.

RSC 1: *Gruppe 1(V, M, J, D) fremlægger, vha. computer og projektor og Logger Pro*

1. V: ”Vi har valgt en eksponentiel funktion til at beskrive løbet.”
2. Thomas: ”Hvorfor har I valgt det?”
3. V: ”Den passer da meget godt”. (imens det vises på projektøren at punkterne ligger langs grafen i Logger Pro)
4. Thomas: ”Har I bare prøvet jer frem?”
5. V: ”Ja – men vi har sammenlignet med andre typer.”
6. Thomas: ”Kunne der da være andre muligheder?”
7. V: ”Umiddelbart troede vi, at det var en parabel, fordi han ville starte hurtigt og derefter aftage.”
8. N: ”Kan man ikke sige, at den er lineær?”
9. Thomas: ”Hvordan passer det?”
10. N: ”Øh – hastigheden skifter jo – det ved jeg ikke.”
11. L: ”Men indtil den anaerobe grænse - der er den jo lineær”
12. N: ”Kan man så ikke dele den op her?”
13. Thomas: ”Jo – og det er måske mere relevant, når vi snakker om en anaerob grænse. Hvilke typer modeller, skal vi så anvende?”

    ……..
14. L: ”Lineært i starten”
15. Thomas: ”Hvad så efter den anaerobe grænse?”
16. N: ”Også lineært”
17. Thomas: ”ja måske. Prøv at kigge på hastighedskurven?”

…...

18. M: ”Den ligner en ret linje efter knækket.”

19. Thomas: ”Hvis hastighedskurven danner en ret linje, hvad må bevægelsen så stamme fra?”

20. C: ”En parabel.”

21. Thomas: ”Ligner den det?”

22. C: ”Vi har prøvet at lave en sur parabel som passede nogenlunde.”

23. Thomas: ”Godt - Det er vigtigt, at vores konklusioner passer sammen med den teori vi kender fra matematikken.”

24. Thomas: ”Hvilke træningsforbedringer har I gjort jer overvejelser om?”

25. V: ”Intervaltræning, styrketræning, udstrækningsøvelser”

26. K: ”Kan vi ikke få begrundet det?”

27. V: ”Intervaltræning giver evnen til løbe hurtigere. Styrketræning er for at gøre hans muskler større, så han har mere kraft til at accelerere.”

28. K: ”Større muskler gør ikke en hurtigere.”

29. C: ”Bodybuildere er jo ikke hurtige.”

[……..]

30. N: ”Hjælper styrketræning ikke på løberens afsæt, så han kan accelerere hurtigere?”

31. V: ”Det er kun benmusklerne, vi vil træne”.

32. Thomas: ”Hvordan er kropsbygningen hos sprintere i dag?”

33. F: ”Slatne.”

34. C: ”De må jo ikke have for mange muskler, som gør dem tunge.”

35. Thomas: ”De er meget muskuløse og eksplosivt byggede – også overkroppen. I må jo tænke på, at sprintere skal udføre maksimal styrke på kort tid modsat f.eks. maratonløbere, som er spinkelt byggede.”

36. I: ”Hvad med dit CreatinPhosfat i musklerne, kan man ikke træne det?”

37. Thomas: ”Du kan træne det, men det er meget svært at ændre det betydeligt. Man kan spise noget CreatinPhosfat-tilskud, så man fylder depoterne op, men det er igen ikke noget der hæver præstationen betydeligt.”

RSC 2: *Gruppe 5(I, N, P) fremlægger, vha. computer og projektor og Logger Pro.*

38. P: ”Vores hypotese var, at bevægelsen vil stige i starten, så have et maxpunkt, hvorefter den vil aftage. I starten vil accelerationen være større en den der gravitationskonstant og så efter maxpunktet vil den følge Galileos faldlov.”

39. Thomas. ”Det var jeres hypotese, hvad fandt I så ud af?”

40. N: ”Jamen så gik vi ind i Logger Pro og tegnede bevægelsen ind, som I kan se har vi lavet denne her som viser hvordan bevægelsen gik(N peger på kurverne). Hvor vi så kan se accelerationen her, og hvordan bevægelsen så er formet.”

41. Thomas: ”Hvad har I så vist af kurver?”

42. I: ”Hvordan den bevæger sig i x- og i y-retningen. – og så har vi differentieret den for at finde hastigheden, ……..”

43. Thomas: ”Prøv lige at skrive op, hvilken vektormodel I så har fået ud af det her.”

(gruppen skriver modellen op på tavlen)

44. Thomas: ”Har klassen nogen indvendinger mod det?”

[……..]

45. U: ”Vi har det stående omvendt, vores x(t) er deres y(t).”

46. Thomas: ”Ja det er rigtigt – Det har jo ikke bare noget at gøre med vores og deres. Hvor skal x(t) stå?”

47. N: ”Øverst – vi har byttet om, den rette linje skal stå øverst.”

48. Thomas: ”Nemlig og det har I andre forhåbentligt også, …….. og så differentierer I udtrykket og hvad får I så?”

(Gruppen skriver på tavlen)

49. Thomas: ”Det er fint det der. – Nu skal I andre lige på banen. Hvis I(gruppen ved tavlen) forklarer så kan I andre(grupper) komme med kommentarer.”

50. N: ”Vi har først skrevet det op i en vektormodel og så differentieret stedfunktionen for at finde hastigheden og for at finde accelerationen differentierer vi igen.”

51. Thomas: ”Godt så hvad beskriver x(t)?”

52. P: ”En ret linje.”

53. Thomas: ”Ja og i hvilken retning?”

54. K: ”Hen mod kurven.”

55. Thomas: ”ja - og y(t)?”

56. N: ”Højden på kurven, som er et andengradspolynomium.”

57. Thomas: ”Hvad siger hastigheden jer så?”

58. I: ”Her har vi så differentieret udtrykket og hvis vi differentierer igen kan vi finde accelerationen og sammenligne med Galileos faldlov.”

59. Thomas: ”Kan I også skrive jeres acceleration som en vektormodel?”

60. I: ”Altså vi har i Y-aksens retning, men ikke x.”

61. Thomas: ”Nej - så hvad er den?”

62. I: ”Nul.”

63. Thomas: ”Ja – Passer det med vores ide om, at accelerationen er nul i x-aksens retning?”

64. K: ”Ja - der er jo kun den kraft som bolden bliver sendt af sted med.”

65. Thomas: ”Ja og hvad så med i y-aksens retning.”

66. P: ”Der har vi så Gravitationskonstanten, og det passer meget godt.”

67. Thomas: ”Fint – er der nogle kommentarer”

68. K: ”Hvad skal vi bruge, at Galileos faldlov passer, når vi skal tilpasse med noget fra idræt?”

69. I: ”Kan vi ikke bruge det til at måle fejlmargenen.”

70. Thomas: ”Der er jo altid en tilfredsstillelse ved at se at vores matematiske målinger fra eksperimentet passer med de naturvidenskabelige regler vi kender fra andre fag.”

71. K: ”Jeg troede bare, at vi skulle inddrage noget med det fysiske?”

72. Thomas: ”Det skal vi også. Om lidt skal vi så bruge den matematiske analyse til at se på de idrætsfaglige faktorer. – Hænger jeres bevægelsesmodel sammen med jeres hastighedsmodel? Passer den med vores differentialregning?”

73. I: ”Jamen vi har lavet en lille fejl her i vores differentiering af y-koordinaten. Jeg tror det er sket i forbindelse med Logger Pro.”

74. Thomas: ”Ok. – Hvad betyder det minus I har foran x-koordinaten?”

75. I: ”Er det ikke på den måde den bevæger sig på”

76. Thomas: ”Hvad symboliserer minustegnet?”

77. M: ”Retningen.”

78. Thomas: ”Ja – og det er kun fordi I har sat begyndelsespunktet, sådan at P kaster i negativ retning.”

[….]

79. Thomas: ”Nu har vi altså opdelt boldens hastighed i en hastighed hen mod kurven og én hastighed op ad. Det kunne være interessant at se på boldens resulterende hastighed. - Hvad er den resulterende fart? Er der nogen der har set på kastehastigheden, dvs. hastigheden af bolden til tiden t=0.”

…..

”Hvordan finder man den?”

