INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Abstrakt algebra i gymnasiet

- design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori

Jesper Winther Sørensen

Speciale for cand.scient-

graden i matematik

Marts 2010

IND's studenterserie nr. 17

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)

Abstract

Med udgangspunkt i en analyse af algebraens særlige karakteristika og under inddragelse af en gruppeteorispecifik læringsteori har jeg tilrettelagt et alternativt undervisningsforløb i indledende gruppeteori målrettet til andenårs gymnasieelever med matematik på A-niveau. Den teoretiske ramme om designet er dannet af elementer fra *Teorien Om Didaktiske Situationer*, mens inspirationen til forløbets følge af undervisningssituationer stammer fra et studium af det abstrakte gruppebegrebs historie.

I rapporten beskriver jeg, hvordan mit færdige undervisningsmateriale blev iscenesat, og hvordan min undervisning blev gennemført. I den efterfølgende kvalitative analyse af det realiserede forløb vurderer jeg, om forløbets situationer afstedkom den ønskede elevaktivitet, om udviklingen i elevernes mentale konstruktion af det abstrakte gruppebegreb bekræftede den indførte læringsteori, og om elevernes samlede læringsudbytte var tilfredsstillende. Da mit datagrundlag var for spinkelt til at kunne drage endegyldige konklusioner, vil jeg nøjes med at rapportere, at alle de tre analysedele gav positive indikationer.

IND's studenterserie *består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både inden for og uden for universitetets mure.*

Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer. Besøg www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

Resumé

For mange studerende markerer det første møde med abstrakt algebra en brat ændring i den studerede matematiks karakter. I stedet for at tillære sig algoritmer til at løse konkrete standardopgaver, må de lærende forsøge at tilegne sig abstrakte begreber og tankemåder, der ikke umiddelbart kan anvendes til problemløsning. Ifølge didaktikeren Ed Dubinsky er det netop det pludselige matematiske stilskifte, der er hovedårsagen til, at den abstrakte algebra volder mange studerende problemer. Stilskiftet bevirker også, at den traditionelle "forevisning-anvendelse"-undervisning, der er som skabt til indførelse af algoritmiske løsningsmetoder, ikke længere synes at være særlig velegnet. Denne diskrepans mellem stof og metodik efterlader en række matematikdidaktiske designopgaver, der består i at anvise alternative undervisningspraksiser til brug i undervisningen af den abstrakte algebras forskellige discipliner. Med denne specialerapport har jeg forsøgt at besvare den af de omtalte designopgaver, der omfatter den abstrakte gruppeteoris indledende begreber.

Med udgangspunkt i en analyse af algebraens særlige karakteristika og under inddragelse af en gruppeteorispecifik læringsteori har jeg tilrettelagt et alternativt undervisningsforløb i indledende gruppeteori målrettet til andenårs gymnasieelever med matematik på A-niveau. Den teoretiske ramme om designet er dannet af elementer fra Teorien Om Didaktiske Situationer, mens inspirationen til forløbets følge af undervisningssituationer stammer fra et studium af det abstrakte gruppebegrebs historie.

I rapporten beskriver jeg, hvordan mit færdige undervisningsmateriale blev iscenesat, og hvordan min undervisning blev gennemført. I den efterfølgende kvalitative analyse af det realiserede forløb vurderer jeg, om forløbets situationer afstedkom den ønskede elevaktivitet, om udviklingen i elevernes mentale konstruktion af det abstrakte gruppebegreb bekræftede den indførte læringsteori, og om elevernes samlede læringsudbytte var tilfredsstillende. Da mit datagrundlag var for spinkelt til at kunne drage endegyldige konklusioner, vil jeg nøjes med at rapportere, at alle de tre analysedele gav positive indikationer.

Abstract

For many students, their first meeting with abstract algebra marks an abrupt change in the characteristics of the mathematics to be studied. Instead of learning algorithmic ways to solve standard problems, the students have to acquire an understanding of abstract concepts and reasonings, not immediately applicable for problem solving. According to didactician Ed Dubinsky, this sudden change in mathematical style constitutes the main reason why many students find it difficult to learn abstract algebra. Also, the change of mathematical style seems to render the traditional "exposition-application"-teaching method unsuitable, as this way of teaching is most successfully implemented when introducing algorithms for solving repetitive problems. The discrepancy between the subject to be taught and the prevailing teaching methodology reveals a family of didactical design problems that consist in prescribing alternative teaching practices appropriate for teaching the different branches of abstract algebra. In this thesis, I present a solution to the one of the above-mentioned design problems, specifically comprising the basic concepts of abstract group theory.

On the basis of a review of the peculiar characterics of algebra and by using an existing theory on how students seem to learn group theory, I have designed an alternative course on the fundamental concepts of group theory. The course is aimed at danish second year high school students who have mathematics as one of their primary subjects. My design is theoretically supported by the core elements of the Theory of Didactical Situations, whereas the inspiration for the course's string of didactical situations was gathered during my studies of the historical genesis of the abstract group concept.

In my thesis, I describe how my teaching was carried out. In the following qualitative analysis of my realized teaching experience, I evaluate whether my situations brought about the intended student activity, whether the students' mental construction of the abstract group concept developed in accordance with the introduced learning theory and finally, whether the overall learning outcome was satisfactory.

Indhold

1 Forord

Nærværende specialerapport udgør kulminationen på et halvt års studium af matematikkens didaktik foretaget i månederne omkring årskiftet fra 2009 til 2010. I min afhandling beskriver jeg, hvordan jeg har tilrettelagt, gennemført og analyseret et alternativt undervisningsforløb målrettet til gymnasiet omhandlende de indledende begreber fra den abstrakte gruppeteori. Rapporten falder i tre hoveddele. Den første del er teoretisk, idet jeg indleder med en redegørelse for den matematikfaglige og den matematikdidaktiske baggrund for mit projekt. Den anden del af rapporten omhandler praktikken i mit forløb. Jeg beskriver her mit realiserede undervisningsforløb samt den indsamling af empiri, der fandt sted undervejs. Efter at have argumenteret for mit valg af empirisk metode, foretager jeg i rapportens tredje del en kvalitativ analyse af mine opnåede erfaringer på baggrund af min indsamlede empiri.

Indholdsfortegnelsen afslører, at de tre dele indgår med forskellig vægt i min specialerapport. Fordi jeg har valgt at lade den teoretiske del strække sig over godt halvdelen af de berammede ethundrede sider, har jeg måtte begrænse beskrivelsen af praktikken og den efterfølgende analyse af forløbet til de tilbageværende halvtreds sider. Denne vægtning afspejler, at de teoretiske undersøgelser og overvejelser, der gik forud for designet af mit undervisningsmateriale, så afgjort udgjorde hjørnestenen i mit specialestudium. At analysedelen er blevet en smule trængt, skyldes snarere en prioritering af arbejdstiden nødvendiggjort af projektets formelle rammer, end en af forfatteren foretaget rangordning af de enkelte deles vigtighed. I forbindelse med analysen og i rapportens konklusion fremsættes forslag til, hvordan en grundigere analyse kunne være foretaget, hvis tiden og omstændighederne havde været dertil.

Specialestudiet kan betragtes som konklusionen på en kandidatuddannelse. I en konklusion opsummerer og sammenfatter man sædvanligvis det netop afsluttede arbejde og de derigennem opnåede resultater og indsigter. Eftersom en væsentlig del af inspirationen til mit undervisningsforløb blev hentet i den abstrakte algebras historie, inddrog mit specialestudium alle de tre hovedbestandele af min netop afsluttede hovedfagsuddannelse. På overbygningen har jeg nemlig fokuseret mine studier omkring abstrakt algebra, matematikhistorie og matematikdidaktik. Nærværende specialerapport udgør altså ikke alene kulminationen på mit arbejde gennem det sidste halve år, men derimod kulminationen på hele min kandidatuddannelse. At få lov at sammenkæde mine matematikfaglige interesser med min interesse for at undervise i et projekt, der favner hele den didaktiske proces lige fra den indledende stofanalyse over design og gennemførelse af egentlig undervisning til den afsluttende vurdering af forløbet, har været spændende og lærerigt. Jeg håber, at min oprigtige entusiasme skinner igennem i rapporten.

Når man som enlig studerende iværksætter et projekt af et sådant omfang, må man forvente at skulle arbejde hårdt. Uanset hvor meget jeg end havde arbejdet, kunne projektet ikke have ladet sig gøre foruden den hjælp, jeg modtog fra lektor på Christianshavns Gymnasium, Henrik Peter Bang. At Henrik afså undervisningstid og overlod sine elever til min undervisning var en forudsætning for at projektet kunne gennemføres, og jeg skylder ham derfor denne tak. Derudover vil jeg gerne takke alle dem i min familie og omgangskreds, der engageret har lyttet til overvejelser omkring mit projekt. Jeres mange tanker og input har virkelig været værdsat. Til sidst en tak til min vejleder, Carl Winsløw, for hans altid beredvillige og venlige assistance.

Jesper W. Sørensen

Del I

Teori og design

2 Introduktion

Abstrakt algebra har i mere end 100 år haft en central position på universiteterne verden over både som videnskabelig disciplin og som undervisningsfag. De fleste videregående uddannelser, der helt eller delvist baserer sig på matematik, indeholder i dag mindst ét kursus i abstrakt algebra. Eksempelvis undervises både kemikere, aktuarer, fysikere, økonomer og statistikere sammen med matematikerne i lineær algebra på deres respektive fags grunduddannelser. For mange ikke-matematikere ses denne undervisning alene som et nødvendigt onde, måske fordi den abstrakte algebra forekommer dem både uvedkommende, virkelighedsfjern og svært tilgængelig. Også mange matematikstuderende finder, at deres første møde med den abstrakte matematik er problemfyldt - nogle i en sådan grad, at de helt vælger matematikstudiet fra. På denne måde kommer de første kurser i abstrakt algebra desværre alt for ofte til at spille rollen som en af uddannelsessystemets frasorterende flaskehalse. Teresia Jakobsson-Åhl understøtter denne påstand, idet hun skriver:

> *As a language of higher mathematics algebra is a gateway to future study and mathematically significant ideas, but it is often a wall that blocks the path of many* [1]

Som jeg vil uddybe i et efterfølgende afsnit, er den abstrakte algebra væsentlig forskellig fra den matematik, som universiteternes førsteårsstuderende tidligere har stiftet bekendtskab med. At det netop er denne væsensforskel, der er kilden til de studerendes problemer, giver næring til idéen om, at en mere succesfuld undervisning i abstrakt algebra (kun) kan opnås ved at anvende en undervisningspraksis, der er væsentlig forskellig fra den exposition-application-praksis, der er hovedingrediensen i universiteternes traditionelle forelæsning-opgaveregning-model. Didaktikeren Ed Dubinsky og hans kollegaer udtrykker situationen, som følger:

> *Even the very beginning of abstract algebra is a major event in the cognitive development of a mathematics student. This is especially true if, as is often the case, abstract algebra is one of the first courses a student encounters which is not dominated by memorizing formulas and imitating the solutions for set piece problems. (...) For many students, their early mathematical career consists of learning algorithms to solve repetitive problems. With abstract algebra, the abrupt change in mathematical style from learning algorithms to understanding concepts and the overall complexity of the subject imply that this course, above all, is not likely to succeed if taught in the traditional manner.*[2]

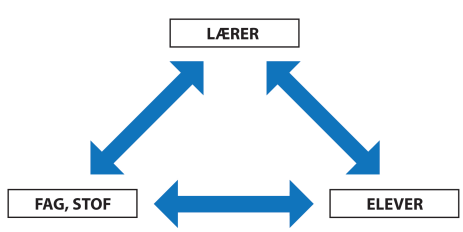
[1] [1] p. 1
[2] [2] p.295

Har man accepteret ovenstående synspunkt, følger i umiddelbar forlængelse heraf en matematikdidaktisk designopgave, der består i at udarbejde veldokumenterede anvisninger for en alternativ og mere løfterig undervisningspraksis. Nu er den abstrakte algebra et enormt fagområde, der omfatter et væld af begreber, teorier og metoder. At beskrive en generel undervisningspraksis, der over en bred kam kan ændre algebraundervisningen til det bedre, virker derfor uoverkommeligt - for ikke at sige umuligt - inden for rammerne af et halvårigt specialestudium. I stedet må man, ligesom undervisningsinstitutionerne gør det i forbindelse med deres kurser, opdele fagområdet i mere overskuelige emner og analysere og bearbejde undervisningen af sådanne delområder hver for sig.

Hovedformålet med dette specialestudium har været at benytte en række eksisterende matematikdidaktiske teorier til at give mit bud på en løsning af den ovenstående designopgave for de indledende begreber af den abstrakte gruppeteori. Sagt med andre ord har jeg bestræbt mig på at udvikle et fornyende, håbefuldt og didaktisk velfunderet undervisningsforløb omhandlende den grundlæggende teori om abstrakte grupper. Valget er faldet på gruppeteorien, fordi den matematiske gruppe er den simpleste algebraiske struktur, og fordi den netop derfor ofte er det første eksempel på abstrakt matematik, som nye studerende bliver stillet overfor. Bestræbelserne udmøntede sig i et otte kapitler langt lærebogsmateriale samt en tilhørende drejebog, der beskriver, hvordan jeg mener, at man mest hensigtsmæssigt kan organisere undervisningen. Lærebogsmaterialet er at finde i rapportens appendix B, mens drejebogen gennemgås i rapportens kapitel ni.

Jeg vil fortsætte denne introduktion med at redegøre for den overordnede didaktiske model og de mest fundamentale overvejelser, der ligger til grund for mit design. Ethvert undervisningsforløb omfatter udover en underviser og et antal modtagere også en såkaldt *organisation af faglig viden*. Kort fortalt dækker udtrykket en organisation af faglig viden over en - fra institutionens side - forarbejdet og (vel)tilpasset udgave af dén videnskabelige viden, som underviseren påtænker at undervise eleverne i. Der findes ingen entydig måde, hvorpå man kan klargøre et givent stykke viden til undervisning, og selv indenfor den samme undervisningsinstitution kan der forekomme en betydelig variation. I fagdidaktikken kalder man denne omformnings- og klargøringsproces for *den didaktiske transposition*.

I en klassisk fagdidaktisk model kaldet *den didaktiske trekant* placerer man de tre undervisningselementer i hver sit hjørne af en trekant og forbinder dem med dobbeltpile. Den didaktiske trekant illustrerer, at en given undervisningssituation karakteriseres af stoffet, læreren og eleverne, og endda mere præcist af de samspil og relationer, der til det betragtede tidspunkt eksisterer imellem de tre.



Den samlede vekselvirkning mellem det konkrete fagområde, underviseren og modtagerne kaldes for et *didaktisk system*, og det er sådanne didaktiske systemer, der overordnet set udgør genstandsfeltet for den videnskabelige fagdidaktik. Didaktiske systemer skal altid forstås i forhold til den kontekst, hvori de studeres, idet både de fysiske og institutionelle rammer for undervisningen vil yde indflydelse på lærerens optræden, elevernes muligheder for at lære og stoffets organisation. Eksempelvis kan en institution have så fastgroede normer for, hvordan en underviser forventes at gebærde sig, at lærerrollen fastfryses og derved kan få afgørende indflydelse på, hvordan stoffet kan præsenteres, og derfor på *hvordan* - og måske endda *hvad* - eleverne lærer. Jeg har benyttet den didaktiske trekant til at give min specialerapport en overordnet struktur, og jeg vil i det følgende give en kort oversigt over indholdet af rapportens afsnit.

Fordi et indgående kendskab til den tilsigtede viden i særdeleshed og til fagområdet i almindelighed - efter min mening - må udgøre de første trædesten på vejen mod at kunne udvikle en effektiv undervisningspraksis, indledte jeg mit arbejde med en grundig stofdidaktisk analyse. Jeg vil i denne rapport begynde med at præsentere den matematik, der ligger til grund for mit undervisningsforløb og følge denne gennemgang op med en mere almen analyse af algebraen som disciplin. Denne gennemgang af den abstrakte algebra set som videnskabsfelt og undervisningsfagområde strækker sig over de to afsnit, som vil blive introduceret umiddelbart nedenfor.

Det er en temmelig slidt kliche, at man for at kunne forstå nutiden, først bliver nødt til at forstå fortiden, men når sagen drejer sig om udviklingen af matematiske teoridannelser, vil jeg mene, at der kan være noget om snakken. For at forstå hvad abstrakt gruppeteori er i dag, er det rent faktisk nyttigt at betragte, både hvordan teorien opstod, og hvordan den efterfølgende har udviklet sig. Derfor indeholder rapportens fjerde afsnit et oprids af gruppeteoriens opståen og historie. En anden - og for dette projekt tungerevejende - grund til at inddrage gruppeteoriens historie er dog, at man, i måden hvorpå de matematiske pionerer indså, at gruppebegrebet var nyttigt og fundamentalt, kan finde inspiration til, hvordan man som underviser kan lede eleverne til at opnå netop denne indsigt. Blandt andre George Polya har givet udtryk for, at matematikhistorien kan være en betydningsfuld rettesnor for tilrettelæggelsen af undervisning. Han skriver:

> *Having understood how the human race has acquired the knowledge of certain facts or concepts, we are in a better position to judge how students should acquire such knowledge.*[3]

Med det historiske forløb på plads, vil jeg i rapportens femte afsnit zoome ind på den abstrakte algebra, som den tager sig ud i dag og prøve at benytte dens historiske udvikling til at redegøre for nogle af de karakteristiske egenskaber, der er med til at afgrænse algebraen og ikke mindst gruppeteorien som matematisk disciplin. I dette afsnit prøver jeg hovedsagligt at besvare følgende centrale spørgsmål: Hvad er det, der gør algebra til algebra, og hvordan adskiller algebra sig fra anden matematik? Hvordan er gruppeteorien

[3] [4] p.xii

forskellig fra den matematik, som førteårsstuderende tidligere har stiftet bekendtskab med?

Det foregående afsnit afslutter den stofdidaktiske del af rapporten. Inden det sjette afsnit foretager jeg nemlig et sceneskift, og flytter fokus over på aspekter, der tilhører læringsteorien. Vender man tilbage til den didaktiske trekant, kan man sige, at jeg har skiftet arbejdsplads fra kassen i nederste venstre hjørne til kassen i det nederste højre hjørne. Læringsteori drejer sig nemlig - ikke overraskende - om, hvordan *eleven* lærer det aktuelle faglige stof. Som pilene i figuren indikerer, er denne læringsproces både afhængig af den tilsigtede viden, altså det man ønsker, at eleven lærer, og af måden hvorpå læreren søger at hjælpe elevens læring på vej. I dette afsnit introducerer jeg hovedpunkterne i det konstruktivistiske læringssyn, der er en del af fundamentet for Teorien om Didaktiske Situationer (TDS). Jeg vil desuden forsøge at videregive et mere specifikt bud på, hvordan elever tilegner sig den basale gruppeteori. I den kostruktivistiske antagelse af, at læring foregår på individniveau, ligger implicit en antagelse om, at forskellige elever lærer i forskellige tempi og ad forskellige læringsstier. Det ovennævnte bud på gruppeteori-specifikke læreprocesser skal derfor i højere grad betragtes som en vejledende generalisering og fortolkning af Dubinsky's observerede elevers udvikling end som et endegyldigt bevis for, at alle elever nødvendigvis må udvikle deres forståelse af gruppebegrebet på den beskrevne vis. Ikke desto mindre har jeg benyttet Dubinskys teori som rettesnor for mine observationer og analyser af elevernes læring undervejs i forløbet - meget mere herom senere i rapporten.

I det syvende afsnit tager jeg fat på den egentlige matematikdidaktiske teori. I den didaktiske trekant hører dette afsnit hjemme i den øverste kasse, idet jeg nu behandler teorier og deraf afledte virkemidler, som *læreren* kan benytte sig af i sin undervisning. Jeg vil her præsentere de for mit projekt relevante dele af Teorien om Didaktiske Situationer med henblik på at kunne beskrive og analysere min undervisning med præcise begreber indenfor en veldefineret teoretisk ramme.

Ottende afsnit tjener to formål. Det fremmeste af disse er at forklare, hvordan megen af den indførte teori har ydet indflydelse på mit undervisningsdesign. Jeg vil i det ottende afsnit fremlægge mine teoretiske argumenter for, at lærebogen ser ud, som den gør. Sidegevinsten ved denne fremstilling er, at den repeterer en række af de indførte begreber, og at den dermed kommer til at udgøre en måske tiltrængt opsummering af rapportens temmelig lange teoridel. Ottende afsnit markerer således enden på rapportens teoretiske del.

Med det teoretiske begrebsapparat til rådighed, er jeg blevet klar til at beskrive måden, hvorpå mit undervisningsdesign blev realiseret. Modul for modul vil jeg beskrive afviklingen af undervisningen og begrunde valgene af de forskellige arbejdsformer, som jeg har benyttet mig af undervejs. Afsnittet omfatter også specifikke beskrivelser af den tilsigtede viden for de enkelte moduler samt nøgterne beskrivelser af min indsamling af empiri.

I det efterfølgende tiende afsnit præsenteres den analysemetode, som jeg har benyttet til at fortolke udbyttet af min dataindsamling. Afsnittet indledes med en grundig argumentation for, hvorfor jeg mener, at mit valg af metode i en vis forstand er en nødvendig konsekvens af undersøgelsens og ikke mindst de indsamlede datas beskaffenhed. Jeg vil derefter udførligt beskrive, hvordan jeg har tænkt at analysere mit undervisningsforløb på baggrund af de observationer og elevudsagn, jeg fik indhentet undervejs i timerne.

I rapportens ellevte afsnit foretages den netop omtalte analyse af mit forløb. Analysen falder i tre dele, der henholdsvis beskæftiger sig med, hvorvidt undervisningen blev afviklet i overensstemmelse med hensigten, hvorvidt elevernes læring fulgte de forventede udviklingstrin, og hvorvidt eleverne efter forløbet kunne påstås at have tilegnet sig den tilsigtede viden. Analysedelene er i en vis udstrækning uafhængige, men de beskriver dog samlet set udviklingen i forløbet fra devolutionsfaserne over elevernes læringsprocesser til deres endelige læringsudbytte.

Rapporten afsluttes med en overordnet og konkluderende vurdering af forløbets succes samt en række ændringsforslag og perspektiverende bemærkninger, der kunne motivere til andre eller mere dybdegående studier af denne eller lignende matematikdidaktiske problematiker.

3 Den matematiske baggrund for projektet

Den matematiske gennemgang, jeg her leverer, forudsætter kendskab til den indledende gruppeteori og til visse klassiske grupper så som diedergrupperne og permutationsgrupperne. Lad mig alligevel for en god ordens skyld starte med at definere den algebraiske struktur, som Galois var den første til at kalde en gruppe samt definere, hvad det vil sige, at to grupper er isomorfe.

Definition 3.1 *Ved en gruppe $(G, *)$ forstås en ikke-tom mængde G med en kompositionsregel $* : G \times G \to G$, der opfylder følgende betingelser:*

1. *$*$ opfylder den associative lov: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$.*
2. *Der eksisterer et neutralt element $e \in G$: $e * g = g * e = g$, $\forall g \in G$.*
3. *For alle $g \in G$ findes et inverst element $g^{-1} \in G$: $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.*

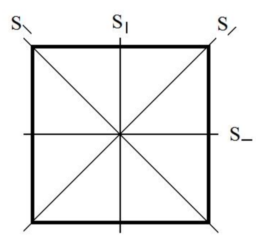
Definition 3.2 *To grupper $(G_1, *)$ og $(G_2, \otimes)$ siges at være isomorfe, såfremt der findes en bijektion $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$, der opfylder, at $\phi(a * b) = \phi(a) \otimes \phi(b)$ for alle $a, b \in G_1$*

I det følgende vil jeg skelne mellem konkrete og abstrakte grupper, alt efter om gruppeelementerne har en konkret fortolkning eller ej. Er en gruppes elementer eksempelvis tal, afbildninger, permutationer, flytninger, funktioner eller lignende, vil jeg betegne den som konkret. Er elementerne derimod fuldstændigt abstrakte størrelser, siges den gruppe, de udgør sammen med kompositionsreglen at være abstrakt. Det er klart, at man ved at abstrahere fra elementernes konkrete fortolkning altid kan opfatte en konkret gruppe som en abstrakt gruppe. Vender vi denne betragtning på hovedet, kan man sige, at enhver konkret gruppe udgør en repræsentation af den tilsvarende abstrakte gruppe. Den abstrakte gruppe bliver således et fælles knudepunkt for alle dens konkrete repræsentationer. En abstrakt gruppe kan nemlig have adskillige konkrete repræsentationer. To konkrete grupper, der repræsenterer den samme abstrakte gruppe, må nødvendigvis være isomorfe.

3.1 Fire repræsentationer af diedergruppen D_4

3.1.1 Den klassiske repræsentation

I mit undervisningsforløb introduceres eleverne til gruppebegrebet via tre forskellige repræsentationer af diedergruppen, D_4. Denne diedergruppe er bedst kendt som kvadratets symmetrigruppe, og den repræsenteres derfor oftest af de ortogonale afbildninger af planen, der bevarer et kvadrat med centrum i origo. I sin klassiske udgave består D_4 altså af drejninger og spejlinger, der efterlader kvadratet på sin plads. I denne konkrete gruppe finder kompositionen sted ved at sammensætte afbildningerne. På figuren nedenfor har jeg indtegnet og navngivet kvadratets fire spejlsymmetriakser.



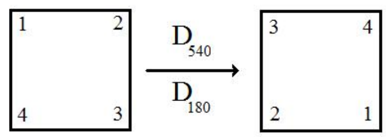
Disse fire akser definerer fire spejlinger, som jeg vil navngive efter akserne. Med D_X vil jeg betegne en X-graders drejning med uret rundt. Det er herefter klart, at

$$D_4 \supseteq \{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_|, S_/, S_-, S_\backslash\}.$$

Det er endvidere klart, at sammensætning af to af disse afbildninger resulterer i en afbildning, der bevarer kvadratet. At mængden er afsluttet overfor kompositionen, og at listen faktisk er komplet, kræver dog en ekstra overvejelse. Hvorfor er D_{540} for eksempel ikke med på listen? For en matematiker er svaret oplagt: Fordi antallet af hele omdrejninger ikke spiller nogen rolle for drejningens reelle *virkning*, betragter man altid drejningens gradantal modulo 360. Det er derfor naturligt at identificere D_{540} med D_{180}.

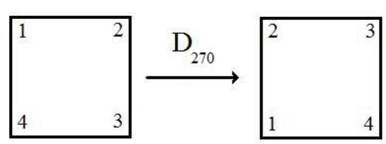
Som *handlinger* betragtet er de to afbildninger naturligvis ikke identiske, og dette kan skabe forvirring hos de mindre trænede gymnasieelever. En elev, der udelukkende betragter afbildningerne som handlinger, kunne nemt foranlediges til at tro, at D_4 er en uendelig gruppe indeholdende $D_{k\cdot 90}$ for alle heltal k.

Vil man udelukke denne mulighed for forvirring, kan man nummerere hjørnerne i kvadratet og gøre det klart, at man identificerer de afbildninger, der fra den samme udgangsposition placerer kvadratets hjørner ens. Figuren nedenfor illustrerer, hvorfor det efter denne præcisering, bør være naturligt for alle at identificere D_{540} med D_{180}.



3.1.2 D_4 repræsenteret ved permutationer

Cayleys berømte sætning fra 1878 siger, at enhver endelig gruppe er isomorf med en permutationsgruppe. I det betragtede tilfælde betyder denne sætning, at D_4 må kunne repræsenteres via permutationer. Jeg vil her vise hvordan denne repræsentation kan realiseres. Efter at have nummereret hjørnerne i kvadratet er det muligt at identificere de omtalte spejlinger og drejninger med hver deres permutation af tallene fra et til fire. Selvom denne identifikation umiddelbart virker oplagt, ligger der også her en mulighed for, at eleverne kan blive forvirrede. Problemet opstår, fordi der er to forskellige måder at fortolke en afbildning på og derfor to mulige måder, hvorpå man kan oversætte afbildningen til en permutation. Betragt eksempelvis drejningen D_{270} illustreret på figuren nedenfor.

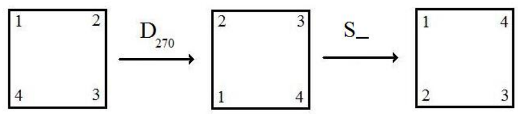


En elev, der opfatter drejningen som den handling udført på kvadratet, der placerer hjørne nummer 1 i position 4, hjørne nummer 2 i position 1, hjørne nummer 3 i position 2 og hjørne nummer 4 i position 3, vil oversætte D_{270} til permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En anden elev, der opfatter drejningen som den handling, der resulterer i, at der på position 1 står 2, på position 2 står 3, på position 3 står 4 og på position 4 står 1, vil derimod oversætte D_{270} til permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

For at undgå forvirring må man foretage et valg, og gøre det klart, hvordan man vil fortolke de ortogonale afbildninger, når man skal oversætte dem til permutationer. Idet den første af de to fortolkninger er den, der er konsistent med den klassiske repræsentation af D_4, er mit valg faldet på denne. Lad mig illustrere med et eksempel.

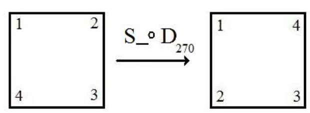
Uanset hvilken af de to fortolkninger man benytter, vil oversættelsen af en spejling resultere i den samme permutation. Eksempelvis vil S_{-} oversættes til $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Betragt nu sammensætningen $S_{-} \circ D_{270}$.



Oversættes afbildningerne til permutationer hver for sig, og sammensættes de som permutationer, vil man, alt efter hvilken fortolkning man benytter, enten få

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ eller $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Betragt nu igen den sammensatte afbildning $S_{-} \circ D_{270} = S_{\backslash}$:



Uanset hvilken fortolkning man vælger, vil denne spejling oversættes til permutationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Jeg antager hermed at have godtgjort, hvorfor det er naturligt at lægge sig fast på den første af de to fortolkningsmuligheder.

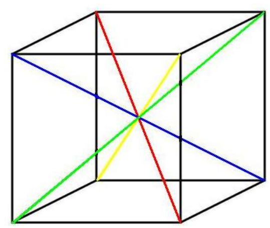
Omend man skal være en smule forsigtig, er det altså muligt at repræsentere diedergruppen D_4 som en konkret permutationsgruppe. D_4 kommer derved til at fremstå som en naturlig undergruppe af orden otte i den fulde permutationsgruppe, S_4. Med den sædvanlige permutationsnotation og under iagttagelse af den ovenfor valgte fortolkning kan D_4 opskrives, som følger:

$$D_4 = \Bigl\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \Bigr\}$$

Når jeg i min undervisning indfører D_4 som en permutationsgruppe, har jeg naturligvis taget højde for, at eleverne undgår den problematiske fortolkning, jeg her har præsenteret. Ved at bede eleverne placere fire flag i de nummererede hjørner af et fortrykt kvadrat, og bede dem om at flytte rundt på dem mellem hjørnerne, mener jeg udelukkende at have efterladt dem med den hensigtsmæssige fortolkning af deres handlinger. Eftersom flagene ikke har nogen numre, mener jeg nemlig, at det ville være unaturligt for eksempel at sige, at på plads nummer et ligger nu flag nummer to. For en sikkerheds skyld præciserer jeg dog alligevel, at der på anden rækkes første plads i den sædvanlige permutationsnotation skal stå den *position* som flaget, der lå i position nummer et, er blevet flyttet til osv.. (Jf. evt. lærebogens kapitel 1)

3.1.3 D_4 repræsenteret ved rumlige transformationer

Betragt nu et regulært hexaeder, med centrum placeret i et tredimensionelt koordinatsystems begyndelsespunkt. Fordi en sådan terning har otte hjørner, må den følgelig have fire rumdiagonaler. For hele tiden at kunne adskille disse rumdiagionaler, har jeg på figuren nedenfor givet dem hver deres farve.

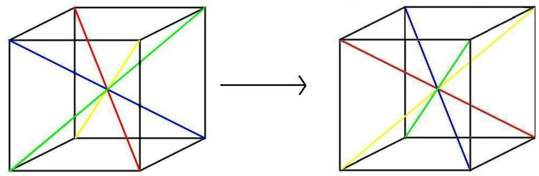


Kald nu den punktmængde som terningen udgør i $\mathbb{R}^3$ for T. En afbildning $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, der opfylder, at $\theta(T) = T$, kaldes en *symmetri* af T.

Betragt positionen som terningen indtager på figuren ovenfor som dens udgangsposition. En symmetri forskellig fra identiteten vil efterlade terningen i en anden position end udgangspositionen. Denne position er fuldstændig bestemt ved kombinationen af den sideflade, der vender opad og orienteringen af denne sideflades hjørner. Fordi en terning har seks sideflader, der hver har fire hjørner, kan terningen placeres i 24 forskellige positioner uden at ændre på punktmængden T. Fordi enhver sådan position definerer en symmetri, nemlig den der flytter terningen fra udgangspostionen til denne position, må der findes præcis 24 forskellige symmetrier af hexaederet.

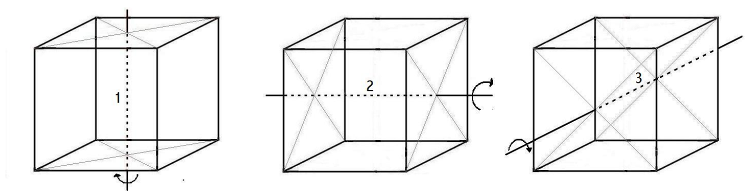
Under brug af en symmetri vil rumdiagonalernes respektive positioner blive ændret, men *mængden* af rumdiagonaler vil forblive uændret. Enhver symmetri af hexaederet kan derfor opfattes som en permutation af de fire rumdiagonaler. Fire elementer kan som bekendt permuteres på 24 måder. Når antallet af symmetrier er lig med ordenen af S_4, er det fordi, symmetrierne af hexaederet udgør en konkret gruppe med sammensætning som komposition, der er isomorf med permutationsgruppen S_4. Lad mig give et eksempel på, hvordan denne isomorfi kommer i stand.

Betragt symmetrien illustreret på følgende figur.



Kalder vi positionen som den røde rumdiagonal indtager i terningens udgangsposition for position nummer et, den grønnes position for position for nummer to, den gules position for position nummer tre og den blås position for position nummer 4, vil symmetrien ovenfor kunne oversættes til permutationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vi benytter her en fortolkning af symmetrien, der er analog, til den vi benyttede, da vi oversatte drejninger og spejlinger til permutationer. Symmetrien ovenfor opfattes her som handlingen, der har flyttet rumdiagonalen i position 1 til position 4, rumdiagonalen i position 2 til position 3 osv.. På denne måde kan man til hver eneste af de 24 symmetrier knytte netop én permutation. Det er denne én til én korrespondance mellem symmetrierne og permutationerne, der udgør den omtalte isomorfi mellem symmetrigruppen for T og S_4.

Jeg indfører nu tre nummererede rotationsakser for det betragtede hexaeder. Bemærk, at selvom akserne er sammenfaldende med koordinatsystemets akser, deler de *ikke* deres nummerering.



Med 1^a2^b vil jeg fremover notere afbildningen givet ved b halvfemsgradersdrejninger om akse nummer to efterfulgt af a halvfemsgradersdrejninger om akse nummer et. Vi vil i det følgende endvidere betragte flytninger på formen 1^a3^b, der defineres i analogi med ovenstående. Disse afbildninger skal i princippet betragtes som afbildninger af hele $\mathbb{R}^3$, selvom det er deres virkning på hexaederet, der er interessant for dette projekt.

For ethvert valg af $(a, b) \in \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ er både 1^a2^b og 1^a3^b symmetrier. Dette giver os umiddelbart 32 symmetrier af hexaederet. For alle $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ gælder det dog, at $1^a2^0 = 1^a3^0$, og da man endvidere har, at $1^02^2 = 1^23^2$, $1^12^2 = 1^33^2$, $1^22^2 = 1^03^2$ og $1^32^2 = 1^13^2$, kan antallet af symmetrier reduceres til de forventede 24.

Vi har således opnået en notation, hvormed vi kan repræsentere S_4 som en transformationsgruppe bestående af afbildninger af $\mathbb{R}^3$. Ovenfor godtgjorde jeg, at D_4 kan repræsenteres via en undergruppe i permutationsgruppen S_4. Det er derfor klart, at D_4 kan repræsenteres via otte af disse symmetrier. D_4 som rumlig transformationsgruppe er opskrevet nedenfor.

$$D_4 = \{(1^02^0), (1^12^0), (1^22^0), (1^32^0), (1^02^2), (1^12^2), (1^22^2), (1^32^2)\}$$

Bemærk, at rækkefølgen hvormed symmetrierne er opskrevet, modsvarer rækkefølgen vi benyttede for permutationerne, der igen modsvarer rækkefølgen af kvadratbevarende afbildninger i den oprindelige repræsentation af D_4. (Jf. evt. lærebogens kapitel 2.)

3.1.4 D_4 repræsenteret ved 2×2-diagonalmatricer

Den sidste af de tre konkrete repræsentationer af D_4, som jeg vil tilvejebringe, er en matrixrepræsentation. (Jf. evt. lærebogens kapitel 3.) Jeg vender her tilbage til den klassiske repræsentation af D_4, der fremstiller diedergruppen som drejninger og spejlinger i planen. Både drejninger og spejlinger er lineære isometrier af planen. En lineær isometri af $\mathbb{R}^2$ er givet ved en matrix, der har en af følgende to former.

$$\mathrm{D}_\theta = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{S}_\theta = \begin{bmatrix} cos\ \theta & sin\ \theta \\ sin\ \theta & -cos\ \theta \end{bmatrix}$$

Her beskriver matricer på den første form drejninger på θ grader omkring origo, mens matricer på den anden form beskriver spejlinger i aksen givet ved vektoren $(cos\ \frac{1}{2}\theta, sin\ \frac{1}{2}\theta)$. Det ligger nu lige for at oversætte D_4 til en matrixgruppe - husk på, at sammensætningen af isometrier svarer til matrixproduktet af isometriernes tilhørende matricer.

$$D_4 = \{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_|, S_/, S_-, S_\backslash\}$$

$$= \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

3.2 Cayleytabeller og associativitet

I definitionen af en konkret gruppe er kompositionsreglen som oftest givet ved en formel eller en algoritme. Kompositummet af to afbildninger findes eksempelvis ved sammensætning, mens kompositummet af to matricer er resultatet af deres matrixprodukt. At en given konkret mængde med en konkret kompositionsregel opfylder gruppekriterierne, bunder derfor ofte i partikulære egenskaber ved gruppeelementerne og ved kompositionsreglen. Eksempelvis er det oplagt, at D_0 er det neutrale element i D_4, og det kræver heller ikke meget arbejde at godtgøre, at samtlige drejningers og spejlingers inverse elementer er med i denne mængde. At overbevise sig om at sammensætning af afbildninger generelt opfylder den associative lov, kræver blot følgende kæde af identiteter:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

At matrixproduktet af kvadratiske matricer opfylder den associative lov kan enten godtgøres ved at regne på generelle matricer eller ved blot at henvise til, at matricerne svarer til afbildninger, og at deres produkt svarer til sammensætning af disse afbildninger.

Vil man derimod definere en gruppe abstrakt, er man nødt til specifikt at angive kompositummet for ethvert par af gruppelementer. Dette gøres nemmest og mest overskueligt ved at opskrive den såkaldte Cayleytabel for mængden og dens komposition. Nedenfor ses en Cayleytabel for den abstrakte mængde $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$ med kompositionen $*$.

$*$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

I det følgende kaldes tabellens definerende række og søjle for hhv. den nulte række og den nulte søjle. Disse skal opfattes som udgørende en ramme, der ikke indgår i den egentlige Cayleytabel. Når jeg senere udtaler mig om tabellens tredje række, mener jeg altså den tredje række af tabellens indmad.

For at godtgøre, at $(G, *)$ rent faktisk er en gruppe, må man eftervise en række særlige egenskaber ved Cayleytabellen, svarende til gruppekriterierne. Jeg vil her benytte Cayleytabellen ovenfor til at eksemplificere, hvordan man tjekker, at en abstrakt mængde, hvis kompositionsregel er givet ved en tabel, udgør en gruppe.

At mængden er afsluttet overfor kompositionen kommer til udtryk i tabellen, ved at der ikke indgår fremmede elementer. Samtlige elementer inde i tabellen må kunne genfindes i den nulte række. Dette kriterium er opfyldt af tabellen over $(G, *)$.

At der findes netop et neutralt element i $(G, *)$, kan eftervises ved at påpege, at der i tabellen findes netop en række og netop en søjle, der er kopier af hhv. den nulte række og den nulte søjle. I tabellen ovenfor er dette række nummer et og søjle nummer et, og det neutrale element må derfor være g_1.

At ethvert element i $(G, *)$ har et entydigt inverst element, kommer til udtryk i tabellen ved, at det netop udpegede neutrale element optræder præcis én gang i hver række og søjle. Tabellen ovenfor opfylder også dette kriterium, idet g_1 er at finde én gang i hver række og søjle. Af dette kriterium følger det endvidere, at ethvert element i G må findes netop en gang i hver række og søjle.

At kompositionen opfylder den associative lov fremgår desværre ikke umiddelbart af tabellen. I princippet må man tjekke associativiteten for samtlige tripler af mængdeelementer, $g_i, g_j, g_k \in G$. Når der som i eksemplet her er otte elementer at vælge tripler fra, bliver der 512 tripler at tjekke, hvilket naturligvis ville være trælsomt tenderende til det uoverkommelige at gøre ved håndkraft. Det er formentlig muligt at lave et computerprogram, der kan klare opgaven, men da jeg på ingen måde er ekspert i programmering, vil jeg i stedet vise et kriterium, der kan være nyttigt, når man vil udtale sig om associativiteten af kompositioner givet ved tabeller. Resultatet stammer i sin oprindelige form fra en artikel af Man-Keung Siu[4], men jeg har tilladt mig at omskrive sætningen en smule, så den passer bedre til lejligheden.

Først en bemærkning. I en Cayleytabel kan enhver række opfattes som en permutation af elementerne i mængden - husk på, at ethvert element findes én og kun én gang i hver række. Eksempelvis kan tredje række i tabellen ovenfor opfattes som resultatet af permutationen $\left(\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & g_8 \\ g_3 & g_4 & g_1 & g_2 & g_7 & g_8 & g_5 & g_6 \end{smallmatrix}\right)$.

Jeg vil fremover kalde permutationen, der på denne måde afbilder den 0´te række i den a´te række for φ_{g_a}.

Sætning 3.3 *Lad $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ være en endelig mængde og lad en kompositionsregel $*$ være givet på G via en Cayleytabel. Antag, at G er afsluttet overfor kompositionen. Antag, at der findes et neutralt element i G, og at dette er g_1. Antag endvidere, at ethvert element i G har et entydigt bestemt inverst element i G.*

Kompositionen $*$ opfylder da den associative lov, hvis og kun hvis der for alle $(g_i, g_j) \in G \times G$ gælder, at $\varphi_{g_i} \circ \varphi_{g_j} = \varphi_{g_k}$ for et passende $g_k \in G$.

Bevis. Lad $A(G)$ betegne mængden af samtlige permutationer af den endelige mængde G. Da G er en endelig mængde, er $A(G)$ også endelig. $A(G)$ er tilmed en gruppe med sammensætning som komposition.

Betragt nu afbildningen

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow A(G) \\ g_a &\longmapsto \varphi_{g_a} \end{aligned}$$

For alle $g_x \in G$ har vi ifølge bemærkningen ovenfor, at $\varphi_{g_a}(g_x) = g_a * g_x$. Bemærk, at den antagede afsluttehed af $(G, *)$ sammen med eksistensen af ${g_a}^{-1} \in G$ sikrer, at φ_{g_a} vitterlig er en bijektion på G. Betragt nu følgende kæde af oplagte biimplikationer:

$$* \text{ opfylder den ass. lov} \quad \Leftrightarrow \quad \forall g_a, g_b, g_x \in G : g_a * (g_b * g_x) = (g_a * g_b) * g_x \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall g_a, g_b \in G : \varphi_{g_a} \circ \varphi_{g_b} = \varphi_{g_a * g_b}.$$

[4] [3]

Idet vi ovenfor antog, at G var afsluttet overfor $*$, medfører den sidste betingelse i kæden, at $\phi(G)$ er afsluttet overfor kompositionen i $A(G)$. Heraf følger det nemt, at $\phi(G)$ må være en undergruppe i $A(G)$, såfremt den associative lov er opfyldt i $(G,*)$.

Antag nu omvendt, at $\phi(G)$ *er* en undergruppe i $A(G)$. Da gælder det for alle $g_a, g_b \in G$, at $\varphi_{g_a} \circ \varphi_{g_b} = \varphi_{g_c}$ for et passende $g_c \in G$. Af ligningen $(\varphi_{g_a} \circ \ \varphi_{g_b})(g_1) = \varphi_{g_c}(g_1)$ følger det, at $g_a * g_b = g_c$ og derfor, at $\varphi_{g_a} \circ \varphi_{g_b} = \varphi_{g_a * g_b}$ for alle $g_a, g_b \in G$. Vi har altså vist, at den associative lov er opfyldt i G, såfremt $\phi(G)$ er en undergruppe i $A(G)$.

Alt i alt har vi altså, at:

$$(G,*) \text{ opfylder den associative lov} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(G) \text{ er en undergruppe i } A(G).$$

For at godtgøre associativiteten i $(G,*)$ er det altså tilstrækkeligt, at vise at $\phi(G)$ er en undergruppe i $A(G)$. Det neutrale element φ_{g_1} er element i $\phi(G)$. Til ethvert element $\varphi_{g_x} \in \phi(G)$ findes det inverse element $\varphi_{g_x^{-1}}$ også i $\phi(G)$. Vi mangler nu bare at godtgøre afsluttetheden af $\phi(G)$. Dette kan gøres ved at eftervise, at det for alle $(g_i, g_j) \in G \times G$ gælder, at $\varphi_{g_i} \circ \varphi_{g_j} = \varphi_{g_k}$ for et passende $g_k \in G$. Dette afslutter beviset.

Eksempel. For at vise at kompositionen i tabellen ovenfor overholder den associative lov, må man ifølge den netop viste sætning tjekke afsluttetheden af permutationsmængden:

$$\{\varphi_{g_1}, \varphi_{g_2}, \varphi_{g_3}, \varphi_{g_4}, \varphi_{g_5}, \varphi_{g_6}, \varphi_{g_7}, \varphi_{g_8}\}.$$

Sætningen sikrer altså, at vi i stedet for at tjekke 512 tripler kan nøjes med 64 gange at sammensætte to permutationer. Heraf er 15 af sammensætningerne endda trivielle, idet φ_{g_1} er identiteten. Det bliver altså unægtelig nemmere, at holde styr på hvor langt man er kommet i processen, men der er stadig et anseeligt arbejde forbundet med at eftervise associativiteten. Jeg vil overlade det til læseren at vise, at kompositionen i tabellen ovenfor opfylder den associative lov.

I mit undervisningsforløb beder jeg flere gange eleverne eftervise, at en abstrakt mængde med en komposition, der er givet via en tabel, er en gruppe. Der er principielt ikke noget i vejen for at lade eleverne gennemføre de mange sammensætninger beskrevet ovenfor. Den relativt knappe tid, jeg havde til rådighed, gjorde dog, at jeg valgte at forære dem associativiteten, hvis blot de gjorde opmærksom på, at den skulle eftervises.

3.3 Cayleytabeller og isomorfi

Når vi når til den sidste del af mit undervisningsforløb forventes eleverne at kunne afgøre, om to konkrete grupper er isomorfe, og om en konkret gruppe er isomorf med en given abstrakt gruppe. Da gymnasieelever ikke kan forventes at være tilstrækkeligt fortrolige med afbildningsbegrebet til hurtigt at kunne forstå den traditionelle definition af isomorfi, valgte jeg at bruge en alternativ definition af, hvad det vil sige, at to grupper er isomorfe. Som overskriften på afsnittet antyder, betjener denne definition sig af en sammenligning af de respektive gruppers Cayleytabeller. Definitionen er selvsagt en ækvivalent betingelse til den almindelige definition, og den fremsættes derfor som en sætning i min rapport.

Inden vi når til sætningen, vil jeg inskyde et par nødvendige bemærkninger. Vi antager fremover, at man inden udfyldningen af en Cayleytabel altid har nummereret elementerne i den nulte række og søjle fortløbende startende med index 1. I det følgende betegner jeg med $H_{i,j}$ det gruppeelement, der står i den i'te række og j'te søjle i Cayleytabellen for H. Man har altså, at $H_{i,j} = h_i \otimes h_j$. Jeg vil notere index for elementet $H_{i,j}$ med betegnelsen $I_{H_{i,j}}$.

Sætning 3.4 *Lad $(G, *)$ og $(H, \otimes)$ være endelige grupper af samme orden. Antag, at $G = \{g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n\}$, og at $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n\}$.*

Da er $(G, *)$ og $(H, \otimes)$ isomorfe grupper, hvis og kun hvis elementerne i H kan omnummereres sådan, at Cayleytabellerne herefter opfylder:

$$I_{G_{i,j}} = I_{H_{i,j}}, \quad \forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\}^2.$$

Bevis. Antag først, at $(G, *)$ og $(H, \otimes)$ er isomorfe grupper. Da findes en kompositionsbevarende bijektion: $\varphi : G \to H$. Isomorfien φ definerer den ønskede omnummerering. Kalder man nemlig $\varphi(g_1)$ for h_1, $\varphi(g_2)$ for h_2 etc., vil φ's homomorfiegenskab sikre, at Cayleytabellerne for G og H får ens indices overalt. For vilkårlige i, j og et til disse passende k har man nemlig følgende implikation:

$$G_{i,j} = g_k \Rightarrow H_{i,j} = h_i \otimes h_j = \varphi(g_i) \otimes \varphi(g_j) = \varphi(g_i * g_j) = \varphi(g_k) = h_k$$

Af denne implikation følger det, at

$$I_{G_{i,j}} = I_{H_{i,j}} \quad \forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$$

Antag omvendt, at Cayleytabellerne for G og H opfylder, at $I_{G_{i,j}} = I_{H_{i,j}}$ for alle (i, j). Da vil afbildningen givet ved $\vartheta(g_i) = h_i$ være den ønskede isomorfi. ϑ er nemlig oplagt bijektiv, og da det endvidere gælder, at

$$\vartheta(g_i * g_j) = \vartheta(G_{i,j}) = H_{i,j} = h_i \otimes h_j = \vartheta(g_i) \otimes \vartheta(g_j)$$

er beviset hermed afsluttet.

