INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik

Flemming Munch Hansen

Specialerapport

Juli 2009

IND's studenterserie nr. 13

Alle publikationer fra Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) er tilgængelige via hjemmesiden www.ind.ku.dk.

.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)

Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)

Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)

Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)

Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)

Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)

Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)

Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)

Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)

Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)

Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)

Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse

Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)

Abstract

Formålet med dette speciale er at klarlægge de muligheder, der er for at dyrke samspillet mellem matematik og fysik i gymnasieundervisningen efter den ny gymnasiereform. Dette gøres igennem det konkrete eksempel differential- og integralregning. Udgangspunktet er at undersøge om de officielle rammer for matematik- og fysikundervisningen, det vil sige læreplaner, -bøger og eksamenssæt i de to fag, giver mulighed for at udnytte samhørigheden mellem de to fag til tværfaglige undervisningsforløb.

Læreplaner, -bøger og eksamenssæt er analyseret ved hjælp af den antropologiske teori om didaktik med henblik på at bestemme hvilke matematiske organisationer eleverne forventes, at være i stand til at benytte i de to fag i forbindelse med en skriftlig eksamen, og om der er en sammenhæng imellem disse matematiske organisationer.

Til sidst diskuteres, hvordan et tværfagligt undervisningsforløb kan designes sådan at relevansen til begge fags pensum bevares. Til dette anvendes teorien om study and research programmmes, som er en teori, der bygger videre på den antropologiske teori om didaktik.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.

Resumé

Formålet med dette speciale er at klarlægge de muligheder, der er for at dyrke samspillet mellem matematik og fysik i gymnasieundervisningen efter den ny gymnasiereform. Dette gøres igennem det konkrete eksempel differential- og integralregning. Udgangspunktet er at undersøge om de officielle rammer for matematik- og fysikundervisningen, det vil sige læreplaner, -bøger og eksamenssæt i de to fag, giver mulighed for at udnytte samhørigheden mellem de to fag til tværfaglige undervisningsforløb.

Læreplaner, -bøger og eksamenssæt er analyseret ved hjælp af den antropologiske teori om didaktik med henblik på at bestemme hvilke matematiske organisationer eleverne forventes, at være i stand til at benytte i de to fag i forbindelse med en skriftlig eksamen, og om der er en sammenhæng imellem disse matematiske organisationer.

Til sidst diskuteres, hvordan et tværfagligt undervisningsforløb kan designes sådan at relevansen til begge fags pensum bevares. Til dette anvendes teorien om study and research programmmes, som er en teori, der bygger videre på den antropologiske teori om didaktik.

Abstract

The purpose of this master's thesis is to clarify the options for cultivating the interaction between mathematics and physics in upper secondary school under the new upper secondary school reform. This is done through the concrete example of calculus, by examining whether the official framework for mathematics and physics education, such as curricula, textbooks and examination papers in the two subjects, makes it possible to exploit the coherence between the two disciplines in interdisciplinary courses.

The analysis of curricula, textbooks and examination papers is done by the use of the anthropological theory of didactics in order to determine which mathematical organizations students are expected to be able to use in the two subjects in connection with a written examination, and whether there is a mathematical relationship between these organizations.

Finally it is discussed how an interdisciplinary teaching course can be designed to ensure that the relevance of the curriculum of both subjects are preserved. For this purpose the theory of „study and research programmes“ is applied. This theory is based on the anthropological theory of didactics.

Indhold

1 Indledning

Som kommende gymnasielærer i fagene matematik og fysik, har jeg interesse i at undersøge i hvilket omfang det er muligt at dyrke samspillet mellem disse to fag. Efter at have studeret matematik og fysik i fem år, og oplevet hvilken rolle matematikken har i fysikfaget og omvendt, specielt igennem kurser og projekter indenfor matematisk fysik, virker det oplagt at undersøge om den samhørighed mellem fagene, som jeg har oplevet i mit studium, også kan finde sted i gymnasieundervisningen. Dette er på grund, at jeg selv har fundet glæde ved at se matematikken anvendt på konkrete problemer fra fysikken i mit kandidatstudium.

Som student fra før gymnasiereformen, hvor samspillet var stort set ikke-eksisterende, er det en yderligere motivation, at undersøge, hvordan samspillet fungerer i det ny reform-gymnasium, hvor tværfaglighed generelt er blevet mere dominerende.

Problemstillingen, som jeg med dette speciale ønsker at besvare, er følgende:

Problemformulering

Jeg vil undersøge mulighederne for at inddrage fysik i matematikundervisningen på gymnasieniveau, og om fysikken kan bidrage med mere end blot at være et af flere anvendelsesområder for matematikken.
Da det meste matematik finder anvendelse i fysik, og der derfor kan indhentes fysiske eksempler indenfor langt de fleste matematiske områder, indsnævres det matematiske område, som jeg behandler i dette speciale, til at omhandle differential- og integralregning.

Helt præcist vil jeg redegøre for samspillet mellem matematik og fysik i det ny reformgymnasium i rammerne af differential- og integralregning, med særligt henblik på

- *hvordan samspillet bliver anvendt i en matematiklærebog, der er designet på baggrund af den ny gymnasiereform,*

- *hvilke teknikker fra matematikken, der er relevante i fysikundervisningen,*

- *hvilke andre samspilsmuligheder, der findes i reformgymnasiet.*

Den didaktiske ramme, som jeg vil anvende til dette, er den antropologiske teori om didaktik.

Jeg vil gerne takke Carl Winsløw for god vejledning, samt tak til Nadja Ussingkjær og Britta Hansen for gode diskussioner og moralsk opbakning undervejs i forløbet. En særlig stor tak til min kæreste Christine for at have bakket mig op i alle fem år, og for at tage sig godt af vores datter, især til sidst, når specialeskrivningen har taget det meste af min tid.

2 Den antropologiske teori om didaktik

Som nævnt i indledningen er det *den antropologiske teori om didaktik* (ATD), som vil være den teoretiske ramme for dette speciale. ATD er en matematik-didaktisk teori, som ser på matematik som en institutionelt situeret menneskelig aktivitet, i stedet for blot at se matematik som et formaliseret system af definitioner og sætninger. ATD kan udvides til at beskrive og forklare enhver menneskelig handling i form af såkaldte *praxeologier*. Det faktum, at ATD kan anvendes til mere end blot at beskrive matematik, gør ATD ideel i dette speciale, hvor det er en tværfaglig sammenhæng der ønskes belyst.

ATD er en del af det epistemologiske program i matematikkens didaktik. Det epistemologiske program beskæftiger sig blandt andet med at konstruere modeller for matematisk aktivitet og modeller for hvordan matematik udbredes i sociale institutioner. I det epistemologiske program udgør konstruktionen af sådanne modeller det første skridt i matematik-didaktisk forskning. (Barbé *e.al.*, 2005, s. 236)

I dette kapitel vil hovedtrækkene i ATD blive præsenteret. Blandt andet begrebet praxeologi og hvordan læring og andre menneskelige handlinger finder sted i de førnævnte *sociale institutioner*. Herudover gøres der rede for *den didaktiske transpostion*, der beskriver den proces, som udvælger, omformer og overfører viden fra videnskabsfaget til undervisningsfaget. Denne transposition er vigtig, når man skal forholde sig til undervisning, da den didaktiske transposition beskriver en del af de rammer, underviseren bliver placeret i og begrænset af.

En teori som bygger videre på ATD's analysemodel er teorien om *Study and Research Programmes* (RSP), og er udviklet af den samme person, Yves Chevallard, som også står bag ATD. RSP giver en model for, hvordan eleverne selv kan finde sammenhænge og rationaler i det matematik, som de skal lære. Hovedtrækkene i RSP vil ligesom ATD blive præsenteret, og til sidst vil jeg komme ind på, hvordan disse to teorier vil blive brugt til at belyse problemstillingen.

2.1 Praxeologier

Som sagt kan enhver menneskelig handling beskrives og forklares ved hjælp af praxeologier, og dette begreb er et vigtigt omdrejningspunkt i ATD. Ophavsmanden til denne teori, Yves Chevallard, siger følgende om brugen af begrebet praxeologi i ATD:

> *Some dictionaries define praxeology as the study of human action and conduct. Up to a point, this is not foreign to the use I will make of that key word of the anthropological approach to didactics - provided we include in „praxeology" the study, not only of what people* do*, and* how *they do it, but also of what they* think*, and* how *they do so.* (Chevallard, 2006, s. 2)

Enhver menneskelig handling kan altså modelleres og tilpasses disse fire trin, som praxeologien indeholder. Dette kaldes 4T-modellen. De fire trin i 4T-modellen bliver organiseret på følgende måde:

T: opgaveType: Enhver menneskelig handling er motiveret ved, at man ønsker at løse en opgave. Denne opgave hører hjemme i en institutionel sammenhæng, hvor den er meningsfuld.

τ: Teknik: For at løse en opgavetype gør man brug af en teknik. Teknikken er ikke entydigt bestemt ved opgavetypen, da der selvfølgelig kan eksistere forskellige måder at gå til en opgave på. På denne måde kan der altså opstå flere forskellige praxeologier udfra en og samme opgavetype. Nogle teknikker vil dog være mere åbenlyse end andre.

θ: Teknologi: Teknologien er diskursen vedrørende teknikken. Det vil sige at teknologien er den måde som teknikken bliver forklaret, beskrevet og retfærdiggjort på. Teknologien er altså tæt knyttet til teknikken, da det er ved at anvende teknologien, at det er muligt at formidle en besvarelse af opgaven ved hjælp af den tilhørende teknik.

Θ: Teori: Dette er netop den dybere viden, der giver en yderligere retfærdiggørelse af teknikken.

En fuldstændig praxeologi består altså af $(T, \tau, \theta, \Theta)$. Disse fire trin i en praxeologi kan deles ind i to hoved-“blokke“, en *praktisk* blok, P, og en *teoretisk / diskurs* blok, L. Den praktiske blok består af de første to trin i 4T-modellen, og denne blok gør det muligt at løse problemet rent praktisk. Den teoretiske blok består af de to sidste trin i 4T-modellen, og det er denne blok, som udgør *det diskursive miljø*, som beskriver, forklarer og retfærdiggør, hvordan den givne opgavetype er løst. Disse to blokke er uadskillelige i alle menneskelige aktiviteter i den forstand, at enhver menneskelig handling kan forklares ved hjælp af en teori. Omvendt eksisterer en teoriblok ikke uden den har et formål i den forstand, at den stammer fra en grundlæggende opgavetype. Vi har altså at en praxeologi kan beskrives ved forskellige trin af detaljering; $[P/L] = (T, \tau, \theta, \Theta)$

2.1.1 Matematiske organisationer

ATD er en matematik-didaktisk teori, og derfor passer ovenstående 4T-model perfekt ind i denne sammenhæng, hvor hvert trin i 4T-modellen er veldefineret. I andre sammenhænge kan en stædig brug og forventning om, at 4T-modellen passer på enhver menneskelig aktivitet, virke en smule klodset og usammenhængende. Måden, hvorpå matematisk aktivitet bliver modelleret ind i 4T-modellen, er følgende.

T: Opgavetype. F.eks.: Find den afledte til et polynomium

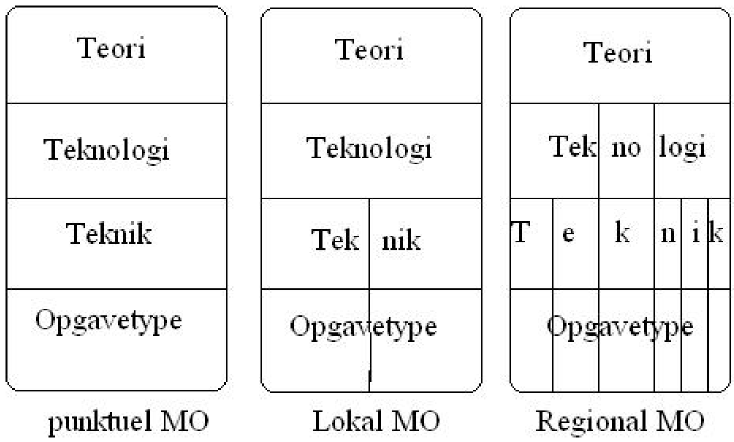
τ: En af teknikkerne til at løse opgavetypen er givet ved regnereglen for differentiation af polynomier, altså $(x^n)' = nx^{n-1}$. Herudover er formlerne $(k \cdot f)' = k \cdot (f')$, hvor k er konstant, og $(f + g)' = f' + g'$ også brugbare.

θ: Teknologien, som hører til den nævnte teknik er en diskurs vedrørende netop disse regneregler, teknologien er altså blevet benyttet i forbindelse med at forklare teknikken. Derudover vil det sige, at det er en eksplicit viden om rækkevidden og brugbarheden af regnereglerne.

Θ: Teorien indeholder begreberne, sætningerne og beviserne indenfor differentiation og differentialkvotient, som er i brug her.

På denne måde kan en matematisk praxeologi organiseres udfra specifikke opgavetyper. En sådan praxeologi kaldes for en *specifik*- eller *punktuel matematisk* *organisation* (MO). Punktuelle matematiske organisationer kan samles i en *lokal MO*, hvis teknikkerne i de punktuelle matematiske organisationer kan forklares og retfærdiggøres ved hjælp af samme teknologi. Altså bliver en lokal MO karakteriseret ved teknologien. På samme måde som en lokal MO er karakteriseret ved dens teknologi, karakteriseres en *regional MO* ved dens teori. (Garcia *e.al*, 2006). Dette er illustreret på figur 1.

Eksemplet på en punktuel MO tilhører således en lokal MO omhandlende diffe-



Figur 1: Illustration af en punktuel-, lokal- og regional MO

rentiation af simple funktioner, som igen er indeholdt i en regional MO omhandlende differentialregning og differentialkvotient mere generelt.

Det skal bemærkes, at en punktuel MO ikke tilhører en bestemte lokal MO, men kan være indeholdt i flere forskellige. På samme måde kan en lokal MO være indeholdt i flere forskellige regionale MO. (Barbé *e.al.*, 2005, side 237)

2.1.2 Didaktiske organisationer

En didaktisk organisation / praxeologi starter, ligesom enhver anden praxeologi, med en opgavetype. For en matematiklærer kan en typisk opgavetype, med den tilhørende praxeologi være opbygget på følgende måde:

T: Etablér en matematisk organisation hos eleverne

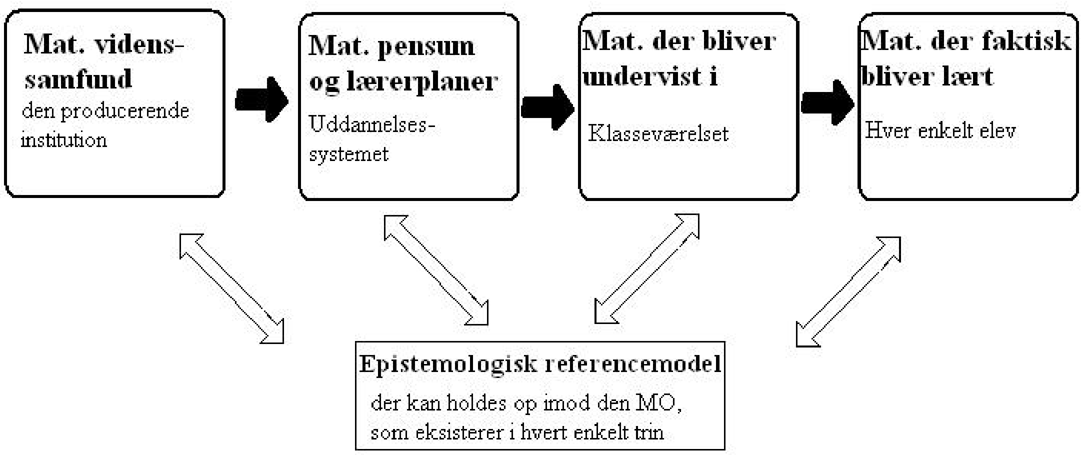
τ: Teknikken kan for eksempel være at gøre brug af eksempler fra den pågældene MO, foretage sammenligninger med en allerede etableret MO eller stille specifikke opgaver, som leder hen imod den pågældene MO.

θ: Diskursen vedrørende de anvendte teknikker, er måden hvorpå eksemplerne m.m. bliver anvendt / artikuleret til eleverne.

Θ: Dybere liggende didaktisk teori, som retfærdiggør teknikken og teknologien, f.eks. ATD.

2.2 Den didaktiske transposition

Den didaktiske transposition beskriver den „rejse“, som et stykke viden tager fra videnskaberne og til for eksempel et gymnasiefag. Den viden, som der bliver undervist i, i en undervisningsinstitution er blevet udvalgt i videnskabsfagene af højere instanser, og omformet sådan at det passer ind i den sammenhæng der ønskes. Fra den viden, som eksisterer i videnskabsfaget og til den viden, som etablerer sig hos eleven i uddannelsesinstitutionen er der nogle trin, som er vigtige at skelne imellem. Hvis vi ser på matematikfaget, findes den samlede matematiske viden i den producerende institution, som er det matematiske samfund i universitetsmiljøet.

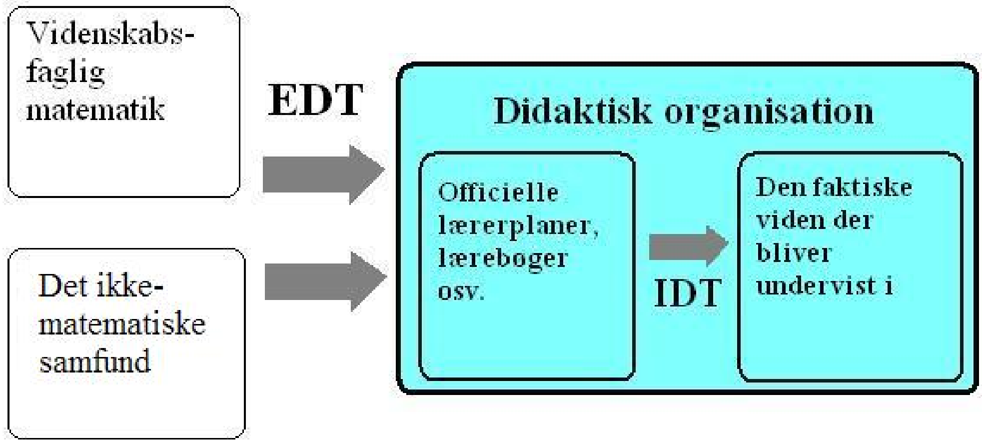


Figur 2: Den didaktiske transposition (Bosch *e.al.*, 2005)

Viden kommer fra en producerende institution, og i tilfældet med matematik er denne institution universitetsverdenen (figur 2), derudover har det ikke-matematiske samfund også en indflydelse. Et eksempel på dette er dif-ferentialregning. Differentialregning findes på universitetet i form af operator- eller distributionsteori. Dette er et område, hvor der arbejdes og forskes på universiteterne. Den form, som for eksempel differentialkvotienten kan have i operatorteori kan umiddelbart ikke overføres direkte til gymnasieskolen, og det er derfor ikke fornuftigt at tage matematiske organisationer direkte fra den producerende institution, men de bliver inddraget i en mere klassisk form. Derfor bliver der i uddannelsessystemet fastsat nogle retningslinier for, hvordan der skal undervises i den viden der kommer fra universitetet. Dette gøres for eksempel i form af *læreplaner*, udvælgelse af *kernestof* og lærebøger. Denne udvælgelse kaldes for den eksterne didaktiske transposition (EDT). Denne eksterne didaktiske transposition er man som lærer ikke direkte en del af, men man er uundgåeligt nødt til at forholde sig til den, da den fastsætter rammerne for, hvad der undervises i, og til dels hvorfor.

Den interne didaktiske transposition (IDT) er den omformning, udvælgelse og tilgang, som sker fra læreplaner og lærebøger over den egentlige klasseundervisning til den viden som sætter sig fast hos eleven. Denne transposition er i store træk op til den enkelte lærer, og kan derfor være forskellig fra klasse til klasse, og fra elev til elev. Dog er denne transposition ofte stærkt styret af lærebogens tilgang samt de tilhørende opgaver i lærebogen og i gamle eksamenssæt. Man kan altså til dels komme ind under huden på den interne didaktiske transposition ved at se på hvilke opgaver der bliver stillet i de forskellige fagområder, uden at være ude og oberservere en egentlig undervisning. Dog er en analyse af lærebøger og eksamenssæt stadig en analyse af den eksterne didaktiske transposition, så den interne didaktiske transposition, der involverer elever og lærere direkte, er det ikke muligt at sige noget om med den tilgang til undersøgelsen af samspillet mellem matematik og fysik som dette speciale anlægger. Omvendt er det også netop den eksterne didaktiske transposition, der fastlægger om det er muligt, at dyrke samspillet mellem matematik og fysik.

