



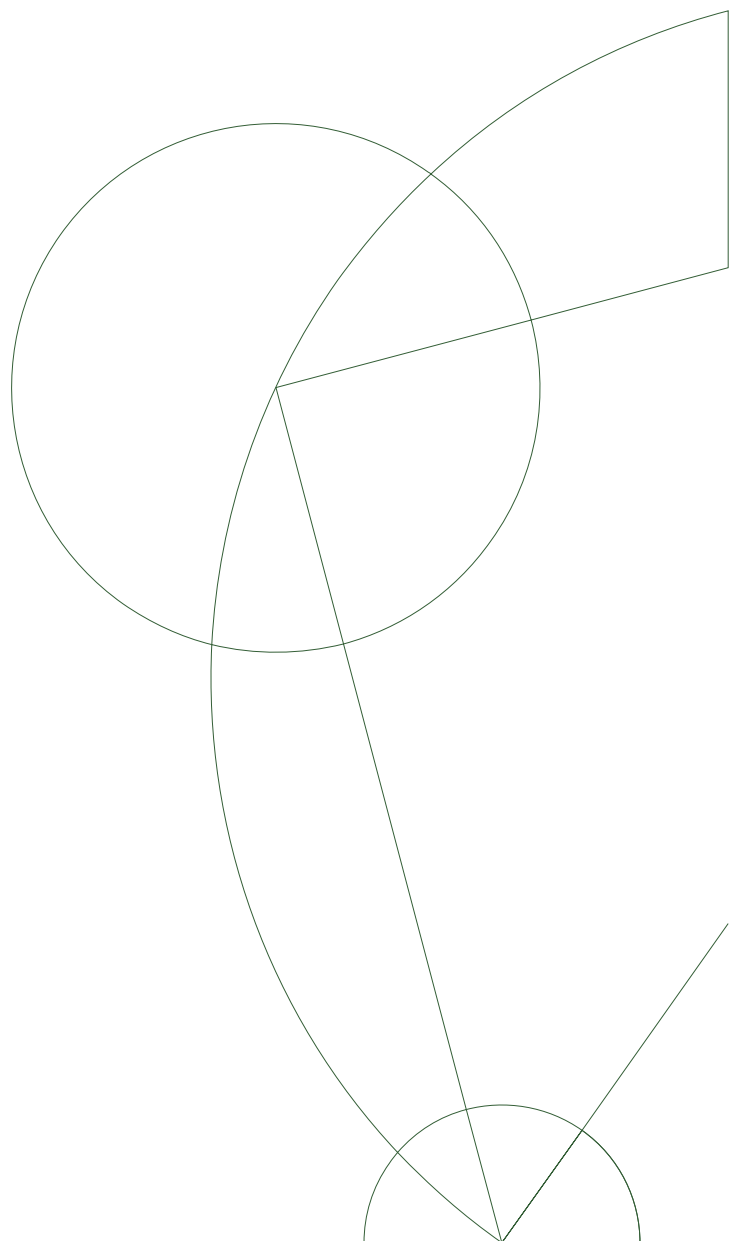
En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik

Nadja Ussingkær

Specialerapport

Maj 2009

IND's studenterserie nr. 11



INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

INDs studenterserie

- Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
- Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
- Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
- Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
- Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
- Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
- Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
- Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
- Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
- Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
- Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik**

Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik

I Berlin har fritidsmatematik eksisteret siden 1970'erne med en god tilslutning af elever med særlig interesse og evne for matematik. Hver uge bruger de en eftermiddag på at gå til matematik ligesom når andre går til sport. Formålet med dette speciale er at undersøge, hvordan matematikken formidles, så eleverne får lyst til at bruge deres fritid på matematik.

Begrebet fritidsmatematik findes i flere udformninger. Den udgave, der bruges i Berlin, er ikke den eneste form for fritidsmatematik i Europa. Undersøgelsen af tysk fritidsmatematik kan være med til at vise, hvorvidt et lignende koncept er ønskeligt at indføre i det danske videnssamfund.

IND's studenterserie består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.

Resumé

I Berlin har fritidsmatematik eksisteret siden 1970'erne med en god tilslutning af elever med særlig interesse og evne for matematik. Hver uge bruger de en eftermiddag på at gå til matematik ligesom når andre går til sport. Formålet med dette speciale er at undersøge, hvordan matematikken formidles, så eleverne får lyst til at bruge deres fritid på matematik.

Observationerne blev foretaget i en elevgruppe på niende klassetrin, som blev undervist i brudte lineære funktioner. Undervisningen er analyseret ud fra teorien om didaktiske situationer ved hjælp af diktafon optagelser, notater, undervisningsmaterialer og kopier af elevernes opgavebesvarelser.

Undervisningen viste sig at være underlagt et forudarbejdet undervisningsmateriale, der fungerede som et pensum for undervisningen. Derigennem opstod et unødigt tidspres, hvilket prægede samspillet mellem lærer og elever.

Begrebet fritidsmatematik findes i flere udformninger. Den udgave, der bruges i Berlin, er ikke den eneste form for fritidsmatematik i Europa. Undersøgelsen af tysk fritidsmatematik kan være med til at vise, hvorvidt et lignende koncept er ønskeligt at indføre i det danske videnssamfund.

Abstract

In Berlin spare time mathematics has existed since 1970s with a solid attendance of students with a special interest in and ability for mathematics. Every week they spend an afternoon going to mathematics like others go to sports. The purpose of this thesis is to examine, how the mathematics is communicated, so that the students want to spend their spare time on mathematics.

The observations were done on a group of students at ninth grade level, that were taught broken linear functions. The lessons were analyzed by the theory of didactical situations through dictaphone recordings, notes, teaching materials and copys of the students handed in assignments.

The lessons turned out to be based on precomposed teaching materials, which functioned as a curriculum for the programme. This lead to unnecessary time pressure, which influenced the interaction between teacher and students.

The concept of spare time mathematics can have different shapes. The shape used in Berlin is not the only one used in Europe. The study of German spare time mathematics could reveal if a similar programme is desirable to Denmark.

Indhold

1	Indledning	7
1.1	Organisationen MSG	7
1.2	Problemstilling	8
1.3	Indhold og opbygning	8
2	Matematisk a priori analyse	10
2.1	Brudte lineære funktioner	10
2.1.1	Grafiske egenskaber	11
2.1.2	Gruppen af brudte lineære funktioner	14
2.1.3	Matrixrepræsentation af brudte lineære funktioner	15
2.2	Möbius funktioner	16
3	Didaktisk a priori analyse	19
3.1	Definitions- og værdimængde	19
3.2	Hældningsbegrebet	20
3.3	Asymptoter	21
3.4	Grafiske forandringer	22
3.5	Gruppebegrebet	23
4	Teorien om didaktiske situationer	24
4.1	Didaktiske trin	24
4.2	Didaktisk miljø	24
4.3	Didaktiske variable og fundamentale situationer	25
4.4	Situationer	26
4.4.1	Didaktiske situationer	26
4.4.2	Adidaktiske situationer	27
4.5	Den didaktiske kontrakt	28
4.5.1	Gaël - drengen bag kontrakten	29
4.5.2	Uheldige effekter	29
4.5.3	Struktur	30
4.6	Interaktive syntese diskussioner	31
5	Metodologi	33
5.1	Valg af observationsgruppe	33
5.2	Undervisningsmaterialer	34
5.3	Observation	34
5.4	Læreplaner	35
5.5	Behandling af data	35
5.6	Sprog og oversættelse	36

6	Undervisningsmaterialer	38
6.1	Notematerialet	38
6.2	Opgavesamlingen	43
6.3	Læreplaner	47
7	Analyse af data	49
7.1	Episode 1	49
7.1.1	Observation af episoden	49
7.1.2	Analyse af episoden	50
7.2	Episode 2	51
7.2.1	Observation af episoden	51
7.2.2	Analyse af episoden	56
7.3	Episode 3	58
7.3.1	Observation af episoden	58
7.3.2	Analyse af episoden	60
7.4	Episode 4	62
7.4.1	Observation af episoden	62
7.4.2	Analyse af episoden	65
7.5	Episode 5	67
7.5.1	Observation af episoden	67
7.5.2	Analyse af episoden	73
7.6	Episode 6	77
7.6.1	Observation af episoden	77
7.6.2	Analyse af episoden	80
7.7	Episode 7	82
7.7.1	Observation af episoden	82
7.7.2	Analyse af episoden	83
7.8	Sammenfatning	85
8	Diskussion	86
8.1	Valget af det matematiske indhold	86
8.2	Undervisningsformer	87
8.3	Tidsaspektet	87
8.4	Typisk skoleundervisning i Tyskland	88
8.5	Math en jeans	90
8.6	Metodologiske muligheder	91
9	Konklusion	92
A	Bilag	96
A.1	Notematerialet	96
A.2	Opgaver	103
A.3	Opgavebesvarelser	106

A.4	Powerpoint-præsentation	123
A.5	Interview med Swetlana Nordheimer.	127

1 Indledning

I tidligere projekter har jeg beskæftiget mig en del med problemløsning i matematikundervisning med den konklusionen, at de tidsmæssige begrænsninger ikke åbner op for de muligheder, som problemløsning kan bidrage med. Under et studieophold i Tyskland stiftede jeg bekendtskab med begrebet fritidsmatematik, hvor eleverne går til matematik efter skole, som andre går til sport. I sådanne organisationer kunne det være muligt at se bort fra tidspresset og give plads til eksperimenterende matematik såsom problemløsning. Derfor ville jeg gerne undersøge, hvordan undervisningen i fritidsmatematik udformer sig.

Først præsenteres den organisation, som danner rammen for dette speciale, og herefter præsenteres problemstillingen og specialets opbygning.

1.1 Organisationen MSG

Mathematische Schülergesellschaft „Leonard Euler“ (MSG) opstod i Berlin 1970. Efterhånden har andre bundeslande i Tyskland fulgt deres fodspor indenfor fritidsmatematik. Eksempelvis MINTmachen! projektet (Matematik og Informatik i Naturvidenskab og Teknik) ved Andreas Filler (2009) i Heidelberg, der startede op i 2007. I Berlin er MSG en naturlig del af universitets historie og kultur, hvilket er en fordel, når det gælder om at tiltrække elever (fra 7. - 12. klasse) og undervisere. I øjeblikket er der omkring 300 elever, som går til fritidsmatematik i MSG (Humboldt Universitet, 2009).

MSG opstod i samarbejde med Berliner Magistraterne (dvs. myndighederne) og den matematiske afdeling ved Humboldt universitet. Undervisningen er altså styret af matematikere, hvis primære interesse er at formidle matematik, mens de didaktiske og pædagogiske aspekter er sekundære. Dog vil den undervisende matematiker formentlig have en vis interesse i didaktik og bruge eleverne i MSG som en slags forsøgskaniner. Dette er muligt, da elevernes interesse for faget er stærk og de dermed bedre kan håndtere de udfordringer, som opstår i eksperimenterende undervisning, ifølge interview med underviser Svetlana Nordheimer. Undervisningen gennemføres af medarbejdere ved matematisk institut, Humboldt Universitet i Berlin.

I løbet af 1974 udviklede og afprøvede MSG et læringsprogram for det matematiske indhold på hvert af klassetrinene 7 til 12, som svarer til de danske klassetrin 7. - 3g. I årene 2001 til 2007 udarbejdede Holger Stephan undervisningsmaterialer i form af noter og opgavesæt. Indholdet dækker både algebra, analyse, geometri, sandsynlighedsregning etc. (Holger, 2009) og skal bidrage til at uddybe og udvide skolematematikken uden at gribe ind over den. Opgaverne omhandler både det matematiske indhold fra noterne og udvalgte opgaver fra matematikolympiaderne. Dele af noterne og opgavesættene til 9. klasse kan ses i bilag A.1 og A.2 og beskrives yderligere i afsnit 6.1.

Målgruppen er matematisk begavede elever. Ligesom i visse sportsgrene er der en optagelsesprøve, inden man bliver en del af MSG. Eleverne er inddelt efter klassetrin, men dygtige elever kan sendes videre til et højere klassetrin indenfor MSG og således sikres et udfordrende niveau for alle eleverne. Ofte kommer eleverne fra naturvidenskabelige skoler og opfordres til at deltage af deres lærere. Formål:

*„Fremfor alt skal undervisningen i MSG formidle
glæde ved og begejstring for matematik.“*
(Humboldt Universitet, 2009)

En af grundstenene i MSG-filosofien er, ifølge Nordheimer, at når læreren finder emnet interessant, vil det smitte af på eleverne. Endvidere er der en klar forventning om, at eleverne deltager i matematikkonkurrencerne, såsom matematikolympiaden, både nationalt og internationalt.

1.2 Problemstilling

Jeg vil undersøge undervisningen i rammerne af organisationen MSG med særligt henblik på:

- hvordan det matematiske indhold er valgt og organiseret.
- om eleverne selvstændigt beskæftiger sig med det matematiske indhold.
- om der er tid til at beskæftige sig grundigt med det matematiske indhold, da der ikke er en eksamen med et fastsat pensum, som skal være gennemgået.

1.3 Indhold og opbygning

Udarbejdelsen af specialet er på grund af ydre omstændigheder foregået bagvendt. Således blev dataen først indsamlet og herefter blev en a priori analyse af det matematiske område, de didaktiske udfordringer og de indgående undervisningsmaterialer udarbejdet samt den teoretisk ramme for analysen af mine observationer fastlagt. Specialet er således opbygget:

A priori analyse

A priori analysen er delt op i to dele: en matematisk og en didaktisk. Den matematiske a priori analyse beskæftiger sig primært med brudte lineære funktioners egenskaber og sekundært med udvidelsen fra reelle til komplekse brudte lineære funktioner, der bedre er kendt som Möbius funktioner.

Den didaktiske a priori analyse tager udgangspunkt i den matematiske a priori analyse og betragter ændringerne i funktionsbegrebet, når det udvides fra lineære funktioner til brudte lineære funktioner.

Såvel den matematiske som den didaktiske a priori analyse er nødvendig for at kunne analysere undervisningsmaterialet og observationerne af undervisningen.

Den teoretiske ramme

Her beskrives teorien om didaktiske situationer, som anvendes til analysen af undervisningen med særlig fokus på den didaktiske kontrakt.

Analyse af undervisningsmaterialer

Denne analyse beskriver indholdet i noterne i forhold til elevernes forudsætninger og de muligheder, som a priori analysen viste. Ligeses indgår en beskrivelse af, hvordan opgaverne kan løses og hvilke didaktiske udfordringer løsningen indeholder.

Analyse af data

Her beskrives observationerne af undervisningen og efterfølgende analyseres undervisningen ud fra teorien om didaktiske situationer, den matematiske og didaktiske a priori analyse og analysen af undervisningsmaterialerne.

Diskussion og konklusion

Resultaterne fra analysen diskuteres i forhold til problemstillingen og sammenlignes med typisk tysk undervisning samt andre former for fritidsmatematik. Derefter følger konklusionen og en perspektivering rettet mod mulighederne for at indføre fritidsmatematik i Danmark.

TAK

En særlig tak til *Swetlana Nordheimer* for at lade sin undervisning observere og for at tage sig tid til interview, kopiering af opgavebesvarelser og lignende. Tak til *eleverne* for at lade sig observere. Tak til *Holger Stephan* for at stille sine undervisningsmaterialer til rådighed. Tak til *Carl Winsløw* for god vejledning gennem hele forløbet. Tak til mine medstuderende *Flemming Munch Hansen* og *Britta Hansen* for de gode diskussioner og råd i specialekælderen.

2 Matematisk a priori analyse

Dette matematiske afsnit vil omhandle den del af rationale funktioner, som observationerne omhandler - nemlig brudte lineære funktioner med reelle værdier. Vi vil se på de grafiske og algebraiske egenskaber for disse og derefter gå videre til de brudte lineære funktioner fra $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, der bedre er kendt som Möbius funktioner.

Definition 1. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes *rational*, hvis

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

for p, q polynomier af grad n, m og med $q \not\equiv 0$.

Uden tab af generalitet, antages f at være uforkortelig.

Eksempel 1. Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

er et klassisk eksempel på en rational funktion. Den har lodret asymptote i $x = 0$, vandret asymptote i $y = 0$ og ingen skæringer med akserne.

Yderligere er ovenstående funktion et eksempel på brudte lineære funktioner.

2.1 Brudte lineære funktioner

Definition 2. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes en *brudt lineær funktion*, hvis

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

for fastlagte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ med $\Delta := ad - bc \neq 0$.

Bemærkning 3. Forudsætningen om $\Delta \neq 0$ sikrer, at de konstante funktioner ikke er indeholdt i mængden af brudte lineære funktioner, da:

Antag, at $\Delta = 0$, så vil $ad = bc$. For $a = 0$ er $b = 0$ eller $c = 0$ og dermed er $f(x) = 0$ eller $f(x) = \frac{b}{d}$. For $a \neq 0$ er $b, c \neq 0$. Dermed er $c = \frac{ad}{b}$ og $d = \frac{bc}{a}$, hvilket giver

$$f(x) = \frac{ax + b}{c(x + \frac{b}{a})} = \frac{ax + b}{\frac{ad}{b}x + \frac{b}{a}} = \frac{ax + b}{\frac{b}{a}(ax + b)} = \frac{d}{b}.$$

Således er en brudt lineær funktion konstant, hvis og kun hvis $\Delta = 0$.

Dette er en nødvendig forudsætning i afsnit 2.1.2, hvor de brudte lineære funktioner vises at udgøre gruppe med hensyn til sammensætning.

Sætning 4. Enhver brudt lineær funktion kan sammensættes af to lineære funktioner og den inverse identitetsfunktion $\frac{1}{x}$.

Bevis. Definer

$$\begin{aligned} l_1(x) &= cx + d \\ l_2(x) &= \left(b - \frac{a}{c}d\right)x + \frac{a}{c} \\ j(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Så er

$$\begin{aligned} (l_2 \circ j \circ l_1)(x) &= \left(b - \frac{a}{c}d\right) \frac{1}{cx + d} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{b - \frac{a}{c}d + \frac{a}{c}(cx + d)}{cx + d} \\ &= \frac{ax + b}{cx + d}, \end{aligned}$$

og dermed kan enhver brudt lineær funktion skrives som en sammensætning af to lineære funktioner og den inverse identitetsfunktion. $\square$

2.1.1 Grafiske egenskaber

En brudt lineær funktion

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0$$

besidder følgende grafiske egenskaber:

1. Grafen skærer x-aksen i $x = -\frac{b}{a}$, da

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Skæringspunktet med y-aksen er

$$y = f(0) = \frac{b}{d}.$$

Bemærk, at skæringspunkterne er uafhængige af parameteren c .

2. Lad os betragte grænseværdierne for funktionen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c} \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f^{-1}(y) &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{dy - b}{-cy + a} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{d - \frac{b}{y}}{-c + \frac{a}{y}} = -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

Der gælder altså for $c \neq 0$, at grafen besidder en vandret asymptote $y = \frac{a}{c}$ og en lodret asymptote $x = -\frac{d}{c}$, hvor funktionen ikke er defineret. Den asymptotiske opførsel bemærkes at være uafhængig af parameteren b .

3. Grafen for den inverse funktion vil skære x-aksen, hvor funktionen skærer y-aksen, og ligeledes y-aksen, hvor funktionen skærer x-aksen. For $c \neq 0$ vil de vandrette asymptoter være lodrette og omvendt. Endvidere er grafen for den inverse funktion spejlingen af grafen for funktionen i linjen $y = x$.

Sætning 5. Lad $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ med $\Delta \neq 0$ være givet. Da gælder:

1. For $c = 0$ er grafen en ret linje.
2. For $c \neq 0$ består grafen af to grene, som vender mod 1. og 3. kvadrant for $\Delta < 0$ og mod 2. og 4. kvadrant for $\Delta > 0$.

Bevis. For $c = 0$ er $a, d \neq 0$. Funktionen er dermed på formen

$$f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

og således en lineær funktion, hvor grafen er en ret linje med hældningskoefficient $\frac{a}{d}$.

For $c \neq 0$ forskydes funktionen til

$$f(x) - \frac{a}{c},$$

således at den vandrette asymptote forskydes til x-aksen, for at undersøge, hvilken vej grenene vender. Dermed er det nok, at undersøge om udtrykket er positivt eller negativt for x tilhørende intervallet til højre og venstre for den lodrette asymptote. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Betragt

$$f\left(-\frac{d}{c} + \varepsilon\right) - \frac{a}{c} = \frac{a\left(-\frac{d}{c} + \varepsilon\right) + b}{c\left(-\frac{d}{c} + \varepsilon\right) + d} = -\frac{ad}{c^2\varepsilon} + \frac{b}{c\varepsilon}.$$

Følgende er muligt, når $c \neq 0$ og $\Delta = ad - bc \neq 0$:

- i. $a = 0, b \neq 0, d = 0$

For $\Delta = -bc > 0$, vil b og c have omvendt fortegn og så er

$$\frac{b}{c\varepsilon} < 0.$$

Dermed vender grenene mod 4. kvadrant. For $\Delta < 0$ vil b og c have samme fortegn og så er

$$\frac{b}{c\varepsilon} > 0.$$

Dermed vender grenene mod 1. kvadrant. Analogt for $a = 0$ og $b, d \neq 0$ samt $a, b \neq 0$ og $d = 0$.

- ii. $a \neq 0, b = 0, d \neq 0$

For $\Delta = ad > 0$, vil a, d have samme fortegn og så er

$$-\frac{ad}{c^2\varepsilon} < 0.$$

Dermed vender grenene mod 4. kvadrant. For $\Delta = ad > 0$ vil a, d have omvendt fortegn og så er

$$-\frac{ad}{c^2\varepsilon} > 0.$$

Dermed vender grenene mod 1. kvadrant.

Betragt nu

$$f\left(-\frac{d}{c} - \varepsilon\right) - \frac{a}{c} = \frac{a\left(-\frac{d}{c} - \varepsilon\right) + b}{c\left(-\frac{d}{c} - \varepsilon\right) + d} = \frac{ad}{c^2\varepsilon} - \frac{b}{c\varepsilon}.$$

Følgende er muligt, når $c \neq 0$ og $\Delta = ad - bc \neq 0$:

- i. $a = 0, b \neq 0, d = 0$

For $\Delta = -bc > 0$, vil b og c have omvendt fortegn og så er

$$-\frac{b}{c\varepsilon} > 0.$$

Dermed vender grenene mod 2. kvadrant. For $\Delta < 0$ vil b og c have samme fortegn og så er

$$-\frac{b}{c\varepsilon} < 0.$$

Dermed vender grenene mod 3. kvadrant. Analogt for $a = 0$ og $b, d \neq 0$ samt $a, b \neq 0$ og $d = 0$.

- ii. $a \neq 0, b = 0, d \neq 0$

For $\Delta = ad > 0$, vil a, d have samme fortegn og så er

$$\frac{ad}{c^2\varepsilon} > 0.$$

Dermed vender grenene mod 2. kvadrant. For $\Delta = ad > 0$ vil a, d have omvendt fortegn og så er

$$\frac{ad}{c^2\varepsilon} < 0.$$

Dermed vender grenene mod 3. kvadrant.

□

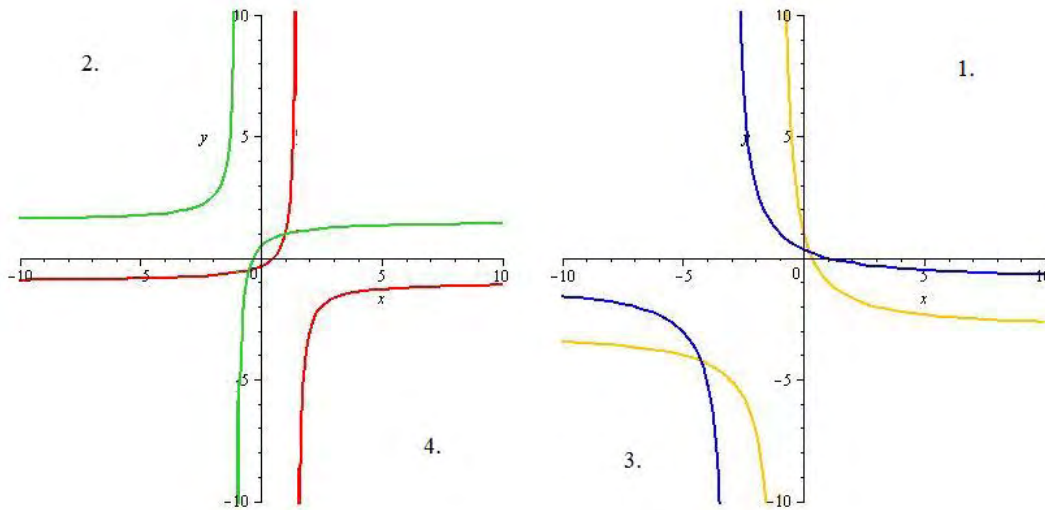
Korollar 1. Den inverse funktion til en brudt lineær funktion er igen en brudt lineær funktion med samme grafiske egenskaber som $f(x)$ i sætning 5.

Bevis. Den inverse funktion for $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ med $\Delta_f = ad - bc \neq 0$ er

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$$

med $\Delta_{f^{-1}} = ad - (-b)(-c) = ad - bc = \Delta_f \neq 0$ og dermed en brudt lineær funktion. Da $\Delta_{f^{-1}} = \Delta_f \neq 0$ vil den inverse funktion besidde de samme grafiske egenskaber som funktionen f jf. sætning 5. $\square$

Sætning 5 og korollar 1 er illustreret i figur 1.



Figur 1: Til højre er den grønne graf $f(x) = \frac{3x+1}{2x+2}$ og den røde graf dens inverse $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{-2x+3}$ med $\Delta > 0$ og således med grenene mod 2. og 4. kvadrant. Til venstre er den gule graf $g(x) = \frac{-3x+2}{x+2}$ og den blå graf dens inverse $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{-x-3}$ med $\Delta < 0$ og således med grenene mod 1. og 3. kvadrant.

2.1.2 Gruppen af brudte lineære funktioner

Lad os betragte mængden af brudte lineære funktioner

$$R = \left\{ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \Delta \neq 0 \right\}.$$

Sætning 6. Mængden R udstyret med kompositionen sammensætning, $(R, \circ)$, udgør en gruppe.

Bevis. Først bemærkes at $\circ : R \times R \rightarrow R$, da

$$(g \circ f)(x) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \right) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)x + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)x + c_1 b_2 + d_1 d_2}$$

med $\Delta = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$.

Sammensætning af funktioner er associativ og dermed også sammensætning af brudte lineære funktioner. Da

$$(id \circ f)(x) = (f \circ id)(x) = f(x)$$

for enhver funktion $f \in R$, er $id(x) = x$ neutral element i R . Til enhver funktion $f \in R$ findes en invers $f^{-1} \in R$, nemlig

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$$

med $\Delta_{f^{-1}} = ad - (-b)(-c) = ad - bc = \Delta_f$ og egenskaben $(f \circ f^{-1})(x) = id(x)$.
Altså er $(R, \circ)$ en gruppe. $\square$

2.1.3 Matrixrepræsentation af brudte lineære funktioner

Gruppen R kan repræsenteres ved gruppen

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

med hensyn til sædvanlig matrixmultiplikation.

Sætning 7. Lad $\phi : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow R$ være defineret ved

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) (x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

med $ad - bc \neq 0$ for $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Så er ϕ en gruppehomomorfi, men ikke en gruppeisomorfi.

Bevis. 1. Det er klart, at ϕ er veldefineret. Lad

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

være givet. Så vil

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)(x) &= \phi\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}\right)(x) \\ &= \frac{a_1\left(\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}\right) + d_1} \\ &= \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) \circ \phi\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)(x)\end{aligned}$$

og dermed er ϕ en homomorfi fra $GL_2(\mathbb{R})$ til R .

2. Da

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kax+kb}{kcx+kd} = k\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x)$$

og

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

er ϕ ikke injektiv. Specielt er ϕ ikke bijektiv og dermed ikke en gruppeisomorfi.

□

2.2 Möbius funktioner

Dette afsnit er medtaget for at vise mulighederne indenfor brudte lineære funktioner. De brudte lineære funktioner afbilder mellem delmængder i $\mathbb{R}$, mens Möbius funktioner, der er på samme form som brudte lineære funktioner, afbilder mellem delmængder i $\mathbb{C}$. Som læser kan dette afsnit eventuelt udelades, da det ikke indgår i det efterfølgende.

Definition 8. En funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes en Möbius funktion, hvis

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

for fastlagte $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$.

En vigtig egenskab for Möbius funktioner er, at de transformerer generaliserede cirkler ind i generaliserede cirkler, hvilket vi vil vise. Til beviset får vi brug for følgende definition:

Definition 9. En generaliseret cirkel i $\mathbb{C}$ er enten en cirkel eller en linje. En linje betragtes som en cirkel gennem punktet ∞ . En funktion, som kaldes cirkelbevarende, transformerer generaliserede cirkler ind i generaliserede cirkler.

Når vi betragter Möbius funktioner i funktionsrummet $\mathbb{C}$ opererer vi i et to-dimensionelt euklidisk rum med nedenstående egenskaber (Stewart & Tall, 1983, s. 247f):

Translation

$$w = z + k, \quad k \in \mathbb{C}$$

flytter punkterne $Re(k)$ mod til højre for $Re(k) > 0$ og mod venstre for $Re(k) < 0$ samt $Im(k)$ opad for $Im(k) > 0$ og nedad for $Im(k) < 0$.

Rotation

$$w = e^{i\theta} z, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

drejer alle punkterne om origo omkring en vinkel θ .

Dimension

$$w = hz, \quad h > 0$$

forstørrelser den geometriske figur for $h > 1$ og formindsker den for $h < 1$.

Inversion

$$w = \frac{1}{z}$$

inverterer figuren og bevarer generaliserede cirkler¹.

Sætning 10. *Enhver Möbius funktion kan skrives som en sammensætning af translationer, rotationer, dimensioner og inversioner.*

Bevis. For $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$ og $c \neq 0$ defineres

$$\begin{aligned} s(z) &= z + \frac{d}{c} \\ j(z) &= \frac{1}{z} \\ d(z) &= \left| \frac{ad - bc}{c^2} \right| z \\ r(z) &= \frac{ab - bc}{|ad - bc|} \frac{|c^2|}{c^2} z \\ t(z) &= z - \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

hvor s, t er translationer, j en inversion, d en dimension og r en rotation. Så er

$$(t \circ r \circ p \circ j \circ s)(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

¹Nærmere detaljer om transformationer af cirkler til linjer eller omvendt se Berg (2008, s. 9.7)

For $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$ og $c = 0$ og dermed $a, d \neq 0$ defineres

$$\begin{aligned} t(z) &= z + \frac{b}{a} \\ d(z) &= \left| \frac{a}{d} \right| z \\ r(z) &= \frac{a}{d} \left| \frac{d}{a} \right| z, \end{aligned}$$

hvor t er en translation, d er en dimension og r en rotation. For $c = 0$ er

$$(r \circ d \circ t)(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(Stewart & Tall, 1983, s. 248f, sætning 13.2.) □

Bemærkning 11. *Analogt med sætning 4 kan Möbius funktioner sammensættes af to lineære funktioner og den inverse identitetsfunktion $f(z) = \frac{1}{z}$, men dette ville ikke vise de geometriske egenskaber, som Möbius funktioner besidder.*

Korollar 2. *Enhver Möbius funktion transformerer generaliserede cirkler ind i generaliserede cirkler.*

Bevis. Da translationer, rotationer, dimensioner og inversioner er cirkelbevarende er sammensætningen af disse cirkelbevarende og dermed enhver Möbius funktion. (Ibidem, s. 249, korollar 13.3) □

3 Didaktisk a priori analyse

Når funktionsbegrebet udvides fra lineære funktioner til at omfatte brudte lineære funktioner, polynomier og rationale funktioner, bliver nye begreber og teorier nødvendige. Dette afsnit vil se nærmere på udviklingen af funktionsbegrebet, når det udvides fra lineære til brudte lineære funktioner med baggrund i den matematiske a priori analyse i forrige afsnit.

Vi vil betragte de lineære funktioner $f(x) = ax + b$ med $a \neq 0$ og brudte lineære funktioner $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ med $ad - bc \neq 0$. Som vist i sætning 5 er mængden af lineære funktioner indeholdt i mængden af brudte lineære funktioner, når c er lig nul. I det følgende vil vi se på udviklingen af begreberne definitions- og værdimængde, hældning og grafiske egenskaber samt udvidelse med begrebet asymptote. Nedenstående eksempel vil være et gennemgående eksempel til at vise ændringerne i begreberne.

Eksempel 2. *Lad os betragte den lineære funktion*

$$f(x) = 3x + 1$$

og den brudte lineære funktion

$$g(x) = \frac{3x + 1}{2x + 2},$$

hvis graf kan ses som den grønne graf i figur 1 side 14.

3.1 Definitions- og værdimængde

Definitionsmængden består af alle de x , for hvilke funktionsværdien $f(x)$ er defineret og betegnes D_f . $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ består af alle funktionsværdier og kaldes værdimængden for funktionen f .

Lineære funktioner er således defineret for alle reelle tal, da $f(x) = ax + b$ er defineret for hele $\mathbb{R}$. Ligeledes består værdimængden af alle reelle tal. Dermed er begreberne *definitions-* og *værdimængde* ikke specielt interessante for funktionsbegrebet, når dette forbeholdes lineære funktioner.

Men når funktionsbegrebet udvides til at omfatte brudte lineære funktioner, bliver disse mængdebetegnelser nødvendige. Funktionen $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ med $ad - bc \neq 0$ har ingen funktionsværdi, når nævneren er nul. Dermed er definitionsmængden $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Da $g(x) = \frac{a}{c}$ medfører $ad - bc = 0$, er dette ikke en funktionsværdi, så værdimængden er $V_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. For $c = 0$ er disse punkter ikke defineret, hvilket stemmer overens med resultatet fra sætning 5, om at g er lineær for $c = 0$ og således har $D_g = \mathbb{R} = V_g$.

Ændringen af begrebet ligger således i at undtage et punkt fra definitions- og værdimængden. Dette virker som en lille ændring på papiret, men det er en markant ændring for funktionsbegrebet, da overvejelser om, hvor funktionen er

defineret og hvilke værdier den rammer, bliver nødvendige. Fra at omhandle en relation mellem to ens mængder, såsom de reelle tal, drejer det sig i stedet om en relation mellem forskellige mængder, nemlig $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ og $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Ændringen er med til at understrege betydningen af begrebet *funktion*, der med E.T. Poulsens ord beskrives „på et intuitivt niveau [...] som en forskrift, der til ethvert element i en eller anden nærmere angiven mængde A tilordner et bestemt element i en anden mængde B “ (Poulsen, 2001, s. 83).

Eksempel 3. For funktionen f er definitions- og værdimængden

$$D_f = \mathbb{R} = V_f,$$

mens funktionen g har definitions- og værdimængden

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad V_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

For begge funktioner gælder, at definitionsmængden kan indskrænkes til en delmængde af den her angivne størst mulige definitionsmængde. Hvis dette er tilfældet ændres værdimængden naturligvis.