Korollar 3.5 *Lad $(G, *)$ og $(H, \otimes)$ være endelige grupper af samme orden givet ved deres Cayleytabeller. Hvis de to gruppers neutrale element optræder et forskelligt antal gange i de respektive tabellers førstediagonaler, kan grupperne* ***ikke*** *være isomorfe.*

Ovenstående sætning kommer implicit i brug i mit undervisningsforløb, når vi cirka halvvejs skal etablere, at de tre konkrete repræsentationer af D_4 er isomorfe realisationer af den samme abstrakte gruppe. Eleverne har været inddelt i seks hold, og hvert hold har konstrueret en Cayleytabel for deres mængde af permutationer og for deres mængde af rumlige transformationer. Selvom eleverne fra et hold har fundet alle de rigtige afbildninger, er der ingen garanti for, at de har ordnet deres to mængder ens. Endnu mindre sandsynlighed er der for, at elevernes *individuelt* producerede Cayleytabeller for matrixrepræsentationen er sorteret som deres permutations- og transformationsmængde. Faktisk bruger jeg hele det fjerde modul på at sortere de tre mængder ens, så man uden videre kan aflæse de tre konkrete repræsentationers isomorfi af de tre efterfølgende Cayleytabellers indentiske index.

Korollaret udgør det matematiske fundament for, at eleverne retteligt kan konstatere, at to grupper af samme orden *ikke* er isomorfe ved at sammenligne antallet af neutralelementforekomster i de to gruppetabellers førstediagonaler.

Hermed afslutter jeg gennemgangen af den matematikfaglige baggrund for mit undervisningsdesign. Jeg har fået præsenteret alle projektets centrale begreber og argumenteret for, at måden, hvorpå de indgår i min undervisning, er matematisk forsvarlig. Det er nu blevet tid til at spole tiden omtrent 3000 år tilbage, og forklare hvordan alle disse nutidige matematiske begreber blev til.

4 Den abstrakte gruppeteoris opståen - et historisk overblik med didaktiske bagtanker

Over en periode på mere end tretusinde år, der strækker sig fra oldtiden og et stykke ind i det 19. århundrede, var den matematiske disciplin, algebra, fokuseret omkring at løse polynomielle ligninger. Efter skiftet til det tyvende århundrede havde disciplinens genstandsfelt dog ændret sig markant. Algebraikerne beskæftigede sig ikke længere med at løse ligninger, men i stedet med at studere og axiomatisere abstrakte algebraiske strukturer såsom grupper, vektorrum, ringe og legemer. Det 19. århundredes matematiske forskning førte nemlig til et paradigmeskift indenfor algebraen, et skift der i dag kommer til udtryk i mange matematikhistorikeres sondring mellem den *klassiske* og den *moderne* algebra. I dette kapitel vil jeg meget summarisk beskrive udviklingen af den klassiske algebra indtil det revolutionerende 19. århundrede, hvorefter en noget mere detaljeret beskrivelse af den abstrakte gruppeteoris historie vil blive præsenteret. Kapitlet afsluttes med en afsløring af de didaktiske bagtanker, som jeg i overskriften påstår, at have med denne matematikhistoriske oversigt. I appendix A ses en en skematisk oversigt over den historiske udvikling af det abstrakte gruppebegreb.

4.1 Klassisk algebra

Indenfor de fleste af oldtidens civilisationer var man i stand til at løse, hvad vi i dag vil betegne som første- og andengradsligninger med heltallige eller rationelle koefficienter. Kineserne, egypterne og babylonerne studerede alle implicit denne type af ligninger, og allerede omkring år 1600 før vores tidsregning kunne babylonerne løse en række problemer, der indeholdt sådanne andengradsligninger. Babylonernes algebra bestod udelukkende af præskriptive løsninger på konkrete problemer. Det betyder, at de i deres besvarelser blot foreskrev en gangbar metode til at løse det givne problem, uden nogen form for retfærdiggørelse eller perspektivering af metoden.

Selvom de tidlige græske matematikere så sig selv som udforskere af *geometriske* problemstillinger, bliver mange af deres fremstillinger i dag fortolket som geometriske argumentationer for algebraiske propositioner. Mange matematikhistorikere omtaler faktisk en del af den græske matematik som *geometrisk algebra*. Euklids verdensberømte *Elementer*, der stammer fra omkring år 300 fvt., indeholder flere sådanne eksempler på konstruktioner, der kan tolkes som geometriske løsninger af andengradsligninger.

Foretager vi nu et spring i tiden på cirka 1200 år, møder vi på den arabiske halvø en matematiker ved navn Muhammad ibn-Musa al-Khwarizmi. Denne Muhammad fra provinsen Khwarizm skriver omkring år 825 en matematikbog, i hvilken han indfører og behandler begreberne *al-jabr* og *al-muqabalah*. Begrebet *al-jabr*, der er den sproglige forgænger for ordet algebra, henviser til en operation, der er ækvivalent med at flytte et negativt led i en ligning om på den anden side af lighedstegnet. Begrebet *al-muqabalah* kan oversættes til det at lade to identiske led på hver sin side af lighedstegnet gå ud mod hinanden. I bogen opdeler Muhammad al-Khwarizmi sine andengradsligninger efter fem forskellige generelle typer og benytter - i stedet for geometriske konstruktioner - sine nyindførte begreber til at løse dem. Bogen er vigtig, ikke blot fordi den har givet navn til fagområdet algebra, men også fordi den i høj grad er med til at gøre algebraen til en matematisk disciplin, der er uafhængig af geometriske konstruktioner. Muhammad al-Khwarizmi har efterfølgende fået tilnavnet algebraens Euklid, med baggrund i hans rolle som matematikeren, der samlede og gav en struktureret fremstilling af mere end 2000 års algebra.

Efter endnu en rejse i tid og sted er vi nået til 1500-tallets Italien. I år 1500 fandtes der stadig ingen algebraisk løsningsformel gældende for alle tredjegradsligninger, men mange af samtidens italienske matematikere arbejdede hårdt på at finde en. Husk på, at man med en algebraisk løsning mener en løsningsformel, der udtrykker samtlige løsninger til en given ligning via ligningens koefficienter udelukkende ved brug af de gængse regnearter og roduddragning. I år 1545 udgav Gerolamo Cardano bogen *Ars Magna*. I denne bog findes den algebraiske løsningsmetode for tredjegradsligninger, der i dag bærer forfatterens navn. Der knytter sig en interessant anekdote til denne metode, for det var faktisk ikke Cardano selv, der opdagede den. Æren for denne matematiske landvinding bør retteligt tilfalde de to matematikere del Ferro og Tartaglia, der uafhængigt af hinanden begge udledte metoden. Når ingen af de to publicerede deres metode, og dermed aldrig opnåede den fortjente hyldest for deres værk, hænger det sammen med datidens akademiske struktur. For at få en prestigefuld og indbringende stilling ved et af universiteterne skulle man ikke som i dag sende en kvalificeret ansøgning men derimod gøre sig fortjent til jobbet ved at vinde en offentlig matematikkonkurrence. Havde en matematiker derfor opdaget og bevist et interessant matematisk resultat, kunne han omsætte sin viden til et lukrativt job, såfremt han holdt den hemmelig indtil den næste konkurrence blev udskrevet. Med sin viden om blandt andet tredjegradsligninger vandt Tartaglia en sådan matematikkonkurrence, og da rygtet om dette nåede Cardano, som var ved at færdiggøre sin algebrabog, sendte han bud efter Tartaglia. Ved højhelligt at love Tartaglia ikke at publicere løsningsmetoden fik Cardano Tartaglia overtalt til at videregive ham opdagelsen. Når løsningen alligevel endte i Cardanos bog, var det fordi, Cardano efterfølgende blev bekendt med del Ferros løsning og derfor ikke længere følte sig bundet af sit ord overfor Tartaglia. Tartaglia blev forståeligt nok rasende, men selvom han forsøgte at prostestere, løb Cardano med al hæderen.

Efter kredsen af matematikere omkring Cardano var blevet bekendt med den algebraiske løsning af tredjegradsligningen, gik der ikke længe før en tilsvarende metode blev udledt for fjerdegradsligninger. Det var Cardanos elev, Lodovico Ferrari, der som den første gav en metode til at reducere enhver fjerdegradsligning til en tredjegradsligning og dermed oversatte problemet til et, der kunne løses via Cardanos (tilranede) metode. Cardano har måske fået lov til at publicere Ferraris resultat, det er i hvert fald at finde i *Ars Magna*.

Hverken babylonerne, grækerne, den arabiske al-Khwarizmi eller den italienske Cardano havde vor tids højt udviklede matematiske symbolik til rådighed. Derfor blev de matematiske problemer som oftest både formuleret og løst i et sammenhængende og symbolfrit sprog. Faktisk giver Tartaglia sin løsningsmetode til Cardano formuleret som et digt. Diofant havde ganske vist allerede omkring år 250 brugt bogstaver for de ubekendte i sine ligninger, men disse bogstaver var i virkeligheden blot forkortelser for den type af kvantitet som de repræsenterede. Det var først med Viètes 1591-udgivelse, *In Artem Analyticem Isagoge* at en matematiknotation blev indført, hvor både de variable og de givne størrelser i en ligning blev udtrykt med bogstaver, der ikke nødvendigvis refererede til egentlige objekter. Med Viétes arbejder ændrede ligningsløsningsprocessen sig til det at udføre en række formelle, veldefinerede operationer på udtrykkenes symboler. Man siger derfor ofte, at Viéte indførte den operationelle symbolisme. Viètes bidrag var af stor betydning, idet det kan siges at have omformet algebraen fra at have været et studium af specifikke ligninger med numeriske koefficienter til at blive et studium af generelle ligninger med bogstavs-koefficienter.

Efter succesen med tredje- og fjerdegradsligningerne synes intet vel mere naturligt end at fortsætte til ligninger af højere grad. I det 17. og 18. århundrede søgte matematikerne efter en algebraisk løsning af den generelle femtegradsligning, men deres arbejde forblev frugtesløst. I dag ved vi, at Niels Henrik Abel i 1824 har vist, at en sådan løsning ikke findes. Den viden havde Lagrange selvsagt ikke, da han i 1770 udgav *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* Ambitionen med denne tekst var at gennemanalysere de succesfulde løsningsmetoder til tredje- og fjerdegradsligningerne i håbet om at kunne generalisere dem til løsningsmetoder for ligninger af højere grad. Selvom Lagrange altså ikke lykkedes med sit forehavende, er hans 1770-udgivelse alligevel af stor betydning - ikke mindst som forløber for Abels bevis. Lagrange var den første til at sammenkæde løsbarheden af en ligning med egenskaber ved visse permutationer af dens rødder. Denne tankegang skulle senere vise sig at blive fundamental for den meget betydningsfulde Galoisteori.

I Lagranges studium af permutationer lå kimen til permutationsgruppebegrebet, og derfor markerer *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* starten på algebraens glidende overgang fra i mere end 3000 år at have været studiet af ligninger til fremover at blive studiet af algebraiske strukturer. Denne glidende overgang tog rundt regnet 100 år, og den er emnet for det efterfølgende afsnit.

4.2 På vej mod den abstrakte gruppeteori

Det er den generelle opfattelse blandt matematikhistorikere, at den abstrakte gruppeteori har tre matematiske arnesteder - nemlig ligningsteorien, talteorien og geometrien. Det er ligeledes alment accepteret, at det er erkendelsen af lighederne mellem disse tre discipliners mest fundamentale tankegange, der i sidste ende udmønter sig i udkrystalliseringen af det abstrakte gruppebegreb. Når man studerer den abstrakte gruppeteoris historie, må man gøre sig klart, at gruppebegrebet på ingen måde var en færdig pakke, der hele tiden havde ligget gemt under en masse konkret matematik, som det tilfældigvis tog matematikerne over hundrede år at grave frem. På denne måde adskiller gruppeteoriens skabelse sig væsentligt fra eksempelvis jagten på Cardanos formel. Er man lidt kunstnerisk anlagt, kan man i stedet betragte det abstrakte gruppebegreb som skulpturen, der trådte frem af blokken bestående af samtidens konkrete matematik, efter matematikerne møjsommeligt havde hugget de partikulære egenskaber ved de konkrete eksempler fra. I dette billede ligger det dog implicit, at matematikerne havde en intention om at skabe noget smukt og en forestilling om, at skulpturen i princippet kunne være faldet anderledes ud. Hvorfor er det for eksempel et krav, at kompositionsreglen skal opfylde den associative lov? Hvad intentionen angår, kan man sige, at denne først blev eksplicit i takt med at skulpturens konturer trådte tydeligt frem af blokken, og hvad den færdige skulptur angår, vil jeg vove pelsen og blot sige, at store kunstnere altid har en meget klar fornemmelse af, præcis hvornår deres værk er færdigt.

For hver af de tre ovennævnte fagområder vil jeg i det efterfølgende slå ned på et par centrale værker, i hvilke argumentationen i udpræget grad betjener sig af en prægruppeteoretisk tankegang. Fælles for disse værker er, at de alle er udgivet i perioden fra 1770 til 1872, og at ingen af dem har gruppeteori som hverken formål eller bagtanke. Når man alligevel tilskriver dem et gruppeteoretisk indhold, er det udelukkende med baggrund i en visse steder temmelig kraftig efterrationalisering.

I *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* er Lagrange som nævnt ude på at løse den generelle femtegradsligning. I den forbindelse indfører og studerer han permutationer af ligningens rødder, og det er specielt dette studium, der er interessant i forhold til udviklingen af gruppeteorien. Det er eksempelvis her, at Lagrange giver beviset for en tidlig, konkret version af det resultat, der senere kom til at hedde Lagranges Indexsætning. Ud af Lagranges permutationsstudier voksede der en selvstændig matematisk disciplin. I en række udgivelser fra hhv. 1815 og 1844 frigør Cauchy permutationsteorien fra ligningsteorien, og også i disse arbejder ses en udpræget brug af en præ-gruppeteoretisk tankegang. Cauchy behandler her de såkaldte *système de substitutions conjuguèes*, der i al væsentlighed svarer til endeligt frembragte permutationsgrupper. Ingen af de to franskmænd bruger dog betegnelsen *en gruppe* for deres mængder af permutationer.

Det var en tredje franskmand, Evariste Galois, der var den første til at benytte ordet *gruppe* i dets matematiske betydning. Galois blev kun 21 år gammel, og han nåede kun at få udgivet 61 sider med matematik. Alligevel er han den dag i dag en af de mest lovpriste matematikere overhovedet. Galois udfærdigede sine tekster omkring år 1832, men de blev først publiceret posthumt i 1846 af kollegaen Louisville. Stilen, Galois' anvendte i sine tekster, var ekstremt detaljefattig, og da matematikken samtidig var banebrydende ny, tog det omverdenen et godt stykke tid overhovedet at begribe, hvad det var, Galois havde indset. Galois' teori, der i princippet omslutter al hidtidig ligningsteori, er funderet i en dybsindig korrespondance mellem særlige permutationsgrupper og visse legemsudvidelser, som begge kan tilordnes den betragtede ligning. Galois fik med denne teori oversat problemet angående en lignings løsbarhed til et spørgsmål om eksistens af normaldelere i den til ligningen hørende permutationsgruppe. Galois betoner som den første *afsluttetheden* af hans permutationsmængder, og han retter dermed fokus mod den mest fundamentale af gruppeegenskaberne. Galois var i øvrigt fast besluttet på at hæve sin teori over alle de trælsomme beregninger, der efterhånden var blevet en uundgåelig del af permutationsteorien. På denne måde er hans værk særdeles interessant, når man som os er på udkig efter prototyper på den abstrakte gruppeteoretiske tankegang.

Vi skruer nu tiden tilbage og skifter scene til den tyske by Göttingen og til talteorien. Da Carl Friedrich Gauss i 1801 udgav *Disquisitiones Aritmeticae* havde han talteori og ikke gruppeteori på sinde. I denne meget betydningsfulde bog sammenfattes talteorien til dato. Det interessante i denne sammenhæng er dog, at det sker med jævnlig brug af argumenter, der i dag kan tolkes som gruppeteori i forklædning. I Disquisitiones Aritmeticae strukturerer og videreudvikler Gauss blandt andet en del af Eulers talteori, der stammer helt tilbage fra 1761. Med sine meget elegante fremstillinger af eksempelvis modulær aritmetik kan Gauss dog med rette siges at være den, der plantede frøet til teorien om kommutative grupper. Udover at give resultater der i dag uden videre kan genfindes i den abstrakte gruppeteoris resultatarsenal, var stilen hvormed Gauss fremførte sine argumenter meget lig den argumentationsform, man ser i nutidige algebraiske beviser. Selvom meget kunne tyde på det, ville det dog alligevel være forkert at slutte, at Gauss havde begrebsliggjort sig den abstrakte gruppe. Alle Gauss' "gruppeeksempler" behandles nemlig i separate afsnit, og Disquisitiones Aritmeticae indeholder ikke nogen samlende gruppeteoretisk metode, der kan bruges i alle bogens konkrete tilfælde.

For at placere det sidste af de tre udspring til den abstrakte gruppeteori, behøver vi kun at bevæge os 70 år frem i tiden og fra Göttingen til en anden tysk universitetsby, Erlangen. Det var nemlig her, at Felix Klein med sit såkaldte *Erlangen Programm* viste, hvordan gruppeteorien kunne bruges som det afgørende værktøj i en fuldstændig afdækning af sammenhængene mellem de forskellige former for geometri, der var vundet frem i løbet af det 19.århundrede. I sit arbejde studerede Klein indledningsvis egenskaber ved geometriske figurer, der var invariante under særlige transformationer, men efter kort tid flyttedes hans fokus sig fra figurerne og over til transformationerne selv. Klein undersøgte mange forskellige typer af transformationer, og det var opdelingen af transformationerne i klasser, der ultimativt ledte ham til den gruppeteoretiske strukturalisering af geometrien.

4.3 Abstrakt Gruppeteori

Et abstrakt matematisk begreb bliver som oftest udskilt af konkrete matematiske sammenhænge som et samlende og simplificerende koncept, der indeholder al den information, der er nødvendig for at kunne samle måske endda vidt forskellige teorier under et og samme tag. Den oplagte fordel ved denne overordnede anskuelse består i, at man i et snuptag kan skaffe sig resultater gældende i alle de forskellige konkrete situationer blot ved én gang for alle at udlede dem abstrakt. Det er netop denne fordel, der er den store motivationskilde til at udskille det abstrakte gruppebegreb af de dele af 1800-tallets vigtigste matematik, som jeg har beskrevet ovenfor.

Fra de tre ovenfor omtalte matematiske grene, udsprang der i løbet af det 19.århundrede tre *forskellige* gruppeteorier. Lagranges og Cauchys arbejder førte til permutationsgruppeteorien, Gauss' talteori gav anledning til studiet af kommutative talgrupper, mens Kleins geometriske betragtninger som nævnt omfattede studiet af transformationsgrupper. Disse tre teorier blev betragtet som adskilte forskningsområder og derfor udviklet parallelt helt frem til årene omkring 1870. Ganske vist forsøgte Cayley sig i 1854 med at indføre en fuldstændig abtstrakt definition af en gruppe, men hans fremsynede bidrag vandt aldrig rigtig indpas hos de kontinentale matematikere. Det var stadig kun på de britiske øer og specielt i kredsene omkring Boole, Cayley og Sylvester, at man rigtig værdsatte den abstrakte matematik.

Udviklingen af permutationsgruppeteorien når sit højdepunkt da Camille Jordan i 1870 udgiver *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Jordan havde siden 1860 i en række artikler videreudviklet og generaliseret teorien om permutationer og opnået mange nye indsigter, der sammenfattes og udnyttes i 1870-udgivelsen. Man kan med rette sige, at *Traité des substitutions et des équations algébriques* afslutter den permutationsteori-epoke som Lagrange satte igang præcis 100 år tidligere.

I 1870 udkom også en artikel af Kronecker med den mundrette titel *Auseinandersetzung* *einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexe Zahlen.* Kronecker giver her en abstrakt definition på en endelig abelsk gruppe, som en generalisering af visse talteoretiske begreber - dog uden at kalde sin størrelse en gruppe. Grupper var på denne tid udelukkende permutationsgrupper som hos Galois og Jordan. Kroneckers gruppedefinition markerer et naturligt endepunkt for gruppeteoriens udvikling indenfor talteorien.

Tilføjer man Kleins *Erlangen Programm* til de ovenstående arbejder, har man i 1872 en generel definition på både en permutationsgruppe, en abelsk talgruppe og på en transformationsgruppe. Hvad vi mangler er at få knyttet de tre størrelser sammen til det abstrakte gruppebegreb. I første omgang bliver permutationsteorien og talteorien forbundet. Dette sker blandt andet i et arbejde af Frobenius og Stickelberger fra 1879 og i en tekst af Netto fra 1882. Alle tre forfattere er stærkt inspirerede af Kronecker, men specielt Netto følger også Jordan tæt. I introduktionen til Nettos *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* finder vi begrundelsen for hans abstrakte tilgang. Han skriver:

> *"Det er ubetvivleligt, at kredsen af anvendelsesmuligheder for en algoritme vil udvide sig, hvis det lykkes at befri dens grundlag og opbygning fra de forudsætninger, der ikke er strengt nødvendige.(...) At teorien om Gruppedannelse tillader en sådan fremstilling, taler for dens vidtrækkende betydning og for dens fremtid."*[5]

Den endelige samling af de tre gruppeteorier skyldes Walther von Dycks 'Habilitationsschrift' fra 1882 kaldet *Gruppentheoretische Studien*. Udover at være inspireret af Cayleys abstrakte arbejde, havde von Dyck også studeret Nettos tekst fra 1872. Og da von Dyck i en årrække arbejdede som Felix Kleins assistent var læremesterens gruppeteoretiske behandling af geometrien også en del af von Dycks vidensgrundlag. Når det blev von Dycks abstrakte gruppebegreb og ikke Cayleys, der vandt udbredelse og anerkendelse, skyldes det i høj grad, at det matematiske miljø anno 1882 var blevet langt mere modtagelig for abstrakt matematik, end det havde været i 1854. Der gik da heller ikke mange år før det abstrakte gruppebegreb var at finde i de fleste nyudgivne algebrabøger. Jeg vil slutte dette historiske afsnit med at citere Heinrich Webers *Lehrbuch der Algebra* fra 1895. Citatet beskriver den ophøjede status, som gruppebegrebet havde opnået lige inden århundredeskiftet, en status som er uændret den dag i dag.

> *Der findes hovedsageligt to almene begreber, med hvilke man kan beherske algebraen. Eksistensen og betydningen af disse begreber kunne man først erkende, efter at algebraen i en vis forstand var færdigudviklet og var blevet matematikernes ejendom. Først da kunne man se de forbindende og styrende principper indenfor algebraen. Jeg taler om begreberne en gruppe og et legeme (...). Det mest almene begreb er Gruppebegrebet, og derfor begynder vi med dette.* [6]

[5] [5] p.III. Min oversættelse fra tysk. JS.
[6] [6] p.180. Min oversættelse fra tysk. JS.

4.4 Gruppebegrebets historie - en didaktisk vejviser

Når jeg har valgt at bruge kræfter og plads på matematikhistorie i et matematikdidaktisk speciale, er der naturligvis en undervisningsfaglig grund dertil. Lad mig her forklare, hvordan jeg mener, at den abstrakte gruppes skabelsesberetning kan være vejledende for, hvordan man kan designe en alternativ og forhåbentlig mere succesfuld algebraundervisning.

Den historiske udvikling af den abstrakte gruppeteori er et godt eksempel på, hvordan abstrakte matematiske begreber i almindelighed bliver til. I bogen *The Development of Mathematics* sammenfatter E.T. Bell gruppeteoriens evolution på følgende vis:

> *"The entire development required about a century. Its progress is typical of the evolution of any major mathematical discipline of the recent period: first, the discovery of isolated phenomena; then the recognition of certain features common to all; next the search for further instances, their detailed calculation and classification; then the emergence of general principles making further calculations, unless needed for some definite application, superfluous; and last the formulation of postulates crystallizing in abstract form the structure of the system investigated"* [7]

Den abstrakte gruppeteori kan med baggrund i den netop afsluttede historiske redegørelse opfattes som et tag, der blev lagt ovenpå et hus, hvis solide fundament bestod af højtudviklet, konkret matematik indenfor hhv. permutationsteori, talteori og geometri. Når man som ny studerende på matematikuddannelsen påbegynder studiet af gruppeteori, præsenteres man straks for den abstrakte definition af en gruppe, og først når man har opnået fortrolighed med denne, gives konkrete eksempler på grupper. For at blive i det ovenfor anvendte billedsprog kan man sige, at man i den traditionelle undervisning beder de studerende om at bygge deres gruppeteorihus fra oven. Denne undervisningsstrategi kan kun lykkes, hvis de studerende er i stand til at konstruere det abstrakte begreb uden at have et konkret fundament at tage afsæt fra. Men hvordan kan man fortage en abstraktion, hvis der ikke er noget at abstrahere fra? (Jf. citat af Winsløw på side 33)

Havde Cayley levet, ville han formodentlig have givet mig ret i, at det ikke nytter at indføre en abstraktion, hvis modtagerne ikke er klar til at abstrahere. Min påstand er derfor, at den traditionelle undervisnings forhastede abstraktion udgør en væsentlig del af årsagen til, at mange studerende har problemer med at begribe den abstrakte gruppeteori, og at man for at komme dette til livs bliver nødt til at omstrukturere undervisningen. Udfordringen ligger i at anvise en undervisning, der på den ene side sikrer, at gruppebegrebet ikke kommer til at svæve frit helt uden forbindelse til den konkrete matematik, men som samtidig sikrer, at det abstrakte gruppebegreb kan løsrives fra de partikulære eksempler i en sådan grad, at fordelene ved den abstrakte anskuelse træder frem.

Som det vil fremgå i et senere afsnit, har jeg forsøgt at bruge den historiske udvikling af gruppebegrebet som ledetråd i mit design. Faktisk giver citatet af Bell ovenfor en

[7] [7] p. 246

udmærket omend lidt kortfattet disposition for måden, hvorpå jeg indførte det abstrakte gruppebegreb i min undervisning. Uden at afsløre nogen form for bagtanke overfor eleverne lod jeg dem arbejde med de tre konkrete realisationer af diedergruppen, D_4, som jeg præsenterede i afsnit 3.1. Det burde i forlængelse af historieafsnittet være klart, at realisationerne var valgt i overensstemmelse med de historisk set klassiske gruppetyper, idet eleverne stiftede bekendtskab med både permutationer og geometriske transformationer i form af rumlige flytninger og matricer. Det var tanken, at eleverne undervejs skulle blive opmærksomme på eksemplernes ensartethed, og at en kollektiv bevidsthed om disse ligheder ville komme istand via en særligt tilrettelagt klassediskussion. Fra denne platform burde det være nærliggende at indføre det abstrakte gruppebegreb som en generalisation af de betragtede eksempler og forhåbentlig også muligt at bringe eleverne til at indse gevinsten ved at kunne argumentere abstrakt.

Der ligger en række andre betragtninger end de rent historiske til grund for mit undervisningsdesign. Jeg vil derfor ikke komme nærmere ind på enkelthederne i undervisningen, førend jeg har alle ingredienserne klar. Den oventående oversigt var blot ment som en lille appetitvækker, og som en dokumentation af den påstand jeg fremsætter i afsnittets overskrift. Jeg håber hermed at have underbygget min påstand om, at gruppeteoriens historie vitterlig kan - og måske endda bør - bruges som en didaktisk vejviser for den indledende undervisning i abstrakt algebra.

5 Algebraens essens

Udviklingen af en matematisk disciplin er ofte drevet af behovet for at løse en særlig type af problemer. Som det fremgår af min historiske redegørelse, var den væsentligste drivkraft for algebraens tidlige udvikling ambitionen om at finde generelle løsningsformler til polynomiumsligninger. Da Galois i en vis forstand havde sat det sidste punktum i ligningsteorien, var problemerne løst og den oprindelige drivkraft derfor væk. Man var nået til enden af en blindgyde, og som en konsekvens heraf måtte den algebraiske forskning skifte retning. Algebraikerne begyndte nu at axiomatisere og udforske de abstrakte begreber, der var dukket op i forbindelse med ligningsteorien. Det er som tidligere nævnt denne udskiftning af de studerede objekter, der markerer overgangen fra den klassiske til den moderne algebra.

I modsætning til udviklingen af den klassiske algebra var udviklingen af den moderne algebra ikke umiddelbart motiveret af et behov for at løse presserende matematiske problemer. Man kan faktisk sige, at de abstrakte strukturer kun blev til, fordi matematikerne *ikke* var i stand til at løse de klassiske problemer via datidens gængse metoder (jf. Lagranges forsøg på at løse femtegradsligningen fra 1770). Gruppeteorien blev ikke kreeret som et værktøj til at løse nye problemer, men derimod for at styrke sammenhængskraften i samtidens matematik og for at opnå større akkurathed i de benyttede formuleringer og ræsonnementer. At lave moderne algebra krævede derfor en væsentlig anden tilgang til matematikken end den klassiske algebra gjorde. Den traditionelle algebraiske tankegang, der i høj grad bar præg af den geometriske måde at ræssonere på, slog ikke længere til, og et moderne algebraisk tankesæt blev derfor udviklet blandt matematikerne. I dag udvides den videnskabelige algebra, når højt specialiserede eksperters studier af abstrakte strukturer giver interessante resultater. Men selvom udviklingen har været enorm, har de grundlæggende studieobjekter og den moderne algebraiske tankegang ikke ændret sig væsentligt over de sidste 100 år.

Når et kulturfænomen forbliver langtidsholdbart, er det fordi, det skiller sig ud fra mængden som noget særligt interessant, der bliver ved med at åbne sig op for nye fortolkninger og indsigter. Det er med baggrund i ovenstående oplagt, at den abstrakte algebra er et langtidsholdbart kulturfænomen, der har ledt videnskaben til en masse ny og brugbar viden. Det er dog ikke helt så oplagt at sætte fingeren på, hvad det er, der adskiller den moderne algebra fra al anden moderne matematik. For at finde et svar må man forsøge at udpege de fælles egenskaber ved algebraens objekter og idéer og beskrive det særligt karakteritiske ved disse. Man må kort sagt besvare spørgsmålet: Hvad er det, der gør algebra til algebra?

Når svaret på dette spørgsmål er af undervisningsfaglig interesse, er det fordi en afgrænsning af fagområdet og et kendskab til det essentielle i fagets begreber og tankemåder, giver underviseren mulighed for ikke blot at videregive fagets legeme, men også at inddrage dets ånd. Det er netop fordi, jeg mener, at et sundt kendskab til fagets krop er betinget af et sundt kendskab til fagets sjæl, at jeg har inddraget dette studium af algebraens natur i min specialerapport.

5.1 Særlige kendetegn ved fagområdet algebra

Min forhåbning om at kunne indkapsle algebraens væsentligste kendetegn i en enkelt sætning kuldsejlede ret hurtigt. På grund af fagområdets størrelse fandt jeg det svært at give en præcis og udtømmende karakteristik af essensen i algebraens objekter og tankegange. Så i stedet for at forsøge mig med en definition, der med al sandsynlighed ville blive ufuldstændig og derfor uhensigtsmæssigt afgrænsende, har jeg valgt at præsentere fire forskellige synspunkter angående det essentielle i algebraen. Jeg vil starte med at beskrive algebraen som generaliseret aritmetik. Dernæst vil jeg karakterisere algebraen via dens brug af den såkaldte operationelle symbolisme. Herefter kalder jeg algebraen for et studium af relationer og til sidst beskrives det centrale ved algebraen som en særlig måde at tænke på. Når jeg medtager fire forskellige beskrivelser af algebraen, er det naturligvis fordi, ingen af dem er tilstrækkelige i sig selv. Beskrivelserne skal opfattes som komplementære i den forstand, at ingen af dem udelukker andre, men derimod bidrager til det samlede billede af algebraen. Tanken er, at man ved at belyse algebraen fra fire forskellige vinkler kan oplyse hele fagområdet.

5.1.1 Generaliseret aritmetik

Algebra kan betragtes som generaliseret aritmetik. Regning med abstrakte symboler inden for de algebraiske strukturer minder på mange måder om regning med tal. De definerende axiomer for både vektorrum, ringe, legemer og grupper er alle opfyldt af flere forskellige talmængder, og når man skal notere kompositionsreglerne, benytter man som oftest plusset eller gangeprikken hentet fra den elementære aritmetik. Alene det, at man bruger ordet *regning* om operationerne udført i for eksempel en gruppe, indeholder en reference til tallenes aritmetik. Det virker derfor naturligt at anskue algebraen som en mere generel og mere abstrakt version af de aritmetiske operationer, man udfører på tal. Denne fokusering på tallenes domæne giver dog en for simpel karakteristik af fagområdet algebra. Louis Charbonneau skriver:

> *This emphasis on numbers hides the fact that many other mathematical objects also behave like those algebraic symbols, or should I say, the other way around, that algebraic symbols behave like other mathematical objects. Segments, areas and volumes are in some ways even closer to algebraic symbols than numbers.*[8]

5.1.2 Brug af operationel symbolisme

Den anden karakterisktiske komponent ved algebraen, som jeg vil nævne, er den såkaldte *operationelle symbolisme*, som denne type af matematik gør flittig brug af. Da Viète indførte brugen af symboler for både givne og ubekendte kvantiteter af en hvilken som helst slags, bevirkede det, at de algebraiske ræsonnementer, der indtil da havde haft stærke geometriske aner, kunne oversættes til kæder af formelle operationer udført på symbolerne. Symbolerne var således ikke blot forkortelser for ord, men i en vis forstand selvstændige objekter, som man kunne udføre operationer på. Nutildags udføres algebraiske operationer på symboler, der er fuldstændig blottet for reference til de geometriske eller aritmetiske objekter. Operationerne er altså fuldstændigt uafhængige af betydningen af de symboler, som de opererer på. Det er en forudsætning for den konstruktive brug af symboler, at man er klar over, hvilke operationer man må udføre på symbolerne, når man søger at udlede et ønsket resultat. At udstikke regler for manipulation med symbolholdige udtryk er således et væsentligt træk ved algebraen. Charbonneau understøtter denne påstand ved at sige, at den operationelle symbolisme er central for algebraen, fordi den er et vigtigt værktøj for den analytiske tilgang til problemløsning, der er karakteristisk for disciplinen.[9]

5.1.3 Et studium af relationer

Det næste kendetegn for algebraen, som jeg vil gøre opmærksom på, er, at den i stedet for at beskrive de matematiske *objekter* beskæftiger sig med at studere *relationerne* imellem

[8] [8], p. 34
[9] [8], p. 35

dem. Da Klein i sin tid skiftede fra at betragte de geometriske figurer til at betragte transformationer, der efterlod figurerne uændrede, var det fordi, han ønskede at relatere de geometriske figurer via deres invariansegenskaber. Da han helt løsrev sine studier fra de geometriske figurer, var det fordi, han nu betragtede transformationerne som objekter i sig selv og søgte efter relationerne, der kunne sammenkæde dem. Det er stadig et centralt anliggende for algebraen at beskrive relationer mellem objekter af en hvilken som helst art. Det er nemlig disse relationer, som ofte danner grundlaget for de strukturer, der udgør den moderne algebras genstandsfelt. Endnu en gang kan Charbonneau yde påstanden bistand, idet han skriver, at:

> *Algebra is foremost a way to manipulate relations. (...). At every step of its evolution toward a "science of relations", algebra, what ever it was, had to develop ways to represent relations between numbers or between magnitudes, or between the arithmetic of numbers and the arithmetics of magnitudes.*[10]

5.1.4 En særlig måde at tænke på

Som det fjerde essentielle aspekt ved algebraen, vil jeg fremhæve den moderne algebraiske tankegang. Der findes måske ikke så overraskende flere forskellige opfattelser af, hvad en algebraisk tankegang indebærer. Jeg har valgt at følge Michael S. Mahoneys og Sabetai Ungurus samklingende bud på essentielle træk ved det algebraiske tankesæt. Mahoney skriver:

> *The mode of algebraic thought is free of ontological commitment. (...). In particular this mode of thought is free of the intutive ontology of the physical world. Concepts like "space", "dimension", and even "number" are understood in a purely mathematical sense, without reference to their physical interpretation. In this respect, the algebraic mode of thought can be characterized as an abstract mode of thought in contrast to an intuitive.*[11]

Sabetai Unguru udbygger denne karakteristik af den moderne algebraiske tankegang, idet han skriver:

> *It is completely abstract, free from dependency on perceptional, spatial considerations, it is manipulative, the entities it manipulates are themselves completely abstract, mere signs, it is analytical, functional, it possesses a universality of application missing in geometric reasoning and it is, at least to a certain extent, mechanical in the rules of manipulations of its symbols.*[12]

En sammenfatning af de fire karakteristika, beskriver algebraen som en videnskab, der interesserer sig mere for relationer end objekter, og som betjener sig af en operationel

[10] [8], p.36
[11] [9], p.1
[12] [10], p. 395

symbolisme i dens ræsonnementer og problemløsning. Algebraiske ræsonnementer følger i vid udstrækning regler, der minder om aritmetikkens, men de størrelser, man manipulerer med, bør hverken opfattes som generaliserede tal eller geometriske objekter i forklædning men derimod som fuldstændigt abstrakte entiteter repræsenteret ved tegn. Den algebraiske tankegang er mere analytisk, abstrakt og generaliserende, end den er intuitiv, og den er fritaget for at skulle forholde sig til ontologiske spørgsmål og forpligtelser.

Med dette signalement af algebraens natur i baghovedet, vil jeg i det næste afsnit beskrive et overordnet og ret iøjnefaldende karaktertræk ved det abstrakte gruppebegreb. Her følger en nærmest fænomenologisk beskrivelse af specialets absolutte midtpunkt, den abstrakte gruppe.

5.2 Gruppebegrebet - et samlende og generaliserende begreb.

Som nævnt i indledningen volder det mange studerende problemer at lære abstrakt gruppeteori. Det er Dubinskys opfattelse, at en stor del af årsagen hertil kan findes i den væsensforskel, der er imellem det abstrakte gruppebegreb, og al den matematik som de studerende tidligere har stiftet bekendtskab med. Men hvori består denne væsensforskel? Hvad er det, der adskiller den abstrakte universitetsalgebra fra den mere konkret anvendelige og metodetunge matematik, som eleverne kender fra gymnasiet? For at give svar på disse spørgsmål vender jeg endnu engang tilbage til den historiske udvikling af gruppebegrebet.

Da matematikerne endelig havde lagt sig fast på, hvordan de ville definere en gruppe, skulle man tro, at de umiddelbart herefter ville kaste sig over nye problemer i håbet om, at deres nyindførte begreb kunne være våbnet, med hvilket jagten på problemernes løsning ville blive udbytterig. Dette var dog *ikke* tilfældet, og på denne måde var den indflydelse, som opdagelsen af gruppeteorien fik på matematikernes arbejde anderledes, end den indflydelse tidligere matematiske nyopdagelser havde afstedkommet. I stedet for at vende blikket udad mod nye opdagelser, rettede man sin opmærksomhed indad mod de allerede kendte resultater. Algebraikerne begyndte således på at generalisere de gammelkendte propositioner fra eksempelvis permutationsteorien og talteorien, og på at bevise dem i deres abstrakte tilfælde. Gevinsten ved denne abstraktion var, at man fik sammenkædet en række metoder, der hver især havde vist sig effektive indenfor deres eget domæne og derved dannet generelle objekter og værktøjer, der efter den fornødne tilpasning kunne gøres anvendelige indenfor andre grene af matematikken. Når axiomatiseringen af gruppebegrebet blev en stor succes, skyldes det især, at den tilbød rammerne for en mere universel tilgang til matematikken, og at den gav matematikerne et sprog, der kunne beskrive de forskellige matematiske konteksters fællestræk under et. Dorier skriver, at ...

> *...the success of axiomatization did not come from the possibility of reaching a solution to unsolved mathematical problems, but from its power of generalization and unification and,*

consequently, simplification in the search for methods for solving problems in mathematics.[13]

Matematiske begreber, der tilbyder generelle metoder til at løse problemer fra forskellige områder under brug af de samme universalværktøjer, kalder Dorier for *forenende og generaliserende begreber* (concepts unificateurs et généralisateurs). Det skulle gerne fremgå af det ovenstående, at det abstrakte gruppebegreb er et klokkeklart eksempel på et forenende og generaliserende begreb. Man definerer naturligvis ikke et overordnet begreb, hvis der kun findes ét enkelt konkret eksempel. Det abstrakte gruppebegreb er da heller ikke det eneste samlende og generaliserende begreb, som Dorier nævner. Til denne type af begreber hører også de abstrakte vektorrum, algebraiske ringe og legemer, samt det moderne ϵ-δ-grænseværdibegreb. I citatet nedenfor beskriver Dorier ganske vist denne type af begreber i almindelighed, men dermed beskriver han altså også gruppebegrebet i særdeleshed. Med tanke på dette projekts overordnede tema, vil jeg tillade mig at betragte hans ord som dén afgrænsende karakteristik af det abstrakte gruppebegreb, som det var det aktuelle afsnits hovedformål at tilvejebringe.

> *Unifying and generalizing concepts unify and generalize different methods, tools and objects, which existed previously in a variety of settings. This type of concept is then a formal concept which unifies the various objects of which it has been abstracted. It has not necessarily been created to solve new problems, but to make the solution of many problems easier or more similar to each other. Moreover these concepts represent a change of perspective which induces a sophisticated change of level in mental operations.*

Når studerende første gang stifter bekendtskab med den abstrakte gruppeteori, har de formentlig aldrig før arbejdet med forenende og generaliserende begreber. For første gang i deres matematikkarriere er det ikke tilstrækkeligt at tillære sig imitative handlemønstre i form af gangbare håndsvingsmetoder til løsningen af en lang række af problemer, der i virkeligheden blot er små variationer over de samme få temaer. Mange studerende har gennem en lang skolegang fået den fastgroede opfattelse, at deres matematiske arbejde altid skal sættes i gang af et spørgsmål, som læreren eller andre ønsker, at de skal besvare. De mener derfor også, at deres virksomhed i sidste ende skal resultere i et svar, som de kan sætte to streger under. For hvis matematik ikke gælder om at finde rigtige svar på de stillede spørgsmål, hvad gælder det så om?

I den indledende gruppeteori er det ønskede udbytte af ens arbejde ikke et konkret facit, men derimod karakteristikken af et nyt, samlende og generaliserende begreb hvis konkrete anvendelser ikke umiddelbart (kan) videregives til de studerende. Indføringen af den abstrakte gruppeteori repræsenterer altså et markant og brat stilskifte i den matematik, de studerende beskæftiger sig med, og dette kan være med til at forårsage problemer med læringen. At lære abstrakt matematik er en uhyre kompliceret proces, hvis succes afhænger af en lang række faktorer. Af disse er elevens opfattelsen af, at det forelagte arbejde er relevant absolut ikke uvæsentlig. Hvis en studerende ikke rigtig er klar over, hvad formålet

[13] [11], p. 176

med hendes arbejde er, vil hendes agtelse af faget formentlig dale og sandsynligheden for, at hun når et tilfredsstillende udbytte af undervisningen, mindskes.

Som nævnt er oplevelsen af relevans blot en blandt mange parametre med afgørende betydning for en succesfuld tilegnelse af den indledende abstrakte algebra. Derfor synes en uddybende undersøgelse af den studerendes læring af gruppeteorien at være på sin plads. Inden denne undersøgelse kan blive algebra-specifik, må jeg have nogle generelle begreber til rådighed. I det næste kapitel vil jeg derfor først give et summarisk oprids af den konstruktivistiske læringsteori, inden jeg forsøger mig med et mere konkret bud på hvilke processer og faktorer, der spiller ind, når elever arbejder på at lære abstrakt gruppeteori. Vi forlader altså nu stofdidaktikken og bevæger os over i den didaktiske trekants elevkasse for at kunne betragte det didaktiske system fra en læringsteoretisk synsvinkel.

6 Læringsteori generelt. Konstruktivisme. Hvordan læres gruppeteori?

Når alt kommer til alt, er formålet med at undervise, at modtagerne lærer noget, eller mere specifikt, at de tilegner sig den tilsigtede viden. Desværre er det at blive undervist ikke altid ensbetydende med, at man også lærer - heller ikke selvom undervisningen er veltilrettelagt og veludført, og man selv er meget lydhør. At lære er nemlig en overordentlig kompliceret proces, der ikke alene afhænger af lærerens kompetencer og elevens gode intentioner.

Det er klart, at viden om hvordan mennesket lærer, har betydning for, hvordan lærere bør strukturere deres undervisning. Læringsteorien er med andre ord af stor didaktisk interesse. Menneskets læring har været genstand for en ekstensiv og ret forskelligartet forskning, og teorierne om læring har derfor været mange. Læringsteorien som videnskabsfelt har gennem tiderne gennemgået en markant udvikling og flere teorier, der engang var *cutting edge*, synes nu at være håbløst forældede. Enkelte teoridannelser har dog vist sig at være ret robuste. Den til stadighed oftest anvendte læringsteori skyldes i sin oprindelig udgave Jean Piaget, og det er uddrag af denne schweizers teorier, der er hovedemnet for dette sjette kapitel i min specialerapport.

Jeg vil begynde afsnittet med, at beskrive grundidéen og de mest elementære begreber i Piagets læringsteori. Derefter vil jeg fokusere på begrebet *refleksiv abstraktion*, og forklare hvorfor netop dette begreb er særligt interessant, når man ønsker at beskrive de processer, der er involveret, når studerende arbejder på at lære gruppeteori. Denne forklaring følger forskning udarbejdet af Ed Dubinsky og hans kollegaer, og den stammer fra den allerede jævnligt citerede artikel, *On learning fundamental concepts of group theory.*[14] Slutteligt

[14] [2]

vil jeg beskrive det læringsteoretiske grundlag for Teorien om Didaktiske Situationer, der til dels tager sit udgangspunkt i Piagets klassiske teori.

Allerførst en lille præcisering. Ordet læring benyttes i to forskellige betydninger. Læring kan henvise til de mentale processer, der finder sted i det lærende individ, og som fører til ændringer i individets kapacitet. Læring kan dog også være en betegnelse for resultatet af disse mentale processer og i så fald henvise til det, individet har lært. For at der ikke skal opstå begrebsforvirring, vil jeg fremover holde mig til følgende definition af begrebet læring:

> *Individets læring kan karakteriseres som de kognitive processer, som udvikler dets handle- og tænkeberedskab.*[15]

Resultatet af elevernes læringsprocesser, altså det de har lært, vil jeg fremover kalde for elevernes læringsudbytte eller blot deres udbytte.

6.1 Klassisk læringsteori. Den konstruktivistiske læringsopfattelse

Piaget kaldte selv sin læringsteori for *genetisk epistemologi*, hvilket kan omskrives til læren om erkendelsens tilblivelse hos individet.[16] I denne anskuelse ligger det implicit, at læring er en mental proces, der er knyttet til det individ, der gennemfører den. Piaget mente dog ikke, at det fulde ansvar for en succesfuld læreproces kan pålægges den lærende. Han anerkendte omgivelsernes indflydelse, idet han sammenlignede menneskets erkendelsesproces med en biologisk organismes tilpasning til dens omverden. Piaget beskrev, hvordan en organisme altid vil forsøge at genoprette en ny ligevægt, efter en ekstern forstyrrelse har bragt den i ubalance i forhold til dens miljø, og drog paralleller til hvordan ydre påvirkninger og ændringer i menneskets verdensopfattelse vil forårsage en kognitiv adaptationsproces - altså læring. Ligesom et menneskes fysiske udvikling er dets mentale udvikling afhængig af gunstige vækstbetingelser. Dermed ikke være sagt, at et individs mulighed for at lære udelukkende er betinget af hensigtsmæssige ydre påvirkninger. En persons mulighed for at lære afhænger ligeledes af den lærendes medfødte forudsætninger, dennes hidtil indvundne viden samt personens evne til at genkalde sig sin eksisterende viden og tilpasse den til brug i nye sammenhænge.

Et centralt element i Piagets genetiske epistemologi er den såkaldte skemateori. Piaget benytter betegnelsen *skemaer* som metafor for de mentale strukturer, mennesket (ubevidst) anvender til at ordne sin viden og sine erfaringer. Den ret så omfattende skemateori beskriver Piagets forståelse af, hvordan mennesket lagrer og organiserer sin eksisterende viden, og hvordan nye erkendelser bliver til i samspil med den eksisterende viden. Til

[15] [12], p.91
[16] [12], p.95

skemateorien hører også en beskrivelse af, hvordan ny viden enten direkte kan tilføjes den eksisterende, eller hvordan man må omstrukturere sin organisation af viden for, at den nyerhvervede erkendelse kan få sin rette plads i organisationen. Den første af disse processer kaldes *assimilation*, den anden kaldes *akkomodation*.

I skemateorien findes to grundlæggende typer af skemaer nemlig de *figurative* skemaer og de *operationelle* skemaer. De figurative skemaer er de mentale strukturer, der opregner og holder orden i individets viden om forskellige fænomener såsom personer, konkrete eller abstrakte begreber samt de karakteristiske egenskaber ved alle disse. Det er de figurative skemaer, der bringes i spil, når man skal genkende helt eller delvist forskellige fænomener og sortere dem under samme kategori. Et nærliggende, omend lidt avanceret, eksempel på denne brug af figurative skemaer opstår i forbindelse med genkendelsen af forskellige konkrete repræsentationer af den samme abstrakte gruppe. De figurative skemaer opgraderes og udvides når nye konkrete eksempler på i forvejen kendte fænomener, bliver individet bekendt. Stilles den studerende eksempelvis overfor endnu et eksempel på en gammelkendt gruppe, vil hun kunne assimilere dette til sit eksisterende, figurative gruppeskema. Er der derimod tale om hendes første møde med en ikke-kommutativ gruppe, må den lærende foretage en akkomodation af hendes gruppebegreb.

De operationelle skemaer vedrører de handlinger, som individet kan udføre på fænomenerne, samt de konsekvenser som handlingerne medfører. Et operationelt skema indeholder individets forestillinger om de omstændigheder, situationer eller tilstande, der aktiverer det givne skema, samt specifikationer af den handling man udfører. Desuden omfatter de operative skemaer ens forventninger til handlingens konsekvens på en sådan måde, at de kan sammenlignes med de faktiske oplevede effekter. Et operationelt skema må tilpasses, når det finder anvendelse i nye situationer, eller når handlingens konsekvenser er væsentlig anderledes end de forventede.