Undervisningsfaget, som er det eleverne bliver udsat for, dannes altså af både



Figur 3: En didaktisk organisation starter, hvor den officielle viden der skal lærest til eleverne er blevet udvalgt.

den eksterne- og den interne didaktiske transposition. Dette sker dog ikke altid i lige stor harmoni, hvilket gør, at man skal skelne mellem den officielle- og den reelle udgave af undervisningsfaget. Dette gøres som sagt ved at have den didaktiske transposition i baghovedet, når man for eksempel analyserer lærebogs- og opgaveeksempler.

Den epistemologiske referencemodel (ERM) er et didaktisk redskab, som kan holdes op imod hvert enkelt trin i den didaktiske transposition. Denne model fastlægger, hvordan den matematiske læring og undervisning bliver betragtet i hver enkelt institution, det vil sige fra videnskabsfaget og til den enkelte elev. ERM er en foreløbig model, som skal kunne forandres i løbet af et studie af den didaktiske transposition, da resultater, som ikke i første omgang var medtaget i modellen kan opstå i en af de givne institutioner, og ERM skal derfor tilpasses den ny situation.

2.2.1 Eksempel på den didaktiske transposition

Som nævnt er differential- og integralregning dele af videnskabsfaget i form af for eksempel operatorteori og mål- og integralteori. Det udvælges igennem den eksterne didaktiske transposition, hvilke dele, der skal undervises i, i gymnasiet. Dette sker i form af læreplaner indeholdene kernestof og faglige mål, som forfattes for hver enkelt fag for sig. For differential- og integralregning er kernestoffet for matematik A-niveau:

- *definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt regnereglerne for differentiation af $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ og $f \circ g$, udledning af udvalgte differentialkvotienter*
- *monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient*
- *stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af $f+g$, $f-g$ og $k \cdot f$ samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer*

(STX bekendtgørelsen, 2008b)

Hvor dette bliver ført videre til eleven igennem den interne didaktiske transposition. Videnskabsfaget matematik er dog ikke den eneste producerende institution i forhold til differential- og integralregning, hvor fysik, specielt i begyndelsen af 1700-tallet også var en vigtig kilde. Dette gøres der også opmærksom på i læreplanen under et afsnit *samspil med andre fag*

> *Når matematik indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges et fagligt samarbejde, som indeholder mere omfattende anvendelse af matematik. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.* (STX bekendtgørelsen, 2008b)

Det er netop formålet at undersøge samspillet med fysik, hvor den matematiske organisation blev udviklet af Newton og Leibniz uafhængigt af hinanden, ud fra vidt forskellige udgangspunkter. Udover at være matematiker var Newton også fysiker, og grundlagde blandt andet det paradigme indenfor fysikken, som i dag kendes som klassisk mekanik. Derfor var Newtons tilgang til den matematiske organisation præget af fysiske begreber. Leibniz var filosof, og forbandt ikke matematiske begreber med fysiske beskrivelser, men betragtede i stedet geometriske kurver. Leibniz's efterfølgere, blandt andre Bernoulli brødrene, benyttede derimod også fysiske problemstillinger i deres videreudvikling af den matematiske organisation. Samspillet med fysikhar altså haft stor indflydelse i udviklingen af den matematiske organisation i videnskabsfagene, og det er dette samspil, som giver anledning til at xe, om det kan finde sted i undervisningsfagene i gymnasiet.

med notationen vfag for videnskabsfag og gfag for undervisningsfag, kan problemstillingen som jeg behandler, illustreres ved:

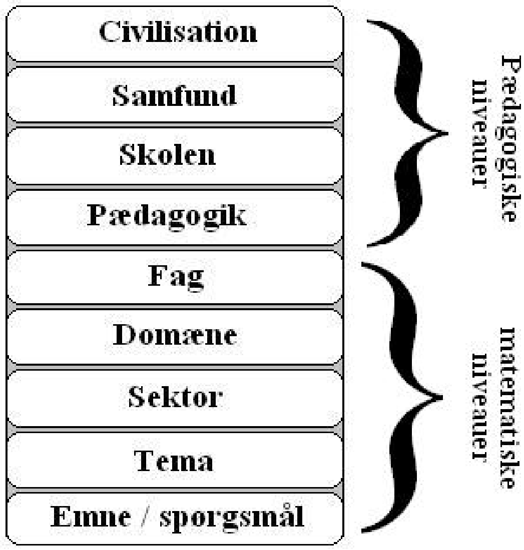
$$\begin{array}{ccc} \text{vmat} & & \text{gmat} \\ \updownarrow & \Longrightarrow & \updownarrow \\ \text{vfys} & & \text{gfys} \end{array}$$

hvor jeg netop er interesseret i, hvordan samspillet mellem videnskabsfagene (illustreret ved de lodrette pile), bliver ført over til undervisningsfagene via den didaktiske transposition.

2.3 Sociale institutioner

Disse førnævnte praxeologiske organisationer i form punktuelle-, lokale-, og regionale organisationer, hører alle hjemme i de sociale institutioner, hvor de oprindeligt er opstået. Dette er som en følge af ATD's udgangspunkt, at viden generelt ikke identificeres med isolerede individer, men opstår i en eller anden form for institutionel sammenhæng. Udover, at viden bliver produceret i sociale institutioner, bliver den samme viden også lært, praktiseret og udbredt i de samme sociale institutioner, og rationalet i en praxeologi vil forsvinde, hvis den blev taget ud af den institutionelle kontekst, hvori den er opstået. (Garcia 2006)

Når vi ser specifikt på undervisning, kan disse sociale institutioner inddeles i et hieraki af didaktiske determinationsniveauer (figur 4), hvor hvert niveau er indlejret i de niveauer, der ligger ovenover dem. Hvert niveau er beskrevet ved



Figur 4: Illustration af de didaktiske determinationsniveauer, hvor, for faget matematiks vedkommende, de nederste niveauer kaldes de matematiske niveauer, mens de øverste kaldes for de pædagogiske niveauer

de betingelser og begrænsninger, der gør det muligt for en praxeologisk organisation at udfolde sig i en given uddannelsesmæssig sammenhæng. Denne skelnen mellem niveauer er altså i første omgang et deskriptivt analyseredskab, som kan være med til at klarlægge for eksempel lærebogsforfatteres, elevers og læreres rolle og muligheder indenfor et bestemt emne. Chevallard giver selv et eksempel (som bliver citeret i artiklen, se ref.) på, hvad der reelt ligger i de matematiske niveauer:

> *For instance the question „Which are the symmetries of a rectangle (not sqared)?" is considered, in most educational systems, as belonging to the theme „symmetries of polygons", which is included in the sector „transformations", included in the domain „Geometry", belonging to the discipline „Mathematics"* (Garcia *e.al.*, 2006, s. 228)

Dette eksempel siger også forholdvist tydeligt, hvad niveauerne mere generelt indeholder. Det er som oftest den eksterne didaktiske transpostition der fastlægger de tre øverste matematiske niveauer, mens de to nederste er de niveauer, som man kan observere i et klasselokale, og det er traditionelt også her det meste af

lærerens arbejde ligger. Chevallard kalder dette fænomen for *lærerens tematiske begrænsning*[1]. Denne begrænsning er et problem i forhold til at eleverne skal finde rationalet i det matematik, som de skal tilegne sig, da meningen ofte befinder sig i højere institutionelle niveauer, og bliver derfor ikke forbundet. Når rationalet forsvinder, og eleverne ikke får mulighed for at vide, hvorfor de skal lære det, som står i pensum, er der tale om *monumentalisering* af matematiske objekter. For eksempel, at der skal undervises i elementær geometri i form af vinkler og linier, forklares med, at vinkler og linier eksisterer i den virkelige verden, og derfor er det godt at vide noget om. Dette er forkert, og i strid med ATD, da viden opstår som følge af et problem, og det er ikke et problem, at de eksisterer i den virkelige verden, hvilket i øvrigt er direkte forkert. Vinkler og linier er begreber, som blandt andet kan bruges - og er blevet brugt - som en analog til regning med tal og funktioner, så der ligger en dybere mening bag.
Denne monumentalisering af matematiske objekter finder sted i matematikundervisningen på de fleste niveauer i uddannelsessystemet. I forbindelse med, at det er den eksterne didaktiske transposition, og de muligheder for at dyrke det tværfaglige samspil, som det ønskes at belyse, er det de pædagogiske niveauer, der er afgørende, da det er i ministeriet og i opgavekomitéen, at det bliver fastlagt, om samspillet er relevant i gymnasiet.

2.4 Research and study programmes

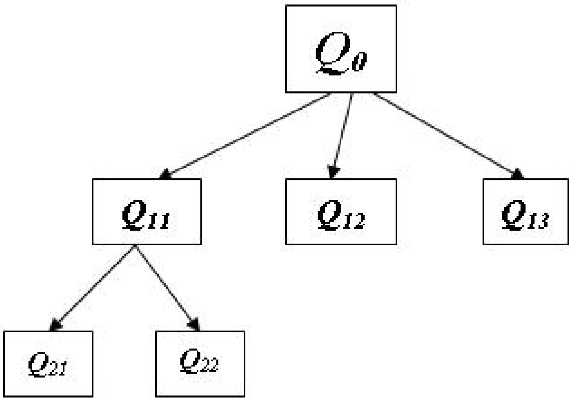
Research and study programmes (RSP) er et design- og analyseredskab, der bygger videre på ATD. Der tages udgangspunkt i et *genererende spørgsmål*, som skal frembringe nogle underspørgsmål, der i sig selv også er generende spørgsmål. Disse spørgsmål fører hver især til en praxeologi

$$Q \to (T, \tau, \theta, \Theta),$$

og på denne måde udvikles et net eller et system af praxeologier (se figur 5), som til sidst danner den tiltænkte matematiske organisation. Dette arbejde med hver enkelt spørgsmål for sig kaldes for en *research and study activity*, og disse aktiviteter er byggestenene i RSP. Det helt essentielle i RSP er altså at stille et

[1] Frit oversat fra: *Phenomenon of the teacher's confinement* (Garcia, 2006, side 229)

spørgsmål Q, som eleverne skal arbejde med, og som i sidste ende fører til etableringen af den tiltænkte matematiske organisation. Dette spørgsmål skal være af relevans for de studerende og skal være stærkt nok til at det kan frembringe mange nye spørgsmål, som der kan arbejdes videre med. På denne måde bliver eleverne selv i stand til at finde rationalet i den matematiske organisation, der er målet for undervisningen,



Figur 5: Udfra et indledende genererende spørgsmål dannes flere spørgsmål, som hver især besvares ved en praxeologi

Ifølge Barquero *e.al.* (2007) giver RSP et system af praxeologier med følgende karakteristika:

- Emnet der arbejdes med bliver en central rolle i studieprocessen og virker som et centralt værktøj i opbygning af ny viden.
- Øget fokus på selve metoden til løsningen af underspørgsmålene der frembringes samt en løbende evaluering af metoden og det fundne delsvar. Det er ikke kun produktet, der er centralt.
- Klargøre, institutionalisere og evaluere processen i tilfælde af kontinuitet i studieprocessen.
- Hele drivkraften i denne proces er den løbende evaluering af den fundne delbesvarelse. Er den med til at besvare og anskueliggøre dele eller det hele af det genererende spørgsmål Q, eller skal besvarelsen modificeres.

2.4.1 Det genererende spørgsmål Q

Det genererende spørgsmål Q, som systemet af praxeologier tager udgangspunkt i, skal være et meningsfuldt og reelt spørgsmål, som eleverne kan relatere til. Ifølge Garcia *e.al.* (2006) skal Q opfylde følgende:

1. Kulturel eller social legitimitet: Q skal være relateret til de spørgsmål, som samfundet som helhed forventes, at der skal læres skolen. Q skal altså være velfunderet i en social institution I.

2. Matematisk legitimitet: Q skal være tæt på kernen af de matematiske objekter, som det er tilsigtet at undervise i.

3. Funktionel legitimitet: Q skal føre eleverne videre mod nye spørgsmål, enten i matematik eller andre fag i skolen.

Hvis ikke spørgsmålet, opfylder 1-3, siges spørgsmålet at være et *dødt spørgsmål*, da det herved mister sit rationale, altså sin mening og relevans i den givne institutionelle sammenhæng. Altså de eneste spørgsmål som er relevante og interessante er dem, som kan re-produceres og udvikles i bredere og bredere sammenhænge og give mere og mere komplekse problemstillinger. Det vigtigste ved en undersøgelse af et spørgsmål Q er ikke, hvor virkelighedsnært det er, men mulighederne Q giver for at producere, integrere og samle en MO.

2.4.2 Research and study activity

Byggestenene i RSP, dvs det system af spørgsmål og praxeologier der fremkommer, kaldes som sagt for *a research and study activity* (RSA). En sådan aktivitet består af undersøgelsen af et spørgsmål Q_i, hvor målet er et svar $R_i = [P/L] = (T, \tau, \theta, \Theta)$ til dette. Her er P praksis-delen, som løser og besvarer Q_i, mens L er den diskurs, som bliver anvendt til at retfærdiggøre og forklare, hvorfor netop L løser Q_i. I forsøget på at svare på Q_i, transponeres den originale praxeologi $[\Pi/\Lambda]$ til den nye praxeologi $[P/L]$, sådan at $[P/L]$ er passer ind i den institutionelle sammenhæng, givet ved institutionen I.

> *[...] the reason why this praxeology is now present in I becomes clear: it has been brought into this institution because it was expected to solve a problem, to answer a question. It was wanted for just that reason - not for itself, however sophisticated it is.* (Chevallard, 2006, s. 7)

Et eksempel på dette ses nedenfor.

RSP giver de studerende en mulighed for at komme ind under huden på processen der ligger til grund for en matematisk organisation og ikke bare løse kortsigtede matematiske opgaver ved brug af givne aksiomer, der i sidste ende skal føre til at gå til en skriftlig eksamen. RSP's formål er altså at give et redskab til at af-monumentalisere de matematiske objekter, som optræder i matematikundervisning, og fremhæve problemstillinger, der grundlægger den teori de studerende arbejder med, sådan at rationalet i matematikken bevares.

2.4.3 Eksempel på et RSP-forløb

Et eksempel på et genererende spørgsmål er:

Q_0: Givet størrelsen X på en population over en tidsperiode, kan vi da bestemme dens størrelse efter n perioder? Er det altid muligt at forudsige populationsstørrelsen på lang sigt?

Barquero (2007) benytter netop dette genererende spørgsmål i et undervisningsforløb, der skal lede hen imod etableringen af den matematiske organisation *sædvanlige differentialligninger* (SDL), og skal formes ind i vækstmodel-begrebet.

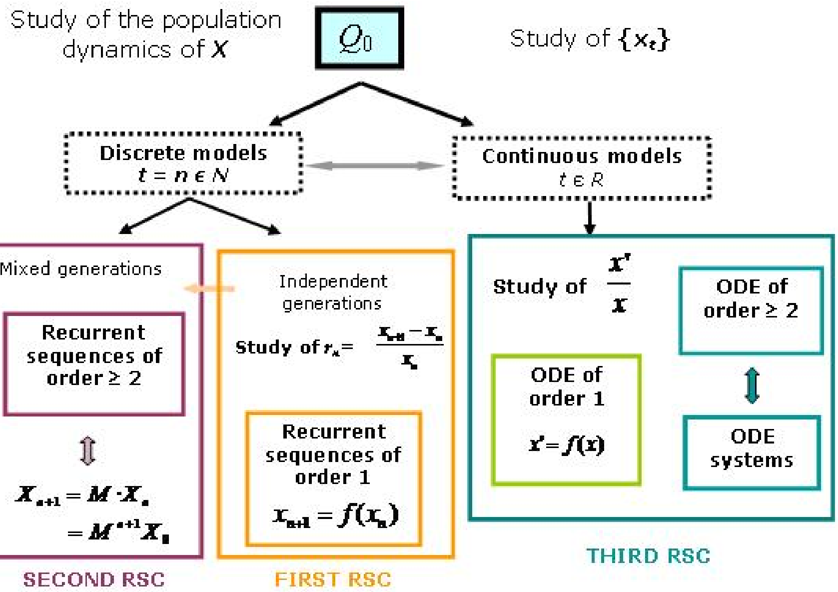
Udfra Q_0 bliver der gjort forskellige antagelser, der hver især giver et nyt spørgsmål Q_i.

Q_1 Tiden t tager diskrete værdier, og en generations størrelse X_t afhænger kun af den forrige generations størrelse X_{t-1}

Q_2 Tiden t tager diskrete værdier, og en generations størrelse X_t afhænger af flere af de forrige generationers størrelse X_{t-1}, $X_{t-2}, \ldots, X_{t-d}$, hvor $d \geq 2$

Q_3 Tiden t er kontinuert.

Disse tre spørgsmål imod hhv. rekursive følger, rekursive vektor-følger og sædvanlige differentialligninger (SDL) af orden 1 eller mere. (se figur 6). Disse spørgsmål følges natuligvis op af eleverne ved at de besvarer mere specifikke spørgsmål til at begynde med, for til slut at kunne besvare de første spørgsmål.



Figur 6: Barquero *e.al.* (2007) illustrerer systemet af praxeologier, der fremkommer, på denne måde

2.5 Problemstilling

I denne opgave er det et muligt samspil, imellem undervisningsfagene matematik og fysik, der ønskes undersøgt. Dette er som sagt på baggrund af, at jeg igennem min kandidatuddannelse har studeret netop dette samspil i den form, der i videnskabsfagene kaldes *matematisk fysik*, og som fremtidig gymnasielærer er jeg interesseret i, om samspillet finder sted i gymnasiet, eller om der er mulighed for at dyrke samspillet.

Om samspillet dyrkes, eller om der er mulighed for at dyrke samspillet bliver bestemt på ministerielt niveau i form af, om læreplaner giver plads til dette, og om pensum i de to fag er udvalgt, sådan at det vil give mening at have tværfaglige forløb. Historisk set er differential- og integralregning stærkt forbundet med kinematikken, og specielt i udviklingen af denne matematiske organisation omkring 1700-tallet var kinematikken en stærk motivator, og bidrog med mange problemstillinger, der udviklede teknikker, og dermed også teorier.

I dette speciale undersøges det, om den eksterne didaktiske transposition gør det muligt at bruge fysikken som motivator i et tværfagligt undervisningsforløb i forbindelse med differential- og integralregning, sådan at der udvikles matematiske organisationer, der ikke blot indeholder dele fra kernestoffet i matematik A-niveau, men som er en vigtig del af de videnskabsfaglige organisationer der forventes at blive bragt i spil i forbindelse med den skriftlige eksamen i fysik.

2.5.1 Problemformulering

For at undersøge karakteren af det potentielle og aktuelle samspil mellem matematik og fysik i gymnasieundervisningen i rammerne af differential- og integralregning, benyttes den antropologiske teori om didaktik til at

- *analysere den didaktiske organisation i matematik, der omhandler begreberne differentialkvotient og integral, svarende til de lokale matematiske organisationer fra referencemodellen, igennem matematiklærebøger, specielt med fokus på eventuelle referencer til fysiske problemsstillinger.*

- *gøre rede for, i hvor vidt et omfang disse lokale matematiske organisationer bliver bragt i spil i den didaktiske organisation i fysik, der omhandler temaet kinematik.*

- *identificere opgavetyper i skriftlige eksamenssæt i matematik- og fysik A-niveau samt de tilhørende praxeologier, der gør brug af differential- og integralregning, for at vurdere i hvilket omfang ministeriet og opgavekomitéen inciterer til at dyrke samspillet imellem undervisningsfagene matematik og fysik.*

Dett følges op med en diskussion af, hvordan man ved at benytte RSP, kan tydeliggøre samspillet i forhold til ovenstående analyse.

3 Referencemodel for matematiske organisationer

De matematiske begreber, som bliver behandlet i dette speciale er differentialkvotient og integral. I dette afsnit bliver fire forskellige teknologier, og dermed fire forskellige lokale matematiske organisationer, for hver af de to begreber præsenteret og eksemplificeret, hvilket giver en epistemologisk referencemodel, der kan holdes op imod de forskellige elementer i den eksterne didaktiske transposition, som jeg ønsker at belyse, og vil derfor blive benyttet i den senere analyse af blandt andet eksamensopgaver i gymnasiefagene matematik og fysik.