3.2 Hældningsbegrebet

Imodsætning til forandringen indenfor definitions- og værdimængden, bliver begrebet hældning allerede relevant i arbejdet med lineære funktioner.

En lineær funktion har den særlige egenskab at besidde en konstant hældning. Når funktionen er skrevet på formen $f(x) = ax + b$, kan hældningskoefficienten aflæses direkte som a . Ellers findes hældningskoefficienten ved hjælp af to forskellige punkter som $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Den konstante hældning gør det muligt, at bestemme forskriften for lineære funktioner ud fra to punkter, da kun værdien b herefter er ukendt og denne værdi kan findes ved at indsætte den fundne hældningskoefficient og et punkt i den generelle forskrift for lineære funktioner.

Men spørgsmålet er, hvad man forstår ved begrebet *hældning*, når grafen ikke udgøres af rette linjer, men kurver som i tilfældet for brudte lineære funktioner med $c \neq 0$. Her indføres begrebet tangenthældning, hvor hældningen for kurven i et givent punkt x_0 er hældningen for tangenten til kurven i x_0 (se eksempelvis Carstensen *et al* (2006, s. 81)). Tangenthældningen beregnes ved at finde funktionens differentialkvotient og dermed kræves et kendskab til differentialregningen, som er et af hovedområderne indenfor såvel matematik som matematikundervisning. Tangenthældningen kan beskrives ved følgende funktion

$$h(x) = f'(x) = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}.$$

Når differentialkvotienten er bestemt, og dermed hældningskoefficienten for tangenten i et givent punkt, kan tangenthældningen bestemmes ud fra viden om rette

linjer og lineære funktioner. Hældningsbegrebet for brudte lineære funktioner kræver altså både kendskab til rationale funktioner, idet tangenthældningen beskrives ved hjælp af disse, samt en indføring i differentialregningen.

Eksempel 4. *Hældningen for f er konstant og kan aflæses direkte af forskriften, men også beregnes ved differentiation, dvs.*

$$f'(x) = 3 = a.$$

For g beregnes følgende tangenthældningsfunktion

$$h(x) = g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2},$$

som angiver tangenthældningen i ethvert punkt $x \in D_g$.

3.3 Asymptoter

For at arbejde med det udvidede hældningsbegreb, tages differentialregningen i brug og bag denne ligger begrebet *grænseværdi* for en funktion, da differentialkvotienten er defineret ved grænseværdien:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a) \quad \text{for } x \rightarrow a,$$

hvor $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er en differentiabel funktion og a tilhører det åbne interval $A \subseteq \mathbb{R}$. Men grænseværdibegrebet bliver også en del af begrebsudviklingen fra lineære til brudte lineære funktioner, idet behovet for begrebet *asymptote* opstår. Lineære funktioner har ingen asymptotisk opførsel, mens brudte lineære funktioner med $c \neq 0$ har en lodret og en vandret asymptote i

$$y = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad x = -\frac{d}{c},$$

jf. afsnit 2.1.1 punkt 2.

Grænseværdibegrebet er et abstrakt begreb og et stort maskineri at sætte i gang for at forklare grafens opførsel. Asymptoterne kan opskrives uden videre bevis og derefter kan det asymptotiske begreb illustreres ved hjælp af grafen for brudte lineære funktioner. Derigennem bliver begrebet mere konkret og visuelt, hvilket er med til at skabe en intuitiv fornemmelse af det at være uendelig tæt på grafen uden at skære den.

Eksempel 5. *Den lodrette og vandrette asymptote for g vil have forskrifterne*

$$x = -1 \quad \text{og} \quad y = \frac{3}{2}.$$

Disse asymptoter kan ligeledes findes ved grænseværdierne

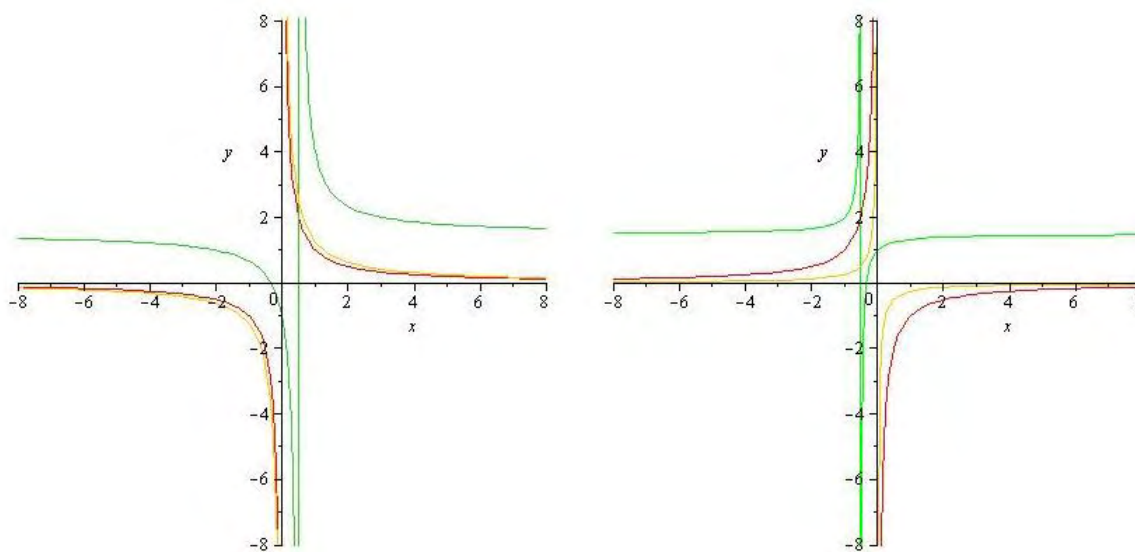
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{2x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{2}$$

og

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g^{-1}(x) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2y-1}{-2y+3} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{y}}{-2 + \frac{3}{y}} = -1.$$

3.4 Grafiske forandringer

Grafen for lineære funktioner er en ret linje, som kan skitseres ud fra kendskab til hældning og skæringspunkt med y-aksen, hvilke kan bestemmes ud fra to givne punkter. For brudte lineære funktioner med $c = 0$ er grafen ligeledes en ret linje jf. sætning 5, men det grafiske udtryk ændres for $c \neq 0$.



Figur 2: Grafen til venstre er for $\Delta < 0$ og grafen til højre er for $\Delta > 0$

Der er to muligheder for at skitsere grafen uden brug af CAS. Enten beregnes en række punkter, som indsættes i koordinatsystemer og herefter tegnes en graf gennem disse punkter. Ellers anvendes skæringspunkterne med akserne og grafens asymptotiske opførsel samt anden del af resultatet fra sætning 5, om retningen af grafens grene. Grafen vil minde om en hyperbel forskudt til et koordinatsystem med asymptoterne som akser og med origo forflyttet til $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$. Betragt nemlig funktionen

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad-bc \neq 0, ; c \neq 0$$

og forskud den således, at asymptoterne ligger oveni koordinatsystemets akser, dvs. til funktionen

$$g(x) = f\left(x - \frac{d}{c}\right) - \frac{a}{c} = \frac{-(ad - bc)}{c^2x} = \frac{-\Delta_f}{c^2x}.$$

Dette er en brudt lineær funktion med $\Delta_g = 0 - (-(ad - bc)c^2 = (ad - bc)c^2 \neq 0$. På figur 2 er den grønne graf f og den gule graf g . Fortegnet for Δ er ens for f og g og grafen til venstre med $\Delta < 0$ og grafen til højre med $\Delta > 0$. De gule grafer er funktionen $\frac{1}{x}$ på venstre og $-\frac{1}{x}$ på højre side. Ved at betragte forskriften for g , der er en forskudt funktion af f , ses at grafen for en brudt lineære funktion er en skaleret hyperbel med faktoren $\frac{-\Delta_f}{c^2}$.

3.5 Gruppebegrebet

I afsnit 2.1.2 blev det vist, at de brudte lineære funktioner med hensyn til sammensætning udgør en gruppe. Men i stedet for kun at omhandle relationer mellem tal, som eksempelvis de fire regnearter, betragtes i grupper en relation mellem elementer med egenskaberne associativitet, neutralelement og inverselement.

Grupper som eksempelvis $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ og $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ består af tal som elementer og addition eller multiplikation som relation. Da elementer og relationen er begreber, som de fleste har kendskab til, er disse fordelagtige til at vise, hvordan de tre betingelser for en gruppe er opfyldt. Det bemærkelsesværdige er, at $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ også er (tal-)ringe og de to sidste endda legemer. De opfører sig altså *pæner* end eksempelvis Diedergruppen, der består af spejlinger og drejninger, i den forstand, at de opfylder flere betingelser end dem for gruppen. Et typisk modeksekempel på en gruppe er det naturlige tal med hensyn til addition, da mængden af naturlige tal ikke indeholder de negative hele tal, som udgør inverselementerne.

Sætning 4 viste, at enhver brudt lineær funktion kan sammensættes ved hjælp af to lineære funktioner (l_1, l_2) og den inverse identitets funktion (j) :

$$l_2 \circ j \circ l_1(x) = \left(b - \frac{a}{c}d\right) \frac{1}{cx + d} + \frac{a}{c} = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

For gruppen af brudte lineære funktioner udstyret med relationen sammensætning af funktioner (R) betyder dette, at funktioner l_1, l_2 og j genererer gruppen. Mængden af lineære funktioner $\{f(x) = ax + b \mid a \neq 0\}$ udgør en undergruppe af R , da sammensætning af lineære funktioner igen er lineære.

De brudte lineære funktioner er således et eksempel på en gruppe, hvor elementerne er funktioner og ikke tal. Dermed er de brudte lineære funktioner ikke blot en udvidelse indenfor funktionsbegrebet, men ligeledes et eksempel på det abstrakte gruppebegreb.

4 Teorien om didaktiske situationer

Analysen af mit data vil bygge på teorien om didaktiske situationer (TDS), som blev udarbejdet af Guy Broussau i løbet af 1970'erne og videreudviklet lige siden (Winsløw, 2006, s. 133). Teorien om didaktiske situationer er både et analytisk og et design redskab indenfor matematikundervisning.

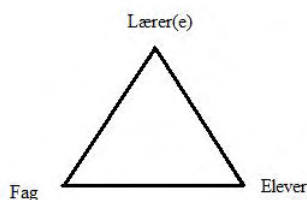
4.1 Didaktiske trin

Når man taler om at formidle viden foregår dette i to trin - et eksternt og internt. Disse trin kaldes for henholdsvis eksternt og intern didaktisk transposition og beskrives således jf. Winsløw (2006, s. 19):

- *Den eksterne transposition flytter og omformer viden fra kilder til den officielt fastlagte viden.*
- *Den interne transposition flytter og omformer den officielle undervisningsfaglige viden til undervisningssituationer.*

I MSG er den eksterne didaktiske transposition udført af Holger Stephan i fremstillingen af undervisningsmaterialer, som ikke griber ind over skolematematikken. I den observerede elevkreds er Svetlana Nordheimer ansvarlig for den interne didaktiske transposition.

Indenfor disse transpositioner betragtes den fagrelaterede didaktik, som kan beskrives ved den didaktiske trekant med hjørnerne *elever*, *lærer(e)* og *fag* (se figur 3). Men istedet for at betragte de tre relationer i den didaktiske trekant, defineres i TDS et didaktisk miljø, som bliver genstanden i såkaldt didaktisk spil.



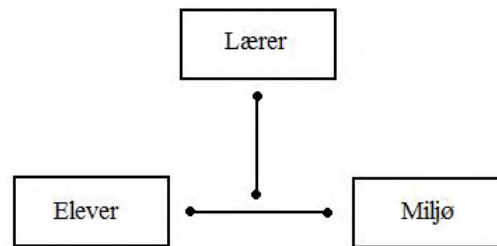
Figur 3: Den didaktiske trekant

4.2 Didaktisk miljø

Et didaktisk miljø udgør undervisningsmiljøet indenfor TDS. Det består af elevernes omgivelser såsom lærebøger, hjælpemidler, læreren, de andre elever, etc.

Det er læreren, der står for miljøets rammer og som har mulighed for at ændre i det undervejs. Miljøet skal skabe det bedst mulige grundlag for, at eleven kan personliggøre den tilsigtede officielle viden.

Klassisk undervisning har en tendens til, at læreren går direkte til den officielle viden og dermed springer den vigtige proces af etablering af personlig viden over. Dette er en hurtig formidling af viden, men den direkte formidling medfører, at den ønskede viden ikke er indlært, men udenadslært. Lærerens opgave er altså at få eleverne til at personliggøre viden, hvilket sker ved at repersonliggøre den officielle viden. Dermed bliver undervisningssituationen til et didaktisk spil (se figur 4) mellem elever og miljø og endnu et didaktisk spil mellem dette spil og læreren istedet for relationerne i den didaktiske trekant.



Figur 4: Det didaktiske dobbelt spil (Winsløw, 2006, s. 137)

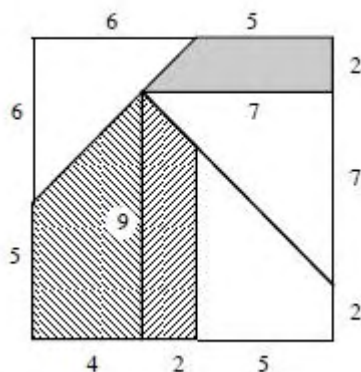
4.3 Didaktiske variable og fundamentale situationer

I beskrivelsen af en didaktisk situation kan man specificere de didaktiske variable. Didaktiske variable kan være ændringer i miljøet og ændringer i devolution samt institutionalisering. I planlægning og evaluering af undervisning vil didaktiske variable, som bevarer den tilsigtede viden, have interesse.

Ved at være opmærksom på didaktiske variable, kan man bedre skabe en fundamental situation. En fundamental situation er ifølge Winsløw (2006, s. 141f) en situation, hvis viden er afgørende for vinderstrategien i det didaktiske spil. Det går ud på, at elevens arbejde i de didaktiske situationer, skal resultere i en personlig viden, der kan fællesgøres som den ønskede tilsigtede viden. Fundamentale situationer kan opnås uanset de ydre rammer for miljøet, som eksempelvis klasseundervisning, og det er således lærerens ansvar at tilrettelægge officiel viden i fundamentale situationer. Nedenstående eksempel udgør en fundamental situation.

Eksempel 6. *Et kendt eksempel indenfor teorien om didaktiske situationer er puslespilsopgaven (Brousseau (1997, s. 177), Winsløw (2006, s. 135), Warfield (2006, s. 55)). Opgaven går ud på at forstørre puslespillet med målene angivet i*

centimeter i figur 5, således at stykket, som måler 4 cm, vil måle 7 cm. Dette sker i grupper, hvor hver elev får udleveret en eller flere papbrikker, som skal forstørres. Når brikkerne er forstørret, samles puslespillet og eleverne kan se, om brikkerne passer sammen. En typisk fejl er, at eleverne adderer 3 til alle siderne, men så vil puslespillet ikke længere passe sammen. Bag puslespilsopgaven gemmer sig Thales sætning om ligestidede figurer og i en vis forstand lineære afbildninger.



Figur 5: Puslespillet (Brousseau, 1997, s. 177).

4.4 Situationer

Det didaktiske spil udmunder i en række forskellige situationer (her skal situationer nærmere opfattes som faser i undervisningen), som kan være didaktiske såvel som adidaktiske. Det er ikke nødvendigt, at alle situationerne finder sted for, at vi taler om et didaktisk spil.

4.4.1 Didaktiske situationer

Ofte danner de didaktiske situationer rammen om undervisningen, idet de præsenterer og sammenfatter det didaktiske miljø og den tilsigtede viden:

Devolution

Læreren overgiver miljøet til eleverne og starter således de didaktiske spil. Dette sker ved at præsentere opgaven og sikre sig, at eleverne kender betingelserne. Det er ikke kun lærerens ansvar, men også elevens ansvar, at have forstået 'arbejdsopgaven'.

I puslespilsopgaven skal læreren præsentere puslespillet og forklare, at brikkerne skal forstørres således, at de passer sammen bagefter. Eleverne kan desuden have brug for en afklaring af hvilke hjælpemidler, der er tilladte.

Institutionalisering

Denne situation samler den viden, som eleverne har opnået i de (nedenfor beskrevet) adidaktiske situationer. Læreren kan opsummere klassens ideer, vurdere dem og relatere dem til officielle matematiske udtryk og begreber. Således dannes et fælles grundlag for de efterfølgende didaktiske spil. Denne situation adskiller sig i høj grad fra de andre situationer, da det didaktiske miljø ændres til et institutionelt miljø, som tager den viden, som udsprang i klasseværelset, og sætter den ind i et overordnet vidensfællesskab.

Institutionalisering kan også finde sted uden forudgående adidaktiske situationer, når eleverne ikke arbejder med matematiske opgaver, men istedet arbejder med en matematisk tekst eksempelvis fra lærebogen. I så fald overtager eleverne ansvaret for institutionaliseringen.

I puslespilsopgaven kan læreren fremhæve multiplikationsprincippet samt relatere til lighedannethed i figurer og lineære afbildninger.

4.4.2 Adidaktiske situationer

De adidaktiske situationer er kernen af situationer indenfor TDS, og de spiller en væsentlig rolle i forhold til indlæring. Det kan være svært at adskille de adidaktiske situationer fra hinanden, da de til dels er overlappende. De adidaktiske situationer er:

Handlingssituationer

Eleverne går i gang med at udforske det didaktiske miljø, mens læreren træder i baggrunden og observerer. Hvis eleverne har uoverkommelige problemer med miljøet, som ikke kan løses uden lærerens indblanding, kan læreren vælge at modificere miljøet og dermed devoluere et nyt didaktisk miljø. Dette er således en situation, hvor eleverne arbejder selvstændig i miljøet uden lærerens vejledning.

Eleverne går i gang med at lave de nye brikker til det forstørrede puslespil enten konkret eller ved beregning af sidelængderne ud fra det princip, som eleven mener løser opgaven, hvorefter den faktiske brik laves.

Formuleringssituationer

Eleverne formulerer deres ideer og hypoteser oftest efter handlingsfasen. Dette kan ske gennem elevernes samspil eller på lærerens opfordring. Læreren kan bede eleverne om at præcisere deres udsagn, da de kan være formuleret svagt. Gennem formuleringssituationen opnår eleverne en fælles viden, som kan danne grundlag for en klassesdiskussion og den videre udforskning af opgaven.

I puslespilsopgaven kunne det være, at eleverne i grupper fortalte om deres fremgangsmetode til at forstørre brikkerne.

Valideringssituationer

Eleverne skal til at validere de ideer og hypoteser, som kom frem i formulerings-situationen. Det handler om at overbevise andre - og dermed ofte eleven selv - om at løsningsmetoden er korrekt, eller om at komme med et modeksempel. Valideringen kan være lærestyret, således at forskellige metoder fremhæves og sammenlignes. En anden mulighed er at tilpasse miljøet, således at det modificerede miljø giver eleverne mulighed for at validere hinanden.

I puslespilsopgaven kan eleverne komme med flere bud og eksempelvis kan hypotesen om at addere alle sider med 3 nedskydes ved hjælp af en mere simpelt puslespil. Miljøet kan modificeres ved at få eleverne til at bytte brikker eller ændre i gruppesammensætningen, således at den nye gruppe skal blive enige om en løsningsstrategi. En af puslespilsopgavens fordele er at kontrollen er ligefrem: kan puslespillet samles korrekt, er metoden rigtig.

(Winsløw, 2006, s. 138f)

4.5 Den didaktiske kontrakt

Når elever og lærer spiller et didaktisk spil, gælder visse spilleregler. Men disse regler er ikke så tydelige, som dem man kender fra eksempelvis brætspil. De har nærmere form af en uskrevet kontrakt ligesom reglerne for god opførsel i et selskab. De kommer først til udtryk, når reglerne brydes. Derefter forsøger alle parter at genskabe en ny kontrakt, som kan accepteres. Sådanne regler ændres naturligvis afhængigt af miljøet og ligeledes ændres den såkaldte didaktiske kontrakt i et nyt eller modificeret didaktisk miljø (Winsløw, 2006, s. 145).

Den didaktiske kontrakt har to sider - nemlig lærerens og elevens. Det er op til eleven at acceptere og engagere sig i miljøet, men det er lærerens ansvar at designe og modificere miljøet, således at eleven opnår succes særligt i de didaktiske situationer. Det er således både lærer og elevens skyld, hvis det tilsigtede viden ikke indlæres.

Men den didaktiske kontrakt indeholder et paradoksalt aspekt: den opfyldes kun, hvis den forsvinder. Dermed menes, at eleverne i didaktiske situationer ikke skal have fokus på lærerens forventninger, men være fuldt optaget i det didaktiske miljø. Som Warfield (2006, s. 32) pointerer:

„ Der er stor forskel på at finde ud af noget, fordi læreren vil have det og på at finde ud af noget, fordi betingelserne er sådan, at det virkelig er nødvendigt.“

Winsløw (2006, s. 146) bemærker dette i det modstridende undervisningsfænomen, at læreren stiller eleverne spørgsmål, som han selv kender svaret på. Det giver dermed ikke mening, at søge svar på spørgsmålet for lærerens skyld. Derimod skal eleverne gribes af det didaktiske spil og arbejde med matematikken for deres egen skyld og dermed opfyldes den didaktiske kontrakt.

4.5.1 Gaël - drengen bag kontrakten

Historien bag Brousseaus opdagelse af den didaktiske kontrakt starter med hans arbejde med en 8-årig dreng ved navn Gaël, som dumper i matematik, men ikke i andre fag. Det viser sig, at følgende kontrakt (Warfield, 2006, s. 30) gør sig gældende i Gaëls matematikundervisning:

Gaël vil ikke risikere at lave fejl ved faktisk at give det et forsøg, at forstå matematikken. Hans opførsel er rolig og medvillig.

Læreren afholder sig fra at gøre Gaël utilpas og giver selv svaret på de stillede spørgsmål.

Resultatet af denne kontrakt er en god stemning mellem Gaël og læreren, men Gaël lærer desværre ingenting. Derfor bryder Brousseau langsomt kontrakten ned og bygger en ny kontrakt op, som tillader Gaël at deltage i undervisningen med en ny selvopfattelse. Ændringen viste sig at gøre ham i stand til at arbejde med det matematiske indhold og følge med i matematikundervisningen.

4.5.2 Uheldige effekter

Den didaktiske kontrakt spiller en stor rolle indenfor TDS, men særligt læreren skal være opmærksom på de uheldige effekter, som den kan medføre. Effekterne opstår, idet læreren forsøger at opfylde den didaktiske kontrakt ved at modificere miljøet på forskellig vis. De væsentligste effekter er ifølge Winsløw (2006, s. 148f) og Warfield (2006, s. 111f) følgende:

Topaze-effekten

For at undgå, at eleven taber det didaktiske spil, giver læreren eleven en masse hints, som efterhånden fratager eleven ansvaret for opgaven ved at løse den. Effekten opleves eksempelvis i tilfælde, hvor eleven har valgt en forkert løsningsstrategi. Fremfor at få eleven til at indse fejlen i sin metode, henviser læreren enten til at metoden er forkert eller forsøger at give ledetråde til en anden løsningsmetode. *Effekten er opkaldt en scene i et skuespil, hvor Topaze forsøger at få sin elev til at stave blandt andet 'Moutons' (stumt s på fransk) og ender med at udtale s'et meget tydeligt, for at få eleven til at indse stavefejlen i 'Mouton'.*

Misbrug af analoge miljøer

En Topaze-lignende effekt kan ske ved at bruge analoge miljøer. Analoge miljøer opstår, når læreren gennemgår løsningen af en opgave i et miljø og så får eleverne til at løse en lignende opgave i et dermed lignende miljø. Eleven forsøger nu at ændre detaljerne i forhold til det tidligere miljø og gætte sig til svaret fremfor at løse problemet. Et lignende misbrug kan opstå gennem institutionaliserede eksempler, som ofte ses i lærebøgerne. Eleverne vil i deres forsøg i et løse en typeopgave

prøve at få opgaven tilpasset eksemplet fremfor at forstå opgavens indhold.

Jourdain-effekten

Når en elev løser en opgave ved at følge præcise angivelser for metoden, har eleven så lært noget eller ej. En lærer som oplever, at eleven lærer en masse ved at følge en opskrift, er fanget i et ønske om at se indlæring hos eleven. I denne iver kan læreren overbevise sig selv om, at eleven har opnået en god faglig indsigt og dermed opnået den officielt ønskede viden, selvom dette ikke er tilfældet. *Denne effekt er opkaldt efter hovedpersonen Jourdain i „Den adelige borger“, da han opdager betydningen af ordet 'prosa' og udbryder „Nej da! Her har jeg i over 40 år gået rundt og talt prosa uden at vide det.“*

Metakognitivt skift

Når eleverne har svært ved at forstå den faglige begrebsverden med flere repræsentationer, kan læreren komme til at foretage et kognitivt skift til en bestemt repræsentationsform, som erstatter den formelle viden. Et klassisk eksempel er brugen af 'mængdeboller' som repræsentation for endelige mængder. Ved denne simplificering af det matematiske område kan Jourdain-effekter blive resultatet, da elevernes arbejde med den simple repræsentation forveksles med elevens arbejde med det abstrakte indhold i det oprindelige genstandsområde.

4.5.3 Struktur

Den didaktiske kontrakt kan ifølge Hersant & Perrin-Glorian (2005, s. 118) betragtes ud fra følgende fire dimensioner:

Det matematiske område

Indenfor ethvert matematisk område vil der være en række metoder og vidensområder, som er relevante. Ved at gøre opmærksom på disse eller ændre i dem, vil kontrakten ændres på såvel et globalt plan (eksempelvis algebraisk eller geometrisk) som på et lokalt i form af ændringer i den matematiske kontekst.

Den didaktiske status af viden

Viden kan betragtes på en skala mellem gammel og ny viden, som inddeles i tre stadier: nyligt præsenteret viden, viden på vej til institutionalisering og institutionaliseret viden, som skal indordnes.

Karakteren af den igangværende didaktiske situation

Kontrakten ændres efter den didaktiske situation og derfor er karakteren af situationen vigtig såsom om situationen er adidaktisk.

Fordelingen af ansvar

Læreren kan vælge et miljø, som overlader mere eller mindre ansvar til eleverne.

Den didaktiske kontrakt struktureres i yderligere tre niveauer:

Makrokontrakt

ser på de overordnede undervisningsmål.

Mesokontrakt

ser på, hvordan løsningen af opgaven udføres.

Mikrokontrakt

ser på specifikke matematiske enheder såsom delspørgsmål i en opgave.

Alle fire dimensioner i den didaktiske kontrakt er kun stabile på mikroniveauet. Derfor vil udgangspunktet for en analyse af den didaktiske kontrakt være på mikroniveau, så på mesoniveau og herefter på makroniveau.

4.6 Interaktive syntese diskussioner

Indenfor rammen af TDS betragter Hersant & Perrin-Glorian (2005, s. 117) en særlig form for undervisningssituation kaldet *interaktiv syntese diskussion* (ISD). Udgangspunktet er at lade eleverne arbejde med en opgavetype, som kan løses ved hjælp af deres gamle viden. Herefter danner en klassediskussion baggrund for nye spørgsmål og opgavetyper, der kræver, at eleverne bruger ny viden i løsningen og dermed personliggør den tilsigtede viden, der herefter fællesgøres.

Adidaktisk potentiale

Før vi taler om interaktive syntese diskussioner, skal undervisningssituationen indeholde et såkaldt adidaktisk potentiale. Det er sjældent, at undervisningen indeholder fundamentale situationer, så istedet for at kræve et adidaktisk miljø, kræves tilstedeværelsen af adidaktisk potentiale. I det adidaktiske potentiale ligger elevernes mulighed for at tilegne sig ny viden, der ikke kunne opstå i den adidaktiske situation med de kendte opgavetyper. Gennem klassediskussionen ud fra lærerens spørgsmål opstår ny viden for eleven at personliggøre. Det overlades til læreren i hvor grad eleverne styres eller overlades til miljøet og den respons, dette indeholder. Dermed er det op til læreren at benytte sig af det adidaktiske potentiale ved at fordele ansvaret mellem sig selv og eleverne. ISD fungerer ved at:

- læreren forsøger at samle viden ind fra så mange elever som muligt, men ender med kun at tage et par elevers viden og få klassen til at bruge denne.
- det er nødvendigt for læreren at planlægge undervisningen ud fra et problem, som eleverne tidligere har løst. Dermed kan læreren ende med at bygge en ny situation op, fremfor at ændre i det adidaktiske potentiale ved at formulere den tilsigtede viden for eleverne og dermed overtage ansvaret.

Interaktive syntese diskussioner danner rammen for en undervisningssituation, hvor den tilsigtede viden personliggøres i en klasediskussion fremfor i en adidaktisk situation. Ved at betragte situationens adidaktiske potentiale skabes der rum til en didaktisk situation, der stadig sikrer eleven ny viden ved personliggørelse og ikke blot ved udenadslære jf. afsnit 4.2.

5 Metodologi

For at undersøge undervisningsmiljøet i MSG og elevernes grad af selvstændighed i beskæftigelsen med det matematiske indhold, bruges teorien om didaktiske situationer ved at:

- undersøge, hvilke situationer der forekommer i undervisningen af brudte lineære funktioner i MSG, og om der er et adidaktisk potentiale til interaktive syntese diskussioner.
- beskrive den didaktiske kontrakt i MSG indenfor det matematiske område brudte lineære funktioner.

Ved at beskrive de didaktiske og adidaktiske situationer er det muligt at beskrive undervisningsformen. Særligt de tidskrævende adidaktiske situationer vil spille en stor rolle, hvis undervisningen i MSG har en eksperimenterende karakter.

Den didaktiske kontrakt handler om at beskrive samarbejdet mellem lærer og elever, deres indbyrdes forventninger og fordelingen af ansvar i de konkrete situationer. Da læreren har undervist den observerede klasse de foregående to år har hun et vist kendskab til eleverne og eleverne har et indtryk af lærerens almene forventninger.

Denne del af problemstillingen beskæftiger sig med den interne didaktiske transposition, mens den eksterne didaktiske transposition, som handler om undervisningsmaterialets udvælgelse og organisering, undersøges ud fra den matematiske og didaktiske a priori analyse med særligt henblik på at:

- undersøge, hvordan udvidelsen af funktionsbegrebet og indførelsen af gruppebegrebet kommer til udtryk i noterne.
- undersøge, hvilke didaktiske udfordringer der kan opstå i arbejdet med noterne og opgaverne.

5.1 Valg af observationsgruppe

Da projektet MINTmachen! i Heidelberg var i opstartsfasen, anbefalede Andreas Filler, lederen af MINTmachen! i Heidelberg, at observere MSG „Leonard Euler“ i Berlin. Her kontaktede den hovedansvarlige underviserne og fandt frem til Svetlana Nordheimer, som skulle undervise 9. klassetrin og som var villig til at lade sin undervisning observere.

Der var mulighed for at observere to forløb: brudte lineære funktioner og plangeometri. Da læreren ikke kunne oplyse, hvornår de gik igang med plangeometrien, blev emnet brudte lineære funktioner valgt, for at sikre et indsamlet datamateriale tidligt i forløbet. Processen for indsamling af data begyndte således med at tage til Berlin med kort varsel uden at have en a priori analyse for

det matematiske område og uden at kende lærerens undervisningsplan. Formålet var at samle så meget data som muligt i de to observerede undervisningsmoduler samt i øvrigt at udnytte de muligheder, der var til rådighed i Berlin. Det endte med følgende datamateriale: lærerens undervisningsplan, undervisningsmaterialer i form af noter og opgaver (Bilag A.1 og A.2) samt powerpoint-præsentation brugt i undervisningen (Bilag A.4), kopier af elevernes skriftlig afleverede opgaver (Et udvalg i bilag A.3), notater fra mine observationer samt diktafonoptagelser heraf og et uformelt interview med underviseren (Bilag A.5).

5.2 Undervisningsmaterialer

Denne del af analysen kunne have været lavet inden observationerne i Berlin, da både noter og opgaver kunne være sendt per mail i pdf-format. Man kunne have forestillet sig, at det ville være interessant at gennemarbejde notematerialet og opgaverne for alle klassetrin og se, om der er en sammenhæng mellem de indgående matematiske områder. Dette ville være relevant for at undersøge makroniveauet i den didaktiske kontrakt, som omhandler de overordnede undervisningsmål. I dette speciale fokuseres i stedet på at beskrive mikro- og mesokontrakter, hvortil det er relevant at betragte de opgaver og afsnit fra teksten, som indgik i den observerede undervisning, da er en del af det didaktiske miljø.

For at kunne analysere disse undervisningsmaterialer bruges den udarbejdede a priori analyse af det matematiske område og af de didaktiske udfordringer i forhold til udvidelsen af funktionsbegrebet og indførelsen af gruppebegrebet. For at begrænse datamængden blev de opgaver udvalgt, som var relevante for de to observerede undervisningsmoduler og som lå indenfor emnet brudte lineære funktioner. De indgående opgaver i andet undervisningsmodul blev ikke inddraget i undervisningen og fungerede derfor som en forudsætning for det næste undervisningsmodul. Da dette ikke blev observeret, er disse opgaver udeladt. Dermed er det kun de fagrelevante opgaver fra arbejdsblad 2, som er relevante. Det ville have været en spændende opgave at analysere alle opgavebesvarelserne, men det ligger udenfor rammerne af dette speciale.

5.3 Observation

For at undersøge de didaktiske og adidaktiske situationer, det adidaktiske potentiale og den didaktiske kontrakt er det nødvendigt at observere undervisningen. De forskellige situationer og det adidaktiske potentiale kan observeres ved at betragte undervisningen som tilskuer, hvor lærer og elevers handlinger kommer til udtryk. Den didaktiske kontrakt er mere implicit og dermed er en beskrivelse af den ikke mulig udelukkende ved observation. Den didaktiske kontrakt afspejles i elevernes skriftlige arbejde, kommunikationen mellem lærer og elev samt i deres opførsel. Derfor er kopierne af elevernes opgavebesvarelser, notaterne foretaget under undervisningen og diktafonoptagelsen vigtige hjælpemidler til denne

beskrivelse.

Desuden skal observationer være så objektive som muligt. En betragtning af de fysiske handlinger såsom tale og skrift kan ikke tage højde for tanker og forventninger, som derfor vil blive fortolket af observatøren. For at opnå en så neutral observation som mulig, blev lyden i lokalet optaget af en diktafon, som lå ved læreren i klasseundervisning og ved eleverne ved gruppearbejde. Den gruppe, som diktafonen ligger hos, er den nærmeste gruppe i forhold til observatøren, da dette skaber mindst opmærksom på, at eleverne bliver observeret.

Fordelen ved diktafonen er, at samtalerne kan gengives nøjagtigt ved transkribering, mens observatørens fokus er på at beskrive læreren og elevernes opførsel og lave tavleafskrifter. Ulempen er, at man ikke har sammenhængen mellem lyd og billede, selvom man er opmærksom på tidspunkterne og henvisninger i lydoptagelsen som 'der' giver ikke mening. Løsningen på dette er at videofilme, men for det første kræver det tilladelse fra elevernes forældre, hvilket vil være et stort arbejde at skaffe forinden, og for det andet er der en øget risiko for, at elever og lærer ændrer opførsel, når de filmes.

