INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau

Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi

Signe Ougaard

Speciale for cand.scient-graden i matematik

Februar 2010

IND's studenterserie nr. 16

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)

Abstract
Undervisningen i grænseværdier er genstand for mange undersøgelser, da det er et emne der giver anledning til en del problemer hos eleverne. Dette bunder delvis i at der i undervisningen bliver et brud mellem grænseværdiers algebra, hvor teoridelen bliver undertrykt og grænseværdiers topologi, hvor der mangler en praksisblok. Andre undersøgelser foreslår at undervisning i formel logik vil fremme de studerendes matematiklæring. I dette speciale følger jeg op på disse undersøgelser ved at undervise en 3.g klasse i ε-δ-definitionen af grænseværdi, hvorved jeg har forsøgt at bygge bro mellem grænseværdiers algebra og topologi, ved at forsøge at skabe en praksisblok for topologien, der samtidig kan bidrage med en teoriblok for algebraen. Forløbet lagde særligt vægt på beviser og brug af kvantorer.

Specialet indeholder empiriske undersøgelser i klassen. Jeg har lavet en test af elevernes beherskelse af grænseværdibegrebet og brug af kvantorer både først og sidst i forløbet. Undervisningen forløb over fire lektioner à 70 min og blev observeret gennem optagelse af lydbilledet i klassen og i elevgrupper under gruppearbejde.

Forløbet viste sig at være svært for eleverne, men med den afsatte tid og det lille antal elever, er det svært at konkludere noget entydigt fra forløbet.

IND's studenterserie *består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både inden for og uden for universitetets mure.*

Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer. Besøg www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

Resumé

Undervisningen i grænseværdier er genstand for mange undersøgelser, da det er et emne der giver anledning til en del problemer hos eleverne. Dette bunder delvis i at der i undervisningen bliver et brud mellem grænseværdiers algebra, hvor teoridelen bliver undertrykt og grænseværdiers topologi, hvor der mangler en praksisblok. Andre undersøgelser foreslår at undervisning i formel logik vil fremme de studerendes matematiklæring. I dette speciale følger jeg op på disse undersøgelser ved at undervise en 3. g klasse i ε-δ-definitionen af grænseværdi, hvorved jeg har forsøgt at bygge bro mellem grænseværdiers algebra og topologi, ved at forsøge at skabe en praksisblok for topologien, der samtidig kan bidrage med en teoriblok for algebraen. Forløbet lagde særligt vægt på beviser og brug af kvantorer.

Specialet indeholder empiriske undersøgelser i klassen. Jeg har lavet en test af elevernes beherskelse af grænseværdibegrebet og brug af kvantorer både først og sidst i forløbet. Undervisningen forløb over fire lektioner à 70 min og blev observeret gennem optagelse af lydbilledet i klassen og i elevgrupper under gruppearbejde.

Forløbet viste sig at være svært for eleverne, men med den afsatte tid og det lille antal elever, er det svært at konkludere noget entydigt fra forløbet.

Abstract

Teaching limits is subject to many investigations, since it is a subject that is difficult for the students. This is partly due the fact that the subject is split into algebra of limits where the theoretical block is suppressed, and topology of limits where the practical block is missing. Other reports suggest that teaching formal logic will help students learn mathematics. In this thesis I will follow up on these studies, by teaching a class at the end of Upper Secondary Education the ε-δ-definition of limits. I will try to combine the algebra and topology of limits, by creating a practical block for the topology that at the same time can be a theoretical block for the algebra. The focus is on proofs and the use of quantifiers.

My thesis involves empirical studies in the class. I have tested the students use of limits and of quantifiers, at the beginning and end of the teaching period, which consisted of four classes 70 minutes each. I audio taped the lessons including group work.

The subject turned out to be difficult for the students, but since the amount of time was short, and the number of students small, it is not possible to make a certain conclusion.

Indhold

1 Indledning

I dette speciale vil jeg beskæftige mig med undervisningen omkring grænseværdier i gymnasiet. Hvilke logiske elementer indgår? Hvilke logiske elementer må eleverne beherske for at kunne få udbytte af en stringent definition af grænseværdier?

Jeg ønsker at designe og teste et undervisningsforløb omhandlende ε-δ-definitionen af grænseværdier. Så jeg vil starte med at undersøge om der er problemer med den traditionelle grænseværdiundervisning. Jeg må også vide hvor meget logik eleverne traditionelt lærer; samt endelig hvor meget logik der er nødvendigt til en stringent definition af grænseværdi.

Målet er både at give eleverne et mere nuanceret billede af grænseværdibegrebet, samt at styrke logikkens plads i matematikundervisningen.

2 Teoretisk baggrund

2.1 ATD

I dette afsnit gives en fremstilling af den antropologiske teori om didaktik (ATD) baseret på en artikel af Barbé et al. (2005). Oprindeligt er teorien fremsat af Chevallard.

ATD giver en epistemologisk model af matematisk viden. I den antropologiske teori om didaktik ser man matematik som en menneskelig aktivitet der består i studiet af matematiske opgaver. Den matematiske aktivitet består af to uadskillelige dele. På den ene side er der en praksisblok kategoriseret ved sine opgavetyper og teknikker til at løse dem. Det kan være svært at beskrive en teknik; men uanset om teknikken kan nedskrives, vil den indenfor ATD regnes for en teknik, hvis den løser den givne opgave. På den anden side er der en teoriblok som skal forklare og retfærdiggøre praksisblokken. Teoriblokken består af teknologier og teorier. Det er en antropologisk antagelse at en menneskelig praksis sjældent eksisterer uden et diskursivt miljø, som har som mål at beskrive, forklare og retfærdiggøre handlingen. (Barbé et al., 2005, s. 237)

I den antropologiske teori om didaktik opfattes matematikken som bestående af matematiske praxeologiske organisationer MO'er. En MO kan beskrives ved 4T-modellen og karekteriseres ved sine teorier Θ, teknologier θ, teknikker τ og typer af opgaver T. En elementær MO siges at være punktvis, hvis den er baseret på en enkelt type opgaver, der løses med samme teknik. Punktvise MO'er kan integreres til en lokal MO hvor alle kan forklares med samme teknologiske diskurs. Lokale MO'er kan integreres i regionale MO'er der hører til den samme teoretiske diskurs. Lokale MO'er kan tilhøre forskellige regionale MO'er, afhængigt af hvilken diskurs man ser på. (Barbé et al., 2005, s. 237–238)

Skabelsen af en MO hos eleverne sker i en studieproces/didaktisk proces, der består af 6 momenter (Barbé et al., 2005, s. 238):

1. Første møde

2. Udforskende moment
3. Teknisk moment
4. Teknologisk/teoretisk moment
5. Institutionalisering
6. Evaluering

En gennemgang af de seks elementer skaber starten på en lokal MO der drejer sig om en specifik teknologisk diskurs.

Barbé et al. (2005, s. 239-240) har identificeret to typer af didaktiske begrænsninger som har indflydelse på lærerens praksis. På den ene side har vi specifikke didaktiske begrænsninger som kommer fra den præcise natur af den viden der skal læres. På den anden side står generiske didaktiske restriktioner som læreren møder i en given undervisningsinstitution, uanset hvilket matematisk emne der skal undervises i.

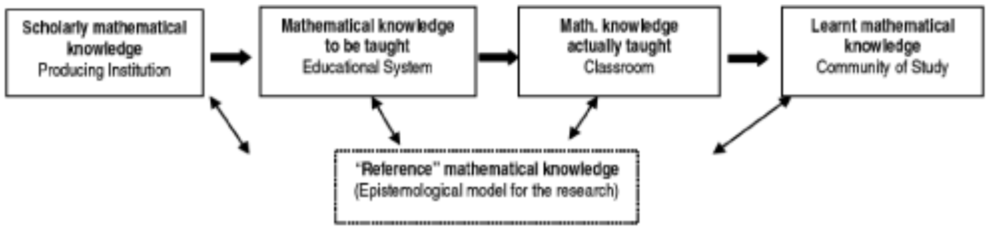
Barbé et al. (2005) har beskæftiget sig med begrænsninger ved undervisningen omhandlende funktioners grænseværdier i spanske gymnasier. Man kunne forestille sig at noget tilsvarende sker i Danmark derfor vil jeg dvæle lidt ved denne artikel, for senere (i afsnit 5.2 på side 43) at undersøge om danske gymnasiematematikbøger giver anledning til samme begrænsninger.

Barbé et al. (2005, afsnit 3) inddeler den viden spanske gymnsieelever forventes at opnå i undervisningen omkring grænseværdier i to MO'er. MO_1 som kan kaldes grænseværdiers algebra, som indeholder viden om hvordan man beregner grænseværdier, og MO_2, grænseværdiers topologi, der beskæftiger sig med eksistensen af grænseværdier.

Traditionelt lægges der i lærebøger vægt på den algebraiske tilgang. Der lægges vægt på hvordan grænseværdier beregnes. Teorien kunne måske være: „kan den beregnes, så findes den“. Men hvad så når den ikke kan beregnes?

Barbé et al. (2005, s. 236) skriver at det er en fordel at kigge på de tre trin i den didaktiske transpositionsproces, når man skal studere undervisning. I en artikel af Bosch et al. (2005) er dette udvidet med et fjerde trin til:

1. Den videnskabelige matematiske viden.
2. Den matematiske viden som den er designet til at blive undervist.
3. Den matematiske viden der faktisk bliver undervist i af den aktuelle lærer i det aktuelle klasseværelse.
4. Den matematiske viden som elverne har lært.



Figur 2.1: Den didaktiske transpositionsproces (Bosch et al., 2005, s. 1257)

Som forsker har man brug for at tolke den matematiske viden der skal undervises i, som en del af en MO som kaldes „matematisk referenceorganisation". Dette er en epistemologisk model af den videnskablige viden som legitimerer den viden der skal undervises i (Barbé et al., 2005, s. 241). Den regionale matematiske referenceorganisation som er relevant mht undervisningen i grænseværdier indeholder to forskellige lokale matematiske organisationer. Den første MO_1 kaldes grænseværdiers algebra, typiske opgaver er:

T_{11} Beregn grænseværdien for en funktion $f(x)$ når $x \to a$, hvor a er et reelt tal.

T_{12} Beregn grænseværdien for en funktion $f(x)$ når $x \to \infty$.

T_{13} Bestem grænseværdien for en funktion givet dens graf.

T_{14} Undersøg kontinuiteten af $f(x)$.

T_{13} og T_{14} fremstår som undertyper af de to første. Den minimale teknologiske diskurs nødvendig for at genere, forklare og retfærdiggøre egenskaberne ved funktioners grænseværdi, identificeres af Barbé et al. (2005, s. 242) som:

θ_{11} Grænseværdien af en sum af funktioner er summen af grænseværdierne.

θ_{12} Grænseværdien af et produkt af funktioner er produktet af grænseværdierne.

θ_{13} Grænseværdien af en kvotient af funktioner er kvotienten af grænseværdierne.

θ_{14} Uligheder mellem funktioner bevares ved grænseovergange.

θ_{15} Grænseværdien for en funktion begrænset mellem to funktioner med samme grænseværdi er lig værdien af denne grænseværdi.

Men MO_1 udgør ikke alt hvad eleverne skal lære om grænseværdier i spanske gymnasier. Derfor betragtes en anden referencemodel, MO_2, som kaldes grænseværdiers topologi og beskæftiger sig med eksistensen af grænseværdi. Opgaver kunne være

T_{21} Vis at $f(x)$ (ikke) har en grænseværdi for $x \to a$, hvor a er et reelt tal, eller $x \to \infty$.

T_{22} Vis at en én-sidet grænse for visse typer af funktioner(ikke)eksisterer.

T_{23} Vis ovenstående egenskaber $\theta_{11} - \theta_{15}$ for at retfærdiggøre måden visse grænseværdier beregnes på.

Teknikkerne der her bringes i spil er enten baseret på ε-δ-uligheder, eller konvergente følger.

Barbé et al. (2005, side 243, min oversættelse) giver et eksempel på arbejdet indenfor MO_2:

> *Vis at funktionen* $f(x) = \sin(x)$ *ikke har en grænseværdi for* $x \to +\infty$.
> Se på følgen $X_n = (\pi/2 + 2\pi n)$.
> Vi ved at $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
> Vi har: $f(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$ for alle n, hvilket medfører $\lim_{n\to+\infty} = 1$.
> Se på følgen $X'_n = (-\pi/2 + 2\pi n)$.
> Vi ved at $\lim_{n\to+\infty} x'_n = +\infty$.
> Vi har: $f(x'_n) = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$ for alle n, hvilket medfører $\lim_{n\to+\infty} = -1$.
> Vi har to følger der går mod uendelig og hvis billeder gennem f konvergerer mod forskellige punkter. Så grænseværdien for $f(x) = \sin(x)$ for $x \to +\infty$ eksisterer ikke.

Teknologien omkring MO_2 bygger på egenskaberne ved grænseværdier af følger og den klassiske ε-δ-definition af grænseværdier. Den giver de teknikker der skal til for at løse problemer omkring eksistens af grænseværdi. Vi har altså en reference MO der integrerer mindst to lokale MO'er, nemlig MO_1 og MO_2. De to MO'er er ikke adskilt, beviserne for reglerne θ_{11} - θ_{15} er teknologier i MO_1, men er samtidig teknikker til at løse T_{23} og er dermed en del af praksisblokken for MO_2. Så man kan sige at MO_1 er delvis indeholdt i MO_2. Det er muligt at integrere MO_1 og MO_2 i en regional MO, dette kunne f.eks være organisationen der drejer som om spørgsmålet om differentiabilitet af bestemte slags funktioner. (Barbé et al., 2005, afsnit 3.1)

I de spanske matematikbøger mangler den teoretiske side af MO_1. Teorien skal komme fra MO_2, men bliver ifølge Barbé et al. (2005, afsnit 3.2) ikke fulgt af en matematisk praksis der ligger indenfor elevernes rækkevidde. MO_2 kommer til at fremstå som en teoriblok uden praksisblok. Det, der skal undervises i, fremstår altså som to ukomplette lokale MO'er som er uafhængige af hinanden. Dette gør det svært for læreren at give mening til begge MO'er. Der skal en meget bredere MO til før begge dele får en dybere berettigelse hos eleverne; men dette ligger udenfor den matematiske viden der skal undervises i, og der dermed er afsat tid til.

Til MO_2 burde høre en praksisblok med opgaver om eksistensen af grænseværdier; men denne viser sig i den spanske undersøgelse at være kraftigt reduceret eller i praksis ikke eksisterende, så MO_2 kommer til udelukkende at bestå af teori omkring eksistens af grænseværdier.

Barbé et al. (2005, s. 235) argumenterer for at det er svært at give mening til et grænseværdibegreb, når dette gives som et redskab til at studere kontinuitet.

I klasseværelset vælger den spanske lærer at starte med at lave sekant- og tangentberegning for at motivere grænseværdibegrebet, selvom denne øvelse intet har at gøre med den ønskede lærte MO. Eleverne vil ikke senere støde på den slags geometriske opgaver. Eleverne fortsætter til grænseværdibegrebet ikke til differentation, som ellers ville være en mere naturlig fortsættelse af opgaven. Der mangler en nødvendighed for teknologiske elementer. (Barbé et al., 2005, s. 252)

Det er utilfredsstillende når det ikke er muligt at lave en komplet gennemgang af de 6 momenter i den didaktiske studieproces, som skal til for at skabe en komplet regional eller lokal MO hos eleverne. Barbé et al. (2005) antyder at det er tilfældet, sådan som grænseværdibegrebet ønskes undervist i det spanske gymnasium.

2.2 Problemer knyttet specielt til grænseværdibegrebet

I ovenstående gennemgang af ATD fremgår nogle af de problemer der knytter sig til grænseværdibegrebet, nemlig at det er svært at skabe en fuldstændig MO hos eleverne, der dækker både teori- og praksisdelen af den ønskede matematiske viden hos eleverne.

Mange andre har beskæftiget sig med elevers og studerendes vanskeligheder med grænseværdier, set i andre perspektiver. En af disse er Moru (2009) som har undersøgt epistemologiske forhindringer for forståelse af funktioners grænseværdier i forskellige repræsentationer. Moru (2009, s. 433) identificerer tre forhindringer: tendensen til at generalisere, forhindringer forårsaget af det naturlige sprog og tendensen til at stole på misvisende intuitive oplevelser.

Sådan som elever møder grænseværdibegrebet i skolen, vil det ofte kunne formuleres i naturligt sprog, som at grænseværdier er noget man kommer „tæt på“; men hvad vil tæt på sige? Det fremgår ikke altid entydigt af sammenhængen, og det kan give problemer for eleverne.

Moru (2009) har undersøgt epistemologiske forhindringer indenfor grænseværdibegrebet i forskellige repræsentationer (algebraisk, grafisk, nummerisk, beskrivende). Undersøgelsen har fundet sted blandt 1. års-universitetsstuderende i Lesotho. I undersøgelsen har hun stillet følgende opgave indenfor numerisk grænseværdibestemmelse (opgaveteksten er fundet i (Moru, 2006, side 225 - 227)): Givet tabelværdier for $f(x)$ (tabel 2.1). Antag at mønsteret fortsætter. Hvilken værdi går x mod og hvad med $f(x)$? Opskriv som en grænseværdi.

x	$f(x)$
0,7	1
0,74	1,8
0,749	1,89
0,7499	1,899
0,74999	1,8999
0,749999	1,89999

Tabel 2.1: Grænseværdiopgave i numerisk repræsentation

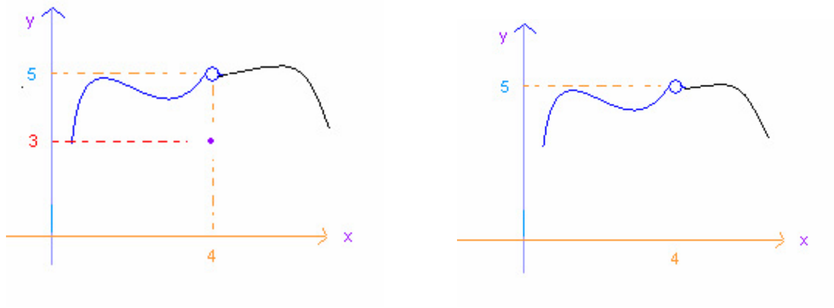
Denne opgave kan siges at være en del af MO_1, den kan betragtes som en underopgavetype i forhold til T_{11} (Beregn grænseværdien for en funktion $f(x)$ når $x \to a$, hvor a er et reelt tal (se på side 11)), på samme måde som T_{13} er en undertype. T_{11} er i algebraiske repræsentation, T_{13} i grafisk repræsentation, og endelig denne som jeg vil kalde T_{15} i nummerisk repræsentation.

35% af de adspurgte studerende svarede 1 og 2. Så dette er måske en udmyntelse af at „tæt på“ ikke er tilstrækkeligt godt formuleret. Det er værd at lægge mærke til at vi her taler om universitetsstuderende, som mener at tallene i tabellen går mod hhv. 1 og 2, selvom de faktisk går mod $0,75$ og $1,9$, hvilket bare 24% af de studerende svarer. Er det så fordi de ellers mest har set „pæne“ heltallige grænseværdier? I et uddybende interview (Moru, 2009, s. 446-448) med en af de studerende siger den studerende at han ikke var opmærksom på andre tal end de hele tal.

R: You say that as x approaches 1, $f(x)$ approaches 2. Let us look at this table of values can you add five more numbers in both the column of x and that of $f(x)$. Which number is x approaching? Which number is $f(x)$ approaching? Study the numbers carefully.
S129: (Writing) 0.749999
R: (Interrupting) How many 9's do you have here?
S129: Four because there they were 3.
R: How many do you think we will have in the next number?
S129: Five.
R: Next.
S129: Six, seven,...
R: Will we ever come to an end of those numbers?
S129: No.
R: So which number do they keep on approaching? Because it looks like you were concentrating on whole numbers only.
S129: I was not aware of other specific numbers.
R: Which number do you think would be close to 0.7499999...
S129: It is 0.8.
R: Can you think of another number close to 0.74999999...
S129: It is 0.75.
R: Between 0.8 and 0.75 which one do you think is closer?
S129: It is 0.75.
R: Let us concentrate on $f(x)$. Which number do you think $f(x)$ is approaching?
S129: It is 1.9.
R: Can you now write your new answers in the correct position using symbols in b(i)? If I may ask, how did you come up with 1 and 2 as your answers?
S129: I was thinking of whole numbers only because I approximated them.

Her giver den studerende udtryk for at det at finde grænseværdi, er noget med at tilnærme en værdi. En teknik til at finde grænseværdien er for den studerende at finde en tilnærmet værdi. Men teknikken viser sig her ikke at give et korrekt resultat.

I en grafisk opgave spurgte Moru (2009) om grænseværdier for funktionerne i figur 2.2 på næste side for $x \to 4$. Denne opgave er af typen T_{13} fra MO_1. 57% af de studerende svarede korrekt at grænseværdierne er ens, fordi det kun er interessant hvad der sker i en omegn af $x = 4$. Andre



Figur 2.2: Grænseværdiopgaver i grafisk repræsentation (Moru, 2006, side 223)

svarede enten at der ikke er en grænseværdi for den anden funktion, som ikke er defineret for $x = 4$ (10% svarede endda at dette var tilfældet for begge funktioner), eller at grænsen er 3 for den første funktion, da det er funktionsværdien, 12% gav mere end et svar og andre 12% gav intet svar.

Så også her ses det at mange universitetsstuderende har et fejlagtigt billede af grænseværdibegrebet. Hvilket atter understreger at det er et svært tilgængeligt emne vi her beskæftiger os med.

Opgaven i den algebraiske repræsentation er af typen T_{11} og T_{12} og drejer sig om at bestemme grænseværdien for

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \text{ for hhv. } x \to 0 \text{ og } x \to \infty.$$

Her har de studerende ikke en entydig teknik til at løse opgaven, når direkte indsættelse giver hhv. „$\frac{0}{0}$" og „$\frac{\infty}{\infty}$". Flere har problemer fordi direkte indsættelse giver division med 0, som ikke er tilladt.

Moru (2009) taler om at samle handlinger til processer (Interiorizing Actions Into Processes). Dette kan sammenlignes med udvidelsen fra en punktvis MO til en lokal MO. Begge dele handler om at benytte teknikker i en større sammenhæng.

Det er værd at bemærke at undersøgelsen fandt sted blandt førsteårs universitetsstuderende. Dette understreger at det er et svært område indenfor matematikken. Jeg vil formode at fejlslutninger af samme art kan observeres hos danske gymnasieelever

Bloch og Schneider (2004) har beskæftiget sig med andre epistemologiske vanskeligheder ved grænseværdier. De mener at en af vanskelighederne ved matematisk analyse skyldes at der ikke er en indledende eksperimenterende fase, som kan skabe mentale objekter og intuition herom. Dette svarer til at det udforskende moment i den didaktiske transpositionsproces på side 11 mangler. Grænseværdier og differentiation introduceres traditionelt kun i lyset af ønsket om systematiske studier af grafiske repræsentationer af funktioner uden kontekst, målet er gerne funktionsanalyser for funktionsanalysens egen skyld, ikke fordi den har en praktisk anvendelse som f.eks. kunne være til løsning af optimeringsopgaver. På gymnasieniveau gives ifølge Bloch og Schneider (2004) kun enkelte eksempler på funktioner og grænseværdier, disse generaliseres uden formalisering. De mener at matematikundervisning bør tvinge elever til at bevise.

Bloch og Schneider (2004, s. 4) identificerer bl.a. disse epistemologiske forhindringer:

- Nogle elever afviser konceptet om øjeblikkelig flow og hastighed. De mener at man for at beregne hastighed må have en tilbagelagt afstand og et dertil benyttet tidsrum.

- Kan rektangler der reduceres til segmenter leder til et areal under en graf? (se figur 2.4 på side 19). Set med elevernes øjne beregnes arealet ikke med mindre og mindre inddeling for at man til sidst laver grænseovergangen; derimod ser de at så længe rektangler har en tykkelse dækker de enten ikke hele arealet, eller de dækker for meget. Når de bliver til liniestykker uden bredde, så kan arealet ikke blive andet end summen af længderne som er ∞ eller summen af arealerne som er 0.

Formalismen giver også problemer. Først når eleverne behersker de formalistiske redskaber der kan benyttes til bevis, bliver der skabt rigtig matematisk viden.

(Bloch og Schneider, 2004, s. 6-7) foreslår at vanskelighederne med øjeblikkeligt flow imødekommes ved at man starter med følgende opgave:

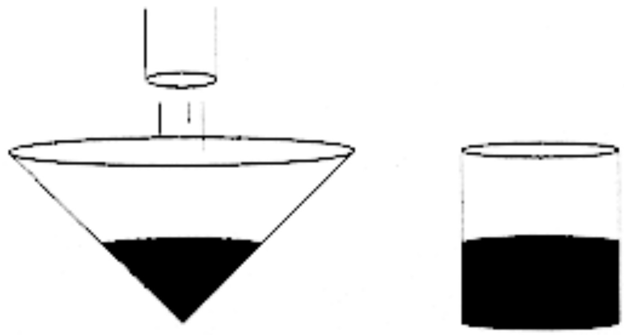
En pumpe fylder en konisk vase. Den er reguleret så vandstanden stiger ensartet med 1 cm i minuttet. Vinklen i hjørnet af vasen er 90° se til venstre på figur 2.3 på den følgende side. Indtil hvornår vil flowet fra pumpen være mindre end 100 cm^3/min?

I denne opgave, som i nogle andre, giver intuitionen at når én størrelse ændres med konstant hastighed, så kan den anden størrelse ikke samtidigt ændres med konstant hastighed.

Gennemsnitsflowet i intervallet $[t, t + \Delta t]$ er

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \qquad \text{som her er} \qquad \pi t^2 + \pi t \Delta t + \frac{\pi(\Delta t)^2}{3}.$$

For at få den bedst mulige beregning af flowet gøres Δt så lille som muligt. Så opstår idéen om at reducere Δt så meget som muligt, her ved at sætte $\Delta t = 0$, så det øjeblikkelige flow bliver πt^2. Dette kan eleverne jævnfør ovenstående begrænsning have vanskeligt ved at acceptere. Derfor indsættes en cylindrisk vase ved siden af (se figur 2.3), denne har et bundareal på 100 cm^2 og fyldes også med 1 cm pr minut og dermed et flow på 100 cm^3/min. Så længe keglen er smallere end cylinderen løber vandet med mindst flow til keglen, når den bliver bredere løber den med størst flow tli keglen; men netop når overfladearealet af vandet i keglen er lig overfladearealet i cylinderen er flowet det samme. Det vil sige netop når overfladearealet (som jo i keglen er πt^2 cm^2) er 100 cm^2.

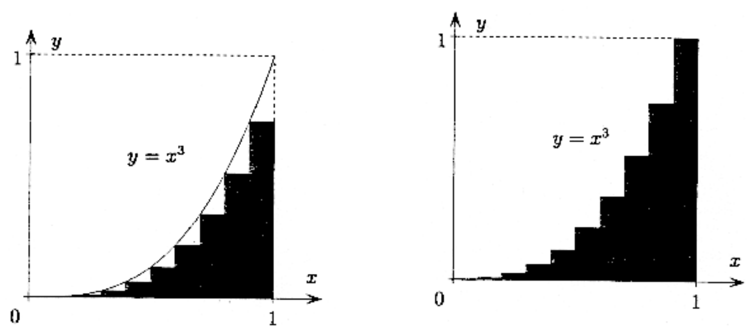


Figur 2.3: Opfyldning af vaser

Denne opgave giver anledning til at eleverne får opbygget deres egen fortolkning af øjeblikkeligt flow. Når de sammenligner de to situationer, vil de have mulighed for at se at der netop er et tidspunkt som ikke strækker sig over et tidsrum hvor flowet er ens i de to tilfælde. Dette bliver første skridt på vejen til at acceptere begrebet øjeblikketligt flow.

Dette kan knyttes til Moru hvor nogle studerende også i den algebraiske repræsentation havde problemer med division med 0. Dette er også hvad der sker i denne opgave nemlig at vi sætter tidsrummet $\Delta t = 0$. Opgaven indeholder en delopgave som er af typen T_{11} (side 11): Beregn grænseværdien for $\Delta t \to 0$. Selve opgaven falder ikke indenfor de hidtidige opgavetyper. Den handler om differentiation, som jeg ikke vil komme ind på nu.

En anden opgave (Bloch og Schneider, 2004, s. 7-8) giver anledning til beviser mht grænseværdier. Her bevises at arealerne ved over- og undersummer (se figur 2.4 på modstående side) har samme grænseværdi. Arealet under kurven kan ikke være $\frac{1}{4} + \varepsilon$ med ε så lille som vi ønsker, for der vil altid kunne findes et N der er så stort at oversummen ligger mellem $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{4} + \varepsilon$; men det er en modstrid at oversummen skulle være mindre end arealet. Tilsvarende fås at arealet under kurven ikke kan være $\frac{1}{4} - \varepsilon$. Dette retter sig mod en klassisk ε-N-definition af gænseværdier for følger. Opgaven er af typen T_{21} (side 11): Vis at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$ og teknikken er netop baseret på ε-N-definitionen.



Figur 2.4: Over- og undersummer for $y = x^3$

Dette bevis imødekommer ifølge Bloch og Schneider (2004) den anden nævnte epistemologiske udfordring. Her lægges vægten nemlig ikke på de mindre og mindre rektangler som til sidst bliver til linier; men på at man kan komme så tæt på som man ønsker. Her lægges vægt på kvantorer, at for alle ε findes et N. Men ikke i den vante symbolske formulering.

Her gives en anden fortolkning af grænseværdibegrebet, som måske er lidt mere præcis end „tæt på", nemlig så tæt på som man måtte ønske. Dette kunne de studerende hos Moru måske også have brugt i den numeriske repræsentation med tabelværdierne. Man opnår aldrig grænseværdien i tabellen, ligesom man aldrig får inddelt arealet fint nok til at oversummerne rent faktisk bliver arealet. Men i begge tilfælde er det muligt at komme så tæt på som man måtte ønske. Her introduceres en teknik (lad os kalde den τ_{21} til at se om en grænseværdi er tilstede: Man skal godtgøre at det for ethvert ε er muligt at komme tættere på den formodede værdi.

Grænseværdibegrebet kan ikke adskilles fra funktionsbegrebet; men da de algebraiske teknikker hos eleverne ofte er begrænset vil et grafisk miljø ifølge Bloch og Schneider (2004, s. 9-10) være nødvendigt til udforskning og fremsætning af formodninger, hvilket er nødvendigt for at gennemgå moment 2, 3 og 4 (side 9)- udforskning, teknik og teknologi/teori. Men det er nyttigt med nogle formelle værktøjer for at lave beviser. For 17-årige matematiske elever lavede de et forløb hvor eleverne skulle undersøge funktioner og egenskaber som begrænset, aftagende, tiltagende. Hertil bruges kvantorer. Opgaven skulle få eleverne til at skelne mellem egenskaben „f er begrænset af $f(a)$ og $f(b)$", som udtrykkes vha én kvantor:

$$\forall x \in [a; b], f(a) < f(x) < f(b)$$

og egenskaben „f er stigende på $[a; b]$“W, som udtrykkes med to kvantorer:

$$\forall x \in [a; b], \forall y \in [a; b], \text{ hvis } x < y, \text{ så } f(x) < f(y)$$

Dette gav i undersøgelsen anledning til diskussion mellem elever som mente at de to udsagn var ens, og andre som var uenige. Disse måtte så producere et modeksempel. Dette gav anledning til at eleverne måtte arbejde med kvantorers betydning, altså med kontrolsystemet indenfor matematisk analyse. I samme grafiske miljø kan arbejdes videre med egenskaber fra funktionsanalysen.

Sonnenborg (2007) har i sit speciale netop beskæftiget sig med at lade elever undersøge grænseværdibegrebet på en eksperimenterende måde vha. det grafiske miljø på lommeregneren. Også her bliver der brug for at kunne verificere de formodninger eleverne fremkommer med.

2.3 Undersøgelser om elevers brug af logik

Viviane Durand-Guerrier har lavet en del undersøgelser af elevers brug af logik. Hun mener at de ofte har en anderledes mere intuitiv opfattelse af logiske sammenhænge end den stringente matematiske. Dette kan give en del problemer når logikken bliver mere krævende hvilket typisk sker i analysen på begyndende universitetsniveau.