De fire tekonologier bliver for differentialkvotientens vedkommende beskrevet af Artigue (2004, s. 252) i forbindelse med et design og udførelse af et undervisningsforløb omhandlende en introduktion til netop differentialkvotienten. M. Artigue omtaler de fire teknologier som synsvinkler[2], men disse synsvinkler repræsenterer hver især netop en teknologi eller et tema, der hver især karakteriserer en lokal matematisk organisation. På baggrund af artiklen af M. Artigue er kategoriseringen givet ret præcist, når differentialkvotienten beskrives. I forbindelse med integralet benyttes de fire teknologier som Artigue præsenterer for at beskrive differentialkvotienten, for herefter at beskrive den regionale matematiske organisation, som integrerer alle disse lokale matematiske organisationer, der bliver karakteriseret ved hver sin teknologi. Navngivningen af de fire teknologier er følgende

- den geometriske teknologi
- den numeriske teknologi
- den kinematiske teknologi
- den algebraiske teknologi

3.1 Differentialkvotienten

Ifølge læreplanen for matematik A-niveau er den del af kernestoffet, der omhandler differentialkvotienten givet ved

[2] „Points of view“

- definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt regnereglerne for differentiation af $f+g$, $f-g$, $k\cdot f$, $f\cdot g$ og $f\circ g$, udledning af udvalgte differentialkvotienter. (STX bekendtgørelsen, 2008b)

Igennem beskrivelser af de fire nævnte teknologier skal ovenstående betragtes, hvor udgangspunktet er den klassiske, *algebraiske* definition af differentialkvotienten til en funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ i et punkt $x_0 \in D(f)$, hvor $D(f)$ er funktionens definitionsmængde:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Såfremt $f'(x_0)$ eksisterer siges f at være *differentiabel i punktet* x_0. Hvis f er differentiabel i alle punkter i sin definitionsmængde, siges f at være *en differentiabel funktion*, og den afledede funktion $f' : D(f) \to \mathbb{R}$ kan defineres ved

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3.1.1 Geometrisk teknologi

Den geometriske synsvinkel tager, som navnet antyder, udgangspunkt i en grafisk repræsentation af en funktion. Opgavetyperne, som praxeologierne bliver bygget op omkring, omhandler en reel funktion f, og givet ved:

T_1^M: Bestem tangenthældningen for grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

T_2^M: Find den rette linie, der er tættest på grafen for funktionen f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Der er to teknikker der kan anvendes til at løse hver af disse opgavetyper gennem den geometriske teknologi. Fælles for disse to teknikker er, at de begge to bygger på aflæsninger af koordinatsæt og øjemål, og dermed ikke giver eksakte resultater, som man ellers normalt forventer i en matematisk sammenhæng.

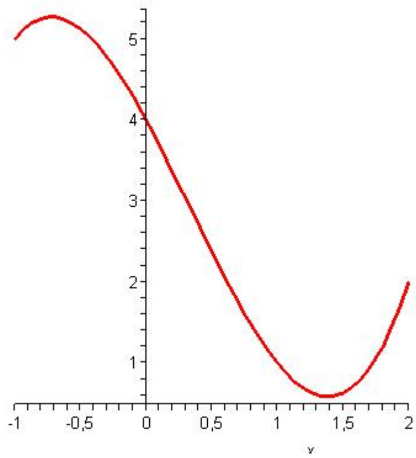
I den første teknik, $\tau_1^{M,g}$, benyttes et CAS-redskab til at zoome successivt ind på den pågældende graf omkring punktet x_0. Fra et vist trin bliver det ikke muligt at skelne grafen fra en ret linie, såfremt f er differentiabel i punktet x_0.

Man siger, at f er lokalt lineær omkring punktet x_0. Differentialkvotienten er da hældningen til den rette linie man ser i displayet. Opgavetype T_2^M løses ved at forlænge den rette linie der fremkommer i displayet i hver retning.

Eksempel 3.1. *Vi ser på funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4,$$

hvilket ses på figur 7 hvis man ønsker at finde differentialkvotienten i punktet



Figur 7: $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4$

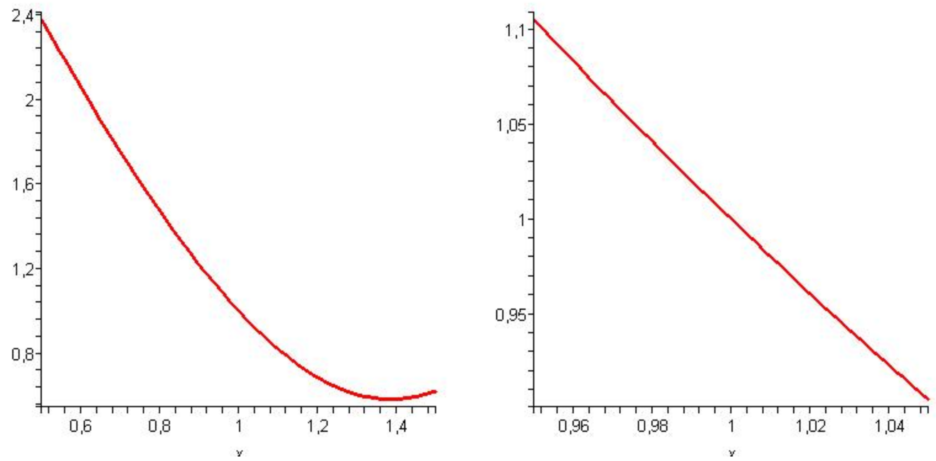
$x = 1$, ændres akserne, sådan at man får en tilnærmelsesvis ret linie i vinduet (se figur 8). Man siger, at grafen er tilnærmelsesvist lineær (Carstensen e.al., 2007a, s. 93) eller differentiabel, og differentialkvotienten er da netop hældningen til den rette linie, man ser i vinduet.

Den anden teknik,$\tau_2^{M,g}$, inddrager teknik og teknologi fra plan-geometri, hvor hælningen a til den rette linie mellem to punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ i xy-planen findes ved følgende formel

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

hvor hældningen a er tangens til vinklen, α, som linien danner med x-aksen, altså

$$\tan\alpha = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Figur 8: for at finde differentialkvotienten i $x = 1$ tegnes grafen for funktionen ved hjælp af CAS (i dette tilfælde Maple), og derefter ændres akserne indtil der ses en tilnærmelsesvis ret linie i vinduet, hvilket ses på den højre figur. Differentialkvotienten er da hældningen til den rette linie.

For at finde tangenthældningen for en kurve i et punkt $(x_0, f(x_0))$, tegnes sekanter mellem punktet $(x_0, f(x_0))$ og et andet punkt på kurven $(x_1, f(x_1))$. Ved at lade x_1 nærme sig x_0, vil tangenthældningen stabilisere sig omkring differentialkvotienten, da sekanterne nærmer sig tangenten. På denne måde findes også den rette linie, der er tættest på kurven.

3.1.2 Numerisk teknologi

Den numeriske teknologi anvendes - ligesom den geometriske teknologi - til at løse opgavetyperne T_1^M og T_2^M, det vil sige, at der er tale om, at tilnærme en givet funktion f omkring et punkt med en ret linie. Hvor udgangspunktet i den geometriske teknologi var en grafisk fremstilling af funktionen f, eller kurven for f, er udgangspunktet i den numeriske teknologi funktionsforskriften for f.

For at løse en opgave af type T_1^M, er teknikken at benytte definitionen på differentialkvotienten

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

der netop giver hældningen på tangenten. Hvis man blot betragter differenskvotienten, kan denne naturligvis ikke udregnes for $h = 0$. Teknikken til at finde tangenthældningen er derfor, at udregne differenkvotienten, hvor h vælges mindre og mindre, for at se, at tallene konvergerer.

Eksempel 3.2. *Vi ser på funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4,$$

og ønsker at finde differentialkvotienten i punktet $x_0 = 1$. Med udgangspunkt i $x_0 = 1$, udregnes

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

for varierende h. Dette er givet i nedenstående tabel

h	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
1	*1*
0,5	*-0,750*
0,1	*-1,790*
0,01	*-1,980*
0,001	*-1,998*

hvor det ses, at tallene der angiver sekanthældningen nærmer sig -2, hvilket også stemmer overens med figur 8.

For at finde tangentens ligning, og altså løse T_2^M ved hjælp af den numeriske teknologi, skal man bestemme ligningen for den rette linie, p_1, der har hældningen $f'(x_0)$, og går igennem punktet $(x_0, f(x_0))$.

$$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

p_1 er en første ordens Taylor-approximation til funktionen f omkring punktet x_0. Taylor-approximationer, og konvergens af Taylor-rækker, ligger uden for gymnasiematematikken, så det er ikke oplagt at lave approximationen til f bedre ved at introducere Taylor-approximationer af højere orden, men muligheden foreligger, hvis man ønsker at bringe teorien et niveau op. Desuden er teorien omkring Taylorpolynomier relevant i forbindelse med at ville vurdere hvor stor en fejl man begår ved at benytte den lineære approximation p_1 fremfor den egentlige funktion f. Denne fejl kan vurderes ved hjælp af Taylors formel med restled. Hvis funktionen f er kontinuert på intervallet $[x_0, x_1]$, er fejlen imellem f og Taylorapproximationen af første orden givet ved

$$|f(x_1) - p_1(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(t)(x_1 - t)dt \right|$$

for $x_1 > x_0$. (Lindstrøm, 1995, s. 542).

Man kan sige at

$$f(x) \approx p_1(x), \text{ for } x \text{ i en lille omegn af } x_0.$$

Hvad der helt præcist menes med, at p_1 tilnærmer f omkring x_0 kan formuleres ved hjælp af ε, δ og kvantorer således at

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - p_1(x)| < \varepsilon.$$

Det er altså interessant at vurdere hvor lille δ skal være for at p_1 tilnærmer funktionen f med den nøjagtighed, ϵ, der ønskes, hvilket netop kan bestemmes ved at anvende Taylors formel med restled.

Eksempel 3.3. *Vi ser igen på funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *givet ved*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4,$$

hvor differentialkvotienten i punktet $x = 1$ *blev bestemt til*

$$f'(1) = -2$$

Tangentens ligning, altså den lineære approximation p_1 *til grafen omkring punktet* $x = 1$ *er da givet ved*

$$p_1(x) = 1 - 2(x - 1) = -2x + 3.$$

Ønsker man at bestemme, i hvilket interval p_1 *passer bedre end* ε *med* f, *ses på*

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)| &= \left| \int_1^{1+\delta} f''(t)(1 + \delta - t)dt \right| = \left| \int_1^{1+\delta} (6t - 2)(1 + \delta - t)dt \right| \\ &= |(2 + \delta)\delta^2| \end{aligned}$$

hvilket altså skal være mindre end ε for alle x i et interval omkring $x = 1$. For lille δ kan følgende rimelige approximation anvendes

$$|(2+\delta)\delta^2| \approx 2\delta^2, \tag{1}$$

og da dette skal være mindre end ε skal x være i intervallet $x \in (1-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, 1+\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})$. Dette er naturligvis ikke eksakt på grund af approximationen (1).

I denne beskrivelse af den geometriske- og den numeriske teknologi, hænger de sammen i den forstand, at man i den numeriske teknologi formaliserer og regner på det, som man beskriver og tegner i den geometriske. Det vil sige, at man betragter differentialkvotienten med henblik på at finde en lineær tilnærmelse til grafen i punktet x_0.

3.1.3 Kinematisk teknologi

I modsætning til de to forrige måder at betragte differentialkvotienten på, hvor der arbejdes med abstrakte funktioner, og lineære tilnærmelser til disse, er udgangs-punktet for denne teknologi, at funktionen beskriver en udvikling i tid. I stedet for at tale om differentialkvotienten som en tilnærmelse til grafen i et punkt eller tangenthældningen i et punkt, taler man her om funktionens *øjeblikkelige væksthastighed*.

Funktionen kan ikke være abstrakt eller repræsentere en geometrisk figur i dette tilfælde, men skal knyttes til en konkret beskrivelse, da man ved hjælp af funktions- og variabelværdiernes enheder fortolker differentialkvotienten udfra hvilke enheder der findes på akserne. Funktionen kan i princippet blive hentet ind fra flere forskellige fag, her iblandt økonomi, biologi og fysik, men grunden til navngivningen *den kinematiske teknologi* er, at det oplagte og det mest tilgængelige område for eleverne netop er kinematikken eller bevægelseslæren, da differentialkvotienten her har en naturlig fortolkning, og hvor der eksisterer en fælles referenceramme omkring begrebet *hastighed*.

Man går ud fra en partikels stedfunktion s, og betragter opgavetyperne

$T_0^{M,k}$: Find partiklens gennemsnitshstighed over intervallet $[t_0, t_1]$

$T_1^{M,k}$: Betragt en partiklen, hvis bevægelse er givet ved funktionen s. Bestem partiklens hastighed til tiden t_0.

$T_2^{M,k}$: Betragt en partiklen, hvis bevægelse er givet ved funktionen s. Bestem en funktion v, der beskriver partiklens hastighed som funktion af tiden.

Teknikken til at løse $T_1^{M,k}$ er at benytte, at hastighed er tilbagelagt afstand per tid, så i princippet skal man have to målepunkter t_0 og t_1 for at kunne bestemme en partikels hastighed, sådan at man kan anvende formlen

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

For at definere *øjeblikshastigheden*, eller *momentanhastigheden*, skal man benytte definitionen på differentialkvotienten, sådan at man lader det andet målepunkt, t_1, gå mod t_0. Her er det ikke relevant at tilnærme grafen ved hjælp af en lineær funktion i punktet $(t_0, s(t_0))$, da man er kun interesseret i, hvor hurtigt funktionsværdien vokser, altså funktionens *væksthastighed*.

For at løse $T_2^{M,k}$, skal man igen benytte definitionen på differentialkvotienten, da denne gav hastigheden. I stedet for at betragte et enkelt punkt t_0, ser man på differentialkvotienten for alle t;

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

sådan, at i stedet for at man beregner en værdi for funktionens væksthastighed, får man en ny funktion ud. Denne funktion beskriver altså den samme bevægelse, men i stedet for at angive partiklens position som funktion af tiden, fås partiklens hastighed som funktion af tiden. Igennem den kinematiske teknologi findes altså et naturligt link imellem en funktion f og dens afledede f', da f' her giver funktionen fs væksthastighed til ethvert punkt i definitionsmængden, såfremt f er differentiabel.

Et naturligt følgespørgsmål på ovenstående er, hvad man får, hvis man differentierer hastighedsfunktionen. Igen skal man betragte funktionsværdiernes enhed, som i dette tilfælde er afstand per tid. Den afledte til hastighedsfunktionen er derfor hastighedsændringen per tid, hvilket vil sige afstand per tid per tid. Dette er netop definitionen på acceleration. I kinematikken benyttes særskilte betegnelser for funktionerne alt efter om de afbilder position, hastighed eller acceleration som funktion af tiden. Disse betegnelser er henholdsvis s, v og a, og relationen imellem disse er givet ved

$$s'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = a(t)$$

hvilket samlet set giver

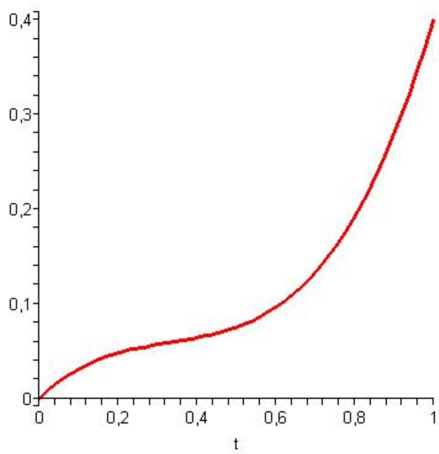
$$s''(t) = v'(t) = a(t).$$

relationen imellem s og v er altså den samme som v og a, da accelerationen a er defineret som hastighedens øjeblikkelige væksthastighed.

Eksempel 3.4. *Lad $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ være en stedfunktion givet ved*

$$s(t) = t^3 - t^2 + \tfrac{2}{5}t$$

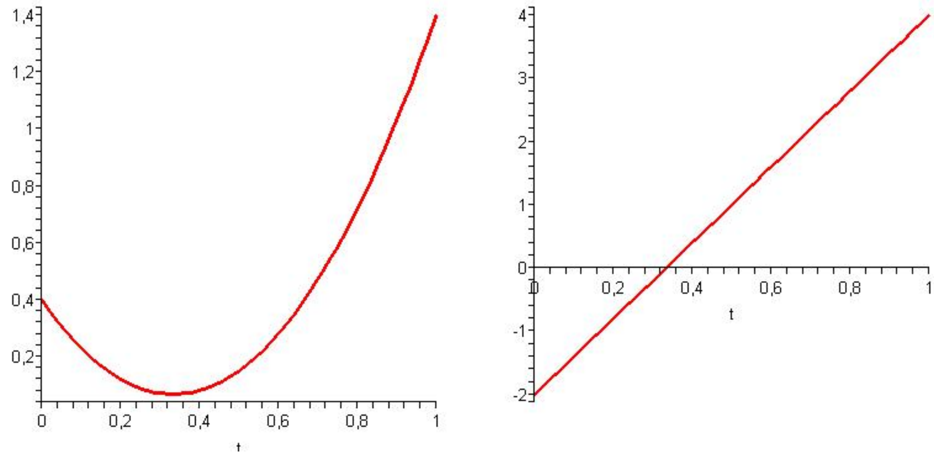
Da findes hastighedsfunktionen ved at benytte definitionen på differentialkvo-



Figur 9: positionen s som funktion af tiden t

tienten, eller regnereglerne for denne, som senere findes igennem den algebraiske synsvinkel, til at finde den afledte til s

$$v(t) = 3t^2 - 2t + \tfrac{2}{5}$$



Figur 10: Hastigheden v (tv.) og accelerationen a (th.) som funktion af tiden t

og accelerationsfunktionen findes ved at finde den afledte til v

$$a(t) = 6t - 2$$

Fælles for disse tre funktioner er, at de alle beskriver den samme bevægelse (figur 10).

Udover at eleverne har en fælles referenceramme med hensyn til position og hastighed, er differentialkvotienten også mere naturligt defineret i forbindelse med kinematikken end for eksempel populationsstørrelser i biologi, da både tid og position er kontinuerte størrelser i modsætning til, hvis man for eksempel i biologi ønsker at beskrive en populationsstørrelse som funktion af tiden, hvor funktionsværdien er enten heltallig eller rationel, alt efter hvordan man beskriver væksten.

3.1.4 Algebraisk teknologi

Denne teknologi adskiller sig fra de forrige ved at man betragter definitionen på differentialkvotienten uden at forholde sig til en fortolkning af den, men blot ser på, hvad definitionen har af konsekvenser for forskellige funktioner. Her indgår blandt andet regneregler, for eksempel for, hvordan man differentierer summen, produktet og sammensætningen af differentiable funktioner, hvilket spiller en stor rolle i gymnasiematematikken, jævnfør kernestoffet vedrørerende differentialkvotienten.

Udgangspunktet er den algebraiske definition på differentialkvotienten og den afledte, hvor grænseværdi spiller en afgørende rolle, hvilket gør, at den matematiske organisation *grænseværdiers algebra* (Barbé *e.al*, 2002) er et element i denne teknologi. Specielt i forbindelse med beviser for regnereglerne for differentiation er denne matematiske organisation afgørende, da når først regnereglerne er blevet bevist, træder definitionen på differentialkvotienten eller den afledte og dermed også grænseværdibegrebet i baggrunden.

Opgavetyperne i denne lokale matematiske organisation kan opdeles i to

$T_1^{M,a}$ Find den afledte til en differentiabel funktion f.

$T_2^{M,a}$ Find differentialkvotienten for en funktion f i punktet x_0.

Herudover er beviser for regneregler som sagt også en del af denne organisation, og de tilhørende punktuelle matematiske organisationer for disse opgavetyper er af en anden karakter.