80. I: ”Er det så ikke 22,7?”

81. Thomas: ”Det tal du nævner der, hvilken hastighed er det?”

82. I: ”Er det ikke hastigheden opad?”

83. Thomas: ”Jo – det er lodret op. Hvad siger så tallet 5,136?”

84. I: ”Det siger, hvor langt frem den bevæger sig.”

85. Thomas: ”Ja og det der kunne være interessant at finde ud af er hvad den resulterende hastighed så er? Altså hvilken vektor peger op langs den kurve P kaster ad?”

86. I: ”Kan vi så ikke bare lægge de to sammen?”

87. Thomas: ”Jaaah – hvordan finder vi den?”

88. I: ”Jamen er det ikke bare kræfternes parallelogram.”

89. Thomas: ”Jo, rigtigt. – Så får vi en hastighedsvektor til t = 0. Hvordan får vi så farten?”

90. U: ”Længden af den resulterende vektor.”

91. Thomas: ”Nemlig, og hvad fås så?”

[……]

(Gruppen ved tavlen regner)

92. I: ”22,8”

93. Thomas: ”Godt, hvad er mere interessant ved kastet?”

94. K: ”Startvinklen og højden på skudafviklingen men den kan man bare aflæse.”

95. Thomas: ”Hvordan finder man vinklen?”

96. U: ”Er det ikke bare vha. den fundne hastighedsvektor til t = 0.”

97. Thomas: ”Jo og hvad så?”

98. M: ”Man kan se på hældningen.”

99. U: ”Hældningen er lig tangens til v.”

100. Thomas: ”Så, hvis man kan finde hældningen på hastighedsvektoren i starten, så kan men finde kastevinklen. Hvad er bedst en lille eller stor vinkel?”

101. U: ”Meget stor vinkel.”

102. Thomas: ”Nemlig – Lad os se nærmere på de idrætslige forbedringer.”

103. N: ”Mindre kraft, mere præcision, mere vinkel er noget af det, vi har kigget på.”

104. Thomas: ”Er der nogen der har brugt deres matematiske analyse?”

105. U: ”Jeg kaster ikke hårdt nok. Det fandt vi ud af ved kastefarten og kurvens forløb. Kastevinklen skulle være større, men så skal min kastefart være endnu større.”

106. K: ”Det er vigtigt med et højt ”releasepoint”, evt. ved at hoppe. Så er det nemmere at opnå den vinkel, man skal have.”

107. Thomas: ”Skal vinklen så være større eller mindre for at opnå det samme, når releasepoint hæves?”

108. K: ”Når men er højere, får men en bedre vinkel mod kurven ved samme kast. Så vinklen automatisk større jo højere man er.”

109. Thomas: ”Gode iagttagelser Lad os gå videre. Tak til jer”(gruppen der fremlagde).

RSC 4: Opsamling ca. halvvejs: (start af modul 7)

L fremlægger gruppe 3’s arbejde sidste gang med RSC 4(uden projektor)

110. Thomas: ”Hvad fandt vi ud af sidste gang?”

111. L: ”Bevægelsen, som hun foretager, kan tilnærmelsesvist betegnes som en cylinder med en rund bund og en rund top. Det, vi også så, var et cylindrisk omdrejningslegeme, som startede smalt, gik ud på midten og så smalt igen. Det ville være det helt præcise, men vi valgte så at tage udgangspunkt i en cylinder, for så kunne vi bedre regne på den. Det gjorde vi så med en 3-dimensionel parameterfremstilling, hvor vi så, at bevægelsen opad havde konstant hældningstal som en ret linje op og ned ad y-aksen(på Logger Pro). Så havde vi så ud ad z- og x-aksen en sinusparameter.”

(imens skriver Thomas op på tavlen, hvad L siger med rettelser af z- og y retningen, som blev byttet rundt)

112. Thomas: ”Dvs. vi har den jævne cirkelbevægelse med Cosinus på x-koordinaten og sinus ved y-koordinaten og en tredelt retlinet bevægelse op ad z-aksen.”

113. L: ”Præcis - og så fik vi, at hastigheden var størst i cirkelbevægelsen når vi var ca. i midten. Den starter med at accelerere og så sker der sådan en stagnation til sidst.”

114. Thomas: ”Ok! Det vil sige at I målte hastigheden til at være størst her.” (Thomas peger på midten af opstigningen på en håndtegnet skitse over situationen på tavlen) ”Det kan jo være at der er nogen der får noget andet her. Så kan man jo overveje i grupperne hvad der skal til for at beskrive denne her bevægelse (Thomas peger på radius udvikling). De fleste af jer kommenterede sidste gang på, at radius udvider sig på midten. Hvad skal til for at beskrive denne bevægelse? Hvordan kan man kombinere det til x- og y-koordinaten, at radius udvider sig under opstigningen? Jeg gider ikke høre det nu, men man kan tænke over det ude i grupperne, når I nu arbejder videre. I kan tage det som en udfordrende beskrivelse eller lade det være og betragte det som en cylinderformet bevægelse.

Er der andre kommentarer inden vi går videre?”

115. K: ”Jeg ville altså tro, at hvis hun fortsat havde benet strakt ude på midten, at hastigheden så ikke ville være den største. Sådan som jeg tænker det er, at des større radius er, jo lavere er hastigheden. Jeg tænker os, hvis man som barn har prøvet sådan nogen, hvor de drejer rundt, hvis man trækker benene til sig går det hurtigere og hvis man strækker dem bliver det langsommere.”

116. Thomas: ”Hvad kalder man det? ......Er der nogen der har idræt B-niveau?”

117. K: ”Jeg troede det var et fysisk begreb?”

118. Thomas: ”Det er det også. I idrætsfaget hører det ind under biomekanikken, som handler om fysikkens love anvendt på bevægelser. Det kaldes bevarelse af vinkelmoment, hvor hastighed og gyrationsradius er omvendt proportionale. Dette gælder for bevægelser, der ikke er påvirket af ydre kræfter. F.eks. gymnasten der laver salto eller udspringeren fra en vippe i svømmehallen. I vores tilfælde er der en mindre ydre påvirkning, i form af den skøjte hun har på isen, hvilket kan gøre, at der er uoverensstemmelser med biomekanikkens love.

Gå nu videre i grupperne.”

RSC 4: *Gruppe 6(R, S, O,T) fremlægger, vha. computer og projektor og Logger Pro*

119. R: ”Vi har lavet en 3-deling af grafen (den vertikale bevægelse), hvor hun i starten holder skøjten konstant i 0,4 meters højde. Herovre har vi så en ret linje, hvor hun hæver benet med en konstant fart, har vi regnet det til i hvert fald. Og heroppe har hun så benet i 1,6 meters højde. Det her stykke er så det interessante(R peger på det midterste stykke), hvis vi havde en ret linje $m \cdot t + b = y(t)$.
$y(t) = 1{,}49t - 0{,}77$.”

120. Thomas: ”Jeg er ikke så vild med, at du har skrevet y(t). Hvad skal R skrive?”

121. U: ”z(t)”

122. Thomas: ”Kan du se det?”

123. R: ”Jah x og y er jo cirklen.”

124. Thomas: ”Hvordan ser vektormodellen så ud?”

125. R: ”Jeg forstår ikke helt spørgsmålet!”

126. Thomas: ”Hvilke koordinater mangler du?”

127. R: ”Jeg har z!”

128. Thomas: ”Ja, skriv det op i modellen ……… godt så hvad mangler du?”

129. R: ”x og y er cirklen, som bliver bredere på midten af opstigningen … men vi nåede ikke helt at få et udtryk for cirklen.”

130. Thomas: ”Så brug mit. … Hvad så?”

131. R: ”For at beskrive radius, ser vi at den danner en parabel mens tiden går fra 0,8 sek. til 1,6 sek., så toppunktet(for radius) må ligge lige i midten, dvs. 1,2 sek. Vi har målt hendes ben til 0,55 meter langt i enderne og ved toppunktet 0,65. Så har vi to rødder ud for 0,8 og 1,6 og bruger så $a(x - r_1)(x - r_2)$ til at finde $a = 0{,}625$, og så har vi et udtryk for radius.”

132. Thomas: ”Godt.”

Herefter afsluttes forløbet med institutionalisering af den indsamlede viden om vektormodel og parameterfremstilling over en cylindrisk bevægelse med inddragelse af ændring i radius undervejs og med henvisning til gruppe 6’s fremlæggelse.

