INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori

Sofie Stoustrup

Speciale for cand.scient-graden i matematik

Marts 2010

INDs studenterserie nr. 18

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
Nr. 18: Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)

Abstract
Den antropologiske didaktiske teori (herefter ATD) anvendes her til at beskrive det matematiske emnefelt differentialligninger. Først undersøges den didaktiske transposition, hvorved det udvælges hvilke dele af emnet, der skal behandles. Det viser sig at de vigtigste indydelser på denne transposition er læreplan og gamle eksamenssæt.

Den didaktiske transposition giver anledning til at definere en række problemer eller hverv (fra engelsk: tasks), der danner grundlag for udviklingen af matematiske praxeologier. For at styrke udviklingen af disse praxeologier hos eleverne formuleres tre temaopgaver om henholdsvis beviset for løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden, kvalitativ analyse af en differentialligningsmodel ved hjælp af fasediagrammer og opbygning af en differentialligningsmodel ud fra en realistisk omend forsimplet situation.

De tre temaopgaver blev afprøvet på et 3.g A-niveau matematik hold på Falkonergårdens Gymnasium i november-december 2009. Resultatet af denne afprøvning er analyseret på baggrund af elevernes besvarelser af temaopgaverne og andre kilder. Ud fra denne analyse er det forsøgt klarlagt i hvor høj grad eleverne på holdet har fået opbygget de ønskede praxeologier

***IND's studenterserie** består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både inden for og uden for universitetets mure.*

Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer. Besøg www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori

Sofie Stoustrup (050283)

Afleveret d. 31. marts 2010

Vejleder: Carl Winsløw

Institut for Naturfagenes Didaktik

Københavns Universitet

Speciale for cand.scient graden i matematik. Institut for matematiske fag, Københavns Universitet
Thesis for the Master degree in Mathematics. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

Indhold

1 Resumé

Den antropologiske didaktiske teori (herefter ATD) anvendes her til at beskrive det matematiske emnefelt differentialligninger. Først undersøges den didaktiske transposition, hvorved det udvælges hvilke dele af emnet, der skal behandles. Det viser sig at de vigtigeste indflydelser på denne transposition er læreplan og gamle eksamenssæt.

Den didaktiske transposition giver anledning til at definere en række problemer eller hverv (fra engelsk: tasks), der danner grundlag for udviklingen af matematiske praxeologier. For at styrke udviklingen af disse praxeologier hos eleverne formuleres tre temaopgaver om henholdsvis beviset for løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden, kvalitativ analyse af en differentialligningsmodel ved hjælp af fasediagrammer og opbygning af en differentialligningsmodel ud fra en realistisk omend forsimplet situation.

De tre temaopgaver blev afprøvet på et 3.g A-niveau matematik hold på Falkonergårdens Gymnasium i november-december 2009. Resultatet af denne afprøvning er analyseret på baggrund af elevernes besvarelser af temaopgaverne og andre kilder. Ud fra denne analyse er det forsøgt klarlagt i hvor høj grad eleverne på holdet har fået opbygget de ønskede praxeologier. Resultatet af denne undersøgelse er ret blandet, idet mange af eleverne nåede at opbygge nogle af praxeologierne i en rimelig grad, men kun få elever fik opbygget praxeologierne i så høj grad som håbet. Forløbet omkring afprøvningen bar præg af at ligge lige op til at eleverne skulle skrive studieretningsprojekt (SRP) og derfor havde fokus andre stedet en matematik.

Afslutningsvis gives forslag til hvordan et lignende forløb kunne gennemføres en anden gang, på en sådan måde at eleverne i højere grad opbyggede de relevante matematiske praxeologier.

2 Abstract

The Anthropological Theory of Didactics (hereafter ATD) is used to describe the mathemtical subject of differential equations. The thesis is begun with a description of the didactical transposition, by which the exact subject to be taught is defined. As it turns out, the most important sources of influence are the national curriculum and national exams.

The didactical transposition gives rise to a number of tasks, which form the basis for the development of suitable mathematical praxeologies. In order to encourage the formation of these praxeologies in the students, three thematic projects are defined. The themes for these projects are: prooving the formula for the complete solution to first order, linear differential equations, making a qualitative investigation of a model using diffenrential eqautions and making a model using diffenrential eqautions, which describes a realistic if somewhat simplified situation.

The three thematic projects were tested on a third year A-level class at Falkonergårdens Gymnasium during november and december of 2009. The results of this test have been analysed, using the students' answers to the thematic project as well as other sources. Using this analysis, an attempt is made to make clear to which degree the students have managed to form the relevant mathematical praxeologies. The result of this investigation is rather mixed, as most of the students managed to form some sort of praxeology for some of the tasks, but few managed to do so to the degree anticipated. The test-run was marked by the fact that the students were about to begin writing a large paper (studieretningsprojekt, SRP) and so much of their energy was directed elsewhere.

At the end of the thesis a few suggestions are given as to how a similar course could be taught at another time in such a way that the students are more likely to form the desired mathemtical praxeologies.

3 Introduktion

Med gymnasiereformen er det blevet en mulighed, og senere et krav, at lade projekter spille en vigtig rolle til den mundtlige eksamen i matematik. Dette er et nyt element i forhold til matematik på gymnasialt niveau tidligere, og har ført til en del uenighed og forvirring blandt gymnasielærere, om hvad et projekt i matematik er. Som svar på denne forvirring skrev Bjørn Grøn, fagkonsulenten i matematik for HF og STX, i november 2008 en artikel i LMFK-bladet. Her fremhævede han de temaopgaver, der blev brugt i faget 2AN på Københavns Universitet, som et godt format for projekter i matematik.

Der er mange fordele ved brugen af temaopgaver som projekter på STX. Først og fremmest er formatet klart rettet mod en mundtligt eksamen. På gymnasielt niveau har selv de dygtigeste elever svært ved at hæve sig over reproduktion af kendte beviser til mundtlig eksamen. Temaopgaver kan være en hjælp for eleverne til at føle en højere grad af ejerskab i forhold til den teoretiske side af matematiken. Opgaverne giver eleverne en mulighed for at arbejde med matematisk teori i et miljø, hvor de har tilstrækkelig støtte og styring fra læreren til ikke at fare vild, men samtidig får lov til selv at udforske det valgte emne.

Temaopgaver er imidlertid designet til brug på universitetsniveau, og der ligger derfor en udfordring i at omsætte tanken bag temaopgaver til et format, der kan anvendes på gymnasialt niveau. Dels har universitetsstuderende nogle andre faglige og personlige forudsætninger, dels er de praktiske rammer om arbejdet med temaopgaver anderledes. I dette projekt giver jeg et bud på, hvordan temaopgaver kan anvendes i en gymnasiel sammenhæng. Jeg har valgt at gøre dette inden for et af de matematisk set mest avancerede områder, man arbejder med i gymnasiet, nemlig differentialligninger.

I afsnit 2 gennemgår jeg kort den didaktiske, teoretiske baggrund for specialet samt de faktorer, der adskiller den gymnasielle sammenhæng fra den universitetsmæssig. Afsnit 3 indeholder en gennemgang af den matematiske teori, der udgør den videnskabelige viden, hvorfra den viden, eleverne skal undervises i, udvælges. Her gennemgås også nogle af de faktorer, der spiller ind, når den viden som eleverne skal undervises i, udvælges. Afsnit 4 er en grundig a priori analyse af de tre temaopgaver, eleverne arbejdede med under projektet. Afsnit 5 indeholder en a posteriori analyse af forløbet ud fra det datamateriale, jeg har indsamlet, mens afsnit 6 er en diskussion af mulige forbedringer i designet. Endelig afsluttes projektet i konklusionen i afsnit 7, hvor jeg opsummere og samler de vigtigeste resultater og overvejelser.

Jeg vil gerne sige tak til adjunkt Mikkel Nielsen og 3g MA fra Falkonergårdens Gymnasium og HF for at have deltaget i dette forsøg. Mikkel er desuden kommet med værdifulde forslag og råd til designet af temaopgaverne, hvilket jeg sætter stor pris på.

Tak til professor Carl Winsløw, Institut for Naturfagenes Didaktik på Københavns Universitet, for vejledning i arbejdet med dette speciale. Da Carl er medansvarlig for de oprindelige forsøg med temaopgaver på 2AN, har han været en vigtig ressource i arbejdet med at omsætte arbejdsformen til gymnasielt niveau.

4 Didaktisk Teori

4.1 ATD

Den antropologiske didaktiske teori (ATD) er en generel epistemologisk model for matematisk viden. I ATD identificeres to forskellige matematiske aktiviteter: praksisblokken og teoriblokken. Praksisblokken består af den type problemer, der behandles inden for et matematisk emne samt de teknikker, der bruges til at behandle disse problemer. Problemer (på engelsk: tasks) skal forståes meget bredt. Teoriblokken består af teknologi og teori, hvor teknologi er den måde man taler om de specifikke teknikker, mens teori er de dybereliggende begrundelser.[1]

Disse fire elementer (problemer, teknikker, teknologi og teori) inden for et specifikt matematisk emne udgør tilsammen en matematisk praxeologi. Afhængigt af omfanget og fuldstændigheden af det behandlede emne kan en matematisk praxeologi være enten specifik, lokal, regional eller global.[2] En specifik praxeologi er baseret på en specifik opgavetype. Denne form for matematisk praxeologi bliver i særdeleshed relevant når der optræder egentlige typeopgaver inden for et emne. Specifikke praxeologier rummer ikke en egentlig teoriblok, da de reelt består udelukkende af opgaver og teknikker til at løse disse.

Lokale praxeologier formes ved at samle et antal specifikke praxeologier, der alle kan forklares ved brug af den samme teknologiske diskurs. Hermed formes i hvert fald teknologi-delen af teoriblokken, selvom den egentlige teori stadig kan mangle.

Regionale praxeologier formes ud fra lokale praxeologier, der alle kan begrundes i en sammenhængende teori.

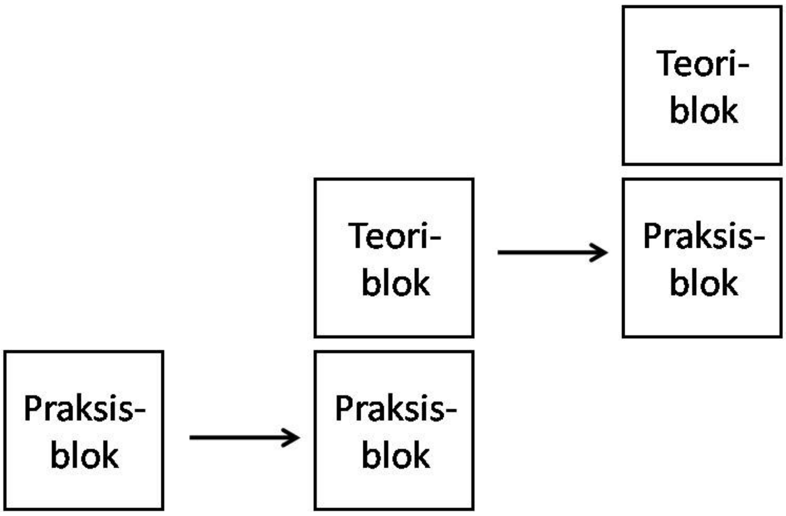
Endelig dannes globale praxeologier ud fra lokale og regionale praxeologier, der tilsammen danner et samlet emne med en sammenhængende teori, hvor alle relevante spørgsmål om emnet kan besvares inden for denne teori.