Sætning 3.5 (Linearitet)**.** *Differentialkvotienten er lineær, dvs lad f, g være differentiable funktioner, og lad k være konstant. Da er*

$$(k \cdot f + g)' = k \cdot f' + g'$$

Bevis. Sætningen følger i store træk af følgende udregning, hvor regnereglerne for grænseværdier spiller en afgørende rolle

$$\begin{aligned}
(k \cdot f + g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(k \cdot f + g)(x+h) - (k \cdot f + g)(x}{h} \\
&= k \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= k \cdot f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

hvor det er blevet benyttet, at f og g er differentiable. □

Udover, at differentialkvotienten er lineær, er følgende regneregler blandt andre relevante i gymnasieundervisningen

- $(f \circ g)'(x) = g'(x)(f' \circ g)(x)$

- $(f \cdot g)'(x) = (f \cdot g')(x) + (f' \cdot g)(x)$

- $(x^n)' = nx^{n-1}$

Disse regneregler benyttes til at løse opgavetyperne $T_1^{M,a}$ og $T_2^{M,a}$

Eksempel 3.6. *Vi ser på funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *givet ved*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4,$$

og ønsker at finde differentialkvotienten i punktet $x = 1$*. En teknik er at anvende definitionen, sådan at*

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2h + 2h^2 + h^3}{h} = -2 \end{aligned}$$

hvor algebraen vedrørende grænseværdi er blevet benyttet. En anden teknik er, at benytte regnereglerne for den afledte funktion til at finde f'*, sådan at*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

og herefter indsætte $x = 1$*. Det er denne teknik der er en oplagte, og det vil være denne, som forventes anvendt af eleverne i en eksamenssituation eller lignende.*

At finde den afledte funktion f' til en givet funktion f, er en algoritmisk proces, hvor man stort set kan starte fra en ende af, og ved at benytte de oplagte regneregler / teknikker, vil man nå resultatet.

3.1.5 Sammenhængen mellem de fire diskurser

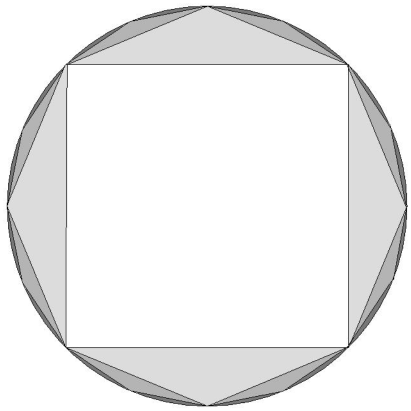
M. Artigue (2005) beskriver opbygningen af en didaktisk organisation, som introducerer differentialkvotienten som objekt igennem de fire teknologier. Ved at benytte differentialkvotienten til at beskrive monotoniforhold, samt finde lokale extrema for funktioner bliver differentialkvotienten et redskab der kan benyttes til for eksempel at behandle *kinematiske-, optimerings-* og *tangentielle problemer.*

De fire teknologier står sjældent alene, og det er ofte fornuftigt at benytte mere end en teknologi, når man løser en opgave, hvilket også gjorde sig gældende i beskrivelsen af den kinematiske synsvinkel, hvor graferne for funktionerne v og s blev medtaget for at anskueliggøre problemstillingen.

En klassisk måde at introducere differentialkvotienten på, benytter disse fire teknologier. Igennem den geometriske- og numeriske teknologi introduceres problemstillingen, hvilket bliver fulgt op af den algebraiske teknologi. Til sidst bliver den kinematiske teknologi benyttet til at fremhæve anvendelser af begrebet.

3.2 Integration og stamfunktion

Tilgangen til differentialkvotienten er ligetil i forhold til, at man betragter en funktion, og man ønsker at at beskrive, hvad der sker i og i en lille omegn om et enkelt punkt, og der er en konkret algebraisk definition at gå ud fra. Tilgangen til integralregningen er derimod mere kompleks, selvom den simple problemstilling i gymnasieundervisningen som udgangspunkt ikke er vanskelig at forstå, da der er tale om, at man ønsker at finde arealet under en given kurve. En af grundene til at dette er vanskeligere er, at i modsætning til differentiation, hvor man har en definition, der gør, at en række forudsætninger om funktionen skal være opfyldt, sådan at de funktioner, der betragtes, for eksempel skal forudsættes at være kontinuerte, er der ikke de samme krav til integration, hvor man kan tale om arealer under vilkårlige funktioner. Herudover er differentialkvotienten en lokal problemstilling, hvor man for eksempel kan zoome ind på et punkt igennem den geometriske teknologi, og se om funktionen er lokalt lineær, og betragte denne som en ret linie. Derimod er integration en regional problemstilling, hvor man betragter en en kurve eller en funktion over et interval. Når man har med en „blød“ kurve at gøre, hvor man ønsker at finde arealet under denne, er algebraen vedrørende grænseværdier igen afgørende, da man tilnærmer arealet under kurven med polygoner, der nærmer sig kurven, og hvor polygonernes grænse netop er den bløde kurve. For eksempel når cirklens areal findes ved at tegne polygoner inden i cirklen (se figur 11).



Figur 11: Cirklen tilnærmes med polygoner, hvor arealet er veldefineret. Cirklens areal findes da ved en grænseværdi.

Kernestoffet i matematik A-niveau, der omhandler integration er givet ved

> - *stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$ samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer* (STX bekendtgørelsen, 2008b)

og de faglige mål, som omhandler integralregningen er givet ved

> - *anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger* (STX bekendtgørelsen, 2008b)

Det vil altså sige at man kommer udenom problematikken vedrørende integrabilitet, da man kun behandler funktioner der har en stamfunktion og sammenhængen mellem en stamfunktion og arealfunktionen for en given funktion.

I det følgende vil den del af integralbegrebet, som kernestoffet for matematik A-niveau omhandler, blive diskuteret i form af de fire teknologier, hvori differentialkvotienten også blev betragtet. Dog vil rumfang af omdrejningslegemer blive behandlet for sig selv i et efterfølgende afsnit. Det vil sige, at i det følgende er det analysens fundamentalsætning:

Sætning 3.7. *Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Da er f integrabel på alle* *delintervaller* $I(x) = [a, x]$, *og arealfunktionen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

er differentiabel med $F'(x) = f(x)$

samt de nævnte regneregler for integraler der er relevante.

3.2.1 Geometrisk teknologi

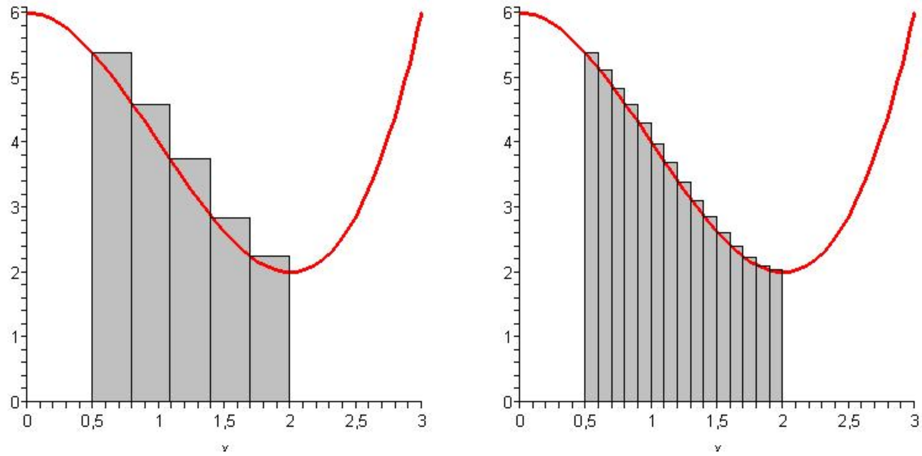
I den geometriske teknologi anvendes naturligvis en grafisk repræsentation af en positiv funktion f. I undervisningsfaget kan integration betragtes som en operation der går ud på, at finde arealet under en kurve i et givent interval I. Opgavetyperne, som man kan kigge på er af formen

$T_3^{M,g}$ Find arealet under den positive funktion f i intervallet $[a, b]$

$T_4^{M,g}$ Argumentér for analysens fundamentalsætning igennem den geometriske teknologi

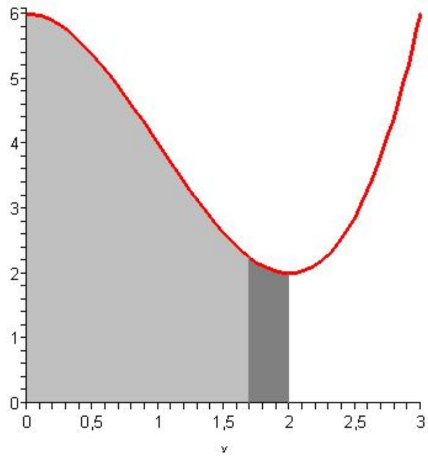
Følgende to teknikker til at anskue integration er mulige indenfor denne teknologi. Den ene er, at tilnærme arealet under en funktion f ved at inddele intervallet I i et antal mindre delintervaller Δx, og tegne rektangler med Δx som grundlinie og vælge højden af rektanglerne på en fornuftig måde, specielt er højden er givet ved en funktionsværdien i det enkelte interval. På figur 12 er højden valgt til at være funktionsværdien i det venstre endepunkt. Hvordan dette vælges er ligegyldigt så længe der er tale om kontinuerte funktioner, da det samlede areal af rektanglerne konvergerer imod arealet underfunktionen når intervallerne går mod nul (se figur 12).
Dette er en måde, hvorpå integralet kan defineres, og dette indgår også i definitionen af Riemann integralet. Arealfunktionen er da en funktion der giver arealet i et interval, hvor det ene endepunkt er variabel, altså hvor intervallet for eksempel er $I(x) = [a, x]$.

En anden metode til at se på begrebet integration igennem den geometriske teknologi er, at gå ud fra, at arealet under funktionen f er veldefineret og man



Figur 12: Arealet under funktionen $f = x^3 - 3x^2 + 6$ i intervallet $I = (\frac{1}{2}, 2)$ tilnærmes ved at lade grundlinierne i rektanglerne blive mindre og mindre

kan betragte arealfunktionen (se figur 13), og argumentere for, at denne er en stamfunktion til f. Stamfunktionen er et algebraisk begreb, som henviser til den omvendte operation af at differentiere, altså hvis F er en stamfunktion til f, er $F' = f$.



Figur 13: Funktionen $f = x^3 - 3x^2 + 6$ og dens arealfunktion.

Et bevis for at arealfunktionen er en stamfunktion kan naturligvis ikke gennemføres i den geometriske diskurs alene, men man kan udfra figur 13 argumentere for påstanden. Det lysegrå område afgrænser arealet under grafen i et interval $I = [0, x_0]$, hvor $x_0 = 1,7$ i dette tilfælde, mens det samlede grå område afgrænser arealet under grafen i et interval $I = [0, x_0 + h]$, hvor $h = 0,3$. Differentialkvotienten for arealfunktionen bestemmes da ved at finde differensen, altså arealet under grafen i intervallet $[x_0, x_0 + h]$, der er lig det mørkegrå areal (figur 13) Differenskvotienten kan da repræsenteres ved højden på det rektangel med grundlinie h, og med samme areal som differensen. Ved at lade grundlinien h gå mod nul, vil højden af rektanglet gå mod funktionsværdien i x_0, og altså vil differentialkvotienten for arealfunktionen være lig den oprindelige funktion, og altså er arealfunktionen dermed en stamfunktion.

3.2.2 Numerisk teknologi

Ligesom med den numeriske teknologi i forbindelse med differentialkvotienten, omhandler denne teknologi integralet ved hjælp af tilnærmelser i form af approximationer og talværdier. Opgavetyperne er til dels de samme som i den geometriske tekonologi. Inddelingen af intervallet $I = [a, b]$ i n del-intervaller leder hen imod, at arealet A for eksempel kan skrives ved hjælp af følgende sum, hvor del-intervallerne Δx har længden $\frac{b-a}{n}$, og højden på rektanglerne er givet ved funktionsværdien for det højre endepunkt i hvert del-interval

$$A = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \approx \int_a^b f(x)dx$$

Dette er en simpel numerisk integration, og ved at lave inddelingerne mindre og mindre, dvs lade n blive større og større, får man en mere nøjagtig tilnærmelse til det egentlige areal A, ligesom mn kunne se ved hjælp af den geometriske teknologi. For at få A eksakt skal man lade n gå mod uendelig, hvilket vil sige

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x \to 0.$$

Denne grænseværdi er netop, hvad der ligger i notationen $\int$ og dx, dvs „en uendelig sum af uendelig små størrelser“, altså:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Det eksakte integral, hvor man benytter algebraen vedrørende grænseværdi, tilhører ikke den numeriske teknologi men den algebraiske teknologi.

Eksempel 3.8. *Find arealet under funktionen*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$$

i intervallet $[\frac{1}{2}, 2]$. *Teknikken til at løse denne opgave er, at inddele intervallet* $[\frac{1}{2}, 2]$ *i delintervaller, og udregne summen af rektanglerne, der fremkommer på denne måde*

antal delintervallet n	$\sum_{i=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$
1	*3,000*
2	*3,949*
5	*4,620*
10	*4,860*
100	*5,084*
1000	*5,107*
100000	*5,109*

Jo finere inddelingen bliver, jo tættere bliver summen på det egentlige areal.

Ovenstående teknik virker, hvis man har givet et eksplicit funktionsudtryk for f. Hvis dette ikke er tilfældet, men man kun har nogle funktionsværdier kan man stadig finde arealet ved hjælp af en sum, hvilket følgende eksempel illustrerer.

Eksempel 3.9. *Givet tabelværdier for en funktion* f, *tilnærm* $\int_{0,5}^{2} f(x)dx$.

x	$f(x)$
0,5	*5,375*
0,7	*4,873*
0,8	*4,592*
1,3	*3,127*
1,4	*2,864*
1,8	*2,112*

Da er

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{2} f(x)dx &\approx \sum_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= f(0,5)\cdot 0,2 + f(0,7)\cdot 0,1 + f(0,8)\cdot 0,5 + f(1,3)\cdot 0,1 \\ &\quad + f(1,4)\cdot 0,4 + f(1,8)\cdot 0,2 = 5,739\end{aligned}$$

3.2.3 Kinematisk teknologi

I den kinematiske teknologi ses der ikke på abstrakte funktioner, men der ses i stedet på funktioner, der beskriver en bevægelse, ligesom i forbindelse med differentialkvotienten. Derfra blev relationerne

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

tydeliggjort, og det er nu de ækvivalente relationer

$$\int a(t)dt = v(t), \qquad \int v(t)dt = s(t)$$

der skal anvendes, altså for eksempel arealet under en $v(t)$-graf giver en tilbagelagt afstand. Opgavetyperne er

$T_3^{M,k}$: Givet en hastighedsfunktion v, bestem stedfunktionen s, givet en begyndelsesværdi $s(0)$.

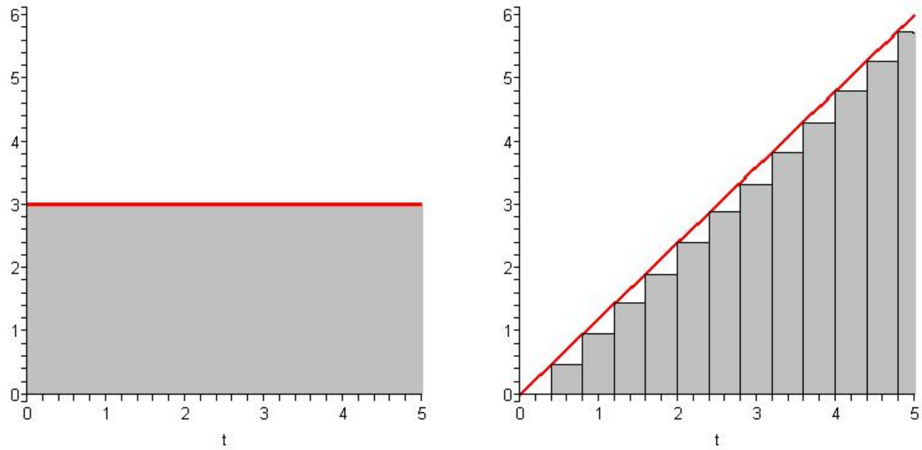
$T_4^{M,k}$: Givet en hastighedsfunktion v, bestem den tilbagelagte afstand i tidsintervallet $[t_0, t_1]$.

$T_5^{M,k}$: Givet en hastighedsfunktion v, bestem den gennemsnitlige hastighed i tidsintervallet $[t_0, t_1]$.

Ses først på en bevægelse med konstant hastighed $v(t) = 3{}^{m}\!/\!{}_{s}$ (se figur 14), har vi, at den tilbagelagte afstand på 5 sekunder er givet ved $s = t \cdot v = 5s \cdot 3{}^{m}\!/\!{}_{s} = 15m$, hvilket netop er arealet under grafen, hvis man multiplicerer højde og grundlinie. Ser man derimod på en ikke-konstant hastighedsfunktion, kan man tilnærme denne med en små tids-intervaller med konstant hastighed, og summere. Ved at lade disse tidsintervaller gå mod nul fås netop arealet under hastighedsfunktionen.

Hvis man ønsker at bestemme middelhastighed for bevægelserne tager man jævnfør formlen $s = v \cdot t$ den tilbagelagte afstand, og deler den med tids-intervallet, hvilket også blev benyttet i forbindelse med differentialkvotienten og opgavetype $T_0^{M,k}$. Da den tilbagelagte afstand i et tidsinterval $[t_0, t_1]$ er givet ved integralet af hastighedsfunktionen, kan middelhastigheden i intervallet $[t_0, t_1]$ findes ved

$$v_{\text{middel}}([t_0, t_1]) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$



Figur 14: Hastighedsfunktionen for en bevægelse med konstant hastighed $v = 5^{m}/_{s}$, og hastighedsfunktionen for en bevægelse med stigende hastighed $v(t) = \frac{6}{5}t$. Arealet under funktionerne er netop den tilbagelagte afstand i intervallet $[0, 5]$.

Dette giver en ny fortolkning af integralet som et redskab til at finde en funktions middelværdi i et interval, hvilket muligvis er en mere naturlig fortolkning i forhold til at skulle forholde sig til figurer med negativt areal, når funktionsværdierne er negative.

3.2.4 Algebraisk teknologi

Følgende sætninger præciserer, hvad der blev argumenteret i løse vendinger for i den geometriske synsvinkel

Sætning 3.10. *Lad f være en kontinuert funktion i intervallet $I = [a, b]$, da er for $x_0 \in I$*

$$f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Bevis. Antag at h er positiv og f er voksende i intervallet $[x_0, x_0 + h]$. Da er

$$h \cdot f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq h \cdot f(x_0 + h),$$

da $h \cdot f(x_0)$ er lig undersummen og $h \cdot f(x_0 + h)$ er lig oversummen i intervallet

$[x_0, x_0 + h]$. Ved at dividere med $h \geq 0$ og benytte at f er kontinuert fås at

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)$$

Hvis vi omvendt antager, at f er aftagende, da er

$$h \cdot f(x_0) \geq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \geq h \cdot f(x_0 + h),$$

hvilket giver det samme resultat som under den anden antagelse, når h hår mod 0. Samme argument kan anvendes for $h < 0$. □

Sætning 3.11 (Indskudsreglen)**.** *Lad f være en kontinuert funktion på intervallet $I = [a, b]$, og lad $c \in (a, b)$, da er*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

og

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Sætning 3.12 (Analysens fundamentalsætning)**.** *Antag at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Da er f integrabel på alle delintervaller $I(x) = [a, x]$, og arealfunktionen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

er differentiabel med $F'(x) = f(x)$

Bevis. Jævnfør definitionen af differentialkvotienten er

$$\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt,
\end{aligned}$$

hvilket netop giver funktionsværdien for f i punktet x_0, og dermed er sætningen bevist. □

I denne forbindelse er den algebraiske synsvinkel den der beskæftiger sig med regnereglerne for stamfunktioner, og ubestemte og bestemte integraler. Et ubestemt integral er givet ved, at man ønsker at finde en stamfunktion, mens et bestemt integral er givet ved, at man ønsker at finde arealet under grafen i et givet interval. Lad F være en stamfunktion til f, da er det ubestemte integral

$$\int f(x)dx = F(x) + k,$$

hvor k er en konstant. Udfra det ubestemte integral kan det bestemte intgral findes:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Regnereglerne for stamfunktioner er ikke vanskelige at bevise, da det blot handler om at differentiere stamfunktionen ved hjælp af regnereglerne for differentiation og se, at dette giver den oprindelige funktion

Sætning 3.13. *Lad F og G være stamfunktioner til henholdsvis f og g. Da er*

1. $\int f(x) + g(x)dx = F(x) + G(x)$
2. $\int f(x) - g(x)dx = F(x) - G(x)$
3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x)$

Beviset følger af, at differentiation er lineært. Udover ovenstående regneregler for stamfunktioner, findes der to integrationsmetoder, som er anvendelige til at finde stamfunktioner

Sætning 3.14 (Partiel integration)**.** *Lad f være en differentiabel funktion, og lad g en funktion med G som stamfunktion. Da er*

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

Bevis. For at bevise sætningen differentieres der på hver side af lighedstegnet

$$\left(\int f(x)g(x)dx\right)' = f(x)g(x)$$

og

$$\begin{aligned}\left(f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx\right)' &= f'(x)G(x) + f(x)G'(x) - \left(\int f'(x)G(x)dx\right)' \\ &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

hvilket beviser sætningen □

Sætning 3.15 (Integration ved substitution). *Lad f være en differentiabel funktion, og lad g en funktion med G som stamfunktion. Da er*

$$\int f'(x)g(f(x))dx = G(f(x))$$

Bevis. Kædereglen giver

$$(G(f(x)))' = f'(x)G'(f(x)) = f'(x)g(f(x))$$

□

Disse beviser og regneregler behandler integration som den modsatte operation til at differentiere, hvilket gør beviserne utrolig enkle, da man blot benytter sig af reglerne for differentiation. Disse regneregler er dog langt vanskeligere at anvende, end de er at bevise, da man for at kunne bruge reglerne for integration ved substitution og partiel integration skal kunne se et skridt længere frem for at de bruges korrekt. I modsætning til når man differentiere, er der nemlig ikke en algoritme man blot kan anvende, men man er nødt til i både integration ved substitution og partiel integration at kunne identificere funktionerne f og g korrekt, da man ellers ikke finder en løsning. Følgende er eksempler på dette.