Durand-Guerrier (2003) har lavet en undersøgelse af elevers opfattelse af implikationer. Hun når frem til at mange elever ikke ser betingede udsagn af formen „hvis ... så ... “ som sand, hvis betingelsen („hvis“-delen) ikke er opfyldt. Det er ikke naturligt at alle matematiske sætninger enten er sande eller falske, i mange tilfælde vil elever og studerende svare at det er uafgørligt, hvis de får den mulighed.

Udsagn af formen „hvis p så q“ er logisk set sande i alle tilfælde hvor p ikke er opfyldt. Men for mange studerende kan udsagnet kun tillægges en sandhedsværdi når p er opfyldt.

Et eksempel kan være: Bestem alle heltal mellem 1 og 20 som har egenskaben „hvis n er et lige tal, så er $n + 1$ et primtal“. Dette er som bekendt tilfældet for 2, 4, 6, 10, 16 og 18 samt alle ulige tal fra 1 til 19. I undersøgelsen af Durand-Guerrier (2003) nævnte kun 3 af 90 studerende også de ulige tal. Også blandt franske lærere (som har læst matematik på universitet) på kursus fandt hun denne fejlslutning; eneste forskel var at lærerne i modsætning til de øvrige studerende kunne overbevises om rigtigheden af at medtage de ulige tal. Så selv matematikere opfører sig i nogle situationer ikke som matematikere.

Elever på 15-16 år blev stillet opgaver af typen: er følgende sætning sand, falsk eller uafgørlig. Havde sætningen følgende form: „hvis … så … “ svarede de dygtige elever at det ikke kunne afgøres når „hvis“-delen ikke gav anledning til en konkret slutning om „så“-delen; set med matematiske øjne giver dette klart anledning til at slutte at sætningen er falsk, da den jo ikke er opfyldt i alle tilfælde. Så dette viser endnu en gang at det ikke er selvindlysende hvordan implikationer skal opfattes. Matematikeren ser et implicit $\forall$, hvor eleverne heller vil afgøre hvilke forudsætninger som skal være opfyldt for at sætningen gælder (Durand-Guerrier, 2003). Dette er ifølge Lakatos (1976) også den måde matematikere traditionelt arbejder på. Det hjælper for ham ikke at slutte at en sætning er falsk, herved mister den jo sin værdi. Det gælder tværtimod om at bestemme hvornår sætningen er gyldig, så man kan vedblive at bruge den. Matematikere vil dog i første omgang komme til den slutning at sætningen er falsk, hvor eleverne når frem til at den ikke har en sandhedsværdi.

I propositionslogik er sætninger enten beviselige eller modbeviselige, og tillægges en sandhedsværdi. Det udelukkede tredjes princip siger at en sætning enten er sand eller falsk. I prædikatlogikken er der tale om åbne udsagn; som er sande i nogle tilfælde og falske i andre. Det gælder om at finde den størst mulige mængde at kvantificere over, for at udsagnet er opfyldt.

En af Grices konversationsregler siger at man i en samtale altid skal meddele al relevant information. Så hvis noget, der ellers ville have stor indflydelse, ikke bliver nævnt, er det naturligt at gå ud fra at det ikke er opfyldt. Derfor giver det anledning til vanskeligehder fra elevernes side, hvis læreren stiller spørgsmål uden at der er givet tilstrækkelig information til at svare på spørgsmålet. Dette vil af eleverne opfattes som et brud på den didaktiske kontrakt.

Men også universitetsstuderende har problemer i denne henseende. I et spørgeskema stillede Durand-Guerrier (2003, s. 18, 23-28) opgaver bestående af en sætning og et spørgsmål der skulle besvares udfra sætningen. En opgave lød:

> **Sætning 1: I en rombe er diagonalerne vinkelrette.**
> *Spørgsmål:*
> Diagonalerne i firkant (A, B, C, D) er vinkelrette. Er det en rombe? Underbyg dit svar.

Sætningen har den logiske struktur

$$\forall x P x$$

hvor Px er prædikatet „diagonalerne i x er vinkelrette“ og der kvantificeres over alle romber. I spørgsmålet introduceres domænet „firkanter“, i dette domæne kan sætningen formuleres som „Hvis en firkant er en rombe, så er diagonalerne vinkelrette“. Her er den logiske struktur

$$\forall x(Rx \Rightarrow Px)$$

hvor Rx er prædikatet „at være en rombe“ og der kvantificeres over alle firkanter. For parallellogrammer gælder at „et parallellogram er en rombe, hvis og kun hvis dets diagonaler er vinkelrette“. Denne sætning har den logiske struktur

$$\forall x(Rx \Leftrightarrow Px)$$

Et matematisk korrekt svar er „at det ikke er muligt at afgøre om det er en rombe eller ej“. Svares „Nej“ på spørgsmålet kan det ifølge Durand-Guerrier (2003) enten skyldes at spørgsmålet fortolkes som: „Er det rigtigt at en firkant med vinkelrette diagonaler nødvendigvis er en rombe?“ eller som “Er du sikker på at firkanten er en rombe?“, hvilket begge svarer til den sædvanlige matematiske opfattelse af implikationer, svaret kan så tolkes som et „ikke nødvendigvis“ i overensstemmelse med det korrekte svar. En anden grund til at svare nej, kunne være at eleverne benytter Grices konversationsregel som siger at ingen nødvendig information må udelades, så når det ikke nævnes at diagonalerne skærer midtpå, så er det ikke tilfældet.

I klasseværelset opstår der ifølge Durand-Guerrier (2003) ofte misforståelse mellem elever og lærere fordi eleverne ser „åbne implikationer“ og læreren ser „generaliserede implikationer“. Hun ser et potentiale i at se på åbne implikationer og lede efter (mod-)eksempler for at bestemme domænet for de generaliserede implikationernes (u)gyldighed.

Sætningen „for alle $n : n^2 - n + 11$ er et primtal“ er oplagt falsk fra et syntaktisk synspunkt (f.eks er $n = 11$ et modeksempel); men set fra et semantisk synspunkt ville det måske være nyttigt at finde ud af gyldighedsområdet for sætningen. Studerende vil ofte opfatte sætningen som et åbent udsagn hvortil der kan findes udtagelser (Durand-Guerrier, 2008).

Denne sætning giver allerede på folkeskoleniveau mening og her vil det være naturligt at begynde at se på gyldighedsområdet for sætningen.

Studerende sidestiller ofte implikation med ækvivalens. Når forudsætningen ikke er opfyldt slutter en del at så er konklusionen heller ikke opfyldt, er konklusionen opfyldt, så har forudsætningen også været opfyldt; men ingen af disse dele er logiske nødvendigheder og er ikke konsekvens af implikationen (Durand-Guerrier, 2003).

Dette indikerer at der opstår vanskeligheder på flere niveauer når man begiver sig ind i stringent matematik. I en anden undersøgelse citerer Durand-Guerrier (2008) den tidligere nævnte undersøgelse, men bygger videre og siger at det naturlige sprog ikke er præsist nok. På fransk giver sætningen „ikke alle huse er blå“ problemer fordi det kan tolkes som „ingen huse er blå“ eller „mindst et hus er ikke blåt“.

Et andet eksempel på at en sætning kan have flere betydninger når man ikke bruger logisk notation ses i Blossier et al. (2009). Eksemplet lyder: „En korporal kan blive general netop hvis en korporal kan blive general“ dette kan tolkes på mindst to måder:

1. $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(x)$
2. $\forall x \forall y P(x) \Leftrightarrow P(y)$

Det første udsagn kan oversættes til „en korporal kan blive general, netop hvis han kan blive general“ og er en tautologi. Det andet udsagn siger at „netop hvis én korporal kan blive general kan en hvilken som helst anden korporal blive general“. Hvilket sandsynligvis er forkert. Den første fortolkning er sand, den anden er ikke.

Men det er ikke kun den manglende præcision der er et problem. Mange bachelorstuderende i USA har ifølge Selden og Selden (1995) problemer med at „pakke logikken ud“ af matematiske udsagn. Ofte er der en masse implicit som man er nødt til at kunne læse ud af sammenhængen, især når man skal kontrollere om et bevis er rigtigt eller selv skal konstruere et bevis. Der indgår særligt ofte implicitte kvantorer, som de studerende skal tage højde for.

Durand-Guerrier og Arsac (2005) har beskæftiget sig med logik i matematisk analyse på universitetsniveau. I beviser i undervisningsmaterialet indenfor analyse er der meget få eksplicitte referencer til standard logic. Men for at bedømme om et bevis er gyldigt, må man kende til logikken bag.

Undersøgelsen drejer sig om hvad de kalder „afhængighedsreglen“ som siger at i et AE-udsagn „$\forall x, \exists y$ så $F(x, y)$“, afhænger y af x.

Når elever laver fejlslutninger ved gentagen benyttelse af AE-udsagn er det ofte fordi de overser afhængighedsreglen og tror at de kan benytte samme y begge gange selvom x er forskellig og derfor muligvis kræver forskelligt y. En mulig løsning kunne være at indføre en notation (f. eks y_x) der specifikt gør opmærksom på afhængigheden på steder hvor der er risiko for at glemme det.

Dette ses f.eks. i forskellen på kontinuitet og uniform kontinuitet som igennem historien er blevet forvekslet.

Definition 2.3.1. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ f siges at være kontinuert hvis

$$\forall a \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definition 2.3.2. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ f siges at være uniform kontinuert hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall a \in A : \; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Den eneste forskel er placeringen af den ene alkvantor. Men dette betyder meget for funktionens opførsel. i det første tilfælde afhænger δ af a i det andet tilfælde kan man vælge et δ der dur for alle a.

Vi har set at der opstår problemer med prædikatlogik som er nødvendig i analyse på dette niveau, fordi prædikatlogik ikke nødvendigvis stemmer overens med dagligdags logik.

Durand-Guerrier og Arsac (2005, s. 158) opstiller nogle kriterier hvoraf et eller flere skal være opfyldt for at fejl af denne type opstår:

1. fravær af register hvori man kan aflæse afhængigheden.

2. y afhænger ikke af x ved en funktion.

3. fravær af notation der indikerer afhængighed, uanset om afhængigheden kan beskrives ved en funktion.

I geometri fremgår afhængigheden klart af det grafiske register og derfor opstår denne type fejl ikke.

I undersøgelsen af Durand-Guerrier og Arsac (2005) opdager universitetslærere i første omgang ikke at elever har lavet AE-fejl i et bevis, de opdager fejlen fordi ikke alle nødvendige forudsætninger er blevet brugt. Så det er deres gode kendskab til de matematiske resultater frem for logikken der leder dem til at slutte at der er fejl i beviset. Men hvis man, som eleverne, ikke har et stort kendskab til det matematiske område, må man i stedet kunne identificere de logiske fejl og huller i argumenterne. Durand-Guerrier og Arsac (2005, s. 165) har set en effekt af at undervise i Copis naturlige deduktion (se figur 2.5 på næste side). Copis system giver syntaktiske regler kombineret med semantiske metaregler, der kan være nyttigt for studerende, for at finde og undgå disse AE-fejlslutninger.

I undersøgelsen blev lærere bedt om at rette en elevbesvarelse med denne type fejlslutning. Flere nævnte at de i første omgang ikke havde set fejlen; men fordi der i besvarelsen blev „bevist" en sætning som ikke er gyldig kunne lærerne hurtigt finde et modeksempel, og ledte derfor efter fejlen. Eleven som ikke havde nær så stort overblik over emnet, kunne naturligt nok ikke se dette modeksempel, og ledte derfor ikke efter fejl i beviset. Lærernes kommentarer til beviset indikerer ikke at de antog at eleverne havde forvekslet AE-udsagn med EA-udsagn selvom dette kunne være en mulig

1. U.I. Universal Instantiation

$$\frac{(x)fx}{fa}$$

(x) expresses a universal quantification corresponding to $\forall x$
a is an individual constant and fa results from fx by replacing all free occurrences of x in fx by a.

2.U.G. Universal Generalization

$$\frac{fa}{(x)fx}$$

First restriction rule : *a denotes any arbitrarily selected element, without any assumption other than its belonging to the considered domain.*

3. E.G. Existential Generalization

$$\frac{fa}{\exists x fx}$$

a is any individual symbol.

4. E.I. Existential Instantiation

$$\frac{\exists x fx}{fw}$$

Second restriction rule : *It is necessary to be aware of the interpretation of w: w is "any individual constant which has had no prior occurrence in that context and is used to denote the individual, or one of the individuals, whose existence has been asserted by the existential quantification." (p. 82).*

Figur 2.5: Fire regler for introduktion og elimination af kvantorer forklaring på fejlen. Vi vil senere se at disse ombytninger kan give anledning til fejlslutninger, der ikke nødvendigvis opdages af universistetsstuderende.

Durand-Guerrier og Arsac (2005) argumenterer for relevansen i at undervise eksplicit i argumentation i form af logik. Når det drejer sig om gentagen brug af AE-udsagn mener de at Copis naturlige deduktion kan bruges til at give de studerende regler for introduktion og elimination af kvantorer.

I beviser omkring konvergens påviser Roh (2009) at studerende mangler viden om logikken bag kvantorer og om negation af kvantificerede udsagn. Samtidig havde de studerende problemer med at benytte at ε er uafhængig af N, hvorimod N afhænger af ε, i konstruktion eller verifikation af argumenter omkring konvergens af følger. Han mener at der bør gøres opmærksom herpå i undervisningen.

I eksperimentet skulle de studerende se på følgen $a_n = \frac{1}{n}$ for ethvert positivt heltal n. De blev givet definitionen:

Definition 2.3.3. En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod et reelt tal L hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksiterer et positivt heltal N så for alle $n > N : |a_n - L| < \varepsilon$.

De skulle så se på følgende argumenter:

Argument 2.3.4. Vi påstår at følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod 0. Lad $\varepsilon = \frac{1}{N}$ for $N \in \mathbb{N}_+$. Så $\varepsilon > 0$. For alle $n > N : |a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$. Derfor konvergerer følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mod 0.

Argument 2.3.5. Vi påstår at følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ikke konvergerer mod 0, fordi for alle $N \in \mathbb{N}_+$, lad $n = N + 1$. Så $n > N$. Vælg $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$. Så $|a_n - 0| = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = \varepsilon$. Derfor eksisterer $\varepsilon > 0$ så der for alle $N \in \mathbb{N}_+$ eksisterer $n > N$ så $|a_n - 0| \geq \varepsilon$. Derfor konvergerer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ikke mod 0.

og undersøge gyldigheden som matematiske beviser.

Vi kan se at begge argumenter lader ε afhænge af N, selvom ε er uafhægnigt af N i definitionen, hvorimod N gerne må afhænge af ε. Så definitionen bliver ikke anvendt korrekt.

I første tilfælde vises at for alle N eksister et ε så betingelsen er opfyldt; men det burde have været omvendt: for alle ε eksisterer et N. I andet tilfælde vises at for alle N findes et ε så betingelsen ikke er opfyldt. Men det skulle have været der findes et ε så for alle N er betingelsen ikke opfyldt. Så i dette eksempel er det den førnævnte ombytning af AE- og EA-udsagn der giver anledning til forkerte slutninger i beviserne.

De studerende leder ikke efter fejl ved argument 2.3.4, fordi konklusionen er rigtig. Ved argument 2.3.5 har en del af de studerende svært ved at se at det er negationen af definitionen der skal bruges, og især tager det dem noget tid at nå frem til hvordan negationen så ser ud; men da de så endelig når frem til formen på negationen af definitionen, har de svært ved at finde fejlen i argumentet.

De studerende hæfter sig ikke ved at ε skal være uafhængig af N, hvorimod N gerne må afhænge af ε. Derfor mener Roh (2009) at der skal lægges vægt herpå ved introduktion af AE- og EA-udsagn.

Rækkefølgen af kvantorerne er central når man skal se på afhængigheden af de variable. Det der aktuelt bliver kvantificeret over skal være uafhængigt af hvad der kommer senere, hvorimod det gerne må afhænge af tidligere variable.

Vi vender nu tilbage til nogle af de tidligere nævnte undersøgelser. Moru (2009) beskæftiger sig i sine undersøgelser ikke med logikken. Men det gør Bloch og Schneider (2004) der forsøger at lade eleverne have praktisk anvendelse af kvantificerede udsagn i analysen på gymnasieniveau, i forbindelse med grafisk udforskning af funktioner. Denne opgave kunne som nævnt give anledning til begyndende accept hos eleverne af nødvendigheden af kvantorer.

I enhver MO der indeholder beviser vil der være brug for implikationer. Så her vil det sandsynligvis være nyttigt at holde sig Durand-Guerriers undersøgelser for øje, så man bliver opmærksom på om nogle misforståelser mellem elever og lærer skyldes forskellig opfattelser af implikationer. Men enhver fuldstændig MO vil indeholde en teoretisk del, som vil have glæde af beviser.

Alle disse undersøgelser giver anledning til en MO omhandlende kvantificerede udsagn. Opgaver vil typisk være af typen vis eller bevis. Negering af kvantificerede udsagn kommer ind som en opgavetype der er del af opgaverne med beviser jvf. Rohs opgave med validering af beviser (se på modstående side). Men også fortolkningsopgaver kommer ind i billedet. Opgavetypen kan være at nedskrive en sætning fra naturligt sprog med kvantorer, som Blossier har gjort med sætningen om korporalen der kan blive general (se på side 23), eller modsat fra symbolske kvantorer til naturligt sprog. Også Bloch og Schneider (se på side 17) lægger vægt på at formalisering er nødvendig, fordi bevisførelse er nødvendig for at skabe matematisk viden. Først når eleverne behersker de formalistiske redskaber der kan benyttes til bevis, bliver der skabt rigtig matematisk viden.

Der er altså en del der tyder på at eleverne vil have glæde af at beskæftige sig mere med logik, så det vil jeg forsøge i mit undervisningsforløb. Det ser ud til at være vigtigt at eleverne lærer at benytte formaliseret logik, så den kan hjælpe dem i stedet for at forvirre. Dette fører til at en mere eksplicit formel logik sandsynligvis kan fremme elevernes brug af grænseværdibegrebet.

3 Problemformulering

Forrige kapitel ledte frem til at en mere eksplicit formel logik sandsynligvis kan fremme elevernes brug af grænseværdibegrebet. Så det vil jeg undersøge nærmere. I mit speciale vil jeg undersøge om man kan imødekomme gymnasielevers vanskeligeheder med grænseværdier ved at undervise eksplicit i logik som Durand-Guerrier og Arsac (2005) foreslår.

Er det muligt at lave et forløb så eleverne lærer at beherske logikken, som samtidig giver eleverne et bedre greb om grænseværdibegrebet?

Jeg vil designe og teste et forløb med det mål, for at undersøge om det kan hælpe.

Jeg vil forsøge at hjælpe eleverne ved på forhånd at „pakke logikken ud“. Jeg vil lade kvantorer fremstå eksplicit, så de ikke først skal igennem en nærmere analyse, som de fleste elever alligevel må formodes ikke at beherske jvf. afsnit 2.3 på side 23.

Jeg vil undersøge om jeg kan give eleverne kendskab til propositionslogik, kvantorer og implikationer.

Barbé et al. (2005) viser at der ikke opbygges komplette MO'er omhandlende grænseværdibegrebet i gymnasiet. Jeg vil se om det er muligt at udvide MO_2 med en praksisblok, så den også kommer til at indeholde MO_1 ved at lade eleverne arbejde med ε-δ-definitionen af grænseværdi.

Kvantorer optræder ofte implicit i matematiske sætninger. Men ifølge Durand-Guerier (se afsnit 2.3) opstår der ofte problemer når elever stilles overfor sætninger som involverer eksistens- og alkvantorer. Hun argumenterer for at når kvantorerne optræder eksplicit er det i højere grad muligt at lære at beherske brugen. Moru (2009) påviser en del problemer med amerikanske førsteårs-universitetsstuderendes håndtering af grænseværdier i forskellige registre. Jeg vil undersøge om lignende vanskeligheder optræder hos danske gymnasieelever.

Jeg vil i mit speciale designe og teste et undervisningsforløb til brug i gymnasiet. Jeg vil give eleverne en præcis definition af grænseværdibegrebet. Dette gøres ved ε-δ-definitionen. Målet er at give eleverne værktøjer til håndtering af kvantorer, samt at afhjælpe mulige vanskeligheder mht. grænseværdibegrebet. Er det muligt at eleverne efter forløbet kan være i stand til at vise at grænseværdien for summen af to funktioner er summen af grænseværdierne ved et passende valg af δ for givet ε? Jeg vil teste om eleverne gennem forløbet kan blive i stand til at bevise entydighed af grænseværdier.

Jeg vil benytte den antropologiske teori om didaktik som analyseværktøj, for at undersøge elevernes kunnen før og efter undervisningsforløbet. Samt til at klarlægge hvilke teknikker og teknologier der skal undervises i.

Jeg vil undersøge hvilken matematik og logik der er nødvendig for at indføre grænseværdier stringent. Vha. ATD identificeres hvilke lokale matematiske organisationer jeg ønsker at eleverne skal beherske.

Jeg vil undersøge hvordan grænseværdier indføres i elevernes matematikbøger. ATD skal hjælpe mig til at klarlægge forskellen på de MO'er bøgerne lægger op til, og de MO'er jeg vil indføre eleverne i. Så jeg kan se hvad der skal lægges vægt på.

Specialet vil indeholde empiriske undersøgelser i en 3. g klasse. Jeg vil lave en skriftlig test af elevernes beherskelse af grænseværdibegrebet i starten af forløbet og igen ved afslutningen for at se om deres handlemønstre mht. grænseværdier ændrer sig som følge af undervisningen.

4 Matematikken og logikken

I dette kapitel vil jeg forholde mig til det første trin i den didaktiske transpositionsproces fra s. 10, den videnskabelige matematiske viden. Hvilken viden er det mit speciale handler om? Hvordan ser logikken og matematikken ud?

Som nævnt er mit ønske at eleverne skal få kendskab til den formelle definition af grænseværdibegrebet. Så jeg vil starte med at gennemgå matematikken og logikken bag grænseværdibegrebet for at konkretisere hvad de skal lære.

En stringent definition er nødvendig for at man kan bevise sætninger om grænseværdier, f.eks grænseværdien af en sum er summen og grænseværdierne. Jeg vender i kapitel 5 tilbage til hvilke sætninger for grænseværdier eleverne tidligere har lært, og hvordan de er blevet bevist.

4.1 Definition af grænseværdi

Til hjælp for definitionen indfører jeg først hvad det vil sige at være defineret i nærheden af.

Definition 4.1.1. En funktion f siges at være defineret i nærheden af a, hvis der findes et $c > 0$ så $f(x)$ er defineret for alle x i intervallet $]a-c; a+c[\setminus\{a\}$

På universitetsniveau ligner definitionen af grænseværdi ofte denne (se f.eks. Lindstrøm (1996, s. 198) eller Adams (1995, s. 85)) :

Definition 4.1.2. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$, $a, L \in \mathbb{R}$.

Antag at f er defineret i nærheden af a. $f(x)$ siges at have grænseværdien L for $x \to a$ netop hvis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

I denne definition gemmer sig en skjult eksistenskvantor, nemlig kvantoren der siger at der eksisterer et L. Jeg vil tage denne kvantor med, da en af mine pointer netop er at lade kvantorerne fremgå eksplicit, så eleverne bliver opmærksomme herpå. En anden skjult kvantor kvantificerer over alle x for hvilke $0 < |x-a| < \delta$. Jeg vil også lade denne kvantor fremgå eksplicit. Samtidig vil jeg præcisere at ε og δ tilhører $\mathbb{R}$. Så kommer definitionen til at fremstå således:

Definition 4.1.3. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
Antag at f er defineret i nærheden af a. Så gælder

$$\begin{array}{l} f(x) \to L \text{ for } x \to a \\ \Updownarrow \\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus \{a\} : |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$

Vi har brug for endnu tre definitioner for også at have tilfældene med hvor $f(x) \to \infty$, og hvor grænsen findes når $x \to \infty$.

Definition 4.1.4. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
Antag at f er defineret i nærheden af a. Så gælder

$$(f(x) \to \infty \text{ for } x \to a) \Leftrightarrow (\forall T \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus \{a\} : f(x) > T)$$

Definitonen for $f(x) \to -\infty$ for $x \to a$ er tilsvarende.

Definition 4.1.5. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$. Antag at der findes et tal r så f er defineret for alle $x \in]r; \infty[$. Så gælder

$$(f(x) \to L \text{ for } x \to \infty) \Leftrightarrow (\exists L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x > K : |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Definitionen for $f(x) \to L$ for $x \to -\infty$ er tilsvarende.

Definition 4.1.6. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$. Antag at der findes et tal r så f er defineret for alle $x \in]r; \infty[$. Så gælder

$$(f(x) \to \infty \text{ for } x \to \infty) \Leftrightarrow (\forall T \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x > K : f(x) > T)$$

Definitionerne for $f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$ er tilsvarende.

Set fra et elevsynspunkt er det uoverskueligt med hhv. tre kvantorer i træk når funktionen konvergerer mod $\pm\infty$, og fire kvantorer i træk når grænseværdien er endelig. Her gælder det om at holde tungen lige i munden.

Dette er nok for kompliceret til med held at være eleverens første møde med kvantorer, taget i betragtning at selv det at se forskellen på AE- og EA-udsagn ikke er trivielt, som vi så i Rohs forsøg med studerendes evaluering af argumenter (se på side 26).

Indførslen af kvantorerne giver anledning til at der skabes et nyt repræsentationsregister hos eleverne. Dette kan give anledning til utryghed eller forvirring. I følge Duval (2002) er repræsentationsskift forbundet med vanskeligheder. Så lad os se nærmere på definition 4.1.3 på forrige side, for at se om det er muligt at holde sig indenfor et kendt register. Oversættes symbolerne for kvantorerne (og implikationer) til almindeligt skriftsprog kommer definitionen til at lyde således:

Definition 4.1.7. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Antag at f er defineret i nærheden af a.

Hvis og kun hvis der eksisterer et $L \in \mathbb{R}$ så der for alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eksisterer et $\delta \in \mathbb{R}_+$ så der for alle $x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus \{x\}$ gælder at: $|f(x) - L| < \varepsilon$, så går $f(x) \to L$ for $x \to a$

Denne definition holder sig til sprogbrug som eleverne kender; men man undgår næppe helt at der alligevel skal et nyt register til, og at der skal ske repræsentationsskift mellem den formelle definition og den grafiske repræsentation, for en fortolkning af definitionen. Det kunne også være en fordel at beholde kvantorerne i symbolsk notation, idet det gør det nemmere for eleverne at se hvor der sker noget særligt, som de skal være opmærksom på.

Eksempel I dette afsnit vil jeg benytte definitionen til at påvise en grænseværdi. Jeg vil benytte definitionen til at påvise at

$$\frac{x^2-4}{x-2} \to 4 \text{ for } x \to 2$$

Vi ser nu for et vilkårligt δ på hvad der gælder for vilkårligt $x \in]2-\delta; 2+\delta[\setminus \{2\}$:

$$|f(x)-L| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{((x+2)(x-2)}{x-2} - 4\right| = |(x+2)-4| = |x-2| < \delta.$$

Så for et givent ε kan vi vælge $\delta = \varepsilon$ for så gælder:

$$\forall x \in]2-\delta; 2+\delta[\setminus \{2\} : |f(x) - L| < \delta = \varepsilon$$

Hvormed betingelsen fra definitionen er opfyldt.

Dette er en underopgavetype af T_{21} (Vis at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to a$, hvor a er et reelt tal) fra MO_2 på side 12; men da indholdet af opgaven også i høj grad fokuserer på brugen af ε-δ-definitionen af grænseværdi, vil jeg her vælge at karakterisere den som tilhørende en ny MO, MO_K som skal betegne en MO omhandlende grænseværdier ved brug af den kvantificerede definition. Hvad denne MO_K mere indeholder, vil jeg komme ind på senere . Opgavetypen kunne kaldes T_{K1}. Her lægges vægten på teknikken

τ_{K1} Først indsættes som om man kender δ, hvis det så giver en begrænsning på $|f(x) - L|$ giver dette andledning til et passende valg af δ for et givent ε.

Dette er en teknik til bestemmelse af δ for et givet ε; men den vil ikke altid virke. En af sværhederne som eleverne vil støde ind i ved den stringente definition er at definitionen ikke giver nogen hjælp til at finde grænseværdien. Definitionen kan kun bruges til at verificere den fundne grænseværdi.

En typisk opgave i analyseundervisningen efter introduktion af den formelle definition er f. eks. „Vis at $lim_{x\to 2}x^2 = 4$“ (Adams, 1995, s.85) eller opgaven fra eksemplet ovenfor. Disse opgaver tilhører følgende type:

T_{K1} For givet $f(x)$, a og L, er opgaven er nu for ethvert ε at bestemme et δ, så $\forall x \in]a - \delta; a + \delta[\setminus \{a\}$ gælder $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Opgaven stilles traditionelt i undervisningen som en opgave hvor det er muligt at finde δ som en funktion af ε, men generelt vil det ikke altid være muligt at skrive δ op som en pæn formel. Definitionen er ikke altid konstruktiv. Nogle gange kan det måske bevises at der eksisterer et sådan δ, evt. ved et modstridsbevis; men det er ikke altid muligt at bestemme δ. Opgavetypen er en undertype i af

T_{K2} Vis at en given funktion har en grænseværdi for $x \to a$.

Opgavetype T_{K1} kan varies i nummerisk repræsentation, idet der for et givet nummerisk ε skal findes et brugbart δ. Dette kan måske hjælpe elverne til at oversætte mellem de forskellige repræsentationer.

I opgaver af typen T_{K1} vil det ikke altid være muligt at give en konstruktiv bestemmelse af δ. Nogle gange vil det måske bare være muligt at vise at der kan findes et sådant. Men det er jo også nok til at vise eksistensen af grænseværdien.

Definitionen bliver også uomgængelig at forholde sig til når man skal afvise en grænseværdi. Opgavetypen kunne være:

T_{K3} Vis at L ikke er grænseværdi for for $x \to a$.

I praksis vil man dog nærmere afvise grænseværdier generelt, for at vise at funktionen divergerer. For at afvise at en funktion har en grænseværdi vha. definitionen er det nødvendigt først at negere definitionen, for at finde ud af hvad der skal være opfyldt for at vise at funktionen ikke. Negation af definitionen er en stor opgave i sig selv som vi vender tilbage til i afsnit 4.3 på side 36.

4.2 Et bevis med brug af definitionen

Med definitionen er det muligt at vise entydighed af grænseværdi, som retfærdiggør at vi taler om grænseværdi*en*.

Sætning 4.2.1. *Grænseværdi er entydig. Dvs. at hvis $f(x) \to L_1$ for $x \to a$ og $f(x) \to L_2$ for $x \to a$, så er $L_1 = L_2$, og vi kan skrive $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$.*

Bevis. Antag at $f(x) \to L_1$ for $x \to a$ og at $f(x) \to L_2$ for $x \to a$ hvor $L_2 \neq L_1$.

Vi kan uden videre antage at $L_2 > L_1$.

Lad $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$.

Definition 4.1.3 på side 32 giver nu:

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ så } \forall x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[\setminus \{a\} : |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

dvs. $\forall x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[\setminus \{a\}$ gælder

$$L_1 - \frac{L_2 - L_1}{2} < \ f(x) < L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2} = \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$$

Tilsvarende giver definitionen at $\forall x \in]a - \delta_2; a + \delta_2[\setminus \{a\}$ gælder

$$\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} = L_2 - \frac{L_2 - L_1}{2} < \ f(x) < L_2 + \frac{L_2 - L_1}{2}$$

Vælg $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Nu har vi $\forall x \in]a - \delta; a + \delta[\setminus \{a\}$ at

$$f(x) < \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} < f(x)$$

hvilket er en modstrid. Hvormed er bevist at der ikke kan kan være to forskellige grænseværdier. □

Dette bevis kræver brug af definitionen, og dermed en del arbejde med kvantorer, også implikationer er involveret.

Her bliver blandt andet brugt en teknik τ_{K2} som lader os kombinere δ'er ved at vælge det mindste. De to intervaller $x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[$ og $]a - \delta_2; a + \delta_2[$, overlapper netop med $]a - \delta; a + \delta[\setminus \{a\}$ hvor $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Så hvis noget er opfyldet i det første interval, og noget andet i det andet, er begge dele opfyldt i det fælles interval.

Der er brug for en teknik τ_{K3} som generelt kan bruges til at afvise en foreslået grænseværdi, hvis man kender den rigtige; man lader ε være givet til halvdelen af forskellen mellem den rigtige og den foreslåede grænseværdi.

Antager man at begge grænseværdier er rigtige giver definitionen giver nu et brugbart δ for hver af grænseværdierne. Men så fås vha τ_{K2} en modstrid.