Disse praxeologier er ikke statiske størrelser, der formes på en gang og derefter ikke ændres. Derimod er dannelsen af matematiske praxeologier en dynamisk process, der selv kan studeres. Dette studie kan selv modelleres i praxeologier, kaldet didaktiske praxeologier. [3]

[1] Barbé et al (2005), s. 169-170
[2] Bosch og Gascón (2006), s. 59
[3] Bosch og Gascón (2006), s. 60

Denne opdeling i praxeologier kan bruges til at klarlægge elevernes viden om et givent matematisk emne. Har eleverne udelukkende dannet punktuelle praxeologier, eller har de samlet disse til regionale praxeologier? Er de endda begyndt at danne en regional praxeologi med en samlende teori for alle de regionale praxeologier?

Ofte vil det være tilfældet at teoriblokken for en matematisk praxeologi er årsag til en række nye spørgsmål og problemer. Disse problemer giver så anledning til dannelsen af en ny matematisk praxeologi, hvor (dele af) den første praxeologis teoriblok optræder i den anden praxeologis praksisblok (se figur 1).



Figur 1: Skema over udvikling fra teoriblok til praksisblok, fra Winsløw, 2006, s. 4

Et andet element af ATD er den didaktiske transposition. Matematisk viden er ikke den samme på alle niveau; den viden, universitetsstuderende har om differentialligninger er ikke identisk med den viden, gymnasieeleverne opnår om emnet. For et matematisk emne identificerer ATD fire trin i den didaktiske transposition: Videnskabelig viden, den viden der skal undervises i, den viden der bliver undervist i og endelig den viden eleverne rent faktisk opnår.[4]

Den videnskabelige viden er den viden om et givent emne, der retfærdiggør og legitimerer undervisningen. Det er den viden, der bruges til at skabe ny viden, og som samtidig giver en sammenhængende teoretisk baggrund for al ny viden om emnet.

Den viden, der skal undervises i, er fastlagt af forskellige faktorer. Disse kan bredt

[4]Bosch og Gascón (2006), s.56-57

deles op i institutionelle og didaktiske faktorer.[5] De institutionelle faktorer kan til dels være givet at fagrådet eller undervisningsministeriet, men omfatter også ting som økonomiske og materielle muligeheder, samt aftagernes forventninger til eleverne. I forbindelse med et fag i gymnasiet er det officielt læreplanen, der fastlægger, hvad eleverne bør vide om et emne. Lærerplanen, selv i matematik, er ofte ret bredt formuleret, og giver typisk læreren en del frihed til selv at bestemme hvilke opgavetyper og løsningsmetoder, eleverne skal introduceres til. Der findes dog også en række mindre officielle kilder, der ligeledes er med til at fastlægge, hvad undervisningen bør indeholde. Den vigtigeste af disse er formentlig tidligere eksamensopgaver, der stiller meget eksplicitte krav til, hvilke opgavetyper eleverne bør lære at løse. Derudover er der en lang række kilder til inspiration:

- Lærebøger. I matematik har en klasse typisk en grundbog, og af tidshensyn såvel som hensyn til elevernes mulighed for at læse på emnet derhjemme, vil læreren ofte vælge at følge grundbogens fremstilling.
- Vejledningen, der giver en lang række uddybende forklaringer til læreplanen, men som modsat denne ikke nødvendigvis skal følges.
- Inspiration fra kolleger, enten direkte eller gennem fagets sider på EMU'en faglærerforeninger og fagblade.

De didaktiske faktorer er begrundet i den valgte didaktiske teori, her ATD. Dermed er det vigtigt at udvælge den viden, der skal undervises i, på en sådan måde at eleverne får de bedste vilkår for at danne sammenhængende matematiske praxeologier. Dette bør ideelt set gøres både af institutionerne, hvilket for gymnasiets side vil sige undervisningsministeriet, og af den enkelte lærer.

Den viden, der bliver undervist i, er den viden, som den enkelte lærer vælger at præsentere eleverne for. I denne sammenhæng skal præsentere ikke opfattes således at den underviste viden kun omfatter det, læreren viser eleverne. Den underviste viden er den viden, som kommer i spil i en given undervisningssituation. Dette kan fremlægges af læreren, men også komme frem som følge af elevernes arbejde med spørgsmål og opgaver, læreren har stillet.

[5] Barbé et al (2005), s. 172

Den viden, eleverne rent faktisk opnår, er den viden, som eleverne er i stand til at anvende eller formulere når undervisningen i emnet (eller et delemne) er afsluttet. Det er naturligvis umuligt at sige noget direkte om omfanget af denne viden for den enkelte elev, men det er denne type viden, der kommer til udtryk når eleverne skal løse opgaver og generelt formulere sig om det matematiske emne.

Ud over disse fire trin er den overordnede epistemologiske model også et vigtigt element i den didaktiske transposition.[6]. Inden for ATD fungerer ATD som denne model, og alle overvejelser om den didaktiske transposition bør ideelt set foregå med begrundelse i opbygningen af de matematiske praxeologier. Det betyder, at når læreplanen fastlægges, så bør det ske på en sådan måde, at det er muligt for eleverne at danne hele lokale og regionale praxeologier. Ligeledes bør den enkelte lærer i fastlæggelsen af undervisningen tage hensyn til elevernes muligheder for at udvikle sådanne praxeologier.

På samme måde som den overordnede epistemologiske model påvirker den didaktiske transposition, påvirker forsøg med og observation af virkelige didaktiske transpositioner også den epistenologiske model, her ATP. På denne måde sammenkobles den didaktiske analyse af faktiske forsøg med den epistemologiske analyse af et matematisk område.

Som nævnt ovenfor i forbindelse med definitionen af den viden, der skal undervises i, er der mange udefra kommende faktorer, der spiller ind, når denne viden skal defineres. Dette optræder hos Chevellard[7] som forskellige niveauer af fastsættelse (levels of determination), der tilsammen bestemmer hvilke muligheder, den enkelte lærer har for selvstændigt at fastlægge hvilke emner, der berøres i undervisningen. Figuren (figur) viser den overordnede struktur for disse niveauer.

I forbindelse med dette speciale, er Skolen den danske gymnasieskole, Disiplinen er matematik, Domænet er analyse, Sektoren er differentialligninger, mens Temaer og Emner diskutteres nedenfor. Mere generelt kan man sige at de nederste fire niveauer, emne, tema, sektor og domæne, svarer til de fire niveauer af matematiske praxeolo-

[6]Bosch og Gascón (2006), s. 57
[7]Chevellard (2002b) og (2004)

gier: specifik, lokal, regional og global.[8] Dermed bliver det også klart, at elevernes mulighed for at danne matematiske praxeologier i høj grad er påvirket af faktorer, som det ligger uden for den enkelte lærers mulighed at ændre. Dermed mener Chevellard også at det er nødvendigt at gentænke matematik undervisningen i gymnasiet under hensyntagen til ATD og til elevernes dannelse af matematiske praxeologier.[9]

[8]Bosch og Gascón (2006), s. 61
[9]Bosch og Gascón (2006), s. 62

4.2 Temaopgaver

Temaopgaver er oprindeligt tænkt som en arbejdsform til universitetsstuderende. Temaopgaver skal dels give de studerende en vis faglig viden, men skal også få de studerende til at arbejde mere selvstændigt med de teoretiske sider af et fag, specifikt matematik. Derigennem kan eleverne opnå en bedre forståelse af den matematiske teori, der er behandlet i temaopgaven. Samtidig giver en mere selvstændig arbejdsform mulighed for at eleverne kan opnå en større ejerskabsfølelse i forhold til stoffet, således at en del af de studerendes motivation forhåbentlig kan flyttes fra ekstern (eksamen, karakterer) til intern (faget eller stoffet er interessant).[10]

Temaopgaverne beskrevet i Grønbæk og Winsløw (2006) og (2007) blev anvendt og testet i kurset 2AN på Københavns Universitet i efteråret 2002 og 2003. De består af fire elementer[11]:

- En beskrivelse af de kompetencemål, temaopgaven skal hjælpe de studerende til at opfylde.
- En introduktion til temaet for opgaven
- En række spørgsmål, der starter med at være lukkede opgave-lignende spørgsmål og efterhånden bliver mere åbne.
- En indikation af hvilke spørgsmål der *skal* besvares, og hvilke spørgsmål, der er frivillige. Dette er især relevant i forhold til den senere eksamen.

Generelt er temaopgaver en række spørgsmål om et samlet tema, der giver de studerende eller eleverne mulighed for at besvare opgaven på deres eget niveau. Dette kan opnås på flere måder: dels kan der stilles spørgsmål til den matematiske teori, der kan besvares mere eller mindre udtømmende, og dels kan der stilles frivillige spørgsmål. Spørgsmålene skal lægge op til, at de studerende arbejder selvstændigt med emnet eller temaet for opgaven, og spørgsmålene er derfor i materiale og opgaver, der ikke direkte er dækket af tekstbøger og undervisningen i øvrigt, men som ligger indenfor de studerendes nærmeste udviklingszone.

[10]Grønbæk og Winsløw (2007), s. 2-5

[11]Grønbæk og Winsløw (2007), s. 10-11

Arbejdet med temaopgaver kan med fordel foregå i grupper. Dels kan de studerende støtte hinanden og hjælpes ad med de mere vanskelige spørgsmål, dels mindsker det rettebyrden betragteligt. Ud over den hjælp de studerende kan få fra hinanden, bør de have adgang til vejledning i løbet af arbejdet med temaopgaverne. Dette gøres blandt andet ved skriftlige tilbagemeldinger (men ikke karakterer), som de studerende får i god tid inden eksamen.[12]

Det er vigtigt at elevernes arbejde med temaopgaver bliver evalueret eller bedømt. Dette kan gøres ved en mundtlig eksamen, som det er tilfældet i Grønbæk og Winsløw (2006) og (2007), eller ved give karakterer for opgaverne, og lade disse tælle som en vigtig del af den samlede karakter. På denne måde sikres den eksterne motivation for de studerende, og de opfordres dermed til at lave den bedst mulige besvarelse af opgaven.[13]

I 2AN fungerede temaopgaverne som eksamensspørgsmål, idet de studerende til den mundtlige eksamen trak en af temaopgaverne og derefter skulle fremlægge udvalgte dele af denne opgave. De studerende havde selv en vis autonomi i forhold til hvilke spørgsmål, de fokuserede på til eksamen, samt på hvilket niveau de besvarede disse spørgsmål (selvom dette selvfølgelig havde en stor indflydelse på den efterfølgende bedømmelse). Motivationen for dette var i høj grad at bevæge sig væk fra en mere forelæsningslignende eksamen, hvor den studerende blot fremlagde en vis mængde teori, først og fremmest centreret om et større bevis.[14] Et af problemerne med den type eksamen er, at det kan være svært at afgøre i hvor høj grad den studerende har forstået det fremlagte bevis, idet det er muligt at klare sig gennem denne type eksamen ved at lære beviset og (dele af) teorien uden ad. Bjørn Grøn fremhæver i en artikel i matematiklærerforeningens blad[15] temaopgaverne fra 2AN som en god model for de 'projekter', der efter reformen kræves på alle niveauer af matematik i gymnasiet. Han forklarer at "Temarapporterne betyder, at de studerende får større ejerskab til det faglige stof, og at forberedelsen til den mundtlige prøve foregår gennem hele kursusforløbet."[16]. Ovenstående overvejelse om mundtlige eksamener, der

[12]Grønbæk og Winsløw (2007), s. 11
[13]Grønbæk og Winsløw (2007), s. 13
[14]Grønbæk og Winsløw (2007), s. 10
[15]Grøn, 2008, s. 12-13
[16]Grøn, 2008, s. 12

har fremlæggelsen af et bevis fra grundbogen som et centralt element, gælder efter min mening i høj grad også for gymnasiet.