Eksempel 3.16. *Beregn det ubestemte integral*

$$\int x^2 \exp(x)dx$$

sættes $f(x) = x^2$ og $g(x) = \exp(x)$ fås ved at anvende partiel integration to gange at

$$\begin{aligned}\int x^2 \exp(x)dx &= x^2 \exp(x) - \int 2x \exp(x)dx \\ &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + \int 2 \exp(x)dx \\ &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2 \exp(x) + k\end{aligned}$$

hvor k er konstant.

Sætter man derimod $g(x) = x^2$ og $f(x) = \exp(x)$ får man ved at anvende partiel integration første gang

$$\int x^2 \exp(x)dx = \frac{1}{3}x^3 \exp(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \exp(x)dx$$

hvilket ikke bringer een tættere på en løsning.

Eksempel 3.17. *Udregn det bestemte integral*

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Ved at lade $t = x^2 + 1$ *fås at* $\frac{dt}{dx} = 2x$, *hvilket giver*

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{t}dt = \ln 2$$

Eksempel 3.18. *Udregn det bestemte integral*

$$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}dz$$

I første omgang haves at

$$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}dz = 2\pi R \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2}dz.$$

Sættes $\frac{z}{R} = \sin t$ *fås at* $dz = R\cos t dt$ *og integralet går fra* $t = -\frac{\pi}{2}$ *til* $t = \frac{\pi}{2}$, *da* $t = \arcsin\frac{z}{R}$. *Dermed bliver ovenstående integral lig med*

$$\begin{aligned} &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos t \sin t + \frac{1}{2}t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 R^2, \end{aligned}$$

Disse to eksempler viser, at integration ikke er algoritmisk på samme måde som differentiation. Man skal foretage nogle valg, både i forbindelse med hvilke teknikker man vil anvende, og på hvilken måde de skal anvendes. I de to eksempler, hvor der blev benyttet integration ved substitution, var det oplagt i det første eksempel, at substitutionen, der skulle anvendes, var $t = x^2 + 1$. Derimod var det ikke nær så oplagt at substituere $\frac{z}{R} = \sin t$ i forbindelse med det andet eksempel.

Denne algebraiske teknologi fortolker ikke integration som arealet under en kurve, men derimod som den modsatte operation til at differentiere. Dette er dog også en fortolkning af integraler og stamfunktioner, og i modsætning til i forbindelse med differentiation kræver det mere indsigt i problemstillingen at anvende regnereglerne.

3.2.5 Eksempel på brug af forskellige teknologier i forbindelse med rumfang af omdrejningslegemer

Volumen af omdrejningslegemer er som sagt en del af kernestoffet i matematik A-niveau. Den numeriske- og den geometriske teknologi spiller en stor rolle i forbindelse med dette, da argumentationen for, at rumfanget V af et omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omkring x-aksen, er givet ved

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

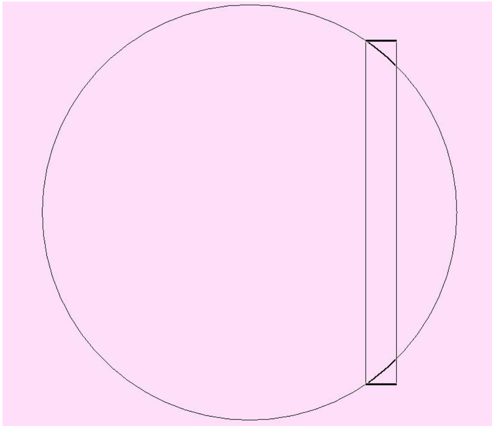
benytter netop den geometriske teknologi til at approximere volumenet V med det samlede rumfang af cylinderskiver med radius givet ved en funktionsværdi i hvert interval Δx, og den numeriske teknologi benyttes til at opskrive summen og se sammenhængen med integralet. I modsætning til arealet under en kurve, hvor analysens fundamentalsætning giver, at det kan findes ved hjælp af stamfunktioner, er argumentationen for volumenet af omdrejningslegemer nødt til at benytte den geometriske og numeriske teknologi. Et eksempel på dette kan findes, hvis man ønsker at bestemme volumenet af en kugle med radius R. Dette kan ske ved, at man betragter de to cylindre, der repræsenterer bidrag til henholdsvis „over- og undersummen“ fra en kugleskive med højde Δx. Igennem den geometriske teknologi er det tydeligt, at over- og undersummerne af volumenerne cylindrene konvergerer imod kuglens volumen. Derfor kan kuglens volumen findes ved at udregne integralet

$$\begin{aligned} V_{\text{kugle}} &= \int_{-R}^{R} V_{\text{cyl}}(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx \\ &= \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3, \end{aligned}$$

hvilket er netop er den kendteformel for rumfanget af en kugle med radius R.

Ønsker man derimod at bestemme overfladearealet af den samme kugle, er det fristende at benytte samme metode, og summere overfladearealerne af cylindrene, som man summerede volumenet af for at finde det samlede volumen af kuglen. Overfladearealet af hver af cylinderne er givet ved

$$O_{\text{cyl}}(x) = 2\pi\rho(x)\Delta x = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\Delta x$$



Figur 15: Bidraget til "oversummen"ses ikke at være større end bidraget fra kugleskiven. Dette er tydeligst tæt på polerne $x = \pm R$.

og overfladearealet findes da ved integralet

$$O_{\text{kugle}} = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}dz = 2\pi R \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2}dz$$

sættes $\frac{z}{R} = \sin t$ fås at $dz = R\cos t dt$ og integralet går fra $t = -\frac{\pi}{2}$ til $t = \frac{\pi}{2}$, da $t = \arcsin\frac{z}{R}$. Dermed bliver ovenstående integral lig med

$$\begin{aligned} O_{\text{kugle}} &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos t \sin t + \frac{1}{2}t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 R^2, \end{aligned}$$

hvilket *ikke* stemmer overens med den kendte formel for en kugles overfladeareal

$$O = 4\pi R^2.$$

Spørgsmålet er så, hvad der er gået galt, fordi umiddelbart er det den samme metode der blev anvendt til at finde rumfanget af kuglen, hvor det lykkedes. Problemet er netop, at man ikke foretager korrekte vurderinger, da cylindrenes samlede overfladeareal *ikke* konvergerer mod kuglen overfladeareal, da man ved at betragte overfladeareal af cylindre, der skulle repræsentere henholdsvis „over- og undersummerne“, ikke henholdsvis større og mindre end kugleskiverne. Dette bliver tydeligst omkring kuglens poler $z = -R$ og $z = R$, hvilket ses på figur 15.

Dette er ikke et tænkt eksempel på, hvor integration kan gå galt, men et eksempel, som er blevet undersøgt (Artigue, 1990) i forhold til universitetsstuderendes brug af differentialer, i forbindelse med, at integration igennem den numeriske- og geometriske teknologi, hvor man vurderer over- og undersummer, stort set er forsvundet i gymnasiematematikken og -fysikken, men de er dog relevante i forhold til disse omdrejningslegemer.

3.3 Den regionale matematiske organisation

Disse fire teknologier indenfor de to områder differential- og integralregning beskriver som sagt hver for sig en lokal matematisk organisation, hvor den overordnede teori er givet ved regning med infinitesimaler og grænseværdi. Altså kan de matematiske organisationer fra denne epistemologiske referencemodel integreres i en fælles regional matematisk organisation. I forbindelse med differentialkvotienten var der en naturlig „sti“ at følge, sådan at de fire teknologier blev bragt i spil og integreret i én matematisk organisation. Denne „sti“ er ikke på samme måde entydig i forhold til integralregning, da der ikke er en oplagt teknologi, som kan benyttes til at introducere begrebet, da de alle bringer hver deres fortolkning.

I forhold til kernestoffet for matematik A-niveau er det den algebraiske synsvinkel, der er dominerende i gymnasiet, og som det kan ses senere, er det også denne teknologi, der er målet for behandlingen af omdrejningslegemer, hvor de andre teknologier bringes i spil, for at argumentere for formlen

$$V = \int_a^b f(x)^2 dx$$

Linket imellem differentiation og integration er specielt tydeligt i forbindelse med den kinematiske teknologi, da man her betragter differentiation og integration som inverse operationer, og man samtidig kan argumentere ud fra arealbestemmelse, at stamfunktioner kan anvendes til dette.

4 Metodologi

Jeg ønsker at undersøge på hvilket niveau samspillet imellem matematik og fysik finder sted i det ny reformgymnasium. Dette vil ske igennem en analyse af læreplaner, lærebøger og skriftlige eksamenssæt i de to fag. For at konkretisere det faglige område, hvor jeg undersøger samspillet, er det i forbindelse med differential- og integralregning i matematik og kinematik i fysik. Det er altså kun den eksterne didaktiske transposition, som jeg undersøger i dette speciale, hvilket vil sige, at det er de rammer, som bliver fastlagt på ministerielt niveau og i opgavekomitéen, jeg forholder mig til og søger resultater igennem. Dette gør også, at jeg ikke kan sige noget direkte vedrørerende den faktiske undervisning der foregår ude i gymnasierne, hvilket også er underordnet i forhold til problemstillingen, der omhandler *mulighederne* for at dyrke samspillet. For at indsnævre området, som jeg vil undersøge, ses kun på fagene matematik og fysik på det højeste gymnasielle niveau, altså A-niveau, og læreplaner, - bøger og eksamenssæt knyttet til dette niveau.

4.1 Læreplaner

I forhold til kernestof og faglige mål for de to fag matematik og fysik på A-niveau, kan lærebøgerne og resultaterne fra disse, forventes at give et passende billede af, hvordan stoffet bliver behandlet. Herudover er der, omend ligeså passende i lyset af problemstillingen, afsnit i læreplanerne der omhandler tilrettelæggelsen af undervisningen med blandt andet underafsnittene *samspil med andre fag* og didaktiske principper. Der vil blive redegjort for disse to underafsnit for hvert af fagene.

Ud over læreplanerne for matematik og fysik A-niveau, er elementerne *almen studieforberedelse* og *studieretningsprojekt* vigtige, når tværfagligheden i gymnasiet skal diskuteres, da disse to elementer netop sigter mod at drage nytte af samspil på tværs af de kasser, som gymnasiefagene er placeret i.

Dele af læreplanerne for disse faglige elementer vil blive fremført, for at kunne sammenholde dem med de øvrige resultater fra lærebøger og eksamenssæt i diskussionen. De vil altså ikke i særlig høj grad blive analyseret i forhold til den epistemologiske referencemodel.

4.2 Lærebogsmaterialet

I analysen af matematikfaget bliver der benyttet ét sæt matematiklærebøger af Carstensen, Frandsen og Studsgaard fra 2007. Dette lærebogsæt er designet til et 3-årigt A-niveau forløb, og er skrevet på baggrund af den ny gymnasiereform fra 2005, sådan at de opfylder de krav læreplanerne stiller til blandt andet kernestof og faglige mål. Igennem dette lærebogssæt vil den overordnede struktur for indførelsen af differentialkvotienten og integralregningen kort blive beskrevet ved brug af referencemodellen. Herudover vil der specielt blive lagt fokus på et eventuelt samspil med fysik igennem eksempler, opgaver og lignende.

I redegørelsen for, hvilke matematiske organisationer der indgår i den didaktiske organisation omhandlende kinematik, benyttes, ligesom i analysen af den didaktiske organisation i matematik, kun et lærebogssæt til Fysik A-niveau af Elvekjær og Benoni (2006). Denne lærebog er også skrevet på baggrund af den ny gymnasiereform fra 2005. Bogen er emneopdelt, og det er i kapitlet *bevægelser* og de tilhørende lærebogsopgaver, hvor de matematiske organisationer, der forventes bragt i spil, vil blive identificeret, og blive sammenholdt med de matematiske organisationer fra matematik-lærebøgerne.

Umiddelbart virker det ikke repræsentativt kun at kigge på et lærebogssæt til hvert fag, men da hovedformålet med specialet er, at klarlægge det potentielle og aktuelle samspil i gymnasieundervisningen, og gymnasieundervisningen ofte i høj grad er styret af eksamen, kan det alligevel forsvares kun at tage udgangspunkt i et lærebogssæt i hvert fag, da hovedparten af resultaterne hentes fra netop skriftlige eksamenssæt i de to fag.

4.3 Eksamensopgaver

Jeg tager udgangspunkt i samtlige skriftlige eksamenssæt der er udgivet i de to fag i forbindelse med den ny gymnasiereform. Da det er en ny reform, er datamaterialet dog begrænset til tre reelle eksamenssæt samt to vejledende eksamenssæt til fysik A-niveau og fire eksamenssæt samt 2 vejledende eksamenssæt til matematik A-niveau.

I eksamenssættene fra fysik A-niveau vil jeg undersøge opgaver indenfor emnet kinematik eller bevægelse, og analysere disse med henblik på at diskutere den tilhørende praxeologi, og se, hvilke teknologier fra den epistemologiske referencemodel, der er brugbare i eksamenssituationen. Jeg er interesseret i at sammenligne de matematiske organisationer, som bliver bragt i spil i forbindelse med eksamener i de to fag, sådan at det kan fastslås, hvordan samspillet mellem matematik og fysik kan bruges sådan at begge fag styrkes i forhold til, at man ønsker at behandle matematiske organisationer, der er relevante for begge fag, i et eventuelt tværfagligt forløb, hvor teorien vedrørende study and research programmer benyttes. Derfor undersøges eksamenssættene i matematik også i forbindelse med de opgaver, som vedrører differential- og integralregning.

5 Resultater og analyse

5.1 Samspillet mellem matematik og fysik i læreplanerne

5.1.1 Læreplanerne for matematik og fysik A-niveau

De faglige mål og det faglige indhold, der relaterer sig til differential- og integralregning, i læreplanen for matematik A-niveau, er gjort klart i forbindelse med beskrivelsen af den epistemologiske referencemodel, som specielt i forbindelse med integralregning er konstrueret ud fra læreplanen i matematik A-niveau. Herudover er der også i læreplanen et afsnit vedrørende tilrettelæggelsen af undervisningen, hvor det bliver klargjort, at der skal indgå projektforløb i forbindelse med en del af kernestoffet, og hvor samspil med andre fag bliver nævnt:

> ***3.4 Samspil med andre fag***
> *Når matematik indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges et fagligt samarbejde, som indeholder mere omfattende anvendelse af matematik. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.*
> (STX bekendtgørelse, 2008b)

Hvis vi betrager en studieretning med både matematik og fysik på A-niveau, kan vi sammenholde, hvad de to fag forventer af samspillet. For fysiks vedkommende bliver samspillet med matematik specielt fremhævet, da netop dette samspil har en anden og mere præcis karakter, end for eksempel samspillet med samfundsfag eller andre humanistiske fag.

> ***3.4 Samspil med andre fag***
> *Når faget indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges forløb sammen med studieretningsfagene, som viser styrken i fagenes samspil og perspektiverer fysikken. Indgår faget i en studieretning sammen med matematik, skal der specielt tilrettelægges forløb, hvor de to fag arbejder sammen om behandlingen af modeller for konkrete fysiske systemer med vægt på en diskussion af modellernes forudsætninger og pålideligheden af de resultater, som opnås gennem anvendelse af modellerne.* (STX bekendtgørelse, 2008a)

Af undervisningsvejledningen tilhørende læreplanen (undervisningsministeriet, 2008a) for fysik A-niveau, bliver det udpenslet, at specielt i forbindelse med indførelse til hastighed og acceleration i integral og differentialregning, skal fagene bruge hinanden, dog med forbeholdet:

> *Samarbejdet med matematik må ikke føre til at fysik bliver til "matematik med anvendelser", ligesom man må respektere, at matematik ikke blot skal være redskabsfag for fysik. Man skal holde sig for øje, at matematikken ikke må være en unødig komplikation, men skal bidrage til at give sammenhæng og overblik over de fysiske størrelser og relationer.*
>
> *De to fag rummer vide muligheder for synergi-effekter ved et intensivt fagsamarbejde i studieretningen, samtidig med at fagenes særkende udmærket kan og skal accentueres overfor eleverne.* (undervisningsministeriet, 2008a, s. 37)

Der er altså ikke blot mulighed for, at dyrke samspillet i det ny reformgymnasium, det er også et krav, at fagene arbejder sammen omkring tværfaglige forløb. Dette gør det omend mere relevant, at undersøge, hvilke opgavetyper der går igen og hvilke teknologier der skal anvendes, i begge fag i forbindelse med den skriftlige eksamen, sådan at den videnskabsfaglige legitimitet (jævnfør afsnittet „det genererende spørgsmål Q) i forbindelse med et RSP-forløb er opfyldt for begge fag.

5.1.2 Læreplanen for studieretningsprojektet

Før gymnasiereformen var den større skriftlige opgave i 3.g et enkeltfagligt projekt. Dette er blevet lavet om i forbindelse med den nye reform, sådan at den større skriftlige opgave har taget navneforandring til studieretningsprojekt, hvor eleverne, i stedet for en enkeltfaglig problemstilling, skal behandle en tværfaglig problemstilling.

> ***1.1*** *I 3.g skal hver elev udarbejde et studieretningsprojekt. Studieretningsprojektet udarbejdes i 2 eller 3 fag med udgangspunkt i et studieretningsfag, som eleven har på A-niveau, og med inddragelse af andre studieretningsfag og/eller fagene dansk A og historie A.*
> [...]
> ***2.2*** *Eleven vælger i samråd med sin(e) vejleder(e) område for studieretningsprojektet. Området skal - inden for såvel fagenes kernestof som supplerende stof - afgrænses på en sådan måde, at der kan udformes en opgaveformulering, som sikrer, at der ikke kan ske genanvendelse af afsnit fra besvarelser, som tidligere er blevet afleveret og rettet.* (STX bekendtgørelse, 2008c)

Det er altså et krav, at tværfagligheden behandles, hvilket gør fagkombinationen matematik og fysik oplagt at benytte, da måden hvorpå fysiske teorier bliver formidlet netop er igennem matematik. Med udgangspunktet i, at finde områder, hvor tværfagligheden er med til at etablere matematiske organisationer med henblik på en skriftlig eksamen, er det dog ikke relevant at benytte dette element, da det kun vil styrke den enkelte elev, som beskæftiger sig med emnet. Men i forbindelse med samspillet generelt, er dette et meget interessant element.

5.1.3 Læreplanen for almen studieforberedelse

Almen studieforberedelse er også et tværfagligt element, hvor matematik og fysik kan behandles, dette skal dog også ske i forbindelse med andre fagområder, og jævnfør identiteten for almen studieforberedelse:

> *Almen studieforberedelse er et samarbejde mellem fag inden for og på tværs af det almene gymnasiums tre faglige hovedområder: naturvidenskab, humaniora og samfundsvidenskab. I almen studieforberedelse arbejdes der med betydningsfulde natur- og kulturfænomener, almenmenneskelige spørgsmål, vigtige problemstillinger og centrale forestillinger fra fortid og nutid med anvendelse af teorier og metoder fra alle områder. Almen studieforberedelse har til formål at udfordre elevernes kreative og innovative evner og deres kritiske sans i anvendelsen af faglig viden gennem fagligt samarbejde samt styrke deres evne til på et bredt fagligt og metodisk grundlag og i et fremtidsorienteret perspektiv at forholde sig reflekterende og ansvarligt til deres omverden og deres egen udvikling.* (STX bekendtgørelse, 2008d)

opfylder det konkrete samspil mellem matematik og fysik i forbindelse med kinematik og differential- og integralregning ikke kravene, da samspillet skal ske på tværs af de faglige hovedområder. Konkrete eksempler fra udviklingen af differential- og integralregning kan dog bringes op i sådan et AT-forløb. Derudover er almen studieforberedelse også et område, hvor det fortrinsvist er individuelle arbejdsformer, der er kernen, så af samme årsag som i forbindelse med studieretningsprojektet, er det ikke i forbindelse med almen studieforberedelse, at det tværfaglige undervisningsforløb kan finde sted.