Det er meget almindeligt, at undervisningssituationer forlanger, at den studerende må aktivere flere skemaer samtidig og lade dem indgå i arbejdet i forskellige kombinationer. For at øge sin kapacitet i forhold til sådanne situationer, er det altså ikke nok kun at forfine skemaerne et af gangen, man må til stadighed optimere organisationen af sine skemaer og søge at forbedre de enkelte skemaers kompatibilitet. Af og til er det nødvendigt, at danne nye skemaer. Dette sker som oftest på baggrund af allerede eksisterende skemaer, idet de fleste nye skemaer konstrueres som en slags overbygning - eller måske rettere som en renovering - af et eller flere af de gamle. Carl Winsløw skriver:

> *Selv når vi er stillet overfor noget, der tilsyneladende er "nyt", vil vi forsøge at forbinde det med skemaer, vi allerede har. Med mindre der er er tale om konkrete skemaer, er det ligefrem en nødvendighed - vi kan ikke danne nye abstraktioner "ud af ingenting".*[17]

Den samlede skemastruktur, der i Piaget-forstand betegner individets totale viden, udvikles, når dele af strukturen aktiveres i tilpas udfordrende situationer. Læring forudsætter

[17][12], p. 98

handling og bevidst refleksion over de erfaringer, man har gjort sig ved at handle. At lære kræver altså, at den lærende er aktiv. Man lærer ikke matematik af blot at opholde sig i et rum, hvor andre laver matematik. Hvilke situationer, der opleves som tilpas udfordrende, afhænger af den lærendes kapacitet. Denne kapacitet er selvsagt et produkt af, hvad eleven tidligere har lært, men har man med børn og unge at gøre, er den også afhængig af elevens kognitive udvikling.

Den berømteste del af Piagets arbejde er *stadieteorien*. Denne teori beskriver forskellige stadier, som et barns kognitive udvikling gennemgår, og relaterer dem til de kognitive processer, som børn i de forskellige stadier kan forventes at kunne gennemføre. Essensen er, at elevens mentale udvikling i en vis forstand må modsvare de opgaver, man stiller ham overfor. Man kan ikke, uanset hvor meget træning der går forud, forvente at en fire-årig knægt kan lære abstrakt algebra. Faktisk mener Piaget, at de grundlæggende forudsætninger for at lære matematik først i fuldt omfang er tilstede hos teenagere. At give en meget grundig forklaring af stadieteorien falder uden for rammerne af dette projekt. Jeg vil derfor nøjes med at hæfte mig ved særlig interessante karakteristika ved det såkaldte *formelt-operative stadium*, som mine seksten- til attenårige elever må formodes at tilhøre. Når jeg skriver formodes, er det fordi den kognitive udvikling ikke udelukkende er aldersbetinget og ikke slavisk følger barnets aldring. En elev på det formelt operative stadium, kan som noget nyt danne skemaer via *kombination* og *abstraktion*. Kombination finder ikke overraskende sted, når de formelle operationer sættes sammen for derved at danne en ny formel operation. Om abstraktion skriver Winsløw:

> *Abstraktion drejer sig om at frigøre tanken fra at være bundet til konkrete objekter og handlinger og derved danne mere overordnede og systematiske forståelser.* [18]

I forbindelse med læring af abstrakt gruppeteori er en særlig interessant form for abstraktion den proces som Piaget kaldte for *refleksiv abstraktion*. Refleksiv abstraktion finder blandt andet sted når abstrakte skemaer dannes ved at udføre formelle operationer på de mere konkrete skemaer. En for gruppeteorien særlig vigtig type af refleksiv abstraktion består i at opfatte operationer som genstande, der kan udføres nye operationer på. Tænk eksempelvis på de otte transformationer af planen i D_4 opfattet som blotte mængdeelementer og på operationen sammensætning udført på par af disse. Jeg vender tilbage til denne refleksive abstraktionsproces i det efterfølgende afsnit.

Piagets teorier udgør fundamentet for den konstruktivistiske læringsopfattelse. Hovedtesen i dette læringssyn er, at mennesket selv konstruerer sin viden på basis af en fortløbende vekselvirkning mellem handling og erfaring. I et forsøg på at sammenfatte det ovenstående vil jeg sige, at læring ifølge Piaget hovedsageligt afhænger af tre faktorer:

- **Individets eksisterende skemaer.** Læring sker ved assimilation til og akkomodation af den lærendes eksisterende skemaer.

[18] [12], p. 102

- **Individets handlinger og derigennem opnåede erfaringer.** Læring forudsætter handling og refleksion over de gennem handlingen opnåede erfaringer.

- **Individets kognitive udvikling.** Den mulige læring afhænger af de typer af skemaer, som individet kan håndtere.

Holder vi fast i, at en succesfuld undervisning er kendetegnet af, at modtagerne lærer det ønskede, er det klart, at læreren i sin plaglægning må tage disse tre forhold i betragtning. De aktiviteter læreren igangsætter skal altså udover at give eleverne mulighed for at drage en række erfaringer, hvoraf de kan konstruere den tilsigtede viden også være afstemte med elevernes forudsætninger og være egnede for det pågældende alderstrin. Jeg har i mit eget undervisningsdesign gjort, hvad jeg kunne for at opfylde disse tre kriterier.

6.2 Hvordan læres abstrakt gruppeteori?

Som lovet vil jeg nu formidle en mere specifik karakteristik af læringen af de indledende begreber i den abstrakte gruppeteori. Den teori, jeg fremsætter her, er som tidligere nævnt Ed Dubinskys værk, og den stammer fra et forskningsprojekt, der havde til formål at afdække og analysere de studerendes vanskeligheder med at forstå abstrakte begreber - herunder gruppebegrebet. Mere præcist ønskede Dubinsky at kortlægge en følge af udviklingstrin, en såkaldt genetisk dekomposition, af det abstrakte gruppebegreb med henblik på at kunne specificere hvilke mentale konstruktioner, de studerende synes at benytte, når de forsøger at begrebsliggøre sig den abstrakte gruppe.

Dubinsky antager et konstruktivistisk læringssyn. Han forsøger at tilpasse Piagets idéer til et studium af en avanceret matematisk tankegang - nemlig den algebraiske. Navnlig begrebet refleksiv abstraktion har en central plads i Dubinskys teoridannelse. Dubinsky opsummerer sit læringsteoretiske udgangspunkt, som følger:

> *The essence of our theoretical perspective is that an individual, disequilibrated by a perceived problem situation in a particular social context, will attempt to reequilibrate by assimilating the situation to existing schemas available to her or him, or, if necessary, use reflective abstraction to reconstruct those schemas at a higher level of sophistication. We have in developing this theoretical perspective, attempted to analyze the constructions which may intervene. We find them to be mainly of four kinds - actions, processes, objects, and schemas.*[19]

Jeg har tidligere beskrevet, at den abstrakte gruppe sædvanligvis er det første samlende og generaliserende begreb, som de studerende møder. Eleverne har derfor i begyndelsen ingen lignende figurative skemaer at assimilere det nye begreb i henhold til. Omvendt har jeg også beskrevet, at selvom stoffet synes at være fuldstændig ukendt, vil eleverne alligevel

[19] [2], p. 270

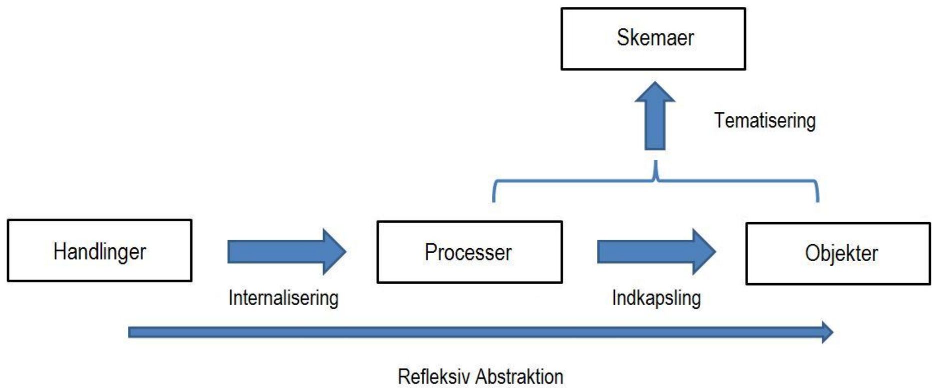
forsøge forbinde det med skemaer, de allerede har. Eleverne vil altså i udgangspunktet forbinde gruppebegrebet med et allerede kendt begreb, og først når denne forståelse opdages at være utilstrækkelig, vil eleven via refleksiv abstraktion forfine sin opfattelse af gruppebegrebet. Elevens nye forståelse af gruppebegrebet får lov at stå, indtil endnu en problematisk situation forårsager uligevægt ved at udstille forståelsens mangelfuldhed. Herefter vil eleven nok en gang forsøge at genoprette balancen ved at tilpasse sit gruppebegreb til at kunne fungere under de nye omstændigheder. Denne sofistikationsproces gentages indtil elevens forståelse af gruppebegrebet er fuldbyrdet, eller rettere sagt, indtil eleven ikke længere oplever ligevægstforstyrrelser i forbindelse med sit gruppebegreb. For at kunne beskrive denne udvikling i detaljen, bliver vi nødt til først at kigge nærmere på den refleksive abstraktionsproces.

Via refleksiv abstraktion kan man som nævnt danne abstrakte skemaer ud fra konkrete skemaer, og specielt dannelsen af abstrakte objekter udfra konkrete handlinger er en central konstruktion. Ifølge Dubinskys artikel går dannelsen af et objekt udfra en handling over konstruktionen af en såkaldt *proces*. Den samlede refleksive abstraktionsproces og konstruktionerne, der indgår i den, beskriver Dubinsky således:

> *An* **action** *is any repeatable physical or mental manipulation that transforms objects in some way. When the total action can take place entirely in the mind of an individual, or just be imagined to take place, without necessarily running through all of the specific steps, we say that the action has been* **interiorized** *to become a* **process**. *It is then possible for the student to use the process to obtain new processes, for example by coordinating it with other processes; that is to combine two or more processes, connecting "inputs" and "outputs" appropriately so that another process is formed. Also, a process may be* **reversed** *to obtain a new process. When it becomes possible for a process to be transformed by some action, then we say that it has been* **encapsulated** *to become an* **object**.[20]

Et skema er også hos Dubinsky et billede på, hvordan begreber eksisterer i menneskets bevidsthed. Forfatteren mener, at et skema konstrueres ved, at individet mentalt samler og forbinder et udvalg af sine tilegnede processer og objekter med baggrund i, at de har noget særligt til fælles. At foretage denne skemakonstruktion kalder Dubinsky at *tematisere*. Når skemaet er blevet føjet til individets organisation af viden, kan det opfattes på to måder. Skemaet kan opfattes som en form for værktøjskasse, der kan tages frem til behandlingen af problematiske situationer. Skemaets individuelle processer og objekter må da pakkes ud igen, inden man kan bruge dem i arbejdet med problemet. Skemaet kan også betragtes som et objekt i sig selv. I så fald kan skemaet indgå som argument i forskellige processer og handlinger. Jeg har sammenfattet hele skemadannelsesprocessen i nedenstående figur, der også byder på en oversættelse af Dubinskys mange begreber.

[20][2], p. 270



Med Dubinskys teori- og begrebsramme til rådighed er jeg klar til at beskrive hans genetiske dekomposition af gruppebegrebet. I det følgende vil jeg altså forklare den følge af udviklingstrin, som forfatteren mener at have påvist, at eleverne gennemgår, når de forsøger at lære de indledende begreber i den abstrakte gruppeteori. Det er en overordnet pointe i Dubinskys fremstilling, at elevernes konstruktion af gruppebegrebet og deres dannelse af undergruppebegrebet følges ad gennem de respektive udviklingstrin.

6.2.1 Gruppebegrebet betragtet som en mængde

I den helt indledende fase synes eleverne at konstruere deres personlige begreb om en gruppe ved udelukkende at forholde sig til de foreliggende gruppeelementer. Eleverne vil internalisere den handling, det er at associere disse elementer i en mængde, til en proces, der med tiden kan indkapsles til et objekt. Det er dette mængdeobjekt, der herefter vil udgøre elevernes idé om den betragtede gruppe. I denne fase oplever eleverne altså, at det primære ved begrebet er elementerne og det, at de alle eksempelvis er permutationer eller transformationer. Gruppeoperationen bliver derimod nærmest ignoreret. Hvis eleverne ikke videreudvikler dette gruppebegreb, vil de fremover kun kunne adskille to grupper, såfremt deres elementantal er forskelligt.

For en elev, der udelukkende opfatter en gruppe som en mængde, er det naturligt, at opfatte undergruppebegrebet som sammenfaldende med delmængdebegrebet. Måske vil en elev på dette trin yderligere forlange, at delmængdens elementer skal kunne udpeges på baggrund af et fælles kendetegn, men ikke desto mindre er det delmængdeegenskaben, der er det primære. Om det at opfatte en gruppe som en mængde og en undergruppe som en delmængde skriver Dubinsky:

> *This demonstrates a misconception caused by some students' efforts to construct a new concept (group) by relating it to a familiar concept (set). This is an example of reequilibration by assimilating the situation to existing available schemas before those schemas have been reconstructed to achieve a higher level of sophistication.* [21]

[21] [2], p. 275

6.2.2 Gruppebegrebet betragtet som en mængde med en operation

Når eleven møder situationer, i hvilke den primitive mængdeopfattelse af en gruppe er utilstrækkelig, bliver det nødvendigt for eleven at rekonstruere sin forståelse af gruppebegrebet. Et vigtigt skridt i udviklingen finder sted, når eleven går bort fra at betragte elementerne som det, der definerer en given gruppe og i stedet fremhæver gruppeoperationen som det væsentligste ved begrebet. Altså når eleven går fra at fokusere på objekterne, til at fokusere på relationerne imellem dem (jf. afsnit 5.1 angående den algebraiske tankegang). Dette kan lede til, at eleven udover at indkapsle en mængde af elementer nu også indkapsler en operation defineret på denne mængde. Disse to objekter kan siden tematiseres, så de kommer til at indgå i et gruppeskema, der kan træde i stedet for elevens mængdeskema-gruppeopfattelse. Derved er elevens gruppebegreb blevet opgraderet men ikke fuldbragt. I denne fase tænkes elevernes opfattelse af gruppebegrebet nemlig at være usammenhængende sammenstykket af den eller de enkeltstående konkrete grupperepræsentationer, som eleven har arbejdet med. Eksempelvis vil elever på dette trin opfatte permutationsudgaven, flytningsudgaven og matrixudgaven af D_4 som tre vidt forskellige grupper. Elevens forståelse af gruppebegrebet er altså endnu et stykke fra at være fuldbyrdet.

En mængde kan tilføjes en kompositionsregel på flere måder. Kompositionen kan gives via en formel, via en algoritme, via en Cayleytabel eller den kan være restriktionen af en komposition, der forinden er defineret på en større mængde. Uanset hvordan gruppeoperationen er defineret, vil en elev på dette udviklingstrin, forbinde en given gruppe med en specifik type mængde og den til denne hørende kanoniske komposition. Eksempelvis vil tallene fra nul til fem sammen med addition modulo seks opleves at udgøre én gruppe, mens de seks drejninger af planen, der fastholder en regulær hexagon med sammensætning som komposition, vil opfattes som en helt anden gruppe.

At en gruppe identificeres med en specifik mængde og dennes komposition, kan skabe forvirring i forbindelse med konstruktionen af undergruppebegrebet. Jeg vil her give et par eksempler, der illusterer de to typiske fejlopfattelser, som Dubinsky beskriver. For nogle elever er det, at $\{0, 1, 2\}$ er en gruppe med sin medfødte kompostionsregel, addition modulo tre, tilstrækkeligt til at konkludere, at $\{0, 1, 2\}$ udgør en undergruppe af $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_{mod.\,6})$. For andre elever gør opfattelsen af, at mængden $\{0, 1, 2\}$ *kun* er en gruppe med addition modulo tre som operation, det umuligt at afgøre om den er en undergruppe af $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ eller ej. Sidstnævnte er født med addition modulo seks som komposition og kun delmængder, der er født med den samme kompositionsregel som den fulde gruppe, kan komme i betragtning som undergrupper.

Elevernes gruppebegreb er altså på dette stadium forbundet til en række partikulære eksempler på grupper, der hver især lever deres eget liv uden relation til de andre grupper. At forstå et samlende og generaliserende begreb som det abstrakte gruppebegreb kræver naturligt nok, at man kan samle ensartede, konkrete gruppeeksempler under et og generalisere dem til et abstrakt gruppebegreb. Igen drejer det sig om at betragte relationer mellem objekter i stedet for at fordybe sig i objekterne selv. Dette forudsætter, at man er i stand til at betragte de enkeltstående gruppeeksempler som objekter, der kan sammenlignes med andre lignende objekter. Elevernes personlige gruppebegreb har altså endnu engang vist sig utilstrækkeligt og en ny forfiningsproces må begynde. Gruppebegrebet må indkapsles til et objekt, der kan indgå som input i sammenligningshandlingen.

6.2.3 Gruppebegrebet opfattet som et objekt

For mange elever er det, at indkapsle et objekt en uhyre vanskelig proces. For nogle vil det tage meget lang tid at gennemføre processen, mens andre måske aldrig vil lykkes dermed. Dubinsky giver ikke nogen præcis forklaring på, hvordan denne indkapsling kunne tænkes at finde sted, men han antyder, at det at *behandle* et begreb som et objekt faktisk kan være medvirkende til, at man ender med at *opfatte* begrebet som et objekt. På objekter udfører man handlinger. Derfor kan situationer, der forlanger, at eleverne udfører handlinger på deres konkrete gruppeeksempler betragtet i deres helhed være det, der sætter indkapslingen i gang. En sådan handling kunne være at tjekke om gruppeaxiomerne er opfyldte for en mængde med en tilhørende komposition, eller at afgøre om en konkret gruppe er abelsk eller ej. Man kan sige, at et objekt er defineret ved sine egenskaber. At tænke på en gruppe som noget, der besidder visse egenskaber, kan derfor være med til at gøre en gruppe til et objekt. Først når eleven opfatter en gruppe som et objekt, vil hun være i stand til at træde op på det øverste udviklingstrin og forstå det abstrakte gruppebegreb som en slags ækvivalensklasse bestående af isomorfe, konkrete grupper. Om denne afsluttende konstruktion skriver mr. Dubinsky:

> *The final step in the construction of a single group begins with the realization that other, apparently different, groups may be constructed, but they turn out not to be really different. At this point a developing (but still naive) conception of isomorphism may intervene and the student might construct the process of forming several specific groups and establishing isomorphisms between them. The encapsulation of this process would create an object which is the group in question.* [22]

Dubinskys arbejde giver et velbeskrevet og veldokumenteret tankesæt og begrebsapparat til at beskrive de processer og de udviklingstrin, der indgår i elevernes læring af det abstrakte gruppebegreb og undergruppebegrebet. Der er dog, som jeg også gjorde opmærksom på i indledningen, ikke tale om en læringsteoretisk facitliste, og lige meget hvor besnærende Dubinskys tanker end måtte forekomme, bør man gøre sig klart, at der blot er tale om ét bud blandt potentielt mange andre. Læringsteori er nemlig ikke en eksakt videnskab, og der er intet deterministisk over elevers læring. Det bedste man kan opnå er derfor at finde og beskrive regelmæssigheder ved ensartede læringssituationer og deres udfald. Jeg har i dette projekt benyttet Dubinskys tekst som rettesnor for den matematiske udvikling i mit undervisningsdesign, men teksten har først og fremmest haft stor

[22] [2], p. 281

betydning for, hvilke tegn på elevernes læring jeg har hæftet mig ved i min dataindsamling. At følge og påvise elevernes færd gennem de respektive udvikingstrin, har været med til at forsikre mig om, at mit forløb var på vej ud af en farbar vej. Jeg vender tilbage til alt dette, når jeg senere i rapporten beskriver mit design og min dataindsamling.

6.3 Det læringsteoretiske og epistemologiske grundlag for TDS

Min rapports første uddrag af Teorien om Didaktiske Situationer begynder med en beskrivelse af det læringssyn, som Guy Brosseau antager i sin didaktiske teori. Herfra går jeg videre med en kort forklaring af teoriens epistemologiske grundhypotese, inden jeg til sidst omtaler, hvordan TDS kan bruges til at designe undervisning.

Uanset hvilken teoretisk anskuelse man vælger, drejer læring sig basalt set om tilegnelse af viden. I TDS skelner man mellem to former faglig viden, nemlig den såkaldte *personlige* viden og den såkaldte *officielle* viden. Den officielle faglige viden kaldes undertiden også for den *fælles* faglige viden.

Med betegnelsen personlig viden henvises til individets egne forestillinger om et begreb eller en teori. Den studerendes personlige viden om et emne vil ofte til at begynde med være af mindre eksplicit karakter ligesom den grad af formalisme, hvormed den studerende kan gengive sin personlige viden, ikke nødvendigvis er særlig høj. Den officielle viden er i sin reneste form, den viden som fagvidenskaben har produceret og publiceret i videnskabelige artikler og tidskrifter. Af større betydning for gymnasieundervisningen - og derfor for mit projekt - er dog den officielle viden, der optræder i lærebøgerne og i de budskaber, som læreren formidler til eleverne. Den sidstnævnte type af officiel viden er ganske vist blevet forarbejdet under den føromtalte didaktiske transposition, men det til trods skulle den gerne have bevaret sin status som officiel og uimodsigelig. I modsætning til den personlige viden er officiel faglig viden eksplicit og generel, og den præsenteres sædvanligvis med en høj grad af formalisme. Derfor er den - igen i modsætning til den personlige viden - meget robust og i en vis forstand urørlig.

Den ufuldstændige mængdeopfattelse af gruppebegrebet, som jeg beskrev ovenfor, er et godt eksempel på, hvordan den personlige viden kan adskille sig væsentligt fra den officielle viden, og beskrivelsen af de efterfølgende udviklingstrin illustrerer fint, hvordan elevens personlige viden kan tænkes at nærme sig den officielle viden gradvist. Dubinskys betragtninger er funderet i det konstruktivistiske læringssyn, og selv om TDS langt henad vejen gør brug af dette, er der alligevel væsentlige forskelle i de to teoriers opfattelse af, hvordan et individ forøger sin viden. Lad mig prøve at uddybe.

Opfattelsen af, at læring finder sted ved, at den studerende tilpasser sin personlige viden til det omgivende miljø, deler Brosseau med Piaget. At læring forudsætter refleksion og erfaring, som igen forudsætter, at den studerende handler i miljøet, er ligeledes en central del af Piagets genetiske epistemologi, som kan genfindes i grundlaget for TDS.

Der findes organisationer af matematisk viden, for hvilke det umiddelbart kan synes at være tilstrækkelig undervisning blot at meddele den til eleverne. For at være sikker på, at den tilsigtede viden bliver en integreret del af elevens samlede organisation af viden og ikke blot et påklistret tillæg, der kun hører undervisningssituationen til, må man dog ifølge TDS sørge for, at få eleven gjort engageret i at arbejde sig til denne viden.

Jeg har tidligere beskrevet, hvordan Piaget hovedsagligt beskæftigede sig med de kognitive og psykologiske aspekter ved den studerendes læring, idet han udforskede erkendelsens tilblivelse i individet. Teorien om Didaktiske Situationer anerkender den kognitive, konstruktivistiske læringsteori som værende vigtig for didaktikken, men i modsætning til Piagets teorier, drejer TDS sig mindst lige så meget om at kunne forstå de sociale samspil mellem elever, lærere og den tilsigtede viden, der finder sted i undervisningen. Årsagen hertil er, at disse sociale interaktioner, ifølge Brosseau, i samme grad som de personlige forudsætninger, er med til at betinge, hvad og hvordan eleverne lærer. Man kan sige, at mens Piagets læringsteori er centreret i elevhjørnet af den didaktiske trekant, anskuer TDS forudsætningerne for læring i et så bredt perspektiv, at det i princippet omfatter hele det didaktiske system. Marie-Jeanne Perrin-Glorian udtrykker dette som følger:

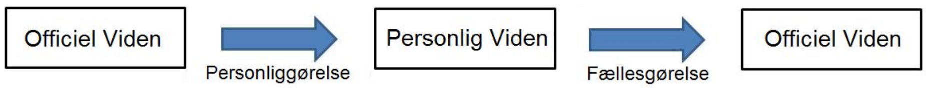
> *First, it is very important to understand that the theory* (TDS) *consists in a systemic approach, focused on the didactic relation, nor the teacher, nor the student, neither the mathematical content itself, but the three at the same time, the famous didactic triangle. Many theories in mathematics education consider this triangle but focus on one term or relations between two terms. The first hypothesis behind TDS from my opinion is that we cannot separate the three terms.*[23]

(Lad mig i parentes bemærke, at Dubinskys teori angående læring af gruppebegrebet kun beskriver relationen mellem eleven og den officielle gruppeteoretiske viden, og at den derfor hverken inddrager overvejelser over elevens sociale samspil med andre elever eller lærerens rolle i processen. Dubinskys artikel er da heller ikke understøttet af TDS, men som nævnt af en rent konstruktivistisk forståelse af læring.)

Målet med al undervisning er selvsagt, at den studerende tilegner sig et specifikt stykke officiel viden. Det gælder med andre ord om, at eleven opnår overensstemmelse mellem sin personlige viden og den tilsigtede officielle viden. I TDS tænkes denne indvinding af ny viden at finde sted i to faser. I den første fase må den lærende udvide sin personlige viden til at omfatte en korrekt fortåelse af den tilsigtede viden. Dette kan ske ved, at eleven arbejder med en særlig relevant opgave eller ved, at eleven udforsker en problemstilling, hvis udredning forudsætter den tilsigtede viden. For at eleven kan tilegne sig en given officiel viden, må det altså gøres muligt for eleven at *personliggøre* den. Eleven kan dog først siges at have tilegnet sig den tilsigtede officielle viden, når den personlige forståelse er blevet generaliseret og formaliseret i en sådan grad, at den antager den ønskede form af fælles viden, som eleven kan benytte på egen hånd og måske endda videregive til andre. At fuldbyrde læringsprocessen kræver altså også en såkaldt *fællesgørelse* af den nyindvundne

[23][14], p. 1

personlige viden. En temmelig stilistisk illustration af læreprocessen, som den beskrives i TDS, kan ses på figuren nedenfor.



Man kan ikke tage for givet, at disse processer forløber spontant. Læreren må derfor med stor omhu planlægge undervisningssituationer, der kan understøtte først personliggørelsen af den tilsigtede officielle viden og siden fællesgørelsen af den opnåede personlige forståelse. Det er tilrettelæggelsen og ikke mindst beskrivelsen af sådanne gunstige undervisningssituationer, der er det helt centrale i TDS. I bogen ”Invitation to didactique” har forfatteren Virginia Warfield oversat et citat af Brosseau, der indeholder franskmandens egen beskrivelse af den i TDS benyttede læringsopfattelse. Citatet lyder:

> *The underlying hypothesis of TDS is that a learning proces can be characterized by a sequence of reproducible Situations that lead to the students learning of a particular piece of knowledge or more concretely to a set of modifications of the students' behavior which characterize the acquisition of that piece of knowledge.*[24]

Fra et TDS synspunkt er elevens læring altså betinget af dennes deltagelse i en række nøje planlagte undervisningssituationer, der vil lede eleven til den ønskede erkendelse. En sådan situation vil typisk bestå af en matematisk opgave eller problemstilling indlejret i et omhyggeligt indrettet didaktisk miljø. Eftersom al officiel viden eksisterer i kraft af, at nogen har tilegnet sig den, er det rimeligt at antage, at et hvilket som helst stykke officiel viden kan læres af tilpas kvalificerede elever under de rette betingelser. Når nu læring ifølge TDS er betinget af eksistensen af gunstige didaktiske situationer, følger det af ovenstående antagelse, at der for ethvert stykke officiel viden må findes en række reproducerbare situationer, der kan sikre, at den tilsigtede viden ender med at have den rette mening for eleven. Denne eksistens af vidensbærende didaktiske situationer er en fundamental antagelse i TDS. Jeg citerer endnu engang ophavsmanden selv.

> *... the meaning of a piece of knowledge originates to a large extent from the fact that the student acquires it by adapting to the didactical situations which are put (devolved) to her. We shall assume also that for every piece of knowledge there exists a family of situations to give it an appropriate meaning.*[25]

Man kan med baggrund i ovenstående argumentation reducere beskrivelsen af en didaktisk designopgave, til en jagt på didaktiske situationer, der i en vis forstand medfører elevens læring af den tilsigtede viden som en konsekvens af dennes aktive og succesfulde deltagelse i situationerne. En sådan nærmest magisk situation kaldes i TDS for en *fundamental situation* for den tilsigtede viden. I den almindelige undervisning er det sjældent realistisk,

[24] [16], p. 33
[25] [13], p. 42

at eleverne tilegner sig al den faglige viden gennem egenhændigt arbejde i fundamentale situationer. Det gælder derfor for læreren om at udpege de mest centrale elementer af denne viden, som det på ingen måde er tilstrækkeligt blot at meddele eleverne, og gøre disse tilgængelige for eleverne via implementering af fundamentale didaktiske situationer. Vi har ovenfor antaget, at sådanne fundamentale situationer altid findes, så tilbage er blot at lokalisere dem, så de kan tages i brug i undervisningen. Dette er dog ofte meget nemmere sagt end gjort. At finde en fuldgod fundamental didaktisk situation kan nemlig, specielt for de mere avancerede matematiske begreber og teorier, være en meget kompliceret opgave - endda så kompliceret, at Perrin-Glorian i det følgende citat sår tvivl om eksistensantagelsens universale gyldighed:

> *The search of a fundamental situation corresponds to the search of a milieu or a little set of milieus able to provoke the learning of some key piece of mathematical knowledge. Of course, the search of a fundamental situation has first an epistemological dimension: the problem must be representative of most aspects of the target knowledge. It is a very strong hypothesis to suppose that it is possible to find such a problem (or a small number of such problems) to represent key pieces of mathematical knowledge. (...) Such milieus are very difficult to find but the mere search of them is very productive from a didactic perspective.*

Det abstrakte gruppebegreb, er unægteligt et af matematikkens nøglebegreber. Det er altså blandt andet for introduktionen af det abstrakte gruppebegreb, at Perrin-Glorian stiller sig tvivlende overfor eksistensen af fundamentale situationer. Jean-Luc Dorier bakker op om denne tvivl i citatet nedenfor. Lad mig lige inden citatet minde om, at det var Dorier, der karakteriserede det abstrakte gruppebegreb som et forenende og generaliserende begreb (jf. afsnit 5.2). Dorier skriver:

> *As they unify and generalize, it seems that unifying and generalising concepts cannot be accurately introduced by only one situation, for which a great effort of formalization and abstraction would have to be produced. One cannot say that there is no fundamental situation able to introduce any unifying and generalizing concept, but it would seem that the search for one is more difficult than usual, and that it might be necessary to adapt some concepts of Brossseau's theory or to use new possibilities. (...) The difficulty in finding a fundamental situation comes from the fact that no unique problem seems to be sufficient on its own.* [26]

I begyndelsen af dette projektarbejde tog jeg Brosseaus eksistensantagelse for givet, og jeg var derfor sikker på, at jeg ville kunne konstruere passende fundamentale situationer til brug i min undervisnings introduktion af det abstrakte gruppebegreb. Jeg arbejdede længe forgæves på at skabe didaktiske miljøer, og på at formulere opgaver, der i fællesskab ville lede eleverne til konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb. Havde jeg læst Perrin-Glorians og Jean-Luc Doriers artikler tidligere i forløbet, ville jeg have opgivet jagten langt tidligere. Når jeg her et par måneder senere kan se henover alle frustrationerne, vil jeg give Perrin-Glorian ret i, at jagten alligevel var udbytterig. Min søgen har nemlig ledt mig vidt omkring i det matematikdidaktiske landskab, og den har således været medvirkende

[26] [11], p.180

til, at jeg har fået kendskab til et par didaktisk velfunderede undervisningsformer, der skulle vise sig at være anvendelige i min egen undervisning.

Fordi de fundamentale situationer udeblev, var jeg nødt til at sadle om. Min umiddelbare ambition om at bruge TDS som designværktøj, i den direkte forstand som jeg har beskrevet ovenfor, måtte skrinlægges. Det betyder dog ikke, at jeg fuldstændig forkastede brugen af Brosseaus teori. For selvom mine undervisningssituationer ikke er fundamentale, er de dog stadig didaktiske, og de må derfor beskrives inden for den til sådanne situationer hørende teoriramme. TDS er udover at være et designværktøj også en samling af redskaber og modeller, der kan benyttes til at beskrive og analysere faktisk udført undervisning og de resultater, denne undervisning afstedkommer. Jeg har allerede introduceret et par af analysebegreberne ovenfor, men navnlig de didaktiske situationer og de didaktiske miljøer, der omgiver dem, forlanger en uddybende forklaring, hvis begreberne rigtig skal kunne udnyttes i en analyse af min undervisning. Denne uddybning er første punkt på dagsordenen for rapportens syvende kapitel.

7 Begreber fra Teorien om Didaktiske Situationer

7.1 Didaktiske og adidaktiske situationer

Lad mig begynde med en definition. En undervisningssituation, der er sat i værk på baggrund af lærerens intention om, at eleverne skal tilegne sig et specifikt stykke officiel viden og under forudsætning af, at eleverne ønsker at deltage i undervisningen, kaldes en didaktisk situation. Didaktiske situationer udmærker sig ved netop at være tilrettelagt med henblik på elevens tilegnelse af en på forhånd veldefineret, tilsigtet viden. Som beskrevet ovenfor betragter man i TDS disse undervisningssituationer som et samspil mellem alle tre elementer i det didaktiske system: læreren, eleverne og den tilsigtede viden.

I forbindelse med en didaktisk situation vil eleverne ofte arbejde selvstændigt. Med selvstændigt mener jeg her, at arbejdet finder sted uden lærerens indblanding. Der er derfor ikke noget i vejen for, at makker- eller gruppearbejde kan betegnes som selvstændigt arbejde. Når eleverne arbejder på egen hånd, siges de at indgå i en *adidaktisk situation*. Dette vil typisk være i forbindelse med opgaveløsning eller egenhændig udforskning af en faglig problemstilling. I en adidaktisk situation vil læreren træde et skridt tilbage og lade eleverne konstruere deres *personlige* viden selv. Adidaktiske situationer er nemlig i reglen knyttet til personliggørelsen af den officielle tilsigtede viden, idet fællesgørelse af elevens viden i langt de fleste tilfælde vil kræve hjælp og vejledning fra læreren. Warfield udbygger karakteristikken af de adidaktiske situationer som følger.

> *A situation is adidactical if the teachers specific intentions are succesfully hidden from the students and the student can function without the teachers interventions.* [27]

[27] [16], p. 25

7.2 Karakteristiske faser i et undervisningsforløb

I et givent undervisningsforløb indgår sædvanligvis en række identificerbare faser, der kan karakteriseres ved hjælp af begreber fra TDS. Begreberne, der knytter sig til de forskellige episoder i et undervisningsforløb, kan således benyttes som teoretiske holdepunkter ved både tilrettelæggelse og analyse af undervisning. Der skal ikke lægges for meget i den rækkefølge, hvormed jeg præsenterer begreberne nedenfor. I den faktiske undervisning kan episoderne nemlig sagtens optræde flere gange hver især og udspille sig i en helt anden orden.

7.2.1 Institutionaliseringsfasen

Det kan ind i mellem være nødvendigt for læreren, at meddele eleverne den tilsigtede viden direkte. En simpel årsag hertil kan være, at undervisningens tidsramme ikke tillader, at eleverne tilegner sig al den tilsigtede viden gennem selvstændigt opdagelsesarbejde. Læreren må derfor udvælge mindre centrale og måske særligt nemme passager, der uden videre kan "foræres" til eleverne. En anden - og for didaktikeren mere interessant - grund til, at læreren indimellem vælger denne simpleste form for undervisning, kan være, at den tilsigtede viden simpelthen ikke egner sig til undervisning via adidaktiske situationer. Den her omtalte direkte viderebringelse af den tilsigtede viden i sin officielle form kaldes for *institutionalisering*. Det ville være alt for begrænsende og i praksis urealistisk at forlange, at man som underviser aldrig må institutionalisere men fordi den viden, der kommer let, også ofte forgår let, bør man være varsom. Institutionalisering retter sig i højere grad imod elevernes hukommelse end imod deres viden, og derfor egner denne undervisningsform sig faktisk bedst i forbindelse med stof, der har karakter af paratviden. Lærerens afsluttende opsamling af et undervisningsforløb, der endegyldigt ophæver klassens indvundne viden til fælles, officiel viden, er dog en værdifuld form for institutionalisering, som jeg selv gør jævnlig brug af i mit eget forløb. Institutionaliseringsfasen er af indlysende årsager altid en didaktisk situation.

7.2.2 Devolutionsfasen

For de centrale og mere avancerede dele af den tilsigtede viden, vil en institutionalisering ikke være tilstrækkelig. Læreren må her sikre sig, at eleverne handler og erfarer på egen hånd - at de personliggør den officielle viden gennem deltagelse i velindrettede undervisningssituationer. I devolutionsfasen etablerer læreren det didaktiske miljø, hvorefter hun overleverer opgaven eller problemstillingen til eleverne. Det gælder i denne undervisningsfase for læreren om at få eleverne til at forstå arbejdsopgaven og dens afgrænsninger og få dem til at påtage sig ansvaret for dens udførelse. Det er klart, at en succesfuld devolution er afhængig af, at eleverne gør deres bedste for at forstå opgaven. Denne fase er i høj grad afgørende for om undervisningen kommer til at forløbe efter hensigten. Det er nemlig i devolutionsfasen, at læreren udstikker betingelserne og spillereglerne for elevernes ageren i det didaktiske miljø. Devolutionsfasen er lærerstyret og udgør derfor en didaktisk situation.

7.2.3 Handlingsfasen

Efter devolutionsfasen følger typisk en fase, hvor eleverne arbejder med problemstillingen i det devoluerede didaktiske miljø. Eleverne forsøger i denne handlingsfase at løse opgaven inden for de givne rammer, både ved brug af deres i forvejen eksisterende viden og ved brug af den undervejs i arbejdet opnåede erkendelse. Bemærk, at handling her skal forstås meget bredt. En handling behøver ikke at være en konkret manipulation af et fysisk objekt, men kan ligeså godt være en tankerække, der manipulerer et eller flere (abstrakte) objekter mentalt. (Jf. Dubinskys definition af begrebet *action* på side 35.) I handlingsfasen indgår eleverne i en adidaktisk situation.

7.2.4 Formuleringsfasen

I løbet af handlingsfasen indskydes ofte en eller flere formuleringsfaser. Eleverne vil enten uopfordret eller efter lærerens tilskyndelse forsøge sig med at formulere, deres opnåede indsigter og/eller hypoteser om den givne problemstilling. Idet der stadig er tale om tidlige stadier af personlig viden, vil formuleringerne i begyndelsen formentlig være temmelig upræcise og bære præg af elevernes usikkerhed angående udsagnenes rigtighed. Selv foreløbige og ukorrekte formuleringer kan dog være med til at indkredse den tilsigtede viden, såfremt deres utilstrækkelighed bliver eleverne bekendt. Sagt lidt populært vil man, såfremt man fjerner alt det, et begreb *ikke* er til sidst stå tilbage med begrebet. Er formuleringerne uskarpe, kan læreren vælge at bryde ind og udbede sig en præcisering. Har læreren en forventning om, at eleven i det videre forløb selv vil komme til at indse sin forståelses utilstrækkelighed, er det dog som regel fornuftigt at lade eleven indse nødvendigheden af at forbedre sin forståelse på baggrund af selvgjorte erfaringer. Alt efter om læreren involverer sig eller ej, kan formuleringsfasen være en didaktisk eller adidaktisk situation.

7.2.5 Valideringsfasen

Ovenpå handlings- og formuleringsfaserne, vil eleverne formodentlig have frembragt en række forskellige hypoteser og formuleringer om den givne problemstilling, og har eleverne arbejdet godt, er det rimeligt, at de forventer en tilbagemelding fra læreren. I eksakte fag som matematik, er der sjældent ret mange sider af den samme sag, og det er derfor nærmest uundgåeligt, at nogle af udsagnene er ufuldstændige eller måske endda direkte forkerte. For at den tilsigtede viden kan træde klart frem fra de mange bud, må læreren foretage en validering af elevernes produktioner. Det drejer sig altså om at fremhæve, fuldstændiggøre og bevise de korrekte udsagn, men også om at afvise de forkerte. Denne afvisning bør naturligvis finde sted med behørig respekt for elevernes arbejde. Dette gøres bedst ved, at producenterne selv bringes til at indse, at forståelsen ikke er korrekt. Har man den fornødne tid til rådighed, kan læreren vælge at inddrage eleverne i valideringsfasen. Læreren kan i så fald devoluere et indsnævret didaktisk miljø, inden for hvilket det er muligt for eleverne at afgøre, om påstandene er sande eller falske. I langt de fleste tilfælde vil valideringsfasen dog udgøre en didaktisk situation.

7.3 Det didaktiske miljø. Adidaktisk potentiale.

I afsnittet omhandlende Piagets klassiske læringsteori, beskrev jeg hvordan læring tænkes at være en mental proces, der finder sted ved at individet tilpasser sig sit omgivende miljø. I enhver undervisningssituation vil eleverne være placeret i et didaktisk miljø, som danner rammerne og afstikker betingelserne for elevernes læring. Dette miljø kan være mere eller mindre veltilpasset situationen og følgelig mere eller mindre gunstigt som grobund for deltagernes læring af det ønskede. Elevernes udbytte er således afhængigt af omgivelserne, og man kan faktisk sige, at planlægning af undervisning i vid udstrækning består af at konstruere disse kunstige miljøer med ambitionen om at gøre dem optimalt befordrende for elevernes læring af den tilsigtede viden. I selve undervisningen er devolutionen af det konstruerede miljø som nævnt af stor betydning, ligesom det er vigtigt, at læreren undervejs i lektionen er i stand til - og villig til - at modificere miljøet, såfremt der skulle opstå behov for det.

Det didaktiske miljø har en objektiv og en subjektiv dimension. Man taler derfor om det *objektive didaktiske miljø* og det *subjektive didaktiske miljø*. Det objektive miljø består tildels af de rent fysiske rammer for undervisningen, men også af de opgaver, instruktioner og fagsproglige formuleringer, der indgår i devolutionen af den didaktiske situation. Denne del af miljøet må i princippet eksistere uafhængigt af både lærer og elev og må forsyne eleven med feedback, når hun arbejder med problemstillingen inden for miljøet. Det er navnlig beskrivelsen og udviklingen af det objektive didaktiske miljø, der er interessant i forbindelse med didaktisk design.

I den ideelle situation kan det objektive miljø informere om rigtigheden af elevens opstillede hypoteser og foreslåede løsningsstrategier. I dette (sjældne) tilfælde behøver læreren altså ikke involvere sig i valideringsfasen, der således bliver en adidaktisk situation. Efter devolutionen kan hele situationen derfor betragtes som adidaktisk, idet elevens konstruktion af den tilsigtede viden kan ske uden lærerens indblanding. Sådanne ekstremt frodige miljøer er desværre mere undtagelsen end reglen i den almindelige undervisning, og man må som lærer ofte stille sig tilfreds med at miljøet har såkaldt *adidaktisk potentiale*. Hersant og Perrin-Glorian skriver:

> *In ordinary teaching, actual adidactic situations are rare, but one can observe situations*

that have some adidactical potential. This means that there is a milieu, which provide some feedback to the actions of the students, but the feedback alone may be insufficient for the students to produce knew knowledge on their own.[28]

Det didaktiske miljøs adidaktiske potentiale, kan beskrives som de muligheder miljøet giver eleverne for at arbejde selvstændigt. I TDS betragter man ofte elevernes arbejde i de didaktiske situationer som et spil med og imod miljøet, der har den tilsigtede viden som eneste vinderstrategi. Det didaktiske spil vedrører altså dobbeltpilen, der forbinder eleven med faget i den didaktiske trekant. Ligesom i alle andre spil får man ikke noget ud af at vinde det didaktiske spil for let. For at være udfordrende og lærerigt må miljøet derfor kunne yde en vis modstand, som skal overvindes for, at den tilsigtede viden kan indvindes som personlig viden. Et miljø, der ikke yder modstand, har ikke adidaktisk potentiale. Et miljø med adidaktisk potentiale, kan derimod betragtes som en jævnbyrdig modstander, som eleven dog vil ende med at besejre - med den nødvendige hjælp fra læreren.

Det subjektive didaktiske miljø omfatter det didaktiske spils uudtalte spilleregler. Denne del af det didaktiske miljø etableres ligeledes i forbindelse med devolutionen, idet læreren fastlægger betingelserne for elevernes arbejde i det objektive miljø. I TDS taler man om, at lærer og elev indgår en *didaktisk kontrakt*, når reglerne og de gensidige forventninger til deres respektive ageren fastlægges. Vi omtaler altså her dobbeltpilen mellem lærer og elev i den didaktiske trekant. Den didaktiske kontrakt er et så centralt begreb fra TDS, at det fortjener sit eget afsnit.

7.4 Didaktiske kontrakter. Kontraktadfærd.

Lad mig begynde dette afsnit med at citere Hersant og Perrin-Glorian.

The didactic contract is a way of regulating the mutual expectations of the teacher and the students with respect to the mathematical notions at stake. Devolution and institutionalization are two important ways of regulation of the didactic contract.[29]

Den didaktiske kontrakt er en kompliceret størrelse. Man kan beskrive den som et sæt implicit anerkendte spilleregler, som både eleven og læreren må efterleve, for at en given situation kan afvikles i overenstemmelse med hensigten. Der foreligger naturligvis ingen underskrevet aftale, men man er sjældent i tvivl, når en part ikke lever op til forventningerne, og kontrakten dermed brydes. Didaktiske kontrakter ændres løbende alt efter situationens beskaffenhed. Til et givet tidspunkt vil den didaktiske kontrakt fastsætte fordelingen af ansvaret for læring mellem lærer og elev. Dersom lærerens ansvar er beskedent tales om en svag didaktisk kontrakt, hvorimod man taler om stærke didaktiske kontrakter, når læreren er hovedansvarlig for elevens læring. I didaktiske situationer indgås

[28] [15], p.117
[29] [15], p.116

altså en stærk didaktisk kontrakt, mens adidaktiske situationer forløber på baggrund af en svag didaktisk kontrakt.

En didaktisk kontrakt formes af det matematiske domæne, hvorfra undervisningsstoffet stammer, og af den status det pågældende stof har som viden hos eleven. Domænet afgrænser hvilke metoder, der fremstår naturligt anvendelige, og alt efter om den tilsigtede viden er ny, under udvikling eller gammel kendt for eleven, vil man kunne tillægge eleven forskellige mængder af ansvar for situationens afvikling. Generelt må læreren i situationer, hvor ny og ukendt viden er i spil, påtage sig størstedelen af ansvaret for udbyttet af situationen.

Den didaktiske kontrakt regulerer således både lærerens og elevernes adfærd i undervisningen, og den er derfor med til at sikre, at situationen ikke løber af sporet. Indgåelsen af en didaktisk kontrakt er således en forudsætning for, at eleverne vil kunne lære af undervisningen. Læreren har ofte en formodning om, at hvis blot eleverne opfylder deres del af den didaktiske kontrakt og læreren sin, vil situationens snedige indretning sikre, at eleverne tilegner sig den tilsigtede viden. Dette kan føre til en overdreven betoning af, at eleverne må og skal opfylde deres part af kontrakten. Derved kan eleverne komme til at se opfyldelsen af deres kontraktlige forpligtelser som selve formålet med undervisningen. I et sådant tilfælde kan den didaktiske kontrakt være en direkte forhindring for elevernes læring. Den didaktiske kontrakt rummer altså en paradoksal situation i hvilken, den både kan være en forudsætning og en forhindring for læringen. Carl Winsløw skriver om den didaktiske kontrakt:

> *Hvis den ikke forsvinder, kan den ikke opfyldes. I den adidaktiske situation skal kontrakten i det mindste træde i baggrunden for eleverne, dvs. deres virksomhed må ikke være domineret af et ønske om at opfylde den. I en vis forstand er en sådan fortrængning af kontrakten altså også en betingelse for læring.* [30]

Når kontrakten bliver det, der styrer elevens handlinger og beslutninger, taler man i TDS om, at eleven udviser en for læringen uhensigtsmæssig *kontraktadfærd*. Såfremt læreren stålsat har besluttet at ville opfylde sin del af kontrakten, og han bliver for ivrig efter at kunne konstatere, at eleverne har lært den tilsigtede viden, opstår faren for, at han kommer til at tilskynde eleverne til at udvise kontraktadfærd. TDS beskriver en række af sådanne eksempler på uheldige effekter af den didaktiske kontrakt. Jeg vil nedenfor nøjes med at præsentere en enkelt af disse nemlig den såkaldte *Jourdain effekt*. Når valget er faldet på denne, er det fordi, jeg desværre ikke helt kan afvise, at jeg enkelte steder i min egen undervisning utilsigtet har foranlediget den.

[30] [12], p. 146

7.4.1 Jourdain effekten

Jourdain effekten indtræffer, når læreren ophøjer elevernes handlinger og det de afstedkommer til at repræsentere en viden, som eleven faktisk ikke har opnået. Jourdain effekten optræder typisk når læreren i sin iver efter at kunne overbevise sig selv og andre om, at eleverne har opnået en bestemt indsigt, udstikker meget præcise anvisninger for deres aktiviteter, for bagefter at fortælle dem 'hvad det egentlig var de gjorde' og 'hvad deres resultater i virkeligheden betyder'. I sådanne situationer er det muligt, at undervisningen formelt kan tolkes at have opfyldt sin målsætning - eleverne får løst et problem eller opdaget et nyt fænomen - men den egentlige indsigt forbliver udenfor elevernes rækkevidde.

8 Designovervejelser med baggrund i den indførte teori

Inden læsningen af dette ottende kapitel vil jeg anbefale, at man har gjort sig bekendt med opgaverne og teorifremstillingen i mit undervisningsforløb, som det tager sig ud i lærebogsmaterialet, der er placeret i appendix B. I det aktuelle kapitel vil jeg nemlig forsøge at forklare, hvordan indholdet af de foregående små halvtreds siders matematik, matematikhistorie, fænomenologi, læringsteori og ikke mindst matematikdidaktik er tænkt ind i mit undervisningsforløb. Jeg vil med andre ord prøve at samle alle de hidtil spundne teoretiske tråde ved at knytte dem an til mit undervisningsdesign. Til det formål vender jeg tilbage til den didaktiske trekant. Jeg er klar over, at man ifølge Perrin-Glorian og TDS må inddrage betragtninger af det didaktiske system i sin helhed, såfremt man ønsker at designe en didaktisk velfunderet undervisning. Da det selvsagt ikke er muligt at beskrive alle systemets bestanddele samtidigt, er man dog nødsaget til at begynde et sted. Som jeg gjorde det med min teoretiske gennemgang, vil jeg også her begynde i faghjørnet. Kapitlet indeholder ikke en diskussion af lærerrollen. Overvejelser omkring min egen rolle i de enkelte lektioner er at finde i det efterfølgende kapitel ni.