En stor del af motivationen for at anvende temaopgaver i gymnasiet er som nævnt ovenfor at give eleverne en mulighed for at arbejde med den teoretiske side af et emne på en mere selvstændig vis. Ofte vil gymnasieelever kun stifte bekendskab med matematisk teori i form af beviser gennemgået af læreren og derefter evt. eleverne selv. På den måde vil (nogle af) eleverne blive i stand til at reproducere beviserne, men der er næppe nogle gymnasieelever, der kan tage selvstændig stilling til bevisets status. De vil ikke selv være i stand til at afgøre om nogle dele af beviset er overflødigt, eller på egen hånd afgøre hvornår beviset er afsluttet - hvornår sætningen eller formlen rent faktisk er bevist. Dermed bliver deres teoretiske, matematiske kunnen reelt meget begrænset eller ikke-eksisterende ud fra de definitioner, man anvender på universitetsniveau. Gennem brugen af temaopgaver kan man give eleverne lejlighed til at øve sig på dele af dette.

Da temaopgaver i deres oprindelige form, var tiltænkt universitetsstuderende, kan man have visse forventninger til modtagerne af opgaven:[17]

- De har valgt matematik (eller et fag, der kræver et godt kendskab til avanceret matematik), og kan derfor forventes at være interesserede i faget.
- Det kursus, som temaopgaverne bruges til tæller for en stor del af den samlede arbejdsbyrde (i tilfældet 2AN var det 1/3).
- De har kun få (2 eller 3) andre kurser

Derudover findes en række forudsætninger, som ikke artikuleres i Grønbæk og Winsløw (2006) eller Grønbæk og Winsløw (2007), men som er nyttige til at belyse forskellen på forudsætningerne for brugen af temaopgaver på universitetet og i gymnasiet:

- Temaopgaverne skal bruges til en mundtlig eksamen om kort tid (under 6 måneder), og de studerende kan derfor se et klart formål med at lave temaopgaverne.

[17] Grønbæk og Winsløw (2007)

- De studerende har en egentlig eksamensperiode, hvor de kan forventes at vende tilbage til temaopgaverne og om nødvendigt rette dem og tilføje ny viden.
- Det er muligt at lade aflevering af temaopgaverne være en forudsætning for deltagelse i eksamen.

Derudover er det et vigtigt mål at de studerende gennem besvarelsen af temaopgaverne får mulighed for selvstændigt at behandle et område inden for matematisk teori. På denne måde kan man forhåbentlig undgå udenadslære uden forståelse til den mundtlige eksamen.

Ved anvendelse på gymnasielt niveau, er det nødvendigt at tage stilling til de forudsætninger og mål, der er beskrevet ovenfor. Forsøgsklassen i dette projekt er et opgraderingshold, der har valgt at tage matematik på A-niveau. De fleste af eleverne har valgt dette, enten fordi det vil være en fordel i forhold til deres videregående uddannelse, eller som den mindst utiltalende mulighed. Der er enkelte elever, der har en egentlig interesse for matematik, men for de fleste er interessen kun for den anvendelsesorienterede del af faget. Der er dog også en enkelt elev på holdet, der har vist interesse for matematisk teori.

Faget matematik tæller for 5 moduler ud af ca. 35 i løbet af to undervisningsuger, samt for 60 ud af ca. 365 timer sat af til skriftligt arbejde. Disse tal varierer afhængigt af klassen og gymnasiet, men er i denne størrelsesorden. Det er dermed ikke helt entydigt, hvor stor en del af elevernes samlede arbejdsbyrde matematik tæller som, men det er væsentligt mindre end hvad der er tilfældet med et universitetsfag. Dette hænger naturligt sammen med, at de har væsentligt flere fag end man har på universitetet.

Dertil kommer at eleverne ikke kan være sikre på, hvorvidt de skal til mundtlig eksamen i matematik. På A-niveau skal de enten op mundtligt eller skriftligt, men ikke begge dele. Undervisningen er nødt til at tage hensyn til dette, også i disponeringen af tid afsat til skriftligt arbejde. Usikkerheden mht. eksamen medfører også, at den ikke er en motiverende faktor på helt samme måde som på universitetet. Dette bestyrkes af at mange gymnasieelever tænker mere kortsigtet; eksamen bliver først en god motivationsfaktor, når den kommer meget tæt på.

Tilgengæld har gymnasieeleverne en anden ekstern motivationsfaktor i form af årskarakteren. Hvis det bliver gjort klart for eleverne, at temaopgaverne tæller i forhold til deres årskarakter, vil dette virke som en motiverende faktor for mange elever.

I hvor høj grad eleverne vender tilbage til temaopgaverne og retter i dem er usikkert, men er i øvrigt ikke relevant i denne sammenhæng.

Elever, der mangler at aflevere mange skriftlige opgaver, vil opleve forskellige sanktioner. Det er dog meget usædvanligt at udelukke disse elever fra deltagelse i eksamen, og manglende aflevering af en eller flere temaopgaver vil ikke i sig selv føre til sanktioner fra skolens side.

Man må dermed forvente at motivationen for eleverne i forsøget kommer hovedsageligt fra den indflydelse, deres besvarelse af temaopgaverne har på deres årskarakter, samt for nogle elevers vedkommende fra et ønske om at lære mest muligt.

5 Differentialligningernes stofdidaktik

5.1 Differentialligninger på A-niveau STX

Der er en lang række af mulige indflydelseskilder i den didaktiske transposition, der afgør hvordan et forløb om differentialligninger kommer til at se ud på A-niveau i den almene gymnasium, STX:

- Læreplanen
- Eksamen
- Vejledningen
- Lærebøger
- Fagets sider på EMU'en
- Matematiklærer-foreningen
- Bladet Matematik
- Tradition
- Kolleger

Blandt disse må de første to tiltrække sig særlig opmærksomhed, idet de som de eneste gælder for alle gymnasier i Danmark. De resterende kilder kan give inspiration til forskellige tilgange, men ingen af dem stiller krav som læreren nødvendigvis skal følge. Skift i læreplan og eksamen er det eneste, der kan tvinge lærere til at tænke nyt.

Dette blev tydeligt i forbindelse med indførelsen af en ny eksamensform som et led i gymnasiereformen. Den nye læreplan efter reformen lagde op til at lærere kunne lade deres elever skrive projekter i matematik, som derefter skulle danne grundlag for den mundtlige eksamen. Imidlertid fortsatte mange lærere med at benytte sig af eksamensform a), hvor den mundtlige eksamen minder meget om den, der eksisterede før reformen: eleven trækker et emne eller spørgsmål, der typisk lægger op til at eleven skal koncentrere sig om et enkelt bevis. Efter 30 minutters forberedelse præsenterer eleven så sit emne for lærer og censor, i en form der minder om mundtlig overhøring. Eleven skal først selv præsentere det udtrukne emne, hvorefter lærer og censor stiller uddybende spørgsmål. Det eneste væsentligt nye ved denne eksamensform i forhold til matematikeksamen før reformen, er at eleverne skal kende spørgsmålene i god tid inden eksamen.

Eksamensform b), derimod, er et klart brud med den traditionelle eksamensform. Denne består af "En mundtlig prøve på grundlag af rapporter udarbejdet i tilknytning til undervisningen. ... Eksamensspørgsmålene udformes med en overskrift og konkrete delspørgsmål i relation til rapporterne."[18] Dermed er der lagt op til at elevernes rapporter skal danne grundlag for eksamen i stedet for grundbogen.

Det er vigtigt at bemærke at rapporter og projektforløb ifølge læreplanen skulle udgøre en vigtig del af undervisningen lige meget hvilken eksamensform læreren valgte.[19] Valget af prøveform b) ville dog medføre at eleverne skulle lave rapporter i forbindelse med alle gennemgåede emner, idet man efter reformen skal opgive alt gennemgået stof til eksamen.

I 2007 gennemførte evalueringsinstituttet EVA en stor undersøgelse af matematil på B-niveau på STX og HHX. I forbindelse med denne undersøgelse viste det sig at hele 98% af matematiklærerne på STX valgte prøveform a) til de hold, de afsluttede i sommeren 2007.[20] Rapporten peger desuden på at eksamen med prøveform a) i store træk foregår som før reformen, uden hensynstagen til det nye fokus på kompetencer.[21] Man kunne fristes til at gå et skridt videre end rapporten fra EVA gør, og konkludere at matematikeksamen og i høj grad også matematikundervisningen i sommeren 2007 reelt var stort set uændret fra før reformen. I rapporten anbefales det at der skabes en ny eksamensform til matematik på B-niveau i STX, der samler prøveform a) og b), således at eleverne både skal til eksamen i traditionelle typer af spørgsmål og i spørgsmål, der tager udgangspunkt i elevernes egne rapporter. Der lægges vægt på at den mundtlige eksamen på denne måde kan hjælpe med at sikre

[18] Læreplanen, matematik A-niveau, STX, afsnit 4.2
[19] Læreplanen, matematik A-niveau, STX, afsnit 3.2
[20] EVA, 2007, s. 31
[21] EVA, 2007, s. 35

implementeringen af den nye læreplan.[22] Dette skal formentlig ses i lyset af at en tredjedel af alle matematiklærere på STX på daværende tidspunkt ikke gennemførte flere projekt- og emneforløb end før reformen.[23]. Undervisningsministeriet vælger at følge denne anbefaling, og fra sommeren 2008 indføres prøveform c) som en kombination af prøveform a) og b). I et brev til matematiklærerne om dette skriver fagkonsulent Bjørn Grøn at denne ændring ikke bør føre til en ændring af undervisningsformen, siden læreplanen hele tiden har indholdt krav om at en væsentlig del af undervisningen skal tilrettelægges som projekt- eller emneforløb.[24]

Dette eksempel viser, at hvis man vil ændre på matematikundervisningen (og formentlig undervisningen på STX generelt), er den bedste måde af ændre på eksamen. Dermed bliver eksamen en meget vigtig indflydelse på den didaktiske transposition.

I den forbindelse er det dog vigtigt at være opmærksom på at der i eksemplet ovenfor er tale om en ønsket ændring i arbejdsformer. I forbindelse med ændringer i faglige mål og i særdeleshed i kernestof og supplerende stof vil læreplanen formentlig have en mere direkte indflydelse. Dette kan blandt andet ses i tilfældet med indførelsen af χ^2-test på matematik A- og B-niveau. Dette er sket uden de store diskussioner, som følge af en læreplansændring. Det er imidlertid muligt at dette hænger sammen med at kernestoffet direkte indfluerer den skriftlige eksamen.

5.1.1 Læreplan og vejledning

Læreplanens formuleringer om differentialligninger, såvel som generelt, er relativt løse og ligger i høj grad op til at den enkelte underviser selv kan vælge undervisningsmetoder og specifikke emner. Til kernestoffet på A-niveau hører:

> lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger, kvalitativ analyse af givne differentialligninger samt opstilling af simple differentialligninger.[25]

Dertil kommer det supplerende stof:

[22] EVA, 2007, s. 35
[23] EVA, 2007, s. 24
[24] Grøn, 2008
[25] Læreplanen, matematik A-niveau, STX, afsnit 2.2

differentialligningsmodeller, herunder både opstilling, anvendelse og løsning af differentialligninger.[26]

Ud over kernestoffet og det supplerende stof, giver de faglige mål en idé om hvilke kompetencer eleverne skal tilegne sig gennem undervisningen. På matematik A-niveau skal eleverne kunne:

1. håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold

2. anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

3. anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger

4. anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger

5. opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål

6. redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori

7. demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling

8. demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling

[26] Læreplanen, matematik A-niveau, STX, afsnit 2.3

9. anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.[27]

Af disse er nogle (nr. 2, 5 og 8) umiddelbart irrelevante i forbindelse med differentialligninger, mens andre er umulige at undlade. Dette gælder isærdeleshed nr. 4 ("forskellige metoder til løsning af differentialligninger"), men også nr. 1 (håndtere formler og oversættelse mellem matematisk og naturligt sprog) og 3 (brugen af funktioner i modellering) er nødvendige givet kravene om modellering med differentialligninger. Derudover ville det næppe være realistisk eller ønskeligt at gennemføre et forløb om differentialligigner eller andet avanceret matematik uden brug af IT eller CAS-værktøjer (nr. 9). De sidste to faglige mål (nr. 6 om matematiske ræsonnementer og nr. 7 om anvendelse af matematiken) kan inddrages i det omfang, underviseren ønsker.