5.2 Samspillet mellem matematik og fysik i lærebøger

5.2.1 Lærebogen i matematik A-niveau

Fysikkens bidrag til indholdet i matematiklærebøgerne (Carstensen *e.al*, 2006, 2007a, 2007b) er meget forskelligt i forhold til introduktionen til de to begreber differentialkvotient og integral, hvor indførelsen af begreberne *differentialkvotient* og *afledet funktion* bliver delt ind i tre kapitler, der bliver navngivet: *Differentialkvotient*, *Regneregler for differentialkvotient* og *Monotoniforhold*. Hvor kapitlet *monotoniforhold* indeholder eksempler på anvendelser fra andre fagområder, her iblandt kinematikken. Det er først i dette sidste kapitel, at den kinematiske teknologi bliver anvendt. Overordnet set er introduktionen til begrebet differentialkvotient struktureret sådan, at man bliver indtroduceret til problemstillingen igennem den geometriske teknologi og de to opgavetyper der blev præsenteret igennem den, hvorefter der bliver regnet på eksempler igennem den numeriske- og den algebraiske teknologi. Regneregler for differentiation af specielle funktioner, samt produktet og sammensætningen af funktioner bliver vist og anvendt igennem den algebraiske teknologi.

Differentialkvotienten bliver altså i store træk benyttet til at betragte abstrakte funktioner samt de geometriske figurer disse frembringer. Her i blandt bliver formlen for tangenten til kurven i punktet x_0 givet ved ligningen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Der bliver dog ikke diskuteret, hvor godt tangenten tilnærmer funktionen.

Kapitlet *Monotoniforhold* behandler differentialkvotienten og den afledede som et redskab til at løse netop opgaver vedrørende monotoniforhold. Herudover behandles også optimerings-, økonomi- og kinematikproblemer, hvor de fysiske begreber *hastighed* og *acceleration* bliver behandlet igennem et eksempel, og relationen

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

bliver givet ved at betragte og løse opgaver svarende til de tre opgavetyper $T_0^{M,k}$, $T_1^{M,k}$ og $T_2^{M,k}$:

> ***Vejlængde og hastighed***
>
> *Hvis t_0 er et bestemt tidspunkt, ønsker vi at finde legemets hastighed til dette tidspunkt. Til tidspunktet t_0 befinder legemet sig i positionen $s(t_0)$, og et stykke tid senere, til tidspunktet $t_0 + h$, befinder det sig på posistionen $s(t_0 + h)$. Dets gennemsnitlige hastighed i tidsrummet fra t_0 til $t_0 + h$ er altså*
>
> $$\frac{\textit{vejlængde}}{\textit{tidsrum}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

Hvis vi gør tidsrummet h meget lille (dvs. vi lader h gå mod 0) nærmer den gennemsnitlige *hastighed i intervallet* $[t_0, t_0 + h]$ *sig til den* øjeblikkelige *hastighed til tispunktet* t_0. *Denne øjeblikkelige hastighed* $v(t_0)$ *er dermed grænseværdien*

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \to v(t_0) \textit{ for } t \to 0.$$

Fra differentialregningen ved vi, at grænseværdien for denne brøk er differentialkvotienten af funktionen s i punktet t_0, *så*

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \to s'(t_0) \textit{ for } t \to 0.$$

Men så er $v(t_0) = s'(t_0)$. *Dette gælder for alle de tidspunkter t, vi ser på, så vi har den vigtige sammenhæng:*

⁝*Hastigheden er den afledede af vejlængden*

(Carstensen *e.al.*, 2007a, s. 199)

Dette resultat bliver anvendt igennem et eksempel på et lodret kast, hvor højden af kastet findes ved hjælp af en funktionsundersøgelse af s. Resultatet står for sig selv, og er det sidste lærebogsbidrag til differentialkvotienten. Dog er resultatet væsentligt i forhold til at det anvendes i forbindelse med introduktionen til integralbegrebet. Integralbegrebet bliver, som nævnt i beskrivelsen af den epistemologiske referencemodel, introduceret i gymnasiet gennem begrebet *stamfunktion*, hvilket er et begreb fra den algebraiske teknologi, der herefter bliver kædet sammen med arealet under en funktions kurve. Emnet er inddelt i de to kapitler *Stamfunktion og integral*, der beskriver integralregningen gennem den algebraiske teknologi, og *Areal og bestemt integral*, hvor integralet bliver fortolket som arealet under grafen igennem den kinematiske, numeriske og geometriske, og derefter benyttet til at beregne rumfanget af omdrejningslegemer.

Det første kapitel er gennemgående den algebraiske teknologi der benyttes til at definere en stamfunktion F til en funktion f, som en funktion der opfylder $F'(x) = f(x)$. Kapitlet afsluttes med at videreføre eksemplet fra kinematikken, hvor det, ud fra relationen $s'(t) = v(t)$ gennemregner et eksempel. Dette eksempel følges op i opgavebogen (Carstens *e.al., 2006*) med opgaver, hvor bevægelsesligningerne benyttes, for eksempel:

> ***635.*** *En bevægelse foregår på en ret linje, og hastigheden $v(t)$ til tiden t er bestemt ved $v(t) = 18t+1$. Bestem accelerationen $a(t)$ og vejfunktionen $s(t)$, når $s(2) = 3$.*
>
> ***638.**** *En partikel bevæger sig med konstant acceleration $0,8^m/_{s^2}$. Bestem hastigheds- og vejfunktionen, $v(t)$ og $s(t)$, når den begynder sin bevægelse til t $= 0$, med farten $3^m/_s$ i $s(0) = 0$.*

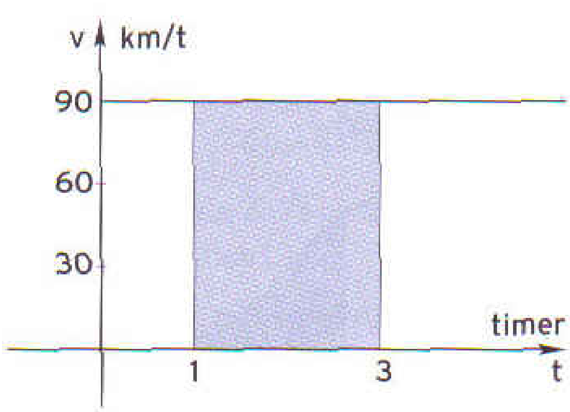
(Carstensen *e.al.*, 2007, side 118)

hvor specielt relationerne

$$\int a(t)dt = v(t), \qquad \int v(t)dt = s(t)$$

skal anvendes, og for at finde entydige udtryk skal der kendes nogle begyndelsesbetingelser for s og v. Dette bliver der fulgt op på i begyndelsen af kapitlet omhandlende bestemt integral og areal, hvor netop relationen $\int v(t)dt = s(t)$, og formlen for den tilbagelagte afstand for en bevægelse med konstant hastighed $s = v \cdot t$ bliver sammenlignet ved brug af den geometriske teknologi, igennem følgende eksempel:

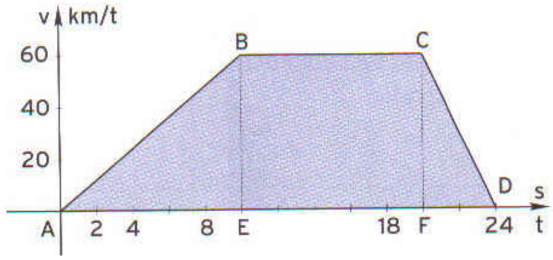
> ***Eksempel 1.*** *En bil kører på en motorvej med konstant fart på $v = 90^{km}/_t$. Hastighedsfunktionen er altså konstant i et koordinatsystem med tiden t (i timer) på x-aksen og hastigheden v (i $^{km}/_t$) på y-aksen. Området under grafen i intervallet $[1;3]$ er $2 \cdot 90 = 180$, dvs. bilen tilbagelægger 180 km på de to timer fra 1 time efter turens begyndelse til 3 timer efter.*
>
> *Arealet af området under kurven angiver altså den tilbagelagte vejlængde. Man kan sige, at arealet måles ved 'længde $\times$ bredde',og når længde og bredde måles i enhederne t og $^{km}/_t$, bliver arealet målt i $t \cdot \frac{km}{t} = km$.* (Carstensen *e. al.*, side 33, 2007)



Figur 16

Dette er en motivator for analysens fundamentalsætning med efterfølgende bevis, hvor den algebraiske og den geometriske teknologi bliver anvendt, hvilket igen bliver fulgt op med et eksempel fra kinematikken:

Eksempel 4. *I forbindelse med eksempel 1 ser vi på et eksempel fra kinematikken.*
En bil starter fra hastigheden $0^{km}/_t$ *og accelererer jævnt til en hastighed på* $60^{km}/_t$ *i løbet af 10 sekunder. Derefter fortsætter den med hastigheden* $60^{km}/_t$ *de næste 10 sekunder, hvorefter den bremser til stilstand på 4 sekunder. Vi vil finde ud af, hvor langt bilen har kørt.*
på fig. 11 (figur 17) er illustreret hastigheden v som funktion af tiden t. Som vi så i eksempel 1 er arealet under hastighedsgrafen netop den tilbagelagte distance. Med betegnelserne på figuren får vi følgende arealer:



Figur 17

$$\Delta ABE : \tfrac{1}{2} \cdot 60^{km}/_{t} \cdot 10s = 300\tfrac{km \cdot s}{t},$$
$$\Box BCEF : 60^{km}/_{t} \cdot 10s = 600\tfrac{km \cdot s}{t},$$
$$\Delta DCF : \tfrac{1}{2} \cdot 60^{km}/_{t} \cdot 4s = 120\tfrac{km \cdot s}{t}.$$

I alt er arealet af området under grafen $1020\frac{km \cdot s}{t}$*. Nu er enheden* $\frac{km \cdot s}{t}$ *noget uigennemskuelig, så vi benytter at 1 time = 3600 sekunder og får*

$$1020\tfrac{km \cdot s}{t} = 1020\tfrac{km \cdot s}{3600s} = \tfrac{1020}{3600}km = \tfrac{1020000}{3600}m = 283,3m,$$

dvs. bilen har kørt $283,3m$. (Carstensen *e. al.*, 2007b s. 40-41)

Her benyttes *kun* den geometriske teknologi, hvilket i sig selv er usædvanligt, men ikke desto mindre en teknik, som viser sig meget anvendelig i forbindelse med fysikopgaver. Resten af kapitlet omhandler brug af bestemte integraler i forbindelse med forskellige problemstillinger, hvor den numeriske- og den geometriske teknologi bliver anvendt, og fremhævet i forbindelse med bestemmelse af volumen af omdrejningslegemer på samme måde som nævnt i forbindelse med referencemodellen.

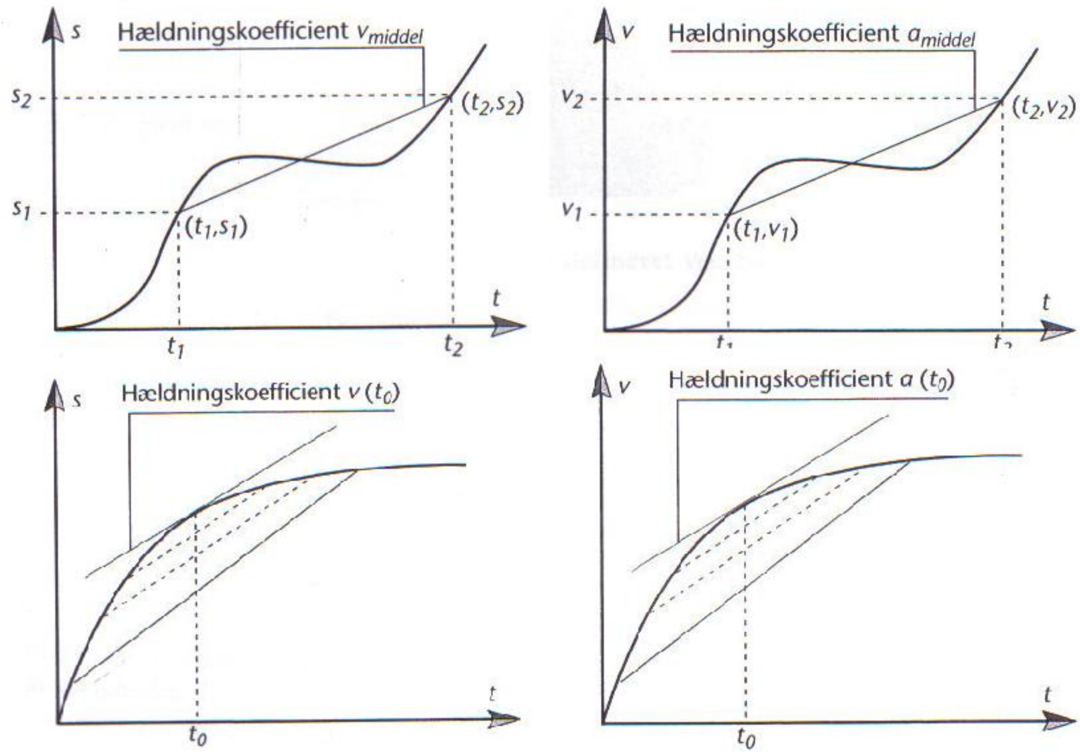
De tilhørende opgaver, hvor bevægelsesligningerne og bestemte integraler, er netop af typen givet i eksempel 4 i Carstensen *e.al* (2007b), hvor der bliver givet en stykkevis lineær graf, og arealet findes ved hjælp af arealberegning af trekanter og rektangler

5.2.2 Lærebogen i fysik A-niveau

Den didaktiske organisation har til formål at etablere relationen

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

for en lineær bevægelse, hos eleverne. Det er meget tydeligt i en gennemgang af kapitlet *Bevægelser*, at det er den geomtriske teknologi, som det ønskes, at eleverne er i stand til at anvende. Der bliver ikke redegjort i detaljer for ovennævnte relation på samme måde som der bliver gjort i matematikbogen. Analogien; at positionen s forholder sig til hastigheden v, som hastigheden v forholder sig til accelerationen a, bliver fremhævet ved, at de samme figurer bliver anvendt til at redegøre for de to sammenhænge (figur 18). Det algebraiske begreb *stamfunktion*



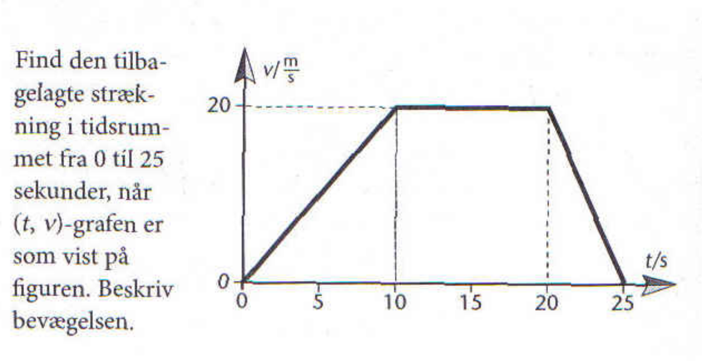
Figur 18: Analogien; positionen s forholder sig til hastigheden v, som hastigheden v forholder sig til accelerationen a, bliver fremhævet ved, at de samme figurer bliver anvendt i introduktionen til begreberne. (Benoni & Elvekjær, 2006 ,s. 186, 187, 192, 194)

bliver anvendt, efter at have introduceret begreberne *stedfunktion*, *hastighed* og *acceleration*, i det afsluttende afsnit *Bevægelse med konstant acceleration*, hvor stedfunktionen og hastighedsfunktionen for en bevægelse med konstant acceleration a_0 bliver udledt:

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0, \tag{2}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 t^2 + v_0 \cdot t + s_0, \tag{3}$$

hvor v_0 er hastigheden til $t = 0$, og s_0 er positionen til $t = 0$. En tilhørende opgave, hvor bevægelsesligningerne for en bevægelse med konstant acceleration bliver anvendt ses på figur 19. Teknikkerne til at løse denne opgave findes ikke i fysiklærebogen. Opgavetypen med tilhørende løsning findes som sagt i matematiklærebogen, hvor den geometriske teknologi var den anvendte. Det er bemær-



Figur 19: Eksempel på en opgave af typen T_6^F, hvor en matematisk organisation omhandlende integralregning bliver anvendt. (Elvekjær & Benoni, 2006, side 198)

kelsesværdigt, at det bestemte integral ikke på noget tidspunkt bliver anvendt, sådan at for eksempel den tilbagelagte afstand mellem t_0 og t_1 bliver skrevet som $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$, hvilket ville gøre den algebraiske teknologi mere anvendelig og motivere integralet som et redskab til at finde middelværdien for en funktion i et interval. En opgave, hvor dette kunne være en relevant teknik / teknologi at anvende er følgende

> *Et tog kører ind på en station med hastigheden 35 $^{km}/_{h}$. Det standser med konstant acceleration i løbet af 20 s.*
>
> *a. Beregn accelerationen. Angiv resultatet i SI enhed.*
>
> *b. Beregn bremselængden.*
>
> (Elvekjær, Benoni, 2008, side 321)

hvor man i første omgang skal finde hastighedsfunktionen ved at finde den rette linie imellem de to punkter $(t_0, v_0) = (0s, 35^{km}/_{h})$ og $(t_1, v_1) = (20s, 0^{km}/_{h})$, og herefter finde bremselængden som $\int_{0s}^{20s} v(t)dt$. Da denne teknologi ikke er til stede i lærebøgerne er det dog angiveligt den geometriske teknologi der vil blive anvendt, ved at tegne grafen i et koordinatsystem, og herefter finde arealet ved arealbestemmelse af trekanten.

5.3 Samspillet mellem matematik og fysik i eksamsopgaverne

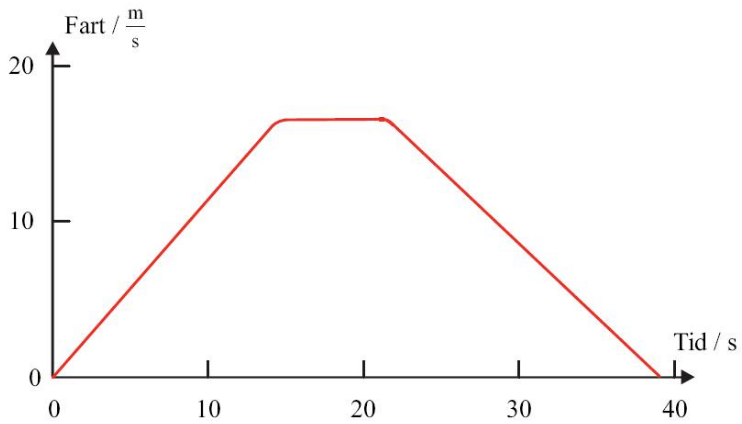
Fysik A eksamen august 2008

I eksamenssættet for fysik A i august 2008 bliver der stillet en opgave, hvor der indgår en (t, v)-graf. (t, v)-grafen viser hastigheden som funktion af tiden for en elevator i verdens næsthøjeste bygning, og elevatoren er angiveligt verdens hurtigste. Som det fremgår af figur 20 er grafen tilnærmelsesvist stykkevis lineær.