Optagelsen af de to undervisningsmoduler på diktafon gav over tre timers optagelse. Fremfor at transkribere hele optagelsen, dannede notater af undervisningen baggrund for at finde vigtige episoder og ved at lytte til optagelserne kunne undervisningsforløbet beskrives i det nødvendige detaljeniveau. Desuden indeholdt optagelsen en del baggrundsstøj i form af trafikstøj og småsnakken mellem eleverne.

5.4 Læreplaner

Lærerens undervisningsplan, der er beskrevet i afsnit 6.3, gav mig et overblik over, hvad læreren forventede at gennemgå, hvilket var en fordel under observationen. Derudover giver den mulighed for at sammenligne det planlagte og egentlige forløb og så spiller den en vigtig rolle i beskrivelsen af den didaktiske kontrakt, da en del af lærerens forventninger til undervisningsforløbet kommer til udtryk herigennem.

Lærerens forventninger og opfattelse af undervisningen i MSG kommer også til udtryk gennem interviewet, men i et interview kan læreren udtrykke ønsker til, hvordan undervisningen er, og ikke reelle beskrivelser heraf. Interviewet bliver af denne grund ikke anvendt i analysen af observationerne. I stedet bruges interviewet til at beskrive organisationen MSG i afsnit 1.1 og som en del af diskussionen i afsnit 8, som viser et eksempel på, at interview og realitet ikke nødvendigvis stemmer overens.

5.5 Behandling af data

Efter udarbejdelsen af den matematiske og didaktiske a priori analyse samt analysen af undervisningsmaterialer kunne analysen af observationerne ud fra teorien om didaktiske situationer påbegyndes.

Beskrivelsen af undervisningen blev først delt op i to dele efter undervisningsmodulerne, hvilket gav en noget overfladisk beskrivelse. For at kunne bruge beskrivelsen til at undersøge de didaktiske kontrakter, er et dybere detaljeniveau påkrævet. Derfor blev analysen inddelt efter læreplanen, der er opdelt efter de forskellige aktiviteter.

Beskrivelsen af disse episoder indeholder både skriftligt afleverede opgaver, der er med til at belyse mikrokontrakterne, og en del samtaler både indbyrdes mellem eleverne og mellem eleverne og læreren. Disse samtaler er relevante i forbindelse med beskrivelsen af såvel mikro- som mesokontrakt, da de er med til at vise, hvordan eleven forholder sig til de enkelte dele af det matematiske indhold, og hvordan samspillet mellem lærer og elev er i løsningsprocessen. Desuden spiller de en vigtig rolle i at undersøge eventuelle Topaze-effekter samt udnyttelsen af det adidaktisk potentiale i ISD.

Som beskrevet ovenfor i afsnit 5.3 er samtlige samtaler ikke transkriberet, men derimod valgt ud fra observationsnotaterne og de steder i undervisningen, hvor der ifølge a priori analysen kunne opstå didaktiske forhindringer.

Beskrivelsen er indeholdt i analysen ved, at hver episode kort gengiver læreplanen, herefter beskrives det observerede så objektivt som muligt og dernæst analyseres episoden ud fra de forudgående a priori analyser, analysen af undervisningsmaterialet og observationen ved brug af teorien om didaktiske situationer.

I analysen af anden observation handler nogle af episoderne om elevernes arbejde med opgaver, som ikke indgår i eller er forudsættende for undervisningen, og om læsefaser, hvor hverken elev eller lærer kommunikerer. Disse episoder er kun beskrevet kort og ikke analyseret. Dette skyldes, at ikke er muligt at vide, hvilke tanker eleven gør sig i læsefaserne, og dermed beskrive den didaktiske kontrakt. Fravalget af opgaver er begrundet i afsnit 5.2.

Eleverne er nummereret i de enkelte transkriberinger, men nummereringen er forbeholdt de enkelte dele. Det vil sige, at eksempelvis E1 i den ene samtale ikke nødvendigvis er den samme E1 i en senere samtale. Dette har været nødvendigt, da det er vanskeligt at afgøre, hvem stemmen tilhører på diktafonoptagelsen og det ikke fremgår af observationsnotaterne.

5.6 Sprog og oversættelse

Da alt data oprindeligt er skrevet på tysk, er en stor del af det oversat til dansk. Det matematiske sprog kan være vanskeligt at oversætte eksakt. Derfor er der i de tilfælde, hvor oversættelsen er ændret i betydningen eller hvor der er flere mulige oversættelser, tilføjet en fodnote med den egentlige betydning eller de andre muligheder, så læseren har mulighed for at komme så tæt på det oprindelige sprog som muligt.

Oversættelsen er så tæt på de oprindelige formuleringer som muligt, hvilket kan resultere i, at sproget virker tungere på dansk end det oprindeligt er på tysk, men til gengæld mindskes risikoen for at ændre betydningen heraf.

Læreren omtales som hunkøn, mens eleverne omtales som hankøn uanset om der er tale om en pige eller dreng. Derigennem opnås et bedre sprog ved brug af personlige stedord, såsom hun og han, fremfor læreren og eleven.

6 Undervisningsmaterialer

Den eksterne didaktiske transposition er ofte underlagt en række krav fra officiel side som eksempelvis formål, indhold og prøveform. Disse krav ændres, når transpositionen går fra videnskabsfaglig viden til undervisning i MSG i stedet for at gå til de institutionelle rammer, som skolerne er underlagt. Men organisationen MSG er styret fra både officiel side og universitetet med et krav om, at det matematiske indhold ikke må gå ind og foregribe indholdet i skoleundervisningen.

Ifølge den officielle læreplan for 8. klassetrin i Berlin udarbejdet af LISUM (2006) har eleverne kendskab til lineære funktioner såvel algebraisk som grafisk. Herfra går eleverne videre til kvadratiske, trigonometriske og eksponentielle funktioner på 9. og 10. klassetrin. Dermed er brudte lineære funktioner et område indenfor funktioner, hvor eleverne får mulighed for at udvide funktionsbegrebet ved brug af skoleviden, men uden at gribe ind over kommende skoleviden.

Ud fra den matematiske og didaktiske a priori analyse vil analyseres undervisningsmaterierne, der består af (dele fra) et notesæt (vedlagt i bilag A.1) og udvalgte opgaver fra arbejdsblad 2 (vedlagt i bilag A.2). Ud over materialernes rolle i den eksterne didaktiske transposition, indgår de som en del af det didaktiske miljø. Lærers plan vigtig i den efterfølgende analyse og gengives her som afrunding af afsnittet.

6.1 Notematerialet

Første noteafsnit² omhandler definitioner og betegnelser for funktioner. Det matematiske sprog er stringent og på et universitetslignende generelitetsniveau. I afsnit 3.1 blev Ebbe Thue Poulsen citeret med sin intuitive præsentation af begrebet funktion, som en introduktion for førsteårsuniversitetsstuderende. Derimod introduceres niende klassetrin indenfor MSG's rammer således: „*En funktion er en entydig afbildning af en mængde X i en anden mængde Y* “. Således forudsættes kendskab til begrebet afbildning modsat kendskab til begrebet forskrift, som set hos Poulsen. I samme abstraktionsniveau og uden eksempler defineres begreberne: *Billede, Urbillede, definitions- og værdimængde, injektiv, invers funktion, sammensætning af funktioner og identisk funktion*.

I begrebsudvidelsen fra lineære funktioner til brudte lineære funktioner viste den didaktiske a priori analyse en markant ændring indenfor begreberne definitions- og værdimængde. Med udgangspunkt i funktioner som afbilder mellem mængder bestående af reelle tal, afbildes størstedelen af brudte lineære funktioner (nemlig dem med $c \neq 0$) ikke i hele $\mathbb{R}$, mens lineære funktioner såvel defineres for og rammer alle reelle tal. Men begreberne defineres kun i generelle termer og bliver ikke brugt i resten af afsnittet om funktioner. Denne manglende

²Tekstafsnit i notesættet betegnes noteafsnit, således at der ikke er tvivl om der henvises til et afsnit i noterne eller et afsnit i specialet.

eksemplificering fratager begreberne deres betydning i forhold til brudte lineære funktioner, på trods af de muligheder, som de indeholder i denne forbindelse. Når de alligevel er medtaget, skyldes det formentlig en tradition indenfor indføring af funktioner i universitetsverdenen, hvor man sjældent kommer udenom begreberne definitions- og værdimængde. Ligeledes nævnes begreberne billede og Urbillede uden at blive taget op i de følgende noteafsnit.

Derimod er injektivitet nødvendigt for at definere den inverse funktion, som bliver taget op i noteafsnit 1.2.5. Sammensætning af funktioner og den identiske funktion er nødvendige for at betragte mængden af brudte lineære funktioner som en gruppe jf. afsnit 2.1.2. Disse begreber bliver eksemplificeret ved hjælp af de kommende afsnit om brudte lineære funktioner.

Noteafsnittet om definitioner og betegnelser for funktioner indeholder ingen eksempler, hvilket kan gøre det svært for niende klasses elever at arbejde med, selv om man antager en matematisk modenhed gennem deres interesse for matematik og den beståede optagelseprøve for at deltage i MSG.

Herefter defineres de brudte lineære funktioner i noterne. Først ved forskriften

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0$$

og herefter ved kvadruplen af reelle tal (a, b, c, d) , som bemærkes ikke at definere de brudte lineære funktioner entydigt, idet (a, b, c, d) og (ka, kb, kc, kd) for $k \in \mathbb{R}$ definerer den samme brudte lineære funktion.

I definitionen af forskriften betragtes netop den omtalte afbildning fra forrige introducerende afsnit. Her ville det være muligt at gennemgå definitions- og værdimængde for funktionen og dermed skabe et billede af funktionen som en afbildning mellem disse mængder, men dette udelades i noterne.

Den anden definition er en anden måde at betragte mængden af disse funktioner analogt med relationen til matricer som i afsnit 2.1.3. Men kvadruplen giver ikke samme muligheder for at betragte sammenhænge mellem de forskellige repræsentationer såsom matrix multiplikation og sammensætning af brudte lineære funktioner.

Derefter følger eksempler på særtilfælde af brudte lineære funktioner. Først de lineære funktioner, når $c = 0$ og $d = 1$, dvs.

$$f(x) = \frac{ax + b}{0x + 1} = ax + b.$$

Her er der mulighed for at uddybe, idet $d = 1$ er en unødvendig betingelse for at f er lineær, da

$$f(x) = \frac{ax + b}{0x + d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

ligeledes er lineær. Men ved at sætte $d = 1$ opnås et udtryk, som eleverne direkte genkender fra skoleundervisningen om lineære funktioner.

Dernæst betragtes den identiske funktion $f(x) = id(x) = x$ ved tuplen $(1, 0, 0, 1)$ og invers funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ ved tuplen $(0, 1, 1, 0)$. Tuplerne fungerer som opstilling for parametrene a, b, c, d , men bidrager ellers ikke til en udvidet forståelse af brudte lineære funktioner. Matrixrepræsentationen kunne, under forudsætning af elevernes kendskab hertil, bruges som repræsentation, hvor identiteten er

$$id(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og den inverse} \quad \frac{1}{x} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det første konkrete eksempel kommer i det følgende noteafsnit, hvor grafen for en brudt lineær funktion med $\Delta > 0$ er vist, efterfulgt af en liste med skæringspunkter og asymptoter samt grafen for på en brudt lineær funktion med $\Delta < 0$. Det bemærkes, at $c \neq 0$, men ellers fremstår graferne, som både indeholder funktionen, asymptoterne, skæringspunkter og den inverse funktion, uden yderligere forklaringer.

Det er således overladt til den interne didaktiske transposition at formidle disse grafer herunder resultatet fra sætning 5, der viser, at grafen er en ret linje for $c = 0$, og at for $c \neq 0$ er retningen for kurvenes grene bestemt af fortegnet for Δ . I afsnit 3.4 blev den brudte lineære funktion f forskudt til

$$g = \frac{-(ad - bc)}{c^2 x},$$

hvormed det blev vist, at grafen for brudte lineære funktioner med $c \neq 0$ er en forskudt og skaleret hyperbel. Dette nævnes ikke i noterne.

Bestemmelse af skæringspunkter og asymptoter overlades til opgave 2.4, hvilket virker rimeligt for skæringspunkterne, idet beregning af skæringspunkter kan antages kendt fra arbejdet med lineære funktioner. Derimod besidder lineære funktioner ingen asymptotiske egenskaber og dermed kan man ikke ud fra de officielle læreplaner forvente et kendskab til bestemmelse af asymptoter. Asymptoterne beskrives således i noterne (se bilag A.1):

Følgende særlige rette linjer bemærkes ved grafen for funktionen:

$$\text{Lodret asymptote (Nulpunkt for nævneren)} \quad x = -\frac{d}{c}$$

$$\text{Vandret asymptote (Linje, hvor begge grene nærmer sig)} \quad y = \frac{a}{c}$$

På dansk giver ordene vandret og lodret en intuitiv idé om de asymptotiske forhold, som også opnås ved at betragte forskriften for asymptoterne. Men på tysk kaldes den lodrette asymptote for *Polstelle* og den vandrette for *Asymptotik*, hvilket ikke giver samme fornemmelse for de asymptotiske egenskaber. Beskrivelsen af den vandrette asymptote, som den linje grenene af grafen nærmer sig, giver et indtryk af begrebet, men det ligger langt fra beskrivelsen i afsnit 3.3 ved beregning af grænseværdier. Simplificeringen er nødvendig på dette klassetrin, da

grænseværdibegrebet både er abstrakt og omfangsrigt at gennemgå samt unødvendigt i dette tilfælde, da de asymptotiske forhold består af en vandret og lodret asymptote, der ud fra funktionens forskrift kan defineres generelt. Men en beskrivelse af, hvad der præcis menes med, at grenene nærmer sig den rette linje, ville være med til at opbygge et fornemmelse for de asymptotiske egenskaber, såsom at grafen kommer uendelig tæt på asymptoten, men aldrig skærer den.

Næste noteafsnit 1.2.5 handler om den inverse funktion til en brudt lineær funktion. Først isoleres x i ligningen

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = y \quad \text{dvs.} \quad x = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Derfra konkluderes, at den inverse funktion er

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}.$$

Der foretages altså et variabelskift fra ligningen til funktionsforskriften, hvilket stiller krav til elevernes opfattelse af begrebet funktion. Typisk er en funktion afhængig af en variabel x med funktionsværdien y , hvilket kan begrunde variabelskiftet. Men opfattes variablerne som $x \in X$ og $y \in Y$ med $f : X \rightarrow Y$ og dermed med $f^{-1} : Y \rightarrow X$, er betegnelserne misvisende. Der er altså et behov for at bruge begreberne definitions- og værdimængde samt billede og Urbillede, således at valget af variabel er tydeligt, men noterne bemærker slet ikke variabelskiftet.

I samme sætning, som den inverse funktionen defineres, bemærkes at den inverse funktion også er en brudt lineær funktion med samme $\Delta = ad - bc$. Dette resultat er vigtigt i det efterfølgende afsnit, hvor mængden af brudte lineære funktioner udstyret med sammensætning udgør en gruppe, hvori invers elementer skal være indeholdt.

Herefter beskrives de grafiske egenskaber for den inverse funktion således: *Skæringspunkt med x-aksen og den lodrette asymptote for $f(x)$ danner skæringspunkt med y-aksen og den vandrette asymptote for $f^{-1}(x)$.* Denne sætning indeholder en del informationer, som ikke fremtræder umiddelbart. Sætningen er tung at læse og en listeform med skæringspunkter og asymptoter ville skabe et bedre overblik, idet det ville være muligt at sammenligne listerne for henholdsvis funktionen og dens inverse. Derefter vil ovenstående beskrivelse af relationen mellem dem udgøre en sammenfatning af denne sammenligning og dermed kunne rumme denne mængde af kompakte informationer.

Efterfølgende noteafsnit 1.2.6 viser, hvordan to funktioner sammensættes ved at tage to brudte lineære funktioner beskrevet i generelle termer. Med en enkelt mellemregning opnås en formel for sammensætningen af brudte lineære funktioner. Det bemærkes, at dette igen er en brudt lineær funktion, hvilket tydeligt ses

i det opskrevne resultat, men værdien for Δ omtales ikke, men som det fremgår af sætning 6 i afsnit 2.1.2, er $\Delta \neq 0$ for den sammensatte funktion.

Noteafsnit 1.2.7 handler om de algebraiske egenskaber for sammensætning af funktioner. Først bemærkes, at sammensætning af brudte lineære funktioner forbliver i mængden af brudte lineære funktioner (betegnet R i afsnit 2.1.2). Herefter sammenlignes mængden med $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ med en bemærkning om, at $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ er kommutativ imodsætning til $(R, \circ)$. Dette understøttes af et eksempel med to konkrete brudte lineære funktioner.

Sammenligningen mellem $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ og $(R, \circ)$ fortsætter i definitionen af neutralelementet, hvor multiplikation med 1 svarer til sammensætning med den identiske funktion $id(x) = x$, som i noteafsnit 1.2.1 vises at tilhøre R . Ligeledes sammenlignes inverselementerne og de to begreber indføres i første omgang ved hjælp af deres egenskaber. I noterne defineres herefter en gruppe således: *En mængde X , i hvilken en relation $\cdot$ er defineret, som har følgende egenskaber:*

1. $x, y \in X \implies x \cdot y \in X$.
2. *Der eksisterer et neutralelement e med $x \cdot e = e \cdot x = x$.*
3. $x \in X \implies$ *Der eksisterer et inverselement x^{-1} med $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$*

kaldes en gruppe.

Den første betingelse sikrer, at relationen ikke rammer udenfor mængden, hvilket er en vigtig betingelse for definitionen af en gruppe, men som er fastlagt gennem definitionen af en relationen ved $\cdot : X \times X \rightarrow X$ (Thorup (2005, s. 39)). Ovenstående definition mangler en vigtig betingelse i definitionen af en gruppe - nemlig associativiteten, som sikrer at parenteser er unødvendige. Eksempelvis er gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ associativ, mens $(\mathbb{Z}, -)$ ikke er en gruppe, da subtraktion ikke er associativ: $2 - (4 - 1) = -1 \neq -3 = (2 - 4) - 1$. Det er altså en decideret fejl i noterne at udelade associativiteten i definitionen.

Herefter defineres kommutativitet ved $x \cdot y = y \cdot x$ for grupper, men allerede i det konkrete eksempel er det vist, at sammensætning af brudte lineære funktioner ikke er kommutativ. Kommutativiteten eksemplificeres med gruppen af positive rationale tal undtaget nul med multiplikation som relation ligesom de øvrige begreber. *De brudte lineære funktioner udgør en gruppe med hensyn til sammensætning* er sammenfatningen af sammenligningen med de positive rationale tal og den ufuldstændige definition. Det ville skabe et bedre overblik at samle betingelserne for, at brudte lineære funktioner udgør en gruppe, fremfor at sammenligne med $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$.

Sammenligningen med de positive rationale tal og brudte lineære funktioner går så vidt, at potensreglerne for brudte lineære funktioner defineres ved

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= id(x) \\ f^{(1)}(x) &= f(x) \\ f^{(2)}(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (f \circ f^{n-1})(x) = f(f^{n-1}(x)), \end{aligned}$$

hvor der er en slåfejl i noterne, så der i stedet står $f^{(n)}(x) = f(f^{-1}(x))$, som giver den identiske afbildning. Det er altså en fejl, som er vigtig at bemærke. Særligt i optræden med grupper, hvor der er risiko for at fejlfortolke potenserne af de brudte lineære funktioner som elementer i en cyklisk gruppe $\langle g \rangle$ af orden n med $g^n = e$.

Sidst i afsnittet kaldes de brudte lineære funktioner med $\Delta > 0$ for positive og dem med $\Delta < 0$ for negative. Sammensætningen af to brudte lineære funktioner f, g giver jf. afsnit 2.1.2 at $\Delta = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) = \Delta_f\Delta_g \neq 0$. Således vil sammensætningen af to positive brudte lineære funktioner være positiv, to negative vil være positiv og en positiv sammensat med en negativ vil være negativ ligesom for rationale tal.

Sammenligningen med en gruppe, hvis elementer er tal, er oplagt, da tal er kendte størrelser. Men de positive rationale tal er ikke en umiddelbar naturlig mængde at vælge ud til at introducere et nyt begreb. I stedet ville de hele tale tal udstyret med addition være et godt eksempel på en gruppe med en talmængde, som endda ikke er et legeme, da gruppens egenskaber er tydelige: associativiteten, neutralelementet 0 og inverselementer som til $z \in \mathbb{Z}$ er $-z$. Desuden skiftes mellem de to grupper, $\mathbb{Q}_+$ og R , i argumenterne for, at de besidder gruppeegenskaberne, hvilket (udover fejlen i ikke at vise associativiteten) kan virke uoverskueligt.

6.2 Opgavesamlingen

I opgavesamlingen er opgaverne inddelt i følgende kategorier: 1. *forberende til olympiaden*, 2. *øvelse i det aktuelle område*, 3. *forberende til nyt område* og 4. *vigtig og tilbagevendende opgave*. I analysen fokuseres på opgaver relateret til emnet brudte lineære funktioner, hvilket svarer til kategori 2, da arbejdsblad 2, som indgår i mine observationer, ikke indeholder nogen kategori 3-opgaver og kategori 4-opgaverne, der er relevante indenfor området brudte lineære funktioner.

Opgave 2.1 handler om at bestemme en lineær funktion $f(x)$, som har værdien 3 for $x = 2$ og værdien 28 for $x = -3$, som generaliseres i opgave 2.2, der går ud på at bestemme en lineær funktion $f(x)$, som har værdien y_1 for $x = x_1$ og værdien y_2 for $x = x_2$.

Som nævnt ovenfor forventes et kendskab til det lineære funktionsbegreb fra skoleundervisningen og opgaverne går dermed ud på at genopfriske denne viden. I første opgave har eleverne to konkrete punkter, som kan bruges til at beregne hældningskoefficienten med. Derefter kan man finde skæringspunktet med y -aksen ved at indsætte det ene punkt i den generelle formel for lineære funktioner $y = ax + b$.

I den generelle opgave afprøves elevernes dybere indsigt i de grundlæggende egenskaber i at bestemme en lineære funktion ud fra to punkter. Da eleverne ikke er i besiddelse af skolebøger, kræver opgaverne, at eleverne kan nå frem til den nødvendige viden uden hjælpemidler.

Således sikrer og kontrollerer opgaverne, at den forventede viden om lineære funktioner er gammel viden, hvilket skaber grundlag for den udvidelse af funktionsbegrebet, der er planlagt med indførelsen af brudte lineære funktioner.

Opgave 2.1 kan også løses ved at opstille følgende ligningssystem og indsætte de givne værdier i $ax + b = y$:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 3 \\ a(-3) + b &= 28. \end{aligned}$$

Systemet kan løses med substitutions- og lige-store-koefficienters-metoden samt ved hjælp af Cramers formel (også kaldet determinant-metoden). Dermed fås værdier for hældningen a og skæringen med akse b , hvilket giver den ønskede funktion $f(x) = -5x + 13$. Opgave 2.2 kan ligeledes løses ved hjælp af ligningssystemer.

Opgave 2.3 handler om at bestemme skæringspunkterne med akserne, asymptoter og den inverse funktion for den brudte lineære funktion

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$$

og tegne den for $0 < x < 6$. I noterne har eleverne kun betragtet to eksempler på brudte lineære funktioner i grafisk form og dermed har eleverne endnu ikke arbejdet med det algebraiske udtryk for brudte lineære funktioner. I noteafsnit 1.2.3 indeholder der en liste med formler for skæringspunkter og asymptoter, mens formelen for den inverse funktion er at finde i afsnit 1.2.5. Hvis eleverne vælger at definere parametrene a, b, c, d i deres funktion, er opgaven løst at sætte ind i et formeludtryk. Dette gør dem opmærksomme på fortegnene, da den generelle formel er med plus foran b og d , mens opgaven er med minus. Dette sikrer, at eleverne har kendskab til disse formler og kan indsætte konkrete værdier, når den brudte lineære funktion er skrevet som divisionen af to lineære funktioner. Men opgaven kan også løses uden brug af disse formler ved at sætte hhv. $x = 0$ og $f(x) = 0$ for

at beregne skæringer med akserne, hvilket giver følgende udregninger:

$$y = \frac{3 \cdot 0 - 4}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{4}{5}$$

$$0 = \frac{3x - 4}{2x - 5} \Rightarrow 0 = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

For at eleverne kan bestemme grafens asymptotiske opførsel kræves som sagt kendskab til grænseværdibegrebet, hvilket ikke kan forudsættes i på niende klassetrin. Men da klassen er sammensat af elever, der har gennemført en optagelsesprøve og som er interesserede i matematik, kunne nogle eleverne have stiftet bekendtskab med begrebet grænseværdi. I så fald ville følgende grænseværdier bestemmes:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 4}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{4}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \frac{3}{2}$$

og

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f^{-1}(x) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{-5y + 4}{-2y + 3} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{-5 + \frac{4}{y}}{-2 + \frac{3}{y}} = \frac{5}{2}.$$

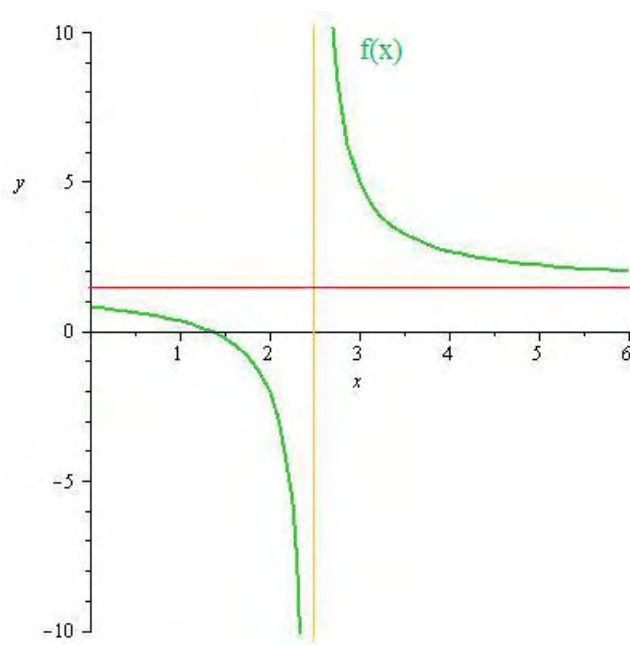
Det er væsentlig at have forstået de asymptotiske egenskaber for at kunne tegne grafen efterfølgende. Ved at bruge sætning 5 om grenenes retning, ville en skitse af tegningen være tydelig. For denne funktion er $\Delta = 3(-5) - (-4)2 = -7 < 0$, hvilket giver en hyperbel med grene vendt mod 1. og 3. kvadrant og som nærmer sig linjerne $x = \frac{5}{2}$ og $y = \frac{3}{2}$. Desuden kendes skæringspunkterne med akserne, hvilket i en skitse er nok til at få en fornemmelse af, hvordan den skalerede og forskudte hyperbel, som udgør grafens funktion, ser ud. For at opnå en mere præcis tegning uden brug af CAS, kan man udregne og indsætte en række punkter og ud fra disse punkter tegne grafen i det ønskede interval. Den forventede graf ses nedenfor i figur 6, hvor den grønne graf er for funktionen og den røde og gule linje er hhv. den vandrette og lodrette asymptote.

Ligesom i opgave 2.1 og 2.2 generaliseres opgave 2.3 i opgave 2.4, som lyder:
Bestem for den brudte lineære funktion

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

skæringspunkterne med akserne, asymptoter og invers funktion. Dog skal eleverne ikke tegne grafen. De didaktiske overvejelser er ens for opgaven, idet eleven enten 'bare' skriver formlerne fra noterne op eller vælger at løse den, hvormed resultaterne fra afsnit 2.1.1 opnås. Det ville være spændende, hvis eleverne skulle beskrive de grafiske egenskaber og kunne nå frem til resultaterne fra sætning 5 om grafens form. Selve beviset ville formentlig være for tidskrævende, men indsigten i, at fortegnet for Δ afgør hyperbelgrenenes retning, er interessant. Ligeledes

er det spændende at opdage, hvordan en brudt lineær funktion er en forskudt og skaleret udgave af funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$, som er et klassisk skoleeksempel på hyperbler. Når der ikke spørges til de generelle grafiske egenskaber, kan det være fordi, at et kendskab til hyperbler og funktionen g ikke er forudsat kendt af eleverne i starten af niende klasse jf. de officielle lærerplaner (LISUM (2006)). Desuden vil en introduktion gribe ind over den skoleundervisning, som eleverne modtager på 9. og 10. klassetrin, hvilket undgås i MSG-sammenhænge jf. afsnit 1.1.



Figur 6: Grafen for funktionen $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$ med asymptoter.

Opgave 2.5 handler om at finde de betingelser som hele tal a, b, c og d skal opfylde, for at løsningen af ligningssystemet (med hensyn til x og y)

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ cx + dy &= B \end{aligned}$$

for vilkårlige hele tal A og B altid er heltallig. Løsningen af ligningssystemet kan findes ved substitutionsmetoden eller ved determinantmetoden, som giver følgende løsning:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad D_x = \begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix} = dA - bB \quad D_y = \begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix} = aB - cA$$

og dermed er løsningen til ligningssystemet

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{dA - bB}{ad - bc} \quad \text{og} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{aB - cA}{ad - bc}.$$

Så hvis løsningen skal være heltallig, skal a, b, c, d opfylde betingelsen

$$ad - bc = \pm 1.$$

Opgaven kræver viden om løsning af to ligninger med to ubekendte, hvilket eleverne ifølge den officielle læreplan (LISUM, 2006) bør være bekendt med. Men brugen af de forskellige typer af variable og parametre gør det vanskeligere at gennemskue, at løsningen af ligningssystemet afhænger af variableerne x og y , mens løsningen af opgaven handler om betingelser for parametrene a, b, c, d . Derudover er parametrene A og B vilkårlige hele tal. Derfor kan man ikke opsætte betingelser for disse, som det er muligt for de øvrige parametre og variable, der indgår i løsningen.

6.3 Læreplaner

Her beskrives den af læreren udarbejdede læreplan for de to moduler.

Læreplanen for observation 1 omhandler temaet brudte lineære funktioner. Læreren ønsker, at eleverne skal lære følgende indholdsrelaterede kompetencer:

- at arbejde med begreberne *brudt lineær funktion*, *invers funktion* og *sammensætning*.
- at genkende sammenhængen mellem parametre og grafen for funktionen.

Af procesorienterede kompetencer ønskes en træning i elevernes evne til at læse og forstå matematiske tekster, mens de på det sociale plan lærer at arbejde sammen og formidle det matematiske indhold til hinanden.

16.15-16.25

I optakten til emnet rationale funktioner vil læreren gennemgå afsnit 1.1 ved at lade eleverne læse højt fra overheaden og afklare de begreber, som eleverne har spørgsmål til.

16.25-16.40

En gentagende fase, hvor opgave 1 og 2 om lineære funktioner løses gennem en klassediskussion, hvor to elever gennemgår opgaverne ved tavlen.

16.40-17.00

Arbejdsfase med det nye stof i afsnit 1.2.1-1.2.6 ved hjælp af tekststykker og tegnepapir i parvist samarbejde, hvor eleverne to og to taler om et tekstafsnit.

17.00-17.15

Fremlæggelse af det bearbejdede ved tavlen ved brug af overheads i en klassediskussion.

17.15-17.45

En træningsfase, hvor eleven selv skal arbejde med arbejdsblad 2 opgave 3-9, der afleveres skriftligt 17.45.

Læreplanen for observation 2 omhandler brudte lineære funktioner samt algebraiske aspekter for sammensætning af funktioner. De indholdsrelaterede kompetencer er:

- at konsolidere begreberne *brudt lineær funktion*, *invers funktion* og *sammensætning* ved at løse opgaver.
- at konsolidere kendskabet til sammenhængen mellem parametre og grafen for funktionen.

De procesorienterede kompetencer går ud på, at eleverne skal anvende tekstens indhold til at løse opgaverne. På det sociale plan lærer eleverne at løse problemer i fællesskab samt at bytte løsninger.

16.15-16.45

En øvelsesfase, hvor eleverne arbejder med alle opgaver fra arbejdsblad 3. Dette foregår som gruppearbejde med individuel aflevering.

16.45-17.15

En ekskurs i den højere algebra om grupper som algebraiske strukturer. Dette sker ved en powerpoint-præsentation gennemgået af læreren samt en styret klassediskussion.

17.15-17.25

Arbejdsfase med det nye indhold i afsnit 1.2.7 individuelt eller i samarbejde.

17.25-17.30

Fremlæggelse af det bearbejdede ved tavlen gennem en klassediskussion med mulighed for uddybning af spørgsmål.

17.30-17.45

En træningsfase, hvor eleverne enten i samarbejde eller individuelt arbejder med opgaver fra arbejdsblad 4, der er lektie til næste gang.

7 Analyse af data

I dette afsnit analyseres de to observerede undervisningsmoduler. Som beskrevet i afsnit 5 er analysen struktureret ved, at hver episode kort gengiver læreplanen, herefter en objektiv beskrivelse af det observerede og dernæst analyseres episoden. De indgående opgavebesvarelser er afskrevet i beskrivelsen, men kopier af besvarelserne findes også i bilag A.3.

Undervisningsmodul 1

Under observationen af episode 1 og 2 er der desværre sket en fejl i diktafonoptagelserne, hvorfor beskrivelse og analyse sker ud fra observationsnotaterne. Der er derfor ikke samme mulighed for at gå i detaljer i dialogen mellem lærer og elever, som i de efterfølgende episoder.

7.1 Episode 1

Ifølge læreplanen er der afsat ti minutter fra 16.15 til indføring i emnet *funktioner* gennem højt læsning af teksten i afsnit 1.1 fra overhead og afklaring af ukendte ord og begreber.

7.1.1 Observation af episoden

16.15-16.30: Eleverne ankommer og læreren deler elevernes rettede opgaver og løsninger ud, som eleverne kan se nærmere på hjemme. Hun læser resultaterne op og placerer eleverne på en pointskala.

Herefter en præsentationsrunde, hvor eleverne kort fortæller om deres baggrund. Elever kommer primært fra naturvidenskabelge gymnasier og er blevet opfordret til at deltage af deres matematiklærer.

Læreren finder en overhead med tekstafsnit 1.1 frem og beder eleverne læse en sætning højt skiftevis. Efter eleverne har læst sætningen op, spørger hun om indholdet er forstået. I 4. sætning om invers funktion og sammensætning spørger en elev om betydningen af kolonet før f i $f : X \rightarrow Y$, hvortil læreren forklarer, at det er en definition. Derefter forklares betydningen af cirklen i $h = g \circ f$, som står for sammensætning af funktioner. De sidste elever ankommer, hvilket skaber lidt uro. Oplæsningen af afsnit 1.1 fortsættes. Læreren spørger, om de har forstået afsnittet, hvilket giver anledning til følgende klassediskussion om begrebet sammensætning:

En elev siger, at der er meget han ikke forstår - især cirklen. En anden elev kommer på lærerens opfordring med definitionen, som læreren skriver på tavlen. Herefter kommer en tredje elev med følgende eksempel:

$$g(x) = 2x \quad f(x) = 3x.$$

Først får den spørgende elev mulighed for at løse opgaven, men han har ikke nogen forslag til løsningen. I samarbejde med klassen, når eleven ved tavlen frem til

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x.$$

Læreren spørger, om der er flere konkrete spørgsmål, hvilket ikke er tilfældet.