De faglige mål er selvfølgelig meget brede. Formuleringen "forskellige metoder" (nr. 4) må fortolkes således at det ikke er tilstrækkeligt at lære eleverne at løse differentialligninger direkte vha. CAS, men at der derudover også skal arbejdes med mindst en anden løsningsmetode. En mulig metode er at finde den fuldstændige løsning vha. forskellige sætninger om differentialligninger. En anden mulighed er at finde løsninger ud fra diagrammer over linjeelementer eller numerisk vha. CAS (fx Excel).

Idet resten af læreplanen ikke stiller krav til den gennemgåede stof, rummer ovenstående uddrag de eneste officielle krav til et forløb om differentialligninger.

Vejledningen til læreplanen indeholder idéer til, hvordan læreplanen kan fortolkes, men i modsætning til læreplanen er der ingen krav til at man følger vejledningen. Dette forhold understreges af at vejledningen indeholder mange, ofte modstridende, forslag til hvert emne.

Dette giver en liste med matematiske emner og kompetencer, som et forløb om differentialligigner *skal* dække:

1. lineære differentialligninger af 1. orden

2. logistiske differentialligninger

3. løsning af differentialligninger

[27] Læreplanen, matematik A-niveau, STX, afsnit 2.1

4. kvalitativ analyse af givne differentialligninger
5. opstilling af simple differentialligninger
6. opstilling af differentialligningsmodeller
7. anvendelse af differentialligninger (og differentialligningsmodeller)

Nogle af disse emner og kompetencer kan med fordel opfyldes sammen. Det vil således være naturligt at lade de differentialligninger, der indgår i arbejdet med løsning af differentialligninger samt til dels i modellering og den kvalitative analyse, være lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger.

Den kvalitative analyse af differentialligninger kan blandt andet tage form af arbejde med linjeelementer, hvilket er beskrevet nærmere nedenfor. Derudover kan for eksempel fasediagrammer inddrages. Linjeelementerne kan bruges til at introducere eleverne til arbejdet med differentialligninger.

Inden eleverne skal arbejde med selv at opstille differentialligningsmodeller, er det naturligt at de får mulighed for at arbejde med en given differentialligningsmodel. Derfor kan følgende punkt tilføjes til listen:

8. undersøgelse af givne differentialligningsmodeller.

5.1.2 Eksamensopgaver fra den skriftlige eksamen

En vigtig faktor i enhver overvejelse om valg af pensum i matematik er den skriftlige eksamen. Dels er eksamen i høj grad med til at motivere eleverne, og dels har man som lærer en forpligtigelse til at forberede eleverne bedst muligt til eksamen. I forbindelse med planlægningen af et forløb er det derfor oplagt at undersøge, hvilke opgaver, der har været stillet inden for emnet til den skriftlige eksamen.

En gennemgang af de skriftlige eksamenssæt, der er stillet på matematik A-niveau, viser at der har været stillet i alt 14 opgaver om differentialligninger. Af de 14 opgaver er tre fra prøven uden hjælpemidler og 11 fra prøven med hjælpemidler.

Alle tre opgaver fra prøven uden hjælpemidler er af samme type: Eleven skal undersøge om eller gøre rede for at en given funktion er løsning til en given differentialligning. Et eksempel på denne opgavetype kan ses på figur 2. Der er selvfølgelig forskellige løsningsmetoder, men den hurtigste må for de fleste elever være at indsætte funktionen og dens differentierede i differentialligningen. Det er derfor vigtigt at eleverne kender til denne måde at undersøge hvorvidt en funktion er en løsning til en differentialligning.

Opgave 5 Gør rede for, at funktionen $f(x) = e^{2x} + 3$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 6.$$

Figur 2: Opgave fra prøven uden hjælpemidler, august 2008

De 11 opgaver fra prøven med hjælpemidler kan deles i tre hovedgrupper:

1. Opgaver, hvor eleverne får model, der indeholder en differentialligning og skal besvare forskellige spørgsmål ud fra denne (8 opgaver).
2. Opgaver, hvor eleverne skal opstille en differentialligningsmodel ud fra en sproglig beskrivelse (2 opgaver).
3. Opgaver uden problemløsnings- eller modelleringselement (1 opgave).

De fleste af opgaverne falder i gruppe 1, der kan opdeles i yderligere 3 undergrupper:

a) Opgaver, hvor eleverne får en differentialligning, som de bliver bedt om at finde en specifik løsning til (3 opgaver). Opgaverne indeholder desuden ofte et ekstra spørgsmål, der retter sig mod den fundne funktion eller mod modellen som helhed.

b) Opgaver, hvor eleverne skal finde væksthastigheden til et givent tidspunkt ud fra differentialligningen (3 opgaver). I disse opgaver er det ikke nødvendigt at løse differentialligningen, men opgaverne indeholder typisk et ekstra spørgsmål, der kræver en god og sammenhængende forståelse af differential- og integralregning, samt af differentialligninger, hvis man vil besvare det uden at løse differentialligningen.

c) Andre opgaver, hvor det er nødvendigt at løse differentialligningen, men hvor eleven ikke direkte bliver bedt om det.

I opgaverne i gruppe 1.a bliver eleverne direkte bedt om at løse en differentialligning. Et eksempel på denne type opgave kan ses i figur 3. Når eleverne bliver bedt om at løse en differentialligning i prøven med hjælpemidler, vil en stor del af eleverne bruge deres CAS-værktøj. Det er muligt at enkelte elever vil vælge at bruge løsningsformlerne, hvis det er muligt, men de fleste af eleverne er vant til at ligningsløsning, for såvel differentialligninger som andre typer af ligninger, gøres ved hjælp af CAS. Da tidspres spiller en væsentlig rolle til de skriftlige eksamener i matematik, er dette på mange måder en fornuftlig strategi, da det typisk vil være den hurtigeste måde for eleverne at klare opgaven på.

Opgave 13 I en model for sammenhængen mellem længde og alder for atlantiske havkatte antages, at en havkats længde L (målt i cm) som funktion af dens alder t (målt i år) er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}619 \cdot e^{-0{,}22t} \cdot L\,.$$

I modellen antages, at en 10 år gammel atlantisk havkat er 72 cm lang.

a) Bestem en forskrift for $L(t)$.

b) Bestem ved hjælp af modellen længden af en 16 år gammel atlantisk havkat, og bestem, hvor gammel en atlantisk havkat er, når den er 40 cm lang.

Kilde: Northw. Atl. Fish. Sci., Vol. 13: 53–61, *Distribution, Growth and Food Habits of the Atlantic Wolffish (Anarhichas lupus) from the Gulf of Maine-Georges Bank Region, Gary A. Nelson and Michael R. Ross, J.*

Figur 3: Opgave fra prøven med hjælpemidler, december 2008

Eventuelle ekstraspørgsmål til funktionen eller modellen er i disse opgaver af en type som eleverne har set og besvaret før, blandt andet i forbindelse med introduktion af funktionsbegrabet i 2.g, samt i forbindelse med regressionsopgaver. Det er derfor ikke relevant at tage særlige hensyn til disse spørgsmål i forbindelse med dette forløb.

Opgaverne i gruppe 1.b kan som de eneste af opgaverne i gruppe 1, besvares uden af eleven har løst differentialligning. Et eksempel på en opgave fra denne gruppe kan ses på figur 4. For at besvare denne type opgave uden af løse differentialligning, kræver det imidlertid at eleverne har en god forståelse for hvad differentialligningen udtrykker. De fleste af eleverne er godt klar over at væksthastigheden til et givent tidspunkt t_0 er lig med værdien af den afledte til funktionen i t_0. Men hvorvidt de tænker videre fra dette, og til at ligningens venstre side ($\frac{dN}{dt}$) er lig med differentialkvotienten, og at opgaven således kan besvares ved indsættelse af de relevante værdier er nok mere tvivlsomt. Dette understøttes af at eleverne generelt ikke klarede opgaven så godt til eksamen - over 25% fik 0 point for opgaven, hvilket kun gør sig gældende for 7 ud af 24 spørgsmål.[28] Dette kunne tyde på at mange af eleverne enten har misforstået opgaven, eller har opgivet at løse den på grund af tidspres eller manglende forståelse.

Opgave 12 I en model for udviklingen af antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antallet af individer til tiden t (målt i døgn). I modellen antages det, at N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00013 \cdot N \cdot (1000 - N),$$

og at der er 50 individer i populationen til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 0$, og bestem antallet af individer til hvert af de tidspunkter, hvor væksthastigheden er 31 individer pr. døgn.

Figur 4: Opgave fra prøven med hjælpemidler, maj 2009

Den sidste af grupperne med opgave med en given differentialmodel, gruppe 1.c, adskiller sig fra de øvrige ved at eleverne her selv skal finde ud af at det er nødvendigt at de løser differentialligningen. Et eksempel på opgaver fra denne gruppe kan ses på figur 5. At dømme efter antallet af elever, der får 0 point i denne opgave, har det været den tredje sværeste opgave for eleverne i det eksamenssæt.[29] Dette kan til dels

[28] Evaluering af de skriftlige prøver i matematik på stx og hf ved sommereksamen 2009, s. 10
[29] Evaluering af de skriftlige prøver i matematik på stx og hf ved sommereksamen 2009, s. 10

skyldes at eleverne ikke er klar over hvad de skal gøre i opgaven. I evalueringen af opgavesættet fremhæves at opgaven indeholder ikke-standardiserede formuleringer, samt at vigtige oplysninger skal findes i teksten uden at være specielt fremhævede.[30] Dette tyder på at mange af eleverne har svært ved at takle differentialligningsopgaver, der ikke er på en eller anden standartform.

Opgave 16 Et vandbad opvarmes fra 20°C til 100°C. Den indre temperatur (målt i °C) i et bestemt objekt, der befinder sig i vandbadet under opvarmningen, er en funktion f af tiden t (målt i sekunder). Det oplyses at f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}03 \cdot (g(t) - y),$$

hvor $g(t)$ er vandbadets temperatur til tiden t. Endvidere oplyses det, at til tidspunktet $t = 0$ er objektets indre temperatur 10°C, og at

$$g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t, \quad 0 \le t \le 320.$$

a) Bestem objektets indre temperatur, når vandbadets temperatur bliver 100°C.

Figur 5: Opgave fra prøven med hjælpemidler, maj 2009

Opgaverne i gruppe 2 er modelleringsopgaver, men opgaverne er meget matematisk og stramt formuleret. Et eksempel på denne type opgave kan ses i figur 6. Eleverne skal dermed ikke selv forholde sig til en virkelig situation og foretage de nødvendige forenklinger, der er en vigtig del af modelleringsprocessen. Begge opgaver (samt tilsvarende opgaver fra de vejledende eksamenssæt) kan løses alene ved at afkode det matematiske sprog i opgaverne. Derved bliver opgaverne i højere grad en test af hvorvidt eleverne kan afkode udtryk som "proportional med", "forskellen mellem"og "Den hastighed, hvormed P vokser til tidspunktet t". Opgaverne kræver dermed ikke at eleverne kan opstille en model ud fra en virkelig situation, eller at eleverne har nogen egentlig forståelse af differentialligninger.