Bilag D: Udvalg af elevrapporter

Herunder ses de elevrapporter jeg har brugt undervejs. Jeg har slettet de oprindelige navne for at holde deltagerne anonyme.

RSC 1: Gruppe 1

Bevægelsesanalyse af 60 m. løb

Hypotese for 60 m. løb:
Vi tror ikke M når at tabe fart på de 60 m. Så hastigheden vil være nogenlunde konstant.
Så vi tror kurven vil ligne en parabel/Eksponentiel Funktion.

Vi laver videoanalyse i Logger Pro:

- Vi startede med at sætte prikker ved hver tredje frame.
- Efter vi havde sat prikker satte vi det ind i et koordinatsystem. Kurven lignede det vi havde regnet med, men kurven er mere lineær i starten pga. der står folk i starten så vi får ikke accelerationen med, da M er nået at komme op i fart.
- **Fejlkilder**: Skæv vinkel, kamera ryster, mennesker der blokerer for starten af løb (accelerationen får vi ikke med), skalering (kegler står ikke præcist efter 5 m.), upræcise afmærkning af prikker.

- Kurven er en ”natural exponent” = eksponentiel funktion/udvikling.

M’s anaerobe grænse under 60 m.:

- Efter 2,5 sek. har M sin anaerobe grænse.
- M’s anaerobe grænse kan godt være lidt højere, da det er filmet fra en skæv vinkel.

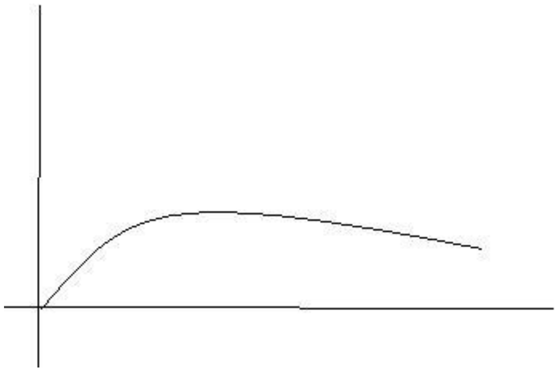
Forbedringer - Forslag til træningsøvelser:

- (M’s acceleration).
- Styrketræning – af ben for at styrke M’s afsæt. Få repetitioner med belastning.
  Man skal vende kroppen til have mere ATP og kreatin.
- Intervaltræning, der giver en evnen til at løbe hurtigere i et hurtigt og konstant tempo.
- Udstrækningsøvelser.

RSC 1: Gruppe 4

Bevægelses analyse af 60m spurten

Først opstiller vi en hypotese af, hvordan vi tror løbet vil være.



Vi åbner logger pro og åbner videoen, som vi sætter prikker på.

Vi markere en linje mellem de to kegler, der er i filmen, som er 5 meter.

Så ser vi på grafen og vurdere at vi ikke behøver Y, så den fjerner vi, men tilføjer i stedet X-velosity.

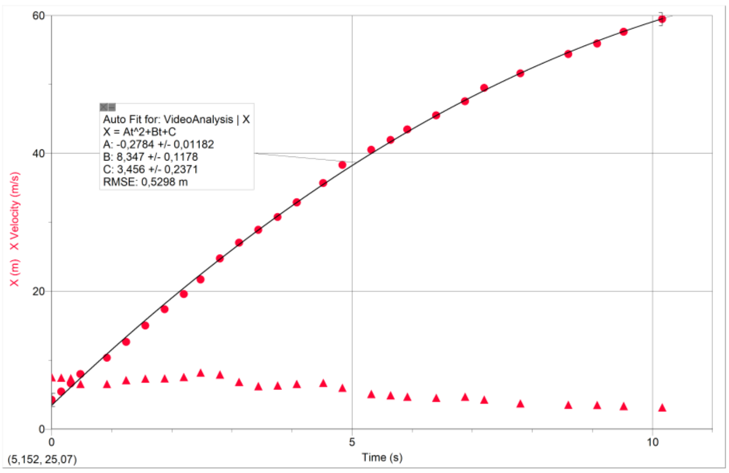
Vi går ind i Curve Fit, og markere grafen 5 - 10 sek.

Vi prøver først en lineær regression. Derefter en parablen, som passer bedst på denne del af kurven.

Fra 0 - 5 sek. passer den lineære regression bedst.

Forskriften for parablen af hele kurven: $At^2 + Bt + C = -0{,}2784t^2 + 8{,}347t + 3{,}456$

- Linær forskrift 0 - 5 sek.: $At + B = 7{,}059t + 4{,}258$
- Parabel forskrift 5 - 10 sek.: $At^2 + Bt + C = -0{,}2420t^2 + 7{,}651t + 6{,}588$



Vurder lineært udtryk: Curve Fit (hastigheden)

Anaerobe grænse: Den grænse hvor kroppen går fra ikke at bruge ilt, til at bruge ilt.

Ca. 5 sek. - man kan se på grafen at K’s anaerobe grænse ligger på ca. 5 sek.

Forskrift for hastigheden:

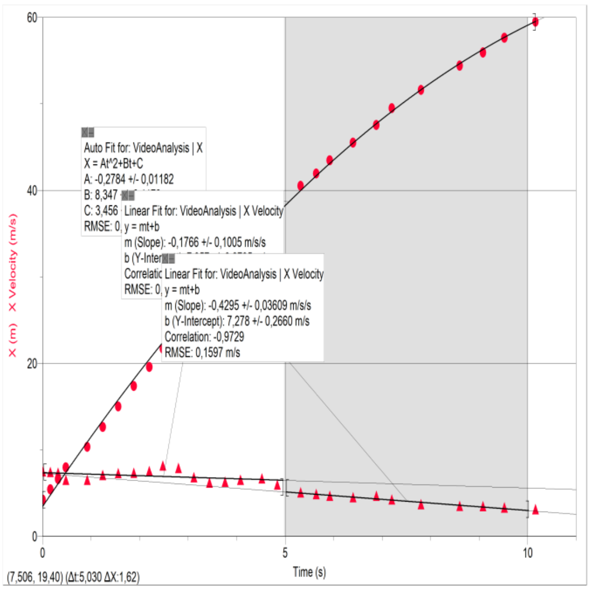
Vi differentierer forskriften fra før og skal gerne få hastigheden til at være

- 0 - 5 sek.: 7,059
- 5-10 sek.: -0,4840 t + 7,651

Logger Pro giver os:

- 0 - 5 sek.: -0,1756 t + 7,357
- 5-10 sek.: -0,4670 t + 7,628

Så det passer meget godt sammen.



Vi har kigget på først den lineære graf fra 0 - 5 sek. som går langsomt ned, hvor 5 - 10 sek. har en større hældning. Ud fra kurven kan man se, hvor den anaeorobe grænse indtræder

RSC 1: Gruppe 6

Den første undersøgelse af 60m-spurten er hvad R's anaerobe grænse er. Efter at have tildelt punkter på grafen ud fra filmen i Logger Pro kan vi se Logger Pros beregnede hastigheder. Usikkerheden regner vi dog for at være rimelig stor da kameraførelsen føltes ret upræcist.

Vores første antagelse var at løberens fart ville ligge som en parabel; hurtigt og accelererende i starten, topfart på midten og deacceleration ved slutningen når løberen blev træt. Dette viste sig dog ikke at være helt sandt ifølge Logger Pro. Accelerationen kunne derimod deles op i et par faser, primært 2 som nok er sat af den aerobe og anaerobe grænse, som vi har bedømt til ca. 3 sekunder. Før denne grænse er hastigheden accelererende efter noget der tilnærmelsesvist ligner en eksponentiel funktion. Derefter når den anaerobe grænse er nået bliver farten deaccelererende og ligner mest af alt en lineær funktion.

Vi har antaget at den anaerobe grænse starter efter ca. 3 sekunder. Heraf ligger topfarten (og heraf den maksimale ydeevne) ifølge Logger Pro også ca. ved 3 sekunder og måles til ca. 9 m/s. Herfra er hastigheden langsomt faldende. Dette giver også mening ved at kroppen er begyndt at løbe på mælkesyre og trættes undervejs. Lige efter topfarten bliver R's hastighed dog hurtigt deaccelererende.