7.1.2 Analyse af episoden

Lektionen starter med en *institutionalisering* af begreberne:

billede, Urbillede, definitions- og værdimængde, injektivitet, invers, sammensætning og identiteten.

Som set i analysen af noterne i afsnit 6.1 er det matematiske sprogbrug universitetspræget, hvilket kan være vanskeligt for eleverne at personliggøre. Læreren forventning om, at eleverne er i stand til at spørge, om de for eleven vanskelige begreber og de manglende eksempler, er med til, at disse begreber restringeres til lineære funktioner, som er den type af funktioner, som eleverne har kendskab til i forvejen.

De begreber, som indgår i de næste afsnit, vil være med til at udvide elevernes funktionsbegreb, mens begreberne billede, Urbillede, definitions- og værdimængde ikke indgår i den senere udvidelse og dermed bliver den markante ændring, som vist i a priori analysen i afsnit 3, ikke tydelig. Særligt begreberne definitions- og værdimængde bliver interessante, når funktionsbegrebet udvides fra lineære til brudte lineære funktioner. Ved at udelade begreberne efterfølgende mister de betydningen og bliver dermed ikke personliggjort af eleverne.

Læreren opstiller altså en mikrokontrakt, som omhandler elevernes evne til at arbejde med disse (abstrakte) begreber gennem en oplæsning med en forventning om, at eleverne stiller spørgsmål, når de selv mener ikke at have forstået begreberne. Elevernes fralægger sig det ansvar, som mikrokontrakten indebærer, og bryder derigennem denne kontrakt. I stedet modificerer eleverne en mikrokontrakt, som betragter læsning af matematiske tekster som uvæsentligt i forhold til arbejdet med opgaver. Denne kontrakt accepteres af læreren og dermed opstår et didaktisk miljø, hvor eleverne læser op uden at forholde sig til de indgående begreber og læreren rutinemæssigt spørger, om disse begreber giver mening for eleverne.

Mikrokontrakten ændres i episoden med uddybelsen af sammensætning af funktioner (repræsenteret af $\circ$). Efter at have betragtet den generelle definition

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)),$$

går klassen videre og betragter et eksempel med sammensætning af to lineære funktioner. Dermed er udgangspunktet for opgaven en del af elevernes gamle viden om sammensætning af lineære funktioner, hvilket kunne danne baggrund for

et adidaktisk potentiale, som læreren kunne have benyttet i en klassesdiskussion om sammensætning af funktioner. Men da eleverne på dette tidspunkt kun har kendskab til lineære funktioner, idet de brudte lineære og andre funktioner først præsenteres i episode 2 eller senere i skoleundervisningen jf. den officielle læreplan, begrænses brugen af begrebet til at rumme sammensætning af lineære. Dermed kan læreren ikke bruge opgaven som udgangspunkt for en interaktiv syntese diskussion, der kunne institutionalisere det generelle begreb for sammensætning af funktioner.

Når mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden fra lærerens side indeholder en forventning om, at eleverne har kendskab til andre funktioner end de lineære og derigennem er i stand til at udvide begreberne, både dem som eksemplificeres senere og dem som fremstår uden eksempler, kan det skyldes elevernes forudsætning for at deltage i MSG - nemlig en særlig interesse og evne for matematik. Hermed afsluttes analysen af episode 1.

7.2 Episode 2

I tidsrummet 16.25-16.40 er en gentagende fase planlagt, hvor opgave 2.1 og 2.2 om lineære funktioner gennemgås i en tavlegennemgang af to elever samt en klassesdiskussion³.

7.2.1 Observation af episoden

16.30-16.35: Læreren vil give eleverne nogle konkrete eksempler og beder derfor eleverne om at løse opgave 2.1 og 2.2 ved tavlen. Nogle elever har forberedt sig hjemmefra og en af disse (E1) gennemgår frivilligt opgave 2.1. Opgaveteksten lyder: *Bestem en lineær funktion $f(x)$, som har værdien 3 for $x = 2$ og værdien 28 for $x = -3$.* Lad os betragte tre elevers besvarelse af opgaven, der blev afleveret skriftligt og som viser tre forskellige tilgange.

1.

$$f(2) = 3 \quad f(-3) = 28$$

$$\begin{aligned} 2y + z &= 3 \\ -3y + z &= 28 \end{aligned}$$

³Oversættelse af *Unterrichtsgespräch*, der betyder undervisningssamtale.

[En pil med et minustegn angiver, at ligningerne subtraheres.]

$$\begin{array}{rcl} 5y & = & -25 \\ y & = & -5 \\ z & = & 13 \end{array}$$

$$f(x) = -5x + 13.$$

2.

$$f(x) = mx + n \quad \leftarrow \text{generel formel}$$

$$\begin{array}{rcll} I : & 3 & = & 2m + n \quad | - n \\ II : & 28 & = & -3m + n \quad | - n \\ I' : & 3 - n & = & 2m \quad | : 2 \\ II' : & 28 - n & = & -3m \\ I'' : & \frac{3-n}{2} & = & m \\ II'' : & 28 - n & = & -3m \end{array}$$

$$I'' \text{ in } II' \quad \leftarrow \text{Indsætningsmetode}$$

$$\begin{array}{rcll} & 28 - n & = & -3 \left(\frac{3-n}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & 28 - n & = & \frac{-9-n}{2} \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & 56 - 2n & = & -9 + 3n \quad | + 2n \quad | + 9 \\ \Leftrightarrow & 65 & = & -5n \quad | : 5 \\ \Leftrightarrow & 13 & = & n \end{array}$$

$$n = 13 \text{ in } I$$

$$\begin{array}{rcll} & 3 & = & 2m + 13 \quad | - 13 \\ & -10 & = & 2m \quad | : 2 \\ & -5 & = & m \\ \rightarrow & f(x) & = & -5x + 13 \end{array}$$

3. Givet

$$\begin{array}{l} f_1(2) = 3 \quad P_1(2|3) \\ f_2(-3) = 28 \quad P_2(-3|28) \end{array}$$

Ønsket

$$f(x) = mx + n$$

I. Bestemmelse af m

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28 - 3}{-3 - 2} = -5 = m \\ \Rightarrow f(x) &= -5x + n \end{aligned}$$

II. Bestemmelse af n P_1 indsættes:

$$\begin{array}{rcl} f(2) & = & 3 = -5 \cdot 2 + n \\ & & 3 = -10 + n \quad | +10 \\ & & 13 = n \end{array}$$

$$f(x) = -5x + 13.$$

Både første og anden løsning opsætter et ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte. De klassiske metoder til at løse disse ligningssystemer er substitutionsmetoden og lige-store-koefficientersmetode, hvis man ikke benytter sig af matricer. Den første løsning benytter sig af lige-store-koefficientersmetode, men mangler nogle ord til at understøtte udregningerne. Den anden løsning bruger substitutionsmetoden og hvert enkelt skridt i processen forklares og mellemregninger medtages. Metoden bliver lidt tung i den forstand, at eleven ender med at arbejde med brøker. I udregningen af $-3\left(\frac{3-n}{2}\right)$ laver eleven en regnefejl, men fejlen rettes i den følgende udregning. Dermed kunne man tro, at mellemregninger ikke bruges af eleven, men opskrives som en del af løsningen for at vise hvert skridt i udregningerne.

Den tredje løsning bruger i modsætning til de to andre den gamle viden om lineære funktioner. Eleven ved, at m i formelen står for hældningskoefficienten og at denne kan beregnes ud fra to punkter for en lineær funktion, da den er konstant. Eleven er desuden bekendt med notationen Δ og bruger ikke 'bare' et formeludtryk. For at bestemme n indsætter han den fundne værdi for m og værdierne $(x, y) = (2, 3)$ i funktionsudtrykket, hvormed n hurtigt er bestemt. Denne løsning svarer til den, som bliver skrevet op på tavlen. Eleven ved tavlen forklarer, hvordan han bestemmer hældningskoefficienten ud fra to punkter og sætter det første punkt ind og isolerer værdien for skæringen med y -aksen. Læreren får eleven til at uddybe de forskellige trin i løsningsmetoden, således at fremgangsmetoden i løsningen er tydelig.

16.35-17.05: Ud fra løsningen af opgave 2.1 på tavlen, skal eleverne nu løse opgave 2.2, som er en generaliseret version af opgave 2.1. Ifølge læreplanen er der kun 5 minutter tilbage til gennemgangen, men det ender med at læreren bruger 25 minutter længere på denne episode.

Opgaveteksten for 2.2 lyder: *Bestem en lineær funktion $f(x)$, som har værdien y_1 for $x = x_1$ og værdien y_2 for $x = x_2$.* Eleven, som kommer til tavlen, har en løsningsidé, men vil gerne i samarbejde med klassen og læreren finde en bedre løsning. Først ændres benævnelserne fra gennemgangen af 2.1 til dem i 2.2, så der på tavlen står

$$P_1(x_1|y_1) \quad P_2(x_2|y_2) \quad f(x) = mx + n.$$

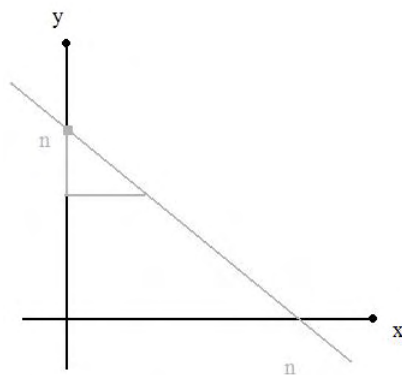
Læreren spørger, hvad man nu gør i forhold til det konkrete tilfælde. Eleven genkender hældningskoefficienten

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

og klassen når frem til

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + n.$$

Så spørger læreren, hvad n betyder. Eleven tegner en graf (se figur 7) og en anden elev kommenterer hurtigt, at det er skæring med akserne. Eleverne diskuterer



Figur 7: Elevens graf for at illustrere betydningen af n i $f(x) = mx + n$.

med hinanden, hvilken en af akserne, der er tale om. Eleven ved tavlen får først markeret n ved x-aksen, men klassen bliver enige om, at n må være værdien for skæringspunktet med y-aksen. Den indtegnede grå trekant overbeviser eleverne, da m nu genkendes som hældningskoefficienten. Klassen forsøger nu at bestemme n ud fra de givne værdier x_1, x_2, y_1 og y_2 . Ved at sætte P_1 ind i formelen og isolere n er eleverne nået frem til følgende på tavlen

$$\begin{aligned} y_1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}x_1 &= n \\ y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 &= n \end{aligned}$$

Eleverne forholder sig passivt. Læreren beder derfor eleven ved tavlen, om at sætte de fundne værdier for n og m ind i formelen $f(x) = mx + n$, hvilket giver

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Eleverne er stadig ikke tilfredse med løsningen og læreren spørger om udtrykket kan simplificeres, og om man kan sætte noget udenfor parentes. Eleverne regner

hver især og en elev foreslår at sætte $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ udenfor en parentes. De når frem til følgende formel, som alle er tilfredse med:

$$f(x) = (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1.$$

Eleven, som løste opgave 2.1 løsningsnummer 3, har løst opgaven som på tavlen, hvormed man med en vis sikkerhed kan antage, at løsningen er et afskrift. Eleven bag løsningsnummer 2 har prøvet at gennemføre den samme metode som i det konkrete tilfælde, men ender med lange brøker grundet fællesnævner og opgiver på grund af regnefejl. Derimod klarer eleven bag løsning 1 af 2.1 opgave 2.2 ved at bruge samme fremgangsmåde. Han skriver følgende, dog lidt rodet og med udstregninger:

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2$$

$$mx_1 + n = y_1$$

$$mx_2 + n = y_2$$

Mellem de to ligninger angiver en pil med et minustegn, at ligninger subtraheres. Eleven skriver uden mellemregninger

$$m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \quad | : (x_1 - x_2) \quad x_1 \neq x_2$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$n = y_2 - \frac{(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} x_2$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Først indsætter eleven værdierne for n og m i $mx_2 + n = y_2$, men indser i sit forsøg på at isolere y eller $f(x)$, at dette ikke er vejen frem. I stedet når eleven frem til, at

$$f(x) = mx + n$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_2 - \frac{(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} x_2 \\ &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_2) + y_2. \end{aligned}$$

Eleven afleverer denne løsning og er dermed bevidst om, at denne løsning er korrekt og ækvivalent med den løsning, som blev gennemgået ved tavlen. At de to løsninger er ens, ses i det symmetriske udtryk i de to variable.

7.2.2 Analyse af episoden

De indgående opgaver er løst i en *handlingssituation*, der dels finder sted, mens en elev opskriver opgaven på tavlen, og dels i episode 5. Nogle af eleverne kan have arbejdet med opgaverne hjemmefra. Som set i analysen af opgaverne i afsnit 6.2 er det primære formål at genopfriske elevernes gamle viden om lineære funktioner som forberedelse til indføringen af brudte lineære funktioner, som på dette tidspunkt ikke er defineret endnu for eleverne.

Læreren præsenterer opgaverne i undervisningen som eksempler på teorien, der blev gennemgået i episode 1. Men opgaverne handler ikke konkret om de begreber, som blev institutionaliseret. Denne viden om lineære funktioner bør elever have personliggjort og fællesgjort i de foregående skoleår ifølge den officielle læreplan, men læreren ønsker at institutionalisere disse begreber ved at bruge opgaverne som eksempler. For at denne institutionalisering skal finde sted, kræver det, at læreren stiller spørgsmålene til sammenhængen mellem begreberne og funktionerne i opgaverne, hvilket ikke sker. Dermed ender opgaverne med fungere som repetition af gammel viden.

Udover den elev, der opskriver opgave 2.1 på tavlen, løser eleverne opgave 2.1 og 2.2 uden indblanding fra læreren, bortset fra en bemærkning om at 2.1 ikke er videre interessant, da den i hendes øjne er for nem.

I den første løsning til opgave 2.1 opstiller eleven to ligninger med to ubekendte og løser dette ved at trække dem fra hinanden og derudfra finde en værdi for y og z . Der er ikke nogen forklaringer til metode eller løsning, hvilket kan tyde på, at læreren har ret i, at opgaven er for nem og eleven ikke personliggør nogen form for ny viden. Man kan ikke tale om et egentlig brud i mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden, da både lærer og elev accepterer at opgaven kun indeholder gammel viden, hvilket fra elevens side kommer til udtryk i de manglende forklaringer, der virker overflødige i forbindelse med opgaver, som for eleven er mere eller mindre rutinearbejde at løse.

Ligesom første løsning er den anden løsning bygget op som et ligningssystem fremfor at bruge funktionsegenskaberne for lineære funktioner. Mikrokontrakten kommer altså til at handle om løsning af ligningssystemer ved substitutionsmetoden, hvor eleven ender med at udføre en del ligningsmanipulation, som resulterer i regnefejl.

Den tredje løsning stemmer overens med den, som blev gennemgået ved tavlen. Løsningen anvender de lineære funktionsegenskaber og dermed er denne løsning, den som læreren ønsker at fremhæve. De to foregående løsningsmetoder bliver ikke inddraget i undervisningssituationen. Eleven ved tavlen fik først mulighed for at skrive opgaven op, mens resten af klassen kunne sætte sig ind i den. Opgave 2.1 kunne have dannet baggrund for en interessant overvejelse om hældningsbegrebet, der er konstant i dette tilfælde, for deraf senere at kunne diskutere hældningsbegrebet for brudte lineære funktioner jf. afsnit 3.2. Naturligvis er det ikke muligt tidsmæssigt at definere differentialregningen, men en intuitiv brug af

sekanter ville give en spændende udvikling af hældningsbegrebet.

Desuden arbejder eleverne ud fra en mikrokontrakt, om den skriftlige præsentation af matematiske opgaver. Både løsning nummer et og tre har en klar præsentation af, hvad der er givet og hvad der er ønsket. I tredje løsning opskrives dette eksplicit, men det fremgår implicit i første løsning, hvor de givne værdier opskrives i starten af opgaven. Denne mikrokontrakt er også gældende i tavlegennemgangen af opgaven.

I tavlegennemgangen af opgave 2.2, der er en *formuleringssituation*, er udgangspunktet som sagt opgave 2.1 og dermed er der ligeledes en mikrokontrakt om at angive de ubekendte, som her beskrives ved to punkter og det ønskede, som her beskrives ved en generel lineær funktion $f(x) = mx + n$.

Læreren spørger, hvad n betyder, hvilket ikke skaber brud i den didaktiske kontrakt, selvom denne overvejelse ikke er nødvendig for at løse opgaven (algebraisk). Der er altså en mesokontrakt om, at læreren kan stille spørgsmål udover opgaven til eleverne. Elevrepræsentanten tegner figur 7 af grafen for en lineær funktion og eleverne bliver enige om, at n er værdien for skæringen med en af akserne, men der er usikkerhed om hvilken en af dem. Det argument, som overbeviser klassen, er indtegningen af den grå trekant i figuren. Men denne kunne ligeså godt have været placeret med en side langs x-aksen fremfor langs y-aksen. Eleverne genkender figuren og kommer formentlig derigennem i kontakt med deres personlige viden om lineære funktioner. En anden mulighed er, at de indser at $f(0) = n$. Efter at have bestemt værdien for n går eleverne i stå og der foreligger en didaktisk kontrakt i dimensionen for fordeling af ansvar om, at læreren stiller spørgsmål til eleverne, når de er stille. I gennemgangen spørger og vejleder læreren således: *Hvad gør man nu i forhold til det konkrete tilfælde? Hvad betyder n ? Prøv at sætte m og n ind i formelen $f(x) = mx + n$. Kan udtrykket simplificeres? Kan man sætte noget udenfor parentes?* Læreren formulerer spørgsmålene, så de er meningsfulde for eleverne at besvare. Men når eleverne spørger efter vejledning, ses en risiko for Topaze-effekten, som hintet, om at indsætte værdierne m og n , er et tydeligt eksempel på. Dette kan skyldes forsinkelsen på 25 minutter i forhold til læreplanen.

En anden elev afleverer opgaven skriftlig og løser den ved at opstille et ligningssystem. Eleven er opmærksom på ikke at dividere med nul ved at antage $x_1 \neq x_2$. Herefter opskriver han kort, at hvis $x_1 = x_2$, så er $y_1 = y_2$. Eleven vil opfylde lærerens forventninger og dermed mikrokontrakten ved at opdele i to tilfælde. I det andet tilfælde rummer mikrokontrakten endvidere, at eleven forventer, at læreren ved, at når de to funktionsværdier er ens, så er de to x -værdier ens og dermed kan forskriften for den lineære funktion være alle lineære funktioner gennem punktet $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Efter gennemgangen af opgave 2.2 kunne læreren have stillet yderligere spørgsmål om, hvordan lineære funktioner kunne eksemplificere begreberne fra episode 1, ligesom i opgave 2.1. Episoden rummer altså et adidaktisk potentiale, men

læreren udnytter ikke dette til at skabe en interaktiv syntese diskussion. Hermed afsluttes analysen af episode 2.

7.3 Episode 3

I tidsrummet 16.40-17.00 er der planlagt en arbejdsfase med det nye stof i afsnit 1.2.1-1.2.6 ved hjælp af tekststykker og tegnepapir ⁴ i parvist samarbejde mellem eleverne om et tekstafsnit.

7.3.1 Observation af episoden

17.05-17.20: Læreren inddeler elever i tremandsgrupper (visse grupper dog kun en- og tommands) og giver hver gruppe et afsnit fra 1.2.1-1.2.6, som de skal forberede til 2 minutters tavlegennemgang for klassen. Elevene får et kvarters forberedelse, hvor de er fokuserede og både verbalt og kropsligt forklarer hinanden, hvad det matematiske indhold er. Læreren hjælper, når hun bliver spurgt, men primært arbejder grupperne selvstændigt med et matematisk samlingspunkt. Mine observationer under gruppearbejdet er forbeholdt gruppen, der arbejder med afsnit 1.2.5 om den inverse funktion for brudte lineære funktioner.

Jeg har ikke forstået noget som helst af det her! siger et gruppemedlem. Gruppen betragter udtrykket $f(x) = y$ i noterne. Den ene elev siger, at funktionsudtryk normalt er på formen $f(x) = 35,75x + 20 + \sqrt{3} + \dots$. En anden elev skærer igennem og siger, at det er det generelle udtryk, $f(x) = y$, for en funktion. Derefter går de igang med at efterregne ligningerne, som isolerer x i udtrykket

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = y.$$

Selve udregninger i noterne kan de følge, men de har besvær med at begribe, at den inverse funktion til $f(x)$ er

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}.$$

Gruppen diskuterer følgende:

E1: Det er vores resultat⁵!?

E2: Nej. Resultatet er noget helt andet. Det tror jeg i hvert fald. Resultatet er, at det her y på en eller anden måde gennem - men hvorfor er der så her på en eller anden måde x inde i parentesens med y , der kan jeg ikke sige. [...]

E3: Det skal vi ikke bruge.

⁴Direkte oversættelse af *Zeichenpapier*

⁵Oversat fra *Erkenntnis*, der egentlig betyder erkendelse eller indsigt.

E2: Jo, det skal vi.

Eleverne er dels i tvivl om, hvorfor y ombyttes med x i funktionsudtrykket for den inverse, dels i tvivl om, hvad de egentlig er noget frem til. Dette skyldes, at gruppen ikke har læst sætningen færdig, hvor det konkluderes, at den inverse funktion igen er en brudt lineær funktion med samme $\Delta = ad - bc$.

Gruppen går nu videre til at betragte graferne i 1.2.2 og 1.2.4 afbildet med grøn i noterne (se bilag A.1). De prøver at udlede betydningen af sætningen: *Skæringspunktet med x -aksen og den lodrette asymptote (pol) for $f(x)$ bliver til skæringspunktet med y -aksen og den vandrette asymptote for $f^{-1}(x)$.*

E1: Hvad ombytter man så... omformet til x .

E2: Her skal du udregne med x og her skal du udregne med y .

E3: Skæringspunktet?

E1: Vent lige. [Gruppen læser sætningen igen]

Her afbrydes gruppens diskussion af læreren, da hun uddeler præmier for tredje højeste pointstal til en elev i gruppen. Eleverne mister koncentrationen. Efter et par minutter vender de tilbage til graferne.

E1: Det er da nemt.

E2: Resultat? Injektiviteten måske?

E1: Nej, helt sikkert ikke. Nej, se her. Det er faktisk det samme på begge sider multipliceret med -1 . Man kan multiplicere begge sider med -1 - der [peger i noterne].

E3: Nåh, sådan - okay!

E1: Jeg forstår det ikke lige nu.

E3: Her har du ganske enkelt forlænget brøken med -1 .

E2: Præcis.

E3: Altså, det er resultatet. Har vi nu forstået det? Ja.

E1: Det vil jeg tro - forholdsvist.

E3: Og gengivelsen af den inverse funktion er den samme, bortset fra...

E2: Spejlingen i diagonalen.

E3: I diagonalen, som ikke skærer. Okay?

E2: Diagonalen.

Det virker altså som om, at gruppen har indset, at sammenhængen mellem grafen for en brudt lineær funktion og dens inverse er spejling af hinanden i diagonalen. Men deres diskussion fortsætter således:

E1: Jeg tror, at det er ganske logisk sådan.

E2: Teoretisk.

E3: Vi er nød til at læse hele 1.2

E1: Hvad er vi nød til at gøre?

E3: Der - 1.2 er forudsætning for det hele.

Herefter forkaster gruppen deres ellers rigtige idé og begynder at læse afsnittet hver for sig indtil tiden er omme. Det er først i gennemgangen ved tavlen, som vi vil se nedenfor, at et gruppemedlem indser, at sammenhængen er korrekt og således bliver i stand til at give en sammenhængende præsentation.

7.3.2 Analyse af episoden

Læreren vælger at overlade *institutionaliseringen* af afsnit 1.2.1-1.2.6 til eleverne ved at fordele et afsnit til hver gruppe. Afsnit 1.2.1 er definition af og eksempler på brudte lineære funktioner, mens de næste afsnit omhandler:

2. Eksempel på grafen for en brudt lineær funktion med $\Delta > 0$.
3. Liste over særlige punkter og linjer såsom snitpunkter og asymptoter (med henvisning til graferne i 2. og 4.).
4. Eksempel på grafen for en brudt lineær funktion med $\Delta < 0$.
5. Den inverse funktion for brudte lineære funktioner (ligeledes afbildet på figurene med graferne).
6. Det generelle udtryk for sammensætning af to brudte lineære funktioner.

Afsnit 1 skal alle grupperne have kendskab til, mens afsnit 2, 3 og 4 overlapper hinanden indholdsmæssigt. Afsnit 5 indgår i afsnit 2 og 4, da grafen for den inverse funktion er indtegnet i figuren. Når notematerialet betragtes samlet er denne fordeling af indholdet ikke problematisk, da man antager, at læseren har læst indholdet kronologisk og kan sætte sig ind i de forskellige afsnit. Men når læreren foretager den interne didaktiske transposition uden at tage hensyn til afsnittenes indbyrdes overlap og forudsætninger, vil det skabe risiko for brud i en didaktisk kontrakt om, at 'opgaver' skal kunne løses. Dermed kan eleverne risikere at ramme en didaktisk forhindring i arbejdet med deres afsnit.

For gruppe 5 sker der et brud med mikrokontrakten om den didaktiske status af viden, da læreren ikke præsenterer de brudte lineære funktioner, der defineres i afsnit 1.2.1. Det forudsættes, at eleverne er i stand til at sætte sig ind i et afsnit uden at have haft mulighed for at se på de foregående afsnit. Bruddet kommer til udtryk i elevens kommentar, om ikke at have forstået noget som helst.

En af elevernes funktionsbegreb er restringeret til de lineære funktioner, hvilket kommer til udtryk i gruppens diskussion af betydningen for $f(x) = y$, hvor eleven giver et lineært funktionsudtryk som eksempel på en (for eleven) normal funktion. Eleven har dermed ikke personliggjort den viden, om definitionen af en funktion, som blev gennemgået i episode 1. Det har en af de andre elever i gruppen derimod, som accepterer det generelle funktionsudtryk, men ikke forklarer det til den elev i gruppen, der ikke har indset det.

Som analysen af gruppens tekststykke om inverse funktioner i afsnit 6.1 viste, har gruppen svært ved at begribe variabelskiftet mellem udregningen af den inverse funktion og dens forskrift. Gruppen er i tvivl om, hvad de er nået frem til og om variabelskiftet har nogen betydning for præsentationen af tekstafsnittet. Eleverne mangler at personliggøre den tilsigtede viden i institutionaliseringen af begrebet funktion herunder betydningen af en funktion som en afbildning mellem to mængder. De arbejder med en mikrokontrakt i dimensionen for det matematiske område om, at funktionen afbilder mellem de samme mængder, hvilket typisk gælder for lineære funktioner jf. a priori analysen i afsnit 3. Denne kontrakt brydes, når funktionsbegrebet udvides. Desuden vil den inverse funktion for $f : X \rightarrow Y$ afbilde modsat dvs. $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Men for at give eleverne et funktionsudtryk, som de har personliggjort, foretages et variabelskift, således at eleverne betragter $f(x)$ fremfor $f(y)$.

Eleverne ved ikke, hvad læreren forventer af resultater fra afsnittet. Resultatet om, at den inverse funktion for en brudt lineær funktion er en brudt lineær funktion med samme Δ , overses af eleverne. Enten får de fokuseret på variabelskiftet i funktionsudtrykket eller de finder det irrelevant, da brugen af denne viden, udover at være et interessant træk, først bliver tydelig i det senere afsnit om gruppen af brudte lineære funktioner. Elevernes usikkerhed om brugbare resultater tyder på et brud i mesokontrakten i dimensionen om fordeling af ansvar. Resten af gruppearbejdet viser flere brud på denne kontrakt, hvoraf det største brud sker til sidst, hvor en elev forkaster de fundne resultater og vil have, at gruppen skal læse hele det foregående afsnit. Denne elev arbejder dermed ud fra en didaktisk kontrakt om, at læsning af matematiske tekster kræver, at man starter fra begyndelsen af et afsnit, da afsnittene 1.2.1-1.2.4 er forudsætning for gruppens afsnit 1.2.5. Idet brudte lineære funktioner defineres i de foregående afsnit, har eleven ret i, at det er nødvendigt at have kendskab til indholdet. Her opstår der altså endnu et kontraktbrud i mesokontrakten, da eleverne ikke kan gennemarbejde deres tekststykke uden kendskab til de andre gruppers arbejde. I episode 4 vil overlappet mellem de øvrige gruppers afsnit blive taget op.

Gruppens diskussion af den inverse funktions grafiske egenskaber tager udgangspunkt i sætningen om ombytningen af skæringspunkter og asymptoter i forhold til grafen for den oprindelige funktion. Gruppen er stadig forvirret over betegnelserne for de variable og hvilke resultater, de egentlig søger. Ligesom for lineære funktioner, som eleverne har kendskab til, gælder det, at grafen for den inverse af en brudt lineær funktion vil være en spejling af den brudte lineære funktion i linjen $y = x$. Da linjen $y = x$ er indtegnet på de grafer, som grupperne betragter, må det formodes, at det er dette, som gruppen mener med spejling i diagonalen, selv om det ud fra gruppens samtale ikke er klart. E2 nævner i diskussionen, at et resultat kunne være injektivitet. Dette afvises af en anden elev, hvilket accepteres i gruppen efter argumentet med, at der står det samme på begge sider bortset fra fortegnet (Hvad eleverne præcis mener med begge sider er ikke tydeligt ud fra observationen). I episode 1 blev begrebet injektivitet netop bragt på banen for at kunne definere en invers funktion, men gruppen bruger ikke denne sammenhæng, med mindre det er det de prøver at forklare med -1 , hvilket endnu engang tyder på, at institutionaliseringen i episode 1 ikke har givet eleverne en personliggjort viden om de indgående begreber. Dette afslutter analysen af episode 3.

7.4 Episode 4

Fra 17.00 til 17.15 forventes fremlæggelsen af det bearbejdede indhold at finde sted. Dette sker ved en tavlegennemgang og brug af overheads understøttet af en klassediskussion.

7.4.1 Observation af episoden

17.20-17.31: Ifølge læreplanen er der begrænset tid til fremlæggelsen, da hver gruppe har omkring 2 minutter at fremlægge i. Forsinkelsen i forhold til læreplanen på 20 minutter medfører, at læreren skærer fremlæggelserne ned til en periode på ti minutter og dermed har hver gruppe under to minutter til at præsentere deres afsnit ved tavlen.

For gruppe 1 handler afsnittet om at vise, at lineære funktioner, identiteten og dens inverse $\frac{1}{x}$ kan beskrives ud fra definitionen af brudte lineære funktioner. Bortset fra at ændre notationen fra kvadrattuplerne

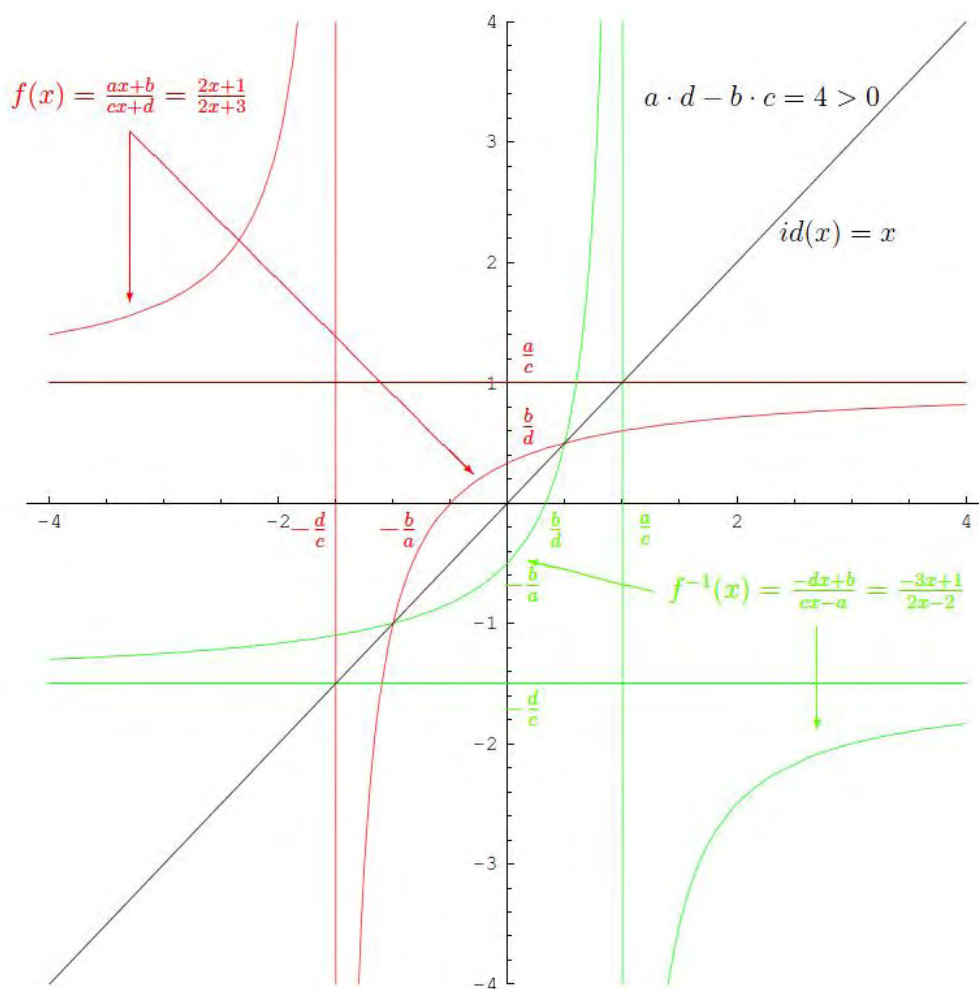
$$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1) \quad \text{til} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array} \right\} f(x) = x$$

skriver repræsentanten af fra noterne uden lærerens indblanding.

Repræsentanten fra gruppe 2, der skal beskrive grafen for en brudt lineær funktion med $\Delta > 0$, starter med at fortælle, at grafen for brudte lineære funktioner er en kurve og forklarer herefter:

E: Det er de enkelte parametre a, b, c, d delt med hinanden. $\frac{d}{c}$ denne linje [peger på overheaden] er parallel med y -aksen. Og $\frac{b}{a}$ danner også her en kurve. De danner [pause] også noget andet. Og der [peger igen] $x = x$ er det under grafen. Så ville der være flere grafer der.

Han er forvirret og læreren beder ham tage et andet folie og lægge ovenpå grafen fra afsnit 1.2.2 (se figur 8). Eleven ser ikke noget påfaldende og læreren spørger derfor klassen, hvilket starter følgende diskussion:



Figur 8: Grafen fra afsnit 1.2.2 i noterne (se evt. bilag A.1 side 3 for større figur), som vises på overheaden.

L: Er der noget i bemærker?