Endelig er der opgaven i gruppe 3, der kan løses direkte vha. CAS (fx DeSolve på TI's CAS-værktøjer). I den aktuelle opgave (se figur 7) forventes det at eleverne anvender CAS, da differentialligningen ikke er lineær eller logaritmisk, og de fleste eleverne derfor ikke har lært en metode til at finde en løsning analytisk. Det er næppe

[30]Evaluering af de skriftlige prøver i matematik på stx og hf ved sommereksamen 2009, s. 21

Opgave 16 I en model er antallet P af individer i en bestemt population en funktion af tiden t (målt i døgn). Den hastighed, hvormed P vokser til tidspunktet t, er proportional med produktet af antallet af individer til tidspunktet t og forskellen mellem 2600 og antallet af individer til tidspunktet t.
Det oplyses, at væksthastigheden er 10, når der er 100 individer i populationen.

a) Opskriv en differentialligning, som P må opfylde.

Figur 6: Opgave fra prøven med hjælpemidler, maj 2008

sandsynligt at eleverne vil overveje andre løsningsmetoder end disse to, selvom det er muligt at anvende kvalitative metoder.

Opgave 14 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y + 1 ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1,4)$.

a) Bestem en forskrift for f.

Figur 7: Opgave fra prøven med hjælpemidler, august 2008

Dermed kræver de fleste af eksamensopgaverne egentlig ikke at eleverne har nogen videre forståelse af hvad en differentialligning er - de skal blot vide, hvad det vil sige at en funktion er en løsning til differentialligningen, samt kunne anvende deres CAS-værktøj til at løse en differentialligning. De mest interessante opgaver, er dem der ikke kræver at man løser differentialligningen. Pga. tidspres til eksamen, vil det være en klar fordel for eleverne at kunne anvende den mest effektive løsningsstrategi. Dog er der i alle tre opgaver tale om differentialligninger, der har en lukket løsningsformel, som kan findes vha. CAS. Dermed er det ikke nødvendigt at eleverne kan andet end at løse differentialligningen vha. CAS, idet de andre spørgsmål i opgaverne kan løses ud fra såvel funktionen som ud fra differentialligningen.

Det betyder også at hensynet til den skriftlige eksamen ikke kræver, at man gennemgår løsningsformlerne for differentialligninger. Det er i den sammenhæng langt mere relevant at sikre at eleverne kan løse differentialligninger vha. CAS og at de i øvrigt har en god forståelse af forskellen mellem fuldstændige og specifikke løsninger, af sammenhængen mellem differentialligninger og væksthastighed, samt af hvad differentialligningen fortæller om de funktioner, der løser dem.

5.1.3 Mundtlig eksamen

Da holdet er startet før sommeren 2008, kan læreren frit vælge mellem eksamensform a) og b). I dette tilfælde er eksamensform a) valgt, hvilket betyder at eksamensspørgsmålene til en eventuel mundtlig eksamen ikke kan tage udgangspunkt i de rapporter, der udarbejdes i forbindelse med forløbet. For at forløbet bliver relevant for såvel mundtlig som skriftlig eksamen, er det derfor oplagt at koncentrere en af temaopgaverne om et af de beviser, som eleverne kan trække til eksamen.

Enhver mundtlig eksamen stiller krav til elevernes evne til at formulere sig sammenhængende om matematik. Derfor er det vigtigt at eleverne igennem gymnasietiden får lejlighed til at arbejde med denne kompetence, såvel mundtligt som skriftligt.

5.1.4 Lærebogen

Med mindre der er tungtvejende forhold, der trækker i en anden retning, vil mange lærere vælge at følge lærerbogens fremlægning af et emne. Dette giver eleverne mulighed for at læse om emnet derhjemme, og på den måde få flere indgange til emnet.

Holdet anvender Carstensen, Frandsen og Studsgaard: Mat A til B[31]. Denne lærebog lægger meget op til en deduktiv tilgang, med beviser for tre specialtilfælde af panserformlen inden den delvist beviser panserformlen selv. Gennemgangen af logistiske differentialligninger er mere kortfattet, og løsningsformlerne for disse præsenteres uden bevis.

Bogen starter dog med et eksempel, hvor man (læreren, klassen eller den enkelte elev) selv skal gætte sig til løsningen til en meget simpel differentialligning. Der er ligeledes et kort afsnit om linjeelementer, men det er ikke noget, der benyttes i

[31] Carstensen at.al. 2007

øvrigt i bogen. Vægten i kapitlet ligger helt klart på løsningsformlerne, beviserne for dem og anvendelsen af dem, samt på løsning af differentialligninger vha. CAS (her: TI-89).

5.1.5 Generelt

Ud fra ovenstående overvejelser, kan man opstille en liste med specifikke kompetencer, som eleverne skal beherske ved forløbets afslutning:

1. løsning af differentialligninger:
    (a) løsning af lineære differentialligninger af 1. orden ved hjælp af løsningsformel
    (b) logistiske differentialligninger ved hjælp af løsningsformel
    (c) løsning af differentialligninger ved hjælp af CAS (TI-89)
2. kvalitativ analyse af givne differentialligninger
    (a) analysere diagrammer over linjeelementer
    (b) tegne og analysere fasediagrammer
3. arbejde med differentialligningsmodeller:
    (a) undersøgelse af givne differentialligningsmodeller
    (b) anvendelse af differentialligninger (og differentialligningsmodeller)
    (c) opstilling af differentialligningsmodeller

Ingen af de ovenstående indflydelser lægger op til at man bevæger sig uden for de differentialligninger, der har en lukket løsningsformel. Dette er i skarp kontrast til de anvendelse af differentialligninger i modellering, eleverne potentielt kommer til at opleve senere hen. Der vil det ofte være nødvendigt at fortolke differentialligninger uden at kunne løse dem. Desuden vil differentialligninger ofte optræde som et system af koblede differentialligninger. En oplagt udvidelsesmulighed vil derfor være at betragte sådanne systemer numerisk eller grafisk, evt. med en diskussion af kaotiske systemer. I dette forløb har jeg dog valgt ikke at gøre dette, hvilket i høj grad skyldet tidsmæssige begrænsninger.

I de følgende afsnit er den matematiske teori bag hver af de ovenstående kompetencer beskrevet nærmere

5.2 Løsning af differentialligninger

5.2.1 Separable differentialligninger

Separable differentialligninger er differentialligninger, hvor det er muligt at flytte rundt på ledene på en sådan måde at alle led, der indeholder den afhængige variabe står på den ene side af lighedstegnet, mens alle led der indeholder den uafhængige variable står på den anden side. Det vil sige at en differentialligning er separabel, hvis den kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\Leftrightarrow\; y' = f(x)g(y)$$

hvor funktionen f kun afhænger af x, mens funktionen g kun afhænger af y. Denne type ligninger kan generelt løses ved seperation af de variable:

Antag at $y = \varphi(x)$ er en funktion defineret på et interval I, samt at $g(\varphi(x)) \neq 0$ i hele I. Så er $y = \varphi(x)$ en løsning til differentialligningen, hvis og kun hvis

$$\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$$

Dette kan omskrives til

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

hvilket er sandt netop hvis det ubestemte integral af begge sider er ens i hele I:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}dx = \int f(x)dx$$

Idet $y = \varphi(x)$ er $\frac{dy}{dx} = y' = \varphi'(x)$. Dermed er $dy = \varphi'(x)dx$, og ved integration ved substitution fås nu at

$$\int \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}dx = \int f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dy$$

hvilket kan omskrives til

$$G(y) = F(x) + k$$

hvor G og F er vilkårlige stamfunktioner til henholdsvis $\frac{1}{g}$ og f, mens k er en konstant.[32]

Denne metode kan altså bruges til at finde løsninger til separable differentialligninger i alle de tilfælde, hvor funktionen $g(y)$ ikke har nogle nulpunkter i intervallet I. Hvis $g(y)$ har det nulpunkt, det vil sige hvis $g(a) = 0$ for $a \in I$, så er den konstante funktion $y(x) = a$ en løsning til differentialligningen, idet $y'(x) = a' = 0$ og $f(x)g(a) = f(x) \cdot 0 = 0$.

Det er imidlertid ikke altid muligt at finde integralerne i løsningen, så det at en differentialligning er separabel er ikke nok til at garantere at der findes en lukket løsning til ligningen. En lukket løsning er en løsning der kan skrives som en funktion af en variabel.

5.2.2 Lineære differentialligninger af 1. orden

Lineære differentiallignigner er ligninger af formen:

$$y' + g(x)y = h(x)$$

hvor y, g og h alle er funktioner af x. Differentialligningers orden afhænger af hvor mange gange funktionen højst er blevet differentieret i ligningen. Således er en ligning, der kun indeholder y' af første orden, mens en ligning, hvor y optræder differentieret to gange, dvs. en ligning, der indeholder y'', er en differentialligning af 2. orden, og så fremdeles. På gymnasialt niveau er der intet krav til at beskæftige sig med andet end første ordens differentialligninger.

En differentialligning er groft sagt lineær, hvis den ikke indeholder led hvor funktionen y og dens afledte ganges sammen eller med sig selv, samt ikke indeholder andre funktioner, hvor y og dens afledte optræder som variable.[33]

Lineære differentiallignigner er som udgangspunkt ikke separable. Det vil sige at det typisk ikke er muligt at flytte rundt på ledene på en sådan måde at alle led, der indeholder den afhængige variabel står på den ene side af lighedstegnet, mens

[32]Sydsæter et.al., 2002, s. 6
[33]Simmons og Krantz, 2007, s. 13

alle led der indeholder den uafhængige variable står på den anden side. I beviset for løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden anvendes dog elementer, der minder noget om metoden separation af de variable, idet alle led, der indeholder y samles på den ene side af lighedstegnet, hvorefter det er muligt at integrere begge sider af ligningen. For at gøre dette er det imidlertid nødvendigt først at gange alle led i differentialligningen med en integrerende faktor, $e^{G(x)}$. Hvis $y = f(x)$ er en løsning til differentialligningen $y' + g(x)y = h(x)$, gælder det at

$$f'(x) + g(x)f(x) = h(x)$$

Efter at have ganget alle led med den integrerende faktor $e^{G(x)}$ fås

$$e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}g(x)f(x) = e^{G(x)}h(x)$$

Derefter benyttes analysens grundsætning, hvorved $G'(x) = g(x)$, idet G er en vilkårlig stamfunktion til g:

$$e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}G'(x)f(x) = e^{G(x)}h(x)$$

Man kan nu med fordel definere $M(x) = e^{G(x)}f(x)$. Dette betyder at $M'(x) = e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}G'(x)f(x)$, hvormed

$$M'(x) = e^{G(x)}h(x)$$

Integralerne af de to sider må så være ens, hvormed

$$M(x) = e^{G(x)}f(x) = \int e^{G(x)}h(x)dx$$

Endelig kan $y = f(x)$ isoleres, hvorved løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden fremkommer:

$$f(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx$$

For at sikre at denne funktion vitterlig er en løsning til differentialligningen bør funktionen og dens afledede indsættes i differentialligningen:

$$f'(x) = (e^{-G(x)})' \int e^{G(x)}h(x)dx + e^{-G(x)}(\int e^{G(x)}h(x)dx)'$$

Idet $(e^{-G(x)})' = -g(x)e^{-G(x)}$ giver dette at

$$\begin{aligned} f'(x) &= -g(x)e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx + e^{-G(x)}e^{G(x)}h(x) \\ &= -g(x)e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx + h(x) \end{aligned}$$

Ved indsættelse i differentialligningen fås nu:

$$\begin{aligned} & h(x) &=& f'(x) + g(x)f(x) \\ \Leftrightarrow\ & h(x) &=& -g(x)e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx + h(x) + g(x)e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx \\ \Leftrightarrow\ & h(x) &=& h(x) \end{aligned}$$

Dermed er det bevist at funktionen $f(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx$ er den fuldstændige løsning til lineære differentialligninger af første orden. Imidlertid giver denne løsningsformel anledning til samme problem som metoden til løsning af separable differentialligninger, idet det ikke altid er muligt at finde et lukket udtryk for integralet.