For at se at det er nok at der eksisterer et ε som fører til modstrid, skal vi se på hvordan definitionen negeres. Se udsagn 4.2. Vi kan se bort fra leddet der kvantificerer over L da de ønskede L'er fremgår eksplicit af opgaven.

Kan jeg ved slutningen af forløbet få eleverne til at bevise grænseværdiers entydighed, vil det vise at de behersker både den relevante logik og definitionen.

4.3 Negering af kvantificerede udsagn.

Dette bliver en opgave af typen negering af kvantificerede udsagn som vi stiftede bekendtskab med på side 27. Til negering af kvantificerede udsagn kan følgende teknik benyttes:

τ_{K4} Ændr kvantoren fra $\forall$ til $\exists$ og omvendt, og neger derefter resten af udsagnet.

Denne teknik benyttes nu til at negere definition 4.1.4 på side 32. Vi får så at $f(x)$ ikke har en endelig grænseværdi for $x \to a$ når:

$$\neg\left(\exists L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : |f(x) - L| < \varepsilon\right) \tag{4.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \neg(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \neg(\exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : |f(x) - L| < \varepsilon) \tag{4.2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall \delta \in \mathbb{R}_+\ \neg(\forall x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall \delta \in \mathbb{R}_+\ \exists x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : \neg(|f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall \delta \in \mathbb{R}_+\ \exists x \in]a-\delta; a+\delta[\ \setminus \{a\} : |f(x) - L| \geq \varepsilon \tag{4.3}$$

For at vise at en funktion ikke har en grænseværdi skal eleverne altså først negere definitionen, som ovenfor, for derefter at vise at denne negerede definition (4.3) er opfyldt. De skal altså både beherske en teknik til negering af kvantificerede udsagn, og være i stand til at identificere et uopnåeligt ε, samt vise hvilket x man kan vælge for givent δ. De bør samtidigt sikre sig at $f(x)$ ikke går mod $\pm\infty$.

Eksempel. Lad $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Vi vil nu vise at $f(x)$ ikke har en grænseværdi for $x \to 0$.

Uanset værdien af δ findes

$$x_1 < \delta \text{ så } \sin\frac{1}{x_1} = 1 \qquad \text{samt} \qquad x_2 < \delta \text{ så } \sin\frac{1}{x_2} = -1$$

da det er muligt at vælge $n \in \mathbb{N}$ så $n \cdot 2\pi > \frac{1}{\delta}$, lad nemlig

$$x_1 = \frac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{1}{2}\pi} \qquad \text{og} \qquad x_2 = \frac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi}.$$

Lad nu $\varepsilon < 1$.

For $L < 0$ har vi nu $x_1 < \delta$ så $|f(x_1) - L| = |1 - L| \geq 1 > \varepsilon$

Tilsvarende for $L > 0$ har vi nu $x_2 < \delta$ så $|f(x_2) - L| = |-1-L| \geq 1 > \varepsilon$. Dvs at (4.3) er opfyldt, og dermed at $f(x)$ ikke har en grænseværdi for x gående mod 0.

Her bør også nævnes at $f(x)$ ikke går mod hverken ∞ eller $-\infty$; men det er klart da der for ethvert valg af δ findes $x_1 \in]-\delta;\delta[\setminus\{0\}$ så $f(x_1)$ er 1 og dermed ikke større (mindre for $-\infty$) end et vilkårligt T.

Det ses at det er fordelagtigt med et godt kendskab til de indgående funktioner, for at spotte hvor problemerne opstår så funktionen ikke har en grænseværdi, og se hvilket ε der kan benyttes og hvordan x så skal vælges.

Opgaver af denne type vil jeg kalde T_{K4}, men den er også T_{21}. Der er flere mulige teknikker til at løse opgaver af denne type; ovenfor er benyttet teknikken

τ_{K5} : Find to følger x_n og x'_n som begge går mod a for $n \to \infty$; men hvor $f(x_n)$ og $f(x'_n)$ konvergerer mod hver sin værdi for $n \to \infty$.

Vi har nu følgende opgavetyper inden for MO_K

T_{K1} For givet $f(x)$, a og L er opgaven at vise at der givet ε, findes et δ, så $\forall x \in]a-\delta;a+\delta[\setminus\{a\}$ gælder $|f(x) - L| < \varepsilon$

T_{K2} Vis at en given funktion har en grænseværdi for $x \to a$

T_{K3} Modbevis at et oplyst L er grænseværdi til $f(x)$ for $x \to a$

T_{K4} Modbevis at en given funktion har en grænseværdi for $x \to a$

T_{K5} Undersøg om en given funktion har en grænseværdi for $x \to a$

Men definitionen er også meget velegnet til at løse T_{23} som var en opgavetype i MO_2 der handlede om at begrunde teknikker, og dermed var en teknologi i MO_1 (se på side 12). Opgavetypen kan så i denne sammenhæng kaldes T_{K6}. Det ses at alle de nævnte opgavertyper stemmer overens med opgavetyperne i MO_2. Betyder det så at der selv i MO_K med den formelle defintion mangler sammenhængen mellem de to MO'er? Nej, for her ender det netop med at der også bliver lagt vægt på den praktiske del af MO_2, som traditionelt ikke er elevens opgave. Der bliver også brug for teknikkerne fra MO_1 for at bestemme grænseværdien, før man kan vise at den er rigtig. Så indenfor MO_K som er en udviddelse af MO_2 bliver der skabt en praksisblok som var fraværende i MO_2. Her bliver MO'erne i højere grad sammenhængende, i stedet for at være „halve" løsrevne MO'er.

Den beskrevne MO_K ligger meget tæt op af MO_2 og kan endda hævdes at være sammenfaldende med MO_2; men i MO_K bliver der netop lagt vægt på den praktiske side af MO_2. Så der skulle være mulighed for at skabe en mere fuldstændig MO.

4.4 Flere beviser med brug af definitionen.

Definitionen bruges traditionelt til at vise regneregler omkring grænseværdier, så man senere kan gå væk fra striks brug af ε og δ. Dette er den opgavetype som vi tidligere har kategoriseret som T_{K6} eller T_{23}.

Sætning 4.4.1. *Lad f og g være to funktioner, begge defineret i nærheden af a. Antag at $\lim_{x\to a} f(x) = F$ og $\lim_{x\to a} g(x) = G$. Da er*

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = F + G \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = F - G \tag{4.5}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = F \cdot G \tag{4.6}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G},\ \textit{forudsat } G \neq 0 \tag{4.7}$$

Bevis for (4.4). Trekantsuligheden giver

$$|f(x) + g(x) - (F + G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| \tag{4.8}$$

Lad ε være givet. Vi kan vælge

$$\delta_1 \text{ så } \forall x \in]x - \delta_1; x + \delta_1[\setminus \{a\} : |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vi kan vælge

$$\delta_2 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_2; x+\delta_2[\,\setminus\{a\} : |g(x)-G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lad $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vi har så at

$$\forall x \in]x-\delta_0; x+\delta_0[\,\setminus\{a\} : (4.8) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hvorved $F+G$ ses at være grænseværdi for den adderede funktion. □

Dette bevis gør brug af trekantsuligheden, som ikke indgår i gymnasieelevers sædvanlige værktøjskasse. Ellers bygger beviset på en idé om at det også er muligt at finde δ der virker for $\frac{\varepsilon}{2}$, og at man så kan dele udtrykket op, så man begrænser hvert led til en del af ε for så til sidst at få at summen af ledene er mindre eller lig med ε ved et passende valg af δ. Her bruges τ_{K2} som siger at vi skal vælge det mindste af δ'erne. Men der skal også bruges en teknik τ_{K6} til valg af hvilken brøkdel af ε man oprindeligt skal interessere sig for. I beviset for (4.4) ender man med at de to brøkdele bare lægges sammen, så man havde ikke nødvendigvis behøvet at de to dele skulle være $\frac{\varepsilon}{2}$, bare de sammenlagt var mindre end ε.

Bevis for (4.5). Beviset forløber som beviset for (4.4). □

Beviset for (4.6) er noget mere kompliceret, og det er mindre oplagt hvordan man skal vælge δ

Bevis for (4.6). Vi kan vælge

$$\delta_1 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\,\setminus\{a\} : |f(x)-F| < 1.$$

Den omvendte trekantsulighed giver

$$|f(x)| - |F| \leq ||f(x)| - |F|| \leq |f(x) - F|$$

så

$$\forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\,\setminus\{a\} : |f(x)| < |F| + 1. \tag{4.9}$$

Vi har så $\forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\,\setminus\{a\}$:

$$\begin{aligned}
|f(x)\cdot g(x) - F\cdot G| &= |(f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot G) + (f(x)\cdot G - F\cdot G)| \\
&\leq |f(x)||g(x)-G| + |G||f(x)-F| \\
&\leq (|F|+1)|g(x)-G| + |G||f(x)-F| \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Hvor det sidste ulighedstegn følger af (4.9).

Lad ε være givet. Vi kan vælge

$$\delta_2 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_2; x+\delta_2[\setminus\{a\} : |f(x)-F| < \frac{\varepsilon}{2|G|}$$

samt

$$\delta_3 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_3; x+\delta_3[\setminus\{a\} : |g(x)-G| < \frac{\varepsilon}{2(|F|+1)}$$

Lad $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Vi har så at

$$\forall x \in]x-\delta_0; x+\delta_0[\setminus\{a\} : (4.10) < (|F|+1)\frac{\varepsilon}{2(|F|+1)} + |G|\frac{\varepsilon}{2|G|} = \varepsilon$$

□

Dette bevis giver større udfordring til eleverne. Nu er det ikke længere så nemt at udvælge δ der virker. Der er mange ting der skal være opfyldt på en gang. Samtidig benyttes den omvendte trekantsulighed, som slet ikke er en del af gymnasieelevers tilgængelige teknikker,

Bevis for (4.7). Det er nok at vise at $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{G}$ for derefter giver (4.6) resten. Lad ε være givet. Vi kan vælge

$$\delta_1 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\setminus\{a\} : |g(x)-G| < \frac{|G|}{2},$$

så gælder

$$\forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\setminus\{a\} : |g(x)| > \frac{|G|}{2},$$

og vi har så

$$\forall x \in]x-\delta_1; x+\delta_1[\setminus\{a\} : |G\cdot g(x)| \geq |G||g(x)| > |G|\frac{|G|}{2} = \frac{G^2}{2}.$$

Vi kan vælge

$$\delta_2 \text{ så } \forall x \in]x-\delta_2; x+\delta_2[\setminus x : |g(x)-G| < \frac{\varepsilon\cdot G^2}{2}.$$

Lad $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vi har så at

$$\forall x \in]x-\delta_0; x+\delta_0[\setminus\{a\} : \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| = \left|\frac{G-g(x)}{G\cdot g(x)}\right| < \frac{\frac{\varepsilon\cdot G^2}{2}}{\frac{G^2}{2}} = \varepsilon.$$

Hvorved $\frac{1}{G}$ ses at være grænseværdi for $\frac{1}{g(x)}$. Den øverste kommentar giver så at $\frac{F}{G}$ er grænseværdi for den dividerede funktion. □

Jeg ønskede at eleverne skulle blive i stand til at bruge ε-δ-definitionen til et bevis af en sætning af denne type. Hertil er det nødvendigt at opnå en teknik til at vælge δ. Teknikken i de to sidste tilfælde er ikke enkel, så det forekommer mig ikke muligt at eleverne skulle beherske denne teknik i løbet af den begrænsede tid til rådighed. Så jeg vil holde mig til at lade dem arbejde med beviset for addition af grænseværdier.

5 Elevernes forudsætninger

5.1 Præsentation af klassen

16 elever i 3.y på Nørresundby Gymnasium har studieretning med matematik og fysik. Eleverne har haft skiftende lærere, deres nuværende lærer fortæller at eleverne ikke mener at de har set beviser før i 3.g. Deres nuværende lærer har derfor brugt meget tid på beviser og på at opfylde huller i deres viden. Klassen benyttede i 2.g, hvor differentialkvotienter indføres, bogen „Gyldendals Gymnasiematematik B2“ (Clausen et al., 2006). Jeg vil dog formode at eleverne har set enkelte beviser også i 1. og 2. g. da der i denne bog indgår beviser i den løbende tekst, om end ikke i så stort omfang da bogen er beregnet til brug på både A- og B- niveau. Men de har nok ikke beskæftiget sig med det kapitel der hedder: „Matematikkens deduktive væsen“ og drejer sig om beviser. Pga. de skiftende lærere, er der sandsynligvis lavet meget tekstnær undervisning, så der ikke er blevet sprunget rundt i bogen.

I 3. g gik de over til et andet bogsystem med bogen „Vejen til matematik 2“, (Nielsen og Fogh, 2007). Da dette er en bog udelukkende til A-niveau gøres her meget mere ud af beviser og argumentation.

Jeg vil i dette kapitel se nærmere på hvordan grænseværdier indføres i disse to bøger. Hvilke MO'er lægger de op til at der skabes hos eleverne? Er der de samme problemer som Barbé et al. (2005) identificerer i Spanien?

5.2 Lærebøgernes tilgang

Dette afsnit vil beskæftige sig med det andet trin i den didaktiske transpositionsproces (fra afsnit 2.1 på side 10). Altså hvordan er den matematiske viden i matematikbøgerne designet til at blive undervist?

Grænseværdier

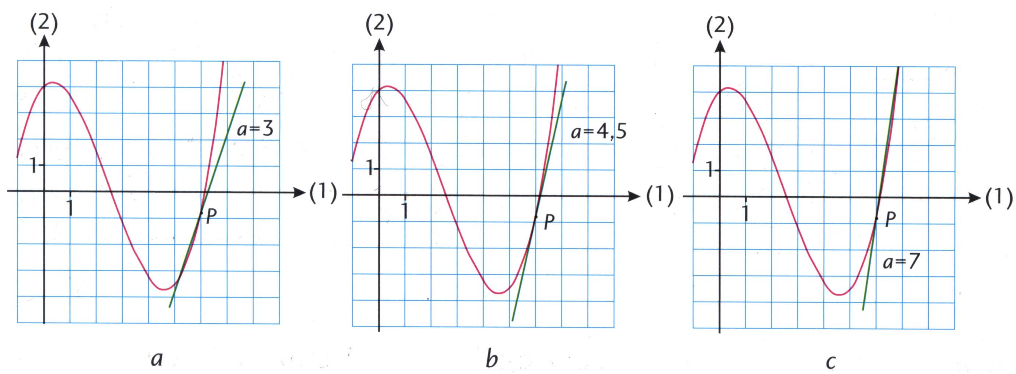
Gyldendals Gymnasiematematik B2 starter med (Clausen et al., 2006, kapitel 1.1) at ville finde stejlheden af en kurve, for at finde en cyklists hastighed. Dette giver anledning til introduktion af begreberne sekanthældning, differenskvotienter og tangenthældninger, som igen giver anledning til opgavetypen:

T_1 Bestem stejlheden/hældningkoefficienten af en kurve.

Dette kunne imødekomme et af kritikpunkterne hos Barbé et al. (2005), nemlig at der ikke gives nogen praktisk grund til at beskæftige sig med grænseværdier. Eleverne har, for at gennemgå den didaktiske proces beskrevet på side 9, brug for et første møde der kan give anledning til et udforskende moment som giver eleverne grund til at beskæftige sig med grænseværdier. Men bogen udnytter ikke dette potentiale. Der lægges slet ikke vægt på grænseværdier i fremstillingen af differentation.

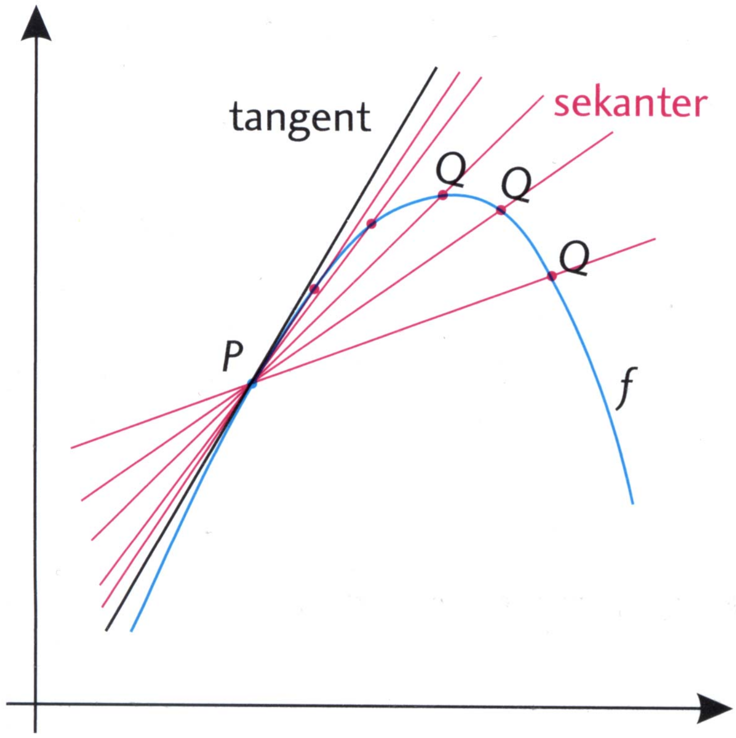
På den anden side ser Bloch og Schneider (2004) det som et problem at grænseværdibegrebet kun behøves til funktionsanalyser, som ikke umiddelbart er opsået ud af en eksperimentiel fase. Men i bogen her lægges ud med at ville bestemme tangenthældninger ud fra et ønske om hastighedsbestemmelse i et konkret tilfælde. Første eksempel er givet ved tabelværdier.

En første teknik τ_1 til at finde hældningen er at beregne gennemsnitshældningen mellem to nærliggende punkter. Denne benyttes både ved opgaven ovenfor hvor gennemsnitshastigheden blev bestemt ud fra tabelværdierne, og i en anden opgave (på side 10-13): bestem stejlheden på kurven som er graf for $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 4$ i punktet P med førstekoordinat 6. Første teknik er at tegne nogle linier på øjemål som ser ud til at have



Figur 5.1: Tilnærmede tangenter

samme hældning som grafen. Denne teknik benyttes for at give eleverne en idé om hvad resultatet må blive. En næste teknik er τ_1 fra opgaven før: der beregnes sekanthældningen mellem punkterne P og Q på grafen idet der indsættes kordinater for Q med x-værdier stadigt tættere på 6. De skriver



Figur 5.2: Sekanthældninger

at man altid kan komme tættere på, men at man ikke bare kan sætte x til at være 6 i formlen

$$a_{PQ} = \frac{f(x) - f(6)}{x - 6},$$

fordi det vil give 0 i nævneren.

Sekanthældningen omskrives vha. CAS. Derefter lyder teksten:

> Det smarte er nu, at denne omskrivning gør det muligt at regne ud hvad sekanthældningen går mod, når x går mod 6:
>
> $$\frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \frac{2x^2 - 3x - 8}{10} \to \frac{2 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 - 8}{10} = \frac{23}{5} = 4,6 \text{ når } x \to 6.$$
>
> Pilene $\to$ læses „går mod“ eller „nærmer sig“

Resultatet stemmer fint overens med hældningen fundet ved øjemål, så der konkluderes at processen med at indsætte x-værdier der kommer tættere og tættere på 6, giver resultater der kommer tættere og tættere på 4,6. Herefter indføres begrebet differentation, som den proces der giver resultatet for kurvens stejlhed.

Den benyttede teknik τ_2 gives som følgendende opskrift på hvordan man finder differentialkvotienten:

1. opskriv sekanthældningen

2. omskriv brøken

3. indsæt $x = x_0$ eller $h = 0$ (afhængigt af hvilken fremstilling af sekanthældningen der er valg)

Dette er en eksplicit teknologi θ_1, til beregning af differentialkvotient, men der gives ingen teoretisk forklaring på hvorfor man kan gøre således. Eneste begrundelse er at det i et konkret tilfælde ser ud til at passe i forhold til hældningen for en håndtegnet tangent.

I dette eksemplet bruges symbolet $\rightarrow$ for at gøre opmærksom på at der ikke gælder lighedstegn. Men det er den eneste gang i kapitlet at grænseovergang benyttes. Sidenhen udregnes differentialkvotienten vha. opskriften. Der hvor grænseovergangen sker skrives „Efter den sidste omskrivning kan vi ved at indsætte x_0 på x's plads finde differentialkvotienten“. Det sker bl.a. i beviset for at differentialkvotienten for x^2 er $2x$. Der følger en række tilsvarende sætninger, alle med beviser af typen „benyt opskriften“.

Beviser af denne type som „bare“ består af at beregne ud fra en given opskrift, kan af eleverne forståeligt nok opfattes som et eksempel snarere end et bevis, og det kan måske forklare hvorfor eleverne ikke mener at have set beviser før i 3. g.

Der opstilles herefter regneregler for differentialkvotienter (postuleret), som benyttes til at vise (beregne) differentialkvotienten for udvalgte funktioner, dette er analogt til teknologierne $\theta_{11} - \theta_{15}$ fra MO_1 (se på side 11) som inden for deres MO ikke har nogen teori til at understøtte sig. Her befinder vi os bare indenfor differentialregningen i stedet for grænseværdiberegningen.

På titelbladet til kapitel 1 om differentialregning står at det i hele kapitlet er underforstået at der tales om differentiable funktioner. Det handler om at bestemme differentialkvotienten, ikke at vise at den eksisterer.

Så vi står altså også her med en ufuldstængig MO, hvor teoridelen mangler, vi kunne kalde den MO_1' differentialkvotienters algebra, analogt til MO_1

grænseværdiers algebra, også her er målet at lære eleverne at *beregne* differentialkvotienten; men hvorvidt den eksisterer (MO_2' differentialkvotienters topologi) beskæftiger kapitlet sig ikke med.

I kapitel 6 „Matematikkens deduktive væsen“ forsøges der rådet en smule bod på ufuldstændigheden. I hvert fald gøres opmærksom på at det ikke altid er så lige til som det umiddelbart fremstod i kapitel 1.

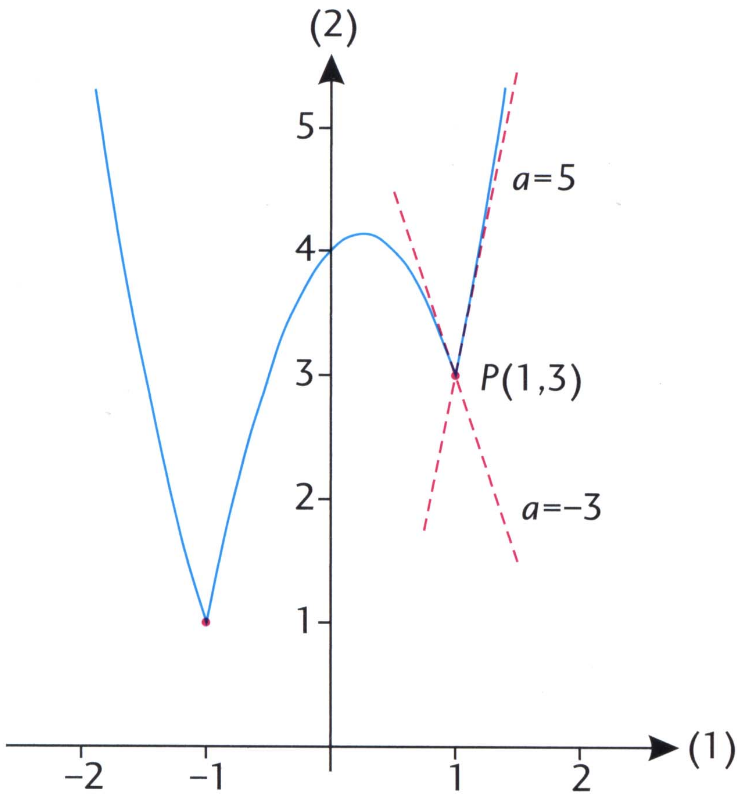
Kapitlet har følgende definition af differentiabilitet (Clausen et al., 2006, s. 191):

> **Definition 5.2.1.** At en funktion $f(x)$ er *differentiabel* i x_0, betyder at sekanthældningen
>
> $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
>
> går mod et bestemt tal, når x går mod x_0.
>
> I så fald kaldes tallet for *differentialkvotienten* af $f(x)$ i x_0, og det betegnes $f'(x_0)$

Derefter vises regnereglerne for differentialkvotienter, men analogt med grænseværdibegrebet i spanske gymnasier lægges der ikke vægt på eksistensen. Så hvordan afgøres det så om en funktion er differentiabel? Der gives eksempler på ikke-differentiable funktioner, hvor sekanthældningen bliver forskellig afhængigt af om man er til højre eller venstre for x_0.

Eksempel fra bogen Eksemplet (Clausen et al., 2006, s. 197-198) fra bogen lyder:

> Figur 5.3 på den følgende side viser grafen for $f(x) = 2 + x + \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 4}$. Funktionen er defineret for alle x.
>
> Vi ser nærmere på punktet $P(1,3)$ på grafen. [...]
>
> Når vi udregner hældningen $a_{PQ} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ for en sekant gennem $P(1,3)$ og et punkt $Q(1+h, f(1+h))$, viser det sig, at der fremkommer *forskellige* resultater, alt efter om punktet Q ligger til venstre eller til højre for P :
>
> *Højre*: Når udtrykket for sekanthældningen a_{PQ} reduceres for h positiv, og vi derefter indsætter 0 på h's plads, får vi resultatet 5. Dette kunne friste til at konkludere at $f'(1) = 5$.
>
> *Venstre*: Når udtrykket for sekanthældningen a_{PQ} reduceres for h negativ, og vi derefter indsætter 0 på h's plads, får vi resultatet -3. Dette kunne friste til at konkludere at $f'(1) = -3$.



Figur 5.3: Grafen for $f(x) = 2 + x + \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 4}$

> Det er klart, at der ikke både kan gælde, at $f'(1) = 5$ og $f'(1) = -3$. Det betyder at der ikke findes en tangent til grafen for $f(x)$ i punktet $P(1,3)$. Hvis en ret linie skulle røre P og „tilpasse sig“ til grafen, skulle den nemlig have hældningen $\alpha = 5$ til højre for P, mens hældningen skulle være $\alpha = -3$ til venstre for P. Man siger derfor, at funktionen $f(x)$ ikke er differentiabel for $x = 1$. Vi har illustreret situationen på figur 5.3 ved hjælp af de to punkterede rette linjer gennem $P(1,3)$ med hældning -3 og 5.

Der afsluttes med at grafen heller ikke er differentiabel for $x = -1$; men at den er diffrentiabel for alle andre x. Spidserne på grafen nævnes og at differentiabilitet hænger sammen med at grafen er glat.

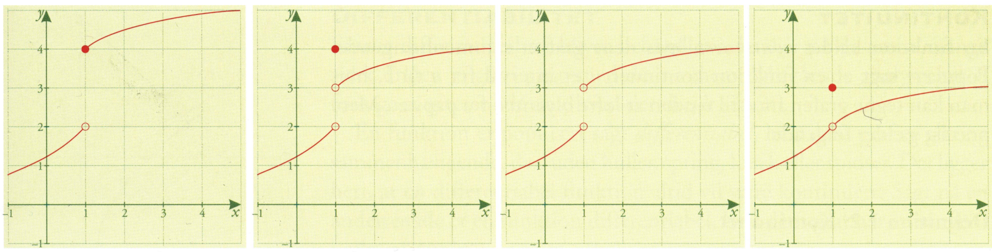
Bogen beskæftiger sig stort set ikke med grænseværdibegrebet. Grænseværdier benyttes idet sekanthældningen omskrives vha. CAS så man kan indsætte x-værdien, og der står så at omskrivningen gør det muligt at regne ud hvad sekanthældningen går mod når x går mod 6. Dette opskrives med

„→“ men grænseværdibegrebet er ikke nævnt. Sprogbrugen er „går mod“; men den benyttes tilsyneladende ikke igen efter den første introduktion. Ovennævnte eksempel på en ikke differentiabel funktion kan dog samtidig tolkes som eksempel på hvornår grænseværdien ikke eksisterer.

Der afsluttes med en smule om kontinuitet og sammenhængen mellem differentiabilitet og kontinuitet.

Vejen til matematik A2 (Nielsen og Fogh, 2007) er den bog som eleverne i 3. y er blevet undervist efter i 3. g. Den er anden del af en serie på to bøger til tre gymnasieår. Den indeholder de emner som er forskellige fra B til A niveau. Kapitel 2 i denne bog hedder „Differentialregning“, og er første gang eleverne støder på differentialregning hvis de bruger dette bogsystem gennem hele deres gymnasietid. For eleverne i 3. y har dette kapitel fungeret som en slags repetition, hvor der samtidig er tilføjet nye detaljer. Læreren har benyttet kapitlet som en anden, mere bevisorienteret, tilgang til emnet. Dette for at give eleverne noget erfaring med beviser samtidig med repetition af emnet.

Kapitlet starter med en introduktion af grænseværdibegrebet. Det introduceres således (Nielsen og Fogh, 2007, s. 60): „Vi kan få $f(x)$ så tæt på [...], det skal være, ved at vælge x til strækkeligt tæt på [...].“ I bogen benyttes konkrete funktioner og konkrete x-værdier. Det første eksempel er en hyperbel som i et tidligere kapitel er blevet introduceret sammen med begrebet asymptote. Herefter nævnes både endelige og uendelige grænseværdier og tilfældene hvor x går mod et tal og mod uendeligt, ensidige grænser nævnes også. Alle eksemplerne drejer sig om konkrete funktioner



Grænseværdi fra højre er 4 og grænseværdi fra venstre er 2 — *Grænseværdi fra højre er 3 og grænseværdi fra venstre er 2* — *Grænseværdi fra højre er 3 og grænseværdi fra venstre er 2* — *Grænseværdi fra højre er 2 og grænseværdi fra venstre er 2*

Figur 5.4: Grænseværdier og funktionsværdier

hvor både funktionsforskriften og grafen er givet. Dette følges op af opgaven: Undersøg ved hjælp af grafregneren, om funktionen $f(x) = \frac{\ln x+1}{x}$ har en grænseværdi for x gående mod 0. Denne opgave er en undertype af T_{21}

(fra side 12: Vis om $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to a$.; men ligger nok i teknik tættere på T_{11} (fra side 11) Beregn grænseværdien for en funktion $f(x)$ når $x \to a$, da der endnu ikke er givet nogen form for teknik til at løse T_{21}.

Herefter introduceres kontinuitet. Der gives en intuitiv forklaring af begrebet, nemlig at man kan tegne grafen uden at løfte blyanten, samt en definition:

> **Definition 5.2.2.** En funktion f siges at være *kontinuert* (sammenhængende) i et punkt x_0, hvis den har en grænseværdi for x gående mod x_0, og denne grænseværdi er samme tal som funktionesværdien $f(x_0)$:
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
>
> En funktion siges at være *kontinuert i et interval*, hvis den er kontinuert i ethvert punkt i intervallet.

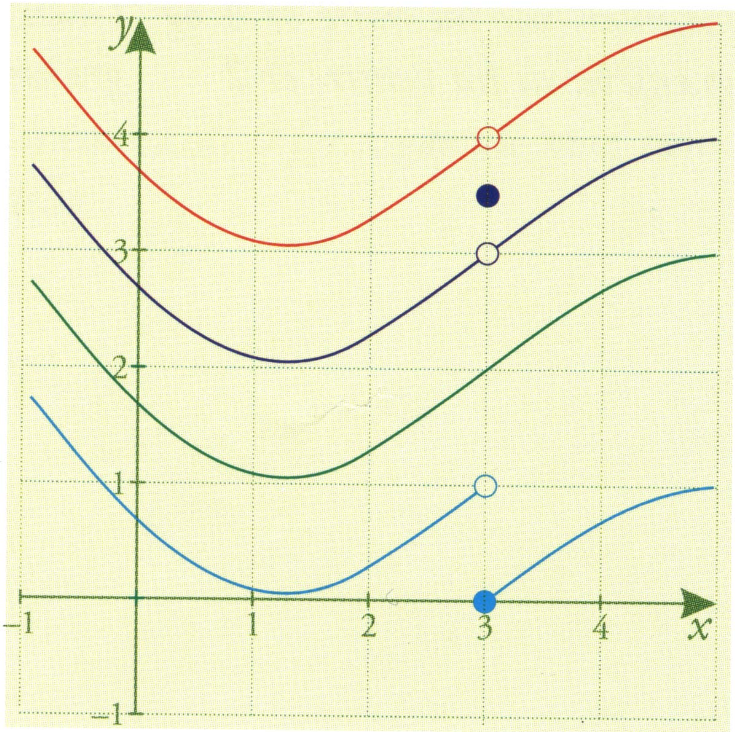
Herefter gives igen en opgave hvor der er givet fire grafer, se figur 5.5 på modstående side. Opgaven går ud på at aflæse grænseværdien fra højre og venstre i $x = 3$, aflæse funktionsværdien og afgøre om funktionerne er kontinuerte. Denne opgave er af typen T_{14} (fra side 11).