E1: Graferne er da spejlet eller?

E2: Nej åh! [Elev fra gruppe 5 indser formentlig sammenhængen mellem graferne for funktionen og dens inverse]

E1: Man kan sige, at funktionen $f(x) = x$ er spejlingsakse. Derigennem spejles de andre funktioner.

L: Hvorfor er det sådan?

E2: Jeg ville mene, at det er vores tema om inverse funktioner. Spejlingerne altså.

L: Vi ser således forskellige sammenhænge mellem de forskellige afsnit. Altså, hvad man også kunne gøre er at ombytte x- og y-aksen. Er der noget i bemærker? [stille] Hvordan ombytter man? Man drejer det simpelthen.

E3: [hviskende, svært at høre]

L: Når man bytter x- med y-aksen, så er graferne identiske. Tak, Erik (E3).

Den tredje gruppe læser nærmest højt fra noterne og efter at have defineret skæringspunktet med x -aksen siger hun: „*Som jeg dog ikke har forstået*“. Læreren beder eleven spørge klassen, hvordan skæringspunkterne bestemmes. Klassen er stille og læreren spørger, hvad det betyder at skære en akse. En elev siger, at man skal sætte x eller y lig med nul. Punkterne vises på grafen (se figur 8). Eleven går videre med de asymptotiske forhold, som forklares ved at vise dem på overheaden. Læreren spørger, om grafen skærer asymptoten. En elev i klassen svarer i det uendelige, hvilket en anden elev bekræfter. Læreren spørger, om alle er enige i det. En tredje elev siger *nej, for de nærmer sig, også i det uendelige nærmer de sig, men de skærer ikke hinanden*. Dertil svarer læreren: *Præcis, det er det fantastiske. Hvis de ville skære hinanden, så ville der stå nul i nævneren og det må der ikke*. Dette afslutter gruppens præsentation.

Gruppe fire skal gennemgå grafen for en brudt lineær funktion med $\Delta < 0$. De forklarer både skæringspunkter og asymptotiske forhold uden problemer, hvilket formentlig skyldes de to foregående fremlæggelser, hvor begge grafer og alle begreberne er blevet diskuteret.

Gruppe 5, der skal fremlægge afsnittet om brudte lineæres funktioners invers, fremlægger ved tavlen en kort sammenhængende præsentation uden lærerens indblanding, mens gruppe 6's fremlæggelse ender med at bestå af et afskrift af fra noterne af den generelle formel for to sammensatte brudte lineære funktioner. Han er stille under opskrivningen og da han spørger læreren, om han skal opskrive mellemregninger, svarer hun, at han bare skal skrive resultatet op. Det kommer ikke frem, at den sammensatte funktion også er en brudt lineær funktion.

7.4.2 Analyse af episoden

Fremlæggelserne ved tavlen udgør en *institutionaliseringssituation*, hvor det er grupperepræsentanten, som overtager institutionaliseringen for læreren.

Gruppe 1

Mikrokontrakten i dimensionen for det matematiske område går ud på, at eleven gennemgår noterne trin for trin med en lille ændring i notationen. Mesokontrakten for fordelingen af ansvar overlader alt ansvaret til eleven, hvilket accepteres af klassen. Lærerens rolle er observerende og konsekvensen heraf er, at eleven ikke formidler mere viden end den i noterne. Elevens evne til at personliggøre denne viden er svær at vurdere, da præsentationen mere eller mindre er et afskrift af noterne, som kan fremføres uden at have personliggjort den tilsigtede viden.

Analysen af noterne i afsnit 6.1 viste muligheden for at betragte de brudte lineære funktioner med $c = 0$ uden at forlange $d = 1$. Men læreren spørger ikke eleven, om hvilken rolle parametrene c og d spiller i forhold til om funktionen er lineær eller ej, hvilket kunne have bidraget til at vurdere, i hvor høj grad han havde personliggjort den fremlagte viden.

Gruppe 2

Ud fra præsentationen virker det ikke som om, at gruppen har formået at tilegne sig en personlig viden om den grafiske repræsentation af brudte lineære funktioner. Dette kan skyldes, at eleverne ikke har læst videre i noterne især afsnit 1.2.3 med listen af skæringspunkter med akserne samt asymptoter. Desuden indeholder figuren grafen for den inverse funktion, som indføres i afsnit 1.2.5. Eleven arbejder med en mikrokontrakt om, at de betegnelser som indgår på figuren skal nævnes såsom $\frac{d}{c}$, $\frac{b}{a}$ og $x = x$. Men eleven får både aflæst værdierne forkert og mangler en personlig viden fra episode 1 om begrebet identisk funktion, som han betegner $x = x$, selvom figuren betegner den med $id(x) = x$, hvilket svarer til $f(x) = y = x$.

Læreren modificerer dernæst det didaktiske miljø ved at betragte to på hinanden liggende overheads og involvere klassen i præsentationen. En elev bemærker, at spejlingen af den røde graf i $y = x$ giver den grønne graf, men for eleverne er dette grafer for forskellige funktioner. Her indser en elev fra gruppe 5, at deres resultat om spejling er rigtigt. Da læreren spørger om et argument for denne spejling, sker der et brud i mesokontrakten mellem gruppe 5 og læreren, idet eleverne forventede at afsnittene blev fremlagt disjunkt, hvilket jf. episode 3 ikke er muligt. Læreren går videre ved at få eleverne til at ombytte x- og y-aksen og indfører begrebet drejning af et koordinatsystem. Dette skaber i brud i kontrakten, som ses i elevernes manglende svar på lærerens spørgsmål udover en elev, som hvisker sit bud om identiske grafer. Det er ikke klart for eleverne, hvad læreren og E3 'drejer' og hvilken sammenhæng dette har med spejlingen, hvilket viser et brud i kontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden, hvor lærerens

forventninger er for høje.

Gruppe 3

Begrebet skæringspunkt antages læreren som gammel viden, men det virker på grupperepræsentanten som om, at denne viden er enten glemt eller forbeholdt lineære funktioner, hvilket resulterer i et brud på mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden. Elevens kommentar, om ikke at have forstået indholdet, viser en mesokontrakt, der accepterer at eleven fralægger sig ansvaret for at forklare det matematiske indhold om bestemmelse af skæringspunkter. I stedet for at overtage ansvaret, vælger læreren at ændre i det didaktisk miljø og involvere de øvrige elever, som bestemmer skæringspunkterne ved at sætte x og y lig nul i funktionsudtrykket ligesom i analysen af opgaverne i afsnit 6.2.

Der sker også et brud i mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden i forbindelse med begrebet asymptote. I a priori analysen 2.1.1 blev begrebet grænseværdi inddraget, men det ville ikke være strengt nødvendigt at indføre for at arbejde intuitivt med grafen for brudte lineære funktioner jf. afsnit 3.3. Læreren forventer, at eleverne besidder en intuitiv fornemmelse for at asymptoter aldrig skærer grafen, men nogle elever mener, at dette er muligt i det uendelige. En elev ved, at en asymptote nærmer sig grafen, men aldrig skærer. Hun uddyber endda sit argument med 'også i det uendelige nærmer de sig'. Læreren forklarer om, at hvis grafen skærer asymptoten, så vil nævneren være nul, forklarer kun den lodrette asymptote. Der kommer således ingen forklaring på den vandrette asymptote, hvilket kan skyldes, at læreren ikke kan komme med en kort forklaring, som i tilfældet med den lodrette. Læreren får dog formidlet de grafiske egenskaber for begrebet asymptote og udvider dermed begrebet i forhold til dets brug i noterne.

Gruppe 4

Indholdet for gruppens graf er i store træk blevet gennemgået af gruppe 2 og 3, hvilket har givet gruppen et godt overblik i deres præsentation af grafen med hensyn til skæringspunkter og asymptoter. Eventuelle brud i kontrakten under forberedelsen i dimensionen for den didaktiske status af viden kan derigennem være blevet forhindret.

Det ville her have været interessant, hvis læreren havde spurgt ind til forskellen mellem graferne for $\Delta < 0$ og $\Delta > 0$ og ledte eleverne til resultatet om grafens form i sætning 5 i afsnit 2.1.1. Når læreren ikke spørger ind til fremlæggelsen, kan det skyldes forsinkelsen i forhold til læreplanen.

Gruppe 5

Gennem de tidligere fremlæggelser har gruppen opnået indsigt og overblik for den inverse funktion og særligt dens grafiske egenskaber i fremlæggelsen ved gruppe 2. De fremlægger resultatet med den inverse funktion, hvor y ombyttes med x uden at nævne det variabelskift, som de foretager og som gjorde dem usikre i

forberedelsen.

Det er bemærkelsesværdigt, at gruppen hverken i forberedelsen eller i fremlæggelsen kommer ind på begrebet injektivitet, da funktionen kun har en invers, når den er injektiv. Dette tyder igen på, at læreren i højere grad vil overholde læreplanen fremfor at lade eleverne gå i dybden med de begreber, der institutionaliseres.

Gruppe 6

På lærerens opfordring skriver gruppens repræsentant udregningerne af den sammensatte funktion op. Dette er et brud på mesokontrakten om, at eleverne skal forklare, hvad de skriver på tavlen. Kontrakten er bevidst i klassen i form af et forbud mod silent movie, som dækker over opskrivning uden ord.

Det bliver ikke fremhævet, at sammensætningen giver en ny brudt lineær funktion, selvom dette resultat er essentielt for, at mængden af brudte lineære funktioner udgør gruppe. Dette kan skyldes det førnævnte tidspres grundet forsinkelsen og at læreren vælger at institutionalisere denne viden næste gang, hvor gruppebegrebet indføres.

Her afsluttes analysen af episode 4.

7.5 Episode 5

Ifølge læreplanen er tidsrummet 17.15-17.45 en træningsfase, hvor eleven individuelt skal arbejde med arbejdsblad 2 opgave 3-9, der afleveres skriftligt 17.45.

7.5.1 Observation af episoden

17.31-17.50: Læreren beder eleverne om enkeltvis lave en opgave fra arbejdsblad 2 til aflevering, som træning til olympiaden. Først snakker eleverne sammen, men læreren påpeger, at opgaven skal løses på egen hånd. En elev løser hurtigt en opgave, hvormed læreren prøver at skabe en konkurrence stemning, om hvem der kan løse flest opgaver og dermed opnå flest points. Opgave 2.1 og 2.2 kan ikke vælges, da de er for nemme (idet de er gennemgået ved tavlen tidligere). Dog vælger fire elever alligevel at aflevere dem. I alt kan eleverne vælge mellem ni (reelt syv) opgaver, hvoraf de første fem hører til emnet om brudte lineære funktioner, mens de sidste fire er fra matematikolympiaden. Lad os betragte elevernes arbejde med opgave 2.3, 2.4 og 2.5 (jf. afsnit 5.2).

2.3 Bestem for den brudte lineære funktion

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$$

skæringspunkterne med akserne, asymptoter og invers funktion og tegn den for $0 < x < 6$.

1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3x-4}{2x-5} \\
 x &= -\frac{b}{a} \quad y = \frac{b}{d} \quad \text{Vandret asymptote} = y = \frac{3}{2} \\
 &= -\frac{4}{3} \quad = \frac{4}{5} \quad \text{Lodret asymptote} = x = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Skæringspunkt *Skæringspunkt*
på x-aksen *på y-aksen*

2. $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$ Brudt lineær funktion: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Skæringspunkt med x-aksen: $x = -\frac{b}{a} \rightarrow y = 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 = \frac{ax+b}{cx+d} \mid \cdot (cx+d) \\
 0 &= ax+b \mid -b \\
 -b &= ax \mid : a \\
 -\frac{b}{a} &= x \\
 \underline{\underline{\underline{a}}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{+4}{3} = \underline{\underline{\underline{\frac{4}{3}}}}$$

Skæringspunkt med y-aksen: $y = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow x=0 \quad f(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{-4}{-5} = \underline{\underline{\underline{\frac{4}{5}}}}$$

Vandret asymptote: $y = \frac{a}{c} \rightarrow \underline{\underline{\underline{\frac{3}{2}}}} = y$

Lodret asymptote: $x = -\frac{d}{c} \rightarrow \underline{\underline{\underline{\frac{5}{2}}}}$

Tegningen af funktionen ses i figur 9.

3. $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$

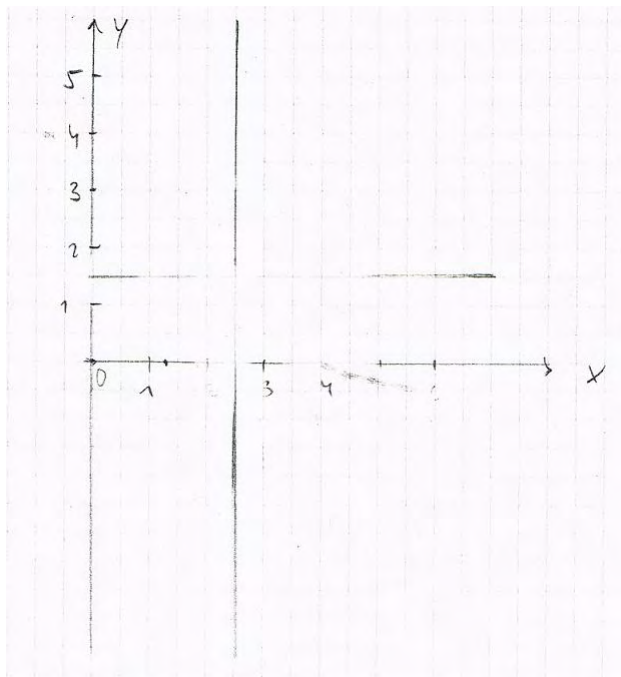
Nulpunkt i tæller: $x = \frac{4}{3}$

$$f(0) = \frac{4}{5}$$

Lodret asymptote: $x = 2,5$

Invers funktion: $f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{-2x+3}$

⁶Dobbeltunderstregningen markerer facit, som af eleven blev markeret ved at tegne en firkant rundt om brøken. Dette gælder også for de efterfølgende understregninger.



Figur 9: Til løsning 2 af opgave 2.3.

4.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -4 \\ c &= 2 \\ d &= -5 \end{aligned}$$

Invers:

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{-2x+3}$$

Skæringspunkt med x:

$$x = -\frac{-4}{-2} = 2$$

„ „ med y:

$$y = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

Vandret asymptote:

$$y = \frac{3}{2}$$

Lodret asymptote:

$$x = -\frac{-5}{-2} = 2\frac{1}{2}$$

5. $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$

Nulpunkt i tæller: $+\frac{4}{3} = x$

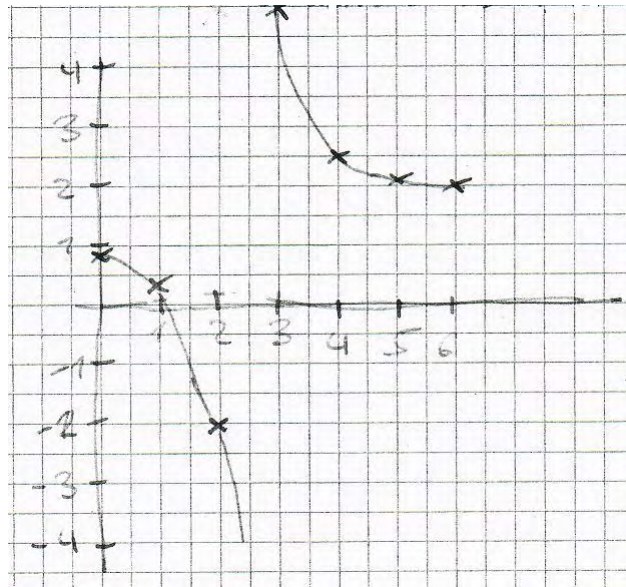
$$f(0) = y = \frac{4}{5}$$

Vandret asymptote: $y = \frac{3}{2} = 1,5$

Lodret asymptote: $x = \frac{5}{2} = 2,5$

Invers funktion: $f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{-2x+3}$

Tegningen af funktionen ses i figur 10.



Figur 10: Til løsning 5 af opgave 2.3.

2.4 Bestem for den brudte lineære funktion

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

skæringspunkterne med akserne, asymptoter og invers funktion.

Her udvælges to af besvarelserne, som er lavet af elever, der ikke har løst opgave 2.3, da de griber opgaven anderledes an.

1.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{ax+b}{cx+d} \quad | \cdot (cx+d) \\
 y(cx+d) &= ax+b \quad | -b \\
 ycx+yd-b &= ax \quad | : a \\
 \frac{ycx+yd-b}{a} &= x \\
 x_0 = 0 &= \frac{ycx+yd-b}{a}
 \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{b}{d}$ $P_1 \left(0 \mid \frac{b}{d}\right)$ $P_1 \cong$ skæringspunkt med y -aksen.

$$\begin{aligned}
 ycx+yd &= ax+b \quad | - ycx \\
 yd &= ax+b-ycx \quad | -b \\
 yd+b &= ax-ycx \\
 yd+b &= x(a-yc) \quad | : (a-yc) \\
 -\frac{y \cdot d+b}{a-yc} &= x \quad y=0 \text{ for } x_0 \\
 -\frac{0 \cdot d+b}{a-0c} &= -\frac{b}{a} \quad y=0 \text{ for } x_0
 \end{aligned}$$

Bemærkning: Det ligner på elevens besvarelse, at minusset i de to nederste ligninger er tilføjet senere, da resten står lige under hinanden.

2.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Generelt $f(x) = mx+n \Rightarrow mx = \frac{ax}{cx} \wedge n = \frac{b}{d}$.

Skæringspunkt med y -aksen er i punktet $\frac{b}{d}$.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{ax+b}{cx+d} \quad | \cdot (cx+d) \\
 \Leftrightarrow ycx+yd &= ax+b \quad | - ycx - b \\
 \Leftrightarrow yd-b &= ax-ycx \quad | - ycx - b
 \end{aligned}$$

For skæringspunktet med x -aksen sætter man $y=0$ ind:

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 0d-b &= ax-0cx \\
 \Leftrightarrow -b &= ax \quad | : a \\
 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} &= x
 \end{aligned}$$

Skæringspunktet med x -aksen er i punktet $-\frac{b}{a}$. Asymptoten⁷ (Linjestykker begge grafer nærmer sig) for en funktion $f(x) = mx + n$ er m , for $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ er asymptoten lig med $\frac{a}{c}$.

2.5 Hvilke betingelser skal hele tal a, b, c og d opfylde, for at løsningen af ligningssystemet (med hensyn til x og y)

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ cx + dy &= B \end{aligned}$$

for vilkårlige hele tal A og B altid er heltallig?

Kun en elev vælger at besvare denne opgave, som følger:

$$\begin{aligned} I : ax + by &= A \\ II : cx + dy &= B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ ax &= A - by \\ x &= \frac{A - by}{a} \end{aligned}$$

$\rightarrow A$ og produktet by skal være et multiplum af a .

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ by &= A - ax \\ y &= \frac{A - ax}{b} \end{aligned}$$

$\rightarrow A$ og produktet ax skal være et multiplum af b .

$$\begin{aligned} cx + dy &= B \\ cx &= B - dy \\ x &= \frac{B - dy}{c} \end{aligned}$$

$\rightarrow B$ og produktet dy skal være et multiplum af c .

$$\begin{aligned} cx + dy &= B \\ dy &= B - cx \\ y &= \frac{B - cx}{d} \end{aligned}$$

⁷Oversættelse af *Asymptotik*, der er defineret som den vandrette asymptote.

→ B og produktet cx skal være et multiplum af d .

→ a, b, c, d må have en største fælles divisor.

Eleverne arbejder i omkring ti minutter med at løse ovenstående opgaver. Derefter afleverer de fleste deres løsninger til læreren, som retter dem til næste gang. Læreren gør opmærksom på tekstafsnit 1.2.1-1.2.6 og arbejdsblad 3 er lektier. De sidste elever afleverer og undervisningen er slut.

7.5.2 Analyse af episoden

Læreren *devoluerer* et didaktisk miljø, hvor eleverne skal arbejde med opgaverne fra arbejdsblad 2. Arbejdsfasen udgør en *handlingssituation*, hvor opgaverne afleveres og valideres skriftligt af læreren. Læreren modificerer det didaktiske miljø ved at tilføje et konkurrencemoment og tilføjer dermed en pointjagt i løsningen af opgaverne. Dette får elever til at engagere sig i miljøet, men bagsiden er, at eleverne typisk vælger de opgaver, de umiddelbart kan løse fremfor de opgaver, der kunne udfordre dem.

Der er i alle løsninger til opgave 2.3 angivet funktionen $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$, hvilket udgør en mikrokontrakt i dimensionen om det matematiske indhold. Bortset fra løsning 2 og 5 mangler grafen i de øvrige opgaver og i visse opgavebesvarelse også andre dele af løsningen. Dette viser, at elevernes stræben efter points ikke kun har betydning for valget af opgave, men også for hvor grundigt, de arbejder med opgaverne, da eleverne har nået at løse flere opgaver udover denne.

Løsning 1 bruger umiddelbart listen fra afsnit 1.2.3, hvilket analysen af opgaverne i afsnit 6.2 også viste som en mulighed. De enkelte parametre opskrives ikke og eleven er ikke opmærksom på fortegnssændringen i forhold til formlerne i noterne, hvilket resulterer i fortegnstegnfejl for skæringspunktet med x-aksen og formentlig er skæringen med y-aksen korrekt grundet to minusfejl. Eleven enten glemmer, fravælger eller er ikke i stand til at bestemme den inverse funktion samt tegne grafen for funktionen. Med denne opgave viser eleven at kunne finde formlerne, men ikke nogen personlig viden om brugen af dem eller om funktionens grafiske egenskaber, selvom disse er blevet gennemgået i fremlæggelsen i episode 4.

Løsning 2 arbejder ud fra en mikrokontrakt om, at resultatet skal markeres, hvilket sker ved at ramme facit ind i en firkant. Eleven viser først, hvordan skæringspunktet med x-aksen bestemmes, men kommer ikke med nogen argumenter for skæringen med y-aksen. Dette tyder på et brud i mikrokontrakten, da eleven ikke ved, hvad læreren forventer af argumenter. I fremlæggelsen af gruppearbejdet blev skæringspunkterne bestemt og dermed kan dette udelades, hvorefter første del af opgaven med at bestemme skæringspunkter primært løses for at kunne tegne grafen uden at beregne yderligere punkter. Eleven opskriver asymptoterne uden nogen argumenter, men bruger dem til gengæld i tegningen af funktionens

graf. Trods den utydelige graf er den synlige del tegnet uden brug af skæringen med x-aksen i $x = \frac{4}{3}$, da grafen på tegningen skærer i $x = 4$. Om grafen er utydelig, fordi eleven ikke har haft den tilstrækkelige viden til udførelsen eller om det skyldes fejl i kopieringen kan ikke afgøres med sikkerhed. Den indtegnede gren af grafen vender rigtig, men skal forskydes op over den vandrette asymptote jf. afsnit 6.2. Eleven arbejder med en anden mikrokontrakt i dimensionen for det matematiske område i forhold til de andre elever. Når multiplikationen er mellem to algebraiske størrelser (bogstaver) udelades multiplikationstegnet $\cdot$, men når den ene størrelse er et tal som 0 i besvarelsen, skal tegnet medtages selv om der ikke er tvivl om andet i modsætning til multiplikation af to tal, hvor tegnet er nødvendigt.

Løsning 3 og 5 sætter løsningen ens op med en mikrokontrakt om, at når der skrives *nulpunkt i tæller*, så ved læreren, hvad eleven har gjort. Skæringspunkterne med akserne bestemmes ved at sætte $x = 0$ hhv. $y = 0$, mens asymptoter opskrives uden forklaring. I stedet for at skrive facit som en brøk, ligesom skæringspunkterne, skrives disse som decimaltal. For løsning 5, der bestemmer begge asymptoter, omskrives fra brøk til decimaler. Da løsningen også indeholder en tegning af grafen, kan ændringen i notationen være en del af elevens måde at arbejde med værdier, når de indsættes i et koordinatsystem. Grafen i løsning 5 er tegnet ud fra 7 punkter. Den vandrette asymptote er ikke tydelig ud fra elevens tegning, da grafen ikke fortsættes udover de indtegnede krydser. Egenskaberne for grafens forhold i forhold til den lodrette asymptote i $x = 2,5$ er derimod en del af elevens personlige viden, da eleven fortsætter grafen fra punktet $(2, -2)$ ned mod den lodrette asymptote, men uden at skære denne.

Løsning 4 er markant anderledes i forhold til de andre, da eleven eksplicit skriver værdien for de fire parametre a, b, c, d i funktionsudtrykket, som herefter indsættes i formlerne. Eleven får dermed ikke lavet fortegnssfejl og bruger tydeligt formlerne fra noterne. Det er således en del af mikrokontrakten at opskrive værdierne for parametrene. Dette viser, at eleven har personliggjort viden, om forholdet mellem funktionsform og formler, men da eleven ikke har tegnet grafen for funktionen, kan etablering af den personlige viden, om betydningen af værdierne og dermed funktionens grafiske egenskaber ikke be- eller afkræftes. Eleven arbejder desuden med en mikrokontrakt for forskellige notationsformer, som først skriver som brøker ligesom i noterne, men i de to første tilfælde ændres ikke ved brøkformen, men den opstilles på en ny måde. I sidste brøk omskrives til uægte brøk (kombination af tal og brøk), men eleven glemmer fortegnet og ender med et forkert resultat.

Opgave 2.4 løses på to meget forskellige måder. Den første løsning bestemmer skæringspunkterne algebraisk, mens den anden løsning bestemmer skæringspunkter og asymptoter ud fra en fejlfortolkning af sammenhængen mellem lineære funktioner og brudte lineære funktioner.

Løsning 1: Eleven betragter ligningen $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ og udfører en række manipu-

lationer for at beregne skæringspunktet med y-aksen. Ud fra den sidste ligning $x_0 = 0 = \frac{ycx+yd-b}{a}$ og $f(x) = \frac{b}{d}$ (som formentlig skulle have været $f(0)$), når eleven fra til skæringspunktet P_1 . Der er ingen sammenhæng i ligningen og funktionsudtrykket og det er ikke tydeligt, hvordan eleven bestemmer sit skæringspunkt. Ligeledes udfører eleven en række i og for sig unødvendige manipulationer af ligningen $ycx + yd = ax + d$ for at beregne skæringspunktet med x-aksen og brugen af x_0 i forbindelse med $y = 0$ har ingen betydning for løsningen. Eleven arbejder altså ud fra en mikrokontrakt om, at ligningsudtryk skal man isolere i forhold til x . Desuden besidder eleven en manglende personlig viden indenfor variabelbegrebet, som ses i de unødvendige ligningsomformninger og brugen af x_0 .

Løsning 2: Eleven har fejlfortolket sammenhængen mellem lineære funktioner og brudte lineære funktioner. I et forsøg på at bruge sin gamle viden om lineære funktioner, sammenholder han de to funktionsudtryk, hvorfra han konkluderer, at

$$mx = \frac{ax}{cx} \quad \text{og} \quad n = \frac{b}{d}.$$

Dette gælder ikke, da

$$mx + n = \frac{ax}{cx} + \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd} \neq \frac{ax + b}{cx + d},$$

men eleven opdager ikke fejlen, da han med sin viden om lineære funktioner bruger punktet $n = \frac{b}{d}$ som skæringspunkt med y-aksen, hvilket (uheldigvis) stemmer overens med noterne. Elevens funktionsudtryk er forbeholdt de lineære funktioner, som han derfor prøver at få tilpasset brudte lineære funktioner.

For skæringspunktet med x-aksen omformer eleven ligningen fra

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{til} \quad yd - b = ax - ycx,$$

hvorefter $y = 0$ indsættes og x isoleres. Det lader til, at begge elever ikke ved at

$$\frac{ax + b}{cx + d} = 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a},$$

og dermed ikke bruger deres gamle viden om brøkgregning. Dette bryder mikrokontrakten i dimensionen for det matematiske område, som erstattes af en mikrokontrakt om ligningsomformninger, som beskrevet ovenfor under løsning 1.

Da eleven skal bestemme de asymptotiske forhold relaterer han igen til lineære funktioner med påstanden

For en lineær funktion $f(x) = mx + n$ er m asymptotisk (Linjestykker som begge grafer nærmer sig).

Derudfra konkluderer han, at $\frac{a}{c}$ er asymptotisk for $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, hvilket giver ham det rigtige resultat, da $y = \frac{a}{c}$ er vandret asymptote. Men argumenterne er forkerte og selv om den intuitive beskrivelse af begrebet 'asymptote' er korrekt, er begrebet fejlfortolket, da lineære funktioner på formen $y = mx + n$ ikke har nogen asymptoter. Eleven har ikke personliggjort den viden, som blev fremlagt af grupperne. I stedet har han dannet en fejlfortolket sammenhæng mellem de lineære funktioner i opgave 2.1 og 2.2 og den brudte lineære funktion.

Opgave 2.5 rummer mange informationer og kræver indsigt i variabelbegrebet, således at der et klart, hvad det betyder, at A og B er vilkårlige. Eleven isolerer x henholdsvis y i de to ligninger og konkluderer derudfra, at a, b, c og d er multiplum af enten A, B eller et af produkterne by, ax, dy, cx . Lad os betragte ligningen

$$x = \frac{A - by}{a},$$

hvorfra det konkluderes, at A og by er multiplum af a . Det betyder, at a går op i både A og by , men da A er et vilkårligt helt tal betyder dette, at $a = \pm 1$. Ud fra de andre ligninger, når man således frem til, at $a, b, c, d = \pm 1$. Eleven konkluderes derimod, at a, b, c, d har en største fælles divisor, hvilket ikke er decideret forkert, men den største fællesdivisor er 1, hvis ovenstående påstande fra elevens side er korrekte. Men de fundne multiplum gælder ikke, da $k|(m-n)$ ikke medfører at $k|m$ og $k|n$. Eleven prøver at løse ligningssystemet ved substitutionsmetoden, men har svært ved at holde fast i, at systemet skal løses med hensyn til x og y samtidigt. Efter at have isoleret x ud fra første ligning i ligningssystemet, skal eleven sætte denne værdi ind i stedet for x i den anden ligning. Eleven har formår ikke at anvende metoden til at løse lineære ligningssystemer og begrebet største fælles divisor korrekt. Desuden er eleven ikke klar over, hvad det betyder, at A og B er vilkårligt valgt og hvilke konsekvenser det har i beregningerne. Mikrokontrakten for opsætning af opgaven er set i tidligere løsninger af opgave 2.1; nemlig at opskrive det givne ligningssystem og herefter gå igang med at løse dette. Hermed afsluttes analysen af episode 5.

Undervisningsmodul 2

I beskrivelsen og analysen af episoderne i undervisningsmodul 2 udelades elevernes skriftlige besvarelser af opgaverne i modsætning til undervisningsmodul 1, hvilket er begrundet i afsnit 5.

Beskrivelsen indeholder en del transkriberinger af længere samtaler, som derfor nummereres i modsætning til transkriberingerne i undervisningsmodul 1. Samtalerne kan skimmes og efterlæses, hvis det er nødvendigt i forbindelse med analysen af episoden.

7.6 Episode 6

Ifølge læreplanen er tidsrummet 16.15-16.45 afsat til øvelse, hvor eleverne arbejder med alle opgaver fra arbejdsblad 3, som var lektie. Dette foregår som gruppearbejde med individuel aflevering. Fra 16.45 til 17.15 har læreren planlagt en ekskurs i den højere algebra om grupper som algebraiske strukturer. Dette sker ved en powerpoint-præsentation samt en styret klassediskussion.

7.6.1 Observation af episoden

Læreren starter med at *devoluere* et didaktisk miljø, hvor eleverne løser så mange opgaver som muligt. Dette udgør en *handlingssituation*, som både udføres i klassen og delvist som lektie derhjemme. De løste opgaver afleveres og rettes til næste undervisningsmodul.

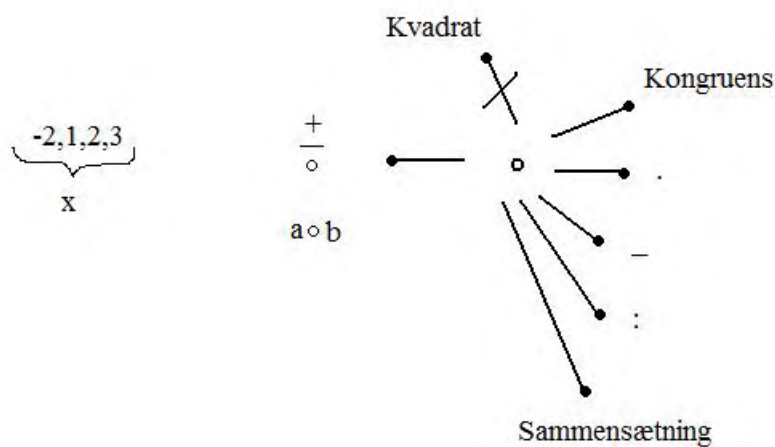
16.52-17.15: Læreren motiverer eleverne til ekskursen i højere algebra ved at henvise til brugen af strukturer fremfor tal i universitetsverdenen. Som eksempel vælger hun de naturlige tal og spørger, hvad man kan gøre med dem.

1. E1: Man kan regne. Bare regne.
2. L: Hvordan kan man regne?
3. E1: Man kan addere, multiplicere, subtrahere, dividere og potenser. [...]
4. L: Hvad med subtraktion?
5. E2: Ikke uden videre, fordi man kan opnå negative tal, som ikke er naturlige.

Læreren beder eleverne om at skrive den formelle definition af en gruppe og kommutativitet op fra powerpoint-præsentationen (se bilag A.4) og giver dem tre minutter til dette. Afskriftet skal ikke nødvendigvis være identisk, men i en kortere udgave skal betydningen stadig være klar. Da eleverne ikke når at skrive definitionerne ned indenfor de tre minutter, fastsætter de en ny tidsramme på yderligere 4 minutter, som heller ikke er tilstrækkelig. Læreren beslutter sig for at gå videre, hvormed nogle elever reagerer med at spørge om, hvornår de må skrive definitionerne færdige, og om de ikke kan få lidt mere tid, da de kun mangler en linje, hvilket læreren vælger at se bort fra.

Eleverne skal give eksempler på betydningen af cirklen $\circ$ i definitionen og foreslår multiplikation, addition, subtraktion, division, kongruens, sammensætning af funktioner og kvadrat, der skrives op på tavlen (se figur 11). Følgende samtale om kvadrat som eksempel på $\circ$ fandt sted:

6. L: Kan det i dette tilfælde være kvadrat? [Stille]
7. E1: Næh, kun når a og b er ens.
8. L: Altså kun når de også er ens.



Figur 11: tavleafskrift.

9. E2: Egentlig er det en forbindelse mellem a og b og ikke mellem a og a .
10. E3: Kongruenser eller noget?
11. L: Kongruenser - præcis. Altså, vi kan ikke tage kvadrat, fordi ... David (E2) gentag lige, hvorfor kan vi ikke tage kvadrat.
12. E2: Tja, fordi cirklen betyder at sætte to elementer sammen med en forbindelse... og et kvadrat handler kun om et element.
13. L: Præcis, fordi vi har en forbindelse mellem to elementer. Og et kvadrat handler kun om, hvad der gøres med et tal.