For at skulle løbe hurtigere burde kropsholdningen havde været anderledes. Der er for meget frontal modstand og derfor burde R have været en smule mere fremadlænet. Samtidig kan man altid træne springkraften i benene for at kunne accelerere og løbe hurtigere. Kondien kan også trænes så den anaerobe grænse rykkes da tophastigheden før den anaerobe grænse (i vores betragtninger) er højere end efter grænsen. Herved kan man bedre vedligeholde den aerobe kropsstatus og undgå en deacceleration.

RSC 2: Gruppe 1

Optimering af 3-pointskud i basketball

Hypotese:

Kurven bliver en sur parabel.

$F(x) = - ½*g*t^2 + v_0*t + s_0$

Forbedringer – Forslag til træningsøvelser:

- Styrketræning – af arme.
- Teknik.
- Koordination af hop og kast.

Vi laver videoanalyse i Logger Pro:

- Vi startede med at sætte prikker, så vi kan bestemme funktionen.
- Vi sætter prikker på toppen af bolden og ved hver frame.
- Vi indsætter V's højde, som er 1,67 m.
- Vi kigger på y, som funktion af tid t.
- Vi kigger på hastigheden i y-aksens retning.
- Vi opstiller en vektorfunktion: $y(t) = -4{,}967*t^2 + 6{,}794*t$, c=0, da origo er sat til startpunktet.
- Vi kigger på x (t), umiddelbart ligner det en lineær funktion, så derfor prøver vi at lave en lineær regression, der får vi x(t) = -4,682*t. (minus tegn foran viser retningen af kastet).
- Vi har beregnet vinklen:

  x(t) = -4,682*t.

  $y(t) = -4{,}967*t^2 + 6{,}794*t$.

  Tangenthældning i t = 0 →

  x'(t) = -4,682 → x'(0) = -4,682

  CAS : $d(-4{,}967*t^2 + 6{,}794*t,t)$ → y'(t) = 6,794 – 9,934*t → y'(0) = 6,794

  Hældningen = 6,794/(4,682) = 1,45: a = tanv → $v = \tan^{-1}(1{,}45) = 55{,}428^o$.

- Starthastighed til tiden 0 = resulterende hastighed → Bruge kræfternes parallelogram.

  Resulterende hastighed:

  $v = \text{Kvadratrod}(4{,}682^2 + 6{,}794^2) = 8{,}25$ m/s.

Konklusion

- Umiddelbart et det et fint nok kast, men der mangler præcision.

RSC 2: Gruppe 6

3-pointskuddets bevægelse forventede vi skulle foregå som en parabel. Efter at have sat punkter ind fra Scotts skud i Logger Pro kunne vi tilnærmelsesvis sige at dette var korrekt. Selvom kameraførelsen var lidt dårlig passede en regression i et andengradspolynomium rimelig præcist.

Den optimale måde at få bolden i nettet på er hvis den kommer lige oppefra og ned, frem for at skyde bolden i en lige og ret linje hen over kurven. Derfor regner vi med at jo større indgangsviklen i kastet er, jo større chance er der for at bolden kommer i kurven. Af Scotts kast regnede vi indgangsviklen til at være ca. 81 grader ved at stille tangenthældningen i startpunktet op som en vektor (ca. 7 m/s svarer til en vektor med forskriften [1,7]) og bruge det til at finde vinklen til førsteaksen.

Da det ikke er muligt fra Scotts position at ramme præcist 90 grader i kurven, så for at være realistiske har vi regnet med at Scott skal ramme og heraf skyde 85 grader ned i kurven. For at ramme kurven skal han altså skyde med en hastighed på 11,4 m/s.

For at optimere sit kast skal Scott skyde hårdere og med en større indgangsvinkel. Parablen dette giver, burde være større end vores nuværende parabel (dvs. en større højde), men rammer til gengæld mere direkte ned i kurven. Til at træne dette foreslår vi simpel skudtræning hvor man har denne tanke i hovedet om en stor indgangsvinkel og høj fart for yderst skudprocent.

En anden ting man skal sørge for, for at ramme kurven korrekt er at parablens toppunkt sidder lidt efter halvvejen til kurven. Hvis kurven sidder ca. 6 meter væk fra en burde bolden begynde at falde efter måske 3,25 meter, da kurven sidder lidt højere end en selv. Ved Scotts kast begyndte bolden at dale godt og vel efter 3 meter, hvilket tilnærmelsesvist er okay, men burde optimalt havde ligget en smule længere fra ham.

RSC 3: Gruppe 1

Bevægelsesanalyse af gymnastens springserie

Hypotese:

Vi tror at det bliver en cykloide: $\begin{pmatrix} rx - a * \sin x \\ r - a * \cos x \end{pmatrix}$

Vi arbejder med Logger Pro:

- Vi har analyseret nr. 2 gymnast spring serie.
- Vi sætter prikker ved gymnastens fødder.
- Vi indsætter gymnastens højde til 1,70 m.
- Vi får at a = r = 0,85 m og sætter det ind i funktionen:

s(x) = $\begin{pmatrix} 0{,}85 * x - 0{,}85 * \sin x \\ 0{,}85 - 0{,}85 * \cos x \end{pmatrix}$

Vi blev gjort opmærksomme på at x skal konverteres til t:

x = buelængden.

r = 0,85 – pga. 1,7 m./2 = 0,85. → Gymnastens højde = 1,7 m.

2*pi*r = 0,66 sek. (målt på videoklip "omgangstid")

2*pi*0,85 rad. = 0,66 sek.

2*pi*0,85/0,66 rad = 8,1 rad = 1 sek. → x = 8,1*t

Derfor fås: s(t) = $\begin{pmatrix} 0{,}85 * 8{,}1 * t - 0{,}85 * \sin(8{,}1 * t) \\ 0{,}85 - 0{,}85 * \cos(8{,}1 * t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}9 * t - 0{,}85 * \sin(8{,}1 * t) \\ 0{,}85 - 0{,}85 * \cos(8{,}1 * t) \end{pmatrix}$

Vi har sammenlignet med regression i ***Logger Pro:***

Manual fit for video analysis – X:

X = A*t – B*sin(C*t+E) + D

A: 5,920.

B: 0, 7000.

C: 10, 10.

E: 0.

D: 2,000.

Manual fit for video analysis – Y:

Y = A*sin(B*t + C)+D

A: 0,8462 +/- 0,09662.

B: 8,865 +/- 0,1392.

C: 6,017 +/- 0,2206.

D: 5,542 +/- 0,06842.

Som giver os $\begin{pmatrix} 5{,}92 * t - 0{,}7 * \sin(10{,}10 * t) + 2 \\ 0{,}85 * \sin(8{,}87 * t + 6{,}02) + 1 \end{pmatrix}$ til sammenligning med den anden.

Det ser ud som om at Logger Pro måler højden på gymnasten til 1,4.

Vi har prøvet at sammenligne på CAS, men de afviger lidt fra hinanden. Det skyldes nok forskellen mellem teori og praksis.

Desuden har vi set på kurven over hastighederne i logger pro at:

- Hastigheden aftager gennem hele springet (x-aksen).
- Hans opspring bliver mindre og mindre efter hver gang.
- Han afsætter hver gang.
- Vi har differentieret funktionen, så vi finder hastighedsvektoren:

  s' (t) = v(t) = $\begin{pmatrix} 6{,}9 - 6{,}9 * \cos(8{,}1 * t) \\ 6{,}9 * \sin(8{,}1 * t) \end{pmatrix}$ og igen så vi finder accelerationen:

  v'(t) = a(t) = $\begin{pmatrix} 55{,}9 * \sin(8{,}1 * t) \\ 55{,}9 * \cos(8{,}1 * t) \end{pmatrix}$, hvilket ligner en jævne cirkelbevægelse med modsatte x og y koordinater. Accelerationen bevæger sig altså væk fra centrum, modsat accelerationen i den jævne cirkelbevægelse hvor den går ind mod centrum. Men en cykloide bevæger sig jo også, hvilket kan være forklaringen til accelerationens retning.

Feedback til gymnasten:

- Gymnasten skal styrketræne, så de får mere styrke i arme og ben, så de kan lave et bedre afsæt, som giver større cirkler og så hastigheden kan bevares i begge retninger.