Herefter følger en indledning til differentiabilitetsbegrebet. En funktion er differentiabel hvis dens graf er glat og sammenhængende, altså uden huller, spring, knæk og spidser. En funktion er differentiabel hvis den har en tangent i ethvert punkt. Tangenter er kendt fra cirkler og er kendetegnet ved at den rører cirklen i et punkt og derefter følger cirkelbuen tæt i et område omkring punktet.

Endnu en opgave følger: I et koordinatsystem er givet tre grafer og to halvtangenter til hver graf (se figur 5.6 på side 52). Opgaven går ud på at aflæse tangenthældningerne og afgøre om funktionerne er differentiable. Denne opgave er af typen T_1 fra side 44 samt en ny

T_2 Afgør om funktionen er differentiabel.

Den kan løses ved en teknik τ_3 hvor man først finder tangenthældningen fra højre og venstre (brug teknik til løsning af T_1), derefter undersøger kontinuiteten (brug teknik til løsning af T_{14}). Nu er funktionen differentiabel hvis tangenthældningerne fra højre og venstre er ens og funktionen er kontinuert i punktet.



Figur 5.5: Grafer til kontinuitetsundersøgelse.

Herefter fortsættes til tangentbestemmelse. Et eksempel med udregning af sekanthældning for et fast tal. Grænseværdien for sekanthældningen findes (argumentet lyder at man ved at vælge Δx tilstrækkeligt lille kommer funktionsværdien „så tæt på som man måtte ønske“) og dermed kendes tangenthældningen.

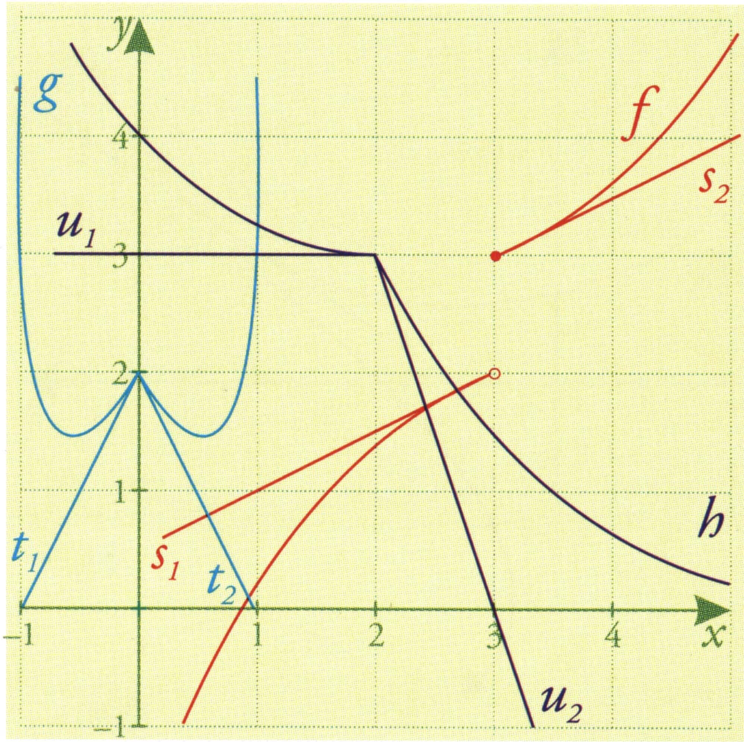
Endnu en opgave: bestem hældningen for tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet med $x = 3$. Denne opgave er igen af typen T_1.

Et par eksempler og endnu to opgaver følger, hvorefter differentiabilitet defineres som at differenskvotienten har en grænseværdi for Δx gående mod nul. Differentialkvotienten defineres som denne grænseværdi. Herefter introduceres tretrinsreglen som kan bruges til at bestemme en differentialkvotient eller en regneregel:

1. Bestem differenskvotienten $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0]}{\Delta x}$

2. Reducér udtrykket

3. Bestem, hvis det er muligt, grænseværdien for $\Delta x \to x_0$



Figur 5.6: Halvtangenter

Tretrinsreglen giver en teknik τ_2 fra side 46 udtrykt ved et eksplicit stykke teknologi θ_1 fra samme sted. Herefter bevises en række regneregler for differentialkvotienter. Så her bevæger vi os til en vis grad ind i MO_2' differentialkvotenters topologi (introduceret på side 47). Det kunne være fordi MO_1 grænseværdiers algebra er tilstrækkeligt til at bevæge sig ind i MO_2' uden at beherske teknikkerne i MO_2? Men som det ses af tretrinsreglen, skal man til sidst bestemme grænseværdien hvis det er muligt. Så her er man alligevel nødt til at kende til MO_2 for at kunne udtale sig om eksistensen af differentialkvotienten.

Alle de til nu nævnte opgaver fremstår som en del af teksten og kan ses som en række ekstra eksempler (jeg forestiller mig at de fleste lærere netop benytter disse som ekstra eksempler, måske regnes de fælles ved tavlen). Men der er også en større mængde opgaver i slutningen af kapitlet(Nielsen og Fogh, 2007, s. 112). Det er her eleverne opnår rutine med opgavetyperne.

- grænseværdibestemmelse for $x \to \infty$. (T_{12})
- Sekanthældning for given funktion gennem givne punkter. (T_1 med

brug af τ_1)

- Sekanthældning med udgangspunkt i en x værdi, opstil udtryk for $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lad Δx gå mod 0 for at bestemme f'. (T_1 med brug af τ_1 og teknik til T_{11})
- Benyt tretrinsreglen. (T_1 med brug af τ_2)
- Benyt regnereglerne for differentation til at udregne $f'(x)$.

Her vil det nok ende som i undersøgelserne af Barbé et al. (2005), at det teoretiske niveau bliver undertrykt og nærmest ikke eksisterende hos eleverne. Der er godt nok lagt en smule vægt på teknologien; men selve teorien bag kommes der ikke nærmere ind på. Regnereglerne for differentation vises godt nok i bogen; men det bliver sandsynligvis lærergennemgang der kun leder til at eleverne har et opslagsværk.

Sammendrag

I de danske matematikbøger er MO'erne en smule anderledes end dem Barbé et al. (2005) har observeret i Spanien. Der lægges ikke så meget vægt på grænseværdien i opgaverne. Men der kan også her observeres en opsplitning mellem MO_1' algebra, som mangler teoriblok og MO_2' som mangler praksisblok. Her er det bare mht differentialkvotienter istedet for grænseværdier.

Logik

Begge bøger har en halv side om implikationer, i kapitler om bevisteknikker. Hher gennemgås også forskellige bevisformer. Der er i bøgerne ikke nogle opgaver decideret knyttet til logik, men begge har et kapitel om beviser, hvor der også skrives lidt om implikationer. I „Vejen til matematik“ er der en sandhedstabel for implikationen; men den benyttes ikke.

Det lader ikke til at logik er noget der lægges vægt på, selvom slutningsformer og bevistyper får en del opmærksomhed. Kvantorer indgår ikke i bøgerne. Så der er rig mulighed for at lave noget nyt materiale som eleverne ikke har set før.

6 Design af undervisningsforløb

I dette afsnit kigger vi atter på andet trin i den didaktiske transpositionsproces (fra side 10). Denne gang handler det om hvilken viden jeg tiltænker at eleverne skal tilegne sig, og hvordan jeg vil opnå det.

6.1 Tidsrammen

Jeg har fået lov til at låne eleverne i 3. y på Nørresundby Gymnasium i den sidste uge af oktober for at teste mit forløb på dem. Det betyder at jeg har 4 timer á 70 min til rådighed.

6.2 Tanker bag tilrettelæggelsen

Jeg har lånt klassen på betingelse af at jeg står for undervisningen, hvilket på den ene side giver mig et værdifuldt indblik i lærerrollen; men på den anden side vanskeliggør observation af undervisningsforløbet. Denne vanskelighed vil jeg imødegå ved først og fremmest at lade min evaluering af forløbet tage udgangspunkt i test af elevernes standpunkt før og efter forløbet. Derudover vil jeg lave lydoptagelser af både gruppearbejde og fælles klassesituationer. Lydoptagelser i matematik har den ulempe at der ofte tales om noget på papiret; men selv med videooptagelser ville det være svært at få fokus på de rette steder på papiret. Så jeg mener ikke at videoptaglser (af den kvalitet som ville være indenfor min rækkevidde) ville være til større gavn end lydoptagelser.

Test af elevernes kunnen før forløbet

Jeg vil starte med en prætest af elverne, der skal give mig et sammenligningsgrundlag til efter forløbet, for at kunne observere elevernes udvikling.

Som vi så i afsnit 2.3 har studerende ofte har vanskeligheder med beviser for sætninger der kræver brug af kvantorer. Derfor vil jeg undersøge elevernes umiddelbare opfattelse af kvantorer i starten af forløbet. Det er interessant at se om de også har problemer med forveksling af AE- og EA-udtryk. Jeg vil også se på negation af et udtryk af formen „for alle ... gælder ...“.

Eleverne har allerede været igennem undervisningen i grænseværdier på den sædvanlige vis (se kapitel 5). Derfor vil jeg også undersøge elevernes forhold til grænseværdier. Dette er interessant blandt andet set i lyset af at Moru har påvist mange „forkerte“ teknikker hos førsteårsuniversitetsstuderende, som vi så i afsnit 2.2. De universitetsstuderende havde forkerte teknikker forbundet med forskellige repræsentaioner. Jeg vil undersøge om gymnasieleverne benytter de samme forkerte teknikker. Så jeg vil stille en opgave om at bestemme grænseværdien (opgavetype T_{13}) i grafisk repræsentation, i nummerisk repræsentation (på tabelform), samt i algebraisk notation. Et spørgsmål vil dreje sig om hvordan man finder grænseværdien, altså en opgave igen af typen T_{13}, denne gang stadig i det beskrivende nummeriske register. Dette bliver en opgave med 6 mulige svar, som alle er en beskrivelse ef en teknik til at finde grænseværdier. Elverne skal udvælge en og forklare hvorfor.

Da prætesten ligger som starten på undervisningsforløbet, som kun har en uges varighed, med bare tre undervisningsdage, vil det ikke være muligt at lave de store ændringer på baggrund af testen; men der kan laves små justeringer, hvis det synes relevant.

Den formelle definition

Jeg har valgt kun at beskæftige mig med grænseværdier for x gående mod et endeligt tal. I undervisningen har eleverne formodentligt mødt flest grænseværdier af denne type, da grænseværdien først og fremmest bruges til bestemmelse af differentialkvotienter og tangenthædninger. Tangenter vil altid skulle findes for endeligt x. Så da det sandsynligvis er denne type grænseværdi eleverne har beskæftiget sig mest med, vil det også være her deres teknikker er bedst tilgængelige, og her det bedst kan undersøges, om en formel definition kan hjælpe til med opbygningen af den teoretiske side af MO_1 og grænseværdibegrebet, som den fremgår i MO_K. Skulle forløbet også dreje sig om grænser i det uendelige, ville der gå for megen tid med at fremsætte de forskellige definitioner og samtidig ville det give for mange definitioner at vælge imellem i opgaveløsningen. Et andet valg jeg har truffet, er at lade kvantorerne fremgå symbolsk. Som jeg skrev i forbindelse med definition 4.1.7 på side 33 vil eleverne under alle omstændigheder få brug for et register indeholdende den kvantificerede definition, så jeg mener det er en fordel at benytte symbolerne, fordi eleverne så bliver gjort ekstra opmærksomme på at det er netop dér, der sker noget særligt. Med forløbet ønsker jeg netop at give eleverne et større indblik i brug af kvantorer.

Det vil i dette forløb ikke være relevant at undervise i Copis naturlige deduktion, som Durand-Guerrier ellers mener at have stor glæde af (se side 24. For det er først i mødet med matematik der kræver gentagen introduktion eller eksklusion af kvantorer, som f.eks. i beviset for middelværdisætningen at det bliver relevant at arbejde med kavantorerne på den måde..

Arbejdsformen

Jeg vil lade eleverne arbejde meget i grupper. Min forhåbning er at dette kan give grobund for en udforskende tilgang til emnet, hvor eleverne kan gavne hinanden som sparingspartnere. Logik handler meget om sproglige fortolkninger, så derfor egner emnet sig godt til at blive talt om. Ofte er det nemmere at få en samtale igang i små grupper end i store forsamlinger. Samtidig giver det bedre mulighed for at alle bliver hørt, og dermed er der mindre mulighed for at gemme sig, så alle arbejder med. Der skal selvfølgelig også nogle institutionaliseringssituationer til, for at sikre at alle elever når frem til samme konklusioner. Så arbejdet vil veksle mellem gruppeopgaver og fælles opsamlinger.

Test af elevernes kunnen efter forløbet

Efter forløbet vil jeg lave en sluttest dels med opgaver af samme type som i prætesten, for at se om der er sket en udvikling på de punkter hvor eleverne evt. havde vanskeligheder i starten. Men den skal også indeholde opgaver der er tæt knyttet til den symbolske formulering af kvantorerne. Jeg vil teste om eleverne efterfølgende formår at skelne mellem samt at negere AE- og EA-udtyk.

6.3 Lektionsplan

I dette afsnit vil jeg beskrive planen for undervisningen. Det er en udmyntelse af de tanker jeg gjorde mig i designfasen i det foregående afsnit. Alle materialer der blev udleveret til elverne kan findes i appendix A på side 85

1. lektion á 70 min

Introduktion - 8 min Introduktion af mig selv og forløbet: Det drejer sig om en anden måde at definere grænseværdier på, for på den ene side at styrke elevernes grænseværdibegreb og på den anden side styrke dem i logik og bevisteknik. Eleverne skal også vide at de vil blive testet både før og efter forløbet, ikke kun for at undersøge hvad de kan; men især for at jeg kan se om der er sket en udvikling under forløbet.

Standpunktstest af eleverne før opstart - 25 min Materialer: Opgaveark - 1 Starttest

Eleverne løser 6 opgaver individuelt. De skal klarlægge elvernes standpunkt i forhold til både grænseværdibegrebet og logik i formen EA- og AE-sætninger.

Hvis testen viser at eleverne har problemer med nogle af opgaverne, forsøges der taget højde herfor i det videre forløb.

Testen bliver et første møde med AE- og EA-sætninger, samt opgavetypen: negation af udsagn af typen „for alle . . . gælder . . . “. (Allerede her kan teknik τ_{K4} fra side 36 bringes i spil.)

Negering af EA og AE udsagn - 15 min Materialer: Opgaveark - 2 Gruppeopgave; 4 Diktafoner

Eleverne deles i fire grupper á fire personer. Der arbejdes med negering af EA- og AE-udsagn i naturligt sprog, og med oversættelse til kvantorer. Gruppernes samtale optages.

Opgavetypen er negering af AE- og EA-udsagn. Dette giver anledning til et udforskende moment, og forhåbentligt er teknisk moment, hvor de finder en teknik til at negere kvantificerede udsagn. (Igen drejer det sig om at arbejde hen mod τ_{K4}).

Institutionalisering - 10 min Materialer: Diktafon

Eleverne fremlægger deres løsninger.

Det forventes at eleverne kan have svært ved at håndtere kvantorerne. Er det tilfældet, findes der i fællesskab frem til en løsning på opgaven. Det vigtigste er at eleverne får bearbejdet negeringen af kvantificerede udsagn i naturligt sprog.

Dette skal give anledning til et teknologisk/teoretisk moment, hvor teknologien institutionaliseres.

Definitionen på grænseværdi - 10 min Underviseren præsenterer ε-δ-definitionen i tilfældet hvor grænseværdien og x-værdien begge er endelige.

Der gives en grafisk fortolkning. Som eksempel bruges grænseværdien for $f(x) = \cos x$ når $x \to 0$

Dette er et første møde med ε-δ-definitionen af grænseværdier.

Præsentation af hjemmeopgave - 2 min Materialer: Teoriark - 3 Definitionen på grænseværdi

Der udleveres teoriark med hjemmeopgaven på:

Oversæt definitionen udtrykt med kvantorer til almideligt sprog. Ved brug af definitionen hvad vil det så sige at grænseværdien ikke eksisterer for $x \to a$?

Her er opgavetypen negering af multikvantificerede udsagn. Teknikken der blev institutionaliseret tidligere skal bringes i spil.

2. lektion á 70 min

Gennemgang af hjemmeopgaven: - 15 min Materialer: Diktafon

Elevgennemgang af definitionen og dens negation. Institutionalisering.

Gruppeøvelse - 20 min Materialer: Opgaveark - 4 Gruppeopgave ε-δ-x-kamp; diktafoner

Eleverne afprøver deres forståelse af definitionen ved at finde brugbare δ'er for konkrete ε'er. Dette forgår som en kamp mellem venner og fjender. En del af opgaven er at bestemme L

Grænserne er følgende:

- $\lim_{x\to 1} 2x - 2 = 0$ (her virker $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$)
- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ (her virker $\delta = \varepsilon$)
- $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ (her virker $\delta = \frac{1}{\sqrt{T}}$)
- $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ (her virker $\delta = \varepsilon^2$)
- $\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} = 1/2$ (her har jeg ikke fundet en formel for δ. Jeg har benyttet L'Hôspitals regel til at bestemme L. Men den giver ikke et eksplicit δ).

Dette giver anledning til et udforskende moment, hvor eleverne udforsker brugen af definitionen.

Opgaventypen er den på side 34 nævnte variation af T_{K1}, som går ud på at finde δ for givet ε i nummerisk repræsentation. Dette skal give anledning til en begyndende praksisblok for MO_K. Den del der manglede i MO_2.

Opsamling - 5 min Materialer: Diktafon

Eleverne spørges om de har fundet frem til et sikker valg af δ i nogle af opgaverne?

Måske finder eleverne en teknik, evt. τ_{K1} fra side 34, der i nogle tilfælde kan bruges til valg af δ.

I den sidste opgave har jeg benyttet L'Hôspitals regel til at nå frem til resultatet. Her er en mulig teknik til at vise at der generelt eksisterer et δ for ethvert ε altså at eftervise L'Hôspitals regel vha. ε-δ-definitionen. Dette ligger ikke indenfor hvad jeg har planer om at lære elverne. Opgaven er taget med, for at illustrere at det ikke altid er muligt at benytte τ_{K1}.

Gruppeopgaver - 15 min Materialer: Opgaveark - 5 Gruppeopgave; diktafoner

Der udleveres to funktioner hvoraf den ene er konvergent og den anden ikke. Opgaven er at vise om funktionerne konvergerer vha definitionen.

Denne opgave er en blanding af typerne T_{K2} og T_{K4} på side 37. Brugbare teknikker til løse opgaven er τ_{K5} (fra side 37) samt τ_{K1}, som begge tilhører praksisdelen af MO_K. Eleverne kan bruge lommeregneren til at se på grafen, så de kan danne sig et billede af en mulig grænseværdi, og af om den bedste taktik vil være at forsøge at påvise greænseværdien, eller at vise at funktionen ikke har en grænseværdi. Så her kan det at kigge på grafen også blive en teknik, til valg af videre fremgangsmåde. De vil muligvis i stedet vælge at bede lommeregneren beregne grænseværdien, som også kan hjælpe til med at vælge om man skal benytte teknikker tilknyttet T_{K2} eller T_{K4}; men når funktionen divergerer, kan grafen bedre hjælpe til at give en idé til valg af følger til τ_{K5}.

Har eleverne tid til overs kan de begynde på de næste opgaver.

Gennemgang / validering - 5 min Materialer: Diktafon

Udlevering af hjemmeopgave - 5 min Materialer: Opgaveark - 6 opgaver

Der udleveres op til fire funktioner hvor det vha. definitionen skal afgøres om de konvergerer.

3. lektion á 70 min

Denne lektion bruges på at give eleverne nogle redskaber til at kombinere δ'er, samt en teknik τ_{K3} til at vælge ε, hvis man kender den korrekte grænseværdi.

Gennemgang af hjemmeopgave 15 min Materialer: Diktafon

Elever kommer til tavlen og forklarer løsning af deres hjemmeopgaver. Dette er en institutionaliserings-/evalueringsfase.

Gruppeopgave - 20 min Materialer: Opgaveark - Gruppeopgave; Diktafoner

Her opstilles nogle forkerte og nogle rigtige grænseværdier. Eleverne skal angribe grænseværdierne som fjender. Er der en god taktik til valg af ε?

Opgavetypen her er T_{K3} fra side 37.

Teknikken der efterspørges er τ_{K3}, som siger at $\epsilon = \frac{|L_{rigtig} - L_{forkert}|}{2}$ er et godt valg (se på side 35).

Opsamling - 15 min Materialer: Diktafon

Dette skulle gerne give anledning til et teknologisk/teoretisk moment.

Gruppeopgave - 25 min Materialer: Opgaveark - 4 Opgave; diktafoner

Vis at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så er $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$ ved at benytte definitionen for grænseværdi.

Denne opgave tilhører type T_{K6} der introduceres på side 38, hvor beviset gennemgås i afsnit 4.4. I gennemgangen af beviset lægges op til kombination af teknikkerne τ_{K2} og τ_{K6}.

4. lektion á 70 min

Gruppeopgave - 25 min Materialer: Opgaveark - 5 Gruppeopgave; diktafoner

Denne opgave skal vise entydigheden af grænseværdi. Opgaven går ud på at undersøge om en funktion kan have to forskellige grænseværdier for én x-værdi (fra samme side). „Kan en funktion have to forskellige grænseværdier hvis de er meget tæt på hinanden?“

Først skal eleverne overveje om det er muligt at der eksisterer to forskellige grænseværdier. Hvis de så når frem til at de vil afvise det, kan de som vist i afsnit 4.2 benytte teknikkerne τ_{K2} og τ_{K3}, som begge skulle bruges i 3. lektion. Så det bliver spændende at se om eleverne er i stand til at mobilisere teknikkerne i en ny kombination i denne opgave.

Har eleverne svært ved at komme i gang, kan de hjælpes med følgende idé til fremgangsmåde: Antag at funktionen har grænseværdien L_1 og vis at den ikke samtidig kan have grænseværdien $L_2 \neq L_1$. Vælg et passende ε at angribe L_2 med, og vis at uanset hvilket δ man vælger, kan betingelsen for græseværdi ikke være opfyldt for L_2 samtidig med L_1.

Validering - 10 min Materialer: Ddiktafon

Her skal ske en institutionalisering af beviset.

Standpunktstest efter forløbet - 25 min Materialer: Opgaveark 1 - Sluttest og spørgeskema

Der udleveres en test til eleverne med bl.a. opgaver svarende til dem i prætesten. Dette for at se om der er sket en udvikling.

Opgaverne drejer sig mest om den logiske side med behandling af kvantorerne. Opgaver omhandlende beviser mht. grænseværdi har de løst som gruppearbejde. Opgavetyperne er fortolkning og negering af AE- og EA-udsagn, samt oversættelser mellem symbolsk og sprogligt udtrykte kvantorer.

Evaluering - 5 min Materialer: Opgaveark 1 - Sluttest og spørgeskema

Eleverne får et evalueringsskema med hjem, som skal udfyldes inden næste matematiktime. Spørgsmålene går dels på deres opfattelse af forløbet, dels på hvad de mener at have lært.

Afslutning - 5 min Tak til 3.y på Nørresundby Gymnasium og deres lærer Trine K. Petersen for at de ville deltage i mit projekt.

7 Empiri - Observationer og fortolkninger

I dette kapitel ser vi nærmere på tredje og særligt fjerde trin i den didaktiske transpositionsproces (på side 10), det vil sige på hvordan der rent faktisk blev undervist i den pågældende klasse af pågældende lærer, og især på hvad eleverne har lært. Afsnittet vil især dreje sig om elvernes handlinger ikke om underviserens, da det er svært at se objektivt på sig selv, og det er mere interessant at se hvad elverne lærte, end at se præcis hvordan undervisningen forløb.

7.1 Mine umiddelbare indtryk fra undervisningen

Det viste sig hurtigt at ting tager meget længere end jeg havde forestillet mig, samtidig blev den sidste dobbeltlektion (Lektion 3 og 4) en del kortere pga. morgensamling på gymnasiet. Så mit program viste sig at være for ambitiøst i forhold til tidsrammen. Jeg måtte undervejs ændre lidt på programmet, pga. tidsnød; men jeg forsøgte alligevel at få alle de planlagte aktiviteter med.

7.2 Observationer fra undervisningen

Igennem alle observationer vil jeg lade eleverne være anonyme, ved at henvise til dem vha et nummer, således at E_1 henviser til den samme elev gennem hele kapitlet. Det vil ved lydoptagelserne forekomme at jeg ikke har kunnet identificere taleren, da jeg ikke kender eleverne godt nok til at genkende dem på stemmen. U betegner i transkriptionerne underviseren, og L er den sædvanlige lærer.

Observationer fra den indledende test

Den indledende test blev besvaret af 14 elever. De sammenskrevne besvarelser kan findes i appendix B på side 103 Den første opgave var: Hvis følgende sætning gælder: „Et hus kaldes grønt netop hvis alle mursten i huset er grønne.“ Hvad skal der så til for at et hus ikke kaldes grønt?

1. ingen mursten er grønne
2. netop en mursten er ikke grøn
3. alle mursten er grønne
4. mindst en mursten er grøn
5. mindst en mursten er ikke grøn

Den logiske negation af udsagnet er „Et hus kaldes ikke grønt netop hvis der eksisterer en mursten i huset der ikke er grøn“. For at nå frem til denne konklusion kan man benytte teknik τ_{K4} fra side 36. Men det forventes endnu ikke af eleverne at de benytter denne teknik. Jeg formoder dog at eleverne tidligere har beskæftiget sig med udsagn af den type; da indholdet af stort set enhver matematisk sætning kan formuleres på denne vis. Men elverne har måske tidligere været bevidste om det logiske indhold.

Her valgte 10 elever svarmulighed 5, E_6 valgte både 2 og 5, E_3 valgte 1, 2, 4, og 5 og E_1 og E_{14} valgte mulighed 2. E_1 giver i den efterfølgende diskusion i gruppearbejdet udtryk for at hun mente „mindst en mursten er ikke grøn“.

> (04:42) Det der med mindst én/
> [i kor] ikke er grøn
> (04:44) Og det var det der stod i 5'eren.
> E_1(04:46) Stod det ikke i 2'eren?
> (04:50) Nej der stod det på sådan en anden, der stod det formuleret på en anden måde synes jeg bare.
> E_1(04:52) Nå, men jeg mente det der, så har jeg skrevet forkert.

.

Så umiddelbart er der stor enighed blandt eleverne om at vælge nr. 5, som også er det korrekte svar. Det tyder på at eleverne må har en teknik på plads til at håndtere udsagn af denne form. Men jeg har ingen mulighed for at vide hvori teknikken består.

Det jeg finder særligt interessant er de to elever der valgte flere svarmuligheder. For at fortolke hvorfor de gjorde det vil jeg starte med at se nærmere på opgaven.

Af de fem svarmuligheder, er der tre der alle giver konklusionen at huset ikke kaldes grønt, nemlig 1, 2 og 5. 3 giver netop at huset kaldes grønt, hvor 4 ikke hjælper til med at afklare noget. Så mulighed 4 er som i Durand-Guerriers spørgsmål med romben (på side 21) uafgørlig. Vi vender nu tilbage til elevernes svar på prætesten. E_6 valgte kun to af de tre korrekte svar. Hvorfor valgte hun så ikke 1? Havde formuleringen af 1 i stedet lydt “for alle mursten gælder at de ikke er grønne“ havde det måske ændret noget? E_6 valgte de tre korrekte svar men også 4. Hun har måske som i Durand-Guerriers fortolkning af de studerendes svar mht romben, tænkt at så længe der ikke står at alle mursten er grønne, så er ikke alle mursten grønne, baseret på Grices konversationsregel.

Måske udgjorde det en særlig komplikation at der var svarmuligheder, havde eleverne selv skulle formulere et svar ville de nok alle have nøjedes med ét svar. Men måske havde de så tilgængæld haft problemer med at formulere deres tanker. Hvilket deres meget sparsomme svar på formuleringsopgaverne, som vi skal se på om lidt, kunne antyde var tilfældet.

Ingen elever havde problemer med den grafiske fortolkning af grænseværdibegrebet, selvom flere viste problemer med notationen.

Opgave 3 lød: Se på de to nedenstående udsagn:

1. For alle planeter findes der en stjerne som de kredser om.

2. Der findes en stjerne som alle planeter kredser om.

Er der forskel på de to udsagn? Prøv at tegne de to situationer

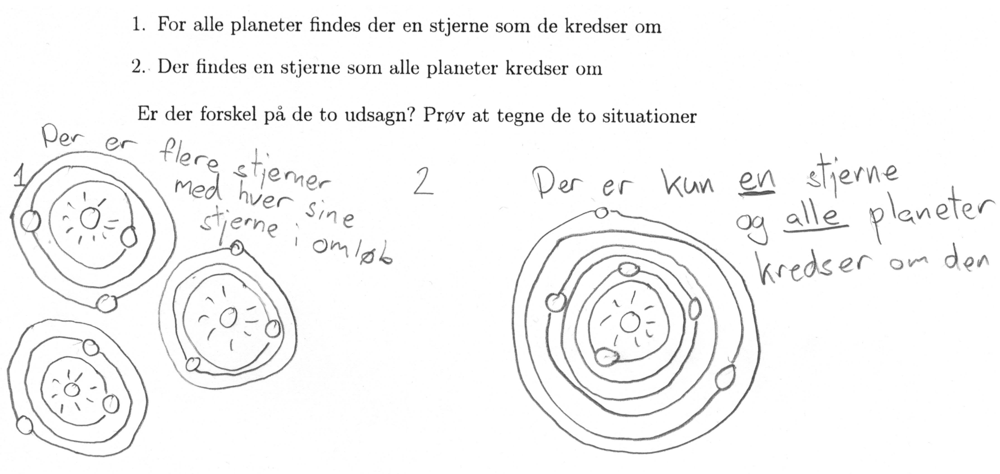
Alle elever tegnede til udsagn 2 én stjerne med mange planeter.

3 elever (E_8, E_9 og E_{11}) tegnede til udsagn 1 flere stjerner med flere planeter til hver. 9 elever tegnede til udsagn 1 flere stjerner med hver en enkelt planet. 2 yderligere elever (E_4 og E_5) tegnede det samme; men kom også med en skriftlig forklaring. Heraf skrev E_5 som den eneste fra klassen at 1 gælder for begge m. 2 gælder ikke nødvendigvis for 1 (se figur 7.2 på side 68).

Her er det interessant om eleverne der kun tegnede 1 planet til hver stjerne for udsagn 1 mener at udsagnet siger at hver planet har deres egen stjerne. E_5 skriftlige forklaring viser at hun i hvert fald ikke har den opfattelse; men der er lydoptagelser der pejer i retning af at i hvert fald en del af de øvrige elever har den opfattelse.

En gruppeopgave lød på at negere udsagnene fra opgave 3.

Uddrag af lydoptagelse:



Figur 7.1: E_8's besvarelse af opgave 3

> (01:03) Ja altså den første der var en stjerne til hver planet
> [...]
> (01:09) og i den sidste der havde de en fælles
> [...]
> E_{11}(05:16) for alle planeter findes der en stjerne som de kredser om for at det ikke skal gælde
> (05:20) Ja, ja; men jeg forstår det godt
> E_{11}(05:21) så skal der findes en stjerne som alle planeter kredser om
> (05:23) Ja eller også skal der bare være en planet der ikke kredser om en stjerne. Eller to der kredser om den samme. Eller tre der kre...