Herefter vender læreren tilbage til betydningen af cirklen, når den står for sammensætning af funktioner, som en elev har foreslået. Læreren får en elev til at sammenfatte betydningen af cirklen således:

14. E1: Jeg ville nu sige det sådan, at cirklen betegnes, som det man betegner med x som variabel, det er ligesom det matematiske tegn.
15. L: Super. Så, hvad synes I om det? [stille] Hvordan betegner man tal, som man søger, men ikke ved hvad er?
16. E2: x
17. L: Præcis. Og når I ikke ved, hvordan to elementer er knyttet til hinanden siger vi generelt cirkel. Og ligesom med tal kan man også kun gøre bestemte

ting med cirklen, når det handler om grupper. Hvad må man gøre med cirklen i grupper? [stille]

18. E2: I stedet for cirklen kan man vælge gange eller addition.

19. L: Præcis.

Læreren går videre og gennemgår med elevernes eksempler de tre punkter i definitionen: A1 Associativitet, A2 neutralelement og A3 inverseelement. I samtalen om neutralelement, når eleverne frem til:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

for addition og for multiplikation

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Læreren spørger eleverne om, hvad neutralelementer kaldes.

20. E1: 1 er multiplikativt neutralelement og...

21. L: Stop. [navnet på E2].

22. E2: og 0 er multiplikativt ikke ødelæggende...

23. L: Nogle andre formodninger? [småsnak om ikke ødelæggende i baggrunden]
Hvad er 0? Når 1 er multiplikativt neutralelement, hvad er så 0?

24. E2: negativt.

25. E1: neutraliserende.

26. L: Hvad er multiplikativt? Hvad skifter vi cirklen ud med, når vi siger multiplikativt?

27. E2: gange

28. L: med gange. Hvad skifter vi ud, når vi tager 0?

29. E3: Addition. Altså additivt [udtaler additiv forkert] neutralelement.

30. L: Additivt neutralelement helt præcist.

Herefter gennemgås A3 om inverselementer, hvor eleverne indser, at de naturlige tal med hensyn til addition ikke udgør en gruppe, da inverselementet tilhører de negative tal og dermed skal gruppen med hensyn til addition bestå af de hele tal. En elev giver eksempler på kommutativitet med hensyn til addition og multiplikation. Læreren mener, at eleverne har set nok eksempler på grupper, nemlig den additive gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ og den multiplikative gruppe $(\mathbb{R}, \cdot)$, hvor

sidstnævnte ikke faktisk ikke er en gruppe, når nul medtages. Hun vælger derfor at springe næste side over i powerpoint-præsentationen med eksempler som $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, mængden af reelle funktioner med hensyn til addition og den symmetriske gruppe (se evt. bilag A.4). I stedet går hun videre til et eksempel om Diedergruppen og et om translationsgruppen. Hun gennemgår de to sidstnævnte grupper på to minutter og svarer selv på sine egne spørgsmål, da eleverne ikke har nogen forslag.

7.6.2 Analyse af episoden

Læreren *institutionaliserer* gruppebegrebet ud fra powerpoint-præsentationen. Institutionaliseringsen motiveres fra lærerens side ved, at gruppebegrebet er en del af undervisningen ved universitetet. Ved at bruge definitionen af en gruppe fra præsentationen undgår læreren fejlen med associativiteten, som definitionen i noterne rummer jf. afsnit 6.1.

Ved at vælge de naturlige tal som eksempel, når eleverne frem til, at man kan ramme udenfor mængden ved subtraktion. Men spørgsmålet om subtraktion i 4 virker søgt og ledende, hvilket kan skabe en Topaze-effekt.

I opskrivningen af definitionen er der en mikrokontrakt, som tillader eleverne at korte af i teksten med betingelsen om, at betydningen er den samme. Der sker ikke umiddelbart nogen brud i denne kontrakt, men derimod i mesokontrakten i dimensionen af fordelingen af ansvar. Eleverne har en forventning om, at de får til krævede tid til at skrive definitionen op, mens læreren forventer, at eleverne selv kan vurdere, hvor lang tid de har brug for til opskrivningen. Bruddet kommer til udtryk i elevernes spørgsmål om, hvornår opgaven kan fuldføres og læreren fastholdelse af at gå videre. Ud over lærerens forventning, kan forsinkelsen på syv minutter have betydning for, at læreren insisterer på at gå videre.

Noterne og præsentationen virker usammenhængene notationsmæssigt, da tegnet først er defineret i noterne, som sammensætning af funktioner og herefter i præsentationen, som tegnet for en komposition. Dette kunne være undgået ved at vælge et andet tegn, eksempelvis $*$, i præsentationen. Ligeledes har læreren valgt betegnelserne a, b, c fremfor noternes brug af x, y (den tredje betegnelse er ikke nødvendigt, da associativiteten mangler). De forskellige betegnelser har ikke betydning i denne episode, da det kun er powerpoint-præsentationen, der danner baggrund for institutionaliseringen, men i episode 7, hvor noterne inddrages, kan dette være med til at skabe en unødigt didaktisk forhindring.

Tavlebilledet i figur 11, om betydningen af tegnet $\circ$, er tvetydigt. På den ene side betegner det kompositionen i gruppen, men subtraktion og division er ikke associative og kan dermed ikke være kompositionen i en gruppe. På den anden side er det tydeligt ud fra lærerens bemærkning i 13, at pilene til tegnene betyder, at kompositionen faktisk er en komposition dvs. en relation mellem to forskellige elementer. Derfor er pilen mod kvadrat streget ud, mens subtraktion og division ikke streges ud. Denne mikrokontrakt om notationen ved tavlen følges

af en mesokontrakt om, at læreren gentager elevernes svar, men overlader det til eleverne at uddybe og præcisere svaret, hvilket ses i 7-9 samt 11-13.

I lærerens forsøg på at vende tilbage til cirklen som tegn for sammensætning af funktioner bringer eleverne variabelbegrebet ind og sammenligner variabelen x for et tal, som cirklen er for en gruppe. Både x og $\circ$ er tegn for ubekendte størrelser, men cirklen er ikke en variabel, men et tegn for en endnu ikke valgt komposition, hvorimod x kan variere mellem flere forskellige tal. Sammenligningen er ikke kun problematisk i forhold til variabelbegrebet, men fjerner også lærerens fokus fra den tilsigtede viden om betydningen af cirklen, når den står for sammensætning af funktioner. I 18 gentager en elev de mulige kompositioner, men kompositionen er fastlagt i lærerens spørgsmål og implicit også funktionerne som elementer. Der ses en mesokontrakt, hvor læreren svarer positivt med *super* og *præcis*, til trods for at eleverne taler om variabler og forbeholder cirkelns betydning til at betegne de sædvanlige regnearter såsom addition og multiplikation. Eleverne er stille, hvilket er atypisk og det virker som et brud i mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden, hvor læreren forventer, at eleverne har personliggjort den tilsigtede viden om gruppegenskaberne fra definitionen, og dermed forventer, at de kan svare på hendes spørgsmål, som skulle lede hen mod gruppen af brudte lineære funktioner. For at reparere dette brud kommer læreren med de positive udmeldinger til elevernes forslag samt gentager og uddyber sine spørgsmål i 14 og 17, indtil svaret er åbenlyst, hvilket skaber risiko for en Topaze-effekt.

Egenskaberne for det additive hhv. multiplikative neutralelement, 0 hhv. 1, er personliggjort viden, da det er gammel viden om addition med 0 og multiplikation med 1. Men læreren vil gerne have sat de korrekte betegnelse på begreberne. I 20 bemærker læreren, at eleven umiddelbart har kendskab til betegnelserne additiv og multiplikativ og afbryder derfor eleven. Dette udgør en mesokontrakt, som er accepteret af eleverne, da den udvalgte elev E2 prøver at besvare spørgsmålet. Han har endnu ikke personliggjort den tilsigtede viden om neutralelementet samt indset, at den egenskab, som adskiller 1, som det multiplikative neutralelement, og 0, som det additive neutralelement, ligger i kompositionen. Læreren prøver at komme med et hint herom, men ingen af eleverne kan besvare spørgsmålet. E1 og E2's bud i 24 og 25 viser deres forsøg på at opfylde den didaktiske kontrakt, der er brudt i dimensionen af den didaktiske status af viden, idet læreren forventede, at eleverne kunne besvare dette spørgsmål ud fra den tidligere institutionaliserede viden. I 26 og 28 bliver spørgsmålene så ledende, at de næsten besvarer sig selv og der er igen risiko for en Topaze-effekt.

Lærerens beslutning om at springe eksemplerne med talgrupper over kan skyldes, at hun vil overholde læreplanen. Argumentet om, at de har set eksempler nok, er ikke tilstrækkeligt. Eleverne har i arbejdet med den multiplikative gruppe endnu ikke indset, at nul skal undtages, da dette element ikke har en invers, hvilket netop er et af eksemplerne fra den del af præsentationen, som udelades. Den hurtige gennemgang af Diedergruppen og translationsgruppen skaber et brud i mesokontrakten, som kommer til udtryk i elevernes manglende deltagelse og læ-

rerens besvarelse af sine egne spørgsmål. Her afsluttes analysen af episode 6.

7.7 Episode 7

Ifølge læreplanen skal eleverne i tidsrummet 17.15-17.25 arbejde enten individuelt eller parvis med indholdet i afsnit 1.2.7 om gruppen af brudte lineære funktioner med hensyn til sammensætning. Herefter skal afsnittet fremlægges ved tavlen i en klassediskussion fra 17.25-17.30.

7.7.1 Observation af episoden

17.15-17.25: Eleverne læser afsnit 1.2.7. På grund af generel uro i klassen afbryder læreren eleverne et par minutter før planen og diskuterer muligheden for at lægge en pause ind fremover og dermed bedre at opretholde koncentrationen i den sidste lektion.

17.25-17.30: En af læreren udvalgt elev (E1) fremlægger tekstafsnittet ved tavlen med hjælp af noterne og de øvrige elever. Powerpoint-præsentationen viser definitionen af en gruppe.

31. E1: Øh, teksten er det hele, på en eller anden måde den præsentation, altså en anden mængde, som her betegnes X og anvendes med elementerne x og y . Og øh...
32. L: Altså er x og y mængden G . Kontroller alt kritisk. E1 siger: G består af x og y .
33. E1: Mængden G er betegnet med X og elementerne af X er x under...
34. L: Passer det sådan, som E1 siger det? Det som her kaldes G generelt, kaldes det X for x ? Passer det? [stille] Hvis ja, så hvorfor og hvis ikke, hvorfor så ikke sådan? [småsnak]
35. E2: Jeg ville egentlig mene,...
36. E3: Sig ja eller nej!
37. E2: Jeg ville egentlig mene ja.
38. L: Hvorfor?
39. E2: Øh, fordi det egentlig er de samme tre forudsætninger, der bruges. Ja og fordi...
40. L: Hvad er X ? Det som netop defineres her er temmeligt forvirrende i teksten - hvad menes der med X ? Det er for det første et abstrakt begreb. Præcis. E1, du kan i første omgang gå videre.

41. E1: Altså, potenser af brudte lineære funktioner defineres og forklares: $f^{(0)}(x) = x$. [pause] $f^{(1)}(x) = f(x)$, $f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ og videre $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$. Der gælder de sædvanlige potensregler.
42. L: hmm, de sædvanlige potensregler, ja. Den egentlige struktur er her ikke... den egentlige mængde er ikke nævnt her og det er problemet. Her er endnu et eksempel, hvor a og b ombyttes med x og y . Og associativiteten bliver ikke nævnt. Den egentlige mængde består dog af andre elementer. Hvad er nu mængdens elementer? [stille] Tidligere var det for eksempel de naturlige tal eller nogen x og y , men hvad er nu inde i mængden?
43. E4: Jeg tror, at det er udbyttet⁸ af funktionen.
44. L: Altså funktionerne selv endda. Disse objekter er ikke tal, men derimod funktioner og det er virkelig et stor del af universitetet. Så i henhold til dette, hvad er så det neutrale? [navnet på E1].
45. E1: Ja, stadigvæk e .
46. L: e generelt eller konkret for mængden af funktioner og sammensætning? [stille] Du kan spørge nogen.
47. E1: Vil du, [navnet på E5]?
48. E5: Den identiske funktion.
49. L: Præcis, det er den identiske funktion. Sådan og det var nu rigtig vigtig matematik, som også indgår på universitetet.

7.7.2 Analyse af episoden

Episoden er fortsættelse af *institutionaliseringen* i episode 6 af gruppebegrebet, men denne gang med gruppen af brudte lineære funktioner som tilsigtet viden. Institutionaliserings udgangspunkt er afsnit 1.2.7 i noterne, som først læses og herefter gennemgås af en udvalgt elev. Det bemærkes, at læreren overholder læreplanen tidsmæssigt.

I 31 og 33 er det tydeligt, at eleven ikke har været i stand til at tilegne sig den tilsigtede viden. Dels er ændringen i notationen i noterne i forhold til powerpoint-præsentationen problematisk, som forudset i episode 6. Dette kunne have været undgået ved at fjerne powerpointen-præsentationen eller ved at læreren havde benyttet samme notation, hvormed manglerne i definitionen i noterne også ville være mere tydelige. Dels skal eleven sammenfatte et afsnit, som samtidig definerer en gruppe generelt og indfører gruppen af positive rationale tal med hensyn til

⁸Oversættelse af det tyske *Ergebnis*, der betyder resultat eller facit.

multiplikation og gruppen af brudte lineære funktioner med hensyn til sammensætning. Mikrokontrakten handler om, at eleven bruger de matematiske udtryk, som teksten indeholder såsom *mængde*, X , x , y og *elementer*. Mesokontrakten dimensionen for fordelingen af ansvar medfører, at eleven går med til at fremlægge afsnittet, selv om den nødvendige viden ikke er personliggjort, hvilket ses i elevens *øh*'er. Kontrakten modificeres af læreren i 32, hvor hun forventer, at resten af eleverne er kritiske i forhold til det præsenterede.

Da E2 prøver at argumentere for at X i noterne svarer til G i præsentationen, går han i stå. Mesokontrakten bygger på en forventning om, at udsagn skal begrundes og den er eksplicit fra lærerens side i 34. Men eleven i 36 mener, at et ja eller nej svar er nok, men da eleven svarer efter denne kontrakt og dermed bryder med den anden, modificerer læreren miljøet, og dermed kontrakten, ved at spørge hvorfor. Da eleven uddyber med, at det er de samme tre forudsætninger i 39, er der en mulighed for læreren til at afklare fejlen i noterne, men i stedet konkluderer hun, at noterne er forvirrende, og at det er et abstrakt begreb. Siden hun alligevel bruger noterne, tyder det på en didaktisk kontrakt om, at den tilsigtede viden står i noterne og at den præsenteres derigennem.

Da læreren beder eleven gå videre i 41, begynder eleven at præsentere potenserne af brudte lineære funktioner. Eleven læser højt fra noterne, hvilket er tydeligt, da han også laver fejlen i n 'te potens som omtalt i 6.1. Eleven har altså ikke personliggjort den tilsigtede viden og læreren bemærker det ikke, da hun stadig ønsker at vise, at de brudte lineære funktioner med hensyn til sammensætning udgør en gruppe, hvilket kommer til udtryk i hendes søgen efter gruppestrukturer. I 42 nævner hun midt i en opremsning af de didaktiske forhindringer, såsom at den egentlige mængde ikke er nævnt, begrebet associativitet, som netop mangler i noternes definition, men hun får fokuseret på de andre grupperegenskaber og fejlen kommer aldrig frem. Læreren fornemmer et brud i mikrokontrakten i dimensionen for den didaktiske status af viden, da eleverne mangler at personliggøre den nødvendige viden til at definere gruppen af brudte lineære funktioner. Dette og overholdelsen af tidsplanen medfører, at hun dels besvarer sine egne spørgsmål, som funktioner i 44, og dels stiller ledende spørgsmål, som i tilfældet med neutralelementet i 46, hvormed der er risiko for en Topaze-effekt. Hermed afsluttes analysen af episode 7.

Bemærkning: Herefter følger episode 8 i tidsrummet 17.30-17.45, som ifølge læreplanen en træningsfase, hvor eleverne enten i samarbejde eller alene skal arbejde med opgaver fra arbejdsblad 4, der er lektie til næste gang. Dermed afsluttes timen med en handlingssituation, som ikke vil blive beskrevet eller indgå i analysen jf. afsnit 5.2.

7.8 Sammenfatning

Undervisningen består primært af handlingssituationer, hvor eleverne regner opgaver, og institutionalisering, hvor eleverne beskæftiger sig med notematerialet eller powerpoint-præsentationen. De adidaktiske situationer, såsom formulerings- og valideringssituationerne, der er essentielle i det didaktiske dobbeltspil, ses kun i tavlegennemgangen i episode 2. I episode 2, 6 og 7 opstår der risiko for Topazeffekter, men der er ikke nogen tegn på misbrug af analoge miljøer, jourdain-effekter eller metakognitive skift. I episode 1 og særligt i episode 2 er der et adidaktisk potentiale til stede, men læreren udnytter det ikke og der opstår altså ingen interaktive syntese diskussioner.

Den didaktiske kontrakt brydes primært i dimensionen for den didaktiske status af viden på såvel mikro- som mesoniveau. Brudene kommer blandt andet til udtryk i undervisningen ved elevernes manglende deltagelse og svar på lærerens spørgsmål. De didaktiske kontrakter, som beskrives i analysen, er på mikro- og mesoniveau, mens det ikke har været muligt at observere nogen makrokontrakter om de overordnede undervisningsmål ud fra to undervisningsmoduler jf. afsnit 5.

8 Diskussion

Efter analysen af både den eksterne og interne didaktiske transposition er de indgående undervisningsmaterialer og undervisningen blevet beskrevet og analyseret. Dette danner baggrund for at besvare problemstillingen fra afsnit 1.2, der handlede om følgende tre punkter: 1. valget af det matematiske indhold og dets organisering, 2. selvstændighedsgraden af elevernes beskæftigelse med det matematiske indhold og 3. tidsaspektet.

Diskussionen vil desuden sammenligne MSG med typisk tysk skoleundervisning og den franske udgave af fritidsmatematik, som kaldes *math en jeans*. Afsnittet afrundes med et blik på de metodologiske muligheder i undersøgelsen af tysk fritidsmatematik.

8.1 Valget af det matematiske indhold

Valget af det matematiske indhold er fastlagt indenfor hvert klassetrin med tilhørende notemateriale og opgaver udarbejdet af Stephan Holger. Dermed sikres, at det matematiske indhold ikke kommer skoleundervisningen i forkøbet og at eleverne har de nødvendige forudsætninger. Men det fastlagte notemateriale giver læreren færre muligheder, hvilket kan virke begrænsende, men som har den fordel at spare læreren tid under forberedelsen.

Man kunne have forestillet sig, at eleverne primært beskæftigede sig med opgaver fra de forskellige matematikkonkurrencer og samarbejdede i grupper med læreren som hjælper, hvilket ville skabe et problemløsningsbaseret undervisningsmiljø. Men dette er ikke tilfældet i MSG, hvor noterne og de tilhørende opgaver fungerer som skolebøger og særligt noterne bruges som udgangspunkt for undervisningen. En del af opgaverne, som er udeladt i analysen, kommer fra matematikolympiaden, hvor Holger Stephan var tilknyttet. Men de omhandler ikke det matematiske område, der behandles i noterne, og dermed vil elevens arbejde med disse opgaver ikke bidrage til en personliggørelse af den tilsigtede viden indenfor brudte lineære funktioner.

Desuden forventes der i MSG, at eleverne deltager i de forskellige matematikkonkurrencer jf. afsnit 1.1. Men spørgsmålet er, om eleverne bliver bedre rustet ved at løse tidligere opgaver fra konkurrencerne og diskutere dem i fællesskab eller gennem indlæring af et nyt matematisk område, hvor de opgaver, der er tilknyttet matematikkonkurrencen, ikke er tilknyttet det matematiske område. Erfaring med at løse opgaver fra konkurrencerne styrker naturligvis elevernes evne til at løse disse opgavetyper. Men en solid matematisk baggrund kan også være en fordel, da erfaringen med udfordrende, teoretisk matematik giver eleverne en bedre rutine i matematisk tankegang.

I MSG handler det ikke udelukkende om konkurrencetræning og opgaveregning, men om at få eleverne til at glædes og begejstres over teoretisk matematik ligesom på universitetet. Dette ses tydeligt i analysen af episode 7 jf. afsnit 7.7.2,

hvor læreren i både 44 og 49 nævner universitetet explicit og understreger, at gruppebegrebet er *rigtig vigtig matematik*.

8.2 Undervisningsformer

Undervisningsformerne skifter mellem handlingssituationer, hvor eleverne regner opgaver, og institutionalisering, hvor ansvaret overtages af enten læreren eller eleverne med udgangspunkt i notematerialet og powerpoint-præsentationen. Den eneste undtagelse i observationen er episode 2, som udgør en formuleringssituation jf. afsnit 7.2.2. Denne situation rummer et adidaktisk potentiale, som er beskrevet i afsnit 4.6, da begge de indgåede opgaver har udgangspunkt i elevernes gamle viden om lineære funktioner. Det adidaktiske potentiale udnyttes dog ikke af læreren og der vises også kun en af de (mindst) tre mulige løsninger. Ifølge interviewet prøver de ellers at se på flere forskellige løsninger og finde den bedste løsning. Med den bedste løsning ligger også en forventning om en pæn løsning, hvilket ses i elevernes søgen efter et simplere udtryk i episode 2 jf. afsnit 7.2.1.

Ifølge interviewet med læreren er det meningen, at opgaverne løses hjemmefra ligesom på universitetet. De skulle gennemgås ved tavlen og løsningerne deles ud og diskuteres. Men i undervisningen var der blot et eksempel med opgaver gennemgået ved tavlen. Alle eleverne havde heller ikke forberedt opgaverne hjemmefra og læreren havde sat tid af til opgaveregning i episode 5, 6 og 8, hvor opgaverne afleveres skriftlig og i episode 2, hvor det dog ikke fremgik af læreplanen, men i praksis fik eleverne tid til at regne opgaverne. Det tyder på, at læreren ikke er opmærksom på den manglende gennemgang af opgaver, men i stedet fokuserer på institutionaliseringen af det matematiske indholdet i notematerialet. Løsningsarket uddeles i starten af undervisningen, men det diskuteres ikke og opgaverne gennemgås heller ikke. Hun betegner dette *som en slags elev-universitet*, men på universitetet vil opgaver typisk gennemgås i øvelsestimer og institutionalisering foregå af eleven selv udenfor undervisningen og af læreren til forelæsninger.

I afsnit 4.2 om det didaktiske miljø beskrives den tendens, at klassisk undervisning springer etableringen af personlig viden over og går direkte til den officielle viden. Det samme sker i MSG, hvor den officielle viden foreligger i form af noterne. Men læreren repersonliggør ikke den viden, som noterne indeholder, men lader den institutionaliseres enten af sig selv eller af eleverne. Dette forklarer, at det didaktiske spil, der foregår i undervisningen, primært består af institutionaliseringssituationer.

8.3 Tidsaspektet

I lærerens undervisningsplan angiver hun explicit, hvor lang tid hun forventer, at de forskellige matematiske aktiviteter vil tage. Hun når igennem det planlagte forløb i begge undervisningsmoduler, men det har sine konsekvenser.

I episode 2, hvor hun er 25 minutter forsinket i forhold til læreplanen, ændrer læreren opførsel, så der opstår risiko for en Topaze-effekt. Dette kan være et forsøg på at indhente tidsplanen ved at give eleverne ledende hints til at løse opgaven. Læreren forventede formentlig, at eleverne hurtigt ville kunne løse opgaverne, da de handler om gammel viden for lineære funktioner.

Netop lærerens forventning om, hvor lang tid eleverne har brug for, skaber brud i den didaktiske kontrakt, som i episode 4, hvor eleverne fremlægger hvert deres tekstafsnit. Både læreplanens 15 minutter og de faktiske 11 minutter til fremlæggelsen fra seks grupper stiller store krav til eleverne om at være i stand til at personliggøre og institutionalisere indholdet af teksten. I fremlæggelserne kunne særligt gruppe 5 og 6 have uddybet deres emner om den inverse funktion og sammensætning af funktioner, men det er vigtigere for læreren at indhente tidsplanen fremfor at gå i dybden med det matematiske indhold, som udfordrer eleverne.

I episode 7 overholdes læreplanen på minuttet, men det betyder, at eleverne skal definere de brudte lineære funktioner som en gruppe på 15 minutter, hvor gruppebegrebet for eleverne er ny viden på vej til institutionalisering. Desuden går de første ti minutter med, at eleverne læser afsnittet, og dermed er der kun fem minutter til gennemgangen, hvilket både medfører, at fejlene i noterne ikke kommer frem, og risiko for Topaze-effekt.

De tre episoder viser, at læreren vil overholde sin tidsplan, selv om eleverne har behov for mere tid for at personliggøre den tilsigtede viden. Hun fravælger derigennem muligheden for at gå i dybden i de enkelte matematiske dele, for i stedet at nå så meget som muligt indenfor de tidsmæssige rammer. På den måde fungerer undervisningsnoterne som en slags pensum, hvormed den tidsmæssige frihed, der kunne være tilstede i rammerne af MSG, ikke er det.

8.4 Typisk skoleundervisning i Tyskland

Stiegler og Hiebert (1999, s.78) undersøgte undervisningskulturen i Japan, USA og Tyskland og vi vil her se på, hvilke typiske træk i den tyske skoleundervisning, som ligner eller adskiller sig fra den undervisning, vi så i MSG.

Det tyske undervisning er ifølge Stiegler og Hiebert (1999, s.78) præget af:

- at genopfriske tidligere gennemgået materiale såsom lektier og opsummering af, hvad eleverne har opnået indtil videre.
- at præsentere emnet og problemerne, der skal gennemgås i undervisningsmodulet, hvor problemer både kan opfattes som opgaver og teori, som skal bevises.
- at udvikle metoder til at løse problemerne enten af læreren ved tavlen eller af en elev, som tager imod forslag fra læreren og de andre elever.

- at regne opgaver, som ofte ligner de opgaver, der blev gennemgået i undervisningen, og som er lektie til næste undervisningsgang.

Undervisningen i MSG er ligeledes præget af at udvikle metoder til at løse problemer i samarbejde mellem lærer og elever. Dette ses særligt i institutionaliseringssituationerne i episode 1, 4, 6 og 7 og i formuleringssituationen i episode 2. Derimod præsenteres emnet og problemerne ikke af læreren, men af eleverne på lærerens opfordring. Det overlades således til eleverne at præsentere det matematiske indhold i samarbejde med læreren og klassen. Dette kan skyldes en forventning om, at eleverne, på baggrund af deres interesse og evne for matematik, er i stand til at håndtere et nyt emne uden lærerens præsentation heraf.

Eleverne i MSG har muligheden for at regne opgaverne i klassen, men opgaverne har ikke været gennemgået i undervisningen (på nær opgave 2.1 og 2.2 fra episode 2, som nogle elever afleverer, selv om læreren frabeder dette). Opgaveregningen har flere udformninger indenfor MSG. Eleverne kan få nogle minutter til at forberede en tavlegennemgang, som i episode 2, eller de kan få tyve minutter til at regne opgaver som skriftligt afleveres straks derefter, som i episode 5. Herefter gives nye opgaver som lektie til næste undervisningsmodul, hvor eleverne alligevel får tid til at løse disse den første halve time, inden de afleveres skriftligt jf. episode 6. Læreren gennemgår altså ikke lektierne som genopfriskning imod sætning til skoleundervisningen. Til gengæld sætter læreren tid af til, at en del af lektierne laves eller færdiggøres i undervisningen og herefter afleveres. Dette kan skyldes at læreren vil undgå for mange lektier, da eleverne bruger deres fritid på MSG og i forvejen har lektier for i skolen.

De fysiske rammer for MSG ligner skolesystemets en del, både med hensyn til notematerialet og arbejdsbladene med opgaver, der svarer til skolebøgerne, såvel som klasselokalet, lektierne og lærerens rolle. Der er altså både ligheder og forskelle mellem undervisning i MSG og skoleundervisning.

Opbygningen af det tyske skolesystem er således, at man i fjerde klasse afgør, om eleven skal have en 1. basis-, 2. middel- eller 3. studentereksamen. Dette sker ved at inddele eleverne i følgende tre skolekategorier (Senatsforvaltning for uddannelse, videnskab og forskning (2006)):

1. *Hauptschule*
op til 10. klassetrin. Særligt rettet mod erhvervslivet.
2. *Realschule*
op til 10. klassetrin. Kombination af teori og praksis.
3. *Gymnasium*
op til 12. klassetrin. Særlig fokus på at udvikle elevernes evner indenfor naturvidenskab, musikvidenskab, sport eller sprog.

Afsluttes trin 1. eller 2. „*med et overgennemsnitlig resultat*“ (Senatsforvaltning for uddannelse, videnskab og forskning (2006)) kan eleven opnå adgang til næste skoletrin. Således kan en elev fra Hauptschule få adgang til Realschule og dermed opnå en middeleksamen, og en elev fra Realschule kan få adgang til Gymnasium og dermed en studentereksamen og muligheden for at læse videre på universitetet.

Skolesystemet belønner de elever, der opnår de bedste resultater, med muligheden for en højere uddannelse. Der er således tale om et elitært system, som også ses i MSG. Her skal eleverne være særligt matematisk begavede jf. afsnit 1.1, hvilket kontrolleres ved en optagelsesprøve eller ved, at eleven udmærker sig i forbindelse med matematikkonkurrencer. Altså kan en elev med stor interesse for matematik, som ikke er „begavet nok“, ikke blive en del af MSG.

8.5 Math en jeans

Math en jeans betyder matematik i jeans og er navnet på fritidsmatematik i Frankrig. Umiddelbart kunne man forvente, at fritidsmatematik i Tyskland og Frankrig lignede hinanden, men, bortset fra elevernes lyst til at bruge deres fritid på matematik, er lighederne små.

I math en jeans arbejder eleverne ikke med noter og opgaver, som i MSG. I stedet arbejdes med uløste matematiske problemstillinger, som eksempelvis cirkelskiveproblemet (Tosev, 2007, s. 12), om at placere et antal cirkelskiver, som tilsammen dækker den største cirkelskive. Brugen af de uløste opgaver har til formål at motivere eleverne, hvilket i MSG sker ved at vælge et matematisk område, som både ligger udenfor skolens pensum og som udfordrer eleverne, såsom udvidelsen af funktionsbegrebet og indførelsen af gruppebegrebet. Der er altså en markant forskel mellem de to organisationer, da math en jeans tager udgangspunkt i at anvende allerede personliggjort viden til at løse en matematisk problemstilling, mens MSGs udgangspunkt er at få eleverne til at tilegne sig ny viden indenfor et matematisk område.

Hvor det faglige indhold og glæden ved matematik er i fokus i MSG, sætter math en jeans fokus på at arbejde forskningslignende og dermed på de tværgående kompetencer såsom formidling, kommunikation, evnen til at opstille hypoteser og gode spørgsmål, udforskning og eksperimentering (Tosev, 2007, s. 8).

Som navnet antyder har math en jeans en mere afslappet tilgang til fritidsmatematik. Her er der ikke nogen krav eller optagelseprøve for at deltage, imodsatning til det elitære syn på undervisning både i MSG og i det tyske skolesystem.

Men på et punkt minder organisationerne om hinanden - de har begge et konkurrencemoment, der fungerer motiverende. I MSG er det i form af pointsjagt i de skriftlige afleveringer og deltagelsen i forskellige matematikkonkurrencer (særligt matematikolympiaden), mens det i math en jeans opstår som en konkurrence mellem to parrede math en jeans skoler, der fremlægger deres resultater for hinanden.

Det er interessant at se, hvordan konceptet fritidsmatematik munder ud i så

forskellige former i de to nabolande og i begge tilfælde med god tilslutning og popularitet. Det kunne være interessant at finde ud af, hvilken form for fritidsmatematik, der ville være populær i Danmark - den tyske MSG-, franske math en jeans- eller en tredje model, hvis det overhovedet vil kunne lade sig gøre både ressource- og tilslutningsmæssigt.

8.6 Metodologiske muligheder

Når man går i gang med et (empirisk) projekt, er man ofte nød til at begrænse sig af tidsmæssige årsager. Som afsnit 5, om de metodologiske overvejelser for dette projekt, antyder, er der flere muligheder for at undersøge såvel MSG som fritidsmatematik i Tyskland.

Indenfor MSG kunne man have observeret et længere undervisningsforløb og forskellige lærere og klassetrin for at danne et mere nuanceret billede af organisationen og den undervisning, der gennemføres i rammerne af den. Ligeledes ville det have været interessant at undersøge undervisningsmaterialerne for alle klassetrin, som Stephan Holger har udarbejdet, og elevbesvarelserne af de tilhørende opgaver. Hvis der havde været mere tid til rådighed, ville det også have været en mulighed at analysere de udeladte dele af den indsamlede data, eksempelvis opgaverne fra matematikolympiaden.

Rent praktisk kan man også gøre sig nogle metodologiske overvejelser i forbindelse med observation af undervisningen. Flere diktafoner ville dels have forhindrede de tekniske fejl i optagelsen af episode 1 og 2, og dels give et bedre indblik i de indbyrdes samtaler mellem eleverne. Men det havde også givet en stor mængde data, som både tager lang tid at bearbejde og som ikke løser problemet med at optage lyd uden billede. Et eksempel, hvor videofilmning ville have været en fordel, er i episode 3, hvor grupperne fremlægger deres resultater ud fra overheads og en del af deres forklaringer består af henvisninger til figurer på overheaden. Desuden kan kropssproget være med til at tyde den didaktiske kontrakt.

Man kunne forestille andre udformninger af fritidsmatematik i de øvrige bundeslande i stil med det franske math en jeans - eksempelvis MINTmachen! projektet i Baden-Württemberg. Grundlæggeren Andreas Filler (2009) beskriver MINTmachen! projektet, som lysten til at løse matematiske opgaver, gåder og knuder ved hjælp af en række teknikker og problemløsningsstrategier. Om det reelt udformer sig i stil med MSG er ikke til at vide. Men det virker nærmere som om, at eleverne beskæftiger sig med opgaver i stil med dem i matematikolympiaden. Disse opgaver indgår også i MSG, men de spiller umiddelbart ingen rolle i undervisningen ud over, at eleverne får tid til at løse disse opgaver. Der er altså stadig mange muligheder for at undersøge fænomenet fritidsmatematik i Tyskland.

9 Konklusion

Formålet med dette speciale var at undersøge begrebet fritidsmatematik i Tyskland. Dette resulterede i en undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af MSG i Berlin.

Den matematiske og didaktiske a priori analyse af brudte lineære funktioner viste, at der sker en markant udvidelse af funktionsbegrebet, når det udvides fra lineære funktioner til brudte lineære funktioner.

Analysen viste desuden, at de brudte lineære funktioner med hensyn til sammensætning udgør en gruppe. Således bliver der mulighed for at indføre det abstrakte gruppebegreb i arbejdet med de brudte lineære funktioner og samtidig give eleverne et indblik i matematik på universitetsniveau.