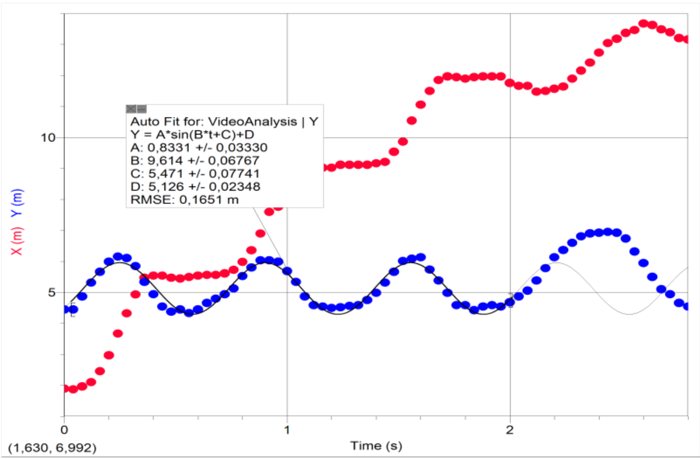
RSC 3:   Gruppe 3

Bevægelsesanalyse for gymnast:

- Hypotese: Vi tror at bevægelsen i y-aksens retning vil følge en tilnærmelsesvis sinuskurve. Vi tror bevægelsen i x-aksen vil følge en blanding mellem en ret linje og en sinuskurve.
- S(t) = $\frac{x(t)}{y(t)}$
- Vi laver en parameterfremstilling for x(t) og y(t):

  X= 1,90t-1,90(sint)

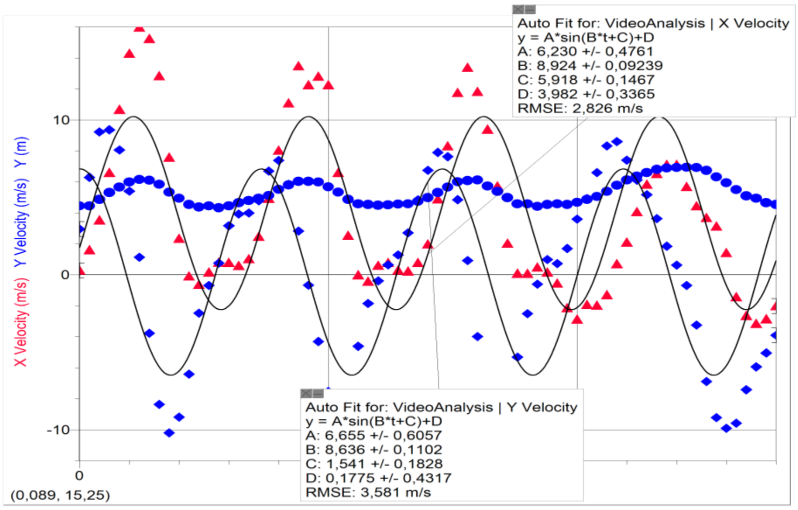
  Y = 0,831*sin(9,614t+5,471)+5,12



- Hvis vi betragter bevægelsen i x-aksens retning kan vi se han radius bliver mindre i slutningen af serien. Det stemmer godt overens med at hans afsæt naturligvis må være mindre kraftfuldt i slutningen af serien pga. Manglende tilløb.
- Vi differentiere stedfunktionen for at finde hastighedsfunktione:

  y’(t) = 0.14*cos(9.6*(t+0.569)

  x’(t)= 1.9-0.033*cos(t)



- Vi kan se ud fra grafen at gymnasten har højest hastighed ud af y-aksen idet han sætter af fra jorden med benene, og vi kan se at han har højest hastighed ud af x-aksen idet han har benene oppe i luften. Endvidere kan vi konkludere at hans tophastighed I x-aksens retning er størst i starten af øvelserne. Gymnasten kan altså forbedre sin serie ved at sørge for også at lave kraftfulde afsæt fra jorden i slutningen af serien.

RSC 3: Gruppe 6

I dette eksperiment undersøgte vi en gymnasts spring hen ad en måtte. Disse spring dannede en cykloide bevægelse. Vi fik sat punkter på Logger Pro og prøvede at indsætte en passe graf for bevægelsen, men opgaven var meget drilsk i starten. Efter langt tids tænken fandt vi ud af to hovedsagelige fejlkilder. Først og fremmest havde vi antaget radiussen forkert; vi troede til at starte med at det var gymnastens fulde længde, men ved en grundigere gennemgang så vi at det kun var halvdelen af hans længde. Grunden til dette var at cykloidebevægelsen skabes af en cirkel hvilket medførte at vores første antagelse var forkert. Det andet problem var tiden. I koordinatsættet til cykloidebevægelsen beskriver *t* hvor langt gymnasten er nået i bevægelsen. Tiden *t* i Logger Pro beskriver hvor langt tid der er gået, altså ikke direkte hvorhenne i cykloiden vi er. Efter et stykke tid fik vi omregnet at tiden *t* fra Logger Pro skulle regnes om til følgende faktor k*t og ville svare til hvor i bevægelsen vi var. Faktoren vi fandt, var 9,81748. Dette gjorde vi ved at udregne at en cykloidebevægelse er 2*pi*radius lang. Radiussen (halvdelen af manden) havde vi sat til ca. 1 meter. En cykloidebevægelse tog ifølge Logger Pro 0,64 sekunder. (2*pi)/0,64 = 9,81748.

Det tog os et godt stykke tid at indse disset to fejlkilder, så det var desværre næsten det eneste væsentlige vi nåede at få lavet. Vi nåede dog også at se at springerens hastighed ud ad x-aksen blev delvist lavere per spring. Den var høj i starten da han kom løbende og blev mindre for hvert spring han lavede. Vi nåede ikke at arbejde så meget med dette, men vi antog at hvis springeren havde endnu mere fart på ville han kunne lave flere og bedre spring, da buerne i sig selv også blev en smule kortere per gang. Den sidste antagelse nåede vi dog heller ikke at få indarbejdet i Logger Pro heller, men vi havde håbet på at kunne stille en bevægelsesbeskrivelse op hvor buens længde afhang af springerens fart.

RSC 4: Gruppe 1

Arbejdsark 6A

Hypotese:

- Vi antager, at det bliver en spiral.
- Vi kigger på den jævne cirkelbevægelse, da spiralen i xy-planen er en cirkel.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Mellemresultater:

Omløbstiden:

$$\tau = \frac{A \cdot 2\pi}{\omega}$$

Ved at finde omløbstiden kan vi finde omega, og derved vores stedfunktion, men da der ikke er nok frames, vil der være for mange unøjagtigheder til at vi kan aflæse omløbstiden præcist nok.

Z(t)= ret linje

X(t)= R*cos(ώt*k)

Y(t)=R*sin(ώt*k)

Vi prøver at finde en sinuskurve til x koordinaten:

X =A*sin(B*t+C)+D

A: 0,5364 +/- 0,05721

B: 11,64 +/- 0,1409

C: 1,314 +/- 0,2231

D: 0,6680 +/- 0,4142

Vi kan ved hjælp af vinkelhastigheden b (omega) finde omløbshastigheden

$$\tau = \frac{A \cdot 2\pi}{\omega}$$

τ = 0,29 sek pr. omgang hun snurrer

Konklusion:

- Alle vores resultater forudsætter at det er en **jævn** cirkelbevægelse hun udfører, hvilket højst sandsynligt ikke holder stik i praksis.

Fra tavlen – Gruppe: R, S og O:

Højden fra ben til is er i starten = 0,4 m.

Højden fra ben til is til slut = 1,7 m.

Z(t) = m*t + b → Z(t) = 1,49*t – 0,77.