8.1 Den tilsigtede viden

Enhver undervisning tager sit udspring i en intention om, at eleverne lærer et stykke officiel faglig viden - således også min. Det første en undervisningsdesigner må gøre er at specificere sin undervisnings tilsigtede viden. Ambitionen med mit forløb var som beskrevet i indledningen, at gymnasieeleverne tilegnede sig de indledende begreber fra den abstrakte gruppeteori, og at de på denne måde fik deres første indblik i den abstrakte matematik. Skåret helt ind til benet var den tilsigtede viden en forståelse af det abstrakte gruppebegreb som en slags ækvivalensklasse af isomorfe konkrete grupper samt en forståelse af undergrupper som værende de delmængder af disse grupper, der sammen med den nedarvede komposition opfylder gruppekriterierne, og dermed udgør en gruppe i sig selv. Med baggrund i denne fortolkning af gruppebegrebet defineredes en abstrakt gruppe i min undervisning som et samlende og generaliserende begreb, der giver mulighed for at beskrive det væsentlige ved samtlige konkrete isomorfe grupper under et.

8.2 Den matematikhistoriske udviklings indflydelse på mit design

Jeg har med hjælp fra Dorier beskrevet gruppebegrebet som et samlende og generaliserende, abstrakt begreb, der opstod på baggrund af tre konkrete teorier: den af ligningsteorien afledte permutationsteori, talteorien og geometrien. Med Bells ord beskrev jeg, hvordan begrebets udvikling kan anses at være typisk for udviklingen af abstrakte matematiske begreber, og hvordan denne udvikling overordnet set fandt sted. Først betragtede matematikerne isolerede fænomener, som blev udforsket og anvendt lokalt. Med tiden blev disse fænomeners fælles karakteristika opdaget, og jagten blev sat ind efter flere eksempler, der bar disse træk. De nye eksempler blev undersøgt i en sådan grad, at generelle principper efterhånden åbenbarede sig og gjorde konkrete beregninger overflødige. Til sidst udkrystalliserede gruppeaksiomerne sig i abstrakt form fra de betragtede konkrete strukturer.

Jeg har Polyas ord for, at man ved at betragte et begrebs historiske opståen kan hente viden om, hvordan man kan lede sine elever til at konstruere den tilsigtede viden om begrebet. I mit undervisningsdesign tager jeg Polyas ord til indtægt, idet mit forløb er udformet med den ovenfor beskrevne historiske udvikling som skabelon. Lad mig prøve at forklare.

Eleverne sættes i starten af forløbet til at udforske de tre konkrete repræsentationer af diedergruppen D_4 indført i afsnittene 3.1.2 - 3.1.4. Disse konkrete repræsentationer er konstrueret med tanke på to af de historisk set klassiske gruppetyper, idet de udgør hhv. permutationsgrupper og transformationsgrupper. Selvom de tre eksempler umiddelbart synes vidt forskellige, skulle deres fælles karakteristika gerne åbenbare sig for eleverne i en sådan grad, at de selv kan ende med at formulere og eftervise de underliggende generelle principper - nemlig gruppeegenskaberne.

I denne første del af forløbet bedes eleverne udføre rigtig mange konkrete beregninger, idet der blandt andet forlanges Cayleytabeller for alle de tre konkrete grupper. Dette arbejde er ikke voldsomt interessant for hverken elever eller lærer, men der er en vigtig grund til at bede eleverne om at udføre det - nemlig at det motiverer indførelsen af det abstrakte gruppebegreb. En af hovedgevinsterne ved at anskue gruppebegrebet abstrakt var jo netop, at man i mange tilfælde gjorde de konkrete beregninger overflødige, fordi man kunne nøjes med én gang for alle at udføre beregningerne abstrakt. For rigtigt at kunne værdsætte denne gevinst må man have udført så mange konkrete beregninger, at man til sidst ville ønske, at man kunne blive fri. Forløbet afsluttes med, at vi i fællesskab indfører de definerende aksiomer for en gruppe, der efterhånden gerne skulle have udkrystalliseret sig af alle de indledende aktiviteter omkring de konkrete eksempler.

Vi begynder altså med tre konkrete eksempler, hvis lokale udforskning gerne skulle lede eleverne til at opdage, at eksemplerne har fælles karakteristika. Herefter følger en fase, hvor eleverne arbejder med at formulere og eftervise disse fælles egenskaber, inden vi til slut indfører gruppebegrebet som den ønskede ækvivalensklasse på baggrund af en abstraktion af de betragtede eksempler. Det er vel ikke helt forkert at påstå, at historien gentager sig selv i mit undervisningsforløb.

8.3 Læringsteoriens indflydelse på mit design

En grundig viden om faget udgør ikke alene et tilstrækkeligt fundament for en god undervisning. Man må som tidligere påpeget også gøre sig overvejelser om, hvilke mentale processer der indgår, når eleven prøver at lære den tilsigtede viden. Nedenfor har jeg beskrevet de vigtigste overvejelser af denne type, der har haft indvirkning på min undervisning.

På baggrund af Piagets klassiske læringsteori konkluderede jeg i afsnit 6.1, at læring hovedsagligt afhænger af tre faktorer: Elevens eksisterende skemaer, elevens udførte handlinger og de derigennem opnåede erfaringer samt elevens kognitive udvikling. I min undervisning tager jeg højde for alle tre parametre.

Når jeg eksempelvis introducerer isomorfibegrebet via Cayleytabellerne, er det fordi jeg har en forventning om, at elevernes afbildningsskemaer kun omfatter reelle funktioner, og at det derfor ville kræve uhensigtsmæsigt meget arbejde at udvide dette begreb til afbildninger mellem abstrakte mængder. Dette ville være nødvendigt, såfremt man ønskede at definere isomorfibegrebet på traditionel vis. Når de rumlige afbildninger indføres som sammensætninger af håndgribelige handlinger udført på en konkret træmodel, er det ligeledes fordi jeg ikke med rimelighed kunne forvente, at eleverne ville være i stand til at assimilere transformationer af rummet givet som vektorafbildninger til deres eksisterende skemaorganisation. Ved at gennembladre elevernes sædvanlige lærebøger kunne jeg nemlig konstatere, at de aldrig før havde stiftet bekendtskab med funktioner af flere variable. Det var en klar målsætning for mig, at det ikke måtte være elevernes manglende forudsætninger, der forhindrede dem i at forstå gruppebegrebet. Udover en vis matematisk modenhed forudsætter mine opgaver da heller ikke andet end et godt kendskab til mængdebegrebet og helt elementære regnefærdigheder.

Jeg vil senere forklare, hvordan jeg har forsøgt at tilrettelægge mine indledende undervisningssituationer med henblik på at tilskynde målrettede handlings- og formuleringsfaser, der vil bibringe eleverne et erfaringsgrundlag, der er tilstrækkeligt til, at eleverne kan om ikke medvirke til så i hvert fald forstå konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb. Jeg gør her brug af forskellige pædagogiske virkemidler, der vil blive beskrevet i min efterfølgende præsentation af undervisningsforløbets afvikling.

Jeg har tidligere i rapporten argumenteret for, at elevernes kognitive udvikling nødvendigvis må modsvare de processer og ræsonnementer, man beder dem udføre. Andenårs gymnasieelever må forventes at tilhøre det formelt operative stadium, og de vil derfor teoretisk set være i stand til at kapere den refleksive abstraktion, der ifølge Dubinsky er central, når man skal lære abstrakt gruppeteori. Der skulle altså formelt set ikke være noget i vejen for, at eleverne kan lære det ønskede.

8.4 Det didaktiske spil og de didaktiske kontrakters indflydelse på mit design

For at udvikle et undervisningsforløb må man også gøre sig tanker om de samspil, man ønsker at sætte i værk mellem eleven og den tilsigtede viden, og om de gensidige forventninger og forpligtelser som eleverne og læreren kan have til hinanden i løbet af undervisningen. Man må med andre ord både overveje dobbeltpilen mellem fag og elev og dobbeltpilen mellem lærer og elev i den didaktiske trekant. Den første af disse dobbeltpile er beskrevet via det didaktiske spil og de miljøer, hvori spillet afvikles, mens den anden dobbeltpil kan beskrives via de didaktiske kontrakter.

Ifølge TDS er det ved aktivt at indgå i nøje tilrettelagte undervisningssituationer, at eleverne bedst høster de erfaringer, der gør dem i stand til at personliggøre den tilsigtede viden. Husk på, at personliggørelse udgør det første og fællesgørelse det andet af de to skridt på vejen mod at indfange ny officiel viden. (Jf. figuren på side 42.) Betragter man mit forløb fra oven, vil man se, at de to første moduler og det første hjemmearbejde understøtter personliggørelsen af den tilsigtede viden, mens det andet hjemmearbejde og specielt det femte modul sigter efter at fællesgøre elevernes nyindvundne personlige viden. Tanken var, at det femte modul skulle hjælpe eleverne til at frigøre deres gruppebegreb fra de tre konkrete eksemplers partikulære begrænsninger.

De didaktiske situationer bør indlejres i velindrettede didaktiske miljøer, der både afstikker rammerne og betingelserne for elevernes virksomhed. Har den objektive del af dette miljø adidaktisk potentiale, vil det undervejs forsyne eleverne med feedback på deres handlinger i en sådan grad, at de kan tilegne sig den tilsigtede viden hovedsagligt gennem selvstændigt arbejde - altså med minimal lærerindblanding. Kan eleverne først personliggøre og siden fællesgøre den tilsigtede viden ved på helt egen hånd at gennemføre situationen, siges den samlede didaktiske situation at være fundamental for dens tilsigtede viden. I mit forløb arbejder eleverne selvstændigt med de tre repræsentationer af diedergruppen. Jeg vil mene, at det objektive miljø, der omgiver de to første situationer, har adidaktisk potentiale, idet de fysiske modeller vil forsyne eleverne med tilstrækkelig feedback vedrørende deres handlinger i miljøet. Jeg vender tilbage til dette i det næste kapitel.

Elevernes arbejde indenfor miljøet er blevet beskrevet som et didaktisk spil, der både har eksplicitte og uudtalte spilleregler, og hvis vinderstrategi er den tilsigtede viden. En didaktisk situation består sædvanligvis af de identificerbare faser, som jeg beskrev i afsnittene 7.2.1 - 7.2.5. Disse faser skal dog ikke opfattes som ingredienserne i en gylden opskrift på, hvordan man bør designe sin undervisning. Didaktisk design går snarere ud på at indrette objektive didaktiske miljøer, hvori situationerne kan udspille sig efter hensigten, som altid er, at eleverne lærer det ønskede. Selvom faserne altså i højere grad skal opfattes som et begrebsinventar, der kan benyttes til at beskrive de vigtigste momenter i undervisningen, end et pædagogisk mål i sig selv, må et fuldstændigt design alligevel præcisere forventningerne til disse faser. Dette gælder især for de faser af undervisningen, der ikke har læreren som hovedaktør.[31]

For at begrænse antallet af gange jeg gentager mig selv, vil jeg gemme præsentationen af mine didaktiske situationer og de miljøer, der omgiver dem til afsnittet angående min undervisnings realisering. Jeg vil til den tid benytte det tilvejebragte begrebsinventar til i det nødvendige omfang at udpensle situationernes forskellige episoder og behandle de mest interessante og afgørende didaktiske kontrakter, som jeg forsøger at få eleverne til at indgå med mig undervejs.

Jeg vil i stedet afslutte det aktuelle kapitel med at beskrive, hvordan især Jean-Luc Doriers og Ed Dubinskys arbejder har haft indflydelse på mit design.

8.5 Doriers og Dubinskys indflydelse på mit design

I afsnit 6.3 beskrev jeg, at topmålet med didaktisk designvirksomhed inden for TDS er at udvikle, beskrive og iværksætte fundamentale didaktiske situationer for den tilsigtede viden. Af min egen hårdt tilkæmpede erfaring og med teoretisk opbakning fra Perrin-Glorian og Dorier konkluderede jeg dog, at det er en - om ikke umulig - så i hvert fald meget kompliceret opgave at finde didaktiske situationer, der med tvungen nødvendighed vil lede eleverne til at forstå det abstrakte gruppebegreb. Årsagen hertil er, at gruppebegrebet er et samlende og generaliserende begreb, der ikke er skabt til at løse problemer, og derfor ikke umiddelbart kan introduceres og tilskrives mening via de problemer, som begrebet kan være med til at løse. Man må derfor ifølge Jean-Luc Dorier tage lidt modificerede metoder i brug, når man skal undervise i denne gren af den abstrakte algebra. Om læring af samlende og generaliserende begreber skriver han:

> *Indeed, one can distinguish two stages in the construction of a unifying and generalizing concept (which may correspond to two mental processes in learning):*
>
> *- recognition of similarities between objects, tools and methods brings the unifying and generalizing concept to life.*

[31] [12], p. 143

> *- making the unifying and generalizing concept explicit as an object induces a reorganization of old competences and elements of knowledge.*

Og han fortsætter:

> *(...) This process demands not only good understanding of the objects to be abstracted, but it also requires the ability to identify their common characteristics which will define their formal (abstracted) representation. This process inevitably requires a step aside, in order to look at the previous knowledge from a new angle. (...) This change to an algebraic point of view is not natural for students who have difficulties in interpreting complex objects* (such as permutations, transformations and matrices. JS.)*, as plain elements of a set.*[32]

Doriers tanker udgør en rød tråd, der er vævet ind i mit undervisningsforløb. Jeg har nemlig bestræbt mig på, at mit undervisningsforløb - billedligt talt - skulle anvise en præpareret vej, ad hvilken eleverne kunne gennemføre de ovenfor beskrevne etaper i konstruktionen af gruppebegrebet. Lad mig prøve at forklare, hvorfor jeg mener, at mit forløb kan indfri denne ambition.

I de første to moduler og via det første hjemmearbejde skulle eleverne gerne opnå en god forståelse for de objekter, som vi senere ønsker at abstrahere. Ydermere skulle eleverne herefter gerne kunne identificere de fællestræk ved eksemplernes objekter og metoder, som ifølge Dorier vil definere den abstrakte repræsentation. Hermed skulle der være pustet liv i elevernes forståelse af gruppebegrebet som et samlende og generaliserende begreb. Det er altså tanken, at eleverne har gennemført første etape i konstruktionen af begrebet, når vi når til det tredje undervisningsmodul.

Anden etape er betydelig længere og mere kuperet end den første. At gøre det abstrakte gruppebegreb til et eksplicit objekt kræver ifølge Dorier, at man betragter den indvundne viden i et nyt perspektiv. Med Dubinskys teori i baghovedet kan vi præcisere dette ved at sige, at det kræver en refleksiv abstraktion. De to herrers forståelser ligger nu meget tæt op ad hinanden. Abstraktion drejer sig jo netop om at træde et skridt baglæns og se henover det partikulære ved objekterne og fremhæve deres generelle fællestræk. Når jeg i lærebogens kapitel fem beder eleverne om at overveje selve abstraktionsprocessen, er det netop fordi, at jeg gerne vil gøre eleverne bevidste om, at de fremover skal betragte deres viden om konkrete grupper fra en ny vinkel. Sagt anderledes forventes eleverne under læsningen af dette kapitel at reorganisere deres forståelse sådan, at de i kapitel seks er klar til at gennemføre den anden etape i konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb.

Anden etape består ifølge Dorier i at sammenfatte de konkrete grupper til et abstrakt objekt. Inden eleverne når så vidt, må de dog først lykkes med at indkapsle permutationerne, flytningerne og matricerne til objekter, som siden kan fortolkes som blotte mængdelementer. For meningsfuldt at kunne sammenligne en permutation af nogle flag med en flytning af en træterning og et talskema, bliver man nemlig nødt til at hæve abstraktionsniveauet og sammenligne de tre entiteter, via de egenskaber de har som elementer

[32] [11], p. 177

i deres respektive mængder. Dorier understreger ligesom Dubinsky, at denne indkapsling ofte er en meget kompliceret proces for eleverne. I afsnit 6.2.3 beskrev jeg, at en måde hvorpå eleverne kan komme til at *opfatte* noget som et objekt, er at lade dem *behandle* dette noget som et objekt. Når eleverne i kapitel fire bliver bedt om at sortere og indicere elementerne i de tre konkrete repræsentationer af diedergruppen, er hovedformålet at få gjort Cayleytabellerne let sammenlignelige (jf. 3.3), men der er også en skjult dagsorden. Sidegevinsten ved dette lidt trivielle arbejde er nemlig, at eleverne i denne proces tvinges til at anskue hhv. permutationerne, flytningerne og matricerne som noget, der kan sorteres, altså som noget, der kan udføres handlinger på, altså som et objekt. Forhåbentlig er arbejdet i modul fire nok til at sikre, at eleverne lykkes med den ønskede objektificering af de tre konkrete gruppers elementer.

Hvis to grupper har samme orden, vil en indicering af deres respektive elementer gøre Cayleytabellerne sammenlignelige - uanset om grupperne er isomorfe eller ej. Når vi med afslutningen af kapitel fire har fået indiceret de tre konkrete gruppers elementer, vil disse *grupper* altså komme til at fremstå som noget, der via tabellerne kan sammenlignes. Grupperne vil derfor kunne betragtes som noget, hvorpå man kan udføre en handling og dette kan med samme begrundelse som tidligere forhåbentlig føre til, at eleverne ender med at opfatte de konkrete grupper som objekter. Det er disse konkrete gruppe*objekter* og den med tiden internaliserede sammenlignings*proces*, som jeg i Dubinsky-forstand tænker, at eleverne vil kunne tematisere sådan, at deres forståelse af det abstrakte gruppebegreb, bliver den ønskede klasse af isomorfe konkrete grupper. Skulle eleverne lykkes med dette kan de siges at have gennemført anden etape og dermed fuldbyrdet konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb.

Det sidste teoretiske aspekt med indflydelse på mit design, som jeg vil nævne, angår indførelsen af undergruppebegrebet. Husk på, at Dubinsky argumenterer for, at elevernes konstruktion af gruppebegrebet og undergruppebegrebet følges ad. I hvert af mine tre indledende lærebogskapitler, beder jeg eleverne betragte fire delmængder af den relevante konkrete gruppe og fremstille Cayleytabeller for disse delmængder. Delmængderne er alle pånær én repræsentationer for de ikke-trivielle undergrupper i D_4: Den cykliske gruppe af orden fire, Kleins Vierergruppe og den cykliske gruppe af orden to. Den sidste af de fire betragtede delmængder, har også fire elementer, men den er altså *ikke* en undergruppe. På denne måde får jeg i samme åndedrag pustet liv i elevernes gruppebegreb og undergruppebegreb.

Det første indtryk min undervisning giver eleverne af undergruppebegrebet er, at en undergruppe er en delmængde af en større mængde. Denne forståelse kan nemt føre til, at eleverne kommer til at tro, at enhver delmængde udgør en undergruppe. Fordi førstegangsindtryk ofte varer ved, kan måden, hvorpå jeg indfører undergrupperne altså være med til at fastholde eleverne på det første af Dubinskys tre udviklingstrin. Tanken med at indføre en delmængde, der *ikke* er en undergruppe, er naturligvis, at eleverne selv - måske med lidt hjælp fra læreren - vil ende med at diskvalificere deres opfattelse af, at enhver delmængde af en gruppe er en undergruppe. Hvis vi fastholder, at konstruktionen af gruppebegrebet og undergruppebegrebet følges ad, kan denne erkendelse være med til, at eleverne indser, at en gruppe er mere end blot en mængde og altså være med til at hjælpe eleverne fra det første til det andet af Dubinskys udviklingstrin, hvor også kompositionen inddrages i forståelsen af en gruppe.

De to undergrupper af orden fire baner vejen for, at eleverne indser, at to *undergrupper* af samme orden godt kan være forskellige. Hvis vi nok engang inddrager Dubinskys tese, vil denne indsigt lede til forståelsen af, at to *grupper* af samme orden godt kan være forskellige. I denne indsigt ligger det endvidere, at der må findes to forskellige ækvivalensklasser for isomorfe konkrete grupper af orden fire. Netop det, at der findes en anden, er med til at afgrænse de to klasser hver især, og dette kan være med til, at eleverne kommer til at forstå de abstrakte grupper som objekter eller sagt med andre ord, at de rykker op på tredje og sidste udviklingstrin i konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb.

At det kun er den ene af de to undergrupper, der er kommutativ, og at de begge er normaldelere i D_4, valgte jeg på grund af mit forløbs stramme tidsramme at lade gå ubemærket hen. Når jeg alligevel nævner det i rapporten, er det for at fremhæve den mulighed, der ligger her for at videreudvikle mit forløb til også at indeholde teorien om normaldelere og kvotientgrupper.

Enhver instruktør ved, at en god historie og et godt manuskriptforlæg ikke nødvendigvis giver en god forestilling. At sikre sig, at det ønskede budskab kommer ud over scenekanten kræver, at man nøje overvejer, hvilke fortælleteknikker og virkemidler man vil tage i brug. På det punkt har dramaturgi og undervisning ikke så lidt til fælles. Ordet dramaturgi stammer fra græsk, og det kan oversættes til kunsten at give en historie en form, der gør det muligt at formidle den. I det næste kapitel vil jeg fortælle, hvordan jeg fik bragt min undervisning fra tegnebrættet og op på scenen. Jeg vil beskrive, de virkemidler jeg benyttede i bestræbelserne på at få min historie fortalt på en sådan måde, at det ønskede budskab trængte igennem til modtagerne. Jeg vil endda forsøge at begrunde, hvorfor jeg havde postive forventninger til mit valg af arbejdsformer. Kapitlet rummer også en mere specifik udpensling af den tilsigtede viden for hvert modul, samt overvejelser over min egen lærerrolle i de enkelte undervisningssituationer. Desuden vil jeg også, hvor det er relevant og muligt forsøge eksplicit at beskrive de objektive didaktiske miljøer samt de didaktiske kontrakter, som jeg inden forløbet påtænkte at indgå med eleverne. I flere tilfælde vil beskrivelsen af det didaktiske miljø og den didaktiske kontrakt dog kun ligge implicit i beskrivelsen af lektionernes afvikling. En opfølgning på, om det gik som forventet, følger i kapitel nummer elleve. Som det sidste vil jeg efter beskrivelsen af den enkelte lektion helt nøgternt beskrive, hvilke typer af data jeg tog med mig hjem. Præsentation og fortolkning af selve data hører ligeledes det ellevte kapitel til.

Del II

Praktik

9 Undervisningsforløbets afvikling

Mit undervisningsforløb strakte sig over seks moduler, og blev gennemført i en 2.g-klasse med 27 elever på Christianshavns Gymnasium. Det skal nævnes, at hvert modul varede to timer og femten minutter, og at jeg fremover vil bruge betegnelserne modul og lektion i flæng. Den første undervisningsgang var den 17. november 2009, og forløbet blev afsluttet den 10. december 2009. Den faglige progression i undervisningen fulgte mit lærebogsmateriale temmelig tæt. Det til trods - eller måske i virkeligheden netop derfor - varierede mine valg af undervisningsformer ganske betragteligt undervejs i forløbet. Her følger en gennemgang af de seks lektioner hver for sig med vægten lagt på de i kapitel otte beskrevne aspekter. I lighed med kapitel otte er det en god ide at have lærebogen og de tilhørende svarark indenfor rækkevidde, når man læser dette kapitel.

9.1 Første modul

Efter en kort præsentation af mig selv gav jeg eleverne en overordnet introduktion til forløbet. Eleverne blev orienteret om forventningerne til dem samt om indholdet og arbejdsformerne i de kommende matematiktimer. Jeg gjorde eleverne opmærksomme på, at jeg ønskede at videofilme en del af vores arbejde med henblik på bagefter at kunne analysere interessante elementer og passager af min undervisning. Derudover oplyste jeg eleverne om, at forløbet ville blive afsluttet med en skriftlig prøve, og at hensigten med prøven var at evaluere elevernes udbytte og derigennem succesen af mit forløb. Tanken med denne lille forvarsel var, at lidt ekstern motivation formentligt ville skubbe projektet godt igang. At klassens arbejdsmoral og disciplin i forvejen var skyhøj, og den ekstra motivation derfor komplet unødvendig, anede jeg af gode grunde intet om ved dette første møde med eleverne.

Klassen blev herefter opdelt i seks grupper med fire til fem elever i hver. Med hjælp fra elevernes sædvanlige lærer, Henrik, havde jeg sørget for, at styrkeforholdet mellem grupperne var nogenlunde jævnbyrdigt. Desuden bad jeg eleverne om hver især at påtage sig specifikke roller i det forestående gruppearbejde, idet jeg fremsatte krav om, at enhver gruppe skulle indeholde:

1. En ***fortæller***, der ville få ansvaret for oplæsning og forklaring af opgaverne.
2. En ***praktiker***, der skulle udføre de konkrete manipulationer på hhv. modellen af

forhandlingsbordet og modellen af hexaederet.

3. En ***skribent***, der ville få ansvaret for at holde orden og nedskrive gruppens resultater.

4. En ***gruppeordfører***, der skulle stå for at stille eventuelle spørgsmål til læreren og bagefter overbringe lærerens svar til gruppen.

Jeg gjorde meget ud af, at eleverne skulle gøre, hvad de kunne for at opfylde deres faste roller i gruppen, og at de principielt aldrig måtte overtage pligter, der hørte et andet gruppemedlem til. For en god ordens skyld blev det dog gjort klart, at alle gruppemedlemmer naturligvis gerne måtte/skulle bidrage til tankevirksomheden og dialogen omkring gruppens løsning af opgaverne.

Kapitlet omhandlende Det Europæiske Topmøde uddeltes til eleverne i gruppe nummer 1, 2 og 3, mens kapitlet omhandlende Hexaederets Rumdiagonaler blev uddelt til grupperne 4, 5 og 6. For at nødvendiggøre fortællernes indsats var det kun på deres udgave af lærebogsafsnittet, at opgaveformuleringerne var taget med. Når grupperne blev bedt om at arbejde med forskellige opgavesæt, var det for at undgå, at grupperne ville arbejde sammen. Jeg forsøgte derfor også så vidt muligt at placere grupper med forskellige opgaver ved siden af hinanden. I det andet modul parrede jeg grupperne og opgaverne omvendt, sådan at alle grupper kom igennem begge sæt.

Samtidig med opgaverne uddelte jeg de relevante svarark til skribenten i hver gruppe, og praktikeren fik overdraget den til opgavesættet passende træ- eller plastmodel. Med topmøde-modellen blev endvidere uddelt fire små flag, mens der med hexaeder-modellen fulgte en konvolut indeholdende små labels samt fire forskelligt farvede tuspenne. Det var herefter tanken, at grupperne selvstændigt skulle arbejde sig igennem deres respektive kapitler og producere en skriftlig besvarelse af opgaverne - nedskrevet på svararket forstås. For en sikkerheds skyld blev gruppeordføreren udstyret med et telefonnummer, til hvilket der kunne sendes en sms, såfremt gruppen var kørt så meget fast, at min hjælp var en forudsætning for at komme videre. Når det var nødvendigt med en sådan hotline, skyldtes det, at de to grupper, som jeg ønskede at videofilme, var placeret i et lokale for sig selv beliggende et godt stykke fra det lokale, hvor resten af klassen arbejdede. Det var altså ikke hele tiden muligt at få fat i læreren ved blot at række hånden op. Dette viste sig faktisk at være en fordel for undervisningens afvikling, idet den længere ventetid på hjælp faktisk resulterede i, at flere problemer var blevet løst på egen hånd, inden hjælpen nåede frem.

Efter devolutionsfasen bestod min egen rolle i at observere arbejdet og i at yde hjælp, når jeg blev bedt om det. Det var på forhånd tanken, at jeg ville undgå at bryde uopfordret ind i elevernes arbejde, og det overholdt jeg - næsten. I langt de fleste tilfælde tog jeg imod spørgsmål fra gruppernes ordførere stillet på vegne af deres gruppe. Det var herefter hensigten, at gruppeordførerne skulle viderebringe mine svar til resten af gruppen, men da de fleste spørgsmål blev stillet i umiddelbar nærhed af gruppen, faldt denne del af arrangementet lidt til jorden.

9.2 Andet modul

Til det andet modul blev klasseopdelingen i de seks grupper bevaret, og jeg benyttede den samme devolution af opgaverne som i det første modul dog med følgende undtagelser. Grupperne blev hver især bedt om at lave det opgavesæt, de ikke havde lavet sidst, og det var endvidere et krav, at rollerne i grupperne blev byttet om, så ingen elev varetog den samme rolle to moduler i træk. De samme to grupper, som i øvrigt var fundet ved lodtrækning, blev nok en gang videofilmet væk fra resten af klassen.

9.2.1 Mellem andet og tredje modul

Inden afslutningen af det andet modul, uddelte jeg lærebogens kapitel tre omhandlende kvadratiske heltalsmatricer til samtlige elever. Det blev annonceret som elevernes obligatoriske hjemmearbejde at producere en skriftlig besvarelse af opgaverne til aflevering i den efterfølgende tredje lektion. Henrik havde nemlig tildelt dette opgavesæt status som en af skoleårets obligatoriske matematikafleveringer. Jeg modtog 24 besvarelser af generelt meget fin kvalitet.

9.2.2 Tilsigtet viden indtil det tredje modul.

Det centrale udbytte af de to første moduler og det første hjemmearbejde var gruppeeksemplernes eksistens og en fornemmelse for deres analogi. Eksistens fordi eleverne som tidligere bemærket må have noget substans at danne det abstrakte gruppebegreb udfra, og analogi fordi det abstrakte begreb, de skal danne, er et generaliserende og forenende begreb. Det var en underliggende dagsorden, at eleverne skulle begynde at opfatte elementerne i de tre konkrete grupper som objekter i stedet for handlinger. Jeg forventede dog, at denne objektificering først ville tage rigtig fart i forbindelse med matrixafsnittet. Denne forudsigelse byggede på en forventning om, at eleverne, i modsætning til permutationerne og flytningerne, ikke ville opfatte matricerne som handlinger, de skulle udføre på (fysiske) objekter, men snarere som mere eller mindre vilkårlige talskemaer, der kan kombineres efter en given regel. Mit ønske var, at eleverne ville bemærke, at matrix-afsnittet på alle andre områder lignede de to foregående afsnit på en prik, og at de derved ville blive henledt til at bemærke, at permutationerne og flytningerne kan underlægges den samme objektfortolkning som matricerne.

Ved at bruge begreberne fra den indførte teori kan den tilsigtede viden i denne indledende fase opsummeres som en begyndende personliggørelse af den officielle viden, der vil puste liv i begreberne en gruppe og en undergruppe, og som vil placere eleverne på tærsklen til det andet udviklingstrin i konstruktionen af gruppebegrebet.

9.2.3 Begrundelser for mine valg af arbejdsformer indtil tredje modul

I denne første fase af forløbet benyttede jeg mig af to forskellige arbejdsformer - nemlig gruppearbejde og individuelt skriftligt arbejde. Jeg har tidligere argumenteret for, at læring forudsætter elevernes aktive deltagelse, og for at læring bedst finder sted i nøje tilrettelagte situationer, hvis miljø har adidaktisk potentiale. Det er vel ikke helt forkert at sige, at det primært er den, der arbejder, der lærer. Med valget af gruppearbejde som arbejdsform, var hensigten at skabe et didaktisk miljø, der ansporede til, at så mange elever som muligt ville handle og formulere sig i forhold til forløbets indledende opgaver. Med andre ord var planen altså at give så mange elever som muligt en god chance for at engagere sig og derigennem forhåbentlig lære det ønskede. Læreren og eleverne kendte endnu ikke hinanden, og jeg forestillede mig, at dette måske kunne afholde generte typer fra at ytre sig overfor hele forsamlingen - navnlig når emnerne som her var ret utraditionelle. Jeg tænkte, at et gruppearbejde ville give forløbet en rolig start, hvor parterne langsomt kunne spore sig ind på hinanden.

Når jeg besluttede mig for, at eleverne skulle have faste ansvarsområder i gruppearbejdet, var det igen med tanke på at kunne opretholde en aktivt bidragende deltagelse fra *alle* gruppens medlemmer. Tanken var, at den enkelte elev skulle føle, at gruppens succes var afhængig af hendes præstation, og at dette ansvar ville blive opfattet positivt og motivere eleven til at arbejde.

Inden den første lektion havde jeg en mistanke om, at opfyldelsen af rollerne kunne blive det centrale for eleverne, og at min lidt utraditionelle undervisningsform derfor ville anspore eleverne til en uhensigtsmæsig kontraktadfærd. Det viste sig dog i løbet af modulet, at mine bekymringer havde været unødvendige. Formen overtog på ingen måde indholdets hovedrolle, idet eleverne arbejdede sammen om at løse opgaverne som det primære, og opfyldte deres respektive roller som det sekundære - i hvert fald når jeg kiggede. Det skete faktisk tit, at en elev blev så ivrig, at han eller hun måtte lægge bånd på sig selv for ikke at komme til at udføre en anden elevs arbejde. Den didaktiske kontrakt var altså midlertidigt forsvundet fra disse elevers bevidsthed, hvilket vidnede om, at kontrakten i hvert fald ikke stod i vejen for elevernes læring. (Jf. citat af Winsløw på side 49)

Situationerne blev konstrueret med en ambition om at give dem adidaktisk potentiale. Tanken var, at når praktikeren havde udført de fra gruppen foreslåede handlinger, ville modellen umiddelbart returnere feedback om, hvorvidt elevernes påstand havde været korrekt. På denne måde ville eleverne ikke være afhængige af lærerens konstante opmærksomhed men i princippet kunne validere deres udsagn i miljøet på egen hånd. Derudover valgte jeg bevidst at holde kortene tæt til kroppen, hvad angik den tilsigtede viden. Det var som nævnt planen, at de tre første kapitler i lærebogen gradvist skulle ændre elevernes syn på permutationer og flytninger samt give eleverne en fornemmelse for lighederne imellem de tre eksempler. Denne pointe fremtrådte dog ikke direkte af opgaveformuleringerne, og den var i princippet fuldstændigt overladt til eleverne at opdage. Jeg forsøgte altså at skjule mine intentioner med situationerne for derved at give eleverne muligheden for selv at finde meningen med deres arbejde og resultater. Med henvisning til citatet af Warfield fra side 45 vil jeg nu mene at have godtgjort, at mine to første undervisningssituationer besidder et adidaktisk potentiale. Situationerne kan dog ikke karakteriseres som fundamentale for den tilsigtede viden. Det ville nemlig være urealistisk at tro, at eleverne på egen hånd vil uddrage al den - lidt diffuse - tilsigtede viden som en nødvendig konsekvens af deres arbejde med de tre første opgavesæt.

Det overordnede formål med de tre første kapitler i noterne var som nævnt, at give tre forskellige eksempler på konkrete repræsentationer af diedergruppen, D_4. Det var tanken, at eleverne, efterhånden som de arbejdede sig igennem de tre tilsyneladende uafhængige opgavesæt, langsomt ville lugte lunten og så småt blive opmærksomme på eksemplernes fællestræk. Fællestrækkene er i sagens natur af gruppeteoretisk karakter, men det vidste eleverne endnu intet om. De to første eksempler blev behandlet af eleverne i grupper ud fra begrundelser, der er anført ovenfor. Det tredje opgavesæt, omhandlende kvadratiske heltalsmatricer, lod jeg eleverne arbejde med som individuelt hjemmearbejde i tiden mellem anden og tredje lektion. Der var en weekend og i alt syv dage mellem anden og tredje lektion. Jeg vurderede derfor, at arbejdsbyrden var stor men ikke urimelig.

Det var min intention, at det tredje opgavesæt skulle egne sig til individuelt arbejde med skriftlige besvarelser som produkt. Væk var nemlig de tidligere opgavers praktiske komponent, der udover at gøre en model påkrævet også ofte lagde op til diskussion. Væk var forhåbentlig også behovet for at stille opklarende spørgsmål til læreren. Jeg formodede nemlig, at det tredje opgavesæts analogi med de to foregående sæt ville bevirke, at eleverne hurtigere ville opfange, hvad opgaverne forlangte. Faktisk ville det, i forlængelse af ovenstående formålsbeskrivelse, være helt fint, hvis eleverne sad med fornemmelsen af at have gjort noget tilsvarende, da de arbejdede med de to første opgavesæt. I virkeligheden var det jo netop denne spirende fornemmelse af similaritet, der var formålet med de tre opgavesæt. Som sagt var forventningen, at det netop var dette analoge, men alligevel mere abstrakte eksempel, der ville vække elevernes opmærksomhed og lede dem henimod også at betragte permutationerne og flytningerne som blotte elementer i en mængde - altså som en form for objekter.

9.2.4 Dataindsamling indtil tredje modul

Med mig hjem fra de to første moduler tog jeg kopier af elevernes svarark samt de optagede videofiler. Jeg gjorde mig også et par interessante feltobservationer om arbejdet i de grupper, der ikke blev filmet. Disse observationer blev på bedste Brosseau-manér skrevet ned i en lille grå notesbog.

9.3 Tredje modul

I det tredje modul forsøgte jeg at afholde en såkaldt *videnskabelig debat*. Begrebet videnskabelig debat skyldes Marc Legrand, og det henviser til en undervisningsform, der stiler imod at gøre eleverne til opdagere og forfattere af matematiske udsagn og argumenter. En fuldstændig gennemgang af Legrands undervisningsform falder uden for rammerne af dette projekt. Den interesserede læser henvises i stedet til Legrands egen introducerende artikel, der kan opspores via denne rapports litteraturliste.[33]

Min undervisning i modul tre var desuden inspireret af idéen om *returnerede situationer*, der stammer fra en række artikler af Isabella Bloch. Med denne betegnelse henviser Bloch til en undervisningsform, der går ud på først at iværksætte og afvikle en eller flere situationer, der er ganske åbne, for derpå at devoluere en situation, som indsnævrer spillerummet for eleverne. Det er tanken, at den indledende åbne situation skal tjene til at gøre eleverne fortrolige med problemstillingen gennem en ret fri udforskning af denne. Med baggrund i udbyttet af den første situation kan læreren så devoluere den såkaldte returnerede situation ved at præcisere problemfeltet og stille mere specifikke krav til arbejdets resultater. Via arbejdet med den returnerede situation skulle eleverne helst kunne indfange den tilsigtede viden, eller i hvert fald opnå en indsigt, der gør det muligt for dem at forstå en efterfølgende institutionalisering. Heller ikke for Blochs begreb vil jeg inkludere en fuldstændig gennemgang i min rapport men ligeledes blot henvise til litteraturfortegnelsen aller bagerst i rapporten.[34] Her følger en beskrivelse af, hvordan jeg implementerede Legrands videnskabelige debat i min undervisning og tilmed gav den et strejf af Isabella Blochs returnerede situationer.

I begyndelsen af modulet fortalte jeg eleverne, at de nu skulle betragte klassen som en sammenslutning af matematikere, der havde det fælles mål at afdække sammenhænge mellem de tre forløb, de netop havde været igennem. Nærmere bestemt var de på udkig efter sammenhænge mellem mængderne $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ og specielt mellem mængdernes tilhørende kompositionstabeller. Jeg forklarede eleverne, at de hver især tilhørte én af seks forskerkredse (grupperne fra tidligere), der, selvom de arbejdede forskellige steder på jorden, jævnligt mødtes til konferencer. Eleverne blev derefter bedt om at gå sammen med deres forskerkreds og sammenholde deres besvarelser af opgaverne fra kapitel 1, 2 og 3. Jeg gjorde det klart, at eleverne skulle lede i tabellerne over $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ efter en sammenhæng, som de både mente var alment gyldig, og som de mente, de ville være i stand til at formulere og forsvare over for resten af klassen, når de mødte til konferencen. Jeg havde afsat god tid til at lade eleverne gå på jagt i tabellerne. Af praktiske årsager bad jeg grupperne om at aflevere deres udsagn nedskrevet på papir, inden konferencen startede.

Min egen opgave til konferencen var at være ordstyrer, og jeg begyndte derfor med at skrive forskerholdenes påstande op på tavlen. Jeg gjorde mig meget umage med ikke at

[33] [17]

[34] [18], p. 8 og [19], p. 60

ændre noget som helst i elevernes formuleringer, og med hverken at udvise en positiv eller en negativ holdning til udsagnenes rigtighed eller relevans. Jeg havde endvidere besluttet på forhånd, at jeg ville gøre mit yderste for strengt at opretholde forsamlingens respekt for udsagnene på tavlen, ligegyldigt hvor naive eller usande de end måtte være.

Med alle udsagnene skrevet op på tavlen, forklarede jeg eleverne reglerne for debatten. Eleverne fik at vide, at de ville få mulighed for at komme med bestyrkende eller betvivlende udsagn vedrørende påstandene på tavlen. Dog var det i første omgang ikke tilladt at udtale sig positivt om den påstand, man selv havde medbragt til konferencen. Skulle ens påstand blive betvivlet, ville forskerkredsens medlemmer efterfølgende få muligheden for *videnskabeligt* at tilbagevise kritiken, inden ordet igen ville blive givet til kritikerne. Først når alle var blevet enige om, hvorvidt kritiken var berettiget eller ej, ville vi fortsætte debatten med en ny tråd. Såfremt der, når al kritik var forstummet, stadig fandtes påstande på tavlen, der hverken var blevet accepteret eller afvist, ville de relevante forskergrupper få muligheden for at fremføre deres argumenter for påstandene. Skulle det ikke lykkes for gruppen at overbevise alle, kunne debatten blive åbnet på ny. Først når der ikke var flere løse ender, ville debatrunden være afsluttet.

Efter et par minutters tænkepause startede jeg den egentlige videnskabelige debat. I denne fase koncentrerede jeg mig om at holde orden i argumenter og modargumenter og om at styre talerækken og retorikken.

Jeg havde hjemmefra forudset en række scenarier, i hvilke debatten formentlig hurtigt ville ebbe ud. Var gruppernes påstande trivielle, oplagt forkerte eller oplagt korrekte, forudså jeg, at de ikke ville skabe meget af den uenighed, der i reglen skal til for at holde liv i en debat. I så fald var min plan at sende forskergrupperne tilbage til laboratoriet, for at forberede sig på en ny konference. I denne anden omgang ville jeg forsøge at henlede gruppernes opmærksomhed på nogle egenskaber ved tabellerne, som de med stor sandsynlighed kunne bruge til at udlede nogle interessante gruppeteoretiske udsagn. I bedste fald kunne jeg nøjes med at fokusere eller omskrive nogle af gruppernes egne ideer fra den første debatrunde. Skulle der dog intet være at hente i elevernes egne forslag, var planen uddele et af nedenstående seks spørgsmål til hver af de seks forskerhold:

- Hvad er der særligt ved permutationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$? Findes et tilsvarende element i hhv. $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$?

- Prøv at besvare nedenstående del af *Opgave 1e*, for flytninger i stedet for permutationer. Og for matrixprodukt og matricer i stedet for sammensætning og permutationer.

  (*1e: Udfør hver især tre sammensætninger af to vilkårlige permutationer fra $\mathbb{P}$, og konstatér, at sådanne sammensætninger altid giver en permutation fra $\mathbb{P}$. Prøv, om I kan udføre sammensætningerne uden brug af modellen.*)

- Hvad er sammenhængen mellem

  $$(1^3 2^0) \circ (1^1 2^0),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ og } \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] * \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\ ?$$

Kan I udlede en generel sammenhæng og danne flere sådanne par?

- Er elementernes rækkefølge ligegyldig, når man sammensætter permutationer eller flytninger? Når man danner matrixprodukt?
- Hvad mon der menes med $(1^2 2^2) \otimes (1^3 2^2) \otimes (1^1 2^0)$? Gør det en forskel, hvilke to "naboer" man sammensætter først? Svar på samme spørgsmål for hhv. tre andre flytninger, tre permutationer og tre matricer.
- Hvis man begyndende i udgangsopstillingen udfører den samme permutation på bordet igen og igen, vil man da på et tidspunkt ende med bordet i udgangsopstillingen? Hvad sker der, hvis man fra udgangspositionen gentager den samme flytning af hexaederet igen og igen? Kommer man tibage til udgangspositionen? Kan I overføre princippet til matrixproduktet?

(Det er her, min tankegang læner sig opad Isabella Blochs begreb om returnerede situationer. Når jeg ikke hævder, at benytte begrebet som det er skabt, er det blandt andet fordi min returnerede situation i virkeligheden blot er en hjælp til at klare den første situation, mere end den er en egentlig indsnævring af elevernes spillerum.)

Mit håb var, at de ovenstående spørgsmål ville lede eleverne til nogle velformulerede matematiske påstande, som vi kunne få op på tavlen. Den anden debatrunde ville i så fald kunne komme til at angå gruppeteoretiske fællestræk ved de tre betragtede mængder. Jeg forventede dog ikke, at eleverne på egen hånd ville kunne eftervise alle de egenskaber, jeg antyder med spørgsmålene ovenfor. Eksempelvis er det, som jeg har dokumenteret i kapitel tre et voldsomt krævende arbejde at give et fuldstændigt bevis for, at en kompositionsregel opfylder den associative lov, når man kun har en Cayleytabel at støtte sig til. Jeg tænkte derfor, at associativiteten ville være et rigtig godt debatemne, som formentlig ville kræve en afsluttende institutionalisering.

9.3.1 Tilsigtet viden i det tredje modul

Det var hensigten, at forskergruppernes arbejde med først at finde og dernæst klargøre deres propositioner til den efterfølgende videnskabelige debat skulle afdække og belyse sammenhænge mellem de tre gruppeeksempler - eller i hvert fald fremhæve det faktum, at sådanne sammenhænge eksisterer. På trods af denne primære hensigt fandt jeg det ikke tvingende nødvendigt, at vi nåede at gennemdebattere alle de ovenfor antydede gruppeegenskaber, inden det tredje modul var slut. Som det vil fremgå nedenfor, var forløbets fjerde modul nemlig afsat til at udpensle de fællestræk ved $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$, som vi ville få brug for senere i forløbet. Jeg tillod mig derfor at lægge lige så stor vægt på, at eleverne fik prøvet at engagere sig og formulere sig angående matematik. Idéen var, at de ved at bidrage aktivt til debatten ville blive bekendt med anvendeligheden og nødvendigheden af det matematiske fagsprog til at udtrykke og udveksle komplekse sammenhænge mellem komplekse størrelser. Det var endvidere min intention, at eleverne ville få sans for værdien af et kritisk og logisk ræsonnement, også selvom det skulle lede til, at en ellers besnærende påstand måtte forkastes. Eleverne måtte gerne gå fra timen med den opfattelse, at man som matematiker naturligvis er glad, når ens påstande viser sig at holde vand, men at man, selv når de vises at være usande, ikke føler, at arbejdet har været spildt. I en sådan situation har arbejdet tværtimod afklaret noget, der *ikke* kan lade sig gøre og dermed givet matematikeren en dybere forståelse af det studerede objekt. Hovedmissionen med tredje modul var rigtignok at forberede eleverne endnu bedre til indførelsen af den abstrakte gruppeteori, men en sidegevinst i form af lidt matematisk dannelse var altså også en del af det tilsigtede udbytte.

9.3.2 Begrundelser for mine valg af arbejdsformer i tredje modul

Når man benytter dyrebar undervisningstid til at afholde en videnskabelig debat, løber man en risiko. Når man, som det er tilfældet her, overlader initiativet og i en vis grad ansvaret til forsamlingen, må man som underviser acceptere, at det ikke er muligt fuldstændigt at styre, hvor debatten ender, endsige om den overhovedet kommer ordentligt i gang. Underviseren kan derfor med rette være bekymret for, om det matematiske indhold bliver tilstrækkelig stort, og derfor være i tvivl om hvorvidt man får dækket det pensum, der hører timerne til. Ingen løber dog risici, uden der er en fair chance for en anseelig gevinst. Gevinsten består i, at eleverne ved denne arbejdsform opøver færdigheder til selvstændigt at kunne udforske åbne problemstillinger og til at kunne formulere deres dragede konklusioner præcist og konsistent ved brug af fagsprog. Eleverne tvinges desuden til at tage ansvar for rigtigheden af deres påstande i stedet for blot at kunne lægge dette ansvar i hænderne på deres underviser eller dennes forlængede arm, lærebogen. Derudover skulle eleverne gerne ende med at opleve et medejerskab af de matematiske resultater, der konstrueres i fællesskab, og fordi resultaterne udspringer af elevernes egne ideer, burde matematikken synes mere vedkommende for eleverne, end den matematik institutionen til daglig påbyder dem at lære i den almindelige undervisning. Ved netop at tilegne fjerde modul det matematiske pensum, som jeg kunne være lidt usikker på, om tredje modul ville få dækket, havde jeg minimeret risikoen tilstrækkeligt til at ville binde an med en videnskabelig debat.

(Lad mig lige i parentes bemærke, at jeg på ingen måde mener, at eleverne alene kan debattere sig til al viden om gruppeteori. Det er heller ikke min påstand, at eleverne vil forlade tredje modul med et færdigudviklet gruppeteoretisk fagsprog, som de flydende vil kunne bruge fremover. Min påstand er blot, at arbejdsformen i tredje modul kan være med til at åbne elevernes øjne for de ovenfor beskrevne aspekter. Jeg er altså helt klar over, at det at tilegne sig den matematiske metode og brugen af fagsprog kræver en meget længerevarende indsats.)

Det var mit umiddelbare indtryk, at problemstillingen ville egne sig fint til en videnskabelig debat. At finde sammenhænge mellem de tre forskellige mængders kompositionstabeller forekom mig nemlig at være en ret åben opgave, hvor det først ville være nødvendigt for eleverne at afklare hvilken type sammenhænge, der var interessante, og derefter at beslutte på hvilken form de skulle/kunne formidle deres eventuelle fund til resten af holdet. Det ville naturligvis være korrekt at påstå, at alle tre mængder har otte elementer, og at tabellerne derfor må bestå af 64 kompositioner - men at fremlægge denne påstand på en videnskabelig konference ville åbenlyst være uinteressant. Jeg var inden timerne godt klar over, at de dybereliggende sammenhænge mellem tabellerne på ingen måde ville være oplagte for eleverne. En væsentlig årsag til dette var, at elevernes tre tabeller endnu ikke ville være arrangeret ens (jf. 3.3). Alligevel var det min forventning, at arbejdet med de tre opgavesæt ville have bevirket, at elevernes fornemmelse af ligheder situationerne imellem ville være tilstrækkelig til, at de kunne udpege og forhåbentlig også formulere og eftervise nogle af de tilsigtede gruppeteoretiske sammenhænge. Når jeg besluttede også at forberede mig på den anden debatrunde, var det hovedsagligt for at give mig selv en udvej, såfremt min forventning skulle vise sig ikke at holde stik.