Her fremgår at de i denne gruppe mener at i udsagn 1 har hver planet sin egen stjerne. En anden gruppe har samme opfattelse og når derfor frem til at de to udsagn er hinandens negationer:

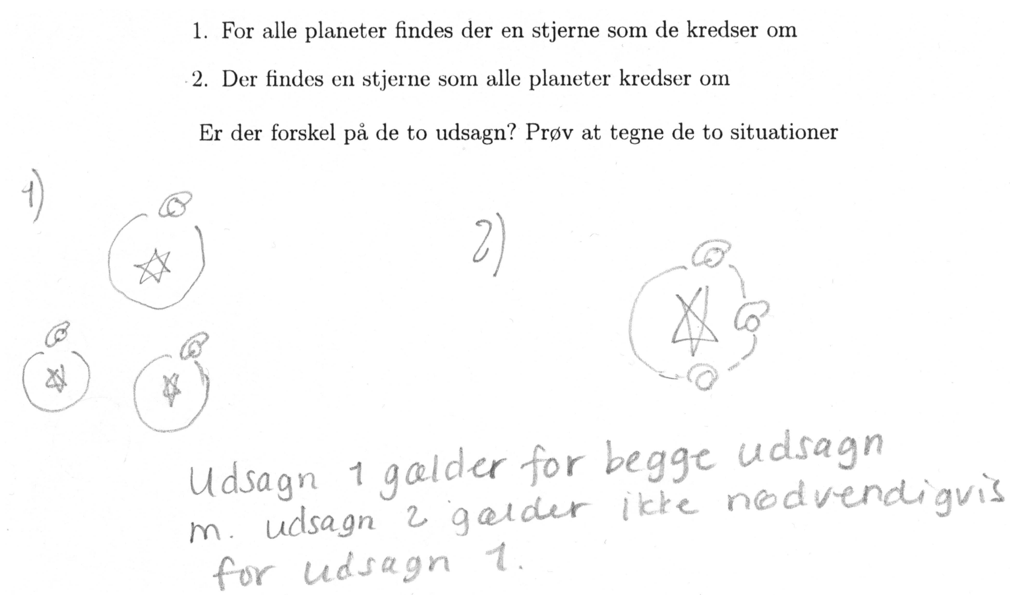
> (08:41) Det første udsagn der har hver planet hver sin stjerne, og i andet udsagn, der har alle planeter én stjerne, som de kredser om
> U (08:48) og hvis nu det her det så ikke skal være rigtigt
> (08:52) 2'eren?
> U (08:53) Ja, så har alle planeter ikke en fælles stjerne som de kredser om; men?
> (09:03) flere, det var jo det jeg sagde, at der skal være mere end én stjerne hvis det skal være falsk.

(09:10) som de kredser om; men der kan godt være mere end en stjerne.
U(09:11) Der kan også godt være flere end en stjerne, selvom de alle kredser rundt om den ene.
(09:18) Men der skal bare være flere stjerner de kredser om
(09:20) Det er godt nok ved at være lidt. . .
(09:26) [selvsikkert] Så skal det bare være 1'eren
(09:29) Vi siger bare at hvis 2'eren ikke skal være opfyldt så skal 1'eren
(09:32) Så er der udelukkelsesmetoden.
(09:33) Så er der flere . . .
(09:37) Jeg synes det er et mærkeligt spørgsmål.
/. . . /
(09:40) Skal vi tage den anden? . . .
(09:47) Så det er egentlig bare. . . , hvad skal der til for at den der ikke er rigtig?
(09:51) Det er 2'eren den skal være rigtig.
(09:52) Videre.
(09:52) Hvad skal der til for at 2'eren ikke er rigtig.
(09:53) Det skal være 1'eren.
(09:54) Skal vi ikke bare sige det?
(09:55) Er det bare det?
(10:00) [grinende] Det kunne det faktisk godt være.
(10:03) [overbevist] Det er bare for at 1'eren ikke skal være rigtig skal 2'eren være rigtig, [resten af sætningen i kor] og for 2'eren ikke skal være rigtig så skal 1'eren være rigtig.
/. . . /
(10:11) [muntert] Det kunne man da godt argumentere for . . .

Dette tyder på at mange elever mener at det første udsagn kun er opfyldt hvis planeterne har hver sin stjerne. Dette udsagn ville dog være meget sværere at skrive op. Det ville blive noget i retning af „for alle planeter eksisterer der en stjerne så for alle andre planeter gælder at planeten kredser om stjernen, men det gør de øvrige planeter ikke“. Denne sætning lader sig måske bedre udtykke med kvantorer: lad P være mængden af planeter, S mængden af stjerner. Så bliver sætningen:

$$\forall p \in P \ \exists s \in S \ \forall q \in P \backslash \{p\} : p \text{ kredser om } s \wedge q \text{ kredser ikke om } s.$$

Det ville være interessant at høre konklusionen fra gruppen med E_5 som skrev at udsagn 1 var opfyldt i begge tilfælde. Men det lykkedes ikke at



Figur 7.2: E_5's besvarelse af opgave 3

optage denne gruppes arbejde.

Desværre lykkedes optagelsen af institutionaliseringsfasen mht negering af AE og EA-udsagn heller ikke. Men det kan nævnes at ingen elever ønskede at gå til tavlen, så det endte med lærergennemgang, med kun få input fra eleverne. Pga. tidsnød blev det til en meget hurtig introduktion af teknikken τ_{34}, så det var op til eleverne efterfølgende at overveje både at teknikken og det opnåede resultat var korrekt. Flere elever lød som om de ikke helt troede på resultatet. Måske fordi nogle af dem var nået frem til at de to udsagn bare var hinandens modsætninger.

I behandlingen af sluttesten (afsnit 7.2 på side 73) vender vi tilbage til om elverne kan moblisere teknikken τ_{34} i en tilsvarende situation.

Den næste opgave i testen var: Hvordan kan man se om en funktion $y = f(x)$ har en grænseværdi L når x går mod 0? Ved at:

1. sætte $y = 0$
2. beregne $f(1), f(2), f(3)$ osv. og observere resultatet
3. beregne $f(x)$ for $x = 1/2, 1/4, 1/8$ osv.
4. indsætte 0 for x i funktionen og beregne værdien
5. indsætte et tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter y-værdien

6. indsætte tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter den værdi y nærmer sig når x nærmer sig 0

Vælg det svar der passer bedst med din tilgang. Og forklar hvorfor du gør sådan.

E_2, E_3 og E_4 valgte nummer 5. E_6 valgte både 5 og 6. Resten af eleverne valgte 6. Begrundelserne var ikke særligt uddybende. Flere svarede bare at det passer bedst. E_4 svarede „når man sætter 0 ind i $f(x)$, så vil vi finde grænseværdien som svarer til den y-værdi som man får". Umiddelbart synes jeg at forklaringen ville passe bedre til svarmulighed 4. Men det skal nok i stedet tolkes, som at man bare skal sætte 0 ind efter omskrivning. Hvilket svarer til teknikken τ_2 på side 46, som eleverne kender fra udregning af differentialkvotient, hvor man bare skal omskrive for derefter at indsætte værdien. Kan man det giver MO_1 netop at det er det man skal gøre.

E_8 skrev: „Ved at vælge et tal meget tæt på nul ser vi grænseværdien fordi y er afhængigt af x og fordi der ved 2 kan opnås ∞ høj værdi og der ved x lidt større opnås næsten grænseværdi". Her understreges at svarmulighed 2 er helt forkert. Hvor de øvrige til en vis grad stemmer overens med elevernes faktiske teknikker.

Den sidste opgave i den indledende test var: Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2 - 2(x+1)^2 + 1}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

6 elever svarede at $f(x) \to \infty$, fordi man får et meget stort tal når man dividerer med et meget lille tal. Kun en af disse (E_{11}) skrev at tælleren er større end 1.

E_5 og E_6 forsøgte sig med at indsætte tal tæt på 0 (de valgte hhv. $0,5$ og $0,9$), men nåede ikke frem til en konklusion for grænseværdien. E_3 skrev at man indsætter et tal meget tæt på 1 og får grænsen. E_3's teknik er formodentligt magen til de to foregående, hun har bare fået fat i den gale x-værdi. Det kunne også se ud til at E_5 har forsøgt at finde grænseværdien for $X \to 1$, da $0,9$ ikke er et oplagt valg for et tal tæt på 0, men derimod naturligt vil være første valg i en aproximation af 1, når det skal udregnes i hånden. Ingen af disse elever skrev dog noget om videre fremgang efter udregningen.

E_{14} gav intet svar, og E_{12} svarede ?0? uden nærmere at beskrive hvorfor.

De tre elever der forsøgte sig med at indsætte værdier tæt på 0, handlede i overensstemmelse med deres svar på opgave 5. Men det er så også nødvendigt at indsætte værdier tættere på 0, for at se hvad der sker når man kommer tættere på 0, før man kan være istand til at bestemme grænseværdien.

Kun 2 elever (E_7 og E_{13}) har eksplicit indsat 0. Den ene regnede forkert og den anden nåede frem til $\frac{0}{0}$ og konkluderede at grænsen er 0. E_8 forsøgte at løfte paranteserne; men lavede fejl, og nåede ikke til en konklusion. E_{11} har som nævnt ovenfor også gjort sig tanker om nævneren i brøken.

Samlet er det altså 4 ud af 14, elever der har koncentrert sig om både nævner og tæller. 3 der forsøgte at benytte teknologien fra den foregående opgave og 5 der kun kiggede på nævneren. Så eleverne kan ikke siges at beherske denne type opgave.

Observationer fra 2. lektion

Hjemmeopgaven til anden lektion var at genlæse definitionen på grænseværdi, samt at negere definitionen. Eleverne udtrykte at de havde læst men ikke forstået, og dermed ikke ønskede at gå til tavlen. I stedet gennemførte underviseren en tavlegennemgang af defintionen. Under tavlegennemgangen udspillede følgende dialog sig:

> U (02:39) For alle ε eksisterer et δ, så afstanden mellem $f(x)$ og L som vi kalder grænseværdien, er mindre end ε, hvis I vælger/
> (03:20) Hvad er ε?
> U (03:22) ε er et lille tal.
> U(03:30) Så hvis, så længe at vi vælger x-værdier der ligger her mellem $a - \delta$ og $a + \delta$, så ligger $f(x)$ mellem $L + \varepsilon$ og $L - \varepsilon$. Og så kan vi så vælge ε lidt mindre, så er vi nødt til også at vælge δ endnu mindre.
> U(04:09) Giver det nogen mening? ...
> (04:13) Meget lidt ...
> U (04:30) Man kan også sige at uanset hvilket ε som fjenden kommer med, så skal vi kunne vælge et δ, som gør at så længe vi holder x-værdien indenfor den afstand af a, så er det indenfor den afstand af L oppe i funktionsværdien. ...
> (05:00) Det er bare sådan lidt mere indviklet når du bruger alle de der tegn der som vi ikke helt forstår.
> U(05:05) Det er meget små tal.
> (05:09) Og den der mærkelige en der, den der ligner lidt et s, er det så et delta x.
> L(05:15) Vi plejer at kalde den Δx - det er det samme.
> (05:20) Godt.

> (05:23) Når der er mange nye tegn så tager det længere tid, også at læse det ...
> L (05:35) Jeg tror det hjælper når I kommer til at sidde med det der ven og fjende. Altså nogle konkrete tal.

Eleverne gør her opmærksom på at de mener at en af grundene til at de har svært ved definitionen er de mange nye tegn. Det kan være at eleverne bedre kunne læse definitionen, hvis den var skrevet i almindeligt sprog som i definition 4.1.7 på side 33. Men jeg mener stadig ikke at det ville have gjort det synderligt lettere for eleverne. Umiddelbart ville definitionen måske synes lettere at gå til; men så snart der skal arbejdes videre med definitionen, vil det give eleverne et bedre grundlag for arbejdet, at det er i det symbolske sprog. Det bliver mere præsist, som vi på side 23 har set hos Durand-Guerrier (2008) og Blossier et al. (2009), og det bliver i første omgang nemmere at se hvor man skal være opmærksom, så teknikken τ_{K4} på side 36, kan benyttes til negation af udsagnet.

Der blev herefter byttet om på rækkefølgen af aktiviteterne, så den mere regnetekniske ε-δ-x-kamp fandt sted før negation af definitionen. Denne kamp var oprindeligt tiltænkt at skulle give eleverne begyndende redskaber til at vælge et δ for et givent ε. Den bliver så i stedet et redskab til at slå betydningen af de forskellige størrelser fast. Der bibeholdes et håb om at eleverne vil begynde at opdage at valget af δ afhænger af ε.

Dette skulle gerne give eleverne et første møde med en teknik og skal være med til at skabe en praksisblok for grænseværdiers topologi (MO_2).

Opgaven gav eleverne lejlighed til at få sat de begreberne fra definitionen ind i en sammenhæng.

> (16:50) Hvordan er det så vi finder vores x?
> L(16:52) Nu har I jeres δ ikke også?
> (16:53) Jo.
> L(16:56) δ det ligger nede på x-aksen ... du har tegnet det oppe på y“-aksen. ...
> (17:04) Er det så ε der ligger heroppe?
> L(17:04) Ja.

Eleverne arbejder med at få sat på plads hvor størrelserne indgår i den grafiske repræsentation, og til at finde ud af hvor på grafen der arbejdes. Dette er forhåbentligt med til at skabe en koordinering mellem det grafiske og det symbolske register. Der bruges også en del tid på at udregne intervaller.

Den ene gruppe havde svært ved at se hvordan de skulle vælge δ

E_{12}(17:54) jeg synes overhovedet ikke, der er noget som helst logisk i det/
(17:57) Jeg forstår godt grænseværdierne; men det er mere det der med at man skal vælge det der δ. Så kan jeg ikke tænke svaret ud over at det selvfølgelig skal være lille.
L(18:12) Det kan også godt være svært at vælge det rigtige δ.
(18:14) Så tænker jeg bare hele tiden, det skal bare være mindre ... Så synes jeg bare at alle opgaverne de bliver meget ens.
L(18:20) Det er et godt udgangspunkt at sige den skal være mindre.
E_{12}(18:27)Jeg forstår ikke hvorfor man skal vælge et lille tal. Og jeg forstår ikke hvorfor det der skal være mindre og /
L(18:30) Fordi hvis noget er grænseværdi. Vi tror grænseværdien er 4. ... Så det betyder at vi tror at $f(x)$ er tæt på 4 ... for at den skal være tæt på 4, så skal vi jo vælge et meget, meget, lille interval omkring 4. Så hjælper det jo ikke noget hvis det er et kæmpestort interval. Så kan vi ikke vise at den er tæt på 4 ... Hvis vi vælger ε til at være ± 5,/
E_{12}(19:00) For at gøre det svært for de andre skulle man jo vælge 100 som interval. Så ville det jo være svært for dem at finde det.
L(19:04) Hvis ε var 100? ... nej fordi 4 ± 100/
(19:09) Så er det os der er de gode.
L(19:10)[fortsætter sætningen] det er jo ikke nogle tal der er tæt på 4.
/.../
L(19:12) Det er jo sådan et kæmpe interval.
E_{12}(19.14) Så har de gode jo mere at vælge imellem.
L(19:17) Ja det er rigtigt. Du kan bare ikke vise noget, når du vælger sådan et kæmpe interval.
E_{12}(19.22)?
L(19:24) for så kan du jo ikke vise at den er tæt på 4! Hvad er der for nogle tal der ligger tæt på 4? ... Det er jo ikke 4 ± 100 ... hvad vil det sige at noget er en grænseværdi?
E_{12}(19.30) Det ved jeg ikke.

E_{12} havde svært ved at se meningen i at vælge et lille ε for selvom de var fjenden, blev det jo så mere svært for de andre at finde δ der var lille nok. Dette ledte til en diskussion af ε's funktion, og af hvad man kunne vise med et stort valg af ε. Det var læreren der ledte eleverne gennem diskussionen. Om dette har ført til en opklaring af hvordan definitionen benyttes er tvivlsomt. Men forhåbentligt er der en begyndende teknik til brug af ε-δ-definitionen af grænseværdier.

Negation af definitionen finder sted i fællesskab med underviseren ved tavlen i slutningen af lektionen. Brugen af definitionen blev således udskudt til næste lektion.

Observationer fra 3. lektion

Først i denne lektion endte eleverne med at benytte definitionen til afgøre om en funktion har en grænseværdi. Det betød at eleverne kun nåede at beskæftige sig med to funktioner, hvor den ene har en grænseværdi og den anden ikke. Men det betyder at eleverne ikke når at benytte teknikkerne mere end en gang, så selvom det er en variant af kendte teknikker der skal benyttes, når teknikkerne sandsynligvis ikke at blive så godt indarbejdet, at de kan mobiliseres i andre sammenhænge.

Observationer fra 4. lektion

Den sidste gruppeopgave lød: Kan en funktion have to forskellige grænseværdier L_1 og L_2, $L_1 < L_2$ for $x \to a$ hvis L_1 og L_2 ligger meget tæt på hinanden?

En gruppe sagde straks nej. Størrelser er relative, så hvis vi forstørrer ligger L_1 og L_2 ikke længere tæt på hinanden.

De kunne dog ikke mobilisere en teknik til at løse opgaven. Selvom de fik en del hjælp, nåede de ikke frem til et argument.

I en anden gruppe, var man mere i tvivl. Det måtte næsten kunne lade sig gøre. Hvorfor skulle spørgsmålet ellers være stillet? Dette skyldes sandsynligvis at eleverne ikke har været vant til praksisblokken af MO_2. Opgavetypen er for anderledes fra hvad de kender i forvejen. Samtidig kunne det opfattes som et brud på den didaktiske kontrakt: læreren ville normalt ikke spørge, hvis alting var som man umiddelbart skulle tro.

Observationer fra sluttesten

Besvarelserne for sluttesten kan findes i appendix C. Sluttesten starter med en opgave af samme type som den med planeter og stjerner fra 1. lektion, denne gang drejer det sig om blade og træer: Se på følgende udsagn:

1. For alle blade findes et træ så bladet har siddet på træet

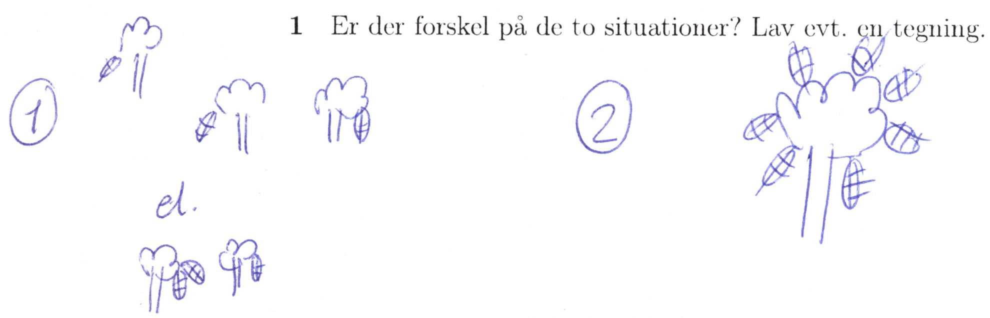
2. Der findes et træ så der for alle blade gælder at bladet har siddet på træet

1 Er der forskel på de to situationer? Lav evt. en tegning.

2 Hvad der skal til for at udsagnene ikke er opfyldt?

3 Opskriv udsagnene med brug af $\forall$ og $\exists$. Lad t betegne et træ og b betegne et blad.

Denne gang har kun 3 (E_1, E_5 og E_{12}) ud af 13 elever tegnet mere end et blad pr træ for første udsagn. Kun E_9 og E_{10} har skrevet tekst til opgaven, E_{10} har skrevet: „der findes 1 blad pr. træ“ $\leftrightarrow$ „alle blad tilhører 1 træ“. På E_5's tegning (figur 7.3) ses at situationen med 1 blad på hvert træ og to blade på hvert træ opfattes som fundamentalt forskellige, siden det er nødventigt at tegne det som forskellige situationer. E_5 var eleven der i prætesten skrev at det første udsagn gælder for begge situationer, mens det ikke nødvendigvis er tilfældet for det andet.

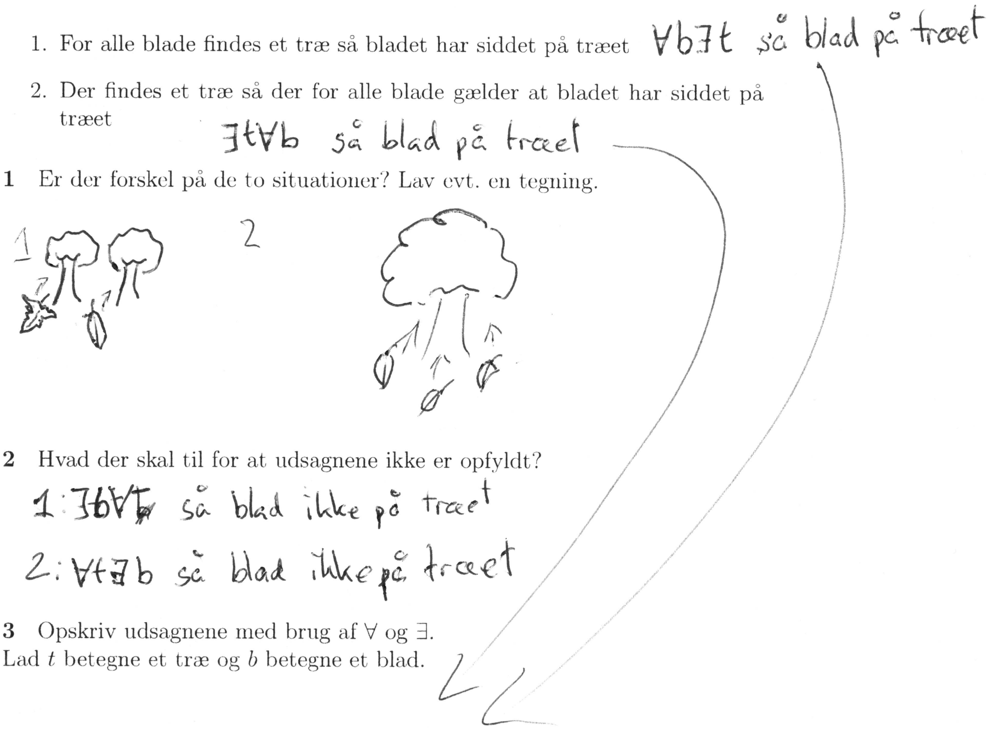


Figur 7.3: E_5's tegning

Eleverne bliver bedt om at negere udsagnene (spørgsmål 2 ovenfor). 3 elever (E_8, E_9 og E_{10} udtrykker negeringen korrekt med brug af kvantorsymboler. E_{11} har lavet en muligvis korrekt negation i almindeligt sprog. Det vender jeg tilbage til om lidt. Yderligere 2 elever (E_2 og E_{12}) har skrevet at der er et blad der ikke har et træ. Dette er en korrekt negation af AE-udsagnet; og er udsagnet opfyldt er heller ikke EA-udsagnet opfyldt; men dette er ikke den eneste mulighed for negation af EA-udsagnet. Der kunne også være blade fra mindst to forskellige træer.

E_{14} holder fast i at de to udsagn er hinandens modsætninger, som gruppen nåede frem til i gruppearbejdet med negation af kvantificerede udsagn.

Sluttesten viste at nogle elever benyttede teknikken τ_{34}. Men som jeg be-



Figur 7.4: E_8's besvarelse på opgave 1

skrev på side 68 blev teknologien meget hurtigt indført i 1. lektion. Siden blev den brugt til negation af definitionen for grænseværdi i 2. lektion. Men det ses også at alle de elever som har lavet en korrekt negation af begge udsagn, har brugt den symbolske notation af kvantorerne.

På figur 7.4, som er E_8's besvarelse af opgaven, ser det ud til at eleven først har oversat ordene til symbolske kvantorer, for derefter at benytte teknikken τ_{34}. Det kunne tyde på at han kan mobilisere teknikken i det register (det symbolske) hvor den er blevet indført, men endnu ikke magter at mobilisere den i det naturlige sprogs register.

De elever der bliver i den sproglige notation, magter ikke at negere begge udsagn helt korrekt. E_5 har for udsagn 1 svaret „For alle blade findes der ikke et træ (så alle blade har siddet på træet)" hvilket er forkert. Men har for udsagn 2 svaret „Der findes ikke et træ så der for alle blade gælder ..." hvilket er korrekt, men er svært at bruge i praksis. Det ville være en fordel at benytte teknik τ_{34} til at flytte negationen længere ind i udsagnet. Det har E_{11} gjort og får: „1. For et blad findes det for alle træer, så bladet ikke har siddet på træet. 2. For alle træer findes der for et blad, så bladet ikke har siddet på træet." Dette kunne være korrekt brug af τ_{34} i den sproglige notation, omend svaret er formuleret på dårligt dansk. Så det ikke umiddelbart kommer til at give mere mening for eleven end i den symbolske notaion.

På spørgsmål 3 er svarene blandet, nogle har troet at de skulle oversætte de oprindelige udsagn til symbolsk notation (hvilket var min hensigt), mens andre har forsøgt at oversætte de negerede udsagn. 6 elever (E_2,E_3, E_7, E_8, E_{12} og E_{15}) har oversat det opfindelige udsagn korrekt. 3 andre (E_9, E_{10} og E_{11}) har oversat der negerede udsagn korrekt. Men disse lavde ikke negationen i naturligt sprog korrekt, omend $E_1 1$ var tæt på. Så igen fremgår det at eleveren behersker teknikken τ_{34} i den symbolske notation. Men at de endnu ikke kan mobilisere den i almindeligt sprog.

Den næste opgave lød: Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

9 ud af 13 elever svarede som i den indledende test at $f(x) \to \infty$. E_9, E_{10}, og E_{11} forkortede brøken for derefter at sætte ind. E_8 forsøgte det samme men lavede fejl.

Ingen forsøgte at indætte et tal tæt på 0, selvom det var en teknik den del benyttede i den indledende test. Dette er sandsynligvis fordi opgaven denne gang ikke kom lige efter en opgave, som angav udregning for x-værdier tættere og tættere på det punkt hvori man ønsker at bestemme grænsen, som en mulig teknik til at finde grænseværdien.

Opgave 3 omhandler sætningen: „Lad nu e betegne en enke og m betegne en afdød mand. $\forall m\ \exists e : e$ har været gift med m". Denne skulle først negeres og siden hen omskrives til talesprog.

Ingen har negeret udtrykket korrekt. E_2 og E_8 har oversat kvantorerne korrekt til skriftsprog. En del har forsøgt at oversætte det negerede udsagn. 8 elever har oversat deres eget med kvantorer nedskrevne udsagn korrekt til skriftsprog. Yderligere 4 (E_2, E_5, E_{12} og E_{14}) har brugt forkert symbolsk notation til negationen, som de sidenhen har oversat. E_5 og E_{15} ville ikke kvantificere over alle afdøde mænd ($\forall m$). De skriver „for så ville alle mænd være døde". Her kommer hverdagslogikken ind og skaber en barriere for den matematiske logik. Hverdagserfaringerne overvinder logikken fra matematikforløbet.

Opgave 4 omhandler sætningen „Lad igen e betegne en enke og m betegne en afdød mand: $\exists e\, \forall m : e$ har været gift med m“

Her har E_1 og E_3 negeret kvantorerne korrekt, men da de ikke har opskrevet resten af udtrykket, er det svært at vide om de mener det rigtige. E_{10} har lavet en korrekt negering. E_5 har ikke svaret på opgaven; men har i margin sat en pil fra opg 3 til opg 4 og skrevet „ens udsagn?“. Dette er interessant , da det var denne elev der i prætesten påpegede at det ene udsagn gjaldt for begge. Så hun oplever klart en barriere der forhindrer hende i at mobilisere den viden hun havde opgaven med planeter og stjerne fra prætesten. Måske skyldes det de symbolske kvantorer; men nok også som vi så ovenfor, at indholdet af sætningen strider mod hendes verdensopfattelse.

Opgave 5 lød „Hvad kan man bruge ϵ-δ-definitionen af grænseværdi til.“ 7 elever svarede at man kan bruge definitionen til at finde grænseværdien med. 1 svarede til at tjekke den gættede grænseværdi.

7.3 Elevernes skriftlige evaluering

De fleste elever giver udtryk for at forløbet har været for svært. En enkelt elev påpeger de mange nye tegn som årsag til en del af forvirringen.

Der var delte meninger om hvorvidt gruppearbejdet gav udbytte.

På spørgsmålet om hvad eleverne selv mener de har lært, er der flest der hæfter sig ved den nye notation, enkelte skriver kvantorer og/eller noget om grænseværdier.

8 Evaluering af undervisningsforløbet

Generelt må man sige at forløbet var for ambitiøst i forhold til den forhåndenværende tid, og elevernes abstraktionsevne.

Eleverne blev hæmmet af den ny notation, men måske især af at de mht. logikken har bevæget sig ind på et nyt felt i matematikken.

Arbejdet med kvantificerede udsagn kunne med fordel have været udvidet betragteligt. Eleverne havde svært ved at negere AE- og EA- udsagnene, også i naturligt sprog. Flere elever mente at i AE-udsagnet havde planeter og stjerne en 1-1-tilknytning.

Der blev kun i en besvarelse nævnt at EA-udsagnet var et specialtilfælde af AE-udsagnet. Andre mente at de to udsagn var hinandens modsætninger.

Disse problemer kan imødekommes ved at i stedet for at eleverne selv skal opdage de mulige situationer, så at have illustrationer af de forskellige mulige situationer. Man kan så give elverne de to udsagn samt de to negerede udsagn uden at fortælle hvordan udsagnene hænger sammen. Så kan elevernes opgave være at bestemme hvilke udsagn der gælder for hvilke situationer. Dette kan muligvis før til at de opdager at for EA-udsagnene gælder altid samtidig det tilsvarende AE-udsagn. Det burde også give mulighed for at se et mønster der viser hvilke udsagn der er hinandens negation. Så her ligger et klart forbedringspotentiale til et forløb om negering af kvantificerede udsagn. Som det kunne være interessant at afprøve. Man kunne lade eleverne bestemme hvilke udsagn der gælder hvis illustrationen omfatter alle stjerne og planeter, og hvad man kan slutte hvis det viste kun er et uddrag af virkeligheden. Gør man ikke opmærksom på de to forskellige muligheder, vil der kunne være tvivl om hvilket et af tilfældene eleverne agerer ud fra, og det vil kunne give anledning til misforståelser, jvf. Durand-Guerriers analyse af implikationer på side 20.

En anden forbedringsmulighed, er at starte med både et A-udsagn og et E-udsagn, og lade eleverne arbejde med negation heraf (i det gennemførte forløb arbejde de kun med negation af et A-udsagn, inden de blev kastet ud i dobbelt kvantificerede udsagn). Med en institutionel fase herefter ville eleverne opnå teknikken τ_{34} til negation af et enkeltkvantificeret udsagn. Denne teknik ville så kunne udvides til de multikvantificerede udsagn.

Så indenfor undervisningen i kvantorer, ser jeg flere forbedringsmuligheder som det kunne være spændende at teste.

Mht. ε-δ-definition af grænseværdi har jeg sværere ved at se forbedringpotentialerne, udover at der skal bruges meget mere tid, så der kan løses flere opgaver af hver type. Så eleverne bedre kan komme til at beherske teknikkerne der skal benyttes i opbygningen af teorien. Der går lang tid før definitionen og symbolerne kan mobiliseres i en større sammenhæng.

Når man lader eleverne lege ven og fjende leg med hinanden vil de ikke altid opdage at deres valg af δ ikke virker for et givent ε. Så denne leg burde være mere lærerstyret, så det kan sikres at fjenden udnytter de fejlvalg der kommer.

8.1 Reproducerbarhed

Da jeg ikke er kommet frem til en tydig konklusion er det ikke så relevant at tale om reproducerbarhed; men gennemfører man forløbet i en anden 3.g klasse vil man formodenligt komme frem til at der opstår samme vanskeligheder hos eleverne. Det vil sandsynligvis hjælpe i retning af lidt mere succes med forløbet hvis det er en erfaren underviser der står for undervisningen, og hvis det samtidig er en lærer der kender klassen, vil det nok også være en fordel.

9 Konklusion

I dette kapitel vil jeg forsøge at svare på de spørgsmål jeg stillede i problemformuleringen.

Min analyse af matematikken i kapitel 4, viste at det skulle være muligt at udvide MO_2 til MO_K, således at den også kommer til at indeholde MO_1 ved brug af ε-δ-definitionen af grænseværdi. Men erfaringerne fra forløbet i klassen er at eleverne ikke nåede at beherske teknikker, som tilhører praksisdelen af MO_K og har med grænseværdier at gøre; men som ikke er indeholdt i MO_1. Jeg mener dog at det er værd at undersøge nærmere, i et længere undervisningsforløb

Jeg ville undersøge om jeg kunne give eleverne kendskab til propositionslogik, kvantorer og implikationer. Der blev lagt mest vægt på kvantorer. Mht kvantorer har elverne lært noget. En del elever kom til at beherske teknikken τ_{k4} til negation af kvantificerede udsagn, men de kan kun mobilisere den i symbolsk notation. Oversættelse mellem talesprog og symbolsk notation nåede elverne ikke at beherske. Implikationer kom jeg ikke nærmere ind på i forløbet. Men jeg tror at det er muligt at lave et forløb, så eleverne lærer at beherske logikken. Det kræver bare længere tid for elverne at vende sig til det nye stofområde.