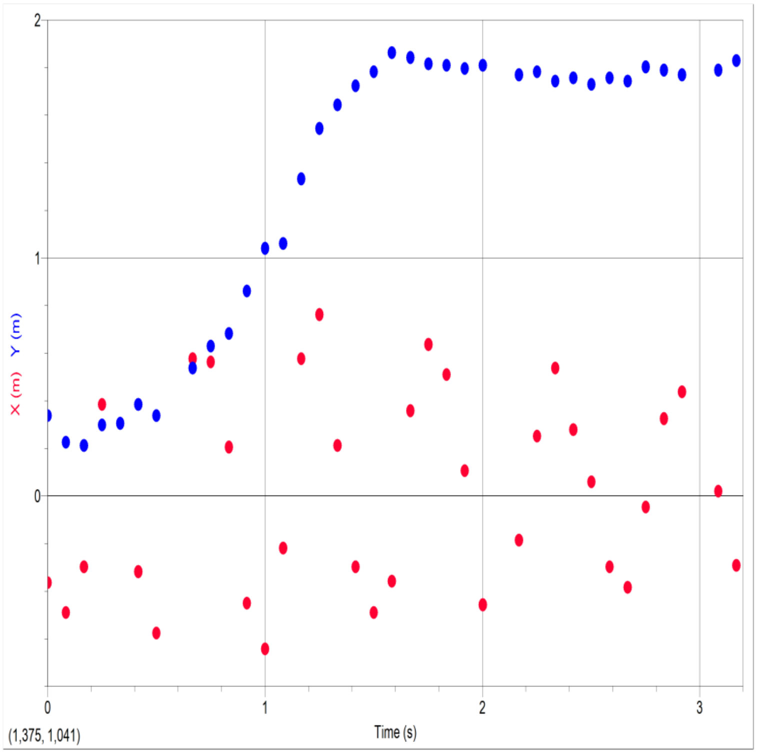
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 1{,}49t + 0{,}77 \end{pmatrix}$$

RSC 4: Gruppe 4

Skøjteprinsesse

Vores starthypotese er at det vil ligne en tornado eller nærmere en slags cylinder.

Derefter går vi ind i logger pro, hvor vi først ser videoen og sætter de prikker vi skal sætte. Derefter ser vi på de kurver vi så får frem.



Så gik vi ind i graph options hvor vi fandt at x-grafen, altså de røde prikker, gerne skulle danne en sinus kurve hvis vi har en jævn cirkelbevægelse i xy-planen. Ved at aflæse længden af hendes ben fik vi en ide om radius som vi brugte som A. Herefter tilpassede vi koefficienterne så kurven nærmede sig punkterne:

X = A*sin(Bt+C)+D

A: 0,4759 = r = skøjteløberens ben.

B: 12

C: 5,004

D: 0

Herefter så vi på z – retningen (i Logger Pro er det y beskrivelsen), de blå prikker, som er en eksponentiel funktion:

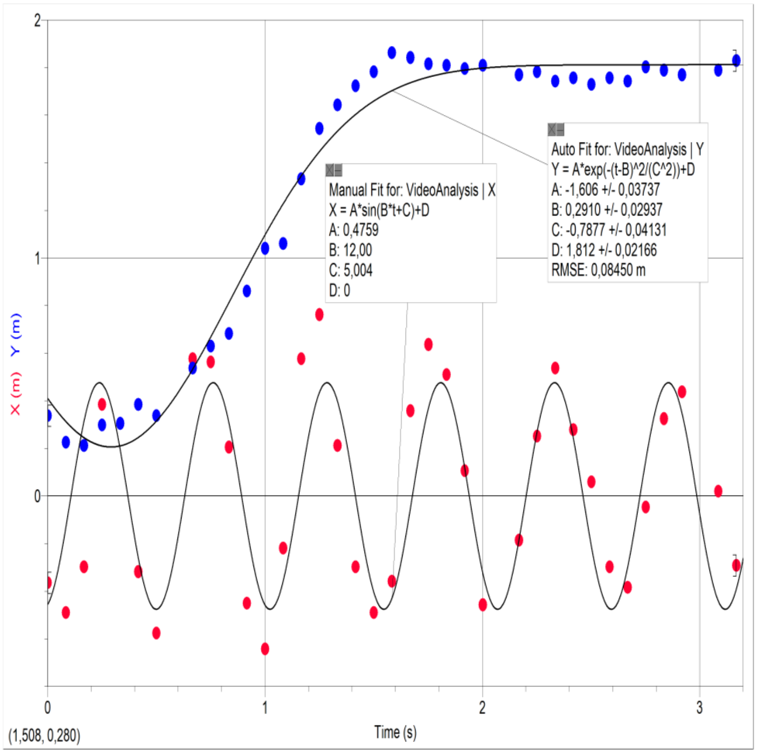
A*exp(-(t-B)^2/(C^2))+D

A: -1,606

B: 0,2910

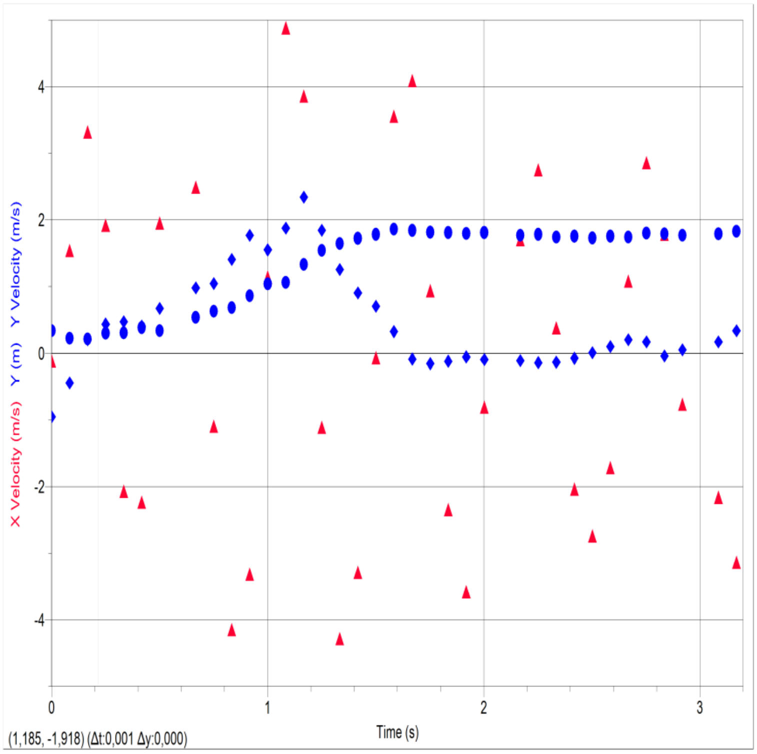
C: -0,7877

D: 1,812



Ud fra vores kurver har vi fundet frem til en parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ R \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ A \cdot e^{\frac{-(t-B)^2}{(c^2)}} + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}476 \cdot \cos(12t + 5) \\ 0{,}476 \cdot \sin(12t + 5) \\ -1{,}6 \cdot e^{\frac{-(t-0{,}3)^2}{(-0{,}79^2)}} + 1{,}8 \end{pmatrix}$$



De røde trekanter viser en graf for hastigheden af, hvor hurtigt skøjteløberen bevæger sig rundt i cirkelbevægelsen i en af de to dimensioner. Man kan se, at når hun når halvvejs i sin bevægelse opad, har hun mest fart på rundt. Før det, stiger hendes fart, og herefter falder den igen.

De blå firkantede prikker viser en graf for hastigheden af, hvor hurtigt hendes ben bevæger sig opad. Her kan man se, at i starten af kurven er den nul og stillestående i kort tid, da foden står på isen. Når hun løfter benet er hastigheden størst, lidt før at der er gået halvdelen af tiden. Herefter daler i hastigheden indtil den igen når nul, da hendes ben er fuldt udstrakt og derfor ikke kan komme højere op.

Man kan se at når hastigheden er størst opad, dvs. ca. midt i løftet er vinkelhastigheden også størst, hvilket ikke stemmer med den biomekaniske viden vi har fået undervejs i denne opgave. Dette kan skyldes de få punkter som vi har kunnet plotte ind men måske også at der overføres noget af den lodrette hastighed under løftet til hastighed i rotationen.

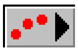
Bilag E: Beskrivelse af anvendelsen af Logger Pro

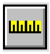
Følgende er taget fra hjælperedskaberne i Logger Pro.

Videoanalyse af bevægelser med Logger Pro 3.4

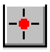
Som indledning vises det, hvordan man kan analysere en bevægelse, som er optaget på video. Prøv det selv af, mens du læser vejledningen.