Den didaktiske kontrakt jeg implicit forelagde eleverne i det tredje modul, tillagde eleverne ansvaret for en fælles produktion af matematiske udsagn samtidig med, at den efterlod eleverne med ansvaret for disse matematiske udsagns rigtighed og relevans. Navnlig den sidste del af kontrakten er anderledes i forhold til de kontrakter, der almindeligvis indgås i forbindelse med klasseundervisning på det gymnasiale niveau. Her tillægges ansvaret for den betragtede matematiks rigtighed nemlig i reglen institutionens repræsentanter dvs. læreren eller bogen. Jeg opfattede det som afgørende for modulets succes, at eleverne ville acceptere at indgå i denne lidt utraditionelle didaktiske kontrakt. I den henseende var det centralt, at eleverne var i stand til at udvise tolerance og accept overfor forskellige holdninger og opfattelser, også selvom nogle af disse måtte være forkerte. Efter at have været i klassen i både første og andet modul havde jeg meget stor tiltro til, at klassen ville påtage sig ansvaret efter bedste evne, og at den ville være moden nok til at udvise den netop omtalte respektfulde adfærd.

9.3.3 Dataindsamling fra det tredje modul

Jeg forudså, at jeg som ordstyrer af debatten ville få rigeligt at se til. Dataoptaget fra tredje modul blev derfor udelukkende i form af elevudsagn og elevhandlinger optaget på videokameraets eller min egen indre harddisk. Jeg fik naturligvis noteret mig de matematiske påstande, som blev fremsat og debatteret i min lille grå notesbog.

9.4 Fjerde modul

I det fjerde modul vekslede undervisningsformen hovedsagligt imellem traditionel katederundervisning af hele klassen og selvstændig opgaveregning udført i klasselokalet. Elevernes svar på de forelagte opgaver blev valideret i plenum. Undervisningen lænede sig nu meget kraftigt op ad lærebogens kapitel fire.

Jeg indledte timerne, med at gøre status over den viden vi hidtil havde opnået i forløbet, idet jeg opsummerede udbyttet af de videnskabelige debatter. Derefter gennemgik jeg den løsningsmetode, som jeg havde tænkt, eleverne skulle anvende til løsning af afsnittets væsentligste opgave, *Opgave 4a*. I institutionaliseringen af denne løsningsmetode betjente jeg mig af en lille powerpoint-præsentation og undgik på denne måde at bruge tid på at tegne en masse flag, farvede cirkler og vektorer på tavlen. Herefter fik eleverne tid til at anvende den gennemgåede metode til at løse opgaven, inden jeg igen samlede opmærksomheden om lærredet. Ved at løse den første del af *Opgave 4b* i fællesskab, fik vi både valideret resultaterne af elevernes anstrengelser og ordnet mængderne $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ ensartet. Jeg indhentede her elevernes besvarelser tripel for tripel, idet jeg som forskrift benyttede den i opgaven givne rækkefølge for elementerne i $\mathbb{P}$. Den anden del af *Opgave 4b* blev lagt ud til klassen at løse. Eleverne fik tomme tabelskemaer udleveret, og de blev bedt om at sortere deres Cayleytabeller under hensyntagen til elementernes nye orden. Faktisk standsede jeg eleverne, kort efter de var kommet igang med denne opgave og delte færdiglavede, sorterede tabeller ud til dem alle. Det var nok for mig, at eleverne forstod, hvordan disse uddelte tabeller var blevet produceret, og at de indså, at de i princippet sagtens kunne have sorteret dem selv. Selve sorteringsarbejdet opfattede jeg dog som uinteressant og derfor som tidsspilde i forhold til det videre forløb. Med de ensartede tabeller til rådighed var det muligt at afslutte timerne med en åben diskussion af lærebogsafsnittets sidste opgave, *Opgave 4c*.

9.4.1 Tilsigtet viden i det fjerde modul

Er man lidt lommefilosofisk, kan det fjerde modul opfattes som et transportmodul. Dette skal forstås på den måde, at modulets formål var at transportere projektet videre fra dets hidtidige position midt i de konkrete eksemplers verden og hen til en af den abstrakte gruppeteoris indgangsdøre. Eleverne var efter den videnskabelige debat blevet bekendte med, at der findes stærke sammenhænge mellem de tre gruppeeksempler, og de havde endda forsøgt sig med at eftervise et udvalg af disse. Eleverne havde dog stadig ingen præcise begreber om den underliggende gruppestruktur. For at kunne gøre det særligt interessante ved sammenhængene mere synligt for alle, var det nødvendigt at bringe en særlig og ikke mindst ensartet orden i elevernes konkrete resultater. Hertil benyttedes et par knofedtskrævende teknikker, der desværre ikke ville være anvendelige i det videre forløb. Det fjerde moduls tilsigtede viden udmøntede sig derfor blot i en forstærket synliggørelse af sammenhængene mellem $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$. Desuden tjente modulet som den sidste opsamling af det bearbejdede stof, inden det rigtig ville gå løs med den abstrakte algebra.

Den sekundære hensigt med det fjerde modul var nemlig, at det ville bringe eventuelle tabte elever tilbage på omgangshøjde. Jeg anså det faktisk for ret sandsynligt, at der i klassen ville findes elever, der bar rundt på fejlbehæftede kompositionstabeller, og elever der endnu ikke havde begrebet alle de i debatterne verificerede sammenhænge mellem $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$. Sålænge eleverne havde forstået, hvordan kompositionstabellerne var blevet konstrueret, ville de dog efter dette fjerde modul igen være i stand til at følge undervisningen på lige fod med alle andre. De ville møde til det femte modul med tre fuldstændig korrekte kompositionstabeller velvidende, at tabellerne var opstået på baggrund af tre forskellige konkrete eksempler, og at der var påvist visse sammenhænge mellem dem. Det ville altså ikke være banale regnefejl eller små forståelsesfejl fra tidligere i forløbet, der ville udgøre forhindringerne for dem, når de skulle forsøge at begribe det abstrakte gruppebegreb.

9.4.2 Begrundelser for mine valg af arbejdsformer i fjerde modul

Missionen med dette fjerde modul var altså først og fremmest at ordne elevernes resultater fra de tre første opgavesæt på en måde, der var hensigstmæssig for indførelsen af den abstrakte gruppeteori. I afsnittets helt centrale opgave blev eleverne bedt om at kæde ethvert element fra $\mathbb{P}$, sammen med et passende element fra $\mathbb{F}$ og et passende element fra $\mathbb{M}$. Denne sammenkædning skulle ske på baggrund af elementernes tilsvarende virkning på hhv. forhandlingsbordets flag, hexaederets rumdiagonaler og vektorsystemet $\{\binom{-1}{1}, \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{-1}{-1}\}$.

Jeg opfattede opgaven som temmelig svær. Det virkede overkommeligt at parre en permutation med en tilsvarende flytning, men at bestemme hvilken matrix, der ville fuldende triplen, syntes absolut ikke at være oplagt. Opgavens værdi for projektet var mest af teknisk karakter, omend der selvfølgelig lå en snært af isomorfibegrebet gemt i sammenkædningen af ensartede elementer fra hhv. $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$. Selve metoden, som opgaven tænktes at blive løst med, var kun lokalt anvendelig og ville derfor ikke bidrage meget til indførelsen af den abstrakte gruppeteori. Jeg havde med baggrund i dette, og med tanke på den knappe tid jeg havde til rådighed valgt at forevise metoden på lærredet. Jeg anså det ikke for fuldstændig utænkeligt, at de skarpeste elever ville kunne have løst opgaven selv, men i den større sags tjeneste fratog jeg dem altså muligheden for denne tilfredsstillelse. Selv efter eleverne havde fået løsningsmetoden foræret, ville der nemlig stadig ligge meget tidskrævende arbejde tilbage at gøre.

Med mængderne $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ opskrevet i "samme rækkefølge", ville sorteringen af tabellerne stort set kunne udføres på automatpilot. Alligevel brugte jeg tid på at tjekke, at alle var kommet godt igang med dette, inden jeg uddelte mine udskrifter af de tre ordnede tabeller. I mit forløb defineres to grupper at være isomorfe, såfremt deres Cayleytabeller kan sorteres ens (jf. 3.3). Jeg opfattede det derfor som vigtigt for fortsættelsen, at eleverne kom fra timerne med forståelsen af, hvordan de tre uddelte kompositionstabeller var blevet arrangeret ens.

Med de tre kompositionstabeller arrangeret ens, var tanken, at vi i den efterfølgende diskussion af *Opgave 4c* i fællesskab kunne genopdage nogle af de fælles træk, som vi med møje og besvær havde fundet under den videnskabelige debat. Vi ville på denne måde få slået endegyldigt fast, at mængderne $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ og deres kompositioner havde væsentlige fælles træk og gjort os notationsmæssigt klar til at konkretisere disse fællestræk i forbindelse med indførelsen af gruppebegrebet i det næste modul.

9.4.3 Dataindsamling fra fjerde modul

Dataindsamlingen fra fjerde modul var yderst sparsom. Udover videooptagelsen af klassen indsamlede jeg blot elevernes besvarelser af kapitlets første opgave og noterede mig et par småting fra diskussionen af *Opgave 4c*.

9.4.4 Mellem fjerde og femte modul

Som forløbets andet hjemmearbejde, bad jeg eleverne om at læse noternes kapitel fem omhandlende processen at abstrahere og begrebet en abstraktion. Idet hjemmearbejdet var placeret mellem forløbets fjerde og femte modul, havde eleverne næsten en hel uge til at læse en enkelt side i lærebogen. De var altså på ingen måde blevet overbebyrdet.

9.4.5 Tilsigtet viden i det andet hjemmearbejde

At kunne træde et skridt baglæns og betragte permutationer, flytninger og matricer som abstrakte objekter, der kan indgå som blotte elementer i en mængde med en tilhørende komposition, kræver som bekendt, at eleven har udført den kognitive proces, som Dubinsky kalder en *indkapsling*. Dette falder som nævnt langt fra alle elever let, og det er Doriers tese, at man, for at denne indkapsling kan lykkes, bliver nødt til at gøre eleverne bevidste om de processer, som er relateret til den.[35] Da jeg skrev kapitel fem, var formålet derfor at plante nogle overordnede tanker hos eleverne omkring selve abstraktionsprocessen. Denne proces ville eleverne nemlig få brug for, når de i umiddelbar forlængelse af dette kapitel fem skulle forsøge at løfte de tre sammenkædede, konkrete gruppeeksempler op på det abstrakte plan. Idéen var med andre ord at anspore eleverne til en form for metakognition ved på forhånd at gøre dem bevidste om måden, hvorpå vi fremover ville anskue de tre mængders elementer.

9.5 Femte modul

I det femte modul indførte jeg det abstrakte gruppebegreb og undergruppebegrebet. Undervisningen mindede meget om en universitetsforelæsning, idet den var bygget op

[35] [11], p. 182

omkring en powerpointpræsentation, der sammenbandt stoffet fra noternes kapitel seks med de resultater og den viden, som eleverne havde opnået gennem de fire første moduler. Der var dog ikke tale om ren en-vejs-kommunikation. I planlægningen havde jeg nemlig bestræbt mig på jævnligt at kunne involvere eleverne i udviklingen af den abstrakte gruppeteori.

Jeg indledte med at genopfriske elevernes hukommelse af, hvordan vi i det fjerde modul havde sorteret $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$, og hvordan tabellerne herefter var endt med at tage sig ens ud. Herefter indførte jeg en *konkret* mængde $\mathbb{G}$ bestående af n elementer. Jeg bad eleverne tænke på elementerne i $\mathbb{G}$ som værende enten konkrete tal, konkrete permutationer, konkrete funktioner eller lignende håndgibelige størrelser. Jeg havde bevidst benyttet samme skrifttype til at notere den konkrete mængde $\mathbb{G}$, som jeg havde brugt for $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$. Jeg definerede herefter en kompositionsregel som en måde, hvorpå man kan kombinere vilkårlige to af de konkrete mængdeelementer og derved opnå et nyt. Jeg indførte også, hvad det vil sige, at en mængde er afsluttet overfor dens tilhørende kompositionsregel, og vi konstaterede i fællesskab, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle er eksempler på konkrete mængder med en kompositionsregel, der tilmed alle er afsluttede.

Nu fulgte en grundig institutionalisering af de tre definerende gruppeaxiomer indført på mængden $\mathbb{G}$ (jf. lærebogen p. 130). Sammen med afsluttetheden blev disse tre betingelser kondenseret til en tjekliste på fire punkter, som det var tanken, at eleverne fremover skulle bruge til at afgøre, om en given mængde med en tilhørende kompositionsregel kunne tilskrives gruppestatus.

For at opøve lidt erfaring blev eleverne bedt om at benytte tjeklisten til at afgøre hvilke af følgende talmængder, der sammen med den indikerede komposition opfylder gruppekriterierne.

$$(\mathbb{N}, +), \quad (\mathbb{N}_0, +), \quad (\mathbb{Z}, +), \quad (\{-1, 1\}, \cdot), \quad (\mathbb{Z}, \cdot), \quad (\mathbb{Z}, -)$$

For hvert af de seks par bad jeg forsamlingen afgøre, om kriterierne var opfyldt et efter et. Progressionen i eksemplerne var ikke tilfældig. Tanken var, at eleverne ville starte med at diskvalificere $(\mathbb{N}, +)$ på baggrund af det manglende neutrale element. I det andet eksempel var det neutrale element tilføjet mængden, men eleverne skulle gerne opdage, at dette ikke var nok til at sikre gruppestatus, idet $(\mathbb{N}_0, +)$ ikke opfylder kravet om inverse elementer. I det tredje eksempel havde jeg tilføjet mængden de inverse elementer, således at $(\mathbb{Z}, +)$ kunne blive det første par til at komme igennem nåleøjet og opnå gruppestatus. Det fjerde tilfælde gav et eksempel på en endelig gruppe og på, at et element godt kan være sit eget inverse, mens det femte tilfælde var tænkt som et eksempel på, at man ved at udvide mængden godt kan ophæve et eller flere af gruppekriteriernes opfyldelse. Det sidste eksempel var taget med, fordi det giver et eksempel på, at den associative lov også kan være kriteriet, der sætter begrænsningen.

Planen var nu, at vi i fællesskab skulle konstatere, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle er konkrete grupper, ved yderligere tre gange at gennemløbe tjeklisten punkt for punkt (Jf. *Opgave 6a*). Tilfældet og elevernes skarpsindighed havde villet, at jeg her var i stand til blot at henvise til de resultater, som eleverne selv havde produceret ved den videnskabelige debat. I passende rækkefølge indhentede jeg derfor elevernes egne formuleringer på lærredet, og sammen underlagde vi dem den rette fortolkning. Hvad associativiteten angik, valgte jeg dog at springe over hvor gærdet var lavest og forære den væk, idet jeg uden videre argumentation påstod, at den var opfyldt i både $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$. Jeg havde heldigvis mulighed for at give min påstand en lille smule vægt, fordi jeg efter den anden videnskabelige debat havde fået lejlighed til at afvise en påstand om, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ *ikke* opfyldte den associative lov. Jeg kunne således bruge de elever, der havde fremsat påstanden som en form for sandhedsvidner, når jeg hævdede, at den associative lov kunne vises at være opfyldt i de tre betragtede tilfælde.

Efter på denne måde grundigt at have etableret tre konkrete gruppeeksempler fortsatte jeg mod indførelsen af det abstrakte gruppebegreb. Jeg indførte nu - med henvisning til lærebogens kapitel fem - den *abstrakte* mængde $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$ og tilføjede den en kompositionsregel ved på lærredet at indhente følgende Cayleytabel:

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Med denne tabel som reference oversatte vi så vidt muligt vores tjekliste for gruppekriterierne til en række egenskaber, som det ville være muligt at aflæse i en Cayleytabel. At tjekke gruppekriterierne for en (abstrakt) mængde, hvis komposition var angivet via en Cayleytabel, bestod herefter i at godtgøre følgende:

- **Afsluttethed.** Der er ingen "fremmede" elementer i tabellen.
- **Eksistens og entydighed af neutralt element.** Der findes netop én række og netop én søjle, der hhv. er en nøjagtig kopi af tabellens nulte række og dens nulte søjle.
- **Eksistens og entydighed af inverse elementer.** Det neutrale element findes netop én gang i hver række og hver søjle.
- **Den associative lov.** Fremgår ikke umiddelbart af tabellen og må derfor godtgøres på anden vis.

Den associative lov udgjorde altså nok engang en forhindring, og endnu engang valgte jeg at tage den letteste vej uden om. Jeg forsikrede først eleverne om, at de i mit forløb ikke ville komme til at stå overfor Cayleytabeller, hvis komposition ikke opfyldte den associative lov. Derefter mindede jeg dem om, at de uden faglige problemer kunne gennemføre et fuldstændigt argument for en kompositions associativitet, men at dette ville være temmelig tidskrævende, hvis mængden var stor. Jeg tillod derfor, at eleverne fremover måtte skære et hjørne i argumentationen. Jeg forklarede, at jeg ville anse det for tilstrækkeligt, at de blot gjorde eksplicit opmærksom på, at man må godtgøre associativiteten for at vise, at en Cayleytabel repræsenterer en gruppe. Med associativiteten således omgået, kunne vi konstatere, at Cayleytabellen ovenfor afslørede, at $(G, \odot)$ måtte være en gruppe.

Herefter gik jeg videre med lærebogens *Opgave 6c*. Ved at indhente de ordnede tabeller over $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ på samme dias som Cayleytabellen ovenfor, kunne vi konstatere, at index stemte overens overalt i de fire tabeller. Konklusionen vi drog af denne observation var, at tabellen over $(G, \odot)$ faktisk indeholdt al information om de tre konkrete gruppers kompositionsregler. Jeg ophøjede denne konklusion til en definition af, hvad det vil sige, at to grupper er isomorfe, og jeg understregede, at vi netop havde indset, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle måtte være isomorfe med $(G, \odot)$ - og dermed isomorfe med hinanden indbyrdes.

Hermed var jeg blevet klar til at definere en abstrakt gruppe som et samlende og generaliserende begreb, med hvilket det er muligt beskrive de gruppeteoretiske karakteristika for samtlige isomorfe, konkrete grupper samtidigt. Det kan næppe overraske, at jeg fremhævede $(G, \odot)$ som elevernes første eksempel på en abstrakt gruppe. Herefter benyttede jeg ikke-kommutativiteten som et eksempel på en egenskab, der kunne påvises i $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ samtidigt, ved blot at konstatere den i $(G, \odot)$. Med dette havde projektet nået en milepæl. Vi havde fået indført en abstrakt gruppe som den ønskede ækvivalensklasse af isomorfe grupper, med baggrund i elevernes egen konstruktion af de konkrete og naturligvis isomorfe repræsentationer af D_4.

Det var let at overbevise forsamlingen om, at det abstrakte gruppebegreb ville være fattigt, såfremt der kun fandtes dette ene eksempel. Jeg fremsatte derfor påstanden, at det er muligt at konstruere andre abstrakte grupper med otte elementer, end den de lige havde set. For at dokumentere min påstand indhentede jeg en Cayleytabel for den cykliske gruppe af orden otte. Vi konstaterede via tjeklisten, at der vitterlig var tale om en gruppe, og at elementindex i denne tabel *ikke* kunne bringes til at stemme overens med elementindex i tabellen for $(G, \odot)$. Sidstnævnte blev gjort ved at bemærke, at det neutrale element uanset elementsorteringen kun ville optræde to gange i diagonalen i tabellen over den cykliske gruppe, mens identiteten altid ville være at finde fire gange i diagonalen i tabellen over $(G, \odot)$. (Jf. korrollaret på side 17) Eleverne havde nu set to ikke-isomorfe abstrakte grupper af orden otte og endda konstateret, at det, der adskiller to abstrakte grupper med lige mange elementer, er gruppernes kompositionsregler.

Min næste opgave bestod i at få eleverne til at indse, at ikke alle abstrakte grupper har otte elementer. Jeg indførte derfor den abstrakte mængde $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ og satte Cayleytabeller for hhv. den cykliske gruppe af orden fire ($\mathbb{Z}_4$) og Kleins Viergruppe (V_4) op på lærredet (se nedenfor). Lynhurtigt tjekkede vi, at der her var tale om to ikke-isomorfe abstrakte grupper.

$\odot$	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	h_1	h_2	h_3	h_4
h_2	h_2	h_3	h_4	h_1
h_3	h_3	h_4	h_1	h_2
h_4	h_4	h_1	h_2	h_3

$\times$	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	h_1	h_2	h_3	h_4
h_2	h_2	h_1	h_4	h_3
h_3	h_3	h_4	h_1	h_2
h_4	h_4	h_3	h_2	h_1

Idéen var herefter at udnytte disse grupper til at indføre undergruppebegrebet. I den sammenhæng forsøgte jeg at inddrage eleverne i at løse lærebogens *Opgave 6e.* Jeg hentede Cayleytabeller ind for $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1}, \circ)$, $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3}, \circ)$ og $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}, \circ)$, og satte dem op på samme dias som tabellerne for $\mathbb{Z}_4$ og V_4. Vi konstaterede i fællesskab, at $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1}, \circ) \cong \mathbb{Z}_4$, at $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3}, \circ) \cong V_4$, og at $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}, \circ)$ slet ikke var en gruppe, og gentog umiddelbart herefter disse konstateringer for $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_1}, \otimes)$, $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_3}, \otimes)$ og $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4}, \otimes)$ og for $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_1}, *)$, $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_3}, *)$ og $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_4}, *)$.

Efter at jeg havde hjulpet eleverne til denne indsigt, var det min forventning, at eleverne selv kunne deducere sig til indholdet af undergruppebegrebet. Jeg stillede derfor klassen spørgsmålet: Hvad mon det betyder, at en gruppe er en undergruppe i en anden gruppe? Det ønskede svar var den tilsigtede definition af en undergruppe som en delmængde af en gruppe, der med den nedarvede komposition selv udgør en gruppe. Jeg afsluttede modulet med at genfinde strukturene for $\mathbb{Z}_4$ og V_4 i $(G, \odot)$ som hhv. $(\{g_1, g_2, g_3, g_4\}, \odot)$ og $(\{g_1, g_3, g_6, g_8\}, \odot)$. Til denne afslutning inddrog jeg nedenstående to tabeller indhentet fra lærebogen.

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Som det allersidste hjalp vi hinanden med at understrege, at vi netop havde indset, at $(G, \odot)$ altså indeholder to ikke-isomorfe undergrupper med fire elementer.

9.5.1 Begrundelser for mine valg af arbejdsformer i femte modul

Der var flere grunde til, at jeg valgte den interaktive powerpoint-forelæsning som undervisningsform i dette forløbets vigtigste modul. For det første var det nødvendigt, hurtigt og enkelt at kunne hente de mange tabeller frem på lærredet og lade dem indgå i flere forskellige sammenhænge. De mange sammenligninger af tabeller som argumentationen betjente sig af forudsatte nemlig, at jeg kunne stille de respektive tabeller overskueligt op overfor hinanden. Dette havde ikke været muligt at gøre ved tavlen, hvis ikke jeg havde haft projektoren og min computer til rådighed. For det andet var argumentationen i dette modul meget lang. Jeg anså det derfor for afgørende for elevernes fastholdelse, at jeg kunne overlevere tankerækken logisk og veldisponeret. Powerpointpræsentationen gav mig en sikkerhed i, at jeg ville få det hele med og det vel at mærke i den tiltænkte rækkefølge. Denne sikkerhed frigav tankekapacitet til, at jeg kunne koncentrere mig om at formulere mine uddybende kommentarer klart og utvetydigt.

Den mest centrale grund til, at jeg valgte at forelæse, var dog, at indførelsen af det abstrakte gruppebegreb dårligt egner sig til andre undervisningsformer end institutionalisering. Jeg har tidligere i denne rapport argumenteret for, at indførelsen af samlende og generaliserende begreber ikke umiddelbart lader sig gøre via (fundamentale) adidaktiske situationer. Dette er blandt andet fordi, der tilsyneladende ikke findes et problem, som indførelsen af det abstrakte gruppebegreb kan siges at være (den eneste) løsning til.

9.5.2 Tilsigtet viden i det femte modul

Fra afstand betragtet og kort fortalt omfattede den tilsigtede viden i dette modul den tilsigtede viden i hele mit undervisningsforløb. Eleverne skulle gerne opnå forståelse af begrebet en abstrakt gruppe samt af undergruppebegrebet. Jeg skelnede i dette forløb tydeligt mellem konkrete grupper og abstrakte grupper, alt efter om mængdeelementerne var indført som konkrete, håndgribelige størrelser eller ej. Det var ambitionen, at eleverne skulle komme til at opfatte en abstrakt gruppe som et samlende og generaliserende begreb - en slags ækvivalensklasse - der kunne gøre det muligt at beskrive egenskaber ved samtlige isomorfe, konkrete grupper samtidigt.

Isomorfibegrebet, som det blev indført her via gruppernes kompositionstabeller, var derfor også et væsentligt elevudbytte af dette modul. Det var en forudsætning for at kunne forstå isomorfibegrebet, at eleverne havde gjort sig klart, at en gruppe udgøres af en mængde *og* dens kompositionsregel, og at det ikke giver mening at omtale en mængde som en gruppe, førend man har fastlagt dens tilhørende komposition.

Undergruppebegrebet skulle gerne ende med at blive forstået, som værende en delmængde af en gruppe, der med den nedarvede komposition udgør en gruppe i sig selv. Eleverne blev vejledt til forhåbentlig at forstå, at både konkrete og abstrakte grupper indeholder undergrupper. Dubinsky påstår som bekendt, at mange elever først forstår det abstrakte gruppebegreb i takt med, at undergruppebegrebet indføres. Det var med baggrund i denne påstand, at jeg valgte hurtigt at fokusere på undergrupper, i stedet for straks at tilføje egenskaber og resultater vedrørende det nyindførte abstrakte gruppebegreb.

Går man lidt tættere på, ser man, at ovennævnte forståelser gør brug af en masse delforståelser, som eleverne må tilegne sig først. Her tænker jeg specielt på de fire gruppebetingelser, og på måden hvorpå man udfra en kompositionstabel kan tjekke, om de er opfyldt i det abstrakte tilfælde. Eleverne burde dog være godt klædt på til at opnå disse forståelser. For det første var deres tanker nemlig - via kapitel fem i noterne - blevet sporet ind på abstraktionsprocessen, og for det andet var de meget grundigt blevet ledt igennem tre konkrete eksempler på det begreb, de her skulle prøve at opfatte abstrakt. Eleverne havde tre gange løst opgaver, der i konkrete kontekster behandlede samtlige af de indgående begreber, og de var tilmed i en videnskabelig debat blevet opmærksomme på de tre eksemplers ækvivalens.

9.5.3 Dataindsamling fra det femte modul

Undervisningen i det femte modul lignede meget en forelæsning, omend der undervejs optrådte substantielle elevbidrag i form af opgavebesvarelser. Data fra dette modul blev udelukkende indsamlet af det snurrende videokamera, men jeg opfattede det i høj grad som værende min opgave at sørge for, at der kom noget interessant med på optagelsen. Da jeg validerede elevernes svar på opgaverne, gjorde jeg mig derfor umage med at involvere forskellige elever i klassen, for derigennem at indfange et så bredt udsnit af elevernes forståelser og faglige niveauer som muligt. Jeg forsøgte desuden at spørge ind til elevernes metoder og opfattelser, og altså ikke blot sætte mundtlige flueben eller minusser ved deres besvarelser. Når alt dette er sagt, var jeg godt klar over, at en skriftlig og derfor mere håndfast datasamling ville blive tilgængelig i form af elevernes prøvebesvarelser efter det sjette modul. Min tanke var, at disse data mere direkte ville kunne indkredse og afspejle elevernes forståelser, og jeg koncentrerede mig derfor hovedsagligt om at undervise i det femte modul.

9.6 Sjette modul

I det sjette og sidste modul foretog jeg en overvejende summativ evaluering af elevernes læringsudbytte fra forløbet. Dette via en individuelt besvaret skriftlig prøve af to timers varighed. Jeg brugte ganske vist den skriftlige prøve som ekstern motivation i starten af forløbet, men det faktum alene udgjorde selvsagt ikke hele begrundelsen for at afholde en afsluttende prøve. Det var naturligvis interessant for mig at få en fornemmelse af, om mine anstrengelser havde båret frugt.

Fra den sidste undervisning til denne evaluering var der kun gået fem dage, og det var altså knap en uge siden, at eleverne første gang stiftede bekendtskab med det abstrakte gruppebegreb. Jeg forventede derfor ikke at kunne dokumentere en dyb og fuldstændig sammenhængende forståelse af gruppeteorien hos eleverne. De fleste af elevernes viden ville højst sandsynlig være fragmenteret, og deres forståelser formentlig være noget usammenhængende. Det var min ambition, at alle elever ville få muligheden for at vise, hvad de havde lært, snarere end at prøven ville diagnosticere, hvad de ikke havde lært. Det ville være svært for en elev at fremvise al sin viden, hvis alle opgaverne var sammenhængende og helhedsorienterede, og elevens viden i modsætning var fragmenteret. Omvendt ville det være ærgeligt, hvis en elev, der rent faktisk havde tilegenet sig de lange linjer i forløbet, ikke fik lov til at vise sin kunnen frem, fordi opgaverne kun forlangte overfladisk paratviden.

Med baggrund i ovenstående og fordi testens genstand var elevernes *samlede* viden om gruppebegrebet, havde jeg for at styrke testens validitet valgt tre forskellige typer af opgaver til den skriftlige prøve. Hensigten hermed var, at testen skulle indfange så megen af hver enkelt elevs viden som muligt. Prøven bestod af ti multiple choice-opgaver, to sammenhængende problemer og en åben formuleringsopgave.

Multiple choice-opgaver er rigtig gode til at indfange elevernes paratviden om et emne, men i reglen giver de mere et billede af, om eleverne har hørt efter i timerne, end om de rent faktisk har forstået meningen med det, der blev sagt. Har en elev en masse punktvis viden, kan hun sikkert klare sig succesfuldt igennem disse opgaver, også selvom hun ikke besidder det store overblik. Er opgavestilleren lidt udspekuleret, kan han dog godt teste eleverne for de dybere forståelser med denne type af opgaver. Jeg vil senere argumentere for, hvorfor jeg mener, at man for at kunne klare prøvesættets opgave **M6** må have opnået en avanceret forståelse af gruppebegrebet.

Problemopgaverne var udformet med tanke på evalueringens autencitet. Det var centralt at få prøvesituationen til at ligne de arbejdssituationer, eleverne havde været igennem i forbindelse med undervisningen. For at kunne besvare problemopgaverne må eleverne selv konstruere deres svar, hvilket kræver andet og mere end blot at genkende et rigtigt svar blandt fire givne valgmuligheder. Tanken var, at en løsning af problemopgaverne ville forudsætte en mere sammenhængende forståelse af gruppeteorien end en besvarelse af multiple choice-opgaverne gør. Eleverne må nemlig her ofte indrage flere af gruppeteoriens elementer samtidigt. Et eksempel herpå er at finde i prøvens opgave **P1**, der kræver, at eleven hele tiden tager højde for, at samtlige fire gruppekriterier er opfyldt. På denne måde adskiller denne opgave sig fra opgave **M1**, som udelukkende tjekker, om eleven har forstået indholdet af et enkelt af disse kriterier nemlig afsluttetheden.

Prøven afsluttedes med en fuldstændig åben formuleringsopgave, i hvilken eleverne fik mulighed for at præsentere en viden, som de af forskellige årsager var brændt inde med under den mere traditionelle opgaveløsning. Idéen var, at fordi eleverne ikke afkrævedes et bestemt svar på en bestemt form, ville de i højere grad formulere deres egne opfattelser, fremfor at forsøge at formulere de opfattelser de troede, opgaven forlangte. Den didaktiske kontrakt modificeredes altså under besvarelsen af formuleringsopgaven, og håbet var, at dette kunne afstedkomme interessant information for underviseren. I det tilfælde at nogle af elevernes egne opfattelser var fejlopfattelser, tænkte jeg nemlig, at denne type opgave ville være god til at informere læreren derom. En multiple choice-opgave eller en problem-opgave vil kunne afsløre, om elevens viden er mangelfuld, men ikke på samme måde som formuleringsopgaven afdække om eleven besidder en viden, der ikke er korrekt. Såfremt flere af besvarelserne fremviste den samme udbredte misforståelse, kunne jeg gå tilbage og granske min undervisning af det relevante område og måske optimere formuleringerne med henblik på at sikre dem mod den konstaterede misforståelse. På denne måde kunne formuleringsopgaven have fået en direkte indflydelse på den videre undervisning, såfremt jeg havde haft flere timer til rådighed. Det havde jeg ikke, og derfor blev formuleringsopgavens primære funktion i dette forløb snarere at være *in*formativ end at være formativ.

Del III

Metode og analyse

10 Empirisk metode

I dette kapitel vil jeg forsøge at redegøre for den metodologi, jeg har brugt i forbindelse med den efterfølgende analyse af mit undervisningsforløb. Jeg vil begynde med at forklare, hvordan mit valg af analysemetode både var dikteret af de muligheder, mit forløbs ydre omstændigheder gav for optag af data, og af de begrænsninger som menneskets komplekse natur sætter for at drage konklusioner om dets adfærd. Herefter vil jeg forklare, med hvilket sigte datamængden blev indhentet, og hvordan den blev klargjort til anvendelse. Kapitlet afsluttes med en begrundelse for måden, hvorpå jeg har tænkt mig at præsentere mine resultater.

Min ambition med dette specialestudium har været at anvise et alternativ til den traditionelle algebraundervisning med henblik på at omgå de problemer, som jeg på baggrund af litteraturen indledningsvis påstod, at mange studerende oplever, når de skal lære abstrakt gruppeteori. At påvise, at mit forløb er alternativt, er ikke særlig svært, men at dokumentere, at det virker bedre end den traditionelle undervisningsform, og at dette skyldes det særlige ved mit design, er absolut et par komplicerede opgaver.

Betragter vi elevernes problemer med at lære abstrakt algebra som en dårligdom, kan mit undervisningsforløb efterfølgende betragtes som en ny medicin, der er fremstillet med det formål at kurere et problem som den traditionelle medicin ikke har kunnet afhjælpe. At påvise, at et nyt lægemiddel har den ønskede virkning i højere grad end det gamle, indeholder et klassisk videnskabsteoretisk kausalitetsproblem. Udover, at man naturligvis må påvise, at alle patienter, der behandles med medicinen, oplever den ønskede mervirkning, må man nemlig også eftervise, at denne virkning rent faktisk skyldes lægemidlets indhold af særlige virksomme stoffer.

Holder vi fast i dårligdomsbilledet, og beholder vi de videnskabsteoretiske briller på, synes en fuldstændig dokumentation for, at mit designede forløb opfylder ambitionen ovenfor at kræve, at jeg efterviser, at forløbet har den ønskede *virkning*, at denne virkning optræder uafhængigt af de betragtede subjekter, og at *årsagen* til denne virkning netop er at finde i det specielle ved mit design. Jeg må altså med andre ord eftervise, at såfremt de to omtalte undervisningsformer gives lige vilkår, vil mit undervisningsforløb sikre en mindre problemfyldt læring af den indledende abstrakte gruppeteori end den traditionelle undervisningsform. At afgøre, hvorvidt man kan drage en sådan konklusion, forudsætter, at man har et tilstrækkeligt empirisk grundlag at konkludere udfra. En tænkelig måde at producere de fornødne data ville være at gennemføre både mit eget og det traditionelle forløb et tilstrækkeligt antal gange og med et tilstrækkeligt stort antal elever for derefter at sammenfatte de konsekvent forekommende elevudbytter fra hver af de to forløbsrækker. Disse to sammenfatninger ville nemlig herefter hver især kunne opfattes som et persistent bud på elevudbyttet fra de pågældende undervisningsforløb, og de ville derfor kunne tænkes at udgøre et rimeligt grundlag for en efterfølgende sammenligning af de to undervisningsmetoders virkning. Når antallet af gennemførelser og elever begge skal være tilstrækkeligt stort, er det naturligvis for statistisk at eliminere risikoen for, at de eventuelt observerede forskelle i elevudbytter, kunne skyldes egenskaber ved de betragtede elever, eller små forskelle i måden hvorpå de enkelte forløb blev gennemført fra gang til gang.

Det har aldrig været min hensigt, at jeg i min specialerapport skulle søge efter en nagelfast afgørelse af, om mit forløb anviser en forbedret undervisningsform eller ej. At foretage en *kvantitativ* undersøgelse, som den jeg har skitseret ovenfor, ville praktisk talt ikke kunne lade sig gøre for en enkelt specialestuderende inden for rammerne af en seks måneder lang studieperiode - slet ikke når der også skal afsættes tid til at designe et undervisningsforløb og til at skrive en rapport. Alene det at skaffe tilpas mange forsøgspersoner så jeg som et problem, der kunne underminere grundlaget for en sådan undersøgelse, inden den overhovedet kom igang.

Der var dog også en mere teoretisk årsag til, at jeg frastod fra at forsøge at gennemføre en sådan dokumentation. Årsagen var, at jeg faktisk var usikker på, om det logiske fundament i en sådan analyse ville være godt nok til, at jeg med rette kunne drage konklusioner om min undervisnings kvalitet. Mennesker er komplekse væsener, hvis bevæggrunde og handlemønstre afhænger af uoverskueligt mange faktorer. Det er derfor sjældent muligt at beskrive ændringer i menneskers adfærd fyldestgørende gennem simple årsags-virkningssammenhænge. Man skal altså generelt passe på med at anskue elevers læring som en direkte konsekvens af den undervisning, de har modtaget.[36] At foretage en sammenligning af elevgruppernes udbytter for derefter at kunne rangordne undervisningsformernes effektivitet, ville altså forudsætte en årsagsammenhæng, som jeg ikke tror, kan verificeres. Jeg tænkte endvidere, at uanset hvor umage jeg gjorde mig med at give de to former for undervisning ens betingelser, ville det alligevel aldrig være muligt helt at sikre, at de to målgruppers forudsætninger for at lære ville være identiske ved indgangen til de to forløb. Det er nemlig ikke alle faktorer med indflydelse på elevernes læring, som det er muligt for læreren at kontrollere. Et godt eksempel på en sådan faktor er elevernes generelle motivation eller stemthed, der i høj grad er afgørende for elevernes læringsparathed. Udover

[36]Husk på, at læreprocessen af Brosseau defineres som en ændring i elevernes adfærd. (Jf. citatet på side 46)

lærerens fremtoning og undervisningens indhold er denne nemlig også betinget af sociale og mentale faktorer, som er uden for lærerens rækkevidde. Eksempelvis er tilstedeværelsen af et tilstrækkeligt uforstyrret sind, sædvanligvis en forudsætning for, at eleven kan være parat til at målrette sin koncentration imod at tilegne sig den tilsigtede viden.

Fordi det forekom mig, at det resultat, jeg kunne opnå ved at udføre den meget arbejdskrævende kvantitative analyse, ville være behæftet med en masse forbehold, var det mig en let beslutning at forkaste denne ellers så traditionsrige naturvidenskabelige analysemetode. Jeg så altså med andre ord ingen grund til at kæmpe bravt for at frembringe et logisk bevis for min undervisnings fortræffelighed, der alligevel ikke helt ville holde vand. I stedet besluttede jeg mig for, at min analysemetode hovedsagligt skulle være *kvalitativ*, og at jeg af praktiske grunde ville holde mig indenfor rammerne af mit eget realiserede forløb.

Den kvalitative metode lægger op til at fortolke og forstå oplevede situationer for derefter at forsøge at ekstrapolere forståelserne til nye lignende situationer. Denne karakteristik af den kvalitative metodes anvendelighed beskriver meget fint de ærinder, jeg har med min analyse. Ved at fortolke de data jeg har samlet ind, vil jeg nemlig prøve at forklare, hvorfor modulerne forløb som de gjorde, og hvordan eleverne lærte det, de i deres mundtlige og skriftlige besvarelser fremviser at have lært. Analysen foretages med tanke på at kunne optimere mit forløb, hvor det skulle være nødvendigt, sådan at jeg ved en passende lejlighed kunne gentage det med (endnu) større succes. En ulempe ved brug af den kvalitative metode er, at den er temmelig afhængig af både subjekterne og analytikeren. Man kan derfor klandre den for ikke at kunne levere officielt verificerede resultater, men kun personlige vurderinger og fortolkninger. Jeg mener dog lige at have argumenteret fyldestgørende for, hvorfor endegyldige resultater er svære at drage fra en didaktisk undersøgelse som min, der interesserer sig for menneskers adfærd og deres tilegnelse af viden. Jeg endte med at formulere følgende tre målsætninger for min empiriske analyse.

For det første var jeg intereseret i at undersøge, om jeg havde kunnet realisere mine valg af undervisningformer på en måde, der bevirkede, at eleverne kom til at agere efter hensigten. Det centrale var her at afgøre, om mit forløb fangede elevernes interesse, og om arbejdsformerne var i stand til anspore og fastholde elevernes engagement om matematikopgaverne. I den første del af analysen er hovedtemaet altså en vurdering af designet og af mine gennemførte devolutionsfaser. Det vil i denne fase af analysen kun være af sekundær interesse om situationerne befordrede elevernes tilegnelse af den tilsigtede viden. Alligevel vil jeg, hvor det er muligt, kort vurdere elevernes faglige produktioner i de enkelte moduler. En samlet vurdering af elevernes læringsudbytte gives i analysens tredje del.

For det andet ville jeg forsøge at dokumentere fremskridtene i elevernes konstruktion af gruppebegrebet. Tanken var, at jeg ville prøve at hæfte mig ved hændelser eller elevudsagn, der kunne opfattes som udtryk for, at de agerende elever var igang med at stige op gennem Dubinskys tre udviklingstrin. Under antagelse af at mit undervisningsforløb indledningsvis placerer eleverne på det første af disse tre trin, ville jeg forsøge at give eksempler på situationer, hvor eleverne udviser tegn på at være nået til hhv. det andet og det sidste af Dubinskys udviklingstrin.

For det tredje ville jeg foretage en nøgtern slutvurdering af elevernes udbytte af min undervisning. Mit håb var, at jeg derigennem kunne levere et eksistensbevis for en konstellation af en lærer og en gruppe elever, for hvilke undervisningsforløbet kunne siges at have været en realiseret succes.

Jeg har i det foregående kapitel beskrevet, hvordan min samlede datamængde kom til at bestå af videooptagelser, udfyldte svarark, hjemmeopgavebesvarelser, prøvebesvarelser samt af enkelte noterede observationer gjort i forbindelse med undervisningen. I overensstemmelse med valget af den kvalitative analysemetode udgøres min empiri altså af forskellige former for skriftlige eller mundtlige elevudsagn og af nedskrevne eller videooptagede feltobservationer, der alle kan bruges til at foretage en subjektiv vurdering af undervisningens oplevede kvaliteter. Når jeg besluttede at bruge video, var det fordi jeg havde en formodning om, at det sjældent ville være muligt at undervise og notere interessante hændelsesforløb ned samtidigt. Ved at videofilme det meste af mit forløb kunne jeg give mig selv flere og bedre chancer for at observere og notere hændelser og udtalelser, der kunne have interesse for analysen af mit forløb.

Min analyse falder som beskrevet i tre selvstændige dele. Det har derfor været nødvendigt at udvælge og fortolke data udfra tre forskellige hensigter. Når jeg skal afgøre om undervisningen blev afviklet efter hensigten, vil jeg hovedsagligt betjene mig af generelle indtryk og observationer af elevernes gøren og laden i timerne. Denne første del af analysen vil altså komme til at bestå af sammenhængende vurderinger af, hvorvidt de enkelte moduler blev afviklet succesfuldt. Vi befinder os altså her i grænselandet mellem dokumentation og analyse.

I den anden del af analysen vil jeg hæfte mig ved skriftlige eller mundtlige elevudsagn, der kan tages til indtægt for, at eleverne er nået til det andet eller tredje stadium i deres konstruktion af gruppebegrebet. I denne fremstilling vil jeg slå ned på citater eller andre vidnesbyrd, der kan eksemplificere og derfor sandsynliggøre, at eleverne er på rette vej. Det havde i denne fase været optimalt at tage eleverne ud til interview flere gange undervejs i forløbet for hver gang at forsøge at indkredse deres øjeblikkelige forståelse af gruppebegrebet. På denne måde kunne man nemlig bedre have sikret sig, at de citater, man benyttede til at beskrive udviklingen, var kronologisk fortløbende, og at de i større udstrækning stammede fra de samme elever. For selvom en elev har nået et nyt udviklingstrin, er det ikke sikkert, at hun efterlader tegn derpå, uden at hun bliver opfordret til det. På grund af studieperiodens tidsmæssige begrænsninger og fordi jeg ikke på forhånd kunne påregne, at eleverne ville være til rådighed ud over undervisningstiden, blev en sådan dataindsamling desværre aldrig aktuel.

I analysens tredje og sidste del benytter jeg udelukkende elevernes prøvebesvarelser til at vurdere elevernes samlede læringsudbytte. Analysen har her indledningsvis et kvantitativt præg, idet jeg forsøger at vurdere det gennemsnitlige elevudbytte ud fra en helhedsbetragtning af klassens besvarelser. Der vil dog også i denne analysedel blive plads til et par citater og eksempler, der kan påvise, at en ofte forkommende misforståelse uheldigvis blev en del af flere af elevernes udbytte. Disse citater vil naturligt nok stamme fra besvarelser af prøvens formuleringsopgave, og de er inddraget i min rapport for at illustrere, hvordan besvarelserne af formuleringsopgaven kan hjælpe med at pege på de faser i mit forløb, der tilsyneladende kunne trænge til at blive strammet op.

Fordi de tre analysedele er ret forskellige, og fordi de betjener sig af forskellige typer af data, virker det mest logisk at præsentere data, når der gøres brug af dem i forbindelse med de relevante overvejelser. Dette betyder, at et egentligt resultatafsnit ikke er at finde i min rapport. Kun i forbindelse med den tredje analysedel, vil jeg præsentere et større dataudsnit samlet, inden jeg går igang med at tolke på det. I de to andre afsnit vil citater og observationer derimod blive inddraget i takt med deres anvendelighed for analysens videre fremdrift. Som nævnt ovenfor befinder det første afsnit sig dog på grænsen mellem analyse og dokumentar, og afsnittet kan derfor godt opfattes som en præsentation af resultater og observationer. Jeg vil ligeledes indrage mine overvejelser om mulige forbedringer af forløbet i forbindelse med analysen af de situationer, som jeg retrospektivt kan se, har behov for at blive optimeret.

11 Første analysedel: Forløbets afvikling

Lad mig starte med at formulere et par generelle indtryk, som jeg tog med mig fra min tid på Christianshavns Gymnasium.

Inden forløbet blev sat igang, holdt jeg to møder med klassens lærer, Henrik. Her blev jeg modtaget meget positivt og mødt med en stor interesse både for mit forløb, for matematik generelt og for kunsten at undervise. Henrik var meget hjælpsom med både at tilrettelægge forløbets timeplan, med at inddele klassen i grupper og med at sørge for, at mit materiale blev tilgængeligt for eleverne på internettet. I timerne var Henrik tilstede, men han varetog hovedsagligt rollen som observatør. Kun når eleverne arbejdede selvstændigt, og flere havde brug for hjælp samtidigt, påtog Henrik sig lærerrollen. Henrik fortalte mig, at 2.X var en af de bedste klasser, han havde undervist i sin tid på Christianshavns Gymnasium, og at eleverne generelt var dygtige, flittige og pligtopfyldende. Efter selv at have undervist klassen i tre uger vil jeg give Henrik ret.

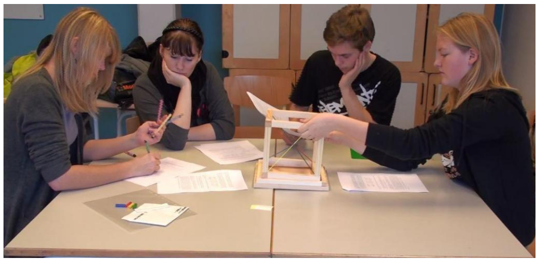
De fysiske rammer om mit forløb var gode uden at være prangende. Til de to første moduler var det muligt at booke et ekstra lokale, så jeg kunne videooptage de to udvalgte grupper væk fra resten af klassen. I det fjerde og femte modul hvor en projektor var nødvendig, var det heldigvis muligt at placere undervisningen i lokaler, der havde en sådan installeret. Generelt er lokalerne på C.G. dog ikke af særlig høj standard. Bordene, hvorpå eleverne gennemførte de to gruppearbejder, var meget små, og lokaleindretningen gjorde det svært at adskille grupperne ordentligt fra hinanden. Til den videnskabelige debat var tavlepladsen temmelig trang, og undervisningslokalet placeret så langt væk fra skolegården, at frikvarteret varede ti minutter længere end forventet.

I det følgende vil jeg forsøge at beskrive, hvor godt jeg mener at være lykkedes med, at få eleverne til at acceptere og påtage sig de opgaver og arbejdsformer, som jeg præsenterede dem for i de enkelte moduler. Gymnasieelever er i høj grad skoletilvænnet. Igennem mere end ti år har de været vant til jævnligt at indordne sig under den didaktiske standardkontrakt, der sædvanligvis indgås i forbindelse med klassisk tavleundervisning. Når jeg i store dele af det fjerde modul og i hele det femte modul benytter mig af denne undervisningsform, er eleverne altså på sikker grund, og den forelagte kontrakt så underforståèt, at devolutionsfasen næsten kan springes over. De mest interessante devolutionsfaser i mit forløb finder altså sted i forbindelse med de to første moduler og det tredje modul, og netop derfor er hovedvægten i dette første analyseafsnit lagt på disse lektioner. For en genopfriskning af hvordan devolutionerne fandt sted, henvises læseren til de relevante afsnit i kapitel ni.

11.1 Første og andet modul.

Hensigten med valget af arbejdsformen i de to første moduler var at skabe et didaktisk miljø, der nødvendiggjorde aktiv deltagelse fra alle eleverne i klassen. Tanken var at skabe nogle socialt trygge, men fagligt udfordrende situationer, der lagde op til, at eleverne hele tiden måtte handle og formulere sig angående problemstillingerne. Fordi eleverne havde hver deres ansvarsområde, var det tanken, at alle i gruppen - og dermed alle i klassen - måtte arbejde for at løse de givne opgaver. Det var desuden hensigten, at eleverne skulle kunne arbejde selvstændigt, og validere deres handlinger og udsagn i miljøet på egen hånd.