Opgaveteksten lyder

> *a) Bestem størrelsen af elevatorens acceleration de første 14 sekunder af turen*
> *Bilag 1 kan benyttes ved besvarelsen.*
>
> *b) Brug grafen til at vurdere afstanden fra 1. etage til 89. etage.*
> *Bilag 1 kan benyttes ved besvarelsen.*
>
> (Undervisningsministeriet, 2008c)

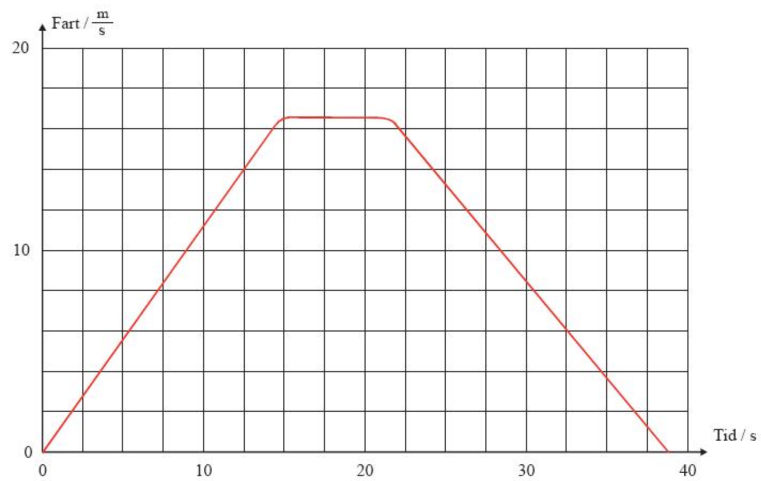
På bilag 1 (se figur 21) er grafen indtegnet i et gitter-koordinatsystem, sådan at punkterne på (v, t)-grafen kan aflæses mere nøjagtigt. Yderligere er det muligt at



Figur 20: Grafen viser elevatorens hastighed som funktion af tiden på en tur fra 1. etage top til 89. etage i verdens næsthøjeste bygning Taipei 101. (Undervisningsministeriet, 2008c)

begrunde sin besvarelse ved at tegne forklarende figurer på grafen og vedlægge dette sammen med den endelige besvarelse.

I delopgave a) er der tale om en opgave af typen, „Givet en stykkevis lineær



Figur 21: Bilag 1 (Undervisningsministeriet, 2008c)

graf $v(t)$ bestem accelerationen i et interval, hvor grafen er lineær.“ Der lægges som sagt op til fra lærebogsforfatternes og opgavestillernes side, at det er den geometriske teknologi, der skal benyttes: Da (t, v)-grafen er lineær i intervallet

$[0, 14]$, har vi, at der er tale om en bevægelse med konstant acceleration a_0, og dermed kan a_0 findes ved at finde hældningen til (t, v)-grafen, for en bevægelse med konstant acceleration. Hældningen findes da ved at tage to forskellige punkter (t_1, v_1) og (t_2, v_2) på grafen og benytte formlen

$$a_0 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

I dette tilfælde ses det på bilag 1 (figur 21), at der er to punkter, som har heltallige værdier for både t og v, nemlig $(0, 0)$ og $(12, 14)$, hvilket gør det oplagt for eleven at vælge netop disse to punkter.
Opgave b) er er af typen, „Givet en stykkevis lineær graf $v(t)$, bestem den tilbagelagte afstand i intervallet $[t_0, t_1]$." Denne løses „selvfølgelig" ved arealbestemmelse af de geometriske figurer, som arealet kan inddeles i.

Fysik A eksamen maj 2009 En opgave, som i første omgang omhandler brug af lineær regression for at finde hastighedsfunktionen, gør brug af den teori, som ligger til grund for bevægelsesligningerne. I opgaven bliver der refereret til et fotografi af en austronaut, der hopper, hvilket ikke er medtaget.

Fotoet stammer fra en filmoptagelse af en astronauts hop på overfladen af Månen. Tabellen viser sammenhørende værdier af tiden t og astronautens lodrette hastighed v under hoppet. Til $t = 0s$ slipper astronautens fødder måneoverfladen. Astronauten hoppede med strakt krop.

t / s	*0,26*	*0,40*	*0,51*	*0,73*	*0,86*	*0,98*	*1,14*
v / m/s	*0,72*	*0,50*	*0,26*	*-0,15*	*-0,30*	*-0,47*	*-0,67*

a) Bestem ud fra tabellens data en værdi for tyngdeaccelerationen på Månen.

b) Bestem ud fra tabellens data, til hvilket tidspunkt astronauten befandt sig øverst i hoppet.
Hvor højt hoppede astronauten?

(Undervisningsministeriet, 2009a)

Ved at foretage en lineær regression ud fra de givne data fås hastigheden som funktion af tiden som en ret linie, sådan at opgave a) bliver reduceret til en opgave, hvor man betragter en hastighedsfunktion for en bevægelse med konstant hastighed, og hældningen til denne er lig størrelsen af bevægelsens acceleration, og dermed tyngdeaccelerationen på Månen

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

For at løse opgave b) er det ikke den geometriske teknologi, der skal anvendes, men derimod den algebraiske og kinematiske, hvor man skal bestemme toppunktet for den parabel, der beskriver stedfunktionen

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

og finde toppunktet (t_1, s_1) for denne parabel, hvor t_1 da er tidspunktet, hvor astronauten befandt sig øverst i hoppet, og s_1 angiver, hvor højt astronauten hoppede. På denne måde bruger man ikke direkte differential- og integralregning, da formlen for en stedfunktion for en bevægelse med konstant acceleration er givet eksplicit. Den anden teknik udnytter, at

$$s'(t) = v(t) \text{ og } s(t) = \int v(t)dt.$$

Fra $s'(t) = v(t)$ fås at tidspunktet t_1, hvor austronauten befandt sig øverst i hoppet er givet ved

$$s'(t_1) = 0 \Leftrightarrow a_0 \cdot t_1 + v_0 = 0$$

mens højden af hoppet s_1 findes ved, at der er tale om den tilbagelagte afstand i tidsrummet $[0, t_1]$, som er givet ved

$$s_1 = \int_0^{t_1} v(t)dt,$$

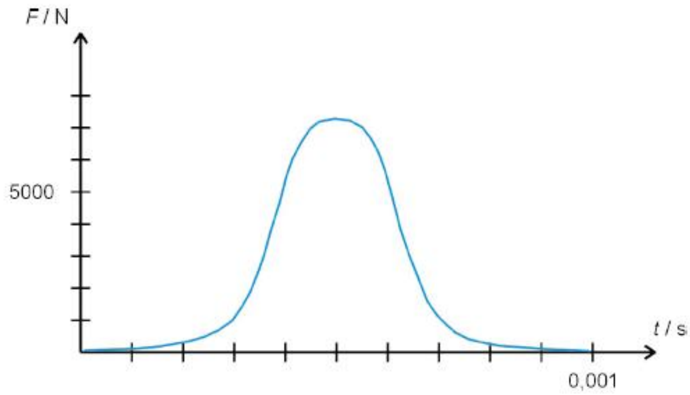
hvilket i praksis findes ved trekantsberegning igennem den geometriske teknologi. I denne opgave er det dog ikke helt oplagt, at den geometriske teknologi er relevant, og den kinematiske og algebraiske teknologi ville være mere passende.

Fysik A vejlende eksamenssæt I

En golfbold ligger stille. En golfspiller slår til golfbolden, som herved i et kort tidsrum påvirkes af en meget stor kraft. Slaget på golfbolden varer $1,0ms$, *og under slaget er den samlede kraft* F *på golfbolden som funktion af tiden* t *givet ved udtrykket*

$$F = \frac{7,1kN}{1 + A \cdot (t - B)^4}$$

hvor $A = 3,6 \cdot 10^{15} s^{-4}$ *og* $B = 5,0 \cdot 10^{-4} s$. *Golfboldens masse er* $45,5g$.



Figur 22

a) *Hvor stor er golfboldens største acceleration under slaget?*

b) *Bestem golfboldens fart umiddelbart efter slaget.*

(Undervisningsministeriet, 2007a)

I denne skal man først og fremmest finde accelerationen, hvilket fås ved at benytte relationen $F = m \cdot a$, og for at finde golfboldens fart umiddelbart efter slaget, skal man integrere accelerationsfunktionen fra $t = 0s$ til $t = 0^{-4}s$, sådan at golfboldens fart, V, umiddelbart efter slaget er givet ved

$$V = \int_{0s}^{10^{-4}s} \tfrac{F(t)}{m} dt.$$

Teknikken består af at opstille integralet, sådan at man ved hjælp af sit CAS-værktøj kan finde arealet under grafen. Dette er umiddelbart den eneste teknik, der er til rådighed, da accelerationsfunktionen ikke har en stamfunktion, der er til at finde ved hjælp af de matematiske teknikker, der er til rådighed for en gymnasieelev (se nedenfor). Herudover ville det være bemærkelsesværdigt, hvis man skulle anvende teknikker, der hverken bliver gennemgået i matematik- eller fysiklærebogen i forbindelse med kinematik. Der er altså tale om en rent kinematisk synsvinkel, hvor man skal fortolke arealet under grafen, og CAS er her et hjælpemiddel til at finde dette.

Funktionen $x \mapsto \frac{1}{a^4+x^4}$ har stamfunktionen

$$\int \frac{1}{a^4+x^4}dx = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \log \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}$$

og ved at omskrive accelerationsfunktionen til denne form, kan man altså finde stamfunktionen, og dermed hastighedsfunktionen for golfboldens bevægelse uden brug af CAS, hvilket dog unægteligt ikke er den tiltænkte teknik, der skal anvendes til denne opgave.

Fysik A vejlende eksamenssæt II

Et sidste eksempel på, hvordan differential- og integralregning indgår i de skriftlige eksamener i fysik A-niveau findes i endnu et vejlende eksamenssæt fra 2009, hvor man, på baggrund af nogle samhørende værdier for tid t og hastighed v for en basejumper, blandt andet skal bestemme den tilbagelagte afstand.

Opgaven lyder:

En basejumper springer ud fra en klippe. I løbet af de første $20,0s$ *tilbagelægger basejumperen* $946m$*, hvorefter faldskærmen udløses.*

a) Beregn basejumperens gennemsnitsfart i de første $20,0s$*. Angiv resultatet i* $^{km}/_{h}$.

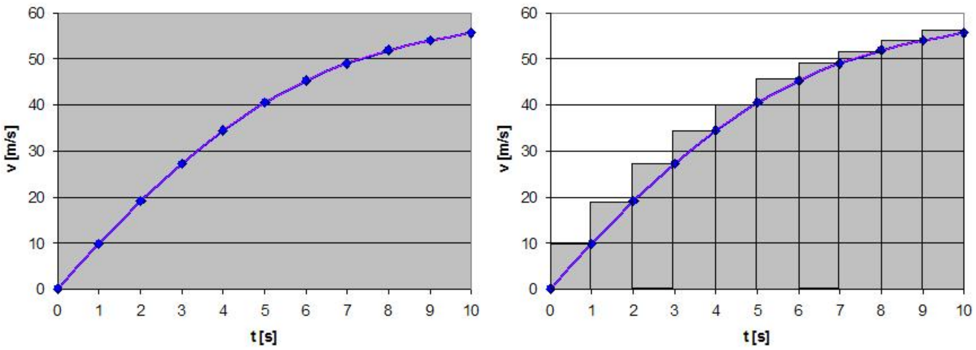
Tabellen viser sammenhørende værdier for tiden t efter udspringets start ogfarten v

t / s	*1,0*	*2,0*	*3,0*	*4,0*	*5,0*	*6,0*	*7,0*	*8,0*	*9,0*	*10,0*
0,0	*9,7*	*19,0*	*27,3*	*34,5*	*40,4*	*45,2*	*48,9*	*51,8*	*54,0*	*55,6*

b) *Bestem ud fra data i tabellen den strækning, som basejumperen har tilbagelagt efter* $10,0s$.

(Undervisningsministeriet, 2007b)

Hvor man for at løse den første opgave benytter sig af den eksplicitte formel for gennemsnitshastigheden imellem to givne punkter. For at løse den anden opgave kan man gøre brug af flere teknikker, der selvfølgelig alle benytter sig af, at tid gange hastighed er lig vejlængde. Da fysik-lærebogen i høj grad lægger op til, at det er den geometriske teknologi, der benyttes, er en af måderne, at plotte data (se figur 5.3), sådan at man får grafen for hastighedsfunktionen. Herefter kan man, ved hjælp af arealberegning, finde den tilbagelagte afstand ved at finde arealerne af hver af rektanglerne (se figur 5.3). Den oplagte teknologi ville dog være den numeriske, som dog ikke er blevet anvendt i nogen grad i forbindelse med fysik, men er blevet anvendt i forbindelse med et eksempel i matematiklærebogen.



Figur 23: Grafen for basejumperens hastighedsfunktion. Den tilbagelagte afstand kan tilnærmelses ved at tage arealet af oversummerne, eller middelsummerne.

Matematik A-niveau prøven uden hjælpemidler Den skriftlige eksamen i matematik på A-niveau er delt op i to dele. Den første del af eksamen varer en time, og er en prøve uden hjælpemidler. Den anden del af eksamen varer 4 timer, og her er hjælpemidler tilladt. Følgende to opgaver er fra prøven uden hjælpemidler, og disse er repræsentative for opgaver fra prøven uden hjælpemidler, der gør brug af differential og integralregning, hvor det er den algebraiske teknologi der skal anvendes:

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f (Undervisningsministeriet, 2009b)

og

Bestem integralet

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

(Undervisningsministeriet, 2009b)

Matematik A-niveau prøven uden hjælpemidler Følgende opgave vedrørende omdrejningslegemer stammer fra et vejledende eksamenssæt i matematik A-niveau 2009

Grafen for funktionen f med forskriften

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse i fjerde kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360°

b) Bestem den værdi af t, for hvilken linjen med ligningen $x = t$ deler punktmængden M i to dele, der har samme areal. om førsteaksen.

(Undervisningsministeriet, 2009b)

Teknologien der skal anvendes i besvarelsen er igen algebraisk, selvom volumenet for omdrejningslegemer som udgangspunkt blev forklaret igennem den geometriske, er det formlen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

der skal benyttes.

6 Diskussion

Resultaterne og analysen skal i dette afsnit bruges til at svare på problemformuleringen, der omhandlede brugen af fysiske eksempler i den didaktiske organisation, som er styret af lærebogen, hvilke matematiske organisationer der er relevante i den didaktiske organisation i fysik og hvordan samspillet fra ministeriets og opgavekomitéens side forventes anvendt i forbindelse med den skriftlige eksamen. Dette perspektiveres herefter ved at skitsere hvordan et tværfagligt undervisningsforløb kunne designes ved hjælp af teorien om Research and study programmes, sådan at undervisningsforløbet bliver ligeværdigt i forhold til kernestof og anvendelsesmuligheder for de to fag. Udgangspunktet for et sådant Research and study program vil være en introduktion til integralregningen med udgangspunkt i et genererende spørgsmål fra kinematikken, og begrundelsen for dette vil fremgå af nedenstående diskussion af resultaterne. Herudover vil jeg ud fra uddragene af læreplanerne for de to nye elementer i den ny gymnasiereform *studieretningsprojekt* og *almen studieforberedelse*, diskutere hvordan disse er relevante for problemstillingen.

6.1 - af resultaterne, dvs. det aktuelle samspil

6.1.1 Den didaktiske organisation i matematik

Den didaktiske organisation, der har til hensigt at etablere den regionale matematiske organisation, som den epistemologiske referencemodel beskriver, består naturligvis af mere end de data, som er præsenteret og analyseret i forrige afsnit. Lærebogen er designet til at passe til samtlige studieretninger, som har matematik på A-niveau, og derfor har de fysiske eksempler naturligvis ikke den fremtrædende rolle, som jeg søger, da mit udgangspunkt er, at eleverne har interesser i begge fag. Dette gør også, at man kan forvente, at de fysiske eksempler vil blive vægtet mere i en klasse, hvor fysik indgår i studieretningen, end i en klasse med for eksempel en samfundsvidenskabelig studieretning.

I det følgende diskuteres der den didaktiske organisation, hvor lærebogen (Carstensen *e.al*, 2007) er styrende for den interne didaktiske transposition, sådan at der er taget forbehold for, at den enkelte underviser har mulighed for at strukturere undervisningen anderledes. Jeg betragter den didaktiske organisation ud fra lærebogen, vel vidende, at læreren i undervisningssituationen er styrende for den interne didaktiske transposition, hvilket vil sige den faktiske form af undervisningen. Lærebogen er opbygget sådan, at det vil være naturligt at følge bogen kronologisk, sådan, at det med udgangspunkt i opbygningen af lærebogen er muligt at diskutere den didaktiske organisation, som lærebogsforfatterne lægger op til.

Differentialkvotienten og integralbegrebet, som kan integreres i en regional matematiske organisation, er adskilt i lærebøgerne i den forstand, at begreberne bliver introduceret i henholdsvis 2.g (Carstensen *e.al*, 2007a) og 3.g (Carstensen *e.al*, 2007b), hvilket, på trods af henvisninger, vil være med til at de to begreber bliver etableret som to forskellige matematiske organisationer uden at de bliver integreret til den omtalte regionale matematiske organisation. For begge begrebers vedkommende er målet at etablere den lokale matematiske organisation der er karakteriseret ved den algebraiske teknologi. For at etablere denne matematiske organisation benyttes eksempler og teknikker hørende til de tre andre lokale matematiske organisationer. Måden, hvorpå disse lokale organisationer indgår i den didaktiske organisation, er dog markant forskellige i hvert af de to tilfælde. For differentialkvotientens vedkommende er der den algebraiske definition, som man kan tage udgangspunkt i, sådan at introduktionen til denne sker igennem den "sti", som er beskrevet i afsnittet om den epistemologiske referencemodel, dvs. problemstillingen bliver præsenteret ved brug af den geometriske - og den numeriske teknologi inden den algebraiske teknologi bliver institutionaliseret. Til slut bruges den kinematiske til at vise anvendeligheden af resultaterne indenfor andre fag, og det er i denne forbindelse, at begreberne hastighed og acceleration bliver præsenteret. Denne præsentation og gennemgangen af den kinematiske problemstilling er mere grundig i forhold til at definere begreberne position, hastighed og acceleration samt relationerne imellem disse, end tilfældet er med gennemgangen af de samme begreber i fysiklærebogen. På trods af, at relationerne imellem bevægelsesligningerne bliver fremhævet og gennemgået i detaljer kommer de dog til at virke som en sidebemærkning i forhold til, at den algebraiske tekonologi på dette tidspunkt er veletableret, og er dette, som der testes i til eksamen. Relationerne viser sig dog at være vigtige i forhold til introduktionen til integralbegrebet.

I første omgang tager introduktionen til integralet udgangspunkt i den algebraiske teknologi ved at introducere stamfunktionen, hvorefter regnereglerne for stamfunktionen gennemgåes, det vil sige blandt andet integration ved substitution og partiel integration. Bindeleddet mellem den algebraiske - og den geometriske teknologi er netop kinematikken, hvor for eksempel stedfunktionen kan findes ved at man kender hastighedsfunktionen og en begyndelsesbetingelse. Dette følges op ved at argumentere for, at arealet under grafen repræsenterer den tilbagelagte afstand, og dermed kan stamfunktionen benyttes til at finde arealet. At der skal et eksempel til for at skabe denne relation er på grund af, at arealet under grafen ikke bliver defineret, sådan at der er en egentlig algebraisk definition at gå ud fra, hvilket vil betyde, at man kan „regne" sig frem til sammenhængen. Derfor er det intuitionen der kan benyttes, hvor kinematikken altså benyttes som en fælles reference.

De tilhørende opgaver, som benytter en kinematisk opgave, og hvor stamfunktionsbegrebet skal anvendes, var, som vist i forrige afsnit, på formen:

> ***638.**** *En partikel bevæger sig med konstant acceleration* $0,8{}^{m}/{}_{s^2}$. *Bestem hastigheds- og vejfunktionen,* $v(t)$ *og* $s(t)$*, når den begynder sin bevægelse til* $t = 0$*, med farten* $3{}^{m}/{}_{s}$ *i* $s(0) = 0$.

(Carstensen *e.al.*, 2007, side 118)

som skal løses ved at opskrive

$$v'(t) = a(t) = 0,8{}^{m}/{}_{s^2}$$

sådan at

$$v(t) = \int 0,8dt$$

med $v(0) = 3{}^{m}/{}_{s}$, og herefter finde positionen som funktion af tiden ved at finde stamfunktionen til v. Accelerationsfunktionen a og hastighedsfunktionen v er begge meget simple funktioner at finde stamfunktioner til, men på trods af dette regnes opgaven for vanskelig, hvilket er symboliseret ved stjernen ud for opgavenummeret. Dette er kombinationen af den kinematiske notation samt at man skal finde stamfunktionen til stamfunktionen, hvilket gør, at man skal tænke et skridt længere frem for at kunne se løsningen. Selve notationen betragtes altså som en forhindring for at løse opgaven, men ikke desto mindre er kinematikken et bindeled imellem den algebraiske teknologi i form af stamfunktionsbegrebet og den geometriske teknologi i form af arealet under kurven.