Start Logger Pro og vælg Insert Movie. Udpeg filen Ball Toss.mov i mappen bevægelse\video på Fronter

Klik på knappen nederst til venstre i videovinduet for at aktivere videoanalyseværktøjet: 

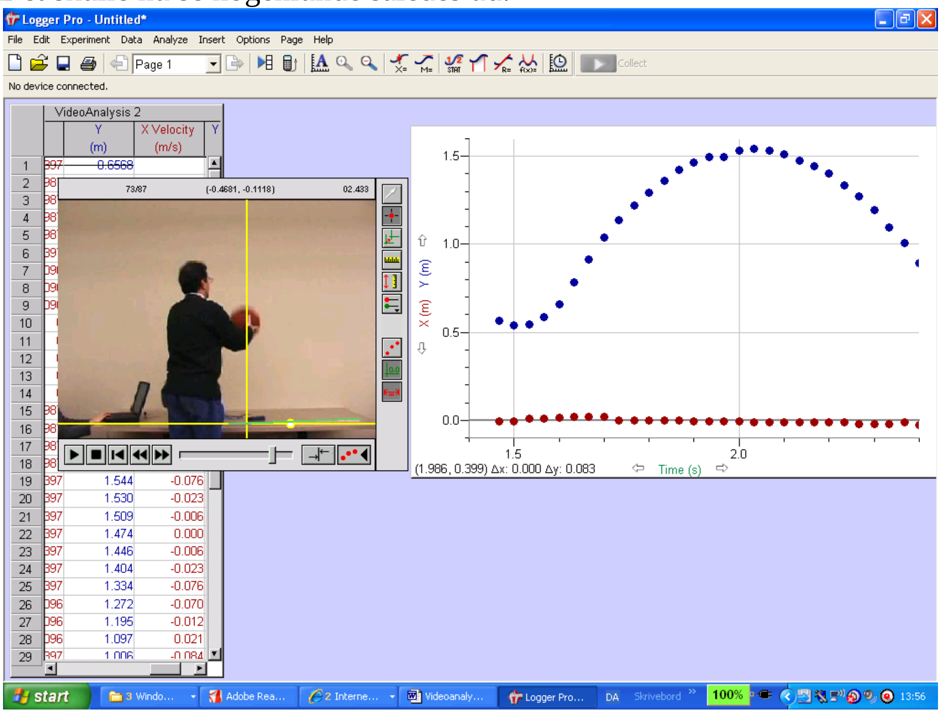
Afsæt en målestok ved at klikke på  og derefter markere start og slutning på den 1m målestok, som ligger på bordet. Forstør evt. billedet for at kunne gøre dette så præcist som muligt.

Spol videoen frem til den "frame", hvor bevægelsen begynder.

Klik nu på knappen  for at aktivere værktøjet til markering af et objekt i filmen.

Klik nu på et punkt øverst på bolden igennem hele bevægelsen. Bemærk, at der automatisk indtegnes punkter i koordinatsystemet til højre.

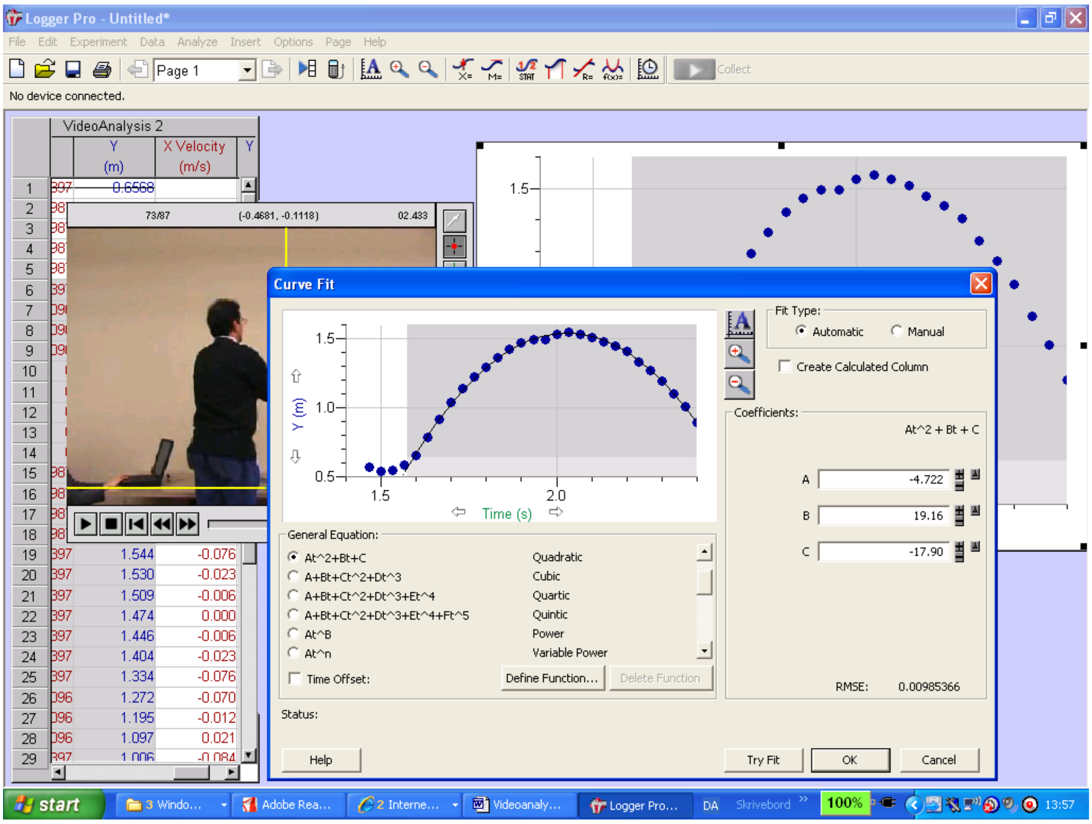
Det skulle nu se nogenlunde således ud:

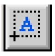


Der aftegnes både den vandrette koordinat x og den lodrette koordinat y. Bemærk, at enheden er i meter, fordi vi har oplyst en målestok.

Vi ønsker kun at betragte den lodrette bevægelse (den vandrette viser blot, at jeg klikker lidt upræcist i vandret retning) og klikker derfor på X(m) Y(m) og vælger Y. Så fjernes x-koordinaterne.

Bevægelsen analyseres nu ved at tilnærme den del af grafen, som ligner en parabel med et andengradspolynomium. Det gøres ved at klikke på  (curve fit). Der fremkommer nu en boks som denne:



Markér den parabellignende del af grafen (klik evt. på  først) ved at trække musen hen over grafen. Vælg så at^2+bt+c (Quadratic) og klik på Try Fit. Dernæst fremkommer regressionskoefficienterne til højre i billedet.

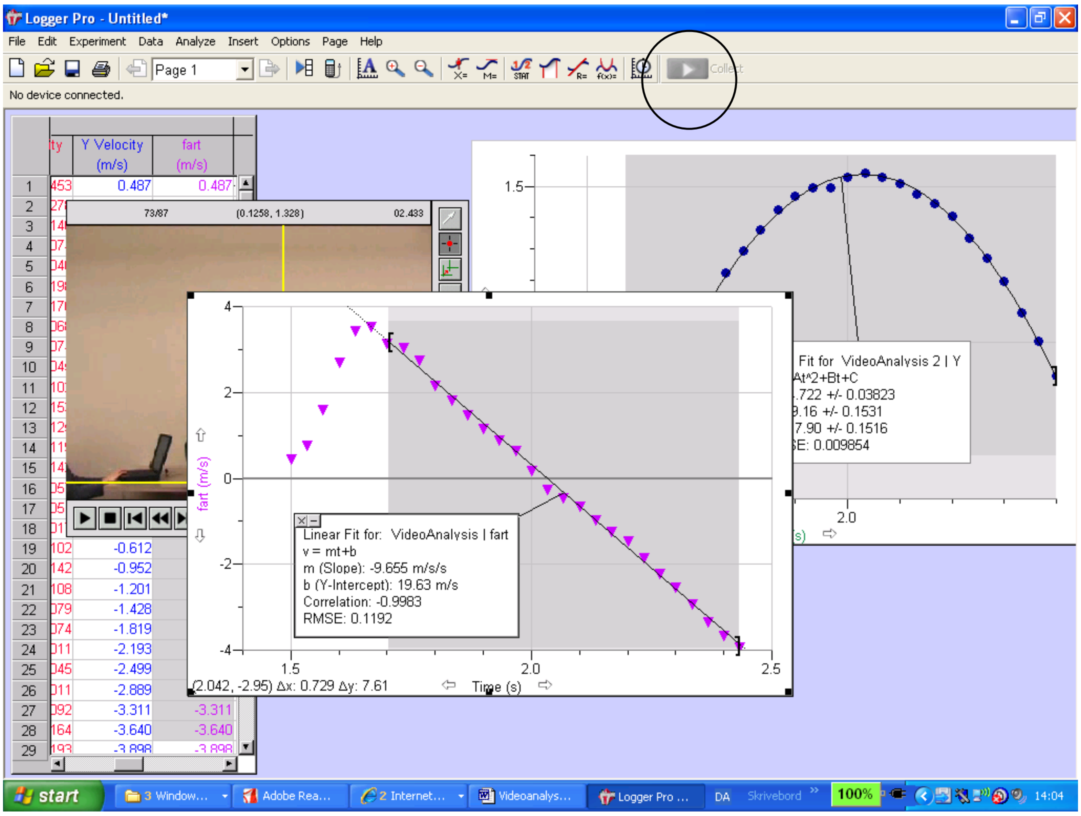
Det ses, at punkterne ligger *meget* fint på en parabel med forskriften $y(t) = -4{,}722t^2 + 19{,}16t - 17{,}9$