At få eleverne til at påtage sig opgaverne og indgå i de specifikke roller lykkedes over al forventning. Eleverne udfyldte generelt deres roller rigtig fint, og de var gode til ikke at overtage andre gruppemedlemmers arbejde. Den faglige aktivitet omkring bordene var meget høj specielt i de to grupper, der blev videofilmet. Eleverne afprøvede og diskuterede her løsningsmetoder og løsningsforslag uafbrudt fra gruppearbejdernes begyndelse, til de var færdige med at løse opgaverne eller til tiden var brugt op. Det, at ingen af de to grupper holdt frikvarter, kunne vidne om, at situationerne var interessante nok til at anspore og fastholde elevernes engagement. Jeg fornemmede nemlig ikke nogen form for stress eller præstationspres blandt eleverne, der ellers godt kunne tænkes at have været årsagen til, at de på denne måde valgte at udføre overarbejde. Billederne nedenfor er hentet fra mine videooptagelser af gruppearbejdet. Når jeg har valgt at tage dem med i rapporten, er det fordi, jeg mener, at de ganske fint illustrerer elevernes koncentration om opgaverne og deres troskyldige opfyldelse af rollerne.

For de grupper der ikke blev filmet, var arbejdsbetingelserne som nævnt ikke optimale. At grupperne sad tæt skabte lidt uro i form af ikke-faglig snak på tværs af grupperne, og at bordene var små gjorde det svært for eleverne at holde styr på virvarret af model, svarark og opgaveformuleringer. Dette betød dog på ingen måde, at gruppearbejderne i klasselokalet ikke forløb tilfredsstillende. Også her var eleverne nemlig til fulde tro mod konceptet, og de arbejdede alle meget fint med opgaverne, omend koncentrationsniveauet forventeligt nok var noget lavere end hos de videofilmede grupper.

Undervejs i analysen af de to moduler er jeg blevet opmærksom på et lidt uheldigt aspekt ved måden, hvorpå jeg indrettede gruppearbejdet. Det er faktisk en lille smule selvmodsigende at bede eleverne arbejde selvstændigt i et miljø, der møjsommeligt er forsøgt indrettet med et adidaktisk potentiale, der skulle sikre, at eleverne uden lærerens indblanding kan validere deres besvarelser og samtidig lade et gruppemedlems eneste opgave være at føre ordet overfor læreren. Det paradoksale i dette er, at hvis situationen virker efter hensigten, og miljøet leverer den nødvendige feedback, vil ordføreren være arbejdsløs, og dermed vil hensigten om, at alle skulle sættes i arbejde *ikke* være opfyldt. Arbejder talsmanden derimod meget, er det sandsynligvis fordi, miljøet ikke har gjort det muligt for eleverne at validere deres udsagn på egen hånd, fordi denne hensigt med etableringen af det didaktiske miljø ikke var blevet opfyldt. Kigger man godt efter på billederne ovenfor, ser man, at ordføreren (anden person fra venstre på begge billeder) virker ret passiv, og en granskning af videooptagelserne bekræfter faktisk, at ordførerne deltager mindre end de andre elever i gruppen. En måde at undgå dette på kunne være helt at se bort fra ordførerrollen, skære gruppernes medlemstal ned til tre og blot tillade, at alle i gruppen kunne stille spørgsmål til læreren om nødvendigt. I det realiserede forløb blev de fleste spørgsmål alligevel stillet ved gruppens bord, hvilket gjorde ordførerens efterfølgende overlevering af svaret til gruppen overflødig. Heldigvis bad jeg eleverne bytte om på rollerne ved indgangen til det andet forløb og sørgede derfor lidt utilsigtet for, at ingen elev befandt sig i den noget inaktive ordførerrolle mere end én gang. Nu må man ikke tro, at ordførerne slet ikke bidrog til den faglige produktion. Jeg havde i devolutionen som nævnt betonet, at alle gruppemedlemmer skulle deltage i debatten angående opgavernes løsning, og det er min klare opfattelse, at også ordførerne jævnligt gav udtryk for deres tanker og hypoteser. Der er altså her tale om en skønhedsplet, der ikke kan ødelægge mit helhedsindtryk af, at gruppearbejdet var en stor succes.

Med mig hjem fra hver af de første to dobbelttimer tog jeg seks udfyldte svarark - nemlig tre hexaeder-svarark og tre topmøde-svarark. I alle tolv tilfælde var grupperne kommet tilfredsstillende langt, idet de alle mindst havde fået udskilt de otte gruppeelementer i hhv. $(\mathbb{P}, \circ)$ og $(\mathbb{F}, \otimes)$ og var kommet igang med at udfylde de store Cayleytabeller. I fem af tilfældene blev grupperne fuldstændig færdige med opgaverne, og i tre af disse var alle svar korrekte. Af de fem komplette besvarelser stammer fire af dem fra det andet modul. Naturligvis er eleverne blevet bedre bekendte med arbejdsformen og min måde at stille opgaver på, men det kunne også tyde på, at eleverne som ønsket har opdaget de to eksemplers ensartethed. Den oplevede sværhedsgrad af de to opgavesæt synes nemlig at have været ens. Jeg modtog tre komplette besvarelser af hexaederopgaverne og to fuldstændige besvarelser af topmødeopgaverne, og sammenligner man bevarelserne fra hhv. modul et og modul to på tværs af opgavesættene, ser man, at grupperne stort set nåede lige langt. I det første modul nåede to topmødegrupper og to hexaedergrupper til den store Cayleytabel, mens de resterende to grupper (videogrupperne) begge blev færdige med deres sæt. I det andet modul blev to hexaedergrupper helt færdige, mens den sidste nåede at blive færdig med den store tabel. Kun en enkelt topmødegruppe kom igennem samtlige opgaver, men en anden gruppe var temmelig tæt på, idet den kun manglede at udfylde tabellen over $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}, \circ)$. Den sidste af det andet moduls tre topmødegrupper nåede halvvejs igennem udfyldelsen af den store tabel.

11.2 Tredje modul

Hensigten med at igangsætte de videnskabelige debatter var som tidligere beskrevet dobbeltsidet. For det første var det tanken, at eleverne ved at udforske deres tabeller over $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ skulle kunne opdage nogle af de gruppeteoretiske fællestræk ved de tre eksempler. For det andet var det tanken, at eleverne gennem formuleringen af deres opdagelser og gennem argumentationen for deres rigtighed skulle få et lille indblik i det matematiske fagsprogs anvendelighed og i den matematiske metode. Hele klassen var nu samlet, og dermed blev alle elever videofilmet.

Det var ikke alle de seks grupper, der mødte til tredje modul med fuldstændigt udfyldte Cayleytabeller over $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$. Eleverne fik derfor indledningsvis lidt tid til at gøre disse tabeller færdige, inden jeg foretog devolutionen af den videnskabelige debat. Som i de to foregående moduler var eleverne yderst samarbejdsvillige. De accepterede prompte deres nye roller som forskerhold, og de gik til deres tre tabeller med krum hals opsatte på at finde og formulere de ønskede sammenhænge. At opgaven var så åben, som det var tilfældet, gav dog hurtigt tre af forskerholdene problemer med rigtigt at komme igang. De gav udtryk for, at de fandt det svært og lidt unaturligt at lede, når de ikke vidste præcis, hvad de var på udkig efter. Jeg oplevede dette som et tegn på, at disse elever gennem mere end ti år som matematikelever var blevet vænnet til, at matematikopgaver altid går ud på at finde et på forhånd veldefineret svar - for det meste et tal, der kan sættes to streger under - og at de derfor havde vanskeligheder med at indgå i det tredje moduls lidt utraditionelle didaktiske kontrakt, der blandt andet forlangte, at eleverne selv gjorde sig klart hvilke typer af svar, der var ønsket. På denne måde blev efterforskningsdelen af den videnskabelige debat lidt af en øjenåbner for disse elever, omend deres faglige produktion desværre ikke blev så stor. I de tre andre grupper var den faglige produktion derimod væsentlig bedre, end jeg på forhånd havde turde håbe. Faktisk var produktionen her så stor, at denne halvdel af klassen mere end rigeligt frembragte det faglige udbytte, som jeg havde forventet af hele klassen. Inden den første videnskabelige debat havde jeg mulighed for ordret at skrive følgende ret så imponerende arsenal af påstande op på tavlen:

- Ud af 0. række og 0. kolonne finder man faktorer fra a til h. Mønstret i matrixprodukterne er ligesom i sudoku, hvilket vil sige, at bogstaverne a til h kun må optræde én gang i hver række og hver kolonne. Man kan i hver tabel finde et tilsvarende mønster. Mønsteret behøver ikke nødvendigvis at være i samme rækkefølge.
- Man kan gange et vilkårligt antal permutationer / matricer fra delmængderne sammen så resultatet altid vil være en af de otte permutationer / matricer fra delmængderne. Alle produkterne i skemaerne er lig med et af tallene fra delmængden. Et produkt ganget med et tal fra delmængden vil altså også give et tal fra delmængden.
- Inde i tabellerne finder man de otte samme permutationer / produkter / flytninger som, der er blevet givet. Der kommer vist intet nyt, når man ganger dem.
- Fuldkomment neutralt element i alle tre tabeller: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(1^0 2^0)$
- $a \cdot b \neq b \cdot a$, dog gælder normalt $=$.
- Alle matricer / permutationer er deres egne komplimentære bortset fra to i alle tabeller. Disse to er så hinandens komplimentære. Komplimentær betyder, at de to ganget sammen giver den neutrale position.

Jeg vil ikke her gå dybere ind i udsagnenes pudsigheder, såsom at tabellerne sammenlignes med en sudoku, at $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ kaldes *del*mængder, at mængdeelementerne kaldes tal, og det at sammensætte dem kaldes at gange eller, at der med komplimentær vist menes kompl**e**mentær. Påstandene er her ordnet efter deres faglige indhold. De tre første udsagn udtrykker rimelig klart, at $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ er afsluttede overfor deres respektive kompositionsregler. Selvom det tredje udsagn indeholder et forbehold for påstandens rigtighed, er det faktisk denne formulering, der er den klareste af de tre. Det fjerde udsagn udtrykker fuldstændigt klart og utvetydigt, at der findes et neutralt element i $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$, og de tre mængders identiteter udpeges endda. Påstanden tager dog for givet, at man ved, hvad det betyder, at et element er neutralt. Det femte debatindlæg gør brug af matematisk symbolisme til at udtrykke, at man ikke kan regne med, at rækkefølgen, hvormed man sammensætter to elementer, er uden betydning for resultatet. Eleverne får altså her udtrykt, at de tre kompositioner *ikke* opfylder den kommutative lov. I det sjette udsagn formuleres den efter min mening mest imponerende observation. Eleverne her har ikke bare opdaget, at ethvert element har et inverst, de har endda opdaget, at alle elementer pånær to har orden to. At de tilmed får formuleret deres fund via et rimelig klart sprogbrug, gør bare præstationen endnu bedre.

Af de fire punkter på den føromtalte gruppekriterium-tjekliste, havde eleverne altså allerede frembragt de tre. Da det på ingen måde var forventeligt, at eleverne ville hæfte sig ved associativiteten (den fremgår som bekendt ikke umiddelbart af tabellen), må man altså sige, at den faglige produktion i den første efterforskningsfase totalt set var noget nær optimal. Det var selvfølgelig lidt ærgeligt, at det udbytterige arbejde var begrænset til tre af grupperne, men en af årsagerne til, at jeg ville afholde en videnskabelig debat, var jo netop for at udnytte dens funktion i retning af vidensdeling. Jeg vil hævde, at den første debatrunde opfyldte ambitionen om at gøre den nyindvundne viden alment kendt. De spørgsmål, der blev stillet, tjente alle til at udbedre manglende forståelser af de benyttede begreber: Hvad vil det sige, at et element er neutralt? Hvad betyder det, at to elementer ganget sammen giver den neutrale *position*? etc. De tre bidragende grupper uddybede efter bedste evne, og deres forklaringer stillede faktisk alle spørgerne og endda også læreren tilfredse.

Herefter stoppede den videnskabelige debat desværre temmelig brat. Efter de opklarende spørgsmål og svar var det nærmest umuligt for eleverne at være uenige om noget af det, der stod på tavlen, idet alle ved selvsyn ganske enkelt kunne konstatere påstandenes sandhed i tabellerne. Set i bakspejlet var mit oplæg måske alligevel ikke helt så velegnet til debat, som jeg inden timerne havde troet. Spørgsmålene var ganske vist meget åbne, men de søgte svar - udsagn om ligheder tabellerne imellem - var nok ikke tilstækkeligt anvendelige som udgangspunkter for en debat. Dette kunne skyldes, at de udsagn jeg sigtede efter, ikke rigtig besad et hypotetisk element. Jeg tænker nemlig, at havde udsagnene i højere grad været hypotetiske, kunne det have bevirket, at forsamlingen enten havde måtte erklære sig enige eller uenige i dem, og at de derfor følgelig var blevet nødsaget til at forsvare deres påstande i overensstemmelse med regelsættet for den videnskabelige debat. Udsagnene, jeg bad om, var såmænd svære nok at finde, men når eleverne havde fundet dem, havde de stort set også eftervist dem. De resulterende udsagn kom derfor til at fremstå som uimodsigelige konstateringer snarere end hypotetiske formodninger, og dette var formentlig det, der gjorde, at der ikke var meget brændsel at hente til den efterfølgende debat. Det ville muligvis være gået anderledes, hvis ikke elevudsagnene havde været så klare i deres formuleringer, eller hvis nogen havde fremsat en ukorrekt påstand. Det virker dog ikke rimeligt at forsvare sit didaktiske design med, at eleverne klarede sig alt for godt - så det vil jeg lade være med. Faktum er, at den første videnskabelige debat kun blev en delvis succes. Det faglige udbytte var fremragende, men ambitionen om, at eleverne skulle debattere som matematikere, blev ikke opfyldt særlig godt. Debattens anden runde blev lidt mere livlig, men heller ikke den levede helt op til forventningerne, hvad angik elevernes aktive brug af fagsprog og matematiske ræsonnementer.

For at skærpe den anden debatrundes faglige indhold var det som tidligere beskrevet tanken at give hver af forskerholdene et ledende spørgsmål at arbejde videre udfra. (Jf. side 64.) Da den første debatrunde til fulde havde dækket det faglige indhold i fire af de seks spørgsmål, jeg havde forberedt, valgte jeg kun at uddele de sidste to spørgsmål til tre grupper hver. Det ene af disse spørgsmål skulle gerne lede eleverne til at opdage, at kompositionen i alle tre konkrete gruppeeksempler opfylder den associative lov, mens det andet spørgsmål helst skulle besvares med et udsagn, der indeholdt observationen, at elementerne enten har orden 1, 2 eller 4. Inden anden debatrunde modtog jeg tre indlæg:

- Fra udgangspositionerne giver flytningerne ganget/kombineret med sig selv udgangspositionen, med undtagelse af to flytninger, hvor den skal ganges/kombineres med sig selv 4 gange for at nå udgangspositionen.
- Ja, det gør en forskel hvilke "naboer" man sammensætter først. Bortset fra hvis det neutrale element er med, så er det lige meget hvilke flytninger man sætter sammen først. Det gælder også for permutationer og matricer.
- Rækkefølgen man sammensætter to "naboer" gør en forskel - se følgende argumentation:

  Matricer:

  $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

  Permutationer:

  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Det første udsagn ligner meget dem jeg modtog inden den første debatrunde. Det er rimelig klart formuleret, omend det kræver en uddybning, at få det gjort til en sammenhæng mellem de tre tabeller. Det er dog, når først man har fået peget sammenhængen ud, let at overbevise sig om indholdets rigtighed, og udsagnet efterlader derfor ikke særligt meget at debattere om. Jeg vil derfor gå videre til de to sidste påstande, der begge udsiger, at den associative lov *ikke* er opfyldt i $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$. Det virker som nævnt lidt paradoksalt, at man skal glæde sig over elevernes fejlslutninger, men faktisk var det disse to ukorrekte debatindlæg, der satte en lille smule gang i debatten.

Det tredje af de forskerhold, der havde arbejdet med den associative lov, leverede ikke noget debatindlæg. De mente ikke, at de var i stand til at bevise deres formodning om, at det er underordnet, hvilke "naboer" man sammensætter først, når man skal udregne kompositummet af tre elementer. De havde regnet et par eksempler med hhv. flytninger og permutationer, men de kunne ikke overskue om reglen nu også gjaldt overalt. Endelig var der altså opstået en flig af uenighed, der kunne åbne for diskussionen.

Da debatten blev åbnet tilkendegav den usikre gruppe sin tvivl angående de to andre gruppers påstande. Gruppens kritik blev dog hurtigt tilbagevist med en konstatering af, at der stod to modeksempler på tavlen. Desværre accepterede tvivlerne dette argument uden at tjekke efter, om eksemplerne nu også var korrekte. Jeg fornemmede, at de var for usikre på deres sag til at ville tage kampen op imod de to enige og noget mere selvsikre grupper. Desuden havde et af tvivlernes gennemregnede eksempler involveret identiteten, hvilket gjorde, at påstand nummer to faktisk forekom dem troværdig. Nok engang var debatten altså død, inden den rigtig kom igang.

Da der ikke blev gjort yderligere indsigelser, måtte ordstyreren bryde ind for at skubbe projektet videre. Jeg bad hele forsamlingen om at tjekke, om de to modeksempler på tavlen var korrekte, men da jeg ikke fik noget enstemmigt svar, gav dette ikke nogen afklaring. Jeg endte derfor med fuldstændig at give køb på ordstyrerrollen, idet jeg ved at ytre min egen "tvivl" om påstandenes rigtighed overtog ansvaret for den betragtede matematiks korrekthed. Jeg bad en elev fra den pågældende gruppe, om at komme til tavlen for at regne modeksemplerne efter. Elevens udregninger afslørede, at fejlene i begge tilfælde var opstået, når parentesen var sat om de sidste to af udtrykkenes tre elementer. Eleverne havde ganske vist multipliceret/sammensat elementerne i parentesen korrekt, men derefter multipliceret/sammensat resultatet af denne første udregning med det første element i udtrykket stående *til højre*. Ved at pege på første debatrundes fjerde udsagn mindede jeg eleverne om, at de selv lige havde indset, at det kan gøre en forskel, om man multiplicerer/sammensætter fra højre eller fra venstre. Herefter kunne argumentet i det tredje debatindlæg let falsificeres. Jeg gjorde dog meget ud af at slå fast, at vi med disse eksempler endnu ikke havde indset eller bevist associativiteten. Først herefter fortalte jeg eleverne, at den associative lov *er* opfyldt i $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$, og jeg forklarede også, hvilket stort arbejde det ville være at give et fuldstændigt bevis for denne lov udfra tabellen. Inden modulet sluttede, forsikrede jeg eleverne om, at de ikke ville møde opgaver, der bad om et sådant fuldstændigt bevis for en kompositionsregels associativitet.

Jeg forlod tredje modul med blandede følelser. På den ene side havde det matematikfaglige udbytte været rigtig godt, og måden hvorpå eleverne på egen hånd havde opdaget de fleste af de gruppeteoretiske sammenhænge mellem $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$, gav mig opfattelsen af, at de tre indledende opgavesæt havde haft den ønskede effekt. Det tegnede unægtelig godt for det videre forløb, og derfor var jeg da også overvejende positiv. På den anden side var jeg en lille smule ærgelig over, at ambitionen om, at modulet skulle inducere lidt matematisk dannelse, ikke blev indfriet. Set i bagklogskabens lys var det nok at have lidt for høje ambitioner at tro, at jeg på 135 minutter kunne få dækket et for eleverne ret så avanceret matematisk pensum og tilmed sørge for, at det blev gjort på parlamentarisk vis, via elevernes brug af det matematiske fagsprog til eksplicit at fremføre logiske argumenter for selvopdagede sammenhænge. Skulle jeg få lejlighed til at gennemføre mit forløb igen indenfor en lignende tidsramme, ville jeg acceptere, at jeg sandsynligvis måtte se bort fra dannelsesaspektet og nøjes med at fokusere på det matematikfaglige udbytte. Såfremt jeg kunne få et modul mere til rådighed, ville jeg formentlig udnytte dette til at afholde en indledende debat sat igang af et spørgsmål, hvorom det i højere grad ville være muligt at have to meninger. Et sådant spørgsmål kunne være: Er tabellerne over $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ forskellige eller ens? Havde jeg dog alene benyttet dette spørgsmål til at åbne debatten i mit realiserede forløbs tredje modul, var jeg sikkert gået fra timerne med fornemmelsen af, at debatten havde været god, men det faglige indhold lidt tyndt.

11.3 Fjerde modul

Det fjerde modul forløb fuldstændig planmæssigt. Eleverne lyttede efter lærerens forklaringer, og løste herefter de stillede opgaver uden de store problemer. Jeg havde en virkelig god fornemmelse af, at grundlaget for at indføre det abstrakte gruppebegreb efterhånden var rigtig solidt.

11.4 Femte modul

Også det femte modul blev afviklet yderst tilfredsstillende. Eleverne fulgte tilstrækkelig godt med til at kunne svare på de spørgsmål, jeg stillede undervejs i forelæsningen, og jeg hæftede mig ved, at svarene rent faktisk kom fra et bredt udsnit af forsamlingen. Dette gav mig en indikation af, at mange elever var i stand til at indfange den tilsigtede viden om det abstrakte gruppebegreb og undergruppebegrebet. Jeg forlod derfor dette sidste undervisningsmodul med store forventninger til elevernes prøvebesvarelser. Hvorvidt disse forventninger blev indfriet, tages op i rapportens tredje analysedel, der beskæftiger sig med elevernes samlede læringsudbytte fra forløbet.

12 Anden analysedel: Udviklingen i elevernes konstruktion af gruppebegrebet

Undervejs i forløbet forsøgte jeg at overvåge udviklingen i mine elevers personlige konstruktioner af det abstrakte gruppebegreb. Jeg benyttede her Dubinskys genetiske dekomposition af læringsprocessen som en rettesnor for mine observationer. Jeg forsøgte med andre ord at hæfte mig ved elevudsagn og gerninger, der til forskellige tidspunkter i forløbet kunne indikere, at eleverne var nået til det forventelige udviklingstrin i deres konstruktion af gruppebegrebet. Når jeg kan tale om det til et givent tidspunkt forventelige udviklingstrin, er det fordi, forløbet blandt andet var konstrueret med tanke på at lede eleverne op ad disse trin. Til ethvert tidspunkt i forløbet, kunne jeg altså med baggrund i dets design tillade mig at have en forventning om, hvilket trin eleverne burde befinde sig på.

Måden hvorpå $(\mathbb{P}, \circ)$ og $(\mathbb{F}, \otimes)$ indføres, må nødvendigvis medføre, at elevernes første personlige gruppebegreb, kommer til at ligge tæt op ad deres mængdebegreb. Mit forløb begynder altså med at placere eleverne på det første af de tre udviklingstrin. Efter de to første moduler og det første hjemmearbejde vil eleverne formentlig være begyndt også at inddrage kompositionsreglen i deres opfattelse af gruppebegrebet. Denne kompositionsregel vil dog fortsat opfattes at være fuldstændig bestemt af mængdeelementernes beskaffenhed. Eleverne vil formentlig have en forståelse af, at når mængden er givet, følger den kanoniske kompositionsregel bare med. Kompositionsreglen opfattes altså i denne fase mere som et konsekvent medfølgende vedhæng til mængden end som en størrelse, der medvirker til at definere gruppen. Det vil derfor stadig være mængdeelementerne, der afgør, hvilken gruppe man står overfor. Eleverne vil i denne fase ikke være bevidste om, at den samme mængde kan tilføjes to forskellige kompositionsregler og opnå gruppestatus med dem begge. Først når vi i det femte modul begynder at betragte abstrakte mængder, vil det nemlig være naturligt at indføre to kompositioner på den samme mængde. På denne måde vil eleverne forhåbentlig opnå forståelsen af, at kompositionsreglen i virkeligheden er det, der definerer en gruppe, og først da kan man hævde, at eleverne har indtaget det andet trin på Dubinskys udviklingsstige. Det tredje trin er det højeste forstået på den måde, at det sidste skridt oftest er det sværeste for eleverne at udføre. For at fuldbyrde konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb må mængden med den definerende komposition indkaplses til et objekt, der i sin helhed kan indgå som input i en operation. Ved netop at indføre flere gruppekompositioner på den samme mængde åbnes for, at grupper kan sammenlignes på andet end deres elementantal og elementernes art. Når vi i slutningen af det femte modul gentagne gange tjekker gruppekriterier og sammenligner Cayleytabeller, er vi altså begyndt at lade grupperne indgå som argumenter i processer. Vi er med andre ord begyndt at behandle grupperne som objekter, og ifølge Dubinsky er dette netop en af måderne, hvorpå eleverne kan ende med at opfatte en gruppe som et objekt. Det var med baggrund i denne argumentation, at jeg tillod mig at have forhåbninger om, at (en del af) eleverne ved indgangen til det sjette moduls skriftlige prøve ville være trådt op på det sidste af de tre trin. Sådanne elever ville altså have fuldbyrdet konstruktionen af det abstrakte gruppebegreb som en ækvivalensklasse bestående af isomorfe konkrete grupper manifesteret via én abstrakt mængde med en komposition, der er frataget alle de konkrete gruppers partikulære egenskaber og fortolkninger.

Som tidligere beskrevet har det ikke været muligt at foretage en interviewrække for derigennem at indhente sammenhængende data fra eleverne hver især, der kunne bruges i en kronologisk beskrivelse af den enkelte elevs konstruktion af gruppebegrebet. Eksemplerne jeg giver nedenfor involverer fem forskellige elever. De beskriver derfor ikke en enkelt elevs læringsproces, og skal med baggrund heri betragtes som løsrevne indikationer på, at den ovenfor beskrevne udvikling har fundet sted. I præsentationen af elevbidragene svarende til det sidste udviklingstrin ligger underforstået en antagelse af, at den bidragende elev er nået til det endelige stadium gennem en udvikling, der er forløbet via det andet udviklingstrin.

12.1 Gruppebegrebet betragtet som en mængde med en tilhørende operation

Som nævnt vil eleverne nærmest uundgåeligt blive placeret på det første af udviklingstrinene i undervisningens start. $\mathbb{P}$ og $\mathbb{F}$ indføres nemlig som blotte mængder, idet eleverne bliver bedt om at udpege deres otte elementer blandt fireogtyve mulige. Fokus er altså i starten rettet på mængdeelementerne, mens kompositionerne indtager en sekundær rolle. Jeg vil derfor tillade mig at antage, at eleverne i udgangspunktet befinder sig på det første trin og altså betragter en gruppe som en mængde.

Eksemplet jeg vil give stammer fra det femte modul, og det involverer udover læreren også tre elever. I klassen har vi umiddelbart forinden indført tabel-tjeklisten for gruppekriterierne og tjekket, at $(G, \odot)$ er en abstrakt gruppe (Jf. afsnit 9.5), og jeg har netop fremsat påstanden, at der findes andre abstrakte grupper med otte elementer end $(G, \odot)$. I den udveksling, der herefter fandt sted, udviste to af eleverne tegn på ikke at have sluppet opfattelsen af, at en gruppe hovedsagligt er en mængde, mens den tredje elev syntes at have opnået forståelsen af, at det faktisk er gruppekompositionen, der distingverer en abstrakt gruppe.

Frederik: Kan der ikke kun være én abstrakt gruppe?

Lærer: Med otte elementer eller bare én gruppe ... overhovedet?

Frederik: Med otte flytninger.

Lærer: Nej, der er faktisk andre abstrakte grupper med otte *elementer*, end den vi lige har kigget på. Husk på Frederik, at vi nu har med abstrakte mængder at gøre - elementerne er ikke længere flytninger eller permutationer eller matricer for dens sags skyld - de er bare mængdeelementer.

Frederik: Men hvordan kan to abstrakte grupper være forskellige? Sagde du ikke lige, at vi bare kan kalde dem det samme?

Lærer: Jo, jeg sagde, at fordi vi bare kan kalde elementerne det samme, kan to abstrakte *mængder* med lige mange elementer altid betragtes som ens, men nu er en gruppe jo mere end bare en mængde. Hvad kan adskille to abstrakte grupper med otte elementer?

(Bemærker, at jeg har set Kristians finger, men at jeg gerne vil give de andre elever en chance for at komme til orde, før vi hører ham.)

Emilie: De konkrete eksempler.

Lærer: Tjah, det er klart, at hvis to abstrakte grupper er forskellige, må de konkrete eksempler på den ene være forskellige fra de konkrete eksempler på den anden. Men hvis vi nu holder os til de abstrakte grupper?

Kristian: (Har markeret siden udvekslingens start.) Det må være - hvad var det nu, du kaldte den - kompositionsreglen, der adskiller dem.

Lærer: Netop! Kompositionsreglen er den, der giver mængden sin struktur. Det er faktisk den, der definerer gruppen.

At Frederik stiller det spørgsmål, der indleder udvekslingen ovenfor, tolker jeg som et udtryk for, at han oplever en konflikt mellem hans forstålse af gruppebegrebet, og den drejning undervisningen har taget. Frederik har givetvis forstået sammenhængene mellem $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$, men han betragter dem stadigvæk som tre forskellige grupper, fordi deres elementer er af forskellig art og derfor ikke kan sammenlignes. Desuden tror jeg, at Frederik har oplevelsen af, at kompositionsregl*en* dikteres af mængdeelementernes art, og at han netop derfor ikke kan forestille sig, at en mængde kan have mere end én gruppekomposition. Kort sagt befinder Frederik sig endnu ikke på det andet udviklingstrin, idet han synes at opfatte mængdeelementerne som værende det, der definerer en gruppe. Konflikten opstår, fordi Frederik har forstået, at notationen er underordnet, når man har med abstrakte mængder at gøre. Denne forståelse giver han nemlig udtryk for i sit tredje udsagn. Frederik har altså indset, at det ikke længere vil være muligt at adskille to grupper via deres mængdeelementer - og hvordan kan der så være mere end én gruppe, når alle mængder med lige mange elementer er ens? Dette er i øvrigt et rigtig godt eksempel på, hvordan en elev erfarer, at hans gruppebegreb er blevet utilstrækkeligt, og at det derfor må rekonstrueres. For at elevens ligevægt kan genoprettes, er det blevet nødvendigt, at hans personlige gruppebegreb gøres rummeligt nok til også at kunne omfatte de nye krav, som omgivelserne stiller. (Jf. citatet af Dubinsky på side 35)

Emilies korte bidrag tolker jeg som et udtryk for, at hun heller ikke har løsrevet sig fra at opfatte en gruppe som en konkret mængde med en medfølgende kompositionsregel. At Emilie dykker ned fra det abstrakte niveau til de konkrete eksempler, opfatter jeg nemlig som et tegn på, at også hun udelukkende kan skelne mellem to lige store grupper, såfremt deres mængdeelementer er af forskellig art. Mit svar på Emilies påstand skød vist en lille smule over målet. Når jeg tænker efter, virker det oplagt, at Emilie *ikke* mente, at strukturen i de konkrete eksempler på den ene gruppe ville være forskellig fra strukturen i de konkrete eksempler på den anden gruppe, hvilket vist var den fortolkning, som jeg i timen lagde ned over hendes udsagn. Jeg tror ved nærmere eftertanke, at Emilie snarere mente, at mængdelementerne i de konkrete eksempler på de to grupper måtte være af forskellig art. Denne sidste fortolkning understøtter nemlig min fornemmelse af, at Emilie fortsat befandt sig på det første udviklingstrin, og derfor endnu ikke havde indset, at det er kompositionsreglen, eller rettere den struktur som kompositionsreglen inducerer på gruppen, der i virkeligheden destingverer gruppen.

Kristian siger det meget præcist: Det må være kompositionsreglen, der adskiller to abstrakte grupper med otte elementer. I modsætning til sine to klassekammerater har Kristian altså indset, at når den abstrakte mængde ikke kan være anderledes, må det være kompositionsreglen, der kan gøre forskellen. At Kristian prompte havde svaret klar tyder på, at han havde opnået sin forståelse, inden Frederiks og Emilies ufuldstændige forståelser blev diskuteret. Man kan hævde, at så snart man har indset, at der principielt kun findes én abstrakt mængde med otte elementer, må det nødvendigvis være kompositionsreglen, der kan varieres, for at opnå mere end en gruppe. Denne indsigt kræver dog, at man har gjort op med forståelsen af, at en mængde har én og kun én kanonisk kompositionsregel, der er dikteret af elementernes beskaffenhed. Det er lige netop her, jeg mener, at Kristian udviser tegn på at være nået længere i konstruktionen af gruppebegrebet end Frederik. Kristian har åbnet op for, at en mængde kan tilføjes mere end én kompositionsregel, og at det herved er muligt, at danne forskellige grupper ud fra den samme mængde. Jeg mener med baggrund heri, at Kristians udsagn kan tolkes derhen, at han har indtaget det andet udviklingstrin på Dubinskys trappe mod det færdige abstrakte gruppebegreb.

Det var altså ikke alle elever, der her midt i det femte modul havde opnået at sofistikere deres opfattelse af gruppebegrebet tilstrækkeligt til at kunne indse, at kompositionen er den strukturgivende og dermed den definerende størrelse for en gruppe. Frederik og Emilie er faktisk gode repræsentanter for klassens gennemsnit, så mon ikke der på dette tidspunkt sad flere elever i klassen, der inden Kristians konstatering havde den samme forståelse af gruppebegrebet som disse to elever. Kristians udsagn og min efterfølgende validering af det kan muligvis have været det, der åbnede elevernes øjne for en ny forståelse af gruppebegrebet. I hvert fald er jeg nedenfor i stand til at inddrage to eksempler, der tilsammen efterlader tegn på, at fire elever har fuldbyrdet indkapslingen af gruppebegrebet og tilsyneladende er endt med at opfatte en gruppe som et objekt.

12.2 Gruppebegrebet opfattet som et objekt

Det første af de to eksempler udgøres af det femte moduls allersidste dialog. I denne udveksling indgår læreren og de to elever, Pingnan og Karla. Vi har netop konstateret, at $\mathbb{Z}_4$ og V_4 kan findes som undergrupper i $(G, \odot)$, og på lærredet har jeg indhentet to kopier af tabellen for $(G, \odot)$, der hver især har en af disse undergrupper markeret med hhv. rød og grøn skrift. (Se evt. i lærebogen på side 132.) Jeg ønsker her at demonstrere, at Karla er begyndt at betragte grupper som objekter, der kan sammenlignes i deres helhed. At Karla får lejlighed til at give udtryk for sin forståelse skyldes faktisk, at Pingnan stiller et spørgsmål, der efterlader mig med indtrykket af, at hun endnu ikke har opnået denne forståelse.

Pingnan: Den undergruppe (pegende på den grønne repræsentation af $\mathbb{Z}_4$) er den isomorf med den store tabel?

Læreren: Øh!? (lettere forundret over spørgsmålet) ... Kan to grupper med forskelligt elementantal være isomorfe?

Pingnan: Nej, men jeg mener med den røde tabel. Er den grønne tabel isomorf med den røde tabel?

(Først nu forstod jeg, at Pingnan angiveligt havde henvist til den røde tabel som den store tabel, fordi den oppe på lærredet var spredt over et større areal end den grønne tabel. En anden mulighed er, at hun bare var hurtig til at rette sit lidt uheldige spørgsmål til et bedre.)

Læreren: Hvad siger forsamlingen? Er de to undergrupper isomorfe?

Karla: Nej, to undergrupper, der er undergrupper for den samme gruppe, behøver ikke at være isomorfe med hinanden. De to undergrupper dér (peger op på lærredet) er *ikke* isomorfe.

Læreren: Nej, hvorfor?

Karla: De kom fra de to forskellige grupper med fire elementer.

Jeg tolker Karlas sidste udsagn som et tegn på, at hun har fuldbyrdet sin forståelse af undergruppebegrebet og dermed også af gruppebegrebet. Karla synes nemlig at være i stand til at betragte de to undergrupper som objekter, der kan indgå i processer i deres helhed. Vi har ganske vist også tidligere i forløbet betragtet $\mathbb{Z}_4$ og V_4 og indset, at de ikke er isomorfe grupper, men dengang sammenlignede vi to tabeller for $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ og udpegede en uoverenstemmelse imellem dem på elementniveau. Den mulighed har Karla ganske vist også her, men måske fordi $\mathbb{Z}_4$ er repræsenteret af $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, mens V_4 er repræsenteret af $\{g_1, g_3, g_6, g_8\}$, vælger hun at gøre noget andet. I stedet for at forsøge at adskille de to undergrupper på antallet af neutralelementforekomster i diagonalen, benytter hun sin viden om undergruppernes respektive isomorfi med hhv. den cykliske gruppe af orden fire og Kleins Viergruppe. At hun argumenterede for undergruppernes ikke-isomorfi ved at sige, at de kom fra de to forskellige grupper med fire elementer, opfatter jeg nemlig som en indikation på, at Karla først lynhurtigt har trukket de to grupper repræsenteret ved de farvede tabeller tilbage til deres "urbilleder" nemlig de to grupper repræsenteret via H-tabellerne, og at hun derefter har benyttet, at disse to grupper allerede var vist at være ikke-isomorfe. I de processer, som Karla udfører på grupperne, inddrager hun dem altså i sin helhed, hvilket kræver, at hun må betragte dem som objekter.

Det andet eksempel, jeg vil give i forsøget på at dokumentere, at visse elever opnåede at indkapsle deres gruppebegreb til et objekt, stammer fra den skriftlige prøves multiple choice del. I opgave **M6** (p. 138) beder jeg eleverne om at afgøre, hvilke af fire betingelser der er nødvendige kriterier for, at de to grupper $(G, \otimes)$ og $(M, \odot)$ kan være isomorfe. Opgaven er udformet sådan, at en elev, der har fulgt godt med i undervisningen, vil finde det oplagt at tilvælge de tre første svarmuligheder. I disse svar gentager jeg nemlig ordret tre udsagn, som adskillige gange har været sat i tale i løbet af timerne. Da jeg formulerede den fjerde svarmulighed, var hensigten derimod, at et velbegrundet tilvalg skulle kræve en højt udviklet forståelse af (under)gruppebegrebet. Tanken var, at det udelukkende skulle være de elever, der var nået til det tredje af Dubinskys udviklingstrin, som skulle være i stand til at besvare spørgsmålet korrekt. At jeg modtog fire korrekte besvarelser af denne opgave, tolker jeg følgelig som et tegn på, at eleverne, der leverede dem, havde fuldbyrdet deres konstruktion af gruppebegrebet. En uddybning er vist på sin plads.

At afgøre, om $(M, \odot)$ nødvendigvis må være en undergruppe af $(G, \otimes)$, når $(M, \odot)$ og $(G, \otimes)$ er antaget at være isomorfe, er naturligvis en opgave, der i sidste instans forudsætter, at man har forstået undergruppedefinitionen, og at man husker på, at undergrupper ikke behøver at være repræsenteret af *ægte* delmængder. Inden man kan nå til opgavens nærmest trivielle konstatering, må man dog have forstået opgavens atypiske formulering. I opgaveteksten har jeg valgt kun at bruge ordet "være" i stedet for ordene "være isomorf med". Det er faktisk denne specifikke ordlyd, der er den primære årsag til, at jeg påstår, at eleven må besidde en avanceret forståelse af gruppebegrebet for at kunne besvare opgaven korrekt. Jeg vil her forsøge at forklare, hvorfor jeg på baggrund af mit ordvalg mener at have skabt en opgave, der kan give underviseren en indikation af, om eleverne har indtaget det tredje af Dubinskys udviklingstrin.

Det er min opfattelse, at der er en væsentlig forskel på at kunne dokumentere, at en given gruppe *er isomorf med* en undergruppe og på at kunne betragte en given gruppe, som om den rent faktisk *er* denne undergruppe. Hvis en elev hævder, at $(M, \odot)$ *er isomorf med* en undergruppe i $(G, \otimes)$, betyder det formentlig, at han forestiller sig, at han først kan parre elementerne i M med hver deres element i G, og at han derefter kan vise, at den resulterende G-delmængde udgør en undergruppe i $(G, \otimes)$, hvis Cayleytabel kan sorteres ensartet med tabellen over $(M, \odot)$. Hvis eleven derimod hævder, at $(M, \odot)$ *er* en undergruppe i $(G, \otimes)$, betyder det formentlig, at han ikke behøver at foretage nogen form for oversættelse for at kunne identificere $(M, \odot)$ med en undergruppe af $(G, \otimes)$.

At danne mening ud af formuleringen: "Da må $(M, \odot)$ *være* en undergruppe i $(G, \otimes)$", kræver altså, at man ikke opfatter det som nødvendigt at foretage en oversættelse for at kunne sammenholde strukturen i $(M, \odot)$ med strukturen i en delmængde af $(G, \otimes)$. Dette forudsætter, at ens forståelse af gruppebegrebet er så sofistikeret, at den tillader en at betragte $(M, \odot)$ og $(G, \otimes)$ som sammenlignelige grupper, selvom deres kompositionsregler øjensynligt er forskellige. Husk i denne sammenhæng på, at det netop er kendetegnende for elever, der hænger fast på det andet udviklingstrin, at de kun lader grupper, der er udstyret med den samme kompositionsregel som den fulde gruppe komme i betragtning som undergrupper. (Jf. side 38.) For en elev på det andet udviklingstrin vil udsagnet: "$(M, \odot)$ *er* en undergruppe i $(G, \otimes)$" være absurd. At acceptere en sådan påstand kræver nemlig, at man kan betragte grupperne som *strukturer*, der eksisterer fuldstændig uafhængigt af de konkrete repræsentationer, og dette er i direkte modstrid med den på det andet trin herskende opfattelse af, at grupper er konkrete mængder med en tilhørende, medfødt kompositionsregel. For at forstå opgaveformuleringen må det altså være muligt for eleven, at betragte $(M, \odot)$ og $(G, \otimes)$ som to strukturer, der lever deres liv hævet over det konkrete niveau. I en sådan overordnet anskuelse må man se henover elementniveauet og i stedet forholde sig til strukturerne i deres helhed. At drage mening ud af opgave **M6**'s fjerde formulering forudsætter altså, at man er i stand til at betragte en gruppestruktur som en helhed eller med andre ord, at man har hævet sin forståelse af gruppebegrebet til Dubinskys tredje trin.

At jeg kun modtog fire prøvebesvarelser, med kryds ud for den omtalte svarmulighed vidner om, at hovedparten af eleverne har fundet opgaven svær. At langt de fleste elever har efterladt svarmuligheden blank, tolker jeg som et udtryk for, at mange ikke har kunnet danne mening af formuleringen og derfor slet ikke har kunnet tage stilling til den ellers trivielle opgave. Da jeg formulerede opgaven, var det med tanke på at sikre, at de elever, der ville tilvælge svarmulighed fire, udelukkende ville gøre det af matematiske grunde og ikke på baggrund af en prøvetaktisk tankegang. Ved at tilbyde eleverne tre åbenlyst rigtige svarmuligheder, var hensigten, at jeg ville forsøge at minimere antallet af taktisk begrundede tilvalg af svarmulighed nummer fire. Fordi det unægtelig er sjældent, at samtlige svarmuligheder i en multiple choice-opgave er korrekte, tænkte jeg, at en elev kun ville sætte det fjerde kryds, såfremt hun havde en matematisk grund dertil. At de fire elever, der svarede rigtigt på denne opgave, alle leverede så godt som fejlfrie besvarelser af hele prøvesættet understøtter min formodning om, at deres krydser rent faktisk var velbegrundede, og at de byggede på den netop omtalte sofistikerede forståelse af gruppebegrebet.

13 Tredje analysedel: Elevernes samlede udbytte

Formålet med forløbets afsluttende skriftlige prøve var som tidligere nævnt at teste elevernes samlede udbytte af min undervisning. I appendix C har jeg i to tabeller præsenteret de resultater, som de 21 fremmødte elever opnåede for deres besvarelser af hhv. multiple choice-opgaverne og problemopgaverne. I tabellerne angiver et ettal en korrekt besvaret opgave, mens et nul angiver en fejlagtig eller undladt besvarelse af opgaven. Fordi jeg i opgave **P2c** stillede to spørgsmål, var det her muligt at score enten to, et eller nul point. Rækkefølgen, hvormed elevernes besvarelser indgår i tabellen, modsvarer den rækkefølge, jeg har benyttet til at præsentere elevernes samlede pointhøst hver for sig. Det er derfor muligt at benytte tabellerne til at se, hvordan hver enkelt elev har klaret en given opgave.

Prøven indeholdt også en formuleringsopgave. Fordi det selvsagt er umuligt at sætte en vurdering af besvarelserne af denne opgave på skemaform, vil udbyttet af formuleringsopgaven blive inddraget og behandlet i et separat afsnit til sidst i denne tredje del af analysen. I dette afsnit vil jeg blandt andet fremhæve interessante udsagn fra enkeltstående elever, i et forsøg på at give et indblik i elevernes opfattelse af forløbet.

Den delmængde på seks elever, der ikke mødte op, har jeg vurderet til samlet set at være gennemsnitlig, hvad gruppeteorikundskaber angår. Denne vurdering betyder, at de indhentede 21 besvarelser repræsenterer hele klassen ganske fint.

13.1 Multiple choice-opgaverne

Et hurtigt blik hen over resultatsidens øverste tabel afslører, at eleverne klarede prøvens første del rigtig godt. Ud af de fyrre beslutninger, der skulle træffes undervejs i multiple choice-opgaverne, valgte samtlige elever rigtigt mindst 23 af gangene, og det lykkedes endda for mere end 3/4 af klassen at træffe 30 eller flere rigtige beslutninger. To besvarelser var fuldstændig perfekte, mens tre elever kun havde lavet én, to eller tre fejl. Alt dette medvirkede til, at det gennemsnitlige antal af korrekte beslutninger var så højt som 32,4. Ser man for en stund bort fra opgaverne **M6** og **M10**, blev hver af multiple choice-opgaverne besvaret fuldstændig korrekt af ti eller flere af de 21 elever. Gennemsnittet for de resterende otte opgaver var på 13,1 helt korrekte besvarelser. Opgave **M6** blev dog kun besvaret fuldstændig rigtigt i fire tilfælde, mens antallet af perfekte besvarelser af opgave **M10** var syv. Med undtagelse af den fjerde svarmulighed i opgave **M6**, blev samtlige fyrre beslutninger truffet korrekt af mindst ti elever, og kun i en fjerdedel af tilfældene var der flere end fem elever, der tog fejl.

Efter at have gjort opmærksom på ovenstående observationer, vil jeg lade min interesse samle sig omkring opgaverne **M6** og **M10**. Dette skyldes, at disse to opgaver tilsyneladende var de eneste, der generelt voldte eleverne vanskeligheder. Det kan virke en smule negativt sådan at hæfte sig ved det, der ikke gik så godt, når nu langt størstedelen af prøven blev besvaret så fint. Der er dog som oftest mere nyttig information at hente om elevernes (manglende) forståelser ved at undersøge årsagerne til deres vanskeligheder end ved at dvæle ved de indsigter, som deres korrekte besvarelser indikerer, at de allerede har opnået. Dubinsky bidrager til denne opfattelse, idet han med reference til både Bachelard og Sierpinska skriver, at:

> *(...) the mistakes students make can provide windows through which we can observe the inner workings of a student's mind as he or she engages in the learning process.*[37]

Eftersom jeg allerede har beskæftiget mig en del med opgave **M6**, vil jeg her nøjes med at knytte et par kommentarer, der kan yde bistand til nogle af de tidligere fremsatte påstande. Et nærstudium af elevernes besvarelser har bevirket, at jeg har gjort mig følgende tanker.

- At det kun var de allerbedste elever, der klarede opgaven, bestyrkede min tro på, at denne opgave forudsatte en sofistikeret forståelse af gruppebegrebet. Denne tro blev yderligere forstærket af, at hele femten af de enogtyve elever korrekt havde sat kryds ud for samtlige af opgavens tre første svarmuligheder. Det synes altså netop at være i forbindelse med den fjerde svarmulighed, at elevernes problemer opstod.

- At hverken Emilie eller Pingnan havde tilvalgt den fjerde svarmulighed, kan tolkes som en understøttelse af mine tidligere påstande om, at ingen af disse elever opnåede at få fuldbragt deres forståelse af gruppebegrebet i løbet af mit undervisningsforløb. At

[37] [2], p. 295

både Karlas og Kristians besvarelser af opgave **M6** er at finde blandt de fire fuldstændig korrekte gør til gengæld, at jeg i endnu højere grad mener at have belæg for at påstå, at *disse* to elever nåede at fuldbyrde *deres* konstruktion af gruppebegrebet.

- At antallet af korrekte besvarelser var så lavt som fire, har bevirket, at jeg i efterrationaliseringen ikke helt har kunnet afvise, at andre og mere jordnære aspekter har haft indflydelse på det magre resultat. Det er eksempelvis ikke utænkeligt, at nogle af elevernes forståelse af undergruppebegrebet stadig har været så ufuldstændig, at de ikke har medregnet den fulde gruppe som en af gruppens undergrupper. I sådanne tilfælde har den begrænsende faktor formentlig været, at elevernes aktive delmængdebegreb udelukkende har omfattet de ægte delmængder. For en elev med denne mangelfulde forståelse vil observationen af, at $(M, \odot)$ og $(G, \otimes)$ har lige mange elementer være nok til, at han fremover vil forkaste enhver påstand om, at $(M, \odot)$ skulle *være* eller for den sags skyld *være isomorf med* en undergruppe i $(G, \otimes)$. For denne elev består en gruppes undergrupper nemlig udelukkende af ægte delmængder, og M kan hverken *være* eller *være isomorf med* en sådan, når den har lige så mange elementer som G. Har eleven derfor svaret ja til den første svarmulighed, vil det være ulogisk for ham også at tilvælge den fjerde mulighed - uanset om han er i stand til at betragte grupper som strukturer, der er uafhængige af deres konkrete repræsentationer.

Besvarelserne af opgave **M10** forstærker mistanken om, at flere af eleverne ikke var blevet fuldt fortrolige med definitionen af undergruppebegrebet. Som det fremgår af resultatarket, er antallet af fuldstændig korrekte besvarelser af denne opgave nemlig nede på syv. Elevernes forkerte beslutninger er dog ikke her centreret om en enkelt af opgavens svarmuligheder men derimod fordelt meget ligeligt over de fire valg. Det er tankevækkende, at den korrekte svarmulighed er den, som færrest elever har tilvalgt. Det skal dog i den sammenhæng siges, at har man tilvalgt bare én af de andre muligheder, vil det være ulogisk også at sætte kryds ud for den korrekte svarmulighed. Når jeg sammenholder opgaveformuleringen, med de bevarelser jeg modtog, synes følgende årsager til, at eleverne leverede knap så gode **M10**-besvarelser at træde frem.