De opgaver og eksempler, hvor det bestemte integral skal anvendes i forbindelse med en kinematisk opgave, er alle på formen, hvor hastighedsfunktionen er positiv, og stykkevis lineære, og hvor man får givet grafen, sådan at man ved hjælp af den geometriske teknologi kan finde den tilbagelagte afstand som vist i eksempel 4 i Carstensen *e.al* (2007b).

I forhold til, hvad eleverne skal kunne til den skriftlige eksamen er den numeriske- og den geometriske teknologi ikke specielt relevant. For at opfylde læreplanen, skal disse dog præsenteres, hvilket de bliver i forbindelse med at finde volumen af omdrejningslegemer. Formlen der bliver udledt er dog af ren algebraisk karakter;

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

og der bliver ikke argumenteret for denne i form af konvergens af middelsummen eller lignende. Dette er med til, at eleverne ikke er klar over forudsætningerne for integration, hvilket kan „fremprovokere“ udregninger som den der blev vist i kapitlet om referencemodellen i forbindelse med overfladearealet af en kugle.

6.1.2 Den didaktiske organisation i fysik

Ligesom i forbindelse med den didaktiske organisation i matematik er det den didaktiske organisation, der er styret af lærebogen (Elvekjær & Benoni, 2006), der er mulig at diskutere, ud fra resultat og analyse-afsnittet, og begreberne position, hastighed og acceleration og relationerne imellem disse, bliver selvfølgelig også introduceret i denne lærebog. De matematiske organisationer, der indgår i den didaktiske organisation i fysik, er naturligvis dele af den lokale matematiske organisation der er karakteriseret ved den kinematiske teknologi, men herudover er også den lokale matematiske organisation, der er karakteriseret ved den geometriske teknologi, særligt dominerende.

I forbindelse med introduktionen til s, v og a, er måden, hvorpå de samme grafer og samme tekststykker bliver anvendt hvor der blot bliver substitueret v med s og a med v i afsnittet om acceleration i forhold til afsnittet om hastighed, uden at analogien direkte bliver omtalt, ser jeg som et tegn på, at lærebogsforfatterne finder kapitlet overflødigt, men medtager det „for en god ordens skyld“, det vil sige for at opfylde kravene til kernestoffet i læreplanen. Dette gør også, at for eksempel udledningen af positionen som funktion af tiden for en bevægelse med konstant hastighed bliver gennemgået meget kort, og uden brug af eventuelle mellemregninger ved hjælp af den algebraiske teknologi, hvor integraltegnet burde indgå. Dette gør også, at opgaven på figur 19 skiller sig ud, da teknikker og teknologier, der skal benyttes til at løse opgaven ikke bliver præsenteret i fysiklærebogen, ligesom de til kapitlet hørende opgaver, der findes bagerst i bogen heller ikke kan løses ved hjælp af teknikker og teknologier, der bliver præsenteret i lærebogen. Disse opgaver er på tekstform, og skal oversættes til algebraiske eller geometriske udtryk, hvor de kan løses ved hjælp af teknikker fra de tilhørende matematiske organisationer.

6.1.3 Eksamensopgaverne

Analysen af eksamensopgaverne viste tydeligt, at der er en stor forskel på de teknologier, der ønskes anvendt i en besvarelse, som indeholder brug af differential- og integralregning i de to fag. Hvor matematikeksamen kan besvares udelukkende ved brug af den algebraiske teknologi, er opgaverne i fysikeksamen designet således, at en algebraisk tilgang stort set ikke er mulig, men derimod således, at enten den kinematiske -, numeriske - eller den geometriske teknologi skal anvendes.

Fra opgavesættet fra august 2008 var det helt klart den geometriske tilgang, der var naturlig at anvende, hvor opgaven var præcis af samme type, som der findes i både matematik- og fysiklærebogen i form af opgaver og eksempler. I maj 2009 blev opgaven stillet ved hjælp af den numeriske teknologi, men hvor der skulle findes et algebraisk udtryk ved hjælp af lineær regression. Herefter var der to tilgange, enten kunne man fortsætte med den algebraiske tilgang, eller man kunne tegne grafen og bruge den geometriske. Den sidste virker mest sandsynlig, eftersom den algebraiske teknologi ikke bliver anvendt i forbindelse med kinematik i nogen af lærebøgerne. I det vejledende sæt II var det ligeledes en numerisk tilgang, men i dette tilfælde skulle man ikke finde et algebraisk udtryk, som man kunne regne på. Derimod ville en løsning være at besvare opgaven udelukkende ved hjælp af den numeriske teknologi, hvilket dog ikke virker sandsynligt, da den numeriske teknologi ikke bliver præsenteret i form af eksempler og opgaver i samme omfang som de andre. Den geometriske tilgang, som blev vist i forbindelse med præsentationen af opgaven, er derimod mere sandsynlig for en elev at benytte. Det vejledende sæt I skiller sig ud, ved at CAS indgår i teknikken, hvor det at opskrive integralet er en del af dette. At integralet under accelerationsfunktionen giver hastighedsændringen er en del af den kinematiske teknologi, som ikke bliver gennemgået, da det kun er arealet under hastighedsfunktionen der bliver behandlet, og analogien bliver der som sagt ikke gjort det store ud af i nogen af fagene.

6.1.4 Sammenfatning

Ud fra ovenstående kan det konkluderes, at hver af de lokale matematiske organisationer skal anvendes i fagene matematik og fysik. Den algebraiske er den, som er målet for undervisningen i matematik, hvis det er den skriftlige eksamen, der fastlægger dette. De tre andre lokale matematiske organisationer er derimod brugbare i fysik. Der bliver dog ikke undervist eksplicit i disse tre MO'er i faget fysik, men antages at være velkendt fra matematikundervisningen, hvor disse tre MO'er dog kun indgår som teknikker i den didaktiske organisation der har til opgave at etablere den algebraiske matematiske organisation.

Ud fra lærebøgerne ser det ud til, at det er matematik der skal tage sig af samspillet og sammenhængen mellem differential- og integralregning og kinematik, mens det i læreplanerne bliver bekendtgjort, at et samarbejde mellem fagene, netop er relevant inden for disse to emner. Forbeholdet, at *matematik ikke må være en unødig komplikation for fysikken*, skal altså tolkes som at den algebraiske tilgang er komplikationen. Dette harmonerer ikke rigtigt i forhold til, at en stor del af fysikkens og matematikkens stærke samspil netop er igennem en algebraisk tilgang, hvor en matematiske analyse af en fysisk model bidrager til den fysiske forståelse, da detaljerne i fysikken træder frem, når man går i detaljer med matematikken. Udfra modellerne kan man så benytte andre teknikker og teknologier alt efter sammenhængen, for eksempel er den numeriske tilgang brugbar, hvis man har et datasæt fra et forsøg.

Ud fra lærebøgerne virker det som sagt som om, at ansvaret for at dyrke samspillet er placeret hos matematiklæreren. Spørgsmålet er så, om det bør være matematiklærerens opgave, at undervise i bevægelsesligningerne, i betragtning af, at en matematiklærer ikke nødvendigvis har de faglige forudsætninger for dette. En matematiklærer kan have været sproglig student, og have et humanistisk sidefag, sådan at hun ikke har haft fysik siden folkeskolen. En løsning på dette kunne være, at en del af *gymnasiepakken* på matematikstudiet indeholdt et introducerende kursus til mekanik. Eller, at undervisning i de matematiske organisationer, der skal anvendes i fysik, som udgangspunkt er fysiklærerens opgave, hvilket vil falde mere naturligt, eftersom motivationen for at undervise i den geometriske og den numeriske teknologi ikke nødvendigvis er den største i forhold til matematiklæreren.

6.2 Perspektivering - det potentielle samspil

6.2.1 Skitsering af et tværfagligt undervisningsforløb

Ud fra ovenstående betragtninger er det altså mest oplagt at dyrke samspillet mellem matematik og fysik i et tværfagligt undervisningsforløb, der skal introducere integration og stamfunktion. I et RSP-forløb er en af hovedidéerne, at forløbet giver øget fokus på selve metoden til løsningen af underspørgsmålene, der frembringes, og det er ikke kun produktet, der er centralt, hvilket er vigtigt i forhold til, at målet i matematik er den algebraiske teknologi, mens det er metoderne (den geometriske - , numeriske - og kinematiske teknologi) der er brugbare i forhold til fysik.

Med udgangspunktet, at differentialkvotienten og den afledte funktion er veletablerede i form af de matematiske organisationer, som lærebogen lægger op til, kan et samspil mellem matematik og fysik, i form af et RSP-forløb, være relevant i forbindelse med introduktionen til stamfunktions- og arealbegrebet.

Q_0: Givet en retliniet bevægelses hastighed, v, som funktion af tiden, t, kan vi da bestemme den tilbagelagte afstand i et givet tidsinterval? Kan vi finde en funktion, der beskriver positionen til ethvert tidspunkt t? Hvad er sammenhængen mellem den tilbagelagte afstand og funktionen, der beskriver positionen?

Dette spørgsmål er tæt på kernen i begge fag, og kan være med til at udvikle ny spørgsmål, så dette genererende spørgsmål vil jeg ikke regne for dødt, men kan være med til at integrere differential- og integralregning i en regional matematisk organisation. Udfra dette spørgsmål, og de matematiske organisationer, som eleverne har til rådighed vedrørende relationen $s' = v$ og at hastigheden beskriver hvor langt man bevæger sig per tidsenhed, ønskes det, at følgende praxeologier opstår:

Q_{11}: Givet relationen $s' = v$, antag at en funktion f er kendt, hvor v er dens afledte. Er $f = v$?

Q_{12}: Givet formlen for afstanden for en bevægelse med konstant hastighed $s = v \cdot t$, kan man da tilnærme en hastighedsfunktion med vandrette liniestykker, sådan at det mulig at benytte denne formel?

Hvilket giver anledning til endnu et niveau af underspørgsmål indeholdende

Q_{21}: Hvad er sammenhængen mellem den tilbagelagte afstand og funktionen, der beskriver positionen?

hvor Q_{11} kan besvares ved en algebraisk praxeologi omhandlende stamfunktioner som operationen, der er det omvendte af at finde den afledte. Q_{12} kan føre til en praxeologi, der benytter den numeriske- eller geometriske teknologi til at finde arealet under kurven. Det sidste underspørgsmål, som jeg har medtaget, kan føre til en praxeologi vedrørende analysens fundamentalsætning. Herudover kunne det også tænkes, at spørgsmål vedrørende acceleration kunne tages op, sådan at bevægelsesligningerne for en bevægelse med konstant acceleration kunne udledes.

På denne måde kommer eleverne selv til at se rationalet i begrebet stamfunktion, og ved at de har anvendt både relationen $s' = v$ og arealet under grafen til at besvare Q_0, kommer analysens fundamentalsætning til at virke mere naturlig, end når begrebet stamfunktion bliver introduceret først, og det senere viser sig, at stamfunktionen kan benyttes til at finde arealet under en kurve. Derudover vil dette RSP-forløb også bringe den matematiske organisation i spil i forbindelse med opgavetyper, der er relevante til en skriftlig fysikeksamen. Dette vurderer jeg til at være det mest oplagte område, hvor samspillet bliver benyttet, og hvor man er tættest på kernestof fra begge fag. Opbygningen er her nogenlunde den samme, som lærebogen i matematik angiver, men forskellen er som sagt her, at metoderne kommer i fokus, hvilket er relevant i forhold til at matematikken bliver brugbar i forbindelse fysik, og at differential- og integralregning bliver integreret i en fælles regional matematiske organisation.

Fra læreplanerne havde vi, at

> *Når faget indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges forløb sammen med studieretningsfagene, som viser styrken i fagenes samspil og perspektiverer fysikken.*

og

> *Samarbejdet med matematik må ikke føre til at fysik bliver til "matematik med anvendelser", ligesom man må respektere, at matematik ikke blot skal være redskabsfag for fysik. Man skal holde sig for øje, at matematikken ikke må være en unødig komplikation, men skal bidrage til at give sammenhæng og overblik over de fysiske størrelser og relationer.*

hvilket bliver opfyldt igennem et sådant RSP-forløb, hvor styrken i fagenes samspil netop bliver udnyttet, og hvor matematikken er med til at give sammenhængen mellem relationerne i fysik.

6.2.2 Andre muligheder for at dyrke samspillet

I forbindelse med et AT-forløb skal samspillet mellem matematik og fysik, som tilhører det naturvidenskabelige hovedområde, også kunne trækkes på tværs af de to andre faglige hovedområder. Dette virker umiddelbart til godt at kunne lade sig gøre, ved for eksempel at inddrage historie eller andet for at beskrive samspillet i et historisk perspektiv, hvor der er mange konkrete problemstillinger at behandle. For eksempel kan man udlede kædelinien på samme måde som Johann Bernoulli gjorde, ved hjælp af en geometri og kraft-beregninger. (se Jahnke, 2003)

Studieretningsprojekterne kan derimod „nøjes“ med at inddrage to fag. Det er derfor oplagt at lade samspillet mellem matematik og fysik være kernen i et sådant. I 2007 var der også mange projekter, hvor netop dette samspil blev udnyttet, ifølge Grøn (2008), var matematik-fysik den næststørste fagkombination i forhold til samtlige studieretningsprojekter, hvor matematik indgik som det ene fag. Derudover gav disse projekter også den laveste dumpeprocent (1,8%) og højeste procent der fik 12 (23,1%), blandt alle studieretningsprojekter, hvor matematik indgik. Dette kan naturligvis skyldes, at eleverne, der vælger denne fagkombination er særligt begavede, eller at samspillet mellem matematik og fysik er anledning til problemformulering, som gør det muligt at skrive et godt projekt. Studieretningsprojektet er altså et oplagt element, hvor samspillet kan dyrkes, og som det fremgår af Grøn (2008) bliver det allerede anvendt i gymnasierne i dag.

Både AT-forløb og studieretningsprojektet er på de enkelte studerendes præmisser, og derfor ikke relevant i forbindelse med at ville etablere en matematisk organisation i forbindelse med kernestof og faglige mål fra læreplanen. Alligevel er de interessante i forhold til den motivation for at skrive dette speciale, som blev nævnt i indledningen.

7 Konklusion

Som afrunding på dette speciale, kan jeg konkludere, at ikke alene er der en mulighed for at dyrke samspillet mellem matematik og fysik i gymnasieundervisningen, men når begge fag indgår i en studieretning, er det ligefrem et krav, at samspillet bliver fremhævet.

I matematiklærebøgerne er fysiske eksempler naturligvis medtaget for at vise anvendelser af matematikken. Hvilket dog var overraskende for mig var, at der derudover blev anvendt en problemsstilling fra kinematikken til at forbinde begreberne stamfunktion og areal, på trods af, at matematiklærebogen er skrevet til samtlige studieretninger, hvor matematik A-niveau indgår.

I fysikundervisningen er de teknikker, som er målet for undervisningen i matematik, ikke direkte relevante. Eksamensopgaverne bliver ligefrem designet således, at det ikke er muligt at anvende disse. Dog er den dybereliggende teori den samme i de to fag, hvilket gør, at man fra fysiklærebogsforfatternes side mener, at de teknikker, der skal anvendes i fysikfaget, kan regnes for velkendte. Dette gør, at en del af kernestoffet i fysik rent faktisk forventes undervist i, i matematik.

Kinematikken og dens tætte forbindelse til differential- og integralregning er altså et „gråt område“, hvor det, ifølge lærebøgerne, er matematiklæreren, der skal stå for størstedelen af undervisningen, på trods af, at teknikker der er relevante for matematikeksamen ikke er relevante i fysik. Dette kan der rådes bod på ved at udnytte mulighederne i læreplanerne for at lave tværfaglige undervisningsforløb, for eksempel i form af et research and study program, der kan tage udgangspunkt i et kinematisk problem, hvorfra eleverne selv udvikler og opbygger viden indenfor de to fag.

Det tværfaglige undervisningsforløb, der blev skitseret i diskussionen, ville være spændende at afprøve i praksis. Dette vil jeg forhåbentlig få mulighed for i de kommende år. Arbejdet med dette speciale har netop givet mig et redskab til at se forskellen på- og ikke mindst at kunne sammenligne de teknikker, som det forventes at eleverne skal kunne anvende i de forskellige fag, hvilket vil være brugbart, når samspillet skal føres ud i praksis.

8 Litteraturliste

Artigue, Michéle; Menigaux, Jacqueline & Viennot, Laurence (1990). *Some of students' conceptions and difficulties about differentials.* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://iopscience.iop.org/0143-0807/11/5/002/pdf/0143-0807_11_5_002.pdf

Artigue, Michéle. (2004). The Integration of Symbolic Calculators into Secondary Education: Some Lessons from Didactical Engineering. *Mathematics Education Library* (36), s. 231-294

Barbé, Joaquim; Bosch, Marianna; Espinoza, Lorena & Gascón, Joseph (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice : The case of limits of functions in spanish high school. *Educational Studies in Mathematics* (59), s. 235-268.

Barquero, Berta; Bosch, Marianne & Gascón, Josep. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. *Proceedings of CERME 5*, L´arnaca (Cyprus).

Bosch, Marianna; Chevallard, Yves & Gascón, Josep. (2005). *Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics.* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/Bosch%20Chevall.pdf

Carstensen, Jens; Frandsen, Jens & Studsgaard, Jens. (2006). *MAT AB2 opgaver stx.* Århus: Systime A/S.

Carstensen, Jens; Frandsen, Jens & Studsgaard, Jens. (2007a). *MAT A2 stx.* Århus: Systime A/S.

Carstensen, Jens; Frandsen, Jens & Studsgaard, Jens. (2007b). *MAT A3 stx.* Århus: Systime A/S.

Chevallard, Yves. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education.* Lokaliseret 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_2_Plenaries.pdf#page=3

Elvekjær, Finn; Benoni, Torben (2006)*Fysik AB bogen 2*Århus: Systime A/S.

Garcia, Javier; Gascon, Josep; Higueras, Luisa Ruiz; Bosch, Marianna (2006) *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics.* Lokaliseret 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.springerlink.com/content/67433r822j8151p1/fulltext.pdf

Grøn, Bjørn (2008) *Studieretningsprojekter med matematik kan betyde skoleudvikling* Lokaliseret 27. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.gymnasieskolen.dk/article.dsp?page=22006

Jahnke, Hans Niels (editor) (2003). History of Analysis. *History of Mathmatics vol. 24*

Katz, Victor. (1998). *A history of mathematics - An introduction.* 2. Edition. New York: Addison Wesley Longman, Inc.

Lindstrøm, Tom (1995). *Kalkulus, bind 1* Oslo: Universitetsforlaget AS

STX bekendtgørelsen. (2008a). *Bek nr 741, Bilag 23 - Fysik A.* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil23

STX bekendtgørelsen. (2008b). *Bek nr 741, Bilag 35 - Matematik A.* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil35

STX bekendtgørelsen. (2008c). *Bek nr 741, Bilag 7 - Studieretningsprojekt* Lokaliseret den 20. juni 2009 på World Wide Web:
https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil7

STX bekendtgørelsen. (2008d). *Bek nr 741, Bilag 9 - Almen studieforberedelse* Lokaliseret den 20. juni 2009 på World Wide Web:
https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil9

Undervisningsministeriet (2007a) *Studentereksamen vejledende opgavesæt nr. 1 fysik A-niveau maj 2007* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF07/Eksamen/Opgaver/070501_vejlopgave_stx_071_fysikA_1.ashx

Undervisningsministeriet (2007b) *Studentereksamen vejledende opgavesæt nr. 2 fysik A-niveau maj 2007* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF07/Eksamen/Opgaver/070501_vejlopgave_stx_072_fysikA_2.ashx

Undervisningsministeriet (2008a) *Fysik A-Stx Undervisningsvejledning*Lokaliseret den 22. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Vejledninger/stx/080701_fysik_A_stx_vejledning.ashx

Undervisningsministeriet (2008b) *Studentereksamen fysik A-niveau 23. maj 2008* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Eksamen/Opgaver/080523_opgave_stx_081_fysikA.ashx

Undervisningsministeriet (2008c) *Studentereksamen fysik A-niveau 15. august 2008* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web:
http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Eksamen/

Opgaver/080815_opgave_stx_082_fysikA.ashx

Undervisningsministeriet (2009a) *Studentereksamen fysik A-niveau 20. maj 2009* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web: http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF09/Eksamen/Eksamensopgaver/090520_opgave_fysikA_stx.ashx

Undervisningsministeriet (2009b) *Studentereksamen matematik A-niveau 11. maj 2009* Lokaliseret den 16. juni 2009 på World Wide Web: http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF09/Eksamen/Eksamensopgaver/090511_opgave_matematikA_stx.ashx