Det ovenstående bevis er et af de mest komplicerede, gymnasieelever stifter bekendtskab med. Derfor er det oplagt at bruge dette bevis til at lade dem arbejde med såvel beviser som forklaringer i dybden.

5.2.3 Logistiske differentialligninger

Den anden type differentialligninger, eleverne skal kunne løse og anvende, er logistiske differentialligninger. Dette er ligninger af typen

$$y' = k \cdot y \cdot (m - y)$$

hvor k og m er konstanter.

Logistiske differentialligninger kan også skrives på følgende måde:

$$y' = y \cdot (b - ay)$$

hvor a og b er konstanter.

Da der ikke indgår andre funktioner end y, samt end lineær funktion af y er dette en separabel differentialligning. Med notationen anvendt i afsnit 5.2.1 er $g(y) = y \cdot (b - ay)$ og $f(x) = 1$. Hvis $y \cdot (b - ay) = 0$, er $y = 0$ eller $y = \frac{b}{a}$, hvormed y er en konstant funktion. Under antagelse af at dette ikke er tilfældet, kan metoden med seperation af de variable anvendes:

$$\frac{1}{y \cdot (b - ay)} = 1$$

Ved integration på begge sider fås

$$\int \frac{1}{y \cdot (b - ay)} dy = \int 1 dx$$

Brøken kan nu deles i partialbrøker:

$$\int \frac{1}{y \cdot b} dy - \int \frac{a}{b \cdot (ay - b)} dy = \int 1 dx$$

hvorefter konstanterne kan flyttes uden for integrationstegnet:

$$\frac{1}{b} \int \frac{1}{y} dy - \frac{1}{b} \int \frac{1}{y - \frac{b}{a}} dy = \int 1 dx$$

hvilket giver

$$\frac{1}{b} \ln |y| - \frac{1}{b} \ln \left| y - \frac{b}{a} \right| = x + k$$

hvor k er en konstant og andet led fremkommer ved integration ved substitution. Ved at gange alle led med b fås

$$\ln |y| - \ln \left| \frac{1}{y - \frac{b}{a}} \right| = bx + bk$$

En af regnereglerne for logaritmefunktioner giver nu:

$$\ln\left|\frac{y}{y-\frac{b}{a}}\right| = bx + bk$$

Ved at anvende eksponentialfunktionen på begge sider af ligningen fås

$$\left|\frac{y}{y-\frac{b}{a}}\right| = e^{bx+bk}$$

Idet $0 < y < \frac{b}{a}$, er $\dfrac{y}{y-\frac{b}{a}} < 0$. Dermed kan ligningen skrives således:

$$\frac{y}{y-\frac{b}{a}} = -e^{bx+bk}$$

Dette giver nu

$$\frac{y}{y-\frac{b}{a}} = -e^{bx} \cdot e^{bk}$$

og dermed

$$\frac{y}{y-\frac{b}{a}} = -k'e^{bx}$$

hvor $k' = e^{bk}$ er en konstant. Dermed er

$$y = -k'e^{bx}y + k'e^{bx}\frac{b}{a}$$

Ved at dividere alle led med $-k'e^{bx}$ fås

$$\frac{1}{k'}e^{-bx}y = -y + \frac{b}{a}$$

Ved at sætte $c = \frac{1}{k'}$ ind i ligningen fås

$$ce^{-bx}y + y = \frac{b}{a}$$

y kan nu sættes uden for en parantes på venstre side:

$$(1 + ce^{-bx})y = \frac{b}{a}$$

og derefter isoleres:

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + ce^{-bx}}$$

hvilket er løsningsformlen for logistiske differentialligniner af formen $y' = y \cdot (b - ay)$. Hvis den logistiske differentialligning har formen $y' = k \cdot y \cdot (m - y)$ ser løsningsformlen således ud:

$$y = \frac{m}{1 + ce^{-kmx}}$$

Beviset for løsningsformlen for de logistiske differentialligninger har en del fællestræk med beviset for løsningdformlen for linære differentialligninger af første orden. Det er dog noget længere og kræver desuden at eleverne kender til separable differentialligninger, samt løsning af disse. Dermed er det oplagt at tage beviset for løsningsformlen for linære differentialligninger af første orden med i et forløb om differentialligninger, men blot præsentere eleverne for løsningsformlerne for logistiske differentialligninger uden bevis.

I modsætning til løsningsformlen for de lineære differentialligninger af første orden indeholder løsningsformlen for logistiske differentialligninger ingen integraler. Dette betyder at det altid er muligt at finde en lukket, fuldstændig løsning til en logistisk differentialligning. Da elever i 3.g på A-niveau *har* lært at sætte korrekt ind i formler kan arbejdet med at anvende løsningsformlen for logistiske differentialligninger overlades til eleverne selv i forbindelse med opgaveregning.

5.2.4 Løsning af differentialligninger ved hjælp af CAS

Af hensyn til elevernes mulighed for at klare sig til skriftlig eksamen, er det nødvendigt at de er i stand til at løse differentialligninger ved hjælp af CAS-værktøjer. For dette specifikke hold betyder det reelt at de skal kunne bruge værktøjet 'deSolve' på TI-89. Dette værktøj er ret let at anvende og har yderligere den fordel at den minder meget om værktøjet 'Solve', der på TI-89 anvendes til at løse ligninger. Dermed kan man udnytte den instrumentaliseringsproces, eleverne har gennemgået i forbindelse med værktøjet 'Solve', og derved undgå at skulle bruge meget tid på at skabe fortrolighed med det nye værktøj.

Den største udfordring for eleverne vil formentlig være at fortolke det svar, de får, når de bruger TI-89 til at løse differentialligninger generelt. Hvis man for eksempel vil bruge TI-89 til at løse differentialligningen $y' + 4xy = 8x$, taster man dette ind på TI-89: `deSolve(y'+4x*y=8x,x,y)`. Det giver følgende svar: `y=@k·e`$^{-2\cdot x^2}$`+2`, hvor `k` er et tal (hvilket tal afhænger af hvor mange gange før man har brugt denne og visse andre funktioner). Det er derfor vigtigt at eleverne er klar over at `@k` er en konstant. Det vil dog næppe give anledning til store problemer for eleverne at lave denne oversættelse.

Dette problem gør sig dog ikke gældende hvis TI-89 anvendes til at finde specifikke løsninger for en given begyndelsesbetingelse. I det tilfælde vil TI-89 returnere en funktion, der uden nogen oversættelse er løsning til det stillede problem.

Der er andre mulige måder at anvende CAS til at løse differentialligninger og differentialligningssystemer. Ved hjælp af Excel eller specialprogrammer er det muligt at finde numeriske løsninger til differentialligningssystemer for et givent sæt af begyndelsesværdier. Disse muligheder er dog ikke relevante for de emner, der er gennemgået på det aktuelle hold. Hvis man vil gå videre med for eksempel differentialligningssystemer eller kaotiske systemer ville det være oplagt at inddrage et sådant program.

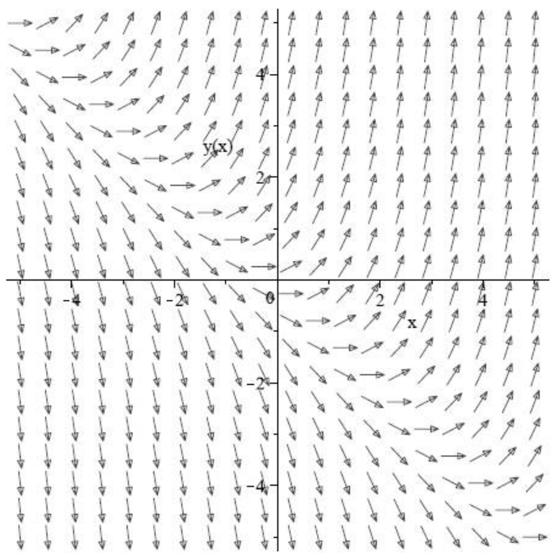
5.3 Kvalitativ analyse af givne differentialligninger

At foretage en kvalitativ analyse af en differentialligning består af at sige noget generelt om løsningsfunktionen uden at løse differentialligningen, hverken analytisk eller numerisk. Dette kan bland andet gøre ved hjælp af linjeelementer og fasediagrammer.

5.3.1 Diagrammer over linjeelementer

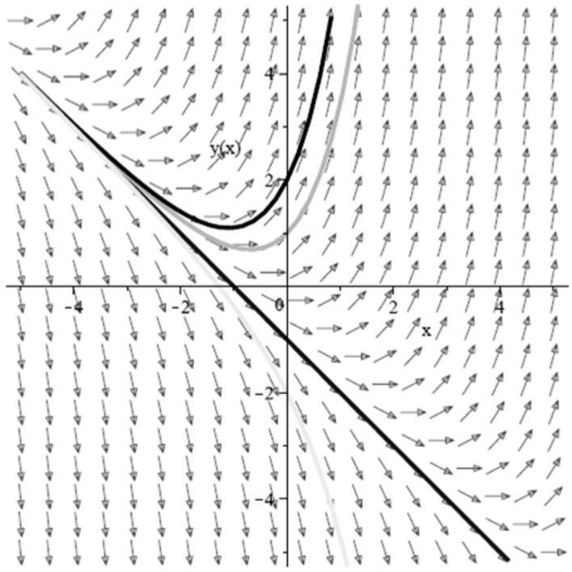
Et linjeelement er et kort linjestykke, der går gennem et punkt (x_0, y_0) med hældning a. Dette linjeelement beskrives således: $(x_0, y_0; a)$. Hvis f er en funktion, hvorom det gælder at $f(x_0) = y_0$ og $f'(x_0) = a$, så går f igennem linjeelementet $(x_0, y_0; a) = (x_0, f(x_0); f'(x_0))$.

Det betyder, at hvis man ved om f, at det er løsning til en differentialligning, for eksempel $\frac{dy}{dx} = x + y$, så er det muligt at tegne et diagram over mange af disse linjeelementer, som i figur 8. Her tegnes et linjeelement for et net af punkter i et begrænset interval på x- og y-aksen. Linjeelementernes x- og y-koordinater er dermed givet af punktet, mens hældningen findes ved hjælp af differentialligningen.



Figur 8: Linjeelementer for løsningsfunktioner til $\frac{dy}{dx} = x + y$
, tegnet i Maple

Ud fra diagrammet over linjeelementerne er det muligt at tegne mulige løsningskurver, altså grafer for mulige løsningsfunktioner. Dette er illustreret for ovenstående eksempel på figur 9. Det ser ud til at $f(x) = -x - 1$ er en løsning til differentialligningen, hvilket kan bekræftes ved indsættelse. Derudover ser det ud til at løsningsfunktionerne enten er aftagende (hvis $y(0) < -1$) eller har et minimum (hvis $y(0) > -1$).



Figur 9: Linjeelementer og mulige løsningskurver for $\dfrac{dy}{dx} = x + y$, tegnet i Maple

På denne måde kan diagrammer over linjeelementer bruges til dels at sige noget generelt om de funktioner, der opfylder differentialligningen, og dels som et udgangspunkt for at gætte løsninger til differentialligningen, hvis det er muligt. Dermed kan linjeelementer fungere som en introduktion til differentialligninger, idet de giver eleverne en mulighed for at udforske differentialligninger selvstændigt uden brug af løsningsformler og CAS-værktøjer.

De fleste CAS-værktøjer kan tegne linjeelementer, inklusiv TI-89. Men det er typisk en ret besværlig proces, der meget let kan komme til at fjerne elevernes fokus fra det væsentlige, nemlig fortolkning af linjeelementer. Med mindre man vil bruge linjeelementerne som et bærende element i et forløb om differentialligninger, er det derfor værd at overveje selv at lave de fasediagrammer, som eleverne skal undersøge.