Jeg ville også undersøge om eleverne havde vanskeligheder med håndtering af grænseværdier i forskellige registre ligesom i undersøgelsen af Moru. Eleverne klarede sig fint i den grafiske repræsentation og med tabelværdierne. Notationsmæssigt og forklaringsmæsigt havde de lidt vanskeligheder. I den algebraiske repræsentation klarede de sig generelt dårligt. Så på den grafiske side så de ud til at være stærkere end de amerikanske studerende; men på andre punkter klarede de sig dårligere.

Er det så muligt at lave et forløb så eleverne lærer at beherske logikken, som samtidig giver eleverne et bedre greb om grænseværdibegrebet? Det er det muligvis, men der skal nok lægges mere vægt på logikken i starten, så eleverne behersker teknikken til negation af kvantificerede udsagn, inden de skal benytte den i opgaver omkring grænseværdier. I dette tilfælde gav eleverne i hvert fald udtryk for at de formelle definitioner har forvirret mere end de har gavnet. Og det tyder ikke på at de gennemførte undervisningsforløb har ændret ved elevernes opfattelse af grænseværdibegrebet, men deres grænseværdibegreb var også ganske godt på forhånd. Kun indenfor den algebraiske og den beskrivende repræsentation, viste de tegn på problemer. Forløbet lagde ikke op til at hjælpe eleverne i den algebraiske repræsentation, da det er den der traditionelt lægges vægt på. Men det er muligt at forløbet kunne forbedre deres beskrivelse af teknikkerne.

Et andet spørgsmål jeg stillede var: Er det muligt at eleverne efter forløbet kan være i stand til at vise at grænseværdien for summen af to funktioner er summen af grænseværdierne ved et passende valg af δ for givet ε? Jeg ville også teste om eleverne gennem forløbet kan blive i stand til at bevise entydighed af grænseværdier. Hertil må jeg klart svare nej, ikke gennem så kort et forløb.

Mht. lærebøgerne så beskæftiger de sig ikke meget med eksplicitte grænseværdier, de går hurtigt videre til differentailkvotienter. Men indenfor differentialregningen bliver der bygget to stort set uafhængige, ufuldstændige MO'er op analogt til MO_1 og MO_2. Så der undervises i to ukomplette MO'er, som potentielt kan udvides til en fælles komplet MO.

Jeg ser fortsat et potentiale i at undervise i kvantorer og ε-δ-definitionen af grænseværdi. Men det kræver et forløb af længere varighed, at undersøge om det kan give eleverne en bedre beherskelse af teknikker, teknologier og teorier mht. grænseværdibegrebet.

Litteratur

Adams, R. A. (1995). *Calculus: a complete course* (3. udg.). Addison-Wesley.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. og Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics 59*, 235 – 268.

Bloch, I. og Schneider, M. (2004). *A various milieu for the concept of limit: from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof.* Artikel præsenteret ved ICME 10, se `http://www.icme-organisers.dk/tsg12/papers/bloch-schneider-tsg12.pdf`.

Blossier, T., Barrier, T. og Durand-Guerrier, V. (2009). Proof and quantification. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference vol 1*, 83–88.

Bosch, M., Chevallard, Y. og Gascon, J. (2005). Science or magic? the use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education WG 11*, 1254–1263.

Clausen, F., Schomacker, G. og Tolnø, J (2006). *Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog B2.* Gyldendal.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? from logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematic 53*, 5–34.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education 40*, 373–384.

Durand-Guerrier, V. og Arsac, G. (2005, October). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics 60*(2), 149–172.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Reasearch in Mathematics Education 1*(2), 1–16.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Lindstrøm, T. (1996). *Kalkulus* (2. udg.). Universitetsforlaget A/S.

Moru, E. K. (2006). *Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho*. Upubliseret doktorafhandling. Capetown: University of the Western Cape. Lokaliseret 15. januar 2010 på `http://etd.uwc.ac.za/usrfiles/modules/etd/docs/etd_gen8Srv25Nme4_8703_1182747965.pdf`.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a funktion at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education 7*, 431–454.

Nielsen, K. E. og Fogh, E. (2007). *Vejen til Matematik A2* (2. oplag, 1. udg.). Forlaget HAX.

Roh, K. H. (2009). Students' understanding and use of logic in evaluation of proofs about convergence. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference vol 2*, 148–153.

Selden, J. og Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29*(2), 123–151.

Sonnenborg, M. (2007). *The Didactic Potential of CAS*. Specialerapport. Lokaliseret 15. januar 2010 på `http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/MS-CAS/studenterserie2-Martin.pdf/`.

A Undervisningsnoter

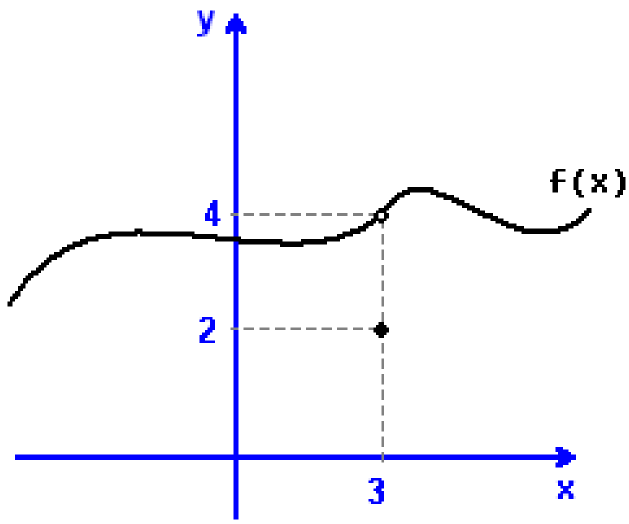
A.1 Materialer udleveret til første og anden lektion

1 Starttest

Opgave 1 Hvis følgende sætning gælder: Et hus kaldes grønt netop hvis alle mursten i huset er grønne
Hvad skal der så til for at et hus ikke kaldes grønt?

1. ingen mursten er grønne
2. netop en mursten er ikke grøn
3. alle mursten er grønne
4. mindst en mursten er grøn
5. mindst en mursten er ikke grøn

Opgave 2 Se på grafen for $f(x)$



Hvad er grænseværdien for $x \to 3$

- Den eksisterer ikke
- Den er 2
- Den er 4

Begrund dit valg

Opgave 3 Se på de to nedenstående udsagn:

1. For alle planeter findes der en stjerne som de kredser om
2. Der findes en stjerne som alle planeter kredser om

Er der forskel på de to udsagn? Prøv at tegne de to situationer

Opgave 4 Givet tabelværdier for f(x)

x	$f(x)$
0,7	1
0,74	1,8
0,749	1,89
0,7499	1,899
0,74999	1,8999
0,749999	1,89999

Antag at mønsteret fortsætter. Hvilken værdi går x mod og hvad med f(x)? Opskriv som en grænseværdi.

Opgave 5 Hvordan kan man se om en funktion $y = f(x)$ har en grænseværdi L når x går mod 0? Ved at:

1. sætte $y = 0$
2. beregne $f(1), f(2), f(3)$ osv. og observere resultatet
3. beregne $f(x)$ for $x = 1/2, 1/4, 1/8$ osv.
4. indsætte 0 for x i funktionen og beregne værdien
5. indsætte et tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter y-værdien
6. indsætte tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter den værdi y nærmer sig når x nærmer sig 0

Vælg det svar der passer bedst med din tilgang. Og forklar hvorfor du gør sådan.

Opgave 6 Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x+1)^2 - 2(x+1)^2 + 1}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

2 Gruppeopgave

2.1

Den første opgave er en gentagelse fra testen. Den lyder:

Hvis følgende sætning gælder: Et hus kaldes grønt netop hvis alle mursten i huset er grønne.

Hvad skal der så til for at et hus ikke kaldes grønt?

2.2

En anden opgave lød: Er der forskel på de to nedenstående udsagn?

1. For alle planeter findes der en stjerne som de kredser om
2. Der findes en stjerne som alle planeter kredser om

Spørgsmål 1 Hvad er jeres fortolkning af de to udsagn?

Spørgsmål 2 Hvad skal der til for at det første udsagn er falsk?

Spørgsmål 3 Hvad skal der til for at det andet udsagn er falsk?

2.3

Kvantorer Udsagnene kan også skrives med kvantorerne $\exists$ som betyder „der eksisterer“ og $\forall$ som beyder „for alle“.

Lader vi p betegne en planet og s betegne en stjerne lyder de to udsagn:

1. $\forall p \exists s : p$ kredser om s
2. $\exists s \forall p : p$ kredser om s

Opgave Skriv med samme notation hvad det vil sige at udsagnene ikke gælder. Dette er svaret på spørgsmål 2 og 3 i den nye notation.

3 Definition af grænseværdi

3.1 Endelig grænseværdi

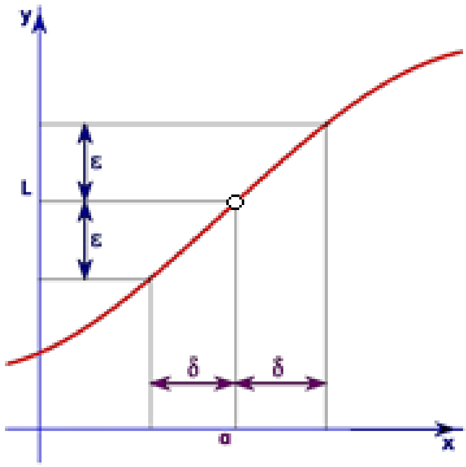
Lad $f(x)$ være defineret på et interval omkring a; men ikke nødvendigvis i a.

Funktionen $f(x)$ siges at have grænseværdien L for x gående mod a, og vi skriver $f(x) \to L$ for $x \to a$ hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et δ så $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dette kan også udtrykkes således:

Definition

$$\exists L \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L$$



Definitionen sikrer at man kan få $f(x)$ så tæt på L som det skal være (inden for afstanden ε af L) ved at indsætte x-værdier der er tilstrækkeligt tæt på a (indenfor afstanden δ af a); men ikke a selv, da grænseværdien ikke afhænger af $f(a)$ men kun af hvad der sker i nærheden af a.

Man kan sige at uanset hvilket ε fjenden angriber med kan det afparreres med et δ som sikrer at så længe x ligger indenfor en afstand δ af a, bortset fra i selve a, så ligger $f(x)$ indenfor afstanden ε af L.

3.2 Uendelig grænseværdi

Lad $f(x)$ være defineret på et interval omkring a; men ikke nødvendigvis i a.

Funktionen $f(x)$ siges at have grænseværdien ∞ for x gående mod a, og vi skriver $f(x) \to \infty$ for $x \to a$ hvis der for ethvert T eksisterer et δ så $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > T$.

Dette kan også udtrykkes således:

Definition

$$\forall T \exists \delta : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > T \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

3.3 Ensidig grænseværdi

På tilsvarende vis defineres grænseværdien fra højre:
Lad $f(x)$ være defineret på et interval $]a; b]$ fra a.

Funktionen $f(x)$ siges at have grænseværdien L for x gående mod a fra højre, og vi skriver $f(x) \to L$ for $x \to a_+$ hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et δ så $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dette kan også udtrykkes på denne måde:

Definition

$$\exists L \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a_+} f(x) = L$$

Grænseværdien fra venstre kan defineres tilsvarende.

3.4 Opgaver

1. Oversæt definitionen i afsnit 3.1 til almideligt sprog.

2. Hvad vil det så sige at grænseværdien ikke eksisterer for $x \to a$? Brug definitionen og erfaringer fra opgave 2.2 & 2.3

4 Gruppeopgave ε-δ-x-kamp

I denne øvelse skal I arbejde sammen to og to.

Det ene hold „gætter“ på en grænseværdi L som de vil forsvare i kampen.

Det andet hold er fjenden der kommer med et ε (eller T hvis $L = \infty$).

Forsvarerne parrerer nu med et δ

Til sidst må fjenden vælge et $x_0 \in]a-\delta; a+\delta[\setminus a$ som evalueres (indsættes i funktionsudtrykket). Hvis $f(x_0) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ ($f(x) > T$ for $L = \infty$ har forsvarerne vundet. Hvis $f(x) \notin]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ ($f(x) < T$ for $L = \infty$ er der to muligheder. Enten er L ikke den søgte grænseværdi eller også har forsvarerne ikke været gode nok i deres valg af δ.

Fjenden angriber igen med et nyt ε, ialt angriber fjenden mindst 3 gange pr. grænse.

Holdene skiftes til at være forsvarer og fjende.

1. $\lim_{x\to 1} 2x - 2 =$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2} =$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} =$
4. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} =$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$

Hvis L er grænseværdi vil det altid være muligt for forsvareren at vinde; hvis L ikke er grænseværdi er det altid muligt for fjenden af vinde.

Dette er en anden måde at tolke $\exists$ og $\forall$ på. „$\exists$“ betyder at man selv må vælge, „$\forall$”betyder at fjenden må vælge.

5 Gruppeopgave

Se på følgende funktioner og afgør vha definitionen om grænseværdien for $x \to 0$ eksisterer.

1. $f(x) = x * \sin \frac{1}{x}$
2. $g(x) = \frac{1}{x} * \sin x$

6 Opgaver

Se på følgende funktioner og afgør vha definitionen om grænseværdien for $x \to 0$ eksisterer.

1. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
2. $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
3. $h(x) = \exp \frac{1}{x}$
4. $j(x) = \exp \frac{1}{x^2}$

A.2 Materialer udleveret til tredje og fjerde lektion

1 Hvad ved vi nu?

1.1 Endelig grænseværdi

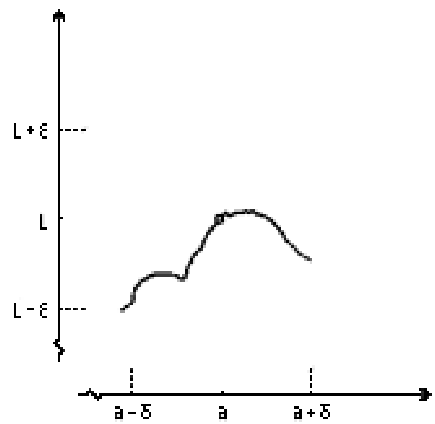
Lad $f(x)$ være defineret på et interval omkring a; men ikke nødvendigvis i a.

Funktionen $f(x)$ siges at have grænseværdien L for x gående mod a, og vi skriver $f(x) \to L$ for $x \to a$ hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et δ så $0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dette kan også udtrykkes således:

Definition

$$\exists L \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L$$



Men her gemmer $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ på endnu et „for alle“. Dette kan nemlig også skrives som $\forall x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus a : \; f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$

Så definitionen kan omskrives til:

Definition 2

$$\exists L \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus x : \; f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[\qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Vi er i timen nået frem til at $f(x)$ ikke har en gænseværdi hvis

$$\forall L \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in]a-\delta; a+\delta[\setminus x : \; f(x) \notin]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$$

Det vil sige at $f(x)$ ikke har nogen grænseværdi, netop hvis det, uanset hvilket L vi gætter på, er muligt at finde et ε, så der, uanset hvilket δ vi vælger, vil være et x_0 som ligger indenfor afstanden δ af a, hvor $f(x_0)$ er længere end ε fra L.

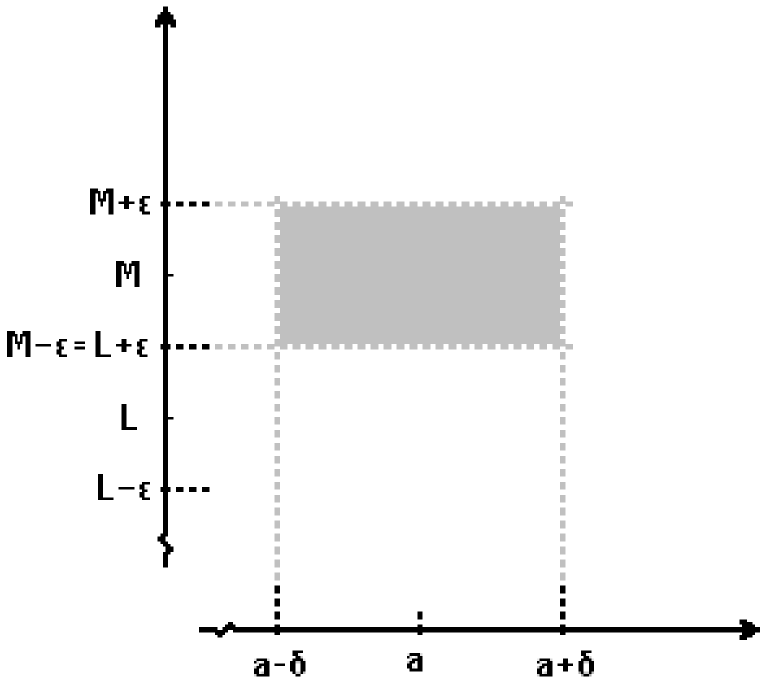
2 Eksempel

I tirsdags regnede vi på nogle opgaver som forsvarer og fjende og fjende:

Vi ser igen på opgave 1:
Forsvareren gætter på $\lim_{x\to 1} 2x - 2 = O$.
For $x_0 \in]1-\delta; 1+\delta[\setminus 1$ har vi $|f(x_o) - L| = |2x_0 - 2| < 2\delta$.
Så når fjenden angriber med ε, kan forsvareren parere med $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Vi ser også på opgave 2:
Forsvareren gætter på $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 2$.
For $x_0 \in]2-\delta; 2+\delta[\setminus 2$ har vi $|f(x_o) - L| = |\frac{x_0^2-4}{x_0-2} - 2| = |\frac{(x_0-2)(x_0+2)}{x_0-2} - 2| = |x + 2 - 2| = |x|$.
Fjenden angriber med $\varepsilon = 1$.
Uanset hvilket δ forsvareren vælger eksisterer $x_0 \in]2-\delta; 2+\delta[\setminus 2$ så $|f(x_o) - L| = |x| > 2 > \varepsilon$.
Det vil altså sige at 2 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \neq 2$.

Hvis forsvareren gætter på L som er forkert, og fjenden ved at M er rigtigt kan fjenden altid vinde ved at vælge $\varepsilon = \frac{|M-L|}{2}$.



3 Opgaver

Se på følgende funktioner og afgør vha definitionen om grænseværdien for $x \to 0$ eksisterer.

1. $f(x) = x * \sin\frac{1}{x}$
2. $g(x) = \sin\frac{1}{x}$

4 Opgave

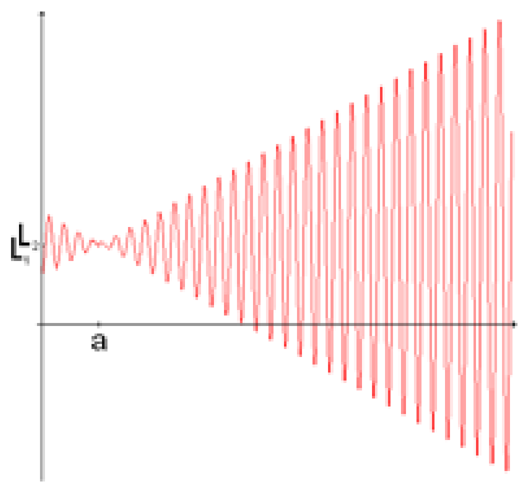
Vis at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så er $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$ ved at benytte definitionen for grænseværdi.

I får brug for trekantuligheden $|a + b| < |a||b|$

Det er muligt at vælge δ_1 så $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[\setminus a$ Tilsvarende er det muligt at vælge δ_2 så $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $x \in]a - \delta_2; a + \delta_2[\setminus a$

5 Gruppeopgave

Kan en funktion have to forskellige grænseværdier L_1 og L_2, $L_1 < L_2$ for $x \to a$ hvis L_1 og L_2 ligger meget tæt på hinanden?



Brug definitionen til at bekræfte eller afvise påstanden.

A.3 Sluttest til fjerde lektion

1 Sluttest og spørgeskema

Opgave 1 Se på følgende udsagn:

1. For alle blade findes et træ så bladet har siddet på træet
2. Der findes et træ så der for alle blade gælder at bladet har siddet på træet

1 Er der forskel på de to situationer? Lav evt. en tegning.

2 Hvad der skal til for at udsagnene ikke er opfyldt?

3 Opskriv udsagnene med brug af $\forall$ og $\exists$.
Lad t betegne et træ og b betegne et blad.

Opgave 2 Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

Opgave 3 Lad nu e betegne en enke og m betegne en afdød mand:
$\forall m\ \exists e : e$ har været gift med m

Hvis ovenstående sætning er falsk, hvad er så opfyldt (opskriv med kvantorer - $\forall$ og $\exists$)?

Oversæt sætningen til talesprog.

Opgave 4 Lad igen e betegne en enke og m betegne en afdød mand:
$\exists e\ \forall m : e$ har været gift med m

Hvis ovenstående sætning er falsk, hvad er så opfyldt (opskriv med kvantorer - $\forall$ og $\exists$?

Oversæt sætningen til talesprog.

Opgave 5 Hvad kan man bruge ϵ-δ-definitionen af grænseværdi til.

Spørgsmål 1 Hvad synes du om forløbet i matematiktimerne i denne uge?

Spørgsmål 2 Hvor svære var opgaverne i forhold til de sædvanlige matematikopgaver?

Spørgsmål 3 Hvad syntes du om gruppearbejdet?

Spørgsmål 4 Hvad har du lært i denne uges matematikforløb?

B Besvarelser af prætest

B.1 Prætest

Opgave 1 *Hvis følgende sætning gælder: Et hus kaldes grønt netop hvis alle mursten i huset er grønne*
Hvad skal der så til for at et hus ikke kaldes grønt?

1. *ingen mursten er grønne*
   E_3
2. *netop en mursten er ikke grøn*
   E_1, E_3, E_6, E_{14}
3. *alle mursten er grønne*
4. *mindst en mursten er grøn*
   E_3
5. *mindst en mursten er ikke grøn*
   E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}

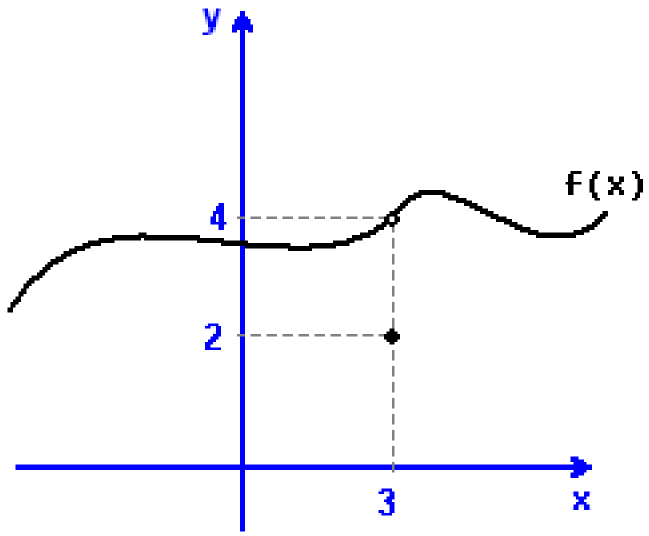
Opgave 2 *Se på grafen for $f(x)$ (B.1 på næste side)*
Hvad er grænseværdien for $x \to 3$

- *Den eksisterer ikke*
- *Den er 2*
- *Den er 4*
  E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}

Begrund dit valg

E_1 Det er der den skærer $F(x)$

E_2 Når x er lig 3 er y lig 4 for $x \to 3$ er $y \to 4$



Figur B.1: Figur til opgave 2

E$_3$ Når x er 3 er y 4

E$_4$ Når $x \to 3$ vil grænseværdien være 4, idet $f(x)$ er kontinuert, så vil $f(x)$ have en grænseværdi, og den er 4, for når $x \to 3$ vil $f(x) \to 4$

E$_5$ $f(x) \to 4$ for $x \to 3$

E$_6$ den ligger tættest på 4

E$_7$ Man kan aflæse på grafen for $f(x)$ at den nærmer sig 4 når $x \to 3$

E$_8$ Fordi $f(x)$ er lig 4 ved $x = 3$

E$_9$ 4 og 3 mødes

E$_{10}$ hvis x går imod 3, kan $f(x)$ aldrig overgå værdien 4. derfor begrænses den af værdien 4

E$_{11}$ Når $x = 3$ er $y = 4$ derfor kan den ikek blive mere end 4 når x ikek bliver mere end 3

E$_{12}$ Da 4 er på grafen

E_{13} $x = 3$ $y = 4$ (har tegnet en pil til hullet i grafen)

E_{14} for $f(x) \to 4$ for $x \to 3$

Opgave 3 *Se på de to nedenstående udsagn:*

1. *For alle planeter findes der en stjerne som de kredser om*
2. *Der findes en stjerne som alle planeter kredser om*

Er der forskel på de to udsagn? Prøv at tegne de to situationer

E_1 har tegnet: 4 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 1 planet

E_2 har tegnet: 4 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 2 planeter

E_3 har tegnet: 2 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med flere planeter

E_4 har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 3 planeter (i samme bane)
har skrevet: udsagn 1 forklarer at hver planet kredser om en tilfældig stjerne, mens udsagn 2 forklarer at der er en stjerne som alle planeter kredser om

E_5 har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 3 planeter (i samme bane)
har skrevet: Udsagn 1 gælder for begge udsagn m. udsagn 2 gælder ikke nødvendigvis for udsagn 1.

E_6 har svaret: Ja
har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 3 planeter (i samme bane)

E_7 har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet $\leftrightarrow$ 1 stjerne med 6 stjerner med hver sin planet

E_8 har tegnet: 3 stjerner med med hver sine planeter $\leftrightarrow$ 1 stjerne med mange planeter
har skrevet: Der er flere stjerner med hver sine stjerne i omløb $\leftrightarrow$ Der er kun *en* stjerne og *alle* planeter kredser om den

E_9 har tegnet: 2 stjerner med med hver sine planeter ↔ 1 stjerne med 3 planeter
har skrevet: Der er flere stjerner/systemer ↔ Der er kun et system

E_{10} har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet ↔ 1 stjerne med 4 planeter

E_{11} har tegnet: 2 stjerner med med hver sine planeter ↔ 1 stjerne med flere planeter

E_{12} har tegnet: 2 stjerner med med hver sin planet ↔ 1 stjerne med 2 planeter

E_{13} har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet ↔ 1 stjerne med 3 planeter

E_{14} har tegnet: 3 stjerner med med hver sin planet ↔ 1 stjerne med 2 planeter

Opgave 4 *Givet tabelværdier for f(x)*

x	$f(x)$
0,7	1
0,74	1,8
0,749	1,89
0,7499	1,899
0,74999	1,8999
0,749999	1,89999

Antag at mønsteret fortsætter. Hvilken værdi går x mod og hvad med f(x)? Opskriv som en grænseværdi.

E_1 $x \to 0,75$ $f(x)$

E_2 $x \to 0,75$ for $f(x) \to 1,9$

E_3 $x \to 0,75$ for $f(x) \to 1,9$

E_4 $f(x) \to 1,9$ for $x \to 0,75$ grænseværdien vil derfor blive 1,9

E_5 $f(x) \to 1,9$ for $x \to 0,75$

E_6 $x \to 0,75$ når $f(x) \to 1,9$

E_7 $f(x) \to 0,75$ for $x \to 1,9$

E_8 x mod $0,75$ og $f(x)$ mod $1,9$ limes $x \to 0,75$ limes $f(x) \to 1,9$

E_9 $f(x) \to 1,9$ $x \to 0,75$

E_{10} $f(x) \to 1,9$ for $x \to 0,75$ eller $\lim_{x\to 0,75} f(x) = 1,9$

E_{11} $f(x) \to 1,9$ $x \to 0,75$

E_{12} $x \to 0,7499\ldots$ $f(x) \to 1,899\ldots$

E_{13} $f(x) \to 1,9$ for $x \to 0,75$

E_{14} $x \to 0,75$ $f(x) \to 1,9$ for $x \to 0,75$

Opgave 5 *Hvordan kan man se om en funktion $y = f(x)$ har en grænseværdi L når x går mod 0? Ved at:*

1. *sætte $y = 0$*
2. *beregne $f(1), f(2), f(3)$ osv. og observere resultatet*
3. *beregne $f(x)$ for $x = 1/2, 1/4, 1/8$ osv.*
4. *indsætte 0 for x i funktionen og beregne værdien*
5. *indsætte et tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter y-værdien*
   E_2, E_3, E_4, E_6
6. *indsætte tal meget tæt på 0 for x i formlen og se efter den værdi y nærmer sig når x nærmer sig 0*
   E_1, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}

Vælg det svar der passer bedst med din tilgang. Og forklar hvorfor du gør sådan.

E_1

E_2 for at finde ud af hvad y-værdien går imod

E_3 For at se hvad y nærmer sig

E_4 Når man sætter 0 ind i $f(x)$, så vil vi finde grænseværdien som svarer til den y-værdi som man får

E_5 synes det er den korteste, mest præcise version

E_6

E_7 Hvis man indsætter tal tæt på 0 i funktionen for $f(x)$ ved man hvad $f(x)$ går mod når x går mod 0.

E_8 Ved at vælge et tal meget tæt på nul ser vi grænseværdien fordi y er afhængigt af x og fordi der ved 2 kan opnås ∞ høj værdi og der ved x lidt større opnås næsten grænseværdi

E_9 Det er den der passer bedst til at gå mod $x \to 0$ Det lyder mest bekendt, når man arbejder med sådanne opgaver

E_{10} Jeg vælger denne da den passer bedst til opgave-formuleringen, som siger $x \to 0$. Samtidigt er det også den som giver det mest nøjagtige resultat.

E_{11} For at finde grænseværdien skal man se hvad for et tal x går imod når $x \to 0$

E_{12} Ved at indsætte x tæt på 0, finder man en værdi, som altid vil være der, altså en grænse.

E_{13}

E_{14} så kan det ses om den går mod nul?

Opgave 6 *Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2 - 2(x+1)^2 + 1}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

E_1 $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$
Når $x \to 0$ og x divideres med et meget lille tal må $f(x)$ blive meget stort og derfor $f(x) \to \infty$

E_2 $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$
Når $x \to 0$ går $f(x) \to \infty$ fordi når man dividerer noget med 0 bliver det udefineret. Desto lavere x bliver desto højere bliver y da x er tallet man dividerer med.

E_3 Man indsætter et tal x meget tæt på 1 og finder derefter grænsen

E_4 $\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2-2(x+1)^2+1}{x}$
når man dividerer med et tal som er meget tæt på 0, så vil vi uanset hvilket tal som står få et meget stort tal da, $x \to 0$ vil $f(x) \to \infty$

E_5 indsætter $x = 0,5$ $\quad \frac{(2\cdot 0,5)^2-2(0,5+1)^2+1}{0,5} = \frac{1-2\cdot 2,25+1}{0,5} = -\frac{4,5}{0,5}$

E_6 $\frac{(2\cdot 0,9+1)^2-2\cdot(0,9+1)^2+1}{0,9} = \frac{2,8^2-(1,8+2)^2+1}{0,9} = \frac{7,84-9,84^2+1}{0,9} \qquad (9,84^2 \approx 100)$
$= \frac{7,88-101}{0,9} = \frac{93,16}{0,9} \approx \underline{\underline{93,16}}$

E_7 Jeg indsætter 0 på x's plads: $\quad \frac{(2(0)+1)^2-2(0+1)^2+1}{0} = \frac{1-1+1}{0} = \frac{1}{0} = \emptyset$
$f(x) \to \emptyset$ for $x \to 0$

E_8 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+1-2\cdot x^2+2}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-2x^2+3}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3}{x}$

E_9 Når man dividere med et rigtigt lille tal, som x er når $x \to 0$, får man et rigtigt stort tal, man får altså en værdi der går mod ∞

E_{10} Naår man dividere et tal med en værdi som bevæger sig imod 0 så får man en værdi som går imod ∞. Dvs. grænseværdien for $f(x)$ for $x \to 0 = \infty \qquad f(x) \to \infty$ for $x \to 0$

E_{11} $f(x) \to \infty$
Jeg ved at $(2x+1)^2 - 2(x+1) + 1 > 1$ når $x > 0$ og når der divideres med et ∞ lille tal vil det blive ∞ stort

E_{12} Grænseværdien er: ? 0 ?