- Jeg tror, at nogle elever enten ikke helt har forstået betydningen af matematikordet *tilstrækkelig*, eller også har de bare ikke hæftet sig nok ved dette ord. De tre første påstande udsiger alle *nødvendige* kriterier for, at $(H, \otimes)$ kan være en undergruppe i $(G, \otimes)$, men ingen af dem er altså tilstrækkelige i sig selv. Ikke desto mindre er alle disse tre påstande plausible valg, når der er tale om undergrupper. En elev, der ikke helt har forstået opgaven, vil derfor være tilbøjelig til at tilvælge en eller flere af disse tre og følgelig efterlade den fjerde blank. Min påstand er altså, at det ikke alene er den manglende forståelse af undergruppedefinitionen, der har givet eleverne problemer, men at de mange fejl også skyldes, at eleverne ikke kan kende forskel på nødvendige og tilstrækkelige kriterier. Tolv af de enogtyve besvarelser kan understøtte denne påstand.

- For tre af klassens meget dygtige elever, vil jeg foreslå en analog årsag til, at deres besvarelser af opgave **M10** slog fejl. Karla, Nanna og Eddie fik alle 32 eller flere point i multiple choice-opgaverne. For Karla var fejlene i opgave **M10**, faktisk de eneste hun begik i hele prøven. Fælles for de tre elevers besvarelser var, at de i **M10** havde tilvalgt svarmulighed et og to og forkastet de to sidste muligheder. Hvis man antager, at H er en endelig delmængde af G, udgør de to første svarmuligheder tilsammen et tilstrækkeligt kriterium for, at $(H, \otimes)$ kan være en undergruppe i $(G, \otimes)$. Eleverne kender kun til endelige grupper, så for dem vil summen af betingelserne i svarmulighed et og to altså fremstå som tilstrækkelig. Med baggrund heri påstår jeg, at de tre elevers problemer kan være opstået fordi, de ikke helt har forstået opgaveformuleringen, og derfor ikke har vurderet udsagnenes tilstrækkelighed isoleret hver for sig. Specielt Karla har tidligere i forløbet demonstreret, at hun har fint styr på undergruppebegrebet (Jf. dialogen på side 95). Karla svarer tilmed korrekt på alle andre prøvespørgsmål vedrørende undergrupper. Jeg synes derfor at have et rimeligt belæg for at sige, at Karlas fejl ikke skyldtes en manglende forståelse af undergruppebegrebet, men at hendes fejlslutning blev foretaget på baggrund af et rationale, som svarer til det ovenstående.

Det ville unægtelig have været interessant at forfølge alle disse påstande ved at stille de pågældende elever nogle opklarende spørgsmål i forbindelse med en række efterfølgende interviews. For rigtig at kunne tillægge påstandene vægt vil jeg endda hævde, at en sådan opfølgning i virkeligheden er påkrævet. Jeg har tidligere i rapporten forklaret, hvorfor det desværre ikke var muligt at gennemføre sådanne oplysende samtaler. Jeg må derfor lade påstandene stå uimodsagte hen og fortsætte denne tredje analysedel med en række overvejelser, der hidrører fra elevernes besvarelser af prøvens problemopgaver.

13.2 Problemopgaverne

Et gensyn med resultatarket afslører, at også problemopgave-besvarelserne generelt var meget flotte. Ser man bort fra det sidste spørgsmål i opgave **P2c**, blev alle spørgsmål i prøvens anden del besvaret korrekt af mindst femten af de enogtyve elever. Der blev afleveret fem fuldstændig korrekte besvarelser af problemopgaverne, og i otte besvarelser, fandt jeg kun fejl i det netop omtalte spørgsmål. Med samme begrundelse som i afsnittet ovenfor, vil jeg i dette analyseafsnit koncentrere mig om at beskrive et par mulige årsager til, at det netop var dette spørgsmål, der voldte eleverne problemer.

Samtlige deltagere pånær én løste opgaverne **P1** og **P2a** korrekt. Dette har bevirket, at så godt som alle eleverne har haft de fornødne resultatmæssige forudsætninger for at besvare spørgsmålene i opgave **P2c**. Havde en elev ikke kunnet løse **P2a**, ville han dog stadig have været i stand til at afvise, at $(G, \odot)$ skulle være isomorf med $(\mathbb{D}_3, \otimes)$ udfra de i opgaven givne oplysninger. Dette kunne eksempelvis være sket ved at konstatere, at både $S_| \otimes S_| = D_0$ og $S_/ \otimes S_/ = D_0$, mens $(G, \odot)$ kun har et enkelt element af orden to nemlig g_4. (Jf. korrollaret på side 17)

At de to grupper i opgave **P2** *ikke* er isomorfe, var der femten elever, der konstaterede, men der var kun fem elever, der kunne udpege en undergruppe i $(G, \odot)$ isomorf med $(H, \times)$. Dette var dog ganske forventeligt. Da jeg i sin tid formulerede prøven, var det nemlig min hensigt, at det sidste spørgsmål i prøven skulle være sværere end de øvrige. Når opgaven levede op til forventningerne, og rent faktisk gav hovedparten af eleverne problemer, var en af årsagerne givetvis, at den efterspurgte undergruppe ikke bestod af den fulde gruppes tre første elementer men derimod af g_1, g_3 og g_5. Jeg tror nemlig, at en del af eleverne kun har undersøgt, om 3×3-deltabellen i det øverste venstre hjørne af G-tabellen var isomorf med tabellen over $(H, \times)$, og at de derefter har brugt denne undersøgelses negative udfald til at konkludere, at den ønskede undergruppe ikke findes i $(G, \odot)$. Denne påstand understøttes af, at vi i timerne inden prøven kun i et enkelt tilfælde havde betragtet en undergruppe, hvis deltabel ikke var placeret i det øverste venstre hjørne af den fulde gruppes tabel. (Jf. den røde deltabel i lærebogen på side 132.) Det er derfor både plausibelt og meget forventeligt, at hovedparten af eleverne mødte til prøven med en opfattelse af, at en given gruppes undergrupper udelukkende er at finde som sammenhængende deltabeller placeret i det nord-vestlige hjørne af den fulde gruppes tabel.

En anden mulig årsag til, at relativt mange elever afleverede forkerte besvarelser af opgave **P2c**, kunne være, at nogle elever har overvurderet konsekvenserne af den konstaterede non-isomorfi mellem $(G, \odot)$ og $(\mathbb{D}_3, \otimes)$. Det er nemlig ikke utænkeligt, at visse elever har haft en opfattelse af, at det er umuligt for to ikke-isomorfe grupper, at have den samme gruppe som undergruppe. For sådanne elever vil en forkert besvarelse af opgave **P2c** faktisk være en logisk følge af elevernes korrekte besvarelser af de foregående problemopgaver. Som nævnt modtog jeg otte besvarelser, der kun indeholdt fejl ved det sidste spørgsmål. Det skulle ikke undre mig, om der blandt ophavsmændene til disse besvarelser fandtes elever, der på grund af den netop beskrevne misforståede opfattelse af isomorfibegrebet, slet ikke overvejede om den efterspurgte undergruppe kunne eksistere endsige om den kunne være udgjort af andre elementer end g_1, g_2 og g_3.

Besvarelserne af opgave **P2c** efterlader altså i lighed med besvarelserne af **M6** og **M10** et indtryk af, at nogle elever stadig havde en ufuldstændig forståelse af undergruppebegrebet. For denne del af eleverne var begrebet om undergrupper tilsyneladende stadig fast knyttet til disses optræden som deltabeller i den fulde gruppes tabelrepræsentation, og elevernes forståelse synes i høj grad at være dikteret af de eksempler, som de tidligere havde set. For andre elever synes en overvurderet opfattelse af isomorfibegrebet at have været blokerende for overvejelser, der kunne have ført dem til en korrekt besvarelse af opgaven. Den korrekte opfattelse af, at der for to isomorfe grupper findes en én-til-én-korrespondance mellem gruppernes undergrupper, kan nemlig tænkes at være blevet fejlagtigt negeret til en opfattelse af, at to non-isomorfe grupper ikke kan have nogen fælles undergrupper. Elevargumentet for denne påstand kunne lyde, at hvis to isomorfe grupper har *alle* undergrupper til fælles, må to ikke-isomorfe grupper have *ingen* undergrupper til fælles. For en elev med denne opfattelse vil observationen af, at $(G, \odot)$ og $(\mathbb{D}_3, \otimes)$ ikke er isomorfe være nok til at ødelægge muligheden for, at de begge skulle indeholde en undergruppe isomorf med $(H, \times)$.

For ikke at trætte læseren unødigt, vil jeg nøjes med endnu engang at nævne, at en række opfølgende elevinterviews kunne have medvirket til at be- eller afkræfte mine påstande, og jeg vil også undlade at ærgre mig over, at omstændighederne ikke tillod mig at gennemføre dem. I stedet vil jeg fortsætte ufortrødent til det næste afsnit, hvor jeg vil inddrage citater fra elevernes besvarelser af formuleringsopgaven. Dette sker blandt andet med henblik på at udnytte elevernes egne ord til at viderebringe deres oplevelse og vurdering af forløbet. Afsnittet har i denne fase karakter af en voxpop, idet jeg vil undlade at kommentere og fortolke på elevernes udsagn angående deres opfattelse af forløbet. Inden jeg når så vidt, vil jeg dog give et eksempel på, hvordan besvarelserne af formuleringsopgaven kunne have været brugt til at optimere den videre undervisning, såfremt jeg havde haft flere timer til rådighed eller havde fået lejlighed til at gentage forløbet med andre elever.

13.3 Formuleringsopgaverne

Som beskrevet i afsnit 9.6 var et af formålene med formuleringsopgaven at opspore eventuelle fejlforståelser hos eleverne, som deres besvarelser af de mere traditionelle prøvespørgsmål ikke på samme måde ville synliggøre. En multiple choice-opgave eller en problemopgave kan afsløre, at en elev ikke har en fuldstændig korrekt forståelse af eksempelvis undergruppebegrebet, men den vil formentlig ikke kunne afsløre, hvordan eleven forstår begrebet, og dermed ikke på samme måde som en formuleringsopgave give læreren information om, hvordan den konstaterede fejlforståelse kan bekæmpes fremadrettet. Tanken var, at eventuelle udbredte fejlforståelser i formuleringsopgave-besvarelserne kunne informere læreren om, hvor i forløbet undervisningens budskab ikke var trængt korrekt igennem, og tilmed give underviseren et praj om hvilken form for ekstra indsats, der var påkrævet for at få alle elever med. Selvom de 21 elevers besvarelser i langt højere grad demonstrerede korrekte forståelser end forkerte, indeholdt tre af dem formuleringer, der udstillede de pågældende elevers ufuldstændige forståelse af undergruppebegrebet.

Ida J.: En undergruppe vil altid have færre elementer end selve gruppen.

Ida C.: En undergruppe er et mindre udsnit af en gruppe.

William: Jeg har lært, at en undergruppe kan være isomorf med en gruppe, selvom at antallet af elementer er forskelligt.

Alle tre citater efterlader mig med en stærk mistanke om, at eleverne her ikke inkluderer den fulde gruppe blandt en gruppes mulige undergrupper. Sammenholder man dette med min tidligere påstand om, at elevernes problemer med opgave **M6** blandt andet kunne skyldes denne upræcise forståelse af undergruppebegrebet, tegner der sig et billede af, at flere elever har brug for en præciserende forklaring af netop dette aspekt af undergruppebegrebet. Dette er ikke voldsomt overraskende, eftersom min indførelse af undergruppebegrebet i det femte modul var temmelig kortfattet.

Med dette eksempel på formuleringsopgavens potentielle formative funktion, vil jeg afslutte analysen af mit undervisningsforløb. Som lovet vil jeg ende dette afsnit med at lade eleverne selv komme til orde. Jeg vil nedenfor viderebringe en række af deres tilkendegivelser om forløbet i sin helhed. De efterfølgende elevkommentarer fremkom alle spontant, eftersom eleverne på intet tidspunkt var blevet opfordret til at udtrykke deres mening om forløbet.

Karla: Jeg har set konkrete eksempler på gruppeteorien (terningen, topmødet). Det hjalp med at få en bedre forståelse af hvad gruppeteori er, end hvis vi havde kigget på en masse skemaer.

Niels: Du virker som en lærer med masser af potentiale, og de gange jeg har været her syntes jeg, at din måde at forklare tingene på har været eminent. Jeg er ked af, at jeg har misset så mange timer.

William: Jeg har fået et fornyet indtryk af abstrakt matematik generelt.

Arnela: Jeg har lært, at gruppeteori er meget svært.

Michael: Jeg er ikke fan af abstrakte tal, selvom det er så smart, som det nu er.

Jacob: Jeg vil ikke sige, at jeg er blevet en Galois, men jeg har haft et pi$\cdots$ fedt forløb.

14 Konklusion

Da jeg søsatte mit specialeprojekt, var min ambition at udvikle et alternativt og didaktisk velbegrundet undervisningsforløb omhandlende abstrakt gruppeteori med henblik på at afhjælpe de forståelsesproblemer, som en række didaktikere har påvist, ofte er at finde blandt studerende, der har fulgt den traditionelle undervisning. Det var hensigten, at min undervisning skulle lede eleverne til en solidt forankret forståelse af det abstrakte gruppebegreb samt af undergruppebegrebet. En væsentlig sidedagsorden var, at eleverne via deres arbejde med gruppeteorien skulle opnå deres første erfaringer med den abstrakte matematik. Selvom min specialerapport ikke har kunnet levere et fuldstændigt bevis for, at mit forløb opfylder ovenstående ambition bedre end den almindelige undervisningsform, vil jeg her ved projektets afslutning alligevel mene, at jeg er nået tørskoet i land.

I min rapport har jeg beskrevet, hvordan tråde fra matematikhistorien, læringsteorien og matematikdidaktikken blev spundet sammen omkring projektets matematiske ledetråd for tilsammen at kunne udgøre den røde tråd i et teoretisk velfunderet undervisningsdesign. Jeg har også forklaret, hvorfor jeg i modsætning til den traditionelle *top-down*-algebraundervisning besluttede, at min undervisning skulle følge en *bottom-up*-strategi. I forlængelse af denne beslutning beskrev jeg i kapitel ni, hvordan eleverne indledningsvis blev ledt igennem tre konkrete gruppeeksempler, der skulle grundlægge et konkret vidensfundament, fra hvilket eleverne kunne tage deres afsæt, når de efterfølgende blev bedt om at foretage den tilsigtede abstraktion af gruppebegrebet. Tanken var herefter, at en bevidsthed om selve abstraktionsprocessen ville hjælpe eleverne til at opfatte en gruppe som et samlende og generaliserende begreb, der med en vis naturlighed og nødvendighed var blevet indført som en anvendelig overbygning til den betragtede, omstændelige, konkrete matematik.

Jeg har efterfølgende beskrevet, hvordan min undervisning blev iscenesat med henblik på at engagere så mange elever som muligt og refereret, hvordan eleverne til fulde opfyldte deres del af forpligtelserne i forløbets ret forskelligartede didaktiske kontrakter. I den netop afsluttede analyse af undervisningsforløbet har jeg på baggrund af elevernes prøvebesvarelser argumenteret for, at klassens faglige udbytte generelt må siges at have været meget tilfredsstillende. At Karla og Niels i formuleringsopgaven spontant giver udtryk for at have værdsat bottom-up-strategien, og at William oplever at have fået et fornyet indtryk af den abstrakte matematik, bidrager til min gode fornemmelse af, at jeg i det realiserede forløb rent faktisk lykkedes med mit projekt.

Dermed ikke være sagt, at jeg betragter mit undervisningsforløb som færdigudviklet og uforbedreligt. Jeg har allerede beskrevet, hvordan den praktiske udførelse af undervisningen synliggjorde, at rollefordelingen i gruppearbejderne og oplægget til den videnskabelige debat burde optimeres, og jeg har i afsnit 8.5 på side 57 ganske kort nævnt, hvordan mit forløb kan udvides til også at omfatte teorien om normaldelere, sideklasser og kvotientgrupper. Jeg er ligeledes godt klar over, at den præsenterede analyse af forløbet ikke er altomfattende. Jeg har gentagne gange i rapporten beklaget mig over, at jeg ikke havde mulighed for at indhente de fornødne interviewdata til rigtig at kunne underbygge mine påstande om elevernes øjeblikkelige opfattelser af de i undervisningen indgående matematiske begreber. Det er klart, at en inddragelse af sådanne data ville kunne forbedre undersøgelsens troværdighed. Fordi jeg valgte, at tyngden i specialet skulle lægges på dets teoretiske del, blev jeg i den efterfølgende analyse nødt til at se bort fra nogle ellers interessante emner. Som det allersidste i denne afhandling vil jeg gøre opmærksom på to aspekter, som jeg opfatter som meget relevante i forbindelse med en undersøgelse som min, men som jeg på grund af specialestudiets begrænsede omfang indtil nu har valgt at forbigå i min rapport.

Selvom besvarelserne af den skriftlige prøve generelt vidner om et godt fagligt udbytte, var det ikke alle elever, der kom glat igennem opgaverne. Spændvidden i besvarelsernes kvalitet strækker sig faktisk fra de helt perfekte besvarelser til besvarelser, der nok ikke ville have bestået en eksamen. Elevernes faglige niveauer efter de fem modulers undervisning var altså øjensynligt ret forskellige. Dette var nu ikke så overraskende, ligesom det heller ikke forbløffede mig, at elevernes oplevelse af forløbet var så forskellige, som eksempelvis Arnelas, Michaels og Jacobs citater ovenfor giver udtryk for. Denne mangfoldighed gør, at læreren må overveje, hvordan han kan *differentiere* den videre undervisning med henblik på at hjælpe og udfordre samtlige elever tilstrækkeligt. Såfremt forløbet tænkes at skulle genanvendes, bør læreren også benytte den indhentede information til at overveje, hvorvidt det afviklede forløb kan omstruktureres til bedre at understøtte de svageste elevers læring. Det er specielt overvejelser af den sidstnævnte slags, der ville have været relevante for mit projekt.

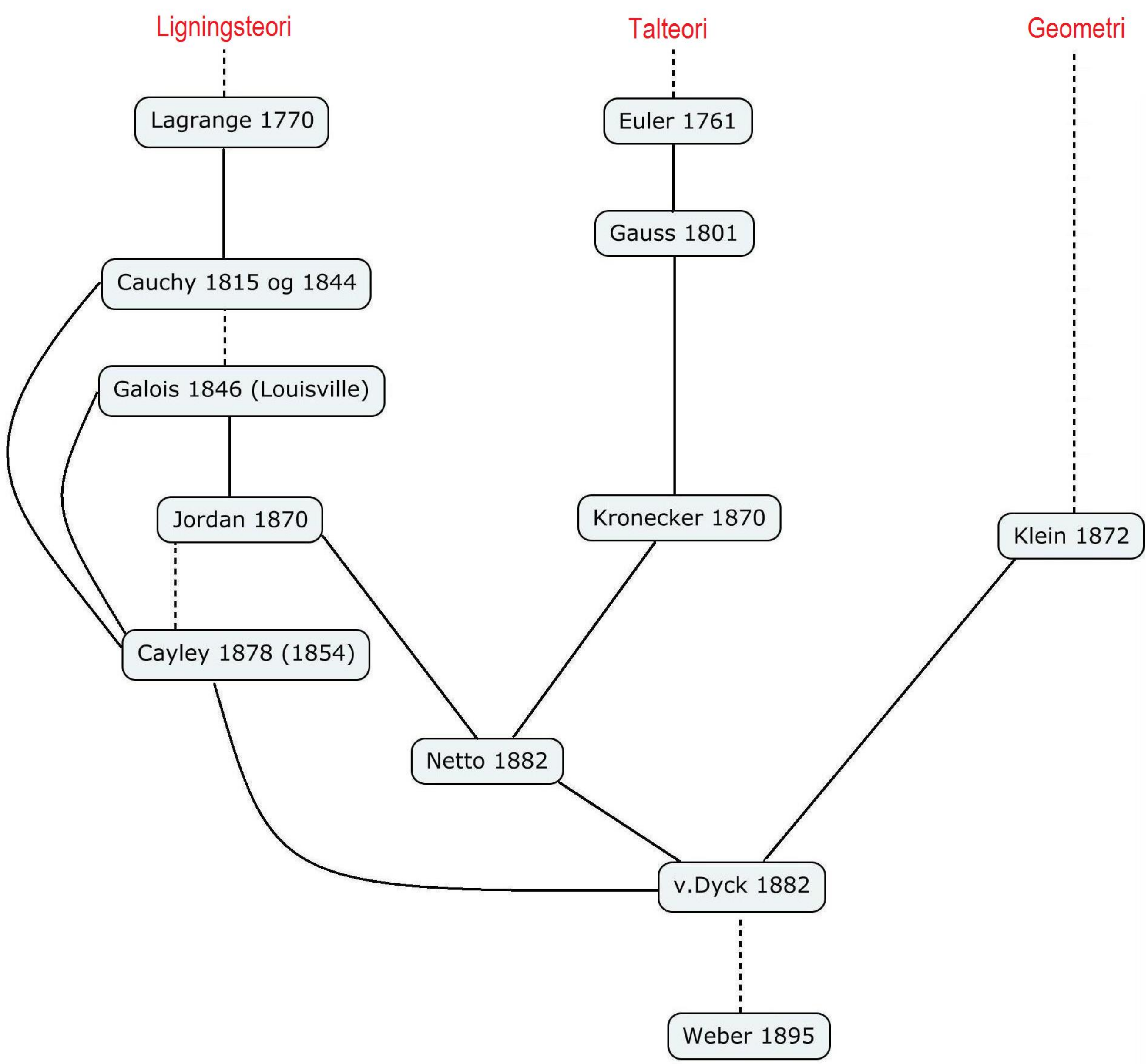
For at det krævende didaktiske designarbejde kan opfattes som lønsomt, må det frembragte undervisningsforløb kunne afvikles succesfuldt mere end blot en enkelt gang. Med til et fuldstændigt didaktisk design hører derfor overvejelser vedrørende forløbets *reproducibilitet*. Et godt didaktisk design eksisterer i en vis forstand uafhængigt af læreren og eleverne. Derfor må et godt designet forløb principielt kunne gennemføres gentagne gange og i forskellige konstellationer, uden at denne variation får nævneværdig indflydelse på udfaldet. Betragtes mit forløb, synes overvejelser omkring dets reproducibilitet specielt at være relevante i forbindelse med den videnskabelige debat. Den uforudsigelighed, der præger denne undervisningsform, gør at læreren inden timerne må være meget bevidst om sine eventuelle handlingers indflydelse på elevernes udbytte af situationen. Det synes urimeligt at forvente, at man kan lede en videnskabelig debat til altid at medføre et forudbestemt resultat. Men for at kunne opretholde et forventningsniveau til det faglige udbytte, der kan berettige brugen af denne undervisningsform, må man forsøge at gøre sig klart hvilke mekanismer, der er styrende for, at udfaldet nærmer sig det ønskede. Læreropgaven består herefter i at sørge for så vidt muligt at iværksætte disse mekanismer ensartet fra gang til gang. Dersom mit undervisningsforløb skulle have været benyttet igen, ville eksplicitte overvejelser om forløbets reproducibilitet unægtelig have været på sin plads.

Ovenstående aspekter peger i retning af udvidede undersøgelser, der kunne tjene til at fjerne de påpegede elementer af usikkerhed, som min rapport efterlader omkring mine dragede konklusioner og kvaliteten af mit design. Det ville have været interessant at få lov at revidere forløbet og udføre det igen, ligesom det ville have været spændende at fortsætte undervisningen af 2.X med den mere avancerede gruppeteori. Disse arbejder må dog henlægges til et senere projekt, eftersom jeg nødvendigvis må afslutte denne rapport her.

Del IV

Appendices

A Diagram: Det abstrakte gruppebegrebs historie

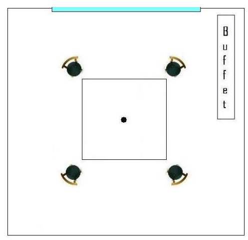


B Lærebogsmateriale

B.1 Europæisk topmøde

For at drøfte storpolitik samles statsoverhovederne for fire af Europas stormagter til et topmøde. For Tyskland er det Angela Merkel. For Frankrig er det Nicolas Sarkozy, mens Rusland og Storbritannien sender henholdsvis Dmitri Medvedev og Gordon Brown.

Mødet skal holdes i slottets riddersal omkring et kvadratisk bord, og da forhandlingerne forventes at blive langstrakte, vil en buffet stå til deltagernes frie afbenyttelse. Salen med det store panoramavidue ser således ud fra oven:

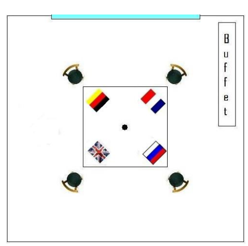


Tjenerne, der skal dække bordet, kender til mødets vigtighed og tænker meget over borddækningen. De har dog ikke frie hænder. De fire antikke stole er nemlig meget skrøbelige og kan derfor ikke flyttes. Dette betyder, at kuverterne lidt atypisk må anrettes ved bordets hjørner. Desuden står bordets midtersokkel fast placeret på salens gulv.

På grund af gammelt nag kan Storbritannien *ikke* sidde ved siden af Frankrig. Det er derfor ufravigeligt, at Sarkozy sidder mellem Merkel og Medvedev.

Opgave 1a: *Indtegn de under disse betingelser tilladte borddækninger på svararket. Benyt eventuelt modellen til at placere flagene.*

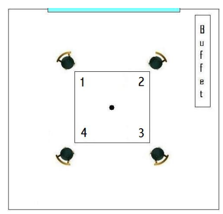
Tjenerne beslutter, at en ny bordplade skal specialfremstilles, sådan at nationernes flag smukt kan indlejres i hjørnerne. Da tjenerne modtager det nye bord fra den royale hofsnedker, sidder flagene placeret som på billedet nedenfor. Vi vil fremover betragte og benævne denne borddækning som *udgangsopstillingen*.



For at komme fra den ene borddækning til den anden må tjenerne skrue flagene ud af bordpladen, flytte dem til en anden position for derefter at skrue dem fast på bordet igen - et værre pillearbejde.

Enhver sådan handling, der ændrer på flagenes placering og dermed på borddækningen, vil vi fremover kalde en *permutation*. Der er ikke noget i vejen for at lade nogle flag blive siddende, så længe man overholder kravene til bordækningen. Det er lidt specielt, men man betragter også det at lade *alle* flagene sidde som en permutation. Alternativt kan denne permutation betragtes som handlingen, hvor man skruer alle flagene løs, og sætter dem i bordet igen på det samme sted.

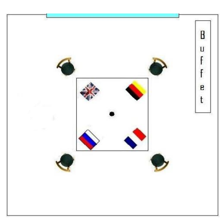
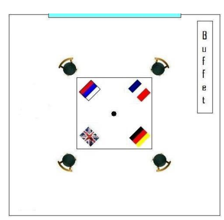
Vi skal nu undersøge disse permutationer nærmere. Det er derfor bekvemt at have en fast notation til rådighed. Til det formål har vi brug for at nummerere pladserne omkring bordet. Dette er gjort på illustrationen nedenfor:



Vi vil her give en række eksempler på den såkaldte *tabelnotation*, som vi vil bruge i det videre forløb. Med tabellerne:

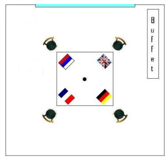
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

vil vi betegne de permutationer, der f.eks. flytter flagene fra udgangsopstillingen, til de respektive opdækninger nedenfor.

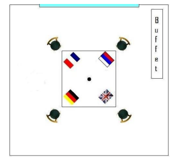



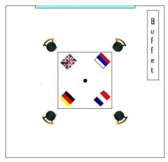
I tabelnotationen for permutationer, angiver man altså på anden rækkes første plads den position som flaget i position 1 skal flyttes til. På anden rækkes anden plads noteres den position flaget i position 2 skal flyttes til. Osv.

Denne notationsform kan sagtens benyttes for permutationer, der anvendes på en opdækning, der er forskellig fra den i udgangsopstillingen. På tegningen nedenfor er vist to eksempler på dette.

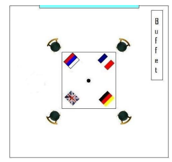


$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}}$$

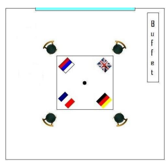




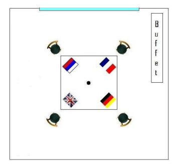
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}}$$

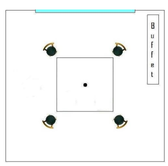


Opgave 1b: *Gør nedenstående diagrammer færdige:*

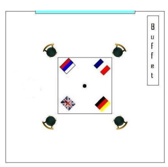


$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}}$$

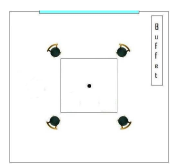


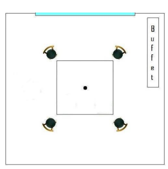


$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}}$$

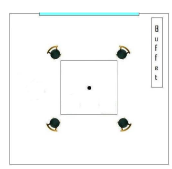


$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}}$$





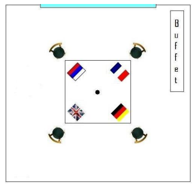
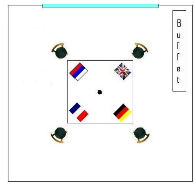
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}}$$



Betragt nok en gang mængden af tilladte opdækninger fra ***Opgave 1a***. Lad $\mathbb{P}$ betegne mængden af permutationer, der kan permutere flagene fra udgangsopstillingen til en vilkårlig tilladt opdækning.

Opgave 1c: *Udfør om nødvendigt permutationerne i* $\mathbb{P}$ *på bordmodellen og angiv dem i tabelnotation på svararket.*

Tjenerene er i tvivl og prøver mange muligheder. På et tidspunkt er bordet dækket som på billedet til venstre nedenfor:

Opgave 1d: *Udpeg i $\mathbb{P}$ den permutation, der har bragt borddækningen fra udgangsopstillingen til den venstre opdækning, og udpeg - igen i $\mathbb{P}$ - den permutation, der fra denne opdækning, efterlader bordet dækket som på billedet til højre ovenfor. Kunne tjenerne have nået til denne højre opdækning fra udgangsopstillingen via blot en enkelt permutation fra $\mathbb{P}$? Hvis ja, hvilken?*

At udføre to permutationer umiddelbart efter hinanden vil vi kalde at *sammensætte* de to permutationer. Vi vil notere sammensætningen af to permutationer ved hjælp af symbolet $\circ$. Eksempelvis vil sammensætningen af to af de ovenfor omtalte permutationer noteres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at det er permutationen til højre i denne notation, som skal udføres først, og at permutationen til venstre naturligvis skal udføres på den opdækning, som den højre permutation efterlader bordet i.

Opgave 1e: *Hvad mon der menes med*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Udfør hver især tre sammensætninger af to vilkårlige permutationer fra $\mathbb{P}$, og konstatér, at sådanne sammensætninger altid giver en permutation fra $\mathbb{P}$. Prøv, om I kan udføre sammensætningerne uden brug af modellen.

Opgave 1f: *Gør de otte diagrammer på svararket færdige, og eftervis derved, at det fra en hvilken som helst af de tilladte opdækninger er muligt at komme tilbage til udgangsopstillingen ved brug af en enkelt permutation fra $\mathbb{P}$.*

At ændre på flagenes position er som sagt et kedeligt pillearbejde. For at undgå for meget nipseri, går tjenerne nu mere analytisk til værks. De opskriver derfor en tabel, der for vilkårlige to af de tilladte permutationer i $\mathbb{P}$ angiver sammensætningen af de to permutationer.

Opgave 1g: *Udfyld den tomme tabel på svararket med sammensætningerne af elementerne i $\mathbb{P}$. (Del gerne rækkerne i tabellen ud mellem gruppens medlemmer!)*

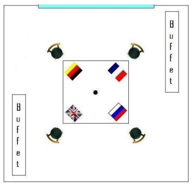
Tjenerne får fra Paris besked på, at charmøren Sarkozy har forlangt at have Angela Merkel som sin borddame. Han kan stadig ikke sidde ved siden af Gordon Brown, så derfor må han fortsat placeres mellem Merkel og Medvedev, og altså med Merkel til højre for sig.

Opgave 1h: *Opskriv på svararket de permutationer, der kan føre bordet fra udgangsopstillingen til enhver af de nu færre tilladte borddækninger. Kald denne delmængde af $\mathbb{P}$ for $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1}$, og lav en tabel, der angiver sammensætning for vilkårlige to af disse permutationer.* (*Hint: Brug tabellen fra Opgave g*)

Det forlyder, at buffeten kommer til at byde på delikate frølår, og da dette kommer Paris for øre, udsender de straks et ønske om, at Sarkozy kommer tættest på buffeten. Efterkommes dette, vil han droppe kravet om en borddame.

Opgave 1i: *Se bort fra Sarkozys borddameønske, men ikke hans nag til englænderne, og opskriv på svararket de mulige permutationer, der placerer Sarkozy tættest på buffeten. Kald denne delmængde af $\mathbb{P}$ for $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_2}$, og opskriv en tabel over sammensætning af disse permutationer.*

Fra London indløber ønsket om, at også Brown bliver placeret tættest på buffeten. Brown har nemlig tidligere lavet alvorlige fejltagelser - efter sigende på grund af en tom mave. Den eneste mulighed for, at både Brown og Sarkozy kan sidde tættest på maden, er, at tjenerne anretter to ens buffeter. Riddersalen med bordet i udgangsposition kommer derfor til at se ud som følger:



Opgave 1j: *Opskriv på svararket de permutationer, der fra udgangsopstillingen giver en borddækning, hvor Sarkozy og Brown begge sidder tæt på en af buffeterne. Kald denne delmængde af $\mathbb{P}$ for $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3}$, og opskriv en tabel over sammensætning af disse permutationer.*

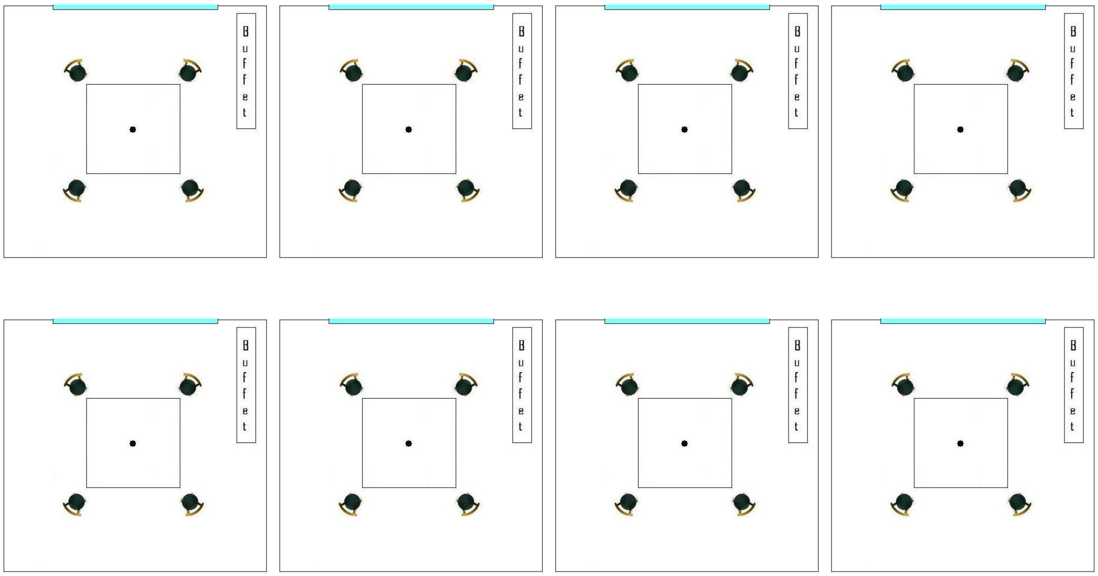
Tjenernes trængsler synes aldrig at høre op. For ikke at virke underlegne vil tyskerne også stille krav til borddækningen. Angela Merkels embedsmænd forlanger derfor, at hun bliver placeret på en af de to viduespladser. Vi ser nu bort fra de to herrers buffetønsker og Sarkozys borddameønske. Frankrig kan stadig ikke sidde ved siden af Storbritannien.

Opgave 1k: *Opskriv på svararket de tilladte permutationer, der fra udgangspositionen placerer Merkel på en vinduesplads. Kald denne delmængde af $\mathbb{P}$ for $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}$, og lav en tabel over sammensætning af sådanne permutationer. Hvordan adskiller denne tabel sig fra tabellerne i* ***Opgave 1h, 1i*** og ***1j****?*

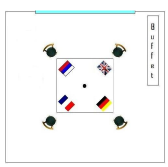
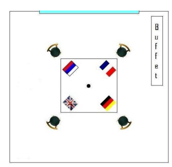
Russerne møder til topmødet med ambitioner om at opnå politiske resultater, og de er derfor fuldstændig ligeglade med deres placering ved bordet.

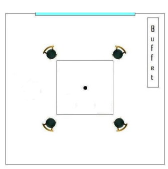
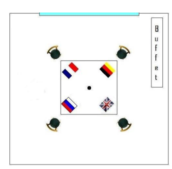
B.1.1 Svarark: Europæisk Topmøde

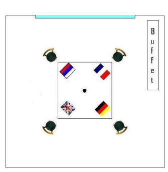
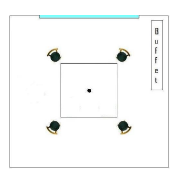
Opgave 1a:

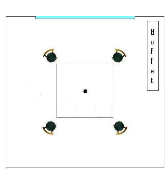
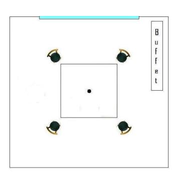


Opgave 1b:


$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & & & \end{pmatrix}}$



$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}}$


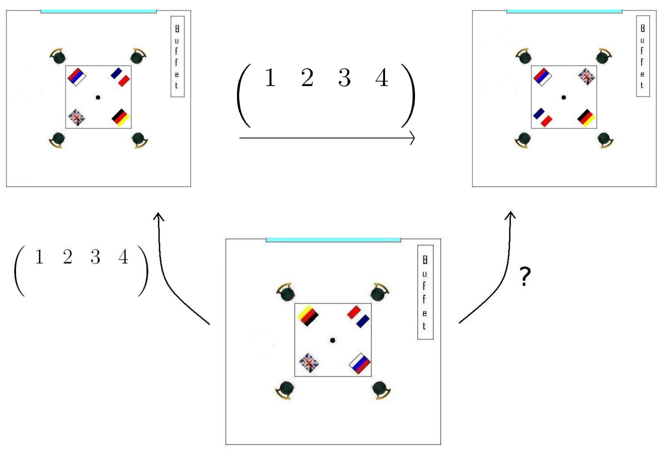

$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}}$



$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}}$


Opgave 1c:

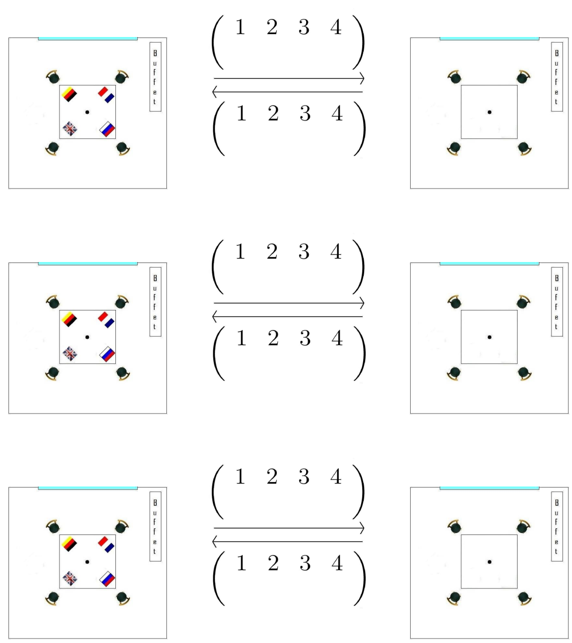
$$\mathbb{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\}$$

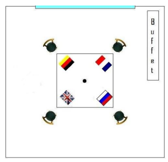
Opgave 1d:



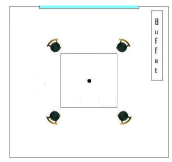
Opgave 1e: Besvar venligst ***Opgave 1e*** på bagsiden af dette svarark.

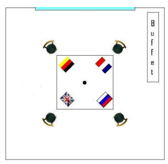
Opgave 1f:



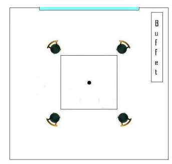


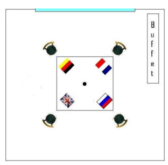
$$\overset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$$



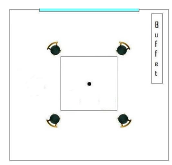


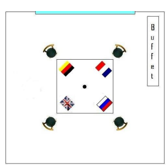
$$\overset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$$



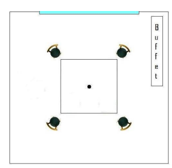


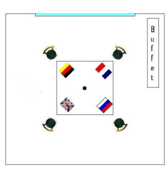
$$\overset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$$



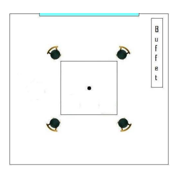


$$\overset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$$





$$\overset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$$



Opgave 1g: Tabellen skal udfyldes som følger: $\color{green}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}} \circ \color{red}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}} = \color{blue}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}}$

$(\mathbb{P}, \circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$

Opgave 1h: $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\}$

$(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1}, \circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$

Opgave 1i: $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\}$

$(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_2}, \circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$

Opgave 1j: $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\}$

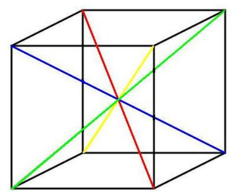
$(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3}, \circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$

Opgave 1k: $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\}$

$(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}, \circ)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$

B.2 Hexaederets rumdiagonaler

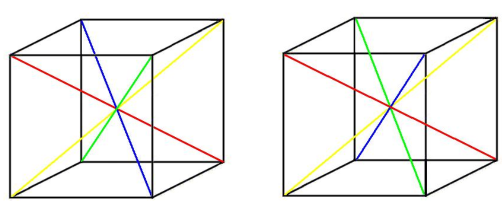
Et hexaeder er et regulært sekssidet polyeder - måske bedre kendt som en terning. En terning har otte hjørner. En rumdiagonal er et linjestykke, der forbinder to sådanne hjørner. Der findes altså **fire** rumdiagonaler i en terning. På billedet nedenfor ses en terning med de fire rumdiagonaler indtegnet i forskellige farver.



Benyt den kvadratiske ramme på modellen, og placér terningen inden for denne ramme i samme position som på billedet ovenfor. Vi vil betragte denne position som terningens udgangsposition. Placér gerne en label, så I altid nemt kan placere terningen i denne position.

Fra udgangspositionen kan terningen vendes og drejes og derved indtage en række andre positioner. Vi vil i denne sammenhæng kun tillade positioner, hvor terningen ikke overskrider rammen.

For ikke at skulle tegne for mange hexaedere, vil vi indføre en bekvem måde at angive rumdiagonalernes position. I udgangspositionen skriver vi, at rumdiagonalerne er i positionen {🔴 🟢 🟡 🔵}, mens vi for positionerne nedenfor skriver hhv. {🔵 🟡 🟢 🔴} og {🟢 🟡 🔵 🔴}.



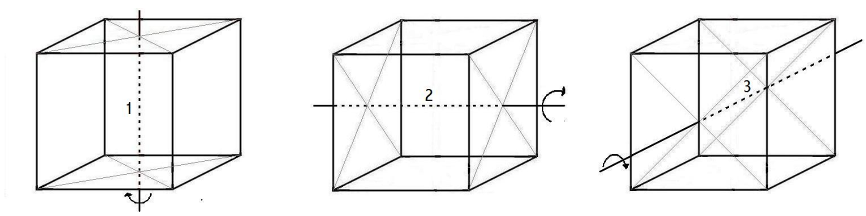
Opgave 2a: *Udfyld på svararket samtlige mulige kombinationer af de fire farver og undersøg om det er muligt at opnå alle disse kombinationer som rumdiagonal-positioner.*

Vi vil i højere grad end terningens positioner interessere os for de handlinger, der flytter terningen fra én tilladt position til en anden af de tilladte positioner.

En sådan handling vil vi fremover kalde for en *flytning* af hexaederet. En flytning af hexaederet permuterer rumdiagonalernes positioner. Hermed menes, at når terningen flyttes fra den ene tilladte position til den anden, vil rumdiagonalerne forblive rumdiagonaler, men være placeret i en anden position.

Lad os nu kigge nærmere på terningens flytninger. Man kan komme fra en vilkårlig tilladt position, til en hvilken som helst anden man ønsker ved først at vende den rette af de seks sideflader opad og derefter dreje terningen passende om den lodrette akse, der går gennem dens centrum.

Betragt nu akserne på de tre tegninger nedenfor. Med henblik på nemt at kunne angive hexaederets flytninger, vil vi nummerere de tre akser. Den vertikale akse kaldes for akse nummer 1, den horisontale akse for akse nummer 2 og den sagitale akse for akse nummer 3. Læg i øvrigt mærke til pilene, der angiver rotationsretningen omkring hver af akserne.



Det ses i forlængelse af ovenstående bemærkning, at enhver flytning kan gennemføres i følgende to trin:

1. Udfør nul, en, to eller tre 90°-drejninger omkring *enten* akse nummer 2 *eller* akse nummer 3. (Herved placeres terningen med den ønskede af de seks sider opad.)
2. Udfør nul, en, to eller tre 90°-drejninger om akse nummer 1.

Vi vil nu indføre en bekvem notation for terningens flytninger. Med udtrykket $(1^3 3^2)$ menes den flytning, der består af to 90°-drejninger om akse nummer tre, efterfulgt af tre 90°-drejninger om akse nummer 1.

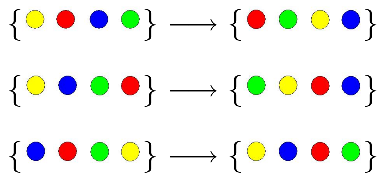
Bemærk, at "læseretningen" i denne notation går fra højre mod venstre, sådan at den først udførte rotation er den, der står længst til højre. Parentesen er sat for at minde om, at flytningen ganske vist består af fem 90°-drejninger, men skal betragtes i sin helhed som én enkelt flytning. Af opskriften ovenfor følger det, at enhver flytning *enten* kan skrives på formen $(1^a 2^b)$ *eller* på formen $(1^a 3^b)$ med $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Faktisk kan visse af hexaederets flytninger skrives på begge disse former. Et lidt specielt eksempel på en sådan flytning er: $(1^0 2^0) = (1^0 3^0)$. Det er den flytning, der efterlader terningen uberørt.

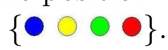
Prøv om I kan finde ud af hvilke andre af flytningerne, der ellers er tale om her.

Opgave 2b: *Udfør nedenstående flytninger på terningen i udgangspositionen og på terningen i positionen* {🔵 🟡 🟢 🔴}. *Angiv de resulterende rumdiagonalpositioner på svararket.*

$$(1^1 3^2) \ ; \ (1^0 2^3) \ ; \ (1^3 2^2) \ ; \ (1^3 3^3) \ ; \ (1^1 2^1) \ ; \ (1^0 2^0) \ ; \ (1^0 3^0)$$

Opgave 2c: *Udfør og angiv med den nyindførte notation de flytninger, der svarer til diagrammerne nedenfor:*



To flytninger er *identiske*, når de fra det samme udgangspunkt efterlader terningen - og dermed rumdiagonalerne - i samme position. Eksempelvis leder både $(1^2 2^2)$ og $(1^0 3^2)$ fra udgangspositionen til positionen . Faktisk vil de to flytninger lede terningen til den samme slutposition uanset terningens startposition. Vi kan derfor tillade os at betragte dem som én og samme flytning og skrive $(1^2 2^2) = (1^0 3^2)$.

Vi vil nu indskrænke vores mængde af flytninger. Betragt derfor terningen i dens udgangsposition, og sæt evt. en label på de sideflader, der vender hhv. opad og nedad. Vi vil fremover kun tillade de flytninger, der fra udgangspositionen efterlader terningen med en af disse to sider vendende opad.

Opgave 2d: *Opskriv de nu færre tilladte flytninger på svararket. Kald denne mængde af tilladte flytninger for $\mathbb{F}$. (Hint: Alle flytningerne i $\mathbb{F}$ kan (og skal) skrives på formen* $(1^a 2^b)$*)*

Opgave 2e: *Nederst på side 6 ses terningen i to forskellige positioner. Angiv på svararket den flytning, der kan flytte terningen fra udgangspositionen til den venstre af disse positioner. Angiv ligeledes på svararket den flytning, der kan flytte terningen fra den venstre til den højre position. Kunne man have nået denne højre position med en enkelt tilladt flytning fra udgangspositionen? Hvilken?*

At udføre to flytninger efter hinanden vil vi kalde at *sammensætte* de to flytninger. Vi vil notere sammensætningen af to flytninger som følger: $(1^1 2^2) \otimes (1^2 2^2)$.

Bemærk at læseretningen også i denne notation går fra højre mod venstre. Man skal altså udføre flytningen længst mod højre først og derefter udføre flytningen til venstre på den position, som den højre flytning efterlod terningen i.