5.3.2 Fasediagrammer

En anden måde at arbejde kvalitativt med differentialligninger er ved at bruge fasediagrammer. Dette er diagrammer, hvor væksthastigheden, altså y', plottes som funktion af y. For at kunne tegne et fasediagram er det nødvendigt at differentialligningen er autonom. Det vil sige at den er af formen $y' = g(y)$, hvor y er en funktion af x, men x ikke indgår eksplicit i funktionen på højre side af ligningen.[34] Dermed bliver det muligt at lave et grafisk billede af y' som funktion af y, og ud fra dette at sige noget generelt om løsningerne til differentialligningen.

Et eksempel på en autonom differentialligning er

$$\frac{dN}{dt} = kN(K - N) - F$$

hvor N er en funktion af t, mens k, K og F er konstanter.[35] Vi antager at alle tre konstanter er forskellige fra 0, da differentialligningen ellers er logistisk eller udtryk for konstant vækst. Hvis man ganger ind i parantesen, giver højre side $kKN - kN^2 - F = -kN^2 + kKN - F$. Der er altså tale om et andengradspolynomium med N som den frie variable. I det t ikke indgår eksplicit i udtrykket på højre side af differentialligningen, er det muligt at tegne et fasediagram for differentialligningen.

Da højre side af differentialligningen som nævnt ovenfor udgør et andengradspolynomium med N som den frie variable, er det muligt at udtale sig ret præsist om fasediagrammets forløb. Hvis k, som det er tilfælde i temaopgave 2, antages at være et positivt tal, vil grafens grene vende nedad. Tilsvarende vil grafens grene vende opad hvis k er negativt.

Afhængigt af forholdet mellem koefficienterne, vil grafen have 0, 1 eller 2 nulpunkter. Hvis $(kK)^2 - 4(-k)(-F) < 0 \Leftrightarrow kK^2 < 4F$ (i det $k \neq 0$) har grafen ingen

[34] Sydsæter et.al, 2002, s. 22

[35] Denne differentialligning er brugt i modellen i temaopgave 2.

nulpunkter. Hvis $(kK)^2 - 4(-k)(-F) = 0 \Leftrightarrow kK^2 = 4F$ har grafen et nulpunkt:

$$N = \frac{-kK}{2(-k)} = \frac{1}{2}K$$

Hvis $(kK)^2 - 4(-k)(-F) > 0 \Leftrightarrow kK^2 > 4F$ har grafen to nulpunkter, N_1 og N_2:

$$N = \frac{-kK \pm \sqrt{(kK)^2 - 4(-k)(-F)}}{2(-k)} = \frac{1}{2}(K \pm \sqrt{(kK)^2 - 4kF})$$

Nulpunkterne er interessante, fordi de er udtryk for ligevægtstilstande for differentialligningen. Hvis grafen har en ligevægt for $N = N_0$ betyder det at for netop denne funktionsværdi er væksthastigheden 0. Dermed vil denne N-værdi være et minimum eller et maksimum for alle løsningsfunktioner til differentialligningen.

Da grafen for N' som funktion af N således er grafen for et andengradspolynomium, er grafen symmetrisk om den lodrette linje gennem toppunktet. Det betyder at i tilfældet hvor grafen har to nulpunkter, kan toppunktets første koordinat N_0 kan findes som gennemsnittet af de to nulpunkter:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= \tfrac{1}{2}(K + \sqrt{(kK)^2 - 4kF}) + \tfrac{1}{2}(K - \sqrt{(kK)^2 - 4kF}) \\ &= \tfrac{1}{2}K + \tfrac{1}{2}\sqrt{(kK)^2 - 4kF} + \tfrac{1}{2}K - \tfrac{1}{2}\sqrt{(kK)^2 - 4kF} \\ &= K \end{aligned}$$

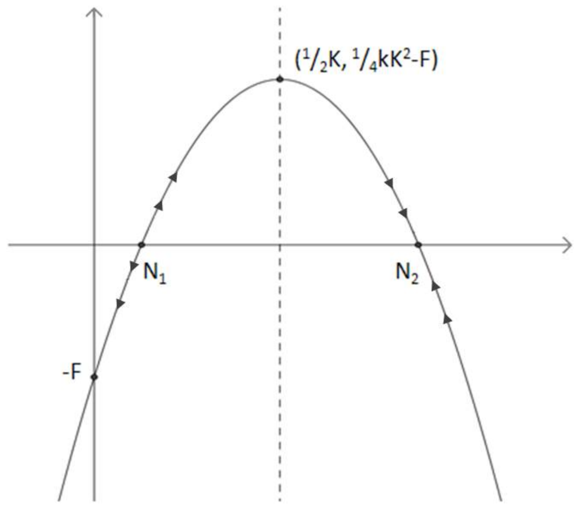
Det vil sige at grafens toppunkt har førstekoordinaten $N_0 = \frac{1}{2}K$. Ved indsættelse i differentialligningen findes andenkoordinaten:

$$-kN_0^2 + kKN_0 - F = -k\left(\frac{1}{2}K\right)^2 + kK \cdot \frac{1}{2}K - F = \frac{1}{4}kK^2 - F$$

I det tilfælde hvor $kK^2 > 4F$ og $k > 0$ har grafen altså et maksimumspunkt i $(\frac{1}{2}K, \frac{1}{4}kK^2 - F)$

Dermed bliver det muligt at tegne et ret præcist fasediagram for differentialligningen $\frac{dN}{dt} = kN(K - N) - F$. På figur 10 ses fasediagrammet i det ovenfor beskrevne tilfælde, hvor $kK^2 > 4F$ og $k > 0$.

Ligevægtspunkter kan enten være stabile eller ustabile. For et stabilt ligevægt-



Figur 10: Fasediagram for $\frac{dN}{dt} = kN(K - N) - F$ med $kK^2 > 4F$ og $k > 0$

spunkt gælder at hvis funktionsværdien kommer tæt på ligevægten, så vil punktet blive tiltrukket af ligevægten. Det betyder at situationer, der befinder sig nær et stabilt ligevægtspunkt vil nærme sig ligesvægten. Hvis en ligevægt derimod ikke er stabil, vil selv situationer tæt på ligevægt ikke føre til ligevægt.[36] Den ovenfor omtalte differentialligning har i tilfældet hvor $kK^2 > 4F$ og $k > 0$ to ligevægtspunkter. Disse er markeret på figuren som N_1 og N_2. Af disse er N_1 ustabilt ligevægtspunkt, mens N_2 er stabilt. Dette er markeret på figuren ved hjælp af pile.

Ud fra ovenstående betragtninger er det muligt at tegne skitser af grafer for løsningsfunktioner til differentialligningen.

[36]Sydsæter et.al., 2002, s. 24

5.4 Differentialligningsmodeller

5.4.1 Undersøgelse af givne differentialligningsmodeller

Dette kan som udgangspunkt finde sted på tre forskellige måder: analytisk, numerisk og kvalitativt. De numeriske metoder er ikke taget med her, mens de andre mulige metoder er beskrevet ovenfor.

Ud over en undersøgelse af den differentialligning, der indgør i modellen, er der også visse mere generelle modelleringsmæssige kompetencer, der kommer i spil i forbindelse med differentialligningsmodeller. Eleverne skal blandt andet være i stand til at tage stilling til de elementer, der indgår i modellen, og for eksempel kunne afgøre hvilke værdier, konstanterne i en model, kan antage. Derudover skal de også kunne tage kritisk stilling til modellen ud fra oplysninger givet i opgaven eller hentet andre steder.

5.4.2 Anvendelse af differentialligninger (og differentialligningsmodeller)

Differentialligningsmodeller anvendes meget bredt i natur- og samfundsvidenskaberne. Det vil derfor ikke give mening i denne sammenhæng at gå i dybden med de forskellige anvendelser. Dog skal det noteres at netop et emne som differentialligninger er et oplagt valg til at være med til at dække læreplanens krav om at eleverne skal præsenteres for mulige anvendelser af matematik.

5.4.3 Opstilling af differentialligningsmodeller

Igen vil det ikke være relevant at forsøge at komme med en liste over alle de differentialligningsmodeller, eleverne kan blive præsenteret for.

Ligesom det gælder for undersøgelser af givne differentialligningsmodeller, er det måske især de generelle modelleringskompetencer, der endnu ikke er blevet omtalt. En af de vigtigeste overvejelser i forbindelse med modellering, handler om hvilke forsimplinger, det er rimeligt at foretage. Det er derfor vigtigt at eleverne i gymnasiet bliver introduceret til denne type overvejelser, således at de ikke kun ser modellering som oversættelse fra matematisk sprog til matematiske symboler.

5.5 Matematiske praxeologier

Ovenstående overvejelser giver grundlag for at beskrive de matematiske praxeologier, eleverne skal og kan opbygge i forbindelse med et forløb om differentialligninger. Jeg vil starte med at definere de problemer (tasks), jeg mener eleverne skal kunne arbejde med.

Eleverne skal kunne:

1. genkende lineære differentialligninger af første orden.
2. genkende logisktiske differentiallignigner.
3. anvende løsningsformlerne for lineære differentialligninger af første orden til at finde fuldstændige og specifikke løsninger.
4. anvende løsningsformlerne for logisktiske differentiallignigner til at finde fuldstændige og specifikke løsninger.
5. anvende deres valgte CAS-værktøj til at løse differentialligninger, der har en lukket løsning.
6. fortolke et diagram over linjeelementer.
7. tegne et fasediagram ud fra en given autonom differentialligning.
8. fortolke at fasediagram.
9. læse en given differentialligningsmodel, og udtale sig om sammenhængen mellem vækst og funktion.
10. genkende de forsimplinger, der foretages i forbindelse med opstillingen af en differentialligningmodel.
11. forholde sig kritisk til en differentialligningsmodel.
12. opstille en differentialligningsmodel ud fra en beskrivelse i almindeligt sprog af en simplificeret model.

Af disse problemer var et, nemlig nr. 6, helt udeladt af temaopgaverne, idet det allerede var blevet behandlet i modulerne op til forløbet. Ligeledes havde holdet set på særtilfælde af lineære differentialligninger, samt arbejdet med en meget simpel differentialligningsmodel. Jeg vil derfor i det følgende ignorere problem nr. 6.

Ad 1 og 2: Dette problem kræver at eleverne er bekendt med formen på disse typer af differentialligninger. Der knytter sig ikke nogle egentlige teknikker til at genkende differentialligninger. Elevernes evne til at håndtere denne type problem er i høj grad et spørgsmål om øvelse.

Ad 3 og 4: For de lineære differentialligninger er der to vigtige teknikker. Dels skal eleverne kunne identificere de forskellige elementer i differentialligningen og sætte dem korrekt ind i løsningsformlen. Og dels skal de kunne løse det integral, der derved fremkommer. Den anden teknik er egentlig en del af en anden praxeologi, nemlig den praxeologi, eleverne har opbygget om arbejdet med integration. For at eleverne skal kunne beherske dette problem, er det derfor vigtigt at de har en veludbygget praxeologi om integration.

De første fire problemer tager parvist udgangspunkt i samme teoriblok. Det at kunne genkende disse typer differentialligninger og at kunne løse dem ved hjælp af den passende løsningsformel er nært forbundet. Eleverne kommer så småt til at stifte bekendtskab med teoriblokken for genkendelse og løsning af lineære differentialligninger af første orden. Dette sker i temaopgave 1, hvor eleverne skal arbejde med beviset for løsningsformlen for denne type differentialligninger. Derudover rummer denne teoriblok blandt andet overvejelser om, hvornår man kan finde en løsning på en lukket form til en lineær differentialligning, altså hvornår det er muligt at finde integralet.

Eleverne vil derimod ikke komme til at beskæftige sig med teoriblokken, der hører til problem nr. 2 og 4, det vil sige problemerne, der omhandler logistiske differentialligninger. Denne teoriblok indeholder, ligesom den før omtalt, beviser for løsningsformler. Her er det dog ikke relevant at overveje om det er muligt at bestemme løsningen, idet løsningen til logistiske differentialligninger altid kan skrives på lukket form.