Undervisningsmaterialerne er udarbejdet af Holger Stephan og fastlægger det matematiske indhold. Noterne indeholder få konkrete eksempler og er skrevet i et matematisk sprog, der visse steder bruger et universitetspræget abstrakt sprog, selv om målgruppen er en niende klasse.

Fordelen ved noterne er, at læreren ikke skal overveje, om det matematiske indhold foregriber skoleundervisningen. Til gengæld bliver noterne udgangspunktet for den del af undervisningen, der ikke består af opgaveregning, og opgaverne inddrages sjældent i klassediskussioner. Dermed adskiller MSG sig fra det tyske MINTmachen!-projekt og math en jeans i Frankrig, som i højere grad anvender problemløsningsbaseret undervisning med opgaver og problemstillinger i centrum.

Den institutionaliserende undervisningsform giver ikke eleverne plads til at opdage matematikken og minder på en del punkter om typisk tysk skoleundervisning. Særligt overraskende er tidspresset i undervisningen. Fritidsaktiviteter, som eksempelvis gymnastik, er netop kendetegnet ved, at der er tid til at gå i dybden med en øvelse. Hvis man ikke kan nå igennem det planlagte program, så udelades dele heraf fremfor at skynde sig igennem det.

Eleverne beskriver det at deltage i MSG som sjovt, udfordrende og anderledes end i skolen og roser især lærerens engagement, det udfordrende matematiske indhold og fællesskabet om matematikken. Det lykkedes altså at formidle matematikken, så det fænger elevernes interesse, selv om de fysiske rammer og dele af undervisningsformerne ligner det, eleverne kender fra skolen.

Endelig kan man spørge sig selv, hvorfor et videnssamfund som Danmark ikke har et tilbud til de unge matematikinteresserede mennesker, om at dyrke matematik i fritiden, når nabolandet har flere tilbud såsom MINT!machen og MSG.

Udformningen er en side af sagen. Med den danske jantelov i baghovedet ville man formentlig foretrække fritidsmatematik, der ikke målrettes specifikt mod matematisk særligt begavede elever som i MSG, men derimod er åbent tilbud for alle matematikinteresserede i stil med math en jeans i Frankrig.

MSG er udstyret med midler fra myndighederne og universitet. Ressourcemæssigt ville et lignende tilbud altså kræve både økonomiske midler og arbejdskraft fra universitetet. For at starte et sådant projekt op kræves medarbejdere, der bræn-

der for projektet. Andreas Filler viste med MINTmachen!-projektet i Heidelberg 2007, at det kan lade sig gøre.

Overordnet set er MSG et fornuftigt fritidstilbud og det har en god tilslutning af elever med en positiv indstilling til undervisningen. Selv om det har været interessant at undersøge undervisningen i rammerne af MSG, finder jeg det skuffende at se, hvordan undervisningen munder ud i en klassisk institutionaliserende form. En form, hvor der ikke er tid til at gå i dybden med det matematiske område, selv når der er behov for det.

Fritidsmatematik rummer mange muligheder både med hensyn til organisering og matematisk indhold. Man kan håbe på, at MINTmachen!, math en jeans og andre former for fritidsmatematik bedre formår at udnytte disse muligheder i forhold til MSG.

Litteratur

- [1] **Berg, Christian (2008)** *Complex Analysis*, kapitel 9, Matematisk Afdeling ved Københavns Universitet.
- [2] **Brousseau, Guy (1997)** *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers
- [3] **Carstensen, Jens; Frandsen, Jesper & Studsgaard, Jens (2006)** *Mat B2 stx*, Systime
- [4] **Filler, Andreas (2009)** *Mathematischer SchülerInnen-Zirkel (Winter 07/08) ein MINTmachen!-Projekt*. Lokaliseret på World Wide Web: http://pille.iwr.uni-heidelberg.de/~mintmachen/Docs/mint_zirkel02.pdf via hjemmesiden [www.http://www.mintmachen.de](http://www.mintmachen.de) (10.5.2009).
- [5] **Hersant, Magali & Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (2005)** Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactics situations, *Educational Studies in Mathematics* 59, s.113-151
- [6] **Holger, Stephan (2009)** *Mathematische Schülergesellschaft (MSG)* (hjemmeside). Lokaliseret på World Wide Web: <http://www.wias-berlin.de/~stephan/msg.htm> (22.4.2009)
- [7] **Humboldt Universitet i Berlin (2009)** *Mathematische Schülergesellschaft „Leonhard Euler“* (hjemmeside). Lokaliseret på World Wide Web: http://didaktik1.mathematik.huberlin.de/index.php?article_id=11 (15.11.2009)
- [8] **LISUM** (Berliner Landesinstitut für Schule und Medien) & Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006) *Mathematik - Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I*, Oktoberdruck AG Berlin. Lokaliseret på World Wide Web: <http://www.berlin.de/sen/bildung/schulorganisation/lehrplaene/index.html> (9.4.2009).
- [9] **Poulsen, Ebbe Thue (2001)** *Funktioner af en og flere variable. Introduktion til matematisk analyse*, Gads Forlag
- [10] **Senatsforvaltning for uddannelse, videnskab og forskning (2006)** (Oversat fra tysk: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung), *Aufbau des Berliner Schulsystems*, lokaliseret på World Wide Web: <http://www.berlin.de/sen/bildung/bildungswege/> (12.5.2009)
- [11] **Stewart, Ian & Tall, David (1983)** *Complex Analysis*, Cambridge University Press

- [12] **Stiegler, James W. & Hiebert, James (1999)** *The Teaching Gap*, The Free Press
- [13] **Tosev, Julian (2007)** Specialerapport: *Forskningslignende situationer*, lokaliseret på World Wide Web:
<http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie5/SPECIALEJULIANTOSEVmedforside.pdf>
- [14] **Warfield, Virginia M. (2006)** *Invitation to Didactique*, lokaliseret på World Wide Web:
<http://www.math.washington.edu/warfield/~Inv%20to%20Did66%207-22-06.pdf>
- [15] **Winsløw, Carl (2006)** *Didaktiske elementer- en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*, Forlaget Biofolia

A Bilag

A.1 Notematerialet

Her er den del af undervisningsnoterne om brudte lineære funktioner, som indgår i den observerede undervisning. Det samlede notemateriale er udarbejdet af Holger Stephan og findes på hjemmesiden <http://www.wias-berlin.de/~stephan/msg.htm>. En del af materialet er ikke tilgængeligt på hjemmesiden, men kan tilsendes per mail ved at henvende sig til Holger Stephan.

1 Funktionen

1.1 Definitionen und Bezeichnungen

Eine Funktion f ist eine eindeutige Abbildung einer Menge X in eine andere Y . Ist $x \in X$, dann ist $f(x) = y \in Y$ das **Bild** des Elementes x . x heißt das **Urbild** des Elementes y .

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y$$

Die Teilmenge $D(f)$ von X , für die die Abbildung f definiert ist, heißt **Definitionsbereich** von f (oft wird $X = D(f)$ gewählt). Die Teilmenge $R(f)$ von Y , die aus den Bildern der Elemente von $D(f)$ gebildet wird, heißt **Wertebereich** von f .

Gibt es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, heißt die Funktion **eineindeutig**. In diesem Fall gibt es eine Funktion

$$g : Y \rightarrow X, \quad g(y) = x,$$

die die Wirkung der Funktion f rückgängig macht, das heißt, die jedem Element $y = f(x)$ sein Urbild x zuordnet. Diese Funktion heißt **inverse** Funktion (oder Umkehrfunktion) zu f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Würde man für f nicht Eineindeutigkeit fordern, könnte man zwar auch eine inverse Abbildung definieren, sie wäre aber nicht eindeutig und somit keine Funktion.

Hat man zwei Funktionen f und g

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y; \quad g : Y \rightarrow Z, \quad g(y) = z,$$

kann man eine Funktion $h = g \circ f$ als $h(x) = g(f(x))$ definieren. Diese Funktion bildet X nach Z ab:

$$h = g \circ f : X \rightarrow Z, \quad h(x) = z$$

und wird **Verkettung** (Hintereinanderausführung, mittelbare oder verkettete Funktion) der Funktionen f und g bezeichnet.

Unter den Funktionen, die eine Menge auf sich selbst abbilden,

$$f : X \rightarrow X$$

gibt es eine Funktion, die jedem Element sich selbst zuordnet. Diese Funktion heißt **identische** Funktion und wird mit id_X bezeichnet. Es ist also $id_X(x) = x$. Wenn es nicht zu Verwechslungen kommt, kann man den Index X auch weglassen. Er bezeichnet, daß es sich um die identische Abbildung der Menge X auf sich handelt.

Ist f eineindeutig und f^{-1} ihre inverse Funktion

$$f : X \rightarrow Y, \quad f^{-1} : Y \rightarrow X,$$

dann sind die Verkettungen $f^{-1} \circ f$ oder $f \circ f^{-1}$ Abbildungen der Menge X (bzw. Y) auf sich und zwar derart, daß jedem Element dasselbe Element zugeordnet wird. Es sind also identische Abbildungen. Es gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.

1.2 Gebrochen lineare Funktionen

Gebrochen lineare Funktionen sind Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} .$$

Der triviale Fall – wenn der Bruch kürzbar ist – ist uninteressant. Er wird ausgeschlossen. Das ist genau dann der Fall, wenn $ad - bc = 0$. Es soll also stets

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

gelten. Konstante Funktionen $f(x) = C$ gehören also nicht zu dieser Funktionenklasse.

Jedes Quadrupel (a, b, c, d) reeller Zahlen definiert eine gebrochen lineare Funktion, allerdings nicht eindeutig. Die beiden Quadrupel (a, b, c, d) und $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c, k \cdot d)$ bilden die gleiche Funktion, denn

$$\frac{k \cdot ax + k \cdot b}{k \cdot cx + k \cdot d} = \frac{k(ax + b)}{k(cx + d)} = \frac{ax + b}{cx + d} .$$

1.2.1 Beispiele

Alle linearen Funktionen (außer den Konstanten) gehören hierzu. Sie bilden den Spezialfall $c = 0$ und $d = 1$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{ax + b}{0 \cdot x + 1} = ax + b$$

Ein weiterer Spezialfall hiervon ist

$$f(x) = id(x) = x .$$

Das Quadrupel $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1)$ definiert diese identische Funktion. Für sie gilt $\Delta = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

Der Spezialfall $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 0)$ definiert die Funktion

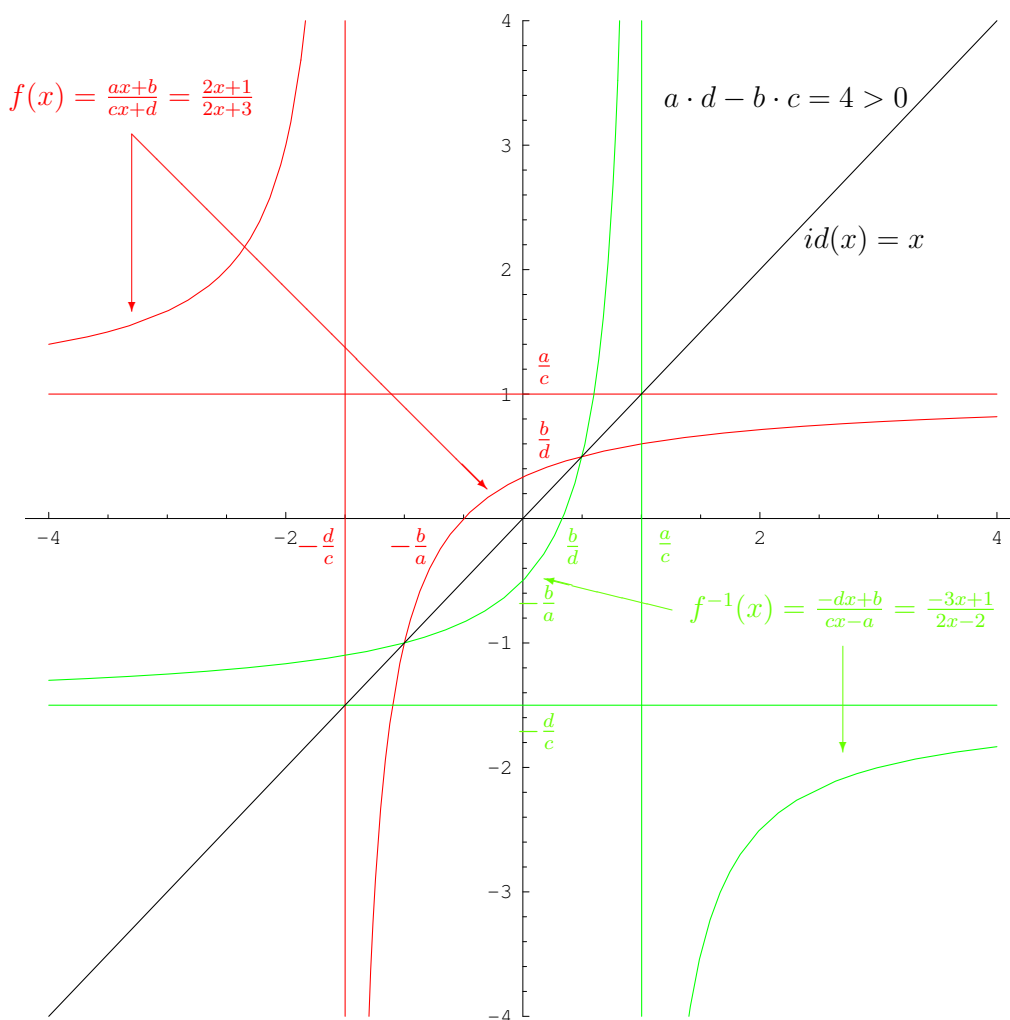
$$f(x) = \frac{1}{x} .$$

1.2.2 Der Graph einer gebrochen linearen Funktion mit $\Delta > 0$

Das folgende Bild (Bild 1) zeigt die gebrochen lineare Funktion

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x + 3}$$

im (x, y) -Koordinatensystem (rote Funktion). Sie besteht (wenn $c \neq 0$) aus zwei Ästen.

Bild 1: Der Graph einer gebrochen lineare Funktion mit $\Delta > 0$

1.2.3 Besondere Punkte und Geraden

Folgende besondere Punkte fallen am Graph der Funktion auf:

Schnittpunkt mit der x -Achse (Nullstelle des Zählers) ... $x = -\frac{b}{a}$

Schnittpunkt mit der y -Achse (Wert von $f(0)$) $y = \frac{b}{d}$

Folgende besondere Geraden fallen am Graph der Funktion auf:

Polstelle (Nullstelle des Nenners) $x = -\frac{d}{c}$

Asymptotik (Gerade, der sich die beiden Äste nähern) ... $y = \frac{a}{c}$

Diese beiden Geraden sind ebenfalls graphisch dargestellt (rot).

1.2.4 Der Graph einer gebrochen linearen Funktion mit $\Delta < 0$

Das folgende Bild (Bild 2) zeigt die gebrochen lineare Funktion

$$f(x) = \frac{x+2}{4x+3}$$

im (x, y) -Koordinatensystem (rote Funktion).

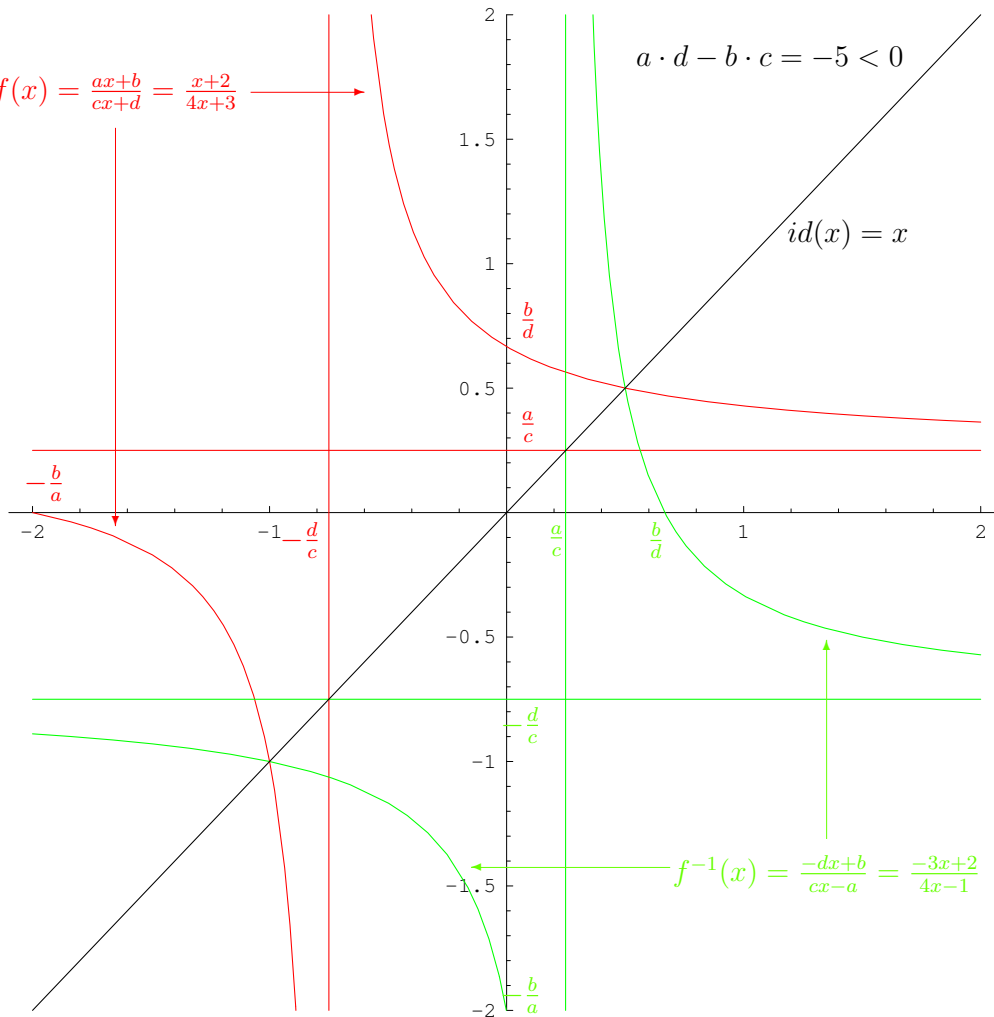


Bild 2: Der Graph einer gebrochen linearen Funktion mit $\Delta < 0$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Polstelle und Asymptotik sind ebenfalls dargestellt.

1.2.5 Die inverse Funktion

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = y$ bezüglich x erhält man die inverse Funktion zu $f(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} &= y \\
ax+b &= cxy+dy \\
ax-cxy &= dy-b \\
x(a-cy) &= dy-b \\
x &= \frac{dy-b}{-cy+a}
\end{aligned}$$

Die inverse Funktion zu $f(x)$ ist also mit

$$f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

wieder eine gebrochen lineare Funktion mit demselben $\Delta = ad - bc$.

Schnittpunkt mit der x -Achse und Polstelle von $f(x)$ bilden Schnittpunkt mit der y -Achse und Asymptotik von $f^{-1}(x)$ und umgekehrt.

In Bild 1 und 2 sind die entsprechenden Graphen grün dargestellt.

1.2.6 Verkettung zweier gebrochen linearer Funktionen

Es seien

$$f(x) = \frac{a_1x+a_2}{a_3x+a_4} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{b_1x+b_2}{b_3x+b_4}.$$

Dann ist die Verkettung (das Hintereinanderausführen)

$$\begin{aligned}
h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= \frac{b_1 \frac{a_1x+a_2}{a_3x+a_4} + b_2}{b_3 \frac{a_1x+a_2}{a_3x+a_4} + b_4} = \\
&= \frac{b_1a_1x + b_1a_2 + b_2a_3x + b_2a_4}{b_3a_1x + b_3a_2 + b_4a_3x + b_4a_4} = \\
&= \frac{(b_1a_1 + b_2a_3)x + b_1a_2 + b_2a_4}{(b_3a_1 + b_4a_3)x + b_3a_2 + b_4a_4}
\end{aligned}$$

wieder eine gebrochen lineare Funktion.

1.2.7 Algebraische Eigenschaften der Verkettung

Das Hintereinanderausführen zweier gebrochen linearer Funktionen ergibt wieder eine solche Funktion. Das heißt, diese Operation führt nicht aus der Menge der gebrochen linearen Funktionen heraus. Man sagt, diese Menge ist abgeschlossen bezüglich dieser Operation. Das entspricht der Multiplikation unter gebrochenen Zahlen. Hier gibt es allerdings einen prinzipiellen Unterschied. Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist kommutativ, das heißt, es gilt stets $x \cdot y = y \cdot x$. Das Hintereinanderausführen zweier gebrochen linearer Funktionen ist dagegen im allgemeinen nicht kommutativ. Ist z.B.

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{3x+4}{2x+5},$$

dann ist

$$(g \circ f)(x) = \frac{10x + 14}{9x + 14}$$

aber

$$(f \circ g)(x) = \frac{10x + 18}{7x + 14} \neq (g \circ f)(x) .$$

Unter gebrochenen Zahlen gibt es eine, die mit anderen Zahlen multipliziert dieselbe Zahl ergibt. Das ist die 1. Es gilt stets $1 \cdot x = x$. Unter gebrochen linearen Funktionen gibt es auch eine Funktion, bei der die Verkettung mit einer beliebigen anderen Funktion wieder diese Funktion ergibt. Das ist die identische Funktion. Es gilt stets $id \circ f = id \circ f = f$. Die 1 für die gebrochenen Zahlen oder die identische Funktion id für die gebrochen linearen Funktionen heißt neutrales Element.

Zu jeder gebrochenen Zahl $x \neq 0$ gibt es einen Kehrwert $\frac{1}{x}$. Das ist die Zahl, die $-$ multipliziert mit x – das neutrale Element – also 1 – ergibt.

Zu jeder gebrochen linearen Funktion $f(x)$ (mit $\Delta \neq 0$) gibt es ebenfalls einen „Kehrwert“ bezüglich der Verkettung. Das ist die Funktion, die auf $f(x)$ angewendet, das neutrale Element ergibt, also die inverse Funktion, denn es gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

Eine Menge X , in der eine Operation $\cdot$ definiert ist, die folgende Eigenschaften hat:

- $x, y \in X \implies x \cdot y \in X$.
- Es existiert ein neutrales Element e mit $x \cdot e = e \cdot x = x$.
- $x \in X \implies$ Es existiert ein inverses Element x^{-1} mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

heißt **Gruppe**. Gilt stets $x \cdot y = y \cdot x$ heißt die Gruppe kommutativ oder **Abelsche Gruppe**. Die gebrochenen Zahlen ohne 0 bilden also eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation. Die gebrochen linearen Funktionen bilden eine Gruppe bezüglich der Verkettung.

Ähnlich wie Potenzen von gebrochenen Zahlen lassen sich „Potenzen“ für gebrochen lineare Funktionen definieren:

$$\begin{aligned} f^0(x) &= id(x) \\ f^1(x) &= f(x) \\ f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) \\ f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = \\ &= (f \circ f^2)(x) = (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f(f^2(x)) \\ &\dots \\ f^n(x) &= (f \circ f^{n-1})(x) = (f^{n-1} \circ f)(x) = f^{n-1}(f(x)) = f(f^{n-1}(x)) \end{aligned}$$

Es gelten Analoga der bekannten Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} f^{n+m} &= f^n \circ f^m = f^m \circ f^n \\ f^{-n} &= (f^n)^{-1} \end{aligned}$$

Die positiven gebrochenen Zahlen bilden für sich ebenfalls eine Gruppe, da das Produkt zweier positiver Zahlen und der Kehrwert positive Zahlen sind. Definiert man die gebrochen linearen Funktionen mit $\Delta > 0$ als „positive“ und die mit $\Delta < 0$ als „negative“, dann gelten entsprechende Eigenschaften wie für die gebrochenen Zahlen (negativ mal positiv = negativ, negativ mal negativ = positiv).

A.2 Opgaver

Her er arbejdsblad 2, der indeholder de indgående opgaver i undervisningen. Arbejdsbladet er udarbejdet af Holger Stephan og flere arbejdsblade findes på hans hjemmeside (se litteraturlisten eller afsnit A.1).

Aufgaben Klasse 9, 2. Blatt

Aufgabe 2.1 $\diamond$ (4 Punkte)

Bestimme eine lineare Funktion $f(x)$, die für $x = 2$ den Wert 3 und für $x = -3$ den Wert 28 annimmt.

Aufgabe 2.2 $\diamond$ (6 Punkte)

Bestimme eine lineare Funktion $f(x)$, die für $x = x_1$ den Wert y_1 und für $x = x_2$ den Wert y_2 annimmt.

Aufgabe 2.3 $\diamond$ (5 Punkte)

Bestimme für die gebrochene lineare Funktion

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$$

die Schnittpunkte mit den Achsen, Asymptotik, Polstelle und inverse Funktion und zeichne sie für $0 < x < 6$.

Aufgabe 2.4 $\diamond$ (7 Punkte)

Bestimme für die gebrochene lineare Funktion

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

die Schnittpunkte mit den Achsen, Asymptotik, Polstelle und inverse Funktion.

Aufgabe 2.5 $\diamond$ (5 Punkte)

Welche Bedingung müssen ganze Zahlen a , b , c und d erfüllen, so daß die Lösung des Gleichungssystems (bezüglich x und y)

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ cx + dy &= B \end{aligned}$$

für beliebige ganzzahlige A und B stets ganzzahlig ist?

Aufgabe 2.6 ♡♣ (5 Punkte)

Ein Spiel für zwei Personen: Von einer Reihe von 20 Streichhölzern müssen die beiden Spieler abwechselnd ein, zwei oder drei Hölzer wegnehmen. Wer das letzte nehmen muß, hat verloren. Wie müssen die Spieler spielen, um zu gewinnen?

Aufgabe 2.7 ♠ (5 Punkte)

(Quelle: Olympiade „Ewrika – 1999“ 1. Klasse, E.L. Arinkina)

In einer Schlange stehen 13 Kinder nach Eis an. Der Eisverkäufer bemerkt, daß unter beliebigen 5 hintereinanderstehenden Kindern genau drei Mädchen sind.

a) Was ist die Maximalzahl von Mädchen in der Schlange?

b) Was ist die Minimalzahl von Mädchen in der Schlange?

Aufgabe 2.8 ♣ (7 Punkte)

Zeige, daß man aus $n + 1$ verschiedenen (positiven) natürlichen Zahlen, die kleiner als $2n$ sind, drei solche auswählen kann, bei denen die Summe von zweien gleich der dritten ist!

Aufgabe 2.9 ♣ (7 Punkte)

Über 10 reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ist bekannt:

$$1) \quad \sum_{j=1}^{10} a_j = 0, \quad 2) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 10} a_j a_i = 0$$

Beweise:
$$\sum_{j=1}^{10} a_j^3 = 0$$

Hinweise:

Letzte Aufgabe zum Lösen für die Familie

Konstruktionsaufgaben stichpunktartig (ohne Zeichnung).

♣ ... Aufgaben zur Vorbereitung auf Olympiaden. Lösung möglichst exakt aufschreiben!

◇ ... Aufgaben zum Üben aktuellen Stoffs

♡ ... Aufgaben zur Vorbereitung neuen Stoffs

♠ ... Wichtige Aufgabe, auf die später noch mehrfach zurückgekommen wird.

Dr. Holger Stephan

e-mail: stephan@wias-berlin.de

URL: <http://www.wias-berlin.de/people/stephan/msg.htm>

Tel.: 56290041 (privat)

20372442 (Weierstraß-Institut)

A.3 Opgavebesvarelser

Her er elevernes besvarelse af de indgående opgaver i specialet. Rækkefølgen er tilfældig, da besvarelserne indeholder flere opgaver.

2.3) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$

Nullstelle des Zählers: $+ \frac{4}{3} = x$

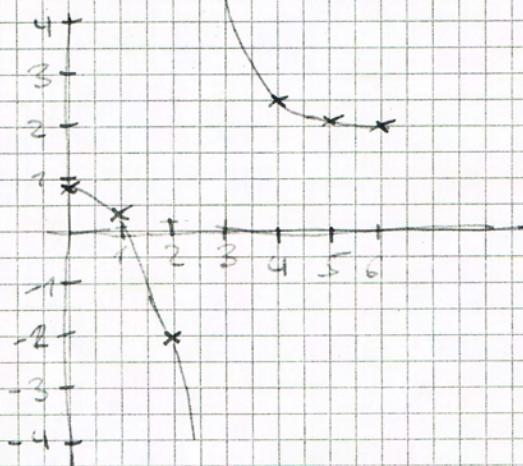
~~f(0)~~ $f(0) = y = \frac{4}{5}$

Asymptotik: $y = \frac{3}{2} = 1,5$

Polstelle: $x = \frac{5}{2} = 2,5$

invers

inverse Funktion: $f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{-2x+3}$



2.4) Nullstelle des Zählers: $x = -\frac{b}{a}$

~~Schnitt~~

$f(0): y = \frac{b}{d}$

Polstelle: $x = -\frac{d}{c}$

Asymptotik: $y = \frac{a}{c}$

$f^{-1}(x) = \frac{cx-b}{-ax+a}$

2.6) Man muss immer, ~~Resten~~
die Restzahl $\text{ modulo } 4$ ~~ist~~
nehmen. Also bei 18:
 $18 \text{ mod } 4 = 2$
Wenn bei $18 \text{ mod } 4 = 0$
ist es egal wie viele man
nimmt, man hat verloren.

Aufgabe 2.3.

David

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$$

$$a = 3$$

$$b = -4$$

$$c = 2$$

$$d = -5$$

Zurücksetzen:

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x + 4}{-2x + 3}$$

Schnittpunkt mit x: (1.)

$$x = -\frac{-4}{-2} = 4/3$$

" " mit y (2.)

$$y = \frac{-4}{-5} = 4/5$$

Asymptotik: (3.)

$$y = \frac{3}{2}$$

Polstelle: (4.)

$$x = -\frac{-5}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.4

$$a = a$$

$$b = b$$

$$c = c$$

$$d = d$$

$$1. \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$2. \quad y = \frac{c}{a}$$

$$3. \quad x = -\frac{d}{c}$$

$$4. \quad y = \frac{a}{c}$$

Zurücksetzen:

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$$

2.6.:

~~Ziel~~ Ziel: auf ~~4~~ kommen:

dann: wenn gegen 4 dann
3, wenn 2 dann 2 und wenn
3 dann 1

Der, der Anfangsgewinn

2.7.:

~~a)~~ a) 9 5 M M M J J M M M J J M M M

b) 7 5 J J M M M J J M M M J J M

Parabel 2.4

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\text{Allgemein } f(x) = mx + n$$

$$\hookrightarrow m = \frac{ax}{cx} \quad n = \frac{b}{d}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist im Punkt $\frac{b}{d}$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad | \cdot (cx+d)$$

$$\Leftrightarrow y(cx+d) = ax+b \quad | - ycx - b$$

$$\Leftrightarrow yd - b = ax - ycx$$

$$\Leftrightarrow yd - b = x(a - cy)$$

Für den Schnittpunkt mit der x-Achse setzt man $y=0$ ein:

$$\Leftrightarrow 0 \cdot d - b = x(a - c \cdot 0)$$

$$\Leftrightarrow -b = xa \quad | :a$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} = x$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist im Punkt $-\frac{b}{a}$

(Geradenstrahl keine Gerade nicht)

Die Asymptotik (Nenner des Bruchs) ist die eine Funktion, $f(x) = mx + n$

das in, für $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ist die Asymptote gleich $\frac{a}{c}$.

Eric

~~$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$~~

~~schon Minutchen mit
Lösen, Asymptoten
Polstelle, umgekehrte Funktion~~

suchen für

2.5

~~I~~ $ax + by = A$

~~II~~ $cx + dy = B$

I₁) $ax + by = A$

$$ax = A - by$$

$$x = \frac{A - by}{a}$$

→ A und das Produkt
by müssen Vielfache
von a sein

I₂) $ax + by = A$

$$by = A - ax$$

$$y = \frac{A - ax}{b}$$

→ A und das Produkt
ax müssen Vielfache
von b sein

II₁) $cx + dy = B$

$$cx = B - dy$$

$$x = \frac{B - dy}{c}$$

→ B und das Produkt
dy müssen Vielfache
von c sein

II₂) $cx + dy = B$

$$dy = B - cx$$

$$y = \frac{B - cx}{d}$$

→ B und cx
müssen Vielfache von
d sein

→ a, b, c, d müssen einen g.g.T haben.