Teoretisk kan man udlede at y-koordinaten afhænger af tiden som; $y(t) = -\frac{1}{2}\cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0$

Det svarer til, at accelerationen g er $g = 4{,}722\ m/s^2 \cdot 2 = 9{,}4\ m/s^2$ (tabelværdi : $g = 9{,}8\ m/s^2$)

Resultatet er ikke specielt godt (uden at have konsulteret usikkerhedsberegning !). Bedre resultater fås ved at huske at klikke *meget* præcist og markere målestokken helt korrekt.

Vi kunne også finde accelerationen ved at kigge på (t, v) grafen (som skal være lineær) og så finde accelerationen som hældningen af linjen:



Her ses en acceleration på $g = 9{,}7\ m/s^2$.

Bilag F: Resultat af elevevalueringer

Følgende evalueringsspørgsmål blev blandt andet besvaret af eleverne efter undervisningsforløbet. Der var i alt 18 tilbagemeldinger og de hyppigste svar er angivet med kursiv.

Evaluering af undervisningsforløb i vektormodeller og bevægelsesanalyser

- **Hvordan synes du, at arbejdsformen (projektorienteret gruppearbejde) har været under forløbet sammenlignet med den klassiske undervisning?**

1. *Godt med forandring og motiverende 7/18.*
2. *Fik tvunget én til at tænke kreativt og selvstændigt(modsat klassisk undervisning) 5/18.*
3. *Godt med feedback fra gruppen 5/18.*
   3/18 sagde at de fik mere ud af klassisk undervisning og det samme sagde, at gruppearbejde er uheldigt, når gruppens medlemmer er inaktive eller er fraværende.

- **Hvordan synes du, at anvendelsen af Logger Pro og CAS har påvirket din forståelse af emnet ”vektormodeller”?**
  1. *Hjulpet forståelsen 13/18. Heraf udspecificerer 4 at det har hjulpet forståelsen for ”matematikanvendelsen i hverdagen”, 1 ”visualiseringen” og 1”blev gjort interessant”.*
  2. *Ikke hjulpet eller kun ”lidt”. 5/18*
- **Hvordan har det været at arbejde med idrætsfaget som emne for eksperimenterne?**
  1. *Godt eller sjovt. 10/18*
  2. *Gav forståelse for, hvad man bruger det til, godt at kæde de to fag sammen. 8/18*
  3. *Bedre når det er en bevægelse man selv har udført(RSC 1 og RSC 2). 7/18*
- **Føler du, at idrætsemnet har hjulpet din forståelse af emnet ”vektormodeller”, (hvis ja, på hvilken måde)?**
  1. *Ja. 12/18. Hvoraf 8/12 synes, at det er nemmere at forstå matematikken, hvis det får en kobling til hverdagen, dvs. forbindelse mellem teori og praksis. 3/12 synes, at det hjalp til med at visualisere matematikken og 1/12 at det fangede interessen.*
  2. *Nej. 6/18*

Litteraturliste

Artikler:

Andresen, M. (University College Copenhagen) og Lindenskov, L. (School of Education – University of Aarhus): “New roles for mathematics in multi-disciplinary, upper secondary school projects. 2008 (Andresen 2008)

Artigue, Michèle; Hodgson, Bernard R.: Building Bridges between Theoretical Frameworks in Mathematics Education. I: ICMI Bulletin No. 58, June 2006.

Barbé, Joaquim; Bosch, Marianna.; Espinoza, Lorena; Gascón, Josep: Didactic Restrictions on the teacher’s Practice: The Case of limits of functions in spanish high schools. I: Educational Studies in Mathematics (2005) 59 no. 1-3, p. 235-268, Springer 2005. (Barbé 2005)

Barquero, Berta; Bosch, Marianna; Gascón, Josep: The “ecology” of mathematical modelling: Restrictions to its teaching at university level. I: Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Ramon Llull (Barcelona), okt. 2007 (Barquero 2007(okt))

Barquero, Berta; Bosch, Marianna; Gascón, Josep: Using Research and Study Courses for teaching mathematical modelling at university level. I: Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Ramon Llull (Barcelona). Cerme 5 Lárnaca (Cyprus), feb. 2007 (Barquero 2007)

Bosch, Marianna; Gascón, Josep: Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. I: ICMI Bulletin No. 58, June 2006 (Bosch 2006)

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 178-195. (Burkhardt 2006)

Chevallard, Y. (2002). Organiser l’etude 3. Écologie & regulation. In: Dorier, J. L. Et al. (Eds.), Actes de la 11e école de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Chevallard 2002)

Garcia Garcia, Fco. Javier y Ruiz Higueras, Luisa: Mathematical Praxeologies of increasing Complexity: Variation systems modelling in Secondary Education, University of Jaén. (Garcia Garcia)

Guin, Dominique og Trouche, Luc: "Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations", Montpellier (France) I: ZDM 2002 Vol. 34 (5). (Trouche 2002)

Michelsen, C., Glargaard, N. og Dejgaard, J. (2005): "Interdisciplinary competences – Integrating mathematics and subjects of natural sciences. In: M. Anaya and C. Michelsen (Eds.), Relations between mathematics and other subjects of sciences or art – Proceedings of Topic Study Group 21 at ICME-10, 10th International Congress on Mathematics Education, Copenhagen, Denmark, 2004 (Pp 32-37). (Michelsen 2005)

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(3), 269-280. (Michelsen 2006)

Shimizu, Yoshinori: Teacher education around the world - Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers roles I: Journal of mathematics Teacher education 2: 107-116, 1999. © 1999 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. (Shimizu 1999)

Powerpoint:

Bosch, Marianna: Mathematical Cognition and the Anthropological Approach to Didactics the institutional relativity of knowledge I: TSG28 – ICME 10 Copenhagen, July 2004 (Bosch 2004)

Hjemmesider:

Undervisningsministeriets udgivelse af vejledningen til læreplanen i mat. A-niveau på STX-linjen
http://us.uvm.dk/gymnasie/vejl/vejledning_pdf/stx/stx_matematik_a.pdf
Dato: d. 1/6 – 2009. (matlærervejl. 2007)

Undervisningsministeriets udgivelse af læreplanen i mat. A-niveau på STX-linjen
http://us.uvm.dk/gymnasie/vejl/laereplan_pdf/stx/stx_matematik_a.pdf
Dato: d. 1/6 – 2009. (matlærerplan 2007)

Undervisningsministeriets udgivelse af læreplanen i idræt på C-niveau på STX-linjen
http://us.uvm.dk/gymnasie/vejl/laereplan_pdf/stx/stx_idraet_c.pdf
Dato: d. 1/6 – 2009 (idrætC læreplan. 2008)

Undervisningsministeriets udgivelse af læreplanen i idræt på B-niveau på STX-linjen
http://us.uvm.dk/gymnasie/vejl/laereplan_pdf/valgfag/valgfag_idraet_b.pdf
Dato: d. 1/6 – 2009 (idrætB læreplan. 2008)