E_{13} $f(x) \to 0$ for $x \to 0 \qquad \frac{(2\cdot 0+1)^2-2(0+1)^2+1}{0} \qquad \frac{1^2-2+1}{0} \qquad \frac{0}{0}$

E_{14} $f(x) \to \frac{(2x+1)^2-2(x+1)^2+1}{x}$ for $x \to 0$

C Besvarelser af sluttest

C.1 Sluttest og spørgeskema

Opgave 1 *Se på følgende udsagn:*

1. *For alle blade findes et træ så bladet har siddet på træet*
2. *Der findes et træ så der for alle blade gælder at bladet har siddet på træet*

1 *Er der forskel på de to situationer? Lav evt. en tegning.*

E_1 har tegnet: 2 træer med hver sine blade ↔ 1 træ med mange blade

E_2 har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade

E_3 har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med 3 blade

E_5 har tegnet: træer med hver sine blade ↔ 1 træ med mange blade

E_6 har tegnet: 3 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade

E_7 har tegnet: 3 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med 3 blade

E_8 har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med 3 blade

E_9 har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade
har skrevet: der findes blad pr. træ ↔ alle blade har siddet på ét træ

E_{10} har tegnet: 3 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade
har skrevet: der findes 1 blad pr. træ ↔ alle blad tilhører 1 træ

E_{11} har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade

E_{12} har tegnet: 2 træer med hver sine blade ↔ 1 træ med 3 blade

E_{14} har tegnet: 2 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade

E_{15} har tegnet: 3 træer med hver sit blad ↔ 1 træ med mange blade

2 *Hvad der skal til for at udsagnene ikke er opfyldt?*

E_1 at bladene for hvert træ ikke sidder på træet

E_2 at der er et blad der ikke har et træ

E_3

E_5 For alle blade findes der ikke et træ (så alle blade har siddet på træet)
Der findes ikke et træ så der for alle blade gælder ...

E_6 for alle blade findes der ikke et træ
for alle træer findes der ikke blade

E_7 1) For alle blade findes der ikke et træ bladet har siddet på.
2) Der findes ikke et træ så der for alle blade gælder at bladet ikke har siddet på træet

E_8 1: $\exists b \forall t$ så blad ikke på træet
2: $\forall t \exists b$ så blad ikke på træet

E_9 1: $\exists B \forall T$: blad ikke på træet
2: $\forall T \exists B$: blad ikke på træet

E_{10} 1) $\varepsilon B \forall T$: B sidder ikke på T
2) $\forall T \varepsilon B$: B sidder ikke på T

E_{11} 1. For et blad findes det for alle træer, så bladet ikke har siddet på træet
2. For alle træer findes der for et blad, så bladet ikke har siddet på træet.

E_{12} At der ikke findes noget træ til et blad

E_{14} for at 1. udsagn skal være falsk skal 2. opfyldes
for at 2. udsagn skal være falsk skal 2. opfyldes

E_{15} for alle blade findes der ikke et træ (så alle bladene har ikke siddet på træet)
Der findes ikke et træ så der på alle blade ikke gælder at bladet ikke har siddet på træet

3 *Opskriv udsagnene med brug af* $\forall$ *og* $\exists$.
Lad t *betegne et træ og* b *betegne et blad.*

E_1 $\forall b \exists t$ for alle blade gælder at de sidder på træet

E_2 $\forall b \exists t$ så b har siddet på t
$\exists t \forall b$ så b har siddet på t

E_3 1. $\forall b \exists t$
$\exists t \forall b$

E_5 $\forall b \bar{\exists} t$
$\bar{\exists} t \forall b$

E_6 $\forall t \varepsilon b$ hvor bladene ikke sidder på træet

E_7 $\forall b \exists T$: blad sidder på træ
$\exists T \forall b$ blad sidder på træ

E_8 $\forall b \exists t$ så blad på træet
$\exists t \forall b$ så blad på træet

E_9 1: $\exists B \forall T$: blad ikke på træet
2: $\forall T \exists B$: blad ikke på træet

E_{10} 1) $\varepsilon B \forall T$: B sidder ikke på T
2) $\forall T \varepsilon B$: B sidder ikke på T

E_{11} $\varepsilon b \forall t$ så bladet ikke har siddet på træet
$\forall t \varepsilon b$ så bladet ikke har siddet på træet.

E_{12} $\forall b \exists t$ så b har siddet på t
$\exists t \forall b$ så gælder at b har sidder på t

E_{14} 2. $\exists b \forall t$
$\forall t \exists b$

E_{15} $\forall b \exists T$
$\exists T \forall b$

Opgave 2 *Find nedenstående grænseværdi uden brug af lommeregner*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

Beskriv og forklar din fremgangsmåde.

E_1 Hvis vi dividerer med et meget lille tal (som tæt på 0.) får vi et meget stort tal.
$x \to 0$ for $f(x) \to \infty$

E_2 $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$

E_3 Det går mod ∞ fordi man dividerer med et meget lille tal vil tallet blive ∞ stort

E_5 $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$
dividerer med med ∞-lille bliver tallet ∞-stort

E_6 $x \to \infty$ da man dividerer med et meget lille tal

E_7 $f(x) \to \infty$ da hvis man dividerer med et lille tal får man et stort tal

E_8 $\frac{x^2-2x}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = x + 2 \to 2$ for $x \to 2$

E_9 Man dividerer x med det der er over brøkstregen og får grænsevlrdien til -2

E_{10} x op i $x^2 = x$
x op i $-2x = -2$
0 ind på x-plads $= 0 - 2$
grænseværdien $= -2$

E_{11} Først divideres x med x^2-2x: $\frac{x^2-2x}{x} = x-2$. Så indsættes 0: $0-2 = -2$. Så er grænseværdien $f(x) \to -2$

E_{12} når $x \to 0$ bliver $f(x)$ meget stor, altså $f(x) \to \infty$

E_{14} $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$

E_{15} $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$. dividerer man med et lilel tal bliver tallet ∞-stort.

Opgave 3 *Lad nu e betegne en enke og m betegne en afdød mand:*
$\forall m\ \exists e$: *e har været gift med m*

Hvis ovenstående sætning er falsk, hvad er så opfyldt (opskriv med kvantorer - $\forall$ og $\exists$)?

E_1 $\exists m \forall e$

E_2 $\forall m \exists \neg e$: e har ikke været gift med m

E_3 $\exists m \forall e$

E_5 $\forall m \bar{\exists} e$

E_6 $\exists e \forall m$

E_7 $\exists e \forall m$: e har ikke været gift med m

E_8 $\forall m \exists e$: e har ikke været gift med m

E_9 $\forall m \exists e$: e har ikke været gift med m

E_{10} $\forall m \exists e$: e har ikke været gift med m

E_{11} $\forall e \exists m$, e ikke har været gift med en mand

E_{12} $\exists \neg e \forall m$

E_{14} $\exists \neg e \forall m$

E_{15} $\exists e \forall m$

Oversæt sætningen til talesprog.

E_1 Der findes en afdød mand som alle enker har været gift med

E_2 [har svaret følgende] For alle afdøde mænd eksisterer der ikke en enke [har ovenover opgaveteksten skrevet] for alle afdøde mænd eksisterer en enke

E_3 Der findes en afdød mand som alle enker har været gift med

E_5 For alle mænd eksisterer der ikke en enke. (for så ville alle mænd være døde)

E_6 der eksisterer enker for alle mænd

E_7 Der eks. en enke for alle afdøde mænd

E_8 For alle afdøde mænd eksisterer en enke

E_9 for alle afdøde mænd eksisterer en enke: enkerne har ikke været gift med en nu afdød mand

E_{10} for alle afdøde mænd eksisterer der en enke og de har ikke været gift

E_{11} for alle enker eksisterer der en mand, e ikke har været gift med en mand

E_{12} Der eksisterer ikke en enke for alle afdøde mænd.

E_{14} Der eksisterer ikke en enke for alle afdøde mænd.

E_{15} for alle mænd er der ikke en enke, for så ville alle mænd være døde

Opgave 4 *Lad igen e betegne en enke og m betegne en afdød mand: $\exists e\, \forall m$: e har været gift med m Hvis ovenstående sætning er falsk, hvad er så opfyldt (opskriv med kvantorer - $\forall$ og $\exists$?*

E_1 $\forall e \exists m$

E_2 $\exists \neg e \forall m$: e har ikke været gift med m

E_3 $\forall e \exists m$

E_5 $e\bar{\exists}$

E_6 $\forall m \exists e$

E_7 $\forall m \exists e$

E_8 $\exists e \forall m$: e har ikke været gift med m

E_9

E_{10} $\forall e \exists m$: e har ikke været gift med m

E_{11}

E_{12} $\exists \neg e \forall m$

E_{14} $\exists \neg m \forall e$

E_{15} $\forall m \exists e$

Oversæt sætningen til talesprog.

E_1 for alle enker findes der en afdød mand

E_2 der eksisterer ikke en enke for alle afdøde mænd

E_3 For alle enke findes der en afdød mand

E_5 [Har ikke svaret på opgaven; men har i margin sat en pil fra opg 3 til opg 4 og skrevet] ens udsagn?

E_6 for alle mænd eksister der en enke

E_7 for alle mænd eksisterer der en enke

E_8 Der eksisterer en enke for alle afdøde mænd

E_9

E_{10}

E_{11}

E_{12} Der eksisterer ikke en enke for alle afdøde mænd

E_{14} Der eksisterer ikke afdøde mænd for en enke

E_{15} Der er enker til alle mænd

Opgave 5 *Hvad kan man bruge ϵ-δ-definitionen af grænseværdi til.*

E_1 til at definere hvor ε er og hvad grænseværdien er

E_2 til at finde grænseværdien med

E_3 At tjekke om den gættede grænseværdi er rigtig

E_5 Finde hvad $x \rightarrow$ når man kender grænseværdien

E_6 Finde hvad x går mod

E_7 Finde hvad x går mod

E_8 til at finde funktioner inden for disse intervaller

E_9

E_{10}

E_{11}

E_{12} til at finde grænseværdien med

E_{14} finde grænseværdien.

E_{15} finde hvad x går mod

Spørgsmål 1 *Hvad synes du om forløbet i matematiktimerne i denne uge?*

E_1 De har været svære. Derfor falder man hurtigt fra.

E_2 meget forvirrende desværre

E_3 Meget forvirrende

E_5 Sværhedsgraden var for svær. Hvis lavere sværhedsgrad gode idéer til gruppearbejde

E_6 Utrolig forvirrende uge

E_7 Ikke særlig givende.

E_8 Fint selvarbejde og vejledning

E_9 Alternativt, svært at forstå matematikken

E_{10} fint

E_{11} Synes det har været svært, men okay

E_{12} Meget svært og dårligt formidlet. Vi blev kastet ud i det uden nogen form for undervisning.

E_{14} Meget forvirrende?. Der var for mange nye tegn, som først skulle forstået for at „forstå“ opgaven.

E_{15} fine, men indviklet stof

Spørgsmål 2 *Hvor svære var opgaverne i forhold til de sædvanlige matematikopgaver?*

E_1 De ville nok ikke være så svære, hvis vi vidste hvad vi lavede?

E_2 meget svære når man ikke forstår dem

E_3 Svære, men fordi jeg ikke forstod det.

E_5 Svære Matematiske tegn man ikke kendte til

E_6 Meget svære

E_7 For svære da sproget var anderledes.

E_8 Svære

E_9 meget svære

E_{10} meget

E_{11} meget

E_{12} SVÆRE. Opgaverne gav overhovedet ikke mening.

E_{14} De var meget svære!

E_{15} *meget* svære

Spørgsmål 3 *Hvad syntes du om gruppearbejdet?*

E_1 Fint at snakke sammen, men mindre godt at vi ikke vidste hvad vi snakkede om.

E_2 det er nemmere så man kan snakke om det

E_3 Svært

E_5 Gode arbejdsformer til ga

E_6 Det havde været bedte med tavleundervisning da der ikke var nogen som forstod emnet

E_7 Har ikke fået noget ud at det fordi de fleste heller ikke forstod det.

E_8 fint

E_9 godt nok

E_{10} - okay 50/50

E_{11} Hvor ingen, da ingen kunne finde ud af det

E_{12} Dårligt i denne sammenhæng, da det blot gjorde os endnu mere forvirrede

E_{14} Det hjalp ikke ret meget, fordi vi alle stort set var på bar bund.

E_{15} Det har været godt, vi har kunnet hjælpe hinanden da det har været svært og indviklet

Spørgsmål 4 *Hvad har du lært i denne uges matematikforløb?*

E_1 $\forall$ står for alle. $\exists$ står for eksistere. ε står for epsilon

E_2 en masse nye tegn og en inviklet måde at bestemme grænseværdien + krig

E_3 At $\forall$ står for „for alle“ og at $\exists$ står for „der findes“. ε er et meget lille tal. L er grænseværdi

E_5 Om grænseværdiet

E_6 at $\forall$ betyder for alle og $\exists$ betyder eksistere, ellers er jeg bare blevet mere forvirret

E_7 Har lært mere om grænseværdier

E_8 lidt

E_9 En masse nye tegn

E_{10} noget med kvantorer og noget med grænse-noget

E_{11} kvantorer og grænseværdier

E_{12}
- Jeg har lært at bruge limit på lommeregneren
- Jeg skal *aldrig* læse matematik på UNI
- Jeg forstår ikke teknikken

E_{14} Lidt om grænseværdier og at det passer, men ikke ret meget :/

E_{15} hvad x går imod.

D Transkription

I transskriptionen betegner L elevernes faste lærer og U betegner underviseren. Da jeg ikke kender elverne ret godt, har det været svært at identificere dem på lydoptagelserne. Hvor det er lykkedes vil eleverne identificeres med et nummer E_n som stemmer overens med numrene i præ- og sluttesten. Andre steder kan de i stedet få et bogstav der indikerer hvornår den samme person taler. Hvor der ikke står hvem der taler er det en uidentificeret elev. Derudover er tegnforklaringerne følgende

[ ] Mine kommentarer.

. . . Pause i talen.

/. . . / Når jeg ikke kan høre, hvad der bliver sagt.

/ Når nogen bliver afbrudt i en sætning

I parantes har jeg skrevet tidsstemplet fra optaglesen, så kan man se hvor lang tid der bliver brugt på forskellige opgaver.

D.1 1. lektion - 26. oktober

Fælles opstart

U (0:00): /og så i slutningen af forløbet om I har lært noget i mellemtiden. Så det er ikke så meget en test af jer, som det er en test af mig.
[påbegynder omdeling af prætesten]
U(0:30): Jeg starter lige med at udlevere det som jeg har skrevet til jer til de første par timer.
[småstøj i klassen]
U(01:14) vi starter med de første tre sider. Hvor der er to opgaver på hver side. Og det har I en lille halv time til. I må gerne bruge alle de hjælpemidler I har lyst til, undtagen i den opgaver hvor der står at I ikke skal bruge lommeregner.
E_A (01:30) L, må jeg låne din bog?
E (01:32) Skal vi bruge den?
E_A (01:33) Det kan godt være vi skal bruge den, det ved jeg ikke noget om.

U(01:35) Det tror jeg ikke bliver nødvendigt.
[småstøj, de begynder at løse opgaverne]
E (02:25) [til sig selv] Tricky spørgsmål
E (03:11) [til sig selv] Jeg er altså virkelig bange for at det er forkert
[mumlen, sidenhen begynder nogle af elverne at tale sammen]
U (06:12) Der bliver mulighed for at diskutere bagefter.
[fortsat lidt småmumlen]

[optageren slukkes og startes igen da gruppearbejdet skal til at begynde]
(0:00) [Raslen med papir, stilhed]
/.../
(01:00) Jeg har ikke besvaret noget
(01:06) Den aller første?
/.../
[latter]
(01:31) Det var det eneste jeg skrev tror jeg.
(01:32) At den går mod uendelig når x går mod 0
/.../
U (01:42) Nu vil jeg gerne ha' at I bliver delt op i nogle grupper, sådan circa 4 i hver, og så vil jeg gerne have jer til at snakke om nogle af opgaverne. Dem som handler lidt om det logik som indgår i det her forløb vi skal til. Jeg vil gerne have det optaget, det I sidder og snakker om [nervøs latter fra eleverne]. I skal ikke tage det så tungt. I skal bare snakke som om /.../.
[mere latter]...
Er det nemmeste at vi bare tager sådan fra en ende af. Hvis I fire er sammen, og så I fire, og så I tre og I tre. [...]
(03:05) Må vi gerne gå ud så vi ikke skal snakke i munden på hinanden?
U (03:08) Helst ikke for langt væk, tror jeg.
(03:10) Nej okay.
(03:14) Skulle vi snakke om de opgaver vi lige har lavet?

Gruppearbejde - $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, E_3 og $\mathbf{E}_{14}$

(03:30) Tænk hvis man skulle sige sit navn, hver gang man siger noget.
(03:33) Emma siger [latter]
/.../
(03:39) Hvad skal der så til for at huset ikke kaldes grønt?
(03:40) Er det ikke bare at den har en enkelt mursten, ikke er grøn, så er hele huset ikke
(03:46) 5'eren, 5'eren

(03:48) mindst en.
(03:48) Nej det var ikke 5'eren
(03:50) Det er træls man ikke har det foran sig, så kan man jo ikke huske det.
(03:53) Ja det er det.
(03:58) Det er sådan lidt fordi udsagnet siger
(04:00) Jeg svarede anderledes først
(04:02) Jeg tror jeg har svaret forkert
(04:03) jeg har svaret 2
(04:04) Jeg har svaret 5
(04:05) Hvis mindst én af dem ikke er grøn, så kan det kun kaldes grønt
(04:09) Nej, det var lige præcis det der stod i 5'eren.
(04:10) Der stod jo at alle mursten var grønne
/. . . /
(04:24) Okay, hvad skal der til for at huset ikke kaldes grønt?
(04:27) Der er én . . .
(04:30) Nej nu ved jeg ikke.
(04:33) Jeg har svaret på det jeg ved er rigtigt.
/. . . /
(04:37)Er det det?
(04:38)Ja
(04:38)Nå
(04:41) /. . . / når vi ikke har valgmulighederne
(04:42) Det der med mindst én/
[i kor] ikke er grøn
(04:44) Og det var det der stod i 5'eren.
(04:46) Stod det ikke i 2'eren?
(04:50) Nej der stod det på sådan en anden, der stod det formuleret på en anden måde synes jeg bare.
(04:52) Nå, men jeg mente det der, så har jeg skrevet forkert.
[de skifter nu til næste opgave]
(04:54) /. . . / der forskel på de to?
(05:02) Ja det er der.
(05:05) Det ene det var at der er en stjerne/
(05:07) det var det jeg forklarede.
(05:09) Det forstår jeg ikke.
(05:11) Ved den ene der har planeterne hver sin stjerne, ved den anden der er det én stjerne.
(05:13) Ja.
(05:14) Som alle planeterne er rundt.
(05:16) Ja.

(05:18) Der stod de har hver én, hver planet har en stjerne de kredser om.
Ved nummer 2 der står alle planeter har/
Der findes en stjerne som alle planet kredser om,
Lige præsis
(05:26)[grinende] Jeg læste bare op.
(05:35) Hvad skal der til for at det andet udsagn er falsk?
(05:37) Hva'?
/.../ [taler meget lavt, ikke længere så sikkert]
(05:55) at de ikke har hver deres stjerner.
(06:00) Jeg tror ikke vi har mere, vi er færdige.
(06:07) U! Hvad mener du med den der spørgsmål 2 i dem der 2.2?
(06:09) At det er falsk?
(06:11) Altså det er jo bare et udsagn, det siger jo ikke ...
U (06:16) Altså hvis nu det her ikke skal være opfyldt, hvad skal der så til for at det ikke er opfyldt?
(06:25) At der enten er flere planeter eller flere stjerner
(6:26) Alt for mange stjerne.
(06:27) At de ikke har hver deres.
(06:30) De siger jo sådan set ikke at der ikke er flere stjerner, det siger bare at alle planeter har én stjerne.
/.../
(06:43) Der er to stjerner...
(06:45) Der er mere end én stjerne. Er det ikke det?
/.../
(06:50) Der står for alle planeter findes der én ... og der findes én stjerne...
(06:55) Der findes bare en stjerne de kredser om, der kan godt være andre stjerner som de bare ikke kredser om...
(07:03) Kan der ikke det?
(07:04) De siger jo ikke [meget lavt]/.../ andre sole
(07:10)... sådan nogle minisole der bare er længere væk.
/.../
(07:24) Du må gerne sige noget!
U (07:27) Ja; men jeg vil jo helst ikke røbe svaret.
(07:30) Det skal du jo på et eller andet tidspunkt.
/.../
(07:35) jeg aner ikke hvad vi skal.
(07:36) modbeviser vi ikke bare hinanden lidt nu.
(07:37) Jeg synes ikke rigtig vi kom frem til det der med . (07:40) Jeg er ikke med på hvad vi skal for at vise det faktisk, det er jeg ikke.
(07:43) Vi viser et billede af solsystemet og så siger vi: nej de kredser ikke om stjernerne, de kredser ...

U (07:51) Men hvis nu denne her sætning er forkert/
(07:54) solen er jo ikke en stjerne.
(07:59) men hvad har det med det her at gøre?
(08:00) For alle planeter findes der én stjerne, som de kredser om.
(08:06) Jeg siger bare at hvis man nu siger at nu solen den er en stjerne
(08:10) Så er der kun en stjerne pr planet eller; der er da mange flere.
/.../
(08:17) Det tror jeg.
U (08:20) Men måske skal i ikke tænke på som hvilke, altså hvordan det ser ud lige præcis i vores solsystem; men mere tænke lidt abstrakt.
(08:32) [meget stille] Det kan jeg ikke.
(08:33) Jeg synes bare solsystemet det er meget abstrakt
(08:35) Jeg synes bare du skal svare på det
U (08:38) Er i enige om hvad det der betyder og hvad det der betyder?
(08:41) Det første udsagn der har hver planet hver sin stjerne, og i andet udsagn, der har alle planeter én stjerne, som de kredser om
U (08:48) og hvis nu det her det så ikke skal være rigtigt
(08:52) 2'eren?
U (08:53) Ja, så har alle planeter ikke en fælles stjerne som de kredser om; men?
(09:03) flere, det var jo det jeg sagde, at der skal være mere end én stjerne hvis det skal være falsk.
(09:10) som de kredser om; men der kan godt være mere end en stjerne.
U(09:11) Der kan også godt være flere end en stjerne, selvom de alle kredser rundt om den ene.
(09:18) Men der skal bare være flere stjerner de kredser om
(09:20) Det er godt nok ved at være lidt...
(09:26) [selvsikkert] Så skal det bare være 1'eren
(09:29) Vi siger bare at hvis 2'eren ikke skal være opfyldt så skal 1'eren
(09:32) Så er der udelukkelsesmetoden.
(09:33) Så er der flere ...
(09:37) Jeg synes det er et mærkeligt spørgsmål.
/.../ (09:40) Skal vi tage den anden? ...
(09:47) Så det er egentlig bare..., hvad skal der til for at den der ikke er rigtig?
(09:51) Det er 2'eren den skal være rigtig.
(09:52) Videre.
(09:52) Hvad skal der til for at 2'eren ikke er rigtig.
(09:53) Det skal være 1'eren.
(09:54) Skal vi ikke bare sige det?
(09:55) Er det bare det?

(10:00) [grinende] Det kunne det faktisk godt være.
(10:03) [overbevist] Det er bare for at 1'eren ikke skal være rigtig skal 2'eren være rigtig, [resten af sætningen i kor] og for 2'eren ikke skal være rigtig så skal 1'eren være rigtig.
/.../
(10:11) [muntert] Det kunne man da godt argumentere for ...
(10:17) Nå, vi går videre til 2'eren ...
(10:20) Det står på hovedet! ...
(10:27) Er det meningen vi skal lave det her også?
(10:30) Det betyder der eksisterer, og det betyder /.../
(10:40) [tøvende, i fællesskab] Der står at for alle planeter eksisterer en stjerne, som kredser om en.
(10:56) [fortsættelse] alle planeter kredser om en stjerne
(11:00) Og så det eksister stjerne kredser alle om planeter
(11.07) godt tydet det der.
(11:08) Er det rigtigt?
(11:09) Ja det tror jeg. ...
(11.26) Ej vi skal skrive udsagnet for det ikke gælder.
(11:30) Det er bare den evindelige.
(11:35) Den der skal så den der...
(11:39) Tror du ikke vi skal lave det der?
(11:45) Der var den der ikke?
/.../
(11:51) Jeg tror bare det er en gruppeopgave
(11:54) U? Skal vi også lave den der? U (11:55) Nej.
(11:57) Så snakker vi bare lidt videre om det her tøser.
(11:59) Stjerne og planeter. Prøv lige at skrive det på det der mærkelige sprog.
(12:03) For 1 ikke skal fungere så skal det være den der.
(12:06) Så behøver du ikke skrive det igen egentlig.
(12:07) For et går imod det her. /.../
(12:12) Jeg behøver ikke skrive det igen for det står bare der.
(12:14) For den ikke fungere så skriver vi den der.
/.../
(12:23) Det kræver ligesom lidt modspil.
[latter og småsnak indtil de slukker for optageren]

Gruppearbejde - E_8, E_9 og E_{10}

(0:01) Ja. Velkommen til gruppeopgave 2, dette er E_8, E_{10} og E_9 der taler. Vi går nu igang med første opgave der hedder 2.1. E_8 forklar!
E_8(00:15) Ja, Øh, den første opgave, ej, skal jeg forklare opgaven?
(00:18) Du skal bare sige hvad vi skal i opgaven.
E_8(00:21) Okay. I opgaven skal vi forklare hvad der skal til for at et hus ikke kaldes grønt, hvis et hus kaldes grønt netop hvis alle mursten i huset er grønne. Og vi svarede alle sammen at hvis mindst en mursten ikke er grøn, så kan huset ikke kaldes grønt.
(00:36) Ja dette er korrekt da der står alle mursten.
(00:40) opgave 2.2 E_9?
Ja (00:43) Ja så skulle vi finde ud af, vi fik en opgave, hvor vi havde et udsagn vi skulle validere. For alle planet findes der en stjerne som de kredser om. Og nummer 2 der findes en stjerne, som alle planeter kredser om. Det må så betyde at den første det er så at der er en stjerne for hver, altså der er en masse forskellige solsystemer, og så må den næste betyde, at der er et solsystem med alle planeter.
E_8, E_{10}(01:12) Præsis
Spørgsmål 2. Hvad skal der til for at det første udsagn er falsk?
(01:18) Hvad skal der til for at det første udsagn er falsk? ...
(01:23) Så skal der være en stjerne, eller også, skal der være planeter som var for sig selv uden en stjerne, ikke?
(01:30) Ja hvis se en stjerne, planeter uden stjerner.
(01:33) Hvad skal der til for at andet udsagn er falsk? Der skal være mere end en stjerne, de skal alle ikke kredse om en stjerne
(01:41) Super. Opgave 2.3. Kvantorer. Udsagnet kan også skrives med kvantorerne omvendt E som betyder, der eksisterer og omvendt som betyder for alle. Lad p betegne en planet og s betegne en stjern, lyder de to udsagn. 1. omvendt A p omvendt E s, p kredser om s. ... 2 omvendt E s omvendt A p, p kredser om s.
(02:14) Skriv med samme notation hvad det vil sige at udsagnene ikke gælder. Det vil være svaret på spørgsmål 2 og 3 i den nye notation.
(02:24): Okay? Ha, ha
(02:27): Skal vi ikke bare snakke normalt?
Jeg tror det er meningen. Jeg tror ikke det er meningen at vi skal sidde "ja og ..."
(02:35) Hvis A det betyder for alle og E, det der omvendt E "der eksisterer"
(02:40) Det vil sige så: alle planeter eksister en stjerne, æh, alle planeter kredser om stjerner. Alle planet eksisterer kredser om stjerner. Alle planeter eksisterer en stjerne som p kredser om.