Phuong Duyen Tran

2.1.

geg. $f(2) = 3$ $P_1(2|3)$ ges. $\boxed{f(x) = mx + n}$
 $f(-3) = 28$ $P_2(-3|28)$

I. Bestimmen v. m

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28 - 3}{-3 - 2} = -\frac{25}{5} = \boxed{-5} = m$$

$$\Rightarrow f(x) = -5x + n$$

II. Bestimmen v. n

$$P_1 \text{ einsetzen: } f(2) = 3 = -5 \cdot 2 + n$$

$$3 = -10 + n \quad | +10$$

$$\boxed{13 = n}$$

$$\boxed{f(x) = -5x + 13}$$

2.2.

$$P_1(x_1 | y_1)$$

$$f(x) = mx + n$$

$$P_2(x_2 | y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + n (= y)$$

$$\text{Einsetzen } P_1 \rightarrow f(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + n = y_1$$

$$= \frac{(y_2 - y_1) \cdot x_1}{x_2 - x_1} + n = y_1 \quad | - \frac{(y_2 - y_1) \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= n = \frac{y_1}{1} - \frac{(y_2 - y_1) \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{y_1 \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{(y_2 - y_1) \cdot x_1}{x_2 - x_1} \quad | \cdot x$$

$$\cdot (x_2 - x_1) = y_1 \cdot (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \cdot x_1$$

$$= y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 - (y_2 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_1)$$

$$= y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 - y_2 \cdot x_1 + y_1 \cdot x_1$$

$$= y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1$$

$$n \cdot (x_2 - x_1) = y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1 \quad | : (x_2 - x_1)$$

$$n = \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = y$$

$$\frac{(y_2 - y_1) \cdot x}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = \frac{y_2 \cdot x - y_1 \cdot x + y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{-y_2 \cdot x - y_2 \cdot x_1 + y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x}{x_2 - x_1}$$

$$y_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = n$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1$$

$$- \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$= (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.7.

a) ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
 max. 9 Mädchen
 (von 5 immer 3 Mädchen, um viele Mädchen → immer an Anfang)

b) ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
 mind. 7 Mädchen
 (Mädchen ans Ende von dens)

2.8. $f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$ gebrochene ~~Stück~~ line. Funktion:
 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

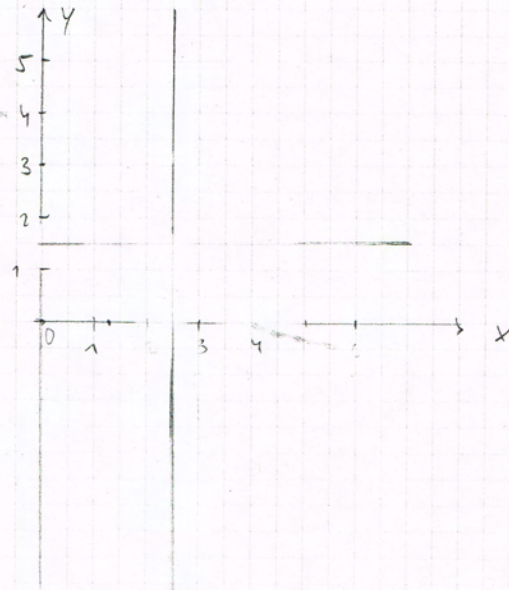
Schnittpunkt mit x-Achse: $x = -\frac{b}{a}$
 $\Rightarrow \frac{+4}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Schnittpunkt mit y-Achse: $y = \frac{b}{a}$
 $\Rightarrow x = 0 \quad f(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d}$
 $\frac{-4}{-5} = \boxed{\frac{4}{5}}$

Asymptote: $y = \frac{a}{c} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2} = y}$

NR.: $\rightarrow xy = 0$
 $f(x) = 0 = \frac{ax+b}{cx+d} \quad | \cdot (cx+d)$
 $0 = ax+b \quad | -b$
 $-b = ax \quad | :a$
 $\boxed{-\frac{b}{a} = x}$

Fortsetzung 2.3. (Phuong Duyen Tran)
Polstelle: $x = -\frac{d}{c} \rightarrow \frac{5}{2}$



Ständen
Tang

2.1. $f(x) = mx + n$ ← allgemeine Formel

$$I \quad 3 = 2m + n \quad | -n$$

$$II \quad 28 = -3m + n \quad | -n$$

$$I' \quad 3 - n = 2m \quad | : 2$$

$$II' \quad 28 - n = -3m$$

$$I'' \quad \frac{3-n}{2} = m$$

$$II' \quad 28 - n = -3m$$

← Einsetzungsverfahren

I'' in II'

$$28 - n = -3\left(\frac{3-n}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 28 - n = \frac{-9+n}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 56 - 2n = -9 + n \quad | +2n \quad | +9$$

$$\Leftrightarrow 65 = 3n \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow 13 = n$$

$$n = 13 \text{ in } I$$

$$3 = 2m + 13 \quad | -13$$

$$-10 = 2m \quad | : 2$$

$$-5 = m$$

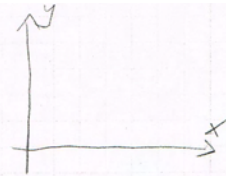
$$\hookrightarrow f(x) = -5x + 13$$

2.2

$$P_1 (x_1 | y_1)$$

$$P_2 (x_2 | y_2)$$

$$f(x) = \ln x + n$$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + n$$

$$y_1 - \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x_1 = n$$

$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = n$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$= (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1$$



- 2.7. Unter den 13 ^{Kindern} Mädchen können maximal b) minimal
- a) 9 Mädchen sein, weil wenn der Mann sich 5 Kindern aussucht (darunter 3 Mädchen) und eins dieser Mädchen wegnimmt dazu ein neues Kind aussucht, so muss es ein Mädchen sein. Doch irgendwann nimmt er aus einer Gruppe einen Jungen raus und lässt 3 Mädchen weiterhin drin, so muss das neue Kind ein Junge sein.
- b) minimal sind es 7 Mädchen.

$$2.3 \quad f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

Schnittpunkt
auf der
x-Achse

$$y = \frac{b}{a}$$

$$= \frac{4}{5}$$

Schnittpunkt
auf der
y-Achse

$$\text{Asymptote} = y = \frac{3}{2}$$

$$\text{Polstelle} = x = \frac{5}{2}$$

2.3

Juni

$$f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$$

~~$$y = 2x - 5 = 0 \quad | +5$$~~

~~$$2x = 5 \quad | :2$$~~

~~$$x = 2,5$$~~

$$f(0) = 2,5$$

~~Schnittpunkt $y(2,5|0)$~~

$$x = -\frac{4}{3}$$

 $\leftarrow$ Schnittpunkt mit x -Achse

$$y = \frac{4}{5}$$

 $\leftarrow$ Schnittpunkt mit y -Achse

$$\text{Polstelle: } x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Asymptotik: } y = \frac{3}{2}$$

2.4.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

2.7 maximal 3 Mädchen
 minimal 7 Mädchen

2.1.

Kevin

$$f(2) = 3$$

$$f(-3) = 28$$

$$2y + z = 3$$

$$-3y + z = 28$$

$$5y = -25$$

$$y = -5$$

$$z = 13$$

$$f(x) = -5x + 13$$

2.2. $f(x_1) = y_1$

$m x_1 + n = y_1$

$f(x_2) = y_2$

$m x_2 + n = y_2$

$m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \quad | : (x_1 - x_2) \quad x_1 \neq x_2$

$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$n = y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2$

$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2 + y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2 = y_2$$

$$x_2 \frac{x_1 - y_2}{x_1 - x_2} (1 - 1) =$$

$$f(x) = m x + n$$

$$f(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_0 + y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2$$

$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 - x_2) + y_2$$

2.5. Die Spieler müssen die Zahl: 1, übriglassen, dann hat dieser gewonnen. Der andere muss nehmen. Wenn dieser vorher 5 übriglässt, kann er in jedem Fall die 1 erreichen. Wichtig ist die Differenz von 4. Wenn der andere x Stücke nimmt, nimmt er $4 - x$ Stücke. Das heißt, er muss zuvor 9, 13, 17 Stücke lassen. Der, der anfängt, gewinnt, indem er 3 nimmt.

$$2.3. f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$$

Kevin

Nullstelle des Zählers: $x = \frac{4}{3}$

$$f(0) = \frac{4}{5}$$

Polstelle: $x = 2,5$

$$\text{inverse Funktion: } f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{-2x+3}$$

2.7. a) M. M. M. J. J. M. M. M. J. J. M. M. M.

9 Mädchen

b) J M M M J M J M J M J

7 Mädchen

oder

J J M M M J J M M J J M

7 Mädchen

$$2.4 \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad | \cdot (cx+d)$$

$$y(cx+d) = ax+b$$

$$ycx + yd = ax + b \quad | -b$$

$$ycx + yd - b = ax \quad | :a$$

$$\frac{ycx + yd - b}{a} = x$$

$$x_0 = 0 = \frac{ycx + yd - b}{a}$$

P/

$$f(x) = \frac{b}{d}$$

$$P_y(0 | \frac{b}{d})$$

P_y = Schnittpunkt
mit der y-Achse

$$ycx + yd = ax + b \quad | -ycx$$

$$yd = ax + b - ycx \quad | -b$$

$$yd + b = ax - ycx$$

$$yd + b = x(a - yc) \quad | (a - yc)$$

$$-\frac{yd + b}{a - yc} = x$$

$y=0$ für x_0

$$-\frac{0 \cdot d + b}{a - 0 \cdot c} = -\frac{b}{a}$$

A.4 Powerpoint-præsentation

Powerpoint-præsentationen, der inddrages i episode 6.

Algebraische Strukturen



- Rechengesetze und Gruppenaxiome
- Gruppe als algebraische Struktur
- Beispiele für Gruppen aus verschiedenen mathematischen Gebieten

Definition

Ein Paar $(G, \circ)$ mit einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ heißt **Gruppe**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

A1) **Assoziativität**: Für alle Gruppenelemente a, b und c gilt:
 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

A2) **Neutrales Element**: Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, mit dem für alle Gruppenelemente a gilt: $a \circ e = e \circ a = a$.

A3) **Inverses Element**: Zu jedem Gruppenelement a existiert ein Element a^{-1} mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch oder kommutativ, wenn das folgende Axiom erfüllt ist:

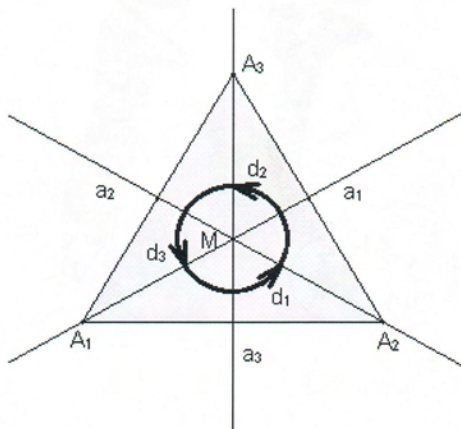
Kommutativität: Für alle Gruppenelemente a und b gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

Beispiele für Gruppen

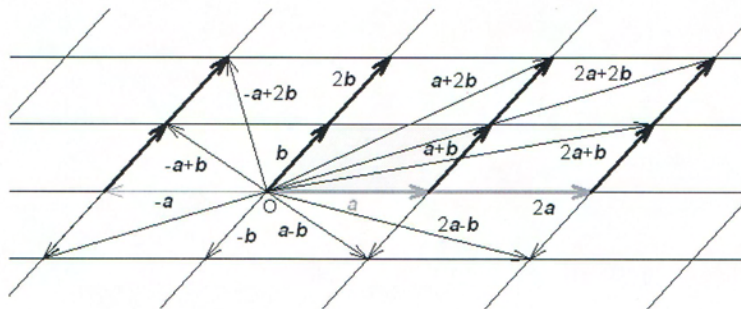
- Die **additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$** der **ganzen Zahlen** mit dem neutralen Element 0.
- Die **additiven Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$** der **rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen** sind ebenfalls abelsche Gruppen.
- Die **multiplikativen Gruppen $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$** der **rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen** sind ebenfalls abelsche Gruppen.
- Die **Menge aller reellen Funktionen bez. der Additon.**
- Die **Symmetrische Gruppe S_n** , die aus alen Permutationen (Vertauschungen) einer n-elementigen Menge besteht. Die Gruppenoperation ist Hintereinanderausführung der Permutationen.

Die **Diedergruppe D_n** besteht aus den Drehungen um das Vielfache von $2\pi/n$ eines regelmäßigen n-Ecks um seinen Mittelpunkt als Drehzentrum und den n verschiedenen Achsenspiegelungen.



- $D_3 = \{i, s_1, s_2, s_3, d_1, d_2\}$
- s_1 : Spiegelung an der Achse a_1
- s_2 : Spiegelung an der Achse a_2
- s_3 : Spiegelung an der Achse a_3
- d_1 : Drehung um 120° gegen den Uhrzeigersinn mit Drehzentrum M

- Die **Translationsgruppe T eines ebenen Gitters** wird durch die Linearkombination $x = m \mathbf{a} + n \mathbf{b}$ der Verschiebungsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit ganzzahligen Parametern m und n , bezogen auf einen beliebigen Knotenpunkt als Zentrum O , gebildet.



Literaturempfehlungen

- Michael Artin, Algebra, Berlin 1993
- Jürg Kramer, Zahlen für Einsteiger, Berlin 2008
- Herbert Kästner und Peter Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht, Leipzig 1885



A.5 Interview med Swetlana Nordheimer.

Was ist die Ziel mit dem Thema Gebrochene Lineare Funktionen? Die MSG darf nicht auf die Schulstoff eingreifen, aber doch Beispiele sowie die Funktionsbegriffe. Die gebrochene lineare Funktionen ist ausgenommen und keine quadratische Funktionen, weil sie in der Schule vorkommen. Die Schüler kennen schon lineare Funktionen und man erweitert durch die gebrochene lineare Funktionen ihre Funktionsbegriff ohne am Schulstoff zu eingreifen.

Die Unterrichtsmaterial kommt von Holger Stephan. Wieweit beeinflusst er die Unterrichtsform? Er hat nur die Inhalte vorbereitet und hat nichts mit Sozialform oder Pädagogik zu tun. Er hat die Texte geschrieben und dadurch Zusammenhänge und Pfaden durch die 8. Bis 13. Klasse gemacht. Er sichert, dass das Material die Schulstoff nicht vorbegriffen. Er ist ein Teil der Olympiade und hat auch dadurch viele Aufgaben genommen und klassifiziert. Die Schüler machen die Arbeitsblätter zu Hause wie an der Uni. Die werden dann bei der Tafel gemacht und Lösungen werden aufgegeben und diskutiert - so wie eine Art von Schüler-Universität. Jeden Blatt erhält auch Aufgaben ausser des Thema.

Wenn Sie ihre Verlaufsplanung machen, nehmen Sie dann Rücksicht auf eine theoretische Grundlage sowie die Theorie über didaktische Situationen oder Open Approach? Die Inspiration der MSG kommt teilweise von Russland, die auch eine Art von Schüleruniversität hat.

Transskribering af interview med SN - lydfil 4.

Man war ja oft von Mathematikern und nicht von Mathematiklehrern unterrichtet. Das war oft Mathematik Studenten oder Lehrer d.h. das die Didaktik oder sozialformen, die waren eher im Hintergrund, aber die Mathematik stand im Vordergrund. Und Jeder hat so ein bisschen das gemacht, was ihm Spass gemacht hat. Und die Schüler gehörten denn dazu. Das war sehr selten, das man dann Didaktikern hatte - auch in Sowjetmilleui, sie auch bei Lehrbücher geschrieben haben oder Sachen oder neue methodische formen ausprobiert haben bei uns. So ist es auch jetzt hier. Das ich versuche, dass was ich für meine Doktorarbeit ausdenke, versuche auch dort auszuprobieren bei den Schülern. Und weil das ja noch mehr oder weniger halbfertig ist, ist es auch oft so das die Schüler sich mal langweilen, oder weil es nicht gut genug durchgedacht ist. In dem Sinne ist die Begabtförderung auch eine Art von Laborsituation, wo wir Sachen die an der Schule ausprobiert werden, erst dort ausprobieren und schauen was in dieser - das es noch mehr Laborsituation, wie die begabten oder interessierten Schüler darauf reagiert. Und das dann für durchschnittlichen Fall zu modifizieren. Und weil wir ja auch davon ausgehen, dass das es Persönlichkeiten sind, die ihren Weg ziemlich genau kennen, ist die Gefahr dass wir durch unfertige denen schaden auch weniger - also durch unfertige Methoden. Weil sie so wie so irgendwie selbst weitermachen werden. Genau. Das man es nicht irgendwie ein angst für die fach aufbauen kann. Genau, dass man sie nicht verwirren kann. Natürlich wenn man

das zu viel macht, ist es mir auch passiert, das man auch den einen oder anderen verwirrt. Und deshalb muss man doch letzten Endes vorsichtiger sein, aber da kann man schon viele Sachen ausprobieren. Für mich ist es als Didaktiker interessant, wie wirkt es da. Und jetzt versuche ich, weil ich ja Didaktik mache, auch versuche ich Methoden Vielfalt - so viel ich zeit habe. Das da auch mal Gruppenarbeit stattfindet, und dann wenn man austauscht mit Kollegen aus Ungarn z.B., und die sagen, die haben ja auch starke Vorbereitungsaufgabe in Olympiade und Tests und schauen wie sie das machen. Zum Beispiel die Test schreiben wo die Schüler austauschen und abgeben können- nicht nur Einzelleistung, sondern von Einzelleistung auf Teamleistung. Ein bisschen rüber gehen. Ich glaube, dass es dauern wird. Das versuche ich. Und einige Schüler machen das ganz gerne - dass sie die Olympiade mal als Team machen . [Ein bisschen über die Känguru-Wettbewerb und Gruppenwettbewerbe]

Es ist natürlich so das wir keine Noten geben und auch keine strenge Vorgaben machen können. Alles beruht so zu sagen auf Spass. Wenn sie spass haben, dann kommen sie, wenn nicht dann hören sie irgendwann auf. Es gibt keine Konsequenzen und wir rechnen damit, so dass wir in der 7. Klasse mit 4 Gruppen anfangen und in der 13. Klasse nur eine kleine Gruppe, die so weit kommt. Weil Interesse gehört nach unseren Definition zu Begabung dazu - deshalb lassen wir die so zu sagen gehen, so dass nur die interessierten bleiben. *Und deshalb gibt es immer wieder die Olympiadefokus, die man in der Unterricht spürt?* Das auch, aber es gibt auch welsche, die einfach mal Mathematik anders mögen - nicht so an der Schule. Sie sind gut, aber nicht unbedingt die Besten. Die mögen es anders als an der Schule - diese Spass und nicht so viel Pflicht. Und deshalb gehen sie auch hin, würde ich sagen.

Das heisst, Sie benutzen gar nicht die Theorie über didaktische Situationen sowie didaktische und adidaktische Phase nicht so bewusst? Man weiss ja auch das Methode vielfach wichtig ist. Wenn man über eine neue Methode liest, probiert man es dann dort aus, aber wir haben kein Konzept, das dahinter steht. Mathematik ist schon im Vordergrund, und diese methodischen Sachen, die sind dem ganz klar unterordnet. So würde ich sagen.

Über ihre Doktorarbeit? Das geht um Vernetzung von verschiedene Gebieten. In Mathematik zum Beispiel zwischen die Algebra und Geometrie in der 8. Klasse. Und ich versuche da soziale Aspekte da mit rein zuziehen. Und die Schüler motivieren, selbst Aufgaben zu stellen, die verschiedene Gebiete vernetzen würden. Auch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das habe ich auch mit diesen Schüler auch probiert, und es kam zum Teil sehr komplizierten Aufgaben aus. Einige Schüler haben aber gesagt, das ich lieber sehr komplizierten Aufgaben vorgeben sollen. Weil ich gemerkt haben, das es sehr schwierig ist, selbst Aufgaben zu stellen. Sie haben sich oft Aufgaben gestellt, wo ich schon Schwierigkeiten hatte

abzuschätzen, wie die zu lösen sind, zum Beispiel, und ich musste dann mit Kollegen darüber sprechen, wie die Aufgaben zu lösen sind und das ist natürlich sehr aufwendig. Das macht den Schüler Spass, aber die kommen schnell in Gebiet, die sehr weitführend und das man dann mit Wahrscheinlichkeitstheoretikern und Algebraikern sprechen muss, um das dem entsprechend zu fördern. Das würde ich alleine gar nicht schaffen. Da müssten noch mehr Spezialmathematikern arbeiten, um das aufzufangen, wo es dann liegen läuft. Ich habe dann die Schüler die Aufgabe gestellt, zu linearen Systeme Texte zu schreiben. Sie sollen sich vorstellen, das es ein Lehrbuch ist, und es schreiben. [Sie holt ein Paar Aufgaben, und wir schauen sie an und besprechen sie kurz]. Aufwendiges Feedback, schön für die Schüler, aber mehr Lehrern/Professoren nötig. Das kann die Uni im Moment nicht wirklich leisten, nur bei den, die länger dran bleiben. Aber die Schüler wäre bereit, sich in Systeme zu vertiefen. Das ist für mich auch ein Erkenntnis. Das die Anforderung der Schüler eigentlich auch unsere Kapazität übersteigt. Grosse Interesse und Bereitschaft lange an eine Sache zu bleiben und sich auf den universitären Niveau damit zu beschäftigen. Das ist das, was ich ausprobiert habe. Dann ist meine Idee, das ich versuche, das man das auch als sozialen Raum betrachten und die motiviert von einander zu lernen. Und wie ist diese soziale Raum? Soziale Raum. Es gibt Untergruppen, die sich kennen und man muss dazu sagen, es gibt Gruppen wo Mathematik wichtig ist und sie kommunizieren über Mathematik, aber es gibt bestimmt Gruppen, die haben Freundschaften und für sie ist Mathematik nicht so wichtig. Das ist sehr schwer, die haben sehr viele Interessen und tauschen wie jugendliche unter einander aus, aber ich merke, das es schwierig ist die zu motivieren, da versuche ich die Gruppen zu mischen, also die an Mathematik mehr interessierten und die an Freundschaften interessierten. Aber das ist natürlich schwer. Ja, weil die erwarten wohl anders? Genau, und die versuchen ja, das sind Sympathien und Antipathien, wenn sie hingehen dann versuchen sie sich zusammenzusetzen in ihrem Freundeskreis. Es ist schwierig das aufzubrechen, es ist mehr oder weniger klar und deshalb habe ich auch die stärkste schon in den 10. Klasse geschickt, um das irgendwie aufzubrechen. Es gab viele starke Schüler/Klicke und dachte, dass die anderen dann auch Mathematikern - das die dann auch diese zentrale Rolle einnehmen können, die anderen noch mehr. Ein Teil ist auch in diese Rolle gedrungen, aber es ist immer noch ein Teil, das sich als einfache Schüler und keine Freaks kontriert. Es heisst, es passiert etwas, das der Klasse sich immer wieder in Freaks und nicht Freaks einteilen und das sie sich auch dazu positionieren - die sehen, das ist unsere Guten und wir sind Schlechter. Es ist immer wieder passiert, auch wenn ich die Besten wegschicke. Und das ist etwas wo ich versuche ihm aufzubrechen durch Gruppenarbeit, oder sie zu mischen oder mit anderen sich zusammenzusetzen. Das ist vielleicht, das wäre für mich auch das Ziel. Weil irgendwann wird es dann so sein, dass die Starken bleiben und bis den 13. Klasse kommen und das diese nicht Mathematikern dann irgendwann nicht mehr da sind mit der Zeit. Weil ihre Interesse einfach nicht stark genug war? Genau, und das ist mir schon in eine andere Klasse passiert,

das man versucht durch die Gruppenmischung dranzuhalten, aber dann habe ich eine andere Klasse genommen und sie sind dann nicht mehr hingegangen. Auch oft weil sie z.B. Kunst oder Musik machen oder andere Sachen und sie entscheiden sich dann doch für die andere. Das ist für mich jetzt eine Frage, wie man die jetzt oder für mich eine Herausforderung, wie man wenigstens ein oder zwei von diese Gruppe bis in den 13. Klasse motiviert. Das diese Prozess ist auch sehr anstrengend für die Schüler, weil in der Schule wird ja auch alles schwer. Dann müssen sie sich spezialisieren - Chemie, Physik oder Informatik. Oder jedes Jahr um. Und es ist auch irgendwie wie ein Kampf, finde ich. Oder Kampf um die gute Schüler - um sie sich jetzt für Kunst oder für uns sie entscheiden, so zu sagen. Es ist dann auch eine Art die Schüler von ganz jung irgendwie auf die Uni zu schaffen und sich zu sichern, dass die Besten sich nicht verfahren? Ja, wobei es den Schüler es immer offen ist, was er macht, weil Kunst ist ja vielleicht nicht weniger interessant.

Das wichtigste Ziel von der MSG generell ist die Förderung von begabter und die Olympiaden, aber auch für einige, die Didaktikern eine Labor oder Experiment Möglichkeit sein. Wobei das immer Zweitrangig ist, weil das erste Ziel ist wichtiger für uns und das dürfen wir nicht aus den Augen verlieren.

Wie ist es mit Open Approach und offene Aufgaben und Problemlösen? Also, die Aufgaben von Stephan Holger sind eher komplizierte geschlossene Aufgaben. Und wenn man jetzt an Mathematik denkt und das mit Didaktik vergleicht. Wenn man Mathematik studiert, dann bekommt man dann z.B. die Themen Master/Diplom-Arbeit doch stärker vorgegeben auf die höheren Niveau und es dauert viel länger bis man dann irgendwann freier ist als in der Didaktik, wo es vornherein mehr offen ist. Und weil wir uns doch sehr stark an diesen Universitären anlehnen, ist es glaube ich, und die Schüler sind auch so dass sie eher nach komplizierte geschlossene fragen. Natürlich versucht man auch offene Aufgaben zu stellen, wie ich es versucht habe noch ein Zwischenschritt. Wie man ein geschlossene Aufgabe nimmt und sagt, wie konnte man den abwandeln mit Zahlen oder die Aufgabe umkehrt. Das wäre dann ein Zwischenstufe zwischen geschlossen und offen. Das mache ich auch manchmal, aber ich muss sagen, sie machen lieber komplizierte Aufgaben, wo die Anforderung sehr hoch ist, aber klar formuliert ist. So sag' ich mal. Bei die habe ich die Gefühl, es hat vielleicht mit dem Wettbewerbcharacter zu tun. Wenn es Wettbewerb sein soll, dann ist es ja aus statistischen Gründen und aus Punktevergabengründe viel einfacher konkrete Punkte zuzulassen. Wobei die Aufgaben so sind, dass sie mehrere Wege zulassen. In so Fern ist es auch Open Approach, aber nicht Open-ended, in dem Sinne dass die Ergebnis völlig offen ist. Es ist nicht unbestimmte Aufgaben, es ist sehr komplizierte Aufgaben mit einem klaren Ergebnis, aber mit meisten mit den Aufgaben von Stephan Holger, die lassen sehr viele Wege zu. Und wir legen Wert darauf, dass auch mehreren Wege präsentiert werden. Dass so viele Wege

wie möglich präsentiert werden. Das ist uns schon wichtig. Und das man auch so eine Art von Wettbewerb, die Lösungen vergleicht, und dass da die Eleganz und Schönheit - das gehört einfach zum guten Ton. Die MSG-Schüler die Wege vergleichen und sagen mein Weg war jetzt kürzer oder mein Weg war jetzt sauberer, man kommt da besser alles ausschließen. Also das viele von denen konkrete Kriterien zum Vergleich von verschiedene Lösungen haben. Und auch herausgefordert sind eine bessere Lösung zu finden. Das ist schon bei uns ganz klar. Also viele Lösungswege. *Sowie die Schülerin letztes Mal, die nach andere Lösungen gefragt hat?* Ja so ähnlich, sie war mit ihre eigene Lösung nicht zufrieden. Genau. Ja, das ist sehr typisch. Wenn sie auf dem langen Weg zu dem Ergebnis kommen, das Ergebnis ist ja mehr oder weniger klar, dann sind die meisten auch ehrgeizig genug auch noch nach einem zweiten Weg zu suchen und auch einen kürzeren zu finden. *[Kurze Zusammenfassung von mir]* Wobei ich schon sagen muss, ich habe mich auch mit offene Aufgaben, aber vor allem mit Aufgabenvariation beschäftigt, weil ich denke das ist realistisch von geschlossene zu offene zu kommen. Erstmal eine geschlossene Aufgabe zu variieren, zu öffnen, und den Schüler an der Aufgabestellung zu zeigen, wie das geht. Und ich hatte den Eindruck, dass es bei mittleren Schüler ganz gut klappt - einfach ein Gymnasium, und das die Starken da ein bisschen misstrauisch sind. *Weil sie normaler Weise schnell die Lösungen machen können, oder wie?* Und viele Lösungen produzieren können. Aber misstrauisch auch, vielleicht, genau . . . , weil diese klare formulierte Anforderung, klare formulierte hohe Anforderung - vielleicht wie ein guter Sportler, der braucht einen Trainer, der ihm gut herausfordert. So was. Das sie dann der schätzen auch Einschätzen können, Anforderungsniveau einschätzen können und vielleicht auch sehen, dass es schon eine Leistung ist, für die sie dankbar ist, weil wenn wir den Aufgaben geben, gerade weil sie das so einschätzen, eher zögerlich sind selbst so was zu formulieren. So, das ist meine Vermutung. Es war schwer sie auch zu motivieren, weil sie sich die Ernsthaftigkeit auch bewusst waren - denke ich. Und dann diese Sache, was mir auch unbedingt so fortschert mit der ganzen MSG, dass man sie dazu bringt, selbstständig mathematische Texte zu lesen und Lösungen zu verstehen. Und das ist sehr sehr schwer, weil eine Aufgabe führt zu einem Erfolgserlebnis, das motiviert. Und jetzt an einem längeren Text dranzubleiben, das ist denke ich, eine notwendige und hinreichende Bedingung für Mathematikstudium. Und das ist ehrlich gesagt schon sehr schwer, finde ich. Man hat ja auch letztes Mal gemerkt, das sie eher gewohnt sind schnelle, schnelle Erfolgserlebnisse zu erzielen. *Sie waren auch nicht gut an das zuhören und haben dann eher gequatsch in der Ecke.* Genau, und das merke ich auch. Weil die, glaub ich auch in der Schuler sin die Aufgaben noch einfacher und dann kommen sie noch schneller zu Ergebnissen und wird alles von der Lehrer präsentiert und weil sie eine gewisse Intelligenzniveau haben, ist meine Vermutung, sind die meisten von ihnen nicht gewohnt, hart zu arbeiten. *Der Text letztes Mal war sehr kompliziert, wenn man ins besonders die erste Seite betrachtet. Aber die Schüler hatten keine Fragen, das hat mich gewundert .* Ja genau, und das ist auch die

Sache, dass die oft nicht in der Lage sind, zu formulieren was die nicht verstanden haben. Und man kann, also wenn man wirklich so Texte lesen, wir haben mal eine Stunde nur zwei Seiten gelesen und zu jedem Satz irgendwas gesagt. Und das kann ich auch nicht immer machen, weil sie dann irgendwann kein Spass an der ganzen Sache haben. Aber man muss irgendwie ein Mittelweg finden, weil nur das letzten Endes denen auch den Weg zu Mathematikstudium öffnet. Was oft passiert, das die bis zum Ende gekommen sind, im ersten und zweiten Studienjahr noch ganz gut sind, und im Hauptstudium nicht mehr mitkommen, weil endlich etwas kommt, wo man arbeiten muss und dass haben die nie im Leben gelernt und alleine die Begabung reicht nicht aus. Und das ist so ein bisschen auch mein Bemühen, und ich weiss ich habe schon mit den Eltern ein bisschen Ärger bekommen - die haben dann die Eltern gesagt, dass Texte lesen und schreiben kein Spass ist und ich gehe nicht mehr zur MSG, weil wir Texte lesen und schreiben müssen. Ich habe dann auch gesagt, sie müssen die auch selbst schreiben so wie hier. Und dann hat eine Schülerin gesagt, ich gehe nicht mehr zur MSG und ihre Mutter war da und dann hat sie auf dem Grund einfach aufgehört. Das ist schade und ich konnte es dann nachhinein nicht mehr ändern. Ich habe dann gesagt wir schreiben nicht mehr, aber es war für sie dann zu spät. Es machte von ihrer Sicht definitiv kein Spass. Es gab sehr wenige, die dann irgendwann - genau, und die habe ich jetzt in die 10. Klasse geschickt, wo ich gedacht habe, die haben verstanden wie es mit den Texte wichtig ist, und einigen glaube ich hat es sogar Spass gemacht - auch mal so einige Aufgaben zu ausdenken. Ich habe auch Aufgaben, die sie ausgedacht haben das kann ich dir auch zeigen [Nordheimer holt die Aufgaben u.a. die auf die Rechner geschrieben]. Es gehört zu den MSG-Experimente.

Wie lange haben Sie MSG gemacht und warum? Ich habe schon während meine Studienzeit angefangen. [Telefon] Ich wollte das machen halt, weil ich selbst als Schülerin auch in so ein Programm war an der Uni und es mir Spass gemacht hat. *Auch MSG?* Es war so Arbeitsgemeinschaften an der Schule und dann war ich zwei Jahre in einer Schule, die bei der Uni war. Da hatten wir Mathematikern, die uns unterrichtet haben oder Leute, die Lehrbücher geschrieben haben und uns unterrichtet haben und weil die Atmosphäre so schön war und es immer Spass gemacht hat, dachte ich das ist einfach den beste Job, den man machen kann, weil die Schüler interessiert sind und in der Schule muss man die Schüler erst mal motivieren und es war nicht der Fall, dann habe ich das angefangen und hatte einmal eine 8. Klasse gehabt, und dann habe die 7. Klässler genommen bis jetzt schon in der neunte. Die Klasse habe ich also seit drei Jahren. *D.h. man bleibt bei der selben Klasse oder?* Man kann wechseln, aber ich bin jetzt erstmal geblieben, aber ich würde nicht über die 10. Klasse hinaus. Also, eigentlich mache ich am liebsten 7. und 8. Klasse, weil es von dem Alter auch interessant ist und auch nicht so anspruchsvoll ist, finde ich. *Die Mathematik?* Genau, und nicht noch komplizierter. Das ist diese Sache und was mir immer gefallen hat aus der Perspektive von Integration - ja, ich habe auch viel über Integration nachgeda-

cht, weil ich hier selbst aus Kasachstan komme und ich den Eindruck habe, dass es in der MSG kein Problem ist, wo du her kommst. Und das wir da sehr viele Schüler haben, die einen Migrationshintergrund haben, auch in dieser Klasse, das spielt aber keine Rolle. Und das ist für mich dass Mathematik außer Spaß, ist es auch eine Integrationsmassnahme, die für mich auch gefäbt läuft. Ich überlege mir, wie man dieses Phänomen auch als Integrative Maßnahme übertragen kann auf andere Bereiche. Und deshalb habe ich auch versucht jetzt in eine Zeit lang in Köln eine ähnliche Projekt mitzuarbeiten - zu Integration von Schüler mit Integrationshintergrund, aber weil es nicht so eng mit der Uni war, war es einfach schwierig. Man muss da viel stärker an die Uni angekoppelt sein, um das gewährleisten zu können, glaube ich, weil MSG ist für uns einfach ein Teil von der Universität und somit ein Teil von mathematisches Institut. Es gehört einfach zu Geschichte und auch zu Kultur und deshalb so stark. Es ist nicht nur ein Job, aber ein Mischung aus Job und Hobby - das ist von vielen Dinge die ich machen muss, die spannendste Sache überhaupt.

Und wie sieht aus mit Lehrerteams? Ja nachdem wo man angeschlossen ist. Der Leiter von der MSG ist auch hier und dann die anderen, z. B. möchte ich heute zu einer anderen MSG gehen um zu sehen, wie die das machen. Aber das ist eher freiwillig, weil wir ja viel Aufgaben haben, haben wir nicht so viel Raum zum Austausch. Aber während Mittagessen oder so tauschen wir schon darüber aus und wir schauen was für unsere Schüler besser ist, dann schicken wir sie in den höheren Klassenstufe und weil wir untereinander austauschen wir , was für ein Schüler besser wäre, das machen wir schon. Und manchmal auch einander besuchen, aber leider haben wir nicht so viel Zeit dafür. Wir würden das mehr machen, wenn wir mehr Zeit hätten, aber andere Aufgaben, Forschungsaufgaben und das ist dann so zu sagen nur ein kleiner Teil von dem ganzen, was wir machen müssen, das ist uns ja natürlich Spaß macht, aber es ist begrenzt dann irgendwann. Ich habe auch schon meine Studenten angeboten, dass sie hinkommen können und da unterrichten können, aber die Studenten sind auch so belastet, sie haben Interesse gezeigt, aber die haben keine Zeit, deshalb ist es schwierig natürlich. Die müssen dann wissen, dass sie ein Schein dafür bekommen oder so, weil sie sonst viel für die Scheine machen müssen und dann schaffen sie nicht noch freiwillig etwas zu tun. Und Herr Lehmann, unsere Leiter informiert uns auch regelmäßig und hat die Überblick, die er nicht verliert. Wer, wo und was macht, weil wir ja auch an der Technische Uni welsche haben. *Also Individuelle Planung von der Unterricht mit Inspiration von anderen?* Genau, weil wir ja auch so zerstreut sind. Verschiedene Abteile, verschiedene Universitäten sogar und das ist schwer Zusammenarbeit als Pflicht zu koordinieren - das ist unrealistisch. Und der Stephan Holger, zum Beispiel, hält uns sehr zusammen, weil er viel investiert hat in Texte und zwar freiwillig, hat er uns alle viel Arbeit abgenommen. Das ist das schöne daran, dass es alles so freiwillig. (SLUT)