Opgave 2f: *Eftervis, at flytningen* $(1^1 2^2) \otimes (1^2 2^2)$ *er* identisk *med* $(1^3 2^0)$*. (Hint: Benyt opgave 2e.)*

Opgave 2g: *Opskriv en tabel, der for ethvert par af flytninger fra $\mathbb{F}$ angiver en flytning identisk med deres sammensætning. Du kan udfylde skabelonen på svararket. Del gerne tabellens rækker ud blandt gruppens medlemmer.*

Betragt nu følgende delmængder af $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}_{\mathbb{U}_1} = \{(1^0 2^0), (1^1 2^0), (1^2 2^0), (1^3 2^0)\}$$

$$\mathbb{F}_{\mathbb{U}_2} = \{(1^0 2^0), (1^2 2^2)\}$$

$$\mathbb{F}_{\mathbb{U}_3} = \{(1^0 2^0), (1^2 2^0), (1^1 2^2), (1^3 2^2)\}$$

$$\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4} = \{(1^0 2^0), (1^2 2^2), (1^1 2^0), (1^1 2^2)\}$$

Opgave 2h: *Udfyld på svararket en tabel, der for ethvert par af flytninger fra* $\mathbb{F}_{\mathbb{U}_1}$ *angiver resultatet af deres sammensætning. (Hint: Benyt tabellen fra opgave g.)*

Opgave 2i: *Udfyld på svararket en tabel, der for ethvert par af flytninger fra* $\mathbb{F}_{\mathbb{U}_2}$ *angiver resultatet af deres sammensætning. (Hint: Benyt tabellen fra opgave g.)*

Opgave 2j: *Udfyld på svararket en tabel, der for ethvert par af flytninger fra* $\mathbb{F}_{\mathbb{U}_3}$ *angiver resultatet af deres sammensætning. (Hint: Benyt tabellen fra opgave g.)*

Opgave 2k: *Udfyld på svararket en tabel, der for ethvert par af flytninger fra* $\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4}$ *angiver resultatet af deres sammensætning. (Hint: Benyt tabellen fra opgave g.)*

Opgave 2l: *Hvordan adskiller tabellen for* $\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4}$ *sig fra tabellerne for de andre delmængder?*

B.2.1 Svarark: Hexaederets rumdiagonaler

Opgave 2a:

{○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○}

{○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○}

{○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○} {○ ○ ○ ○}

Opgave 2b:

$\{{\color{red}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\ {\color{yellow}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\}$

$(1^1 3^2)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^0 2^3)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^3 2^2)$: {○ ○ ○ ○}
$(1^3 3^3)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^1 2^1)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^0 2^0)$: {○ ○ ○ ○}
$(1^0 3^0)$: {○ ○ ○ ○}

$\{{\color{blue}\bullet}\ {\color{yellow}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\}$

$(1^1 3^2)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^0 2^3)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^3 2^2)$: {○ ○ ○ ○}
$(1^3 3^3)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^1 2^1)$: {○ ○ ○ ○} , $(1^0 2^0)$: {○ ○ ○ ○}
$(1^0 3^0)$: {○ ○ ○ ○}

Opgave 2c:

$$(1^{\cdot\cdot}\ldots^{\cdot\cdot}) : \{{\color{yellow}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\} \longrightarrow \{{\color{red}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\ {\color{yellow}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\}$$

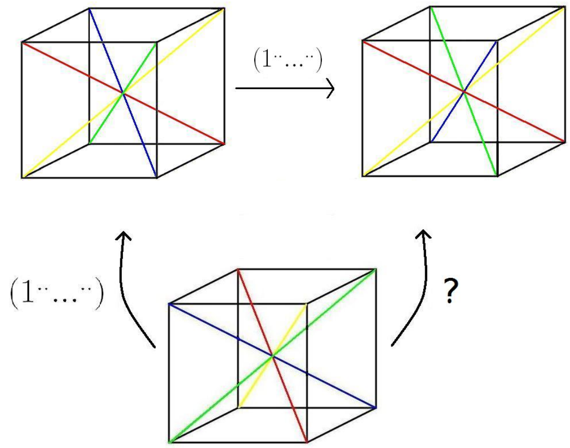
$$(1^{\cdot\cdot}\ldots^{\cdot\cdot}) : \{{\color{yellow}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\} \longrightarrow \{{\color{green}\bullet}\ {\color{yellow}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\}$$

$$(1^{\cdot\cdot}\ldots^{\cdot\cdot}) : \{{\color{blue}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\ {\color{yellow}\bullet}\} \longrightarrow \{{\color{yellow}\bullet}\ {\color{blue}\bullet}\ {\color{red}\bullet}\ {\color{green}\bullet}\}$$

Opgave 2d:

$$\mathbb{F} = \{(1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot}), (1^{\cdot\cdot}2^{\cdot\cdot})\}$$

Opgave 2e:



Opgave 2f: Besvar venligst ***Opgave 2f*** på bagsiden af dette svarark.

Opgave 2g: Tabellen skal udfyldes som følger: $(1^{\cdots}2^{\cdots}) \otimes (1^{\cdots}2^{\cdots}) = (1^{\cdots}2^{\cdots})$

$(\mathbb{F}, \otimes)$	$(1^0 2^0)$	$(1^1 2^0)$	$(1^2 2^0)$	$(1^3 2^0)$	$(1^0 2^2)$	$(1^1 2^2)$	$(1^2 2^2)$	$(1^3 2^2)$
$(1^0 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^1 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^2 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^3 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^0 2^2)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^1 2^2)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^2 2^2)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^3 2^2)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$

Opgave 2h:

$(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_1}, \otimes)$	$(1^0 2^0)$	$(1^1 2^0)$	$(1^2 2^0)$	$(1^3 2^0)$
$(1^0 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^1 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^2 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$
$(1^3 2^0)$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$	$(1^{\cdots}2^{\cdots})$

Opgave 2i:

$(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_2}, \otimes)$	$(1^0 2^0)$	$(1^2 2^2)$
$(1^0 2^0)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^2 2^2)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$

Opgave 2j:

$(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_3}, \otimes)$	$(1^0 2^0)$	$(1^2 2^0)$	$(1^1 2^2)$	$(1^3 2^2)$
$(1^0 2^0)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^2 2^0)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^1 2^2)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^3 2^2)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$

Opgave 2k:

$(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4}, \otimes)$	$(1^0 2^0)$	$(1^2 2^2)$	$(1^1 2^0)$	$(1^1 2^2)$
$(1^0 2^0)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^2 2^2)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^1 2^0)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$
$(1^1 2^2)$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$	$(1^{\cdots} 2^{\cdots})$

Opgave 2l:

B.3 Kvadratiske heltalsmatricer

Vi skal nu se på en særlig type talskemaer kaldet kvadratiske heltalsmatricer. En $m \times m$-heltalsmatrix (læses: m kryds m) er et skema bestående af m vandrette rækker og m lodrette søjler af hele tal. Er $m = 4$ ser en 4×4-heltalsmatrix M ud som følger:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Tallet a_{ij} kaldes matricens ij'te indgang. En matrix ij'te indgang er altså det tal, der står i den $i'te$ række og den $j'te$ søjle.

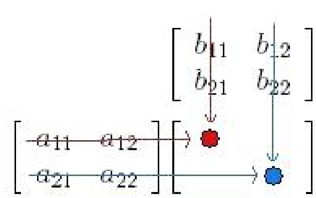
Vi vil i dette kapitel koncentrere os om 2×2-heltalsmatricer. To 2×2-matricer kan kombineres efter en noget speciel regel, hvorved man opnår en ny 2×2-matrix. Man kalder resultatet af denne kombination for matrix-*produktet* af de to matricer. Er

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

bestemmes matrixproduktet - her skrevet $A * B$ - som følger:

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Når man skal udregne matrixprodukter, kan det være en stor hjælp at placere matricerne som på illustrationen nedenfor. De røde og blå pile angiver, hvilke rækker og søjler man skal kombinere som beskrevet ovenfor for at få produktets indgange ved hhv. den røde og blå cirkel.



Opgave 3a: *Lad*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Udregn produkterne: $A * B$; $C * D$; $D * C$; $(A * B) * D$ og $A * (B * D)$.

Vi indskrænker nu den betragtede mængde af 2×2-matricer. Fremover vil vi kun tillade, at indgangene (tallene i matricerne) er et element i $\{-1, 0, 1\}$. Derudover vil vi kræve, at matricerne har netop to indgange forskellige fra 0, som begge er placeret i den samme af de to diagonaler. Vi vil kalde denne mængde af matricer for $\mathbb{M}$.

Opgave 3b: *Opskriv samtlige matricer i $\mathbb{M}$ og lav en tabel, der for vilkårlige to af matricerne angiver deres produkt. Du er velkommen til at benytte følgende matrixregnemaskine på nettet:*

http://easycalculation.com/matrix/matrix-multiplication.php.

Vi indfører nu *determinanten* for en 2×2-matrix. Lad matricen A være

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Determinanten for A er da givet ved: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Bemærk, at determinanten for en matrix er et tal og altså ikke en matrix, og at determinanten for en matrix fra $\mathbb{M}$ må være enten -1 eller 1.

Opgave 3c: *Udregn determinanterne for matricerne i $\mathbb{M}$.*

Opgave 3d: *Betragt følgende delmængde af $\mathbb{M}$: $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_1} = \{A \in \mathbb{M} \mid det(A) = 1\}$. Opskriv en tabel over produkterne af matricerne i $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_1}$ (Hint: Benyt tabellen fra opgave b.)*

Opgave 3e: *Betragt nu delmængden:*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{U}_2} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\} \subset \mathbb{M}.$$

Opskriv en tabel over produkterne i $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_2}$. (Hint: Benyt tabellen fra opgave b.)

Opgave 3f: *Betragt nu delmængden:*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{U}_3} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\} \subset \mathbb{M}.$$

Opskriv en tabel over produkterne i $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_3}$. (Hint: Benyt tabellen fra opgave b.)

Opgave 3g: *Betragt nu delmængden:*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{U}_4} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\} \subset \mathbb{M}.$$

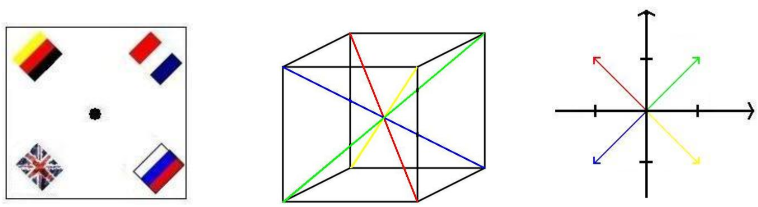
Opskriv en tabel over produkterne i $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_4}$. (Hint: Benyt opgave b.)

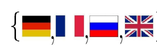
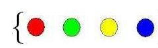
Opgave 3h: *Hvordan adskiller den sidste tabel sig fra de tre foregående?*

B.4 Den røde tråd

I har nu været igennem tre forskellige forløb, der stammer fra tre forskellige egne af det matematiske landskab. Vi har arbejdet inden for tre emnekredse, der, i hvert fald på overfladen, ikke har meget med hinanden at gøre. De tre forløb består dog ikke af tilfældige aktiviteter grebet ud af den blå luft. I har i forbindelse med den videnskabelige debat udforsket situationerne og opdaget, at der findes sammenhænge mellem mængderne af permutationer, mængderne af flytninger og mængderne af matricer. Det er i første omgang sammenhænge mellem $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$, som I skal undersøge nærmere og forsøge at gøre mere præcise.

Til venstre nedenfor ser I den borddækning, vi kaldte udgangsopstillingen. Ved midten ser I den rumdiagonalposition, som vi kaldte udgangspositionen og til højre fire kulørte vektorer, indtegnet i et koordinatsystem, med begyndelsespunkt i $(0, 0)$.



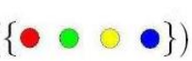
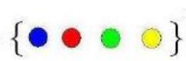
Vi bruger fremover følgende notation for de tre positioner: ,  og $\{\binom{-1}{1}, \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{-1}{-1}\}$.

Vi har også brug for at indføre, hvordan man ganger en matrix med en vektor. Se derfor på følgende definerende eksempel:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Det sidste begreb vi vil indføre, er hvad man kalder *virkningen* af et element i enten $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ eller $\mathbb{M}$ på positionerne ovenfor. Nedenfor er givet tre eksempler. Et der viser en permutations virkning på udgangsopstillingen af bordet, et der viser en flytnings virkning på terningen i udgangsposition, og endelig et der viser en matrix virkning på de fire kulørte vektorer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$  $=$ 

$(1^1 2^0)($$) =$ 

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}(\{\binom{-1}{1}, \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{-1}{-1}\}) = \{\binom{-1}{1}, \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{-1}{-1}\}$$

Vi har tiltro til, at I ikke har problemer med at forstå de to første eksempler. I det sidste eksempel er den røde vektor i listen til højre lig med produktet af matricen og den røde vektor i listen til venstre. Den blå vektor i listen til højre er lig med produktet af matricen og den blå vektor i listen til venstre og så fremdeles for de to resterende farver.

Den følgende opgave er temmelig svær, men som de siger på tv, er intet umuligt for den, der bærer viljen i hjertet.

Opgave 4a: *Betragt nu elementerne i de tre mængder $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$. Dan tripler (p, f, m) med $p \in \mathbb{P}$, $f \in \mathbb{F}$ og med $m \in \mathbb{M}$. Triplerne skal dannes med baggrund i de tre elementers tilsvarende virkning på udgangspositionen af hhv. bordet, terningen og vektorerne. Opskriv alle jeres tripler.*

Opgave 4b: *Lad $\mathbb{P}$'s elementer stå i følgende rækkefølge:*

$$\mathbb{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}_3, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}_5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}_8 \right\}$$

Vi har tilføjet hver af permutationerne et lille index for at gøre særlig opmærksom på dens plads i rækkefølgen. Opskriv endnu en gang mængderne $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$. Arranger de to mængder sådan, at elementerne fra de respektive tripler står på samme plads i de tre mængdelister. Giv også flytningerne og matricerne små indices. Rediger jeres tre tabeller fra tidligere, så ovenstående elementrækkefølge overholdes i første række og første søjle på dem alle.

Opgave 4c: *Hvilke ligheder ser I for disse tabeller?*

B.5 Abstraktion

En abstraktion er en proces, hvor man bevidst reducerer mængden af information angående et begreb eller et fænomen. Denne proces udføres typisk for at udskille og fokusere på netop den information, som er relevant for ens hensigt. Et eksempel på en abstraktionsproces kunne være at betragte en læder lænestol som et stuemøbel og kun hæfte sig ved de generelle egenskaber som denne kategori af brugsgenstande har. Ups, kom jeg til at abstrahere en gang mere?

Abstraktion benyttes hyppigt inden for matematik. Specielt i den mere moderne matematik, altså matematik der er under 200 år gammel, er abstrakte begreber ofte i højsædet. Når man abstraherer i matematik, er det med en forventning om, at man kan opnå større klarhed og akkurathed ved at se bort fra de egenskaber ved de betragtede objekter, der er uvæsentlige i den givne sammenhæng. Ved at abstrahere opnår man endvidere ofte at kunne placere situationer, der på overfladen er forskellige under det samme matematiske tag. En typisk gevinst herved er muligheden for at behandle problemer fra samtlige disse situationer i blot én enkelt arbejdsgang. Man kan sige, at man ved på denne måde at løfte blikket og skue henover de uvæsentlige detaljer opnår at kunne slå flere matematiske fluer med ét smæk.

Et godt eksempel på denne gevinst ses i forbindelse med udviklingen af det generelle udtryk for en andengradsligning og dens løsningsformel:

$$ax^2 + bx + c = d \ \ ; \quad x = \tfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{hvor} \quad D = b^2 - 4ac$$

Ved at se bort fra koefficienternes numeriske værdi, betragte dem alle over en kam og repræsentere dem med bogstaver, er det muligt at udtrykke løsningen til samtlige andengradsligninger i verden på blot en enkelt linje. Lidt populært kan man sige, at når man har løst én, har man løst dem alle.

Det er klart, at de objekter man forsøger at sammenfatte til et abstrakt begreb må have noget til fælles. Det er dog ikke altid oplagt, at objekterne er similære. Det vil formentlig kræve lidt matematisk træning, før man er helt på det rene med, at både $k_1((x - r_1)(x - r_2)) - k_2 = 0$ og $ax^2 + bx + c = d$ er udtryk for andengradsligninger.

Vi har i dette forløb arbejdet med tre forskellige matematiske situationer og udpeget tre forskellige mængder, $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$, bestående af hhv. permutationer, flytninger og matricer. Vi har udforsket lighederne de tre mængder imellem og ydermere observeret en sammenhæng mellem sammensætningen af de betragtede permutationer, sammensætningen af de betragtede flytninger og multiplikationen af betragtede matricer. Mon ikke der er grundlag for en abstraktion?

B.6 Gruppeteori

Vi er langt om længe nået til det egentlige formål med hele dette forløb, nemlig at indføre det begreb man kalder en *abstrakt gruppe*. For at vide hvad en abstrakt gruppe er, må man dog først vide, hvad en gruppe er.

En gruppe er en mængde $\mathbb{G}$ med en såkaldt tilhørende *komposition*. En komposition er en regel, der angiver, hvordan man kan kombinere vilkårlige to af elementerne i mængden og derved opnå et nyt element i mængden. Det er helt centralt, at man ved kompositionen af to elementer forbliver inden for mængden - altså at resultatet af kompositionen også er et element i mængden. Man siger, at mængden skal være *afsluttet* overfor kompositionen. Det kan være nyttigt at tænke på kompositionen som en analog til det at multiplicere to tal og derved opnå et nyt tal. Man kan dog ikke altid stole på, at regnereglerne for at gange tal sammen er opfyldte af en betragtet kompositionsregel. Vi vil her benytte symbolet $\odot$ til at notere kompositionen af elementerne.

For at mængden $\mathbb{G}$ og dens tilhørende komposition kan kaldes en gruppe, må de, udover afsluttetheden, i fællesskab opfylde følgende tre betingelser:

1. **Associativitet**. For ethvert valg af tre elementer, $g_i, g_j, g_k \in \mathbb{G}$ skal gælde, at

$$(g_i \odot g_j) \odot g_k = g_i \odot (g_j \odot g_k)$$

2. **Neutralt element.** Der skal findes præcis et element $g_i \in \mathbb{G}$ med den egenskab, at der for alle $g_j \in \mathbb{G}$ gælder, at

$$g_i \odot g_j = g_j \odot g_i = g_j$$

   Vi vil som regel notere dette særlige element med e og kalde e for det neutrale element mht. kompositionen.

   Herefter skal der altså for ethvert $g_j \in \mathbb{G}$ gælde, at

$$e \odot g_j = g_j \odot e = g_j$$

3. **Inverst element.** For alle $g_i \in \mathbb{G}$ skal der findes præcis et element $g_j \in \mathbb{G}$ sådan, at

$$g_i \odot g_j = e \text{ og } g_j \odot g_i = e.$$

   Man siger, at g_i og g_j er hinandens inverse elementer mht. kompositionen.

Når disse betingelser alle er opfyldt, siger man, at parret $(\mathbb{G}, \odot)$ udgør en gruppe. Man kan *ikke* sige, at en mængde er en gruppe uden at henvise specifikt til den benyttede kompositionsregel.

Genfind nu de tre nummererede mængdelister for hhv. $\mathbb{P}, \mathbb{F}$ og $\mathbb{M}$ samt tabellerne over hhv. $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ fra *Opgave 4d*.

Opgave 6a: *Vis, at* $(\mathbb{P}, \circ)$*,* $(\mathbb{F}, \otimes)$ *og* $(\mathbb{M}, *)$ *er grupper.*

Lad $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$ være en abstrakt mængde med otte nummererede elementer. Mængden er abstrakt, fordi vi ikke tillægger elementerne nogen andre egenskaber end at være elementer i G. Tabellen herunder angiver en kompositionsregel for elementerne i G.

(G,$\odot$)	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Opgave 6b: *Hvordan kommer afsluttetheden til udtryk i kompositionstabellen? Hvordan kommer eksistensen af et neutralt element til udtryk i kompositionstabellen? Hvordan kan man udfra tabellen se, at ethvert element har et og kun et inverst element? Hvordan tjekker man at den associative lov er opfyldt? Eftervis, at* $(G, \odot)$ *er en gruppe.*

Da elementerne i G er abstrakte, kalder man $(G, \odot)$ for en abstrakt gruppe.

Generelt er det krævende at vise, at en kompositionsregel opfylder den associative lov, når man kun har tabellen at støtte sig til. I tilfældet hvor mængden har otte abstrakte elementer, skal man i princippet tjekke 512 tripler. Heldigvis følger associativiteten i de konkrete tilfælde ofte af elementernes beskaffenhed. Eksempelvis vil den associativite lov være opfyldt helt naturligt, når elementerne er afbildninger[38], og kompositionen er sammensætning. Associativiteten går også naturligt i arv, når mængdeelementerne er tal eller talskemaer, og kompostitionen "nedstammer" fra den almindelige talmultiplikation og/eller taladdition. Subtraktion giver derimod problemer: $(2-3)-(-2) \neq 2-(3-(-2))$.

Opgave 6c: *Eftervis, at tabellerne for* $(G, \odot)$*,* $(\mathbb{P}, \circ)$*,* $(\mathbb{F}, \otimes)$ *og* $(\mathbb{M}, *)$ *er ens, når man abstraherer fra notationen af kompositionen, og fra om elementerne er abstrakte størrelser, permutationer, flytninger eller matricer. (Hint: Sammenlign indices.)*

Med denne opgave har vi rundet en milesten i forløbet. Lad os derfor standse op og sætte vores opnåede resultater i det rette lys.

[38]Med en afbildning fra én mængde til en anden menes en regel for, hvordan man til et givent element i den ene mængde knytter et - og kun et - element i den anden mængde. Et eksempel kunne være afbildningen $(1^2 3^1) : \{\text{Terningens rumdiagonalpositioner}\} \to \{\text{Terningens rumdiagonalpositioner}\}$, som vi studerede i kapitel 2

Vi har netop godtgjort, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle er grupper. Faktisk har vi endda vist, at selvom de er tre ret forskellige *konkrete* mængder med hver deres tilhørende komposition, så kan deres egenskaber som grupper alle kortlægges ved hjælp af tabellen over den *abstrakte* gruppe, $(G, \odot)$.

Denne sidste observation gør, at man fra et gruppeteoretisk synspunkt betragter dem som "i det væsentlige ens", og identificerer dem med den abstrakte gruppe. Man siger, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle er *isomorfe*[39] med $(G, \odot)$ og skriver eksempelvis $(\mathbb{P}, \circ) \cong (G, \odot)$.

Der findes flere andre konkrete udgaver af gruppen $(G, \odot)$, men også disse vil en gruppeteoretiker blot henlægge som nye manifestationer af den abstrakte gruppe. På denne måde bliver den abstrakte gruppe et samlende og generaliserende begreb for samtlige konkrete eksempler på mængder med tilhørende kompositioner, hvis tabeller kun adskiller sig fra den abstrakte gruppes tabel ved elementernes notation og konkrete fortolkning. Når vi udelukkende er interesseret i mængderne og den struktur[40], som kompositionsreglerne tilføjer dem, kan vi altså tillade os at betragte dem alle som én og samme gruppe - nemlig $(G, \odot)$.

$(G, \odot)$ er ikke den eneste abstrakte gruppe i verden. For ethvert positivt, helt tal $n \in \mathbb{N}$ kan man konstruere mindst én abstrakt gruppe bestående af n elementer. Faktisk findes der udover $(G, \odot)$ præcis fire andre abstrakte grupper med otte elementer. Sidstnævnte resultat ser man i øvrigt første gang på tredje studieår på universitetet, så du skal ikke være urolig, hvis det ikke virker oplagt.

Men hvad er det, der adskiller to grupper, når deres elementer er abstrakte og deres elementantal er ens? Svaret må nødvendigvis være mængdernes tilhørende kompositionsregler, og gruppernes forskellighed kommer derfor til udtryk i tabellerne. Det er altså, ifølge ovenstående påstand, muligt at definere fem forskellige kompositionsregler for en abstrakt mængde med otte elementer, sådan at alle betingelserne for at være en gruppe er opfyldt. Tabellen til venstre nedenfor giver et eksempel på en anden af disse fem kompositionsregler. Du kan stole på, at $(G, \times)$ er en gruppe, og behøver derfor ikke at tjekke, at betingelserne er opfyldt.

[39] Ordet isomorf stammer fra græsk, og er en sammensætning af *iso* som betyder samme eller ens og *morfe* som betyder form.

[40] Struktur skal her forstås som de forbindelser, der er elementerne imellem. Tænk eksempelvis på begrebet infrastruktur som blandt andet betyder de forbindelser, der er mellem et byerne i et land.

$\times$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1
g_3	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g_2
g_4	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_7	g_8	g_1	g_2	g_3	g_4
g_6	g_6	g_7	g_8	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
g_7	g_7	g_8	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_5
g_8	g_8	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Bemærk, at g_1 er det neutrale element i begge grupper. Bemærk endvidere, at det kun er $g_1 \times g_1$ og $g_5 \times g_5$, der giver det neutrale element, mens $g_1 \odot g_1 = g_3 \odot g_3 = g_5 \odot g_5 = g_6 \odot g_6 = g_7 \odot g_7 = g_8 \odot g_8 = g_1$. Uanset hvordan man sorterer en tabel, vil antallet af gange, det neutrale element er at finde i tabellens førstediagonal være det samme. De to tabeller ovenfor kan altså ikke sorteres ens. Der er altså vitterlig tale om to forskellige kompositionsregler og derfor om to forskellige strukturer på mængden G. Med baggrund heri kan vi konstatere, at $(G, \odot)$ og $(G, \times)$ er to forskellige abstrakte grupper med otte elementer. $(G, \odot)$ og $(G, \times)$ er altså *ikke* isomorfe.

Opgave 6d: *Lad $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ være en abstrakt mængde og betragt kompositionstabellerne nedenfor. Vis, at $(H, \odot)$ og $(H, \times)$ er to forskellige abstrakte grupper med fire elementer. Du behøver ikke at godtgøre associativiteten yderligere end at give et par bekræftende eksempler.*

$\odot$	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	h_1	h_2	h_3	h_4
h_2	h_2	h_3	h_4	h_1
h_3	h_3	h_4	h_1	h_2
h_4	h_4	h_1	h_2	h_3

$\times$	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	h_1	h_2	h_3	h_4
h_2	h_2	h_1	h_4	h_3
h_3	h_3	h_4	h_1	h_2
h_4	h_4	h_3	h_2	h_1

En dygtig tredjeårs universitetsstuderende kan vise, at man ikke kan konstruere andre abstrakte grupper med fire elementer. Ethvert konkret eksempel på en gruppe med fire elementer kan altså kortlægges via en af de to tabeller. Med andre ord: En hvilken som helst konkret gruppe med fire elementer vil kun adskille sig fra en af de to abstrakte grupper ved elementernes konkrete navne, og måden hvorpå man konkret udfører kompositionen. Kunne en mængde på fire elementer og dens tilhørende kompositionsregel godt tænke sig at være en gruppe, er de altså tvunget til at være isomorfe med en af de to abstrakte grupper ovenfor.

Gruppen til højre er i øvrigt opkaldt efter en berømt tysk matematiker og gruppeteoripioner, der hed Felix Klein. Gruppen kaldes Kleins Vierergruppe.

Opgave 6e: *Gå tilbage til besvarelserne af opgaverne fra de tre første kapitler, og genfind tabellerne for:*

$(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_1}, \circ)$, $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_3}, \circ)$, $(\mathbb{P}_{\mathbb{U}_4}, \circ)$, $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_1}, \otimes)$, $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_3}, \otimes)$, $(\mathbb{F}_{\mathbb{U}_4}, \otimes)$, $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_1}, *)$, $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_3}, *)$, $(\mathbb{M}_{\mathbb{U}_4}, *)$.

Undersøg, hvilke af disse mængder, der sammen med deres kompositionsregler udgør en gruppe. Afgør for hver af grupperne, om de "i det væsentlige" er ens, dvs. isomorfe, med enten $(H, \odot)$ eller $(H, \times)$ ovenfor.

Lad fortsat $(G, \odot)$ være den abstrakte gruppe, og lad H være en delmængde af G. Da elementerne i H stammer fra G, kan de naturligvis kombineres ved brug af den kompositionsregel, man benytter på G. Såfremt $(H, \odot)$ selvstændigt opfylder gruppekriterierne, siger man, at $(H, \odot)$ er en *undergruppe* i $(G, \odot)$.

Bemærk, at en undergruppe H ikke behøver at være en *ægte* delmængde af G. Man betragter nemlig også den fulde gruppe som en undergruppe i sig selv. Bemærk endvidere, at man faktisk kun behøver at tjekke afsluttetheden af H, at det neutrale element er med i H, og at H indeholder alle sine elementers inverse element for at godtgøre, at H er en undergruppe af G. Associativiteten følger gratis med fra $(G, \odot)$.

I *Opgave 6e* har I vist, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ hver især har to forskellige undergrupper med fire elementer. Den ene af disse undergrupper er isomorf med den abstrakte gruppe $(H, \odot)$, og den anden er isomorf med den abstrakte gruppe $(H, \times)$.

Vi har tidligere set, at $(\mathbb{P}, \circ)$, $(\mathbb{F}, \otimes)$ og $(\mathbb{M}, *)$ alle er konkrete eksempler på grupper, der er isomorfe med den abstrakte gruppe $(G, \odot)$. Af ovenstående ræsonnement kan vi derfor slutte, at den abstrakte gruppe $(G, \odot)$ ligeledes har en undergruppe, som er isomorf med $(H, \odot)$, og en undergruppe der er isomorf med $(H, \times)$. Vi har dokumenteret denne påstånd med de to tabeller, I ser nedenfor.

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

$\odot$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	g_6	g_7	g_8	g_5
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	g_7	g_8	g_5	g_6
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	g_8	g_5	g_6	g_7
g_5	g_5	g_8	g_7	g_6	g_1	g_4	g_3	g_2
g_6	g_6	g_5	g_8	g_7	g_2	g_1	g_4	g_3
g_7	g_7	g_6	g_5	g_8	g_3	g_2	g_1	g_4
g_8	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Opgave 6f: Prøv om I kan finde undergrupperne i hhv. $(\{g_1, g_2, g_3, g_4\}, \odot)$ og $(\{g_1, g_3, g_6, g_8\}, \odot)$. Er de undergrupper i $(G, \odot)$? Er de isomorfe med $\mathbb{P}_{\mathbb{U}_2}, \mathbb{F}_{\mathbb{U}_2}$ og $\mathbb{M}_{\mathbb{U}_2}$?

B.7 Efterskrift

Således nåede vi til vejs ende i dette forløb. I ved nu, hvad en abstrakt matematisk gruppe er og kender til begrebet en undergruppe. Det abstrakte gruppebegreb kom i dette forløb i stand via tre forskellige konkrete eksempler på den samme abstrakte gruppe med otte elementer. Disse konkrete grupper blev alle underlagt den abstrakte gruppe, med baggrund i de respektive gruppetabellers similaritet. Vi kaldte grupper med tabeller, der "i det væsentlige er ens" for isomorfe. Vi studerede også undergrupperne i de konkrete grupper. Faktisk påbegyndte vi dette studium, længe inden I var bevidste om det. Undergrupperne kom efter abstraktionen til at fremstå som konkrete eksempler på hhv. de to eksisterende abstrakte grupper med fire elementer og på den abstrakte gruppe med to elementer.

Vi har dog endnu ikke har godtgjort, hvorfor det er interessant at studere abstrakte mængder med tilhørende kompositioner, der tilføjer mængden strukturen af en gruppe. Har alt dette slid overhovedet været besværet værd? Hvad kan vi nu, som vi ikke kunne før? Hvilke problemer kan vi løse med gruppeteorien? Hvilke praktiske hjælpemidler kan vi konstruere med baggrund i gruppeteorien? Svarene på disse spørgsmål er ikke helt så oplagte, som hvis man i stedet havde lært at strikke. Alligevel giver vi her en meget kort beskrivelse af gruppeteoriens berettigelse som studieobjekt.

Et ordsprog siger, *"at arbejdet indimellem bærer lønnen i sig selv"*. Dette kan i høj grad siges at være tilfældet, når arbejdet består i lære om det abstrakte gruppebegreb. Selve den abstrakte tankegang og de logiske argumentationer, der i særdeleshed præger gruppeteorien, findes tilsvarende indenfor hovedparten af dén videregående matematik, man studerer og udvikler på universiteterne rundt om i verden. Man kan med rette sige, at gruppeteorien er den simpleste form for fuldstændig abstrakt matematik, og den kan således tjene som en indgangsdør til den mere videnskabelige del af matematikken.

Gruppeteorien er dog andet og mere end blot en trædesten på vej mod den rigtigt interessante matematik. Det var eksempelvis gruppeteorien, der viste sig at være det helt afgørende værktøj, da det i starten af 1800-tallet lykkedes nogle af datidens skarpeste matematikere at vise, at der *ikke* findes en fuldstændig løsningsformel for den abstrakte femtegradsligning, som det ellers er tilfældet for ligninger af grad 2, 3, og 4. At opstille og løse ligninger har altid været et helt centralt problemområde inden for matematikken, og konsekvenserne af ovenstående resultat var derfor enorme.

Gruppeteorien var også den væsentligste årsag til de store fremskidt indenfor talteorien og geometrien som matematikerne gjorde på nogenlunde samme tid. Udviklingen indenfor talteorien har haft konsekvenser for, hvordan man i dag kan kryptere elektroniske data. Sådanne krypteringer er for eksempel i spil, hver gang man benytter sit dankort, sin mobiltelefon eller sender personlige oplysninger over internettet.

Et andet videnskabeligt fagområde, hvor gruppeteorien har haft stor betydning, er kemi. Kemiske krystallers symmetriegenskaber kan beskrives ved hjælp af gruppeteorien, og derigennem kan man forudsige en masse om krystallernes kemiske egenskaber. Man arbejder her med såkaldte krystallografiske grupper.

Der findes adskillige andre praktiske og videnskabelige anvendelser af gruppeteorien. Det er oplagt, at de i lighed med ovenstående kræver en væsentlig dybere indsigt i gruppebegrebet, end den I har opnået her, men det er da fascinerende at en teori, hvis fundament består af tre relativt let begribelige kriterier, kan have så vidtrækkende konsekvenser indenfor vidt forskellige grene af naturvidenskaben.

B.8 Evaluering

Velkommen til denne skriftlige evaluering af jeres viden om gruppeteori. Gør jer venligst umage med svarene, det betyder meget for mit projekt, at jeg får en korrekt fornemmelse af, hvor meget gruppeteori I har opfanget. På forhånd tak for indsatsen og god fornøjelse. Jesper.

B.8.1 Multiple choice-opgaver

I de ti følgende multiple choice-opgaver er G en mængde og $\otimes$ en tilhørende kompositionsregel. Elementerne i G benævnes g_i, g_j osv. Vær opmærksom på, at der i nogle af opgaverne er mere end et rigtigt svar. Sæt kryds ud for de svar, som du mener er rigtige. Rigtige krydser giver et point, forkerte krydser giver et minus point. Fortryder du et kryds, streger du det grundigt ud. Herefter kan du igen vælge mellem alle svarmulighederne - også den du lige forkastede.

Tip: Læs alle svarmulighederne til spørgsmålet, inden du sætter dine krydser.

M1. Hvad vil det sige, at mængden G er afsluttet overfor $\otimes$?

1. $\otimes$ er den eneste mulige kompositionsregel for G.
2. Der findes ingen andre mængder end G, der kan have $\otimes$ som komposition.
3. For ethvert par af elementer $g_i, g_j \in G$ skal gælde, at kompositionen $g_i \otimes g_j$ giver et element i G
4. For ethvert $g_i \in G$ skal der findes et og kun et andet element $g_j \in G$ så: $g_i \otimes g_j = g_j \otimes g_i$

M2. Forestil dig, at du sidder med kompositionstabellen for $(G, \otimes)$ foran dig. For at tjekke om $g_i \in (G, \otimes)$ er det neutrale element, skal du:

1. Sikre dig, at g_i står øverst i alle søjler af tabellen.
2. Sikre dig, at g_i kun findes på en plads i tabellen.
3. Sikre dig, at rækken, der har g_i længst til venstre, er identisk med den aller øverste række.
4. Sikre dig, at søjlen under g_i er identisk med søjlen længst til venstre.

M3. Den associative lov siger:

1. For ethvert valg af tre elementer $g_i, g_j, g_k \in G$ skal gælde: $g_i \otimes g_j \otimes g_k = g_k \otimes g_j \otimes g_i$.
2. For ethvert valg af tre elementer $g_i, g_j, g_k \in G$ skal gælde: $(g_i \otimes g_j) \otimes g_k = g_i \otimes (g_j \otimes g_k)$.
3. For ethvert valg af tre elementer $g_i, g_j, g_k \in G$ skal gælde: $g_i \otimes g_j \otimes g_k = e$
4. Der findes præcis tre elementer $g_i, g_j, g_k \in G$, som opfylder: $(g_i \otimes g_j) \otimes g_k = g_i \otimes (g_j \otimes g_k)$

M4. I kompositionstabellen for $(G, \otimes)$ har du konstateret, at det neutrale element står netop én gang i hver søjle og hver række. Hvad kan du heraf konkludere?

1. At ethvert element $g_i \in G$ har et og kun et inverst element.
2. At $(G, \otimes)$ er en gruppe.
3. At $(G, \otimes)$ ikke er en gruppe.
4. At G er afsluttet overfor kompositionen $\otimes$.

M5. Hvilke af følgende kriterier skal være opfyldt for at $(G, \otimes)$ kan være en gruppe?

1. Der skal findes et og kun et neutralt element i G.
2. For ethvert par $g_i, g_j \in G$ skal gælde: $g_i \otimes g_j = g_j \otimes g_i$
3. Mængden G skal have otte eller fire elementer.
4. Til ethvert element i G findes et og kun et inverst element.

M6. Antag nu, at $(G, \otimes)$ *er* en gruppe og lad også $(M, \odot)$ være en er gruppe. Antag endvidere, at $(G, \otimes)$ er isomorf med $(M, \odot)$. Da må:

1. G og M have lige mange elementer.
2. Tabellerne for $(G, \otimes)$ og $(M, \odot)$ kunne sorteres ens, når man abstraherer fra elementernes og kompositionernes notation.
3. $(G, \otimes)$ og $(M, \odot)$ kunne betragtes som to eksempler på den samme abstrakte gruppe.
4. $(M, \odot)$ være en undergruppe i $(G, \otimes)$.

M7. En abstrakt gruppe er:

1. En gruppe, hvor mængdeelementerne ikke har nogen andre egenskaber end at være mængdeelementer.
2. Et samlende og generaliserende begreb, der giver mulighed for at beskrive samtlige konkrete isomorfe grupper under et.
3. En gruppe, for hvilken der *ikke* findes et konkret eksempel.
4. En gruppe, der ikke opfylder den associative lov.

M8. Hvad adskiller to forskellige abstrakte grupper med lige mange elementer?

1. Elementernes navne.
2. Kompositionsreglerne og dermed gruppernes kompositionstabeller.
3. Om reglen angående inverse elementer er opfyldt eller ej.
4. Antallet af konkrete eksempler man kan konstruere for dem hver især.

M9. Kan en gruppe med 15 elementer være en undergruppe af en gruppe med 12 elementer?:

1. Ja, hvis elementerne er permutationer.
2. Nej, aldrig.
3. Ja, hvis de to grupper har forskellige kompositionsregler.
4. Ja, hvis grupperne er abstrakte.

M10. Lad nu H være en delmængde af G. For at $(H, \otimes)$ kan være en undergruppe i $(G, \otimes)$, er det tilstrækkeligt at:

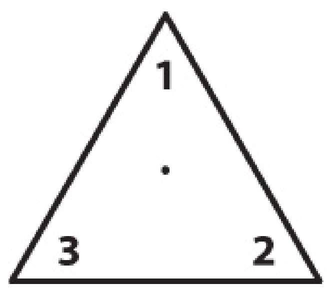
1. Det neutrale element i $(G, \otimes)$ findes i $(H, \otimes)$.
2. H er afsluttet over for kompositionen $\otimes$.
3. For nogle af elementerne i H findes det inverse element også i H.
4. Ingen af ovenstående kriterier er tilstrækkelige. $(H, \otimes)$ må være en gruppe i sig selv.

B.8.2 Problemregning

P1. Lad $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ være en abstrakt mængde. Du bedes konstruere en kompositionstabel for en kompositionsregel, $\times$, sådan, at $(H, \times)$ bliver en gruppe.

$\times$	h_1	h_2	h_3
h_1			
h_2			
h_3			

P2. Betragt nu den ligesidede trekant nedenfor og bemærk nummereringen af hjørnerne. Vi kalder denne position for trekantens udgangsposition.



Vi indfører endvidere følgende mængde bestående af flytninger af denne trekant:

$$\mathbb{D}_3 = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_|, S_\backslash, S_/\}.$$

Med D_0, D_{120} og D_{240} menes drejninger af trekanten omkring dennes centrum på henholdsvis $0°$, $120°$ eller $240°$. D_0 efterlader altså trekanten uberørt.

Med $S_|$ menes en spejling af trekanten i den lodrette akse, der går gennem hjørne nummer 1 og trekantens centrum.

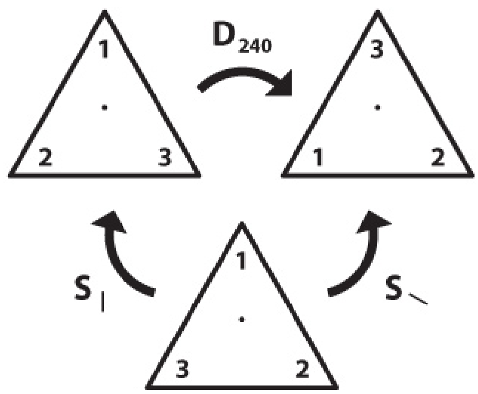
Med $S_\backslash$ menes en spejling af trekanten i den skrå akse, der går gennem hjørne nummer 2 og trekantens centrum.

Med $S_/$ menes en spejling af trekanten i den skrå akse, der går gennem hjørne nummer 3 og trekantens centrum.

Uanset hvilken af disse flytninger man udfører på trekanten, vil den være bevaret. Hermed mener vi, at selvom hjørnerne vil være byttet rundt efter en flytning, vil trekanten optage nøjagtig den samme plads på papiret før og efter flytningen.

Vi definerer nu en komposition kaldet $\otimes$ på mængden $\mathbb{D}_3 = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_|, S_\backslash, S_/\}$.

Med $D_{240} \otimes S_{\vert}$ mener vi den sammensatte flytning: $S_{\vert}$ efterfulgt af D_{240}. Bemærk, at flytningen længst til højre er den, man udfører først. Diagrammet nedenfor illustrerer, hvad det vil sige, at $D_{240} \otimes S_{\vert} = S_{\backslash}$.



Spørgsmål P2a: Udfyld hullerne i nedenstående kompositionstabel, sådan at $(\mathbb{D}_3, \otimes)$ opfylder gruppekriterierne.

$(\mathbb{D}_3, \otimes)$	D_0	D_{120}	D_{240}	$S_{\vert}$	$S_{\backslash}$	$S_{/}$
D_0		D_{120}	D_{240}	$S_{\vert}$	$S_{\backslash}$	$S_{/}$
D_{120}			D_0	$S_{/}$		$S_{\backslash}$
D_{240}		D_0		$S_{\backslash}$	$S_{/}$	$S_{\vert}$
$S_{\vert}$		$S_{\backslash}$	$S_{/}$	D_0	D_{120}	
$S_{\backslash}$		$S_{/}$	$S_{\vert}$	D_{240}		D_{120}
$S_{/}$			$S_{\backslash}$		D_{240}	D_0

Spørgsmål P2b: Har $(\mathbb{D}_3, \otimes)$ en undergruppe, der er isomorf med den abstrakte gruppe $(H, \times)$ fra opgave **P1**? Hvis ja, opskriv da dens elementer.

Spørgsmål P2c: Betragt den abstrakte gruppe $(G, \odot)$ givet ved tabellen nedenfor. Er $(G, \odot)$ isomorf med $(\mathbb{D}_3, \otimes)$? Har $(G, \odot)$ en undergruppe, der er isomorf med $(H, \times)$? Hvis ja, angiv da dens elementer.

$(G, \odot)$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_1
g_3	g_3	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2
g_4	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3	g_4
g_6	g_6	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5

B.8.3 Formuleringsopgave

På denne side vil jeg bede dig om med en sammenhængende tekst at beskrive, hvad du har lært i dette forløb?

C Resultater fra den skriftlige prøve

Opg.	1	2	3	4
M1	1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 20**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 17**
M2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 18**	1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 17**	1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 **= 13**
M3	1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 **= 17**	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 20**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 **= 20**
M4	1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 16**	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 **= 13**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 20**	1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 **= 20**
M5	1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 **= 15**	1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 **= 12**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 **= 17**
M6	1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 **= 17**	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 19**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 **= 19**	1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 **= 4**
M7	1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 **= 15**	1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 14**	1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 **= 19**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**
M8	1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 **= 13**	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 **= 18**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 **= 20**	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 **= 18**
M9	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 **= 18**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 **= 18**
M10	1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 **= 13**	1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 **= 12**	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 **= 14**	1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 **= 9**
Opg.	*a*	*b*	*c*	
P1	1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 20**			
P2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 21**	1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 **= 16**	2 1 0 2 2 0 0 1 2 1 1 0 1 1 2 0 1 1 1 1 0 **= 19/42**	

Antal fuldstændig rigtige besvarelser: **M1**: 17; **M2**: 12; **M3**: 15; **M4**: 10; **M5**: 11; **M6**: 4; **M7**: 10; **M8**: 12; **M9**: 18; **M10**: 7; **P1**: 20; **P2a**: 21; **P2b**: 16; **P2c**: 5;

Fordeling af elevernes antal rigtige i Multiple Choice: **0-20:** 0 ; **21-25:** 3 ; **26-30:** 5 ; **31-35:** 8 ; **36-40:** 5

Fordeling af elevernes antal rigtige i Problemopgaver: **1:** 1 ; **2:** 1 ; **3:** 7 ; **4:** 8 ; **5:** 4

1. He: Multiple Choice: 40/40; Problemopgaver: 5/5

2. Anna: Multiple Choice: 29/40; Problemopgaver: 4/5

3. Michael: Multiple Choice: 23/40; Problemopgaver: 1/5

4. Karla: Multiple Choice: 37/40; Problemopgaver: 5/5

5. Morten: Multiple Choice: 35/40; Problemopgaver: 5/5

6. Theodor: Multiple Choice: 29/40; Problemopgaver: 3/5

7. William: Multiple Choice: 23/40; Problemopgaver: 2/5

8. Marie: Multiple Choice: 30/40; Problemopgaver: 4/5

9. Kristian: Multiple Choice: 40/40; Problemopgaver: 5/5

10. Nanna: Multiple Choice: 32/40; Problemopgaver: 3/5

11. Katrine: Multiple Choice: 35/40; Problemopgaver: 3/5

12. Arnela: Multiple Choice: 25/40; Problemopgaver: 3/5

13. Eddie: Multiple Choice: 33/40; Problemopgaver: 3/5

14. Sonja: Multiple Choice: 33/40; Problemopgaver: 4/5

15. Ida C.: Multiple Choice: 35/40; Problemopgaver: 4/5

16. Anne: Multiple Choice: 31/40; Problemopgaver: 3/5

17. Ida J.: Multiple Choice: 34/40; Problemopgaver: 4/5

18. Pingnan: Multiple Choice: 37/40; Problemopgaver: 5/5

19. Niels: Multiple Choice: 29/40; Problemopgaver: 4/5

20. Jacob: Multiple Choice: 38/40; Problemopgaver: 4/5

21. Emilie: Multiple Choice: 30/40; Problemopgaver: 3/5

Litteratur

[1] Jakobsson-Åhl, Teresia: *Algebra in upper Secondary Mathematics*, Luleå University. 2006.

[2] Dubinsky, Ed et al. : *On learning fundamental concepts of group theory*. Educational Studies in Mathematics 27. Klüwer. 1994.

[3] Siu, Man-Keung: *Which latin squares are Cayley tables?*. The American Mathematical Monthly. Vol 98. No.7. pp.625-627. USA. 2009

[4] Kleiner, Israel : *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser Boston. 2007.

[5] Netto, Eugen: *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra.* Leipzig, B. G. Teubner. 1882.

[6] Weber, Heinrich: *Lehrbuch der Algebra, Kleine Ausgabe.* Braunschweig, Friedr. Vieweg Sohn. 1912.

[7] Bell, E.,T.: *The Development of Mathematics*. McGraw Hill. 1945

[8] Charbonneau, Lois: *Algebra and its relation to geometry*. I *Approaches to algebra - perspectives for research and teaching*, Kluwer Academic Publishers. Holland. 1996.

[9] Mahoney, Michael S.: *Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert.* Rete 1, 1971, p. 15-31. Engelsk oversættelse på:
http://www.princeton.edu/ hos/Mahoney/articles/beginnings/beginnings.htm.

[10] Unguru, Sabetai: *On the need to rewrite the history of greek mathematics*. I *Classic history of greek mathematics*, Kluwer academic publishers. Holland. 2004.

[11] Dorier, Jean-Luc : *Meta level in the teaching of unifying and generalising concepts in mathematics*. Educational Studies in Mathematics 29, p.175-197. Kluwer Academic Publishers. Holland. 1995

[12] Winsløw, Carl: *Didaktiske Elementer*. Biofolia. Frederiksberg. 2006.

[13] Brosseau, Guy: *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers. Storbritanien. 1997.

[14] Perrin-Glorian, Marie-Jeanne: *From producing optimal teaching to analysing usual classroom situations. Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: the notion of milieu*. Universite Paris Diderot. Frankrig. 2005

[15] Hersant, M. og M.-J. Perrin-Glorian: *Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations*. Paris. 2005

[16] Warfield, Virginia: *Invitation to Didactic.* University of Washington. U.S.A. 2006

[17] Legrand, Marc: *Scientific debate in mathematics courses.* p. 127-135 i *The teaching and learning of mathematics at university level*, Kluwer Academic Publishers, Holland, 2001.

[18] Bloch, Isabella: *Promote Teachers' Pedagogical Content Knowledge- situations for mathematics teachers education*,

[19] Winsløw, Carl: *Didaktiske miljøer for ligedannethed*, I MONA 2006-2. pp.47-62. Københavns Universitet. 2006

[20] Duval, R.:*The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Mediterranean Journal for research in mathematics Ed.1 no.2. Nord Pas-de-Calais. 2002.

[21] Tall, D.: *Functions and Calculus*. International Handbook of Mathematics education. Doordrecht: Kluwer, 1997.

[22] Hebsgaars, T et al.: *Matematik Højniveau 2 - Integralregning og differentialligninger.* Forlaget TRIP. Vejle. 1995

[23] Sfard, Anna: *On reform movement and the limits of mathematical discourse*. Mathematical thinking and learning 2. Haifa, Israel. 2000.

[24] Thorup, Anders: *Algebra*. K.U. 1998.

[25] Barbé, Joaquim et al.: *Didactic restrictions on the teachers practice...*. I Educational Studies in Mathematics nummer 59. Springer. 2005.

[26] Bosch, Chavallard and Gascon: *Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics*. CERME. 2005.

[27] Artigue, Michèle: *Learning mathematics in a CAS-environment...*. International Journal of Computers for Math. 7, 2002.

[28] Trouche, Luc: *An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments*. I D. Guin et al.: the didactical challenge of symbolic calculators. Springer. Berlin. 2005.

[29] Winsløw, Carl: *Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering*. Educational Studies in Mathematics 52. 2003