(03:00) Ja
(03:03) Så står der bare det der
(03:06) Jeg kunne godt tænke mig, så hvad skal vi gøre.
(03:07) For alle planeter eksisterer der stjerne, p planeten kredser om stjernen. ... Det er sådan set det der står
(03:15) Det kolon der, er det bare sådan efter?
(03:16) Ja
(03:19) Der eksisterer stjerner for alle planeter, planeter kredser om stjerne. - i stedet for
(03:27) Så det er faktisk omvendt, den der er 2er her, det var den der var 1eren før, ikke?
(03:30) Jo
(03:32) Skriv med den samme notation hvad det vil sige at udsagnet ikke gælder.
(03:35) Optager vi stadig?
(03:35) Ja
(03:41) Så hvad har vi? Vi har den der "for alle planeter findes der en stjerne som de kredser om", så det vil sige at for alle planeter gælder der ikke en stjerne som de kredser om. - de ikke kredser om.
(03:50) Ja?
(03:52) Hvad vil det sige "for alle planeter gælder der findes en stjerne
(03:54) Det vil sige det er den der
(03:55) Enig
(03:59) Så omvendt A p omvendt E s
(04:04) Forklar
(04:05) For alle stjerner gælder der findes en planet eksisterer en stjerne, ... som ikke kredser, må man så sige
(04:15) Øh
(04:16) De skal jo kredse om den her, skal de kredse om en stjerne, ... kredser om en stjerne så kan man sige at den også er falsk. Så kan man så sige: p kredser ikke om s.
(04:27) Ja
(04:32) Hvad kan vi ellers sige for at falsificere 2.2?
(04:37) For alle planeter finder der en stjerne som de kredser om.
(04:54) Hov den er så lavet forkert, den skal være omvendt
(04:58) Det vil sige 1'eren skal ...
(04:59) Jah?
(05:01) ... Alle ... eksisterer der en stjerne. Det er så 2 fordi hvad det hedder det er kun en stjerne åbenbart
(05:10) Jeg troede at det var flere stjerner
(05:12) Prøv at vent

(05:14) jeg skriver bare lige under så er det meget nemmere at huske det
(05:17) Det skal være alle stjerne eksisterer der en planet for ellers, kan vi ikke sige den første der
(05:20) For alle planeter findes der en stjerne de kredser om
(05:23) Har du skrevet op?
(05:25) Alle planeter gælder der en stjerne
(05:26) For alle p eksistere én stjerne , så skal vi så sige p kredser om s
(05:35) Det er fint nok
(05:36) Men det der er jo så forkert
(05:40) Det skal være det der står her
(05:42) Det her er det der står der
(05:42) Ja
(05:48) Så det her er det der
(05:48) Det her er det der.
(05:49) Ja det kan jeg godt se, det er det der.
(05:49) Så det er forkert
(05:50) Javel
(05:51) Det der det er fint nok
(05:53) Men der skal mere til.
(05:55) Så den der er sådan set rigtig nok
(05:59) Det udsagn, der kan gøre sådan at det er falsk, ud over det?
(06:02) Åh..
E_8: (06:03)For alle planeter eksisterer en stjerne der eksisterer en stjerne for alle planeter, [. . .]
(06:35) For alle stjerne gælder en planet. . .
/. . . /
(06:48) /. . . / måde at sige /. . . /
(06:54) Så kan man så sige, for alle gælder der ikke en stjerne som den kredser om
(06:58) som p kredser om
(07:01) /. . . / for alle planeter der en stjerne
(07:03) Hvis det ikke er en planet,
/. . . / [taler i munden på hinanden]
(07:10) Så kan man så skrive, for alle planeter. . . findes der . . . eksisterer der . . . hvordan siger man så ikke? . . .
(07:21) ikke?
(07:26) Så må det være den rigtige
(07:29) Vi sætter bare en streg over E'et
(07:31) eksisterer der ikke . . . en stjerne (07:33) Ja
(07:35) og så p kredser om, p kredser ikke om, det er lige meget
/. . . /

(07:40) Det er sku' fint
(07:41) Det var det,
(07:43) Jamen vi ta'r også de næste, gør vi ikke?
/.../
(07:59) 2'eren der skal til for, den der: der findes en stjerne som alle planeter kredser om.
(08:02) Der findes ikke en stjerne som alle planeter kredser om, ville jeg så sige
(08:06) Ja, gør det
(08:06) Igen sådan et E med en streg over.
(08:08) For alle stjerner
(08:11) Vi må ha' lov til at være lidt alternative
(08:15)/.../ *ikke* en planet, og så som den kredser om...
(08.22) 2.2
(08:25) For alle
(08:27) Det bliver nok et festligt indslag, det gør ikke så meget
(08:30) alle planeter ... eksisterer ... en stjerne ... og så hvad så?
(08:40) så skal vi ha' en , har du for alle s eksisterer p s
(08:45) Ja for alle sole eksisterer der en planet
(08:47) Hva'
(08:48) p kredser ikke om s ...
(08:53) for alle stjerner eksister en planet p kredser ikke om s
(09:00) Det er endnu sværere at følge med i end almindelige tal
(09:02) Det er heller ikke tal
...
(09:09) For alle stjerne gælder en planet som ikke kredser om s
(09:11) Eller ikke tal, notationer, jeg sagde lige forkert.
...
(09:22) Nu er vi
(09:35) Vi er godt færdige efterhånden
[...]
(09:52) Dette har været en meget produktiv time
[hyggesnak]

Gruppearbejde - E_{11}, E_9 og E_{13}

(00:08) Vi synes alle sammen at 2.1 var nem, ...
(00:13) og vi siger at
$E_1$1 (00:15) jeg havde store problemer med 2.1'eren så jeg sender videre til $E_1$3
$E_1$3 (00:20) Jamen hvis et hus er grønt, hvis *alle* murstenene er grønne, så

er det jo bare én der ikke er grøn, for at
$E_1$1 (00:27) Må jeg tilføje noget tøser? Så skal der bare være en sten som ikke er grøn, så gælder udsagnet ikke.
(00:30) Fuldstændig korrekt
[hyggesnak]
(00:45) Er der forskel på de to nedenstående udsagn?
(00:48) For alle planeter findes der en stjerne som de kredser om. Der findes en stjerne som alle planeter kredser om.
(00:55) Der er stor forskel
(00:56) Det synes jeg også der er.
(00:58) at de er forskellige
(01:00) Forskellige solsystemer og det ene er et ligesom vores
(01:03) Ja altså den første der var en stjerne til hver planet
$E_1$1: [samtidig] Der kan være mange
(01:09) og i den sidste der havde de en fælles
(01:10) ja

(01:10) Hvad skal der til for at det første udsagn er falsk?
/.../
(01:20) Det er jo ligesom den der "Hvad skal der til for at huset ikke kaldes grønt?"Hvad skal der til for at det der, det er falsk? Jamen så skal der bare være en planet der ikke har sin egen stjerne at kredse om
(01:30) [usikkert] Det virker bare lidt...
(01:33) eller nogle stjerne der kredser om planeterne,
(01:39) og noget tredje det er vel at der er en planet der ikke kredser om stjernen.
(01:44) Der findes en stjerne som alle planeter kredser om.
$E_1$1 (01:47) Der skal bare være én sten, så jeg vil sige ligesom der, så der skal være en grøn planet kan man sige.
(01:49) Du skal bare tage alle mine guldkorn
(01:50) eller bare en planet der ikke kredser om den her stjerne
(01:55) Ja
$E_1$1(01:57) Den grønne mursten
/.../
(02:01) en anden opgave
(02:02) læser du lige
/.../
(02:13) omvendt E ... og for alle
(02:20) [i fællesskab] For alle planeter ... der eksisterer ... stjerne ...
(02:30) og den anden den hedder
(02:35) [i fællesskab] Der eksisterer stjerne for alle planeter (02:45) én stjer-

ne
(02:47) stjerne ... for alle ... og planeterne ... kredser om stjernerne
$E_1$1(03:02) og så skal vi lave det der om til, så det blir ... eller hvad?
/.../
(03:12) skriv med samme notation hvad det vil sige at udsagnet ikke gælder
(03:16) Det er jo. Er det ikke bare det samme? Hvor de så bare har skrevet det på matematiksprog.
/.../
(03:24) Det virker det nok lidt som, fordi i den der: for alle planeter der eksisterer en stjerne, kredser om stjernen.
(03:30) Det gi'r ikke meget mening men ...
(03:42) en kunstpause
(03:45) Jeg aner ikke hvad vi skal gøre
$E_1$1 (03:48) Vi kan lave et tegn for nogle ...
(03:55) Jeg forstår det stadigvæk ikke.
(03:58) Det gør jeg heller ikke.
$E_1$1 (04:00)[i spøg] det gør jeg
(04:02) $E_1$1 forstår det heller ikke. ...
(04:11) [forbavset] Nej, den optager stadigvæk. ...
$E_1$1 (04:25) Nu skal vi bruge det vi lærte i opgave 2.2
(04:27) Jamen 2.2 ikke også, der sagde vi for at det der ikke skulle, eller for at det skulle være falsk ... så skulle der være en planet der ikke har en stjerne eller en stjerne der ikke var en planet omkring. En planet der ikke havde en stjerne.
(04:40)Hvordan siger du?
(04:42) En planet ikke har en stjerne
(04:45) Det kan også være hvis der er to /.../
(04:50) Det kan også være hvis der er en planet
(04:52) to planeter
$E_1$1 (04:53) Man kan også bare at for at 1'eren den skal være falsk, så skal 2'eren gælde
(04:58)?
$E_1$1(04:58) Kan I ikke se det?
(05:02) jo
05:03 Hvis man bare sætter de to mod hinanden ... de siger jo hver deres ting ... så for at den anden skal være forkert, så kan man nævne den anden ...
(05:10) Det er forvirrende at høre det bagefter
(05:15) Så hvis man tager den ene og sætter den op med den anden.
$E_1$1(05:16) for alle planeter findes der en stjerne som de kredser om for at det ikke skal gælde

(05:20) Ja, ja; men jeg forstår det godt
$E_1$1(05:21) så skal der findes en stjerne som alle planeter kredser om
(05:23) Ja eller også skal der bare være en planet der ikke kredser om en stjerne. Eller to der kredser om den samme. Eller tre der kre...
(05:30) Så det er jo ikke automatisk at den ene mod den anden
(05:35) Nej $E_1$1. fy
$E_1$1(05:37) Det tror jeg og det skyldes udelukkende at de er /.../ og det er dermed svaret på opgave 2.3
...
(05:49) og så et E ...
L(05:55) Så kan man oversætte det der kolon til så, planeten kredser om stjernen
(06:05) Så!
/.../
(06:16) For alle planeter ...
(06:26) Og så skal du skrive af, så stjernen kredser om stjernen /.../
(06:35) Så planeten kredser om stjernen ...
(06:43) Det skal være det sidste

(06:46) Hvordan laver du dem til at det er, at det ikke gælder?
(06:50) Det ved jeg ikke
(06:52) nu er jeg forvirret...
(06:55) Det er jeg også...
(07:00) jeg forstår det ikke...
(07:02) jeg forstår det heller ikke
$E_1$1(07:07) Har I fundet ud af det, piger?
[griner]
(07:28) Kan vi ikke lave den om til: for alle planeter eksisterer der *ikke* en stjerne
(07:33) ja, bare sæt ikke ind.
(07:34) Det er vores svar ikke
(07:39) Slut, færdig
$E_1$1(07:40) Men det kan det
(07:44) Ikke det er en skråstreg
(07:50) Så sætter vi bare en skråstreg ind.
(07:55) Roger over.

D.2 2. lektion - 27. oktober

Fælles opstart

L (00:15) Vi er klar til at gå i gang.
U (00:22) Jamen godmorgen ... i dag er det så at vi skal til at i gang med grænseværdier. Jeg ved godt at I har haft om grænseværdier før. Men nu prøver vi at tage det på en lidt anden måde, som måske kan forklare noget af det lidt anderledes. ... Har I læst det med definitionen af grænseværdien? Med ε'er og δ'er?
(00:50) [Eleverne bekræfter]
U (00:53) Er der nogen der vil prøve at forklare hvad det er der sker? ...
U (01:13) Gav det overhovedet nogen mening, det der stod?
(01:16) [Eleverne benægter]
U (01:38) [skriver samtidig på tavlen] Hvis vi nu har en funktion $f(x)$, og vi gerne vil finde grænseværdien af /.../ ... Så er det jo den værdi, som vi synes at $f(x)$ skulle ha' hvis den var defineret i det her punkt. Det som passer ind i kurven. Og det vi vil det er at vi vil kunne komme så tæt på som muligt på den værdi. Det tror jeg også I har, det står også I jeres bog. At jo tættere på x man kommer, jo tættere på f skal man så komme. Og det er det vi skriver at ...
U (02:39) For alle ε eksisterer et δ, så afstanden mellem $f(x)$ og L som vi kalder grænseværdien, er mindre end ε, hvis I vælger/
(03:20) Hvad er ε?
U (03:22) ε er et lille tal.
U(03:30) Så hvis, så længe at vi vælger x-værdier der ligger her mellem $a-\delta$ og $a+\delta$, så ligger $f(x)$ mellem $L+\varepsilon$ og $L-\varepsilon$. Og så kan vi så vælge ε lidt mindre, så er vi nødt til også at vælge δ endnu mindre.
U(04:09) Giver det nogen mening? ...
(04:13) Meget lidt ...
U (04:30) Man kan også sige at uanset hvilket ε som fjenden kommer med, så skal vi kunne vælge et δ, som gør at så længe vi holder x-værdien indenfor den afstand af a, så er det indenfor den afstand af L oppe i funktionsværdien. ...
(05:00) Det er bare sådan lidt mere indviklet når du bruger alle de der tegn der som vi ikke helt forstår.
U(05:05) Det er meget små tal.
(05:09) Og den der mærkelige en der, den der ligner lidt et s, er det så et delta x.
L(05:15) Vi plejer at kalde den Δx - det er det samme.
(05:20) Godt.

(05:23) Når der er mange nye tegn så tager det længere tid, også at læse det ...
L (05:35) Jeg tror det hjælper når I kommer til at sidde med det der ven og fjende. Altså nogle konkrete tal.
U(05:45) Men det kan være vi skal starte med det. Og så kan vi gå til bage til at finde ud af, hvad så ifølge definitionen, hvad det så vil sige at der ikke eksisterer en grænseværdi. Det kan vi så tage bagefter.
U(06:00) Så hvis I bladrer op på side 7 ... så er der en lille holdopgave, hvor I sætter jer sammen i grupper af fire igen ligesom i går, hvor I så skal gætte på grænseværdien af en funktion, det ene hold, som derefter skal forsvare denne her grænseværdi. I må gerne bruge lommeregner. Så skal det andet hold vælge et ε. Altså to og to indenfor de der 4-mandshold, hvor det ene hold så vælger L som skal forsvares, og så vælger det andet hold et ε, hvor de så vil sige, at indenfor det ε skal funktionsværdien være. Og så får det andet hold lov til at forsvare sig med et δ, at de tror at så længe man er indenfor den afstand af 4 så er man også indenfor den afstand af L. Og så får fjenden igen lov til at vælge et x der ligger herinde imellem som man så regner ud og ser om det rent faktisk ligger derinde imellem.
(07:24) Jeg tror altså ikke jeg forstår legen. ...
L (07:34) Skal vi tage den første, U, sammen?
U (07:35) Ja.
L (07:37) Det kunne vi da godt gøre. ...
U(07:43) Den første den hedder [skriver på tavlen]. Grænseværdien af $2x-2$, når x går mod 1... Er der nogen der vil komme med et gæt på hvad den der grænseværdi er? ... Eller bare vil fortælle hvad grænseværdien er? ... Nogen der har et bud? ...
L (08:28) Det er meget meget nemt.
/.../
U (08:37) Ja, det var et gæt.
L(08:39) Når x er tæt på 1, hvad er $2x$ så tæt på?
/.../
U(08:59) så skal fjenden komme med et ε f.eks?
L(09:05) Er der nogen der har et godt bud på et lille tal?
(09:07) Hvor lille?
L (09:08) Det bestemmer I.
(09:13) $0,01$
U (09:15) $0,01$ [skriver på tavlen] ... Hvis vi så ved at sætte et x ind i det her, skal være sikre på at afstanden mellem $f(x)$ og 0 skal være mindre end det her, hvad kan vi så vælge som Δx for at vi er sikre på at der ikke er for langt... nogen bud? ... et gæt? Ja?
(10:05) $0,009$

U (10:15) Så kan fjenden så komme med et x som skal ligge mellem L plus det her altså $1,0009$ eller $1-\Delta x$ som er $0,991$. ... Nogle forslag til hvad vi skal prøve?
L(10:50) Hvad er det for nogle tal, er I med på hvad det er for nogle tal U snakker om?
(11:03) Nej.
U (11:05) Vi skal have et x som ligger imellem.
L (11:15) [nu også skrivende ved tavlen] her har vi vores 1-tal, så har vi vores δ til begge sider, her har vi vores δ. Det er vores x-akse. Så er I med på hvad det er for et tal vi har her?
/.../
L(11:33) og hvad er det for et tal vi har der?
Anna (11:38) $-1,09$ er det rigtigt?
L(11:39) Nej, vi skal starte ved 1 og så bakker vi.
A(11:40) Nå, ja okay, så er det minus 0, et eller andet.
L(11:50) 1 minus det der lille bitte tal, det bliver da aldrig negativt. Er I med på det? ... okay. Så skal vi vælge et x herinde i det her interval, i må ikke vælge det her x.
/.../ L(12:03) ε?
(12:04) Hvilken betydning er det det har?
L (12:05) Det er oppe ved y-værdierne ε er. ... Så hvad for et x ville I vælge inde i det interval her? ...
Malene(12:20) $0,999$
[skrives på tavlen]
U(12:25) hvad får vi så hvis vi sætter det ind heroppe?
L(12:30) Så må I godt tage lommeregneren frem.
[eleverne finderlommeregnerne frem og begynder at taste, lidt småsnak i baggrunden] ...
(13:06) /.../komma 002
L(13:12) Hvad sagde du?
(13:16) /.../komma 002
L(13:29) Nu har jeg så tegnet y-værdierne her. Her har vi vores grænseværdi som vi gætte på. Så har vi ε til begge sider heroppe ved y-værdierne. Ligesom vi havde δ hernede. Så hvad skal der så på af tal her? Når vi nu har det ε? ...
(13:49) Vil du ikke sige det igen?
L (13:50) Altså vi har jo vores grænseværdi L, den var 0 gættede vi på. Og så skal vi gå et ε til hver sin side, og ε var det her tal. Så hvad er det for et tal der skal stå her? ... E_3?
E_3 (14:04) /...]/
L (14:08) Ja. $-0,01$ ... og så heroppe?

E_3 (14:15) Så er det bare $0,01$.
E_a(14:17) Men skal vi ikke trække det fra 0
(14:19) Jo, det har vi også gjort jo. 0 minus $0,01$. Giver det ikke $-0,01$?
E_a(14:25) Jo ...
L(14:28) Holder vi os derinde for i y-værdi? ... $-0,002$, ligger det i det interval?
[eleverne bekræfter]
U(14:47) Det kunne jo så tyde på at vi har gættet rigtigt på grænseværdien. Men vi kan ikke være sikre før vi har prøvet alle x'erne af.
L(14:57) Hvis vi nu havde gættet forkert. Hvis vi nu havde gættet på at grænseværdien var 1. ... Kan I så se at så var det gået galt nu? ... Så skulle vi sige, så skulle der stå 1 her, og så skulle der stå $1,01$ og $0,99$. Så ville vores svar jo ikke falde indenfor det interval. ... Eller hvis I havde gættet på noget vilkårligt andet nærmest, så vores svar her, ville ikke være faldet her indenfor. ... så kunne vi sige, jamen det er ikke den rigtige grænseværdi. ...
L(15:38) Så skal vi have en ny kamp. Er det ikke tre gange? ...
U(15:48) Tror vi stadig på at det er L der er grænseværdien? 0 der er grænseværdien?
[bekræftes]
U(15:53) Så kan vi vælge et nyt ε. Hvis man var fjenden, hvad ville man så gøre nu. Ville man vælge noget der var større eller noget der var mindre?
(16:02) Mindre.
U(16:05) Noget der var mindre! Hvad ville man så vælge? ...
L(16:12) Hvor mange nuller skal vi have? ...
(16:15)Vi kan bare sætte et ekstra nul på, kan vi ikke det?
L(16:18) Du er en venlig fjende ...
[tallet skrives på tavlen]
U(16:28) Og hvad vil vi så vælge af δ? ... Ja?
(16:40) $0,0001$
U(16:50) Ja. Og så kan fjenden få lov til at vælge et x ... som jo så skal ligge indenfor den nye δ-afstand af 1. ...
L(17:17) Er I med på nu har vi så et nyt x-interval. ... Det er muligt at I lige selv skal sidde og regne det nye x-interval ud, for at I formår at vælge et x i intervallet. Kan I godt gennemskue det?
(17:36) Er det så stadigvæk det der $1+\delta$
L(17:39) Ja det er så ... og $1-\delta$. ... nogen der har et godt forslag til x der ligger i det interval? ... E_{14}
E_{14}(18:05) $0,9997$
U(18:15) Og hvad får vi så hvis vi sætter det ind? ...
L(18:50) Det der x det ligger slet ikke i intervallet ... vel?

[latter fra elverne]
L(19:00) Hvad for et x skal vi så vælge i stedet for? ... Er I med på hvor intervallet går fra og til?...
(19:15) Kan vi ikke bare sætte et ekstra 9-tal på sådan så vi siger $0,99997$ så der er fire 9-taller.
L(19:17) Jo, fordi den går hertil. Der er fire 9-taller nu. 1 minus vores δ det giver 0 komma fire 9-taller, og 1 plus den er nem nok. Det er faktisk nemmere at vælge (hvor mange 0'er var der), det er sådan set nemmere at vælge x'et her, mental. (kan I ikke se det?) end at gøre det her. I vælger det svære. ...
(19:57) Det giver $-0,0006$.
U(20:03) Er vi så indenfor intervallet? ... Ja.
L(20:28) Hvad kan vi konkludere ud af det her, når vi har gjort det to gange? ... E_4?
E_4(20:35) At grænseværdien er 0.
L(20:37) Jah, det tyder det på, i høj grad. ... Har vi så en rigtig ond fjende nu? Der kan vælge et ε? ... E_{10}, er du rigtig ond?
E_{10}(20:58) Ja, rigtig ond. Der er 100 nuller [latter i klassen].
L(21:00) Ja. Hvad hedder det tal?
E_{10}(21:04) Jah? Rigtig mange nuller. 0,00000000/
L(21:07) 10 opløftet i?
(21:10)minus.
E_{10}(21:10)Ja minus noget.
L(21:11) Ja, hvad?
E_{10}(21:13) 100.
L(21:14) Ja ... [latter i klassen]
U(21:21) Er der så nogen der vil gætte på hvad δ så skal være for at ... vi ligger indenfor, det her tal fra, ... hvilket tal står der nu her? ... Hvilket tal står der her? Eller skal vi tage det her ovre først, det er måske nemmere? ... Ja?
(21:58) /.../ 0,9. Står der så ikke 0,9 gange 10^{-100}? ... Okay, det gør der ikke!
[frustrerede udbrud fra eleverne]
U(22:12) Nej det er $0,0000$ hundrede gange, 9. ... så ... Der står $0,999$ og så hundrede af de her 9-taller. Det kan jeg ikke lige skrive op. ...
L(22:33) Det kan være vi skal have at vide hvad δ er i stedet for? ...
U(22:38) Nogen der vil komme med et bud? ...
L(22:45) E_4?
E_4(22:46) Jamen er det så ikke bare 10 opløftet i -101?
L(22:52) Det kunne man da ...
U(23:02) Og hvad for vi så $f(x)$? ...

(23:07) /.../ x først
U(23:10) Ja, vi skal lige have x først, ja.
L(23:27) Er I med på intervallet nu?
(23:33) Noget med mange 9'ere i hvert fald.
L(23:35) Nej helst ikke, der er frygteligt mange 9-taller.
(23:38) Men kan man ikke skrive den der?
U(23:40) Så må man skrive $1 - 10^{-100}$.
/.../
L(24:03) Kan I så komme med et x i det interval? ...
U(24:21) Er der nogen der kan finde et x der ligger i det interval?
L(24:36) Man kan bare sige det som 1+, eller 1− et eller andet tal. ... Har du et forslag E_8?
E_8(24:50) Hvad med $1 + 10^{-102}$?
L(24:56) Ja, godt. ...
U(25:04) og hvis vi så sætter det ind, hvad får vi så? ...
L(25:45) Hvad svarer jeres?
/.../
L(25:50) Hvad svarer den?
(25:52) Et meget stort tal.
(25:55) 1 over et meget stort tal.
L(25:56) Ja. Det gør min også, og hvis I så beder om "cirka lig med".
/.../
L(26:00) Den ligger som krølle-lig-med på enter-knappen.
(26:04) krølle ? ...
L(26:14) Den regner det om i en brøk ... 1 over et eller andet, 5 og så en masse nuller, 5 trilliarder, milliarder, måske, millioner ... hvad svarer den så i stedet for? ...
(26:31) 0
(26:32) Svarer den 0? godt nok?
[samstemmende mumlen]
L(26:34) Okay. Så er den her lidt bedre.
U(26:36) Min hovedregning, den siger $2\dot{1}0^{-}102$
L(26:39) Ja. Det gør - det svarer den her også.
(26:42) Hvad for en? Hvad svarer den?
L(26:43) 2 gange, det som U har skrevet op. ... Den her lommeregner er klart bedre end jeres.
...
(26:55) som er cirka 0.
...
U(26:58) Ligger vi så indenfor denne her afstand af 0? ... Ja det gør det, for det er et mindre tal, så vi har vundet igen. ...

(27:20) Er det nu fjenden der vinder?
U(27:21) Nej det er os der vinder når vi ligger indenfor. Og hvis det ikke ligger indenfor så er det fjenden der har vundet, og så enten så er det ikke grænseværdien, eller også så har vi lavet et forkert valg af δ. ... L(27:40) Er I ikke med på det nu?
(27:41) Jo.
U(27:44) Så prøver vi at tage nogen af de næste opgaver i grupper.
(27:55) Med 3 krige til hver?
U(27:57) Og I må meget gerne skrive ned, hvilke L'er og ε'er og δ'er og x'er og $f(x)$'er I vælger, og hvem der så vinder. Og hvis I har brug for det, så også skrive intervallerne ned, så I kan se om I vælger noget indenfor intervallet. ... Jeg tror der er en trykfejl i opgave 2. Der skulle ikke stå i anden nede i bunden. ... der skal bare stå $x - 2$ under brøkstregen. Så der står $\frac{x^2-4}{x-2}$. ... Men hvis I deler jer I nogle grupper. Skal vi have 4 og 4 eller skal vi have 4 og 5 og 5 i dag. Eller 4 og 4 og 3 og 3.
L(29:13) Hvis I sidder 3, så er der jo problemer med ven og fjende. Så er det , det er svært at dele 3 over i 2.
(29:21) Ven og fjender? Hvem har overhovedet vundet det her?
(29:25) Det har vi.
L(29:28) Vi vandt over den onde E_{10}. Der kom med 10^{-100}.
(29:34) Fordi man udregner $f(x)$ eller ?
L(29:35) Fordi vi kunne vælge et δ, og derefter et $f(x)$ sådan så det lå indenfor. ... Så han var ikke ond nok. Det kan han aldrig blive. ...
U(30:01) Hvis nu I 5 er sammen, og så I fire, og så I 5. Og så deler I jer op i ven og fjende.

Gruppearbejde - E_1, E_2, E_3 E_4, E_{14}

(30:18) Er vi fjenden? (30:19) Lige meget hvad vi er, så er det dig der skal op at forklare bagefter.
/.../
(30:33) så bare sige nogle tal. /.../
(30:42) Jeg er fjenden.
(30:45) Jeg regner ikke ud.
(30:48) Så må vi slå om det. Det er den eneste måde. Det er retfærdigt.
...
(31:00) Jeg venter fandeme på jer. Kom så!
(31:05) Hvad er grænseværdien?
(31:07) Den er 4.
/.../

(31:40) Vi siger ε: 0,3.
(31:42) Ja, prøv lige at vent.
(31:47) E_4 sagde det først.
(31:49) Vi må slå om det guys.
(31:52) Er det ikke fuldstændig lige meget. Bare vælg et tal. Det går jo altid op.
(31:54) Det går jo ikke *altid* op. Det skal være indenfor det interval før det går op. Så skal du ikke sige det altid går op.
...
(32:28) Hvad er vores x?
/.../
(32:48) Der er gået snart 33 minutter af timen.
(32:50) Hvor er det træls man kan sidde og kigge på det.
(32:53) Hvad var det så x det var?
(32:55) Det er vi ved at finde ud af.
(33:01) Den skal være mellem 1,3 og 0,097.
(33:06) Den skal ligge indenfor 0,3.
(33:10) 1,003 og 0,997
(33:13) Ja, så tager vi bare 0,9997
(33:17) Hvad siger I?
(33:18) 0,009 nej vent lidt 0,9997
(33:30) 0,9997
E_1(33:33) Og så skal vi sætte det ind.
...
(33:53) Det er snyd når man regner det ud på lommeregneren for at se ... E_1(34:04) Okay. Mit det er forkert.
(34:07) 2,9997 ...
(34:13) Det var første krig
(34:15) Hvem vandt? ...
(34:17) Hallo seriøst, hvem vandt?
(34:20) E14 vandt over sig selv. ...
(34:26) Det synes jeg sku da er underligt.
(34:28) At tallet er så stort. ...
(34:33) Jeg synes vi skal have 0,2 ...
(34:37) Det var ikke mig. Jeg gjorde bare en lille. Sådan her. ...
E_1(35:05) Så tager vi bare samme opgave og prøver igen med andre tal.
(35:08) /.../ 3 gange i hver opgave.
(35:09) Men det er jo ikke sjovt. ...
(35:12) Hvad tager I ε til? ...
(35:17) 0,002.
E_1(35:25) 0,0002.

(35:38) 0,0002.
(35:40) og x? Hvad var det det skulle ligge imellem?
(35:42) 1,002 og 0,998 ...
(35:48) Det må ikke være 1?
(35:50) Må det ikke?
(35:52) Nej
(35:53) Hvis vi så siger 0,01
(35:58) 0,999...
(36:04) Vi kan vel have 0,9999
/.../
(36:37) Ej. Det er bare en fuldstændig sammenhæng her.
(36:41) Vi vælger et helt andet tal nu end 0,2
(36:44) Men det er fordi, man kan jo se det her. Prøv at se! ... Det eneste der er forskel er at der er 2 foran. ...
(36:55) Hvad siger vi?
(36:57) 10^{-9}.
(36:58) Nej E_4
E_1 (37:00) Ja, du er bare fjenden lige nu.
(37:03) Det er også det hun gerne vil være jo.
(37:05) Hvad tager vi?
(37:08) 10 opløftet i 1000, -1000.
... (37:18) opløftet i minus tusind. Hvor - og så δ...
(37:28) Siger vi så ikke bare 10 opløftet i -1001.
E_1(37:31) 10000
(37:35) og x?
L(37:38) Er I gode til at være onde?
(37:39) Ja.
L(37:40) Det skal jeg love for. ... Hold da fast.
E_1 +?(37:46) Det er E_4 der er meget ond.
L(37:50) Det bliver svært at efterfølge dig. ...
(38:00) Hvad sagde I x det var? Det hørte jeg slet ikke
(38:14) Det giver 1 på begge sidder.
L(38:16) Nå. Det er fordi den ikke kan klare det. I kan simpelthen ikke bruge lommeregneren der.
[høj latter]
E_1(38:20) Okay der har du vundet. Ved at være ond.
L(38:23) I har tallet er 1 komma og så er det titusind 0'er og så et 1-tal jo. Det gider lommeregneren altså ikke.
(38:34) /.../ opløftet i 1 -10001
/.../
E_1 (38:42) E_4!

/.../
(38:55) Er det vores δ vi skal skrive til det?
L(38:56) Det var jeres x ikke også? Jeres ε, den har I ikke lavet om på. Og heller ikke jeres δ. Det er så jeres x. ... Nu skal I vælge et x indenfor det der interval.
(39:09) Ja, Jeg synes bare det er svært når det er sådan nogle store tal.
L(39:13) Hvad har I så? Jeres x det var ?
(39:15) Det ved jeg ikke. Hvad var det vores x det var?
(39:17) 1+/
L(39:18) Hvad var det x gik imod?
(39:20)1 i -10001
L(39:22) Hvad var det x gik imod? ... 2 eller hvad?
(39:26) Så er det +?
(39:27) Nå ja, vores x går imod 2. Ja
L(39:29) Hjalp det?
(39:31) 10 +/
L(39:31) Så har I δ der.
(39:36) Hvad får vi det så til?
(39:38) Det gir 3 ... Fedt.
(39:42) Lige præcis ...
(hører dette til hos en anden gruppe) L(39:53) Så skal du vælge et /.../ herinde i det her interval. Så kunne jeg vælge et her et sted.
(40:00) Det gir 3 /.../
(40:11) Kan det godt passe det bare gir 3?
L(40:15) Det skal helst ikke give tre.
(40:15) Det siger den
(40:20) /.../ 2
E_1 (40:25)... For det er det vores x skal gå imod. ...
(40:28) Hvis x går imod 2 ...
(40:32) Nå ja ...
(40:36) Det var den der. skal ikke skrive det ned. ...
(40:46) Har vi lavet fejl oppe i den der?
(40:48) Er den der forkert? /.../
L(40:54) Fordi x går mod 2 nu.
/.../
(41:00) Det her er slet ikke den opgave.
E_1(41:02) Nå. Okay
/.../
(41:20) første og anden krig.
L(41:25) Der blev I for onde. Den vil simpelthen ikke være med. ... Den kan ikke.

(41:33) Det er fordi vi ...

Gruppearbejde

/.../
(16:50) Hvordan er det så vi finder vores x?
L(16:52) Nu har I jeres δ ikke også?
(16:53) Jo.
L(16:56) δ det ligger nede på x-aksen ... du har tegnet det oppe på y"-aksen. ...
(17:04) Er det så ε der ligger heroppe?
L(17:04) Ja.
/.../
L(17:22) Hvad valgte I δ til?
(17:24)til at være 0,001.
(17:25) Det samme.
L(17:28) så har i så $2 \pm$ det der δ.
/.../
L(17:35) Jo det kunne man. Det ville ligge indenfor intervallet. ...
(17:47) og så skal vi bare regne det ud.
L(17:50) Ja f af det der x. Og hvad siger du E_{12}.
E_{12}(17:52) Jeg forstår det ikke.
L(17:52) Du synes det er træls.
E_{12}(17:54) jeg synes overhovedet ikke, der er noget som helst logisk idet/
(17:57) Jeg forstår godt grænseværdierne; men det er mere det der med at man skal vælge det der δ. Så kan jeg ikke tænke svaret ud over at det selvfølgelig skal være lille.
L(18:12) Det kan også godt være svært at vælge det rigtige δ.
(18:14) Så tænker jeg bare hele tiden, det skal bare være mindre ... Så synes jeg bare at alle opgaverne de bliver meget ens.
L(18:20) Det er et godt udgangspunkt at sige den skal være mindre.
E_{12}(18:27)Jeg forstår ikke hvorfor man skal vælge et lille tal. Og jeg forstår ikke hvorfor det der skal være mindre og /
L(18:30) Fordi hvis noget er grænseværdi. Vi tror grænseværdien er 4. ... Så det betyder at vi tror at $f(x)$ er tæt på 4 ... for at den skal være tæt på 4, så skal vi jo vælge et meget, meget, lille interval omkring 4. Så hjælper det jo ikke noget hvis det er et kæmpestort interval. Så kan vi ikke vise at den er tæt på 4 ... Hvis vi vælger ε til at være ± 5,/
E_{12}(19:00) For at gøre det svært for de andre skulle man jo vælge 100 som interval. Så ville det jo væresvært for dem at finde det.
L(19:04) Hvis ε var 100? ... nej fordi 4 ± 100/

(19:09) Så er det os der er de gode
L(19:10)[fortsætter sætningen] det er jo ikke nogle tal der er tæt på 4.
/.../
L(19:12) Det er jo sådan et kæmpe interval.
E_{12}(19.14) Så har de gode jo mere at vælge imellem.
L(19:17) Ja det er rigtigt. Du kan bare ikke vise noget, når du vælger sådan et kæmpe interval.
E_{12}(19.22)?
L(19:24) for så kan du jo ikke vise at den er tæt på 4! Hvad er der for nogle tal der ligger tæt på 4? ... Det er jo ikke 4 ± 100 ... hvad vil det sige at noget er en grænseværdi?
E_{12}(19.30) Det ved jeg ikke.
L(19:33) Nej. Det betyder at funktionsværdien er meget, meget tæt på 4. Uendeligt tæt på 4.
(19:40) Vores den stemmer ikke overens. Fordi vi havde regnet den ud til at være 4
L(19:50) Det er jo 2. Så den hedder 1 komma. x går mod 2 ikke også?
(19:54) Nåh ... så passer den.
L(19:57) Så når jeres δ er sådan, så må den hedde 1, ...
/.../
L(20:08) Så havde vi ret, så vandt vi
/.../