Ad 5: I forbindelse med brugen af CAS-værktøjer er det vigtigt at eleverne får udviklet deres egne instrumenterede skemaer[37] til at håndtere specifikke problemer. Sådanne skemaer hører til blandt de teknikker, eleverne skal bruge til at håndtere denne type problemer. I den forbindelse ville det normalt være nødvendigt at lade eleverne arbejde meget med en specifik type problemer, inden de havde dannet de nødvendige instrumenterede skemaer. Som omtalt ovenfor i afsnit 5.2.4, er den teknik eleverne skal beherske for at kunne håndtere dette problem i midlertid ret simpel, og lægger sig op af en teknik, de allerede har udviklet særdeles velfungerende instrumenterede skemaer for, nemlig ligningsløsning ved hjælp af ligningsløseren på deres CAS-værktøj. Derfor er det ikke nødvendigt at bruge meget tid på at lade eleverne opbygge nye instrumenterede skemaer.

De første fem problemer benytter sig alle af den samme teknologiske diskurs. Dermed danner de (en del af) en lokal matematisk praxeologi, der omhandler løsning af differentialligninger.

Ad 6: Som omtalt ovenfor er denne type problem ikke en del af det analyserede forløb, og jeg vil derfor ikke komme nærmere ind på hvilke teknikker, eleverne skal udvikle for at beherske denne type problem.

Ad 7: I forbindelse med dette problem er det vigtigt at bemærke at eleverne ikke forventes at kunne tage stilling til, hvorvidt det er muligt at tegne et fasediagram ud fra en vilkårlig differentialligning. De vil kun blive bedt om at arbejde med fasediagrammer i forbindelse med differentialligninger, der er autonome, og derfor kan bearbejdes på denne måde. At kunne tegne et fasediagram kræver at eleverne omstiller sig til at det, der afbildes i diagrammet er sammenhængen mellem en funktion og dens væksthastighed. I forbindelse med denne type problemer, vil det formentlig give eleverne ekstra vanskeligheder, at de ikke er vandt til at tegne grafer i hånden. De CAS-værktøjer, eleverne har adgang til kan ikke tegne fasediagrammer, og slet ikke for generelle differentialligninger. Derfor vil eleverne være tvunget til at tegne graferne i hånden, hvilket kræver at de gør sig overvejelser om, hvilke kendetegn ved grafen, det er vigtigt bliver afbildedet præcist, og hvilke, der er mindre væsentlige.

[37] Artigue, 2002, s. 253

Elevernes manglende teknikker til tegning af grafer kan derfor komme til at indvirke negativt på deres udvikling af teknikker til at arbejde med fasediagrammer.

Ad 8: For at kunne fortolke et fasediagram, er det vigtigt at eleverne udvikler nogle teknikker til at afgøre, hvilke ligevægtspunkter, fasediagrammet viser. Ligeledes er det vigtigt at eleverne bliver i stand til at afgøre hvorvidt en ligevægt er stabil eller ej. Endelig skal eleverne ud fra disse resultater, samt ud fra generelle betragtninger om fasediagrammets udseende, kunne tegne en skitse over mulige forløb for grafer til løsningsfunktionerne til den differentialligning, fasediagrammet beskriver.

Arbejdet med fasediagrammer udgør i sig selv en lokal praxeologi, der omfatter de forskellige måder at arbejde med denne type diagrammer på. Denne lokale praxeologi er en del af en lokal praxeologi, der omhandler kvalitativ analyse af differentialligninger, herunder også arbejdet med linjeelementer.

Ad 9: Denne type problem omhandler blandt andet den type opgaver fra den skriftlige eksamen, hvor eleverne bliver bedt om at løse en differentialligning og ud fra løsningen af denne udtale sig om modellen. For at kunne arbejde med denne type problemer har eleven brug for at have veludviklede praxeologier til løsning og analyse af differentialligninger.

Ad 10: Denne type problemer er ikke unik for differentialligningsmodeller, men er derimod relevant for al matematisk modellering overhovedet. Det ligger i en matematisk models natur at der er foretaget visse forsimplinger, for at kunne beskrive virkeligheden på en overskuelig måde. Det er derfor vigtigt at eleverne udvikler teknikker til at kunne genkende disse forsimplinger. Evnen til at genkende sådanne forsimplinger er desuden et vigtigt skridt på vejen til selv at kunne foretage dem.

Ad 11: Udviklingen af teknologier til at forholde sig kritisk til en hvilken som helst matematisk model er en vigtig del af det at kunne opstille en matematisk model. Gennem kritisk stillingstagen får eleverne mulighed for at forbedre den model, de har fået forelagt eller selv har stillet op. En af disse teknologier kunne være at undersøge konsekvenserne af at acceptere modellen.

Ad 12: Det at opstille en model ud fra almindeligt sprog fremfor det matematiske sprog, der ofte ses i eksamensopgaverne, kræver at eleverne selv er i stand til at identificere de uafhængige og afhængige variable. Derudover skal eleverne selv kunne opstille og evaluere mulige sammenhænge mellem disse. Dette kræver også at eleverne er villige til at forsøge sig frem. I forbindelse med dette forløb bliver eleverne kun præsenteret for idealiserede situationer. De skal altså ikke selv foretage de simplifikationer, der ville være uhyre vigtige, hvis de skulle beskrive en realistisk situation. Dette valg skyldes at eleverne ikke vil få brug for at kunne foretage sådanne forsimplinger i gymnasiet, og at de elever, der får brug for det senere, vil blive introduceret til det til den tid.

De fire specifikke praxeologier, der omhandler modellering med differentialligninger er en del af en lokal praxeologi om modellering med differentialligninger. Til denne lokale praxeologi hører også det at kunne opstille en differentialligningsmodel ud fra en virkelig situation, herunder at kunne foretage de nødvendige forsimplinger. Dette er dog på et højere niveau, end det er rimeligt at forvente at gymnasieelever kan nå. Denne lokale praxeologi er en del af en regional praxeologi, der omhander differentialligninger. Men den er også en del af en matematisk praxeologi, der omhander matematisk modellering mere generelt.

Alle de ovenstående praxeologier er en del af en regional praxeologi, der omhandler differentialligninger. Alle disse praxeologier kan begrundes ud fra en samlet teori, der blandt andet omfatter eksistens- og entydighedssætninger for løsninger til differentialligninger. Denne regionale praxeologi er en del af en global praxeologi, der også omfatter differentialregning og integralregning.

6 A Priori Analyse

Ud over de rent matematiske indflydelser, der er omtalt ovenfor, var der en række andre hensyn at tage i forbindelse med designet af temaopgaverne. Disse falder overordnet i to grupper: de faktorer, der er relevante for denne klasse og de faktorer, der gælder generelt for et undervisningsforløb som dette. Disse er formålet med temaopgaver, opfyldelse af kompetencekravene i matematik,

6.1 Formålet med temaopgaver

Som nævnt i afsnit 4.2 er en vigtig motivation for brugen af temaopgaver i gymnasiet deres anvendelighed ved eksamen. Derfor bør anvendeligheden af spørgsmålene til en mulig, kommende mundtlig eksamen medtænkes i udformningen af spørgsmålene. Dette er imidlertid ikke lige så relevant i forbindelse med netop dette forløb, som det generelt er, idet holdet som nævnt i afsnit 5.1.3 har valgt eksamensform a) og temaopgaverne dermed ikke kan danne direkte grundlag for eksamen. Det er dog stadig vigtigt at temaopgaverne udformes på en sådan måde at eleverne kan se relevansen af dem i forbindelse med en kommende eksamen, skriftlig såvel som mundtlig.

Derudover er det en vigtig del af pointen med temaopgaver, at eleverne får mulighed for at arbejde mere frit og selvstændigt med et emne. Det er vigtigt for elevernes forståelse, at de selv får lov at arbejde med emnet eller selv får lov at finde ud af teorien. Temaopgaver er en oplagt måde at lade eleverne arbejde frit inden for tilpas klare rammer til at de ikke kommer for langt ud på et sidespor eller giver op fordi det virker uoverskueligt.[38]

6.2 Kompetencekravene i matematik

I rapporten Kompetencer og matematiklæring identificerer forfatterne otte centrale kompetencer, der bør medtænkes i undervisningen på alle uddannelsestrin:

1. Tankegangskompetence - at kunne udøve matematisk tankegang

[38] Rasmussen (2001), s.61

2. Problembehandlingskompetence - at kunne formulere og løse matematiske problemer

3. Modelleringskompetence - at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter

4. Ræsonnementskompetence - at kunne ræsonnere matematisk

5. Repræsentationskompetence - at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold

6. Symbol- og formalismekompetence - at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme

7. Kommunikationskompetence - at kunne kommunikere i, med og om matematik

8. Hjælpemiddelkompetence - at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it. [39]

De tre temaopgaver tilgodeser forskellige af disse kompetencer (uddybes i sektion 6.6), men især kommunikationskompetencen er relevant for temaopgaver generelt. En stor del af formålet med temaopgaver er at give eleverne mulighed for at udtrykke sig sammenhængende og i deres eget sprog om et matematisk emne. Det er derfor vigtigt at udformningen af temaopgaver lægger op til, at eleverne selv skal formulere deres konklusioner, samt at disse ligger ud over de standartformuleringer, der ofte ses i forbindelse med typeopgaver i matematik.

6.3 Klassen

Temaopgaveren er designet til og anvendt i et 3.g A-niveau hold på Falkonergårdens Gymnasium og HF. Holdet er et opgraderingshold, hvor eleverne i deres studieretninger har matematik på B-niveau. Holdet samler elever fra to klasser, og har i år to lærere: Mikkel Nielsen, der har haft ca 1/3 af eleverne i 2.g og undertegnede, der har haft de resterende elever i 1. og 2.g. Tilsammen kender vi dermed eleverne særdeles godt. Elevernes andet studieretningsfag er enten samfundsfag eller biologi på A-niveau.

[39] Niss et al (2002)

Holdet indeholder et bredt udsnit af faglige profiler, spændende fra de elever, der er interesserede i matematik for faget egen skyld, over elever, der skal bruge faget i forbindelse med fremtidige studier, til elever, der har valgt faget som fravalg af andre mulige A-niveaufag. Hovedparten af eleverne falder dog i den midterste gruppe, og har derfor en klar motivation for at deltage i faget. Da mange af eleverne regner med at skulle bruge faget i en økonomisk, evt. samfundsfaglig, eller naturvidenskabelig, primært biologisk sammenhæng, er differentialligninger et af de emner, hvor denne motivation i særdeleshed er relevant. Dette betyder ligeledes, at det er oplagt at vælge biologiske eller økonomiske eksempler i forbindelse med udformningen af temaopgaverne.

Alle eleverne på holdet er startet før det blev et krav, at der skal inddrages projekter til den mundtlige eksamen i matematik. For begge stamklasser gælder, at undervisningen har været tilrettelagt ud fra at klasserne skulle til den traditionelle prøveform uden inddragelse af projekter. Dermed er temaopgaverne ikke direkte relevante for en kommende mundtlig eksamen, og den eksterne motivation skal derfor komme fra den rolle de spiller i forhold til elevernes årskarakterer.

6.4 Praktiske rammer for gennemførsel af undervisningsforløbet

Undervisningsforløbet om differentialligninger blev gennemført mellem efterårsferien og jul i 3.g. Eleverne har dermed haft mulighed for at vænne sig til de højere krav på A-niveau. Placeringen betød i midlertid at temaopgaverne skulle afleveres i løbet af de sidste fire uger før eleverne skrev SRP, hvilket skulle vise sig at få afgørende betydning for elevernes arbejde med temaopgaverne.

Til hver temaopgave blev der afsat nogle moduler af undervisningstiden til at arbejde med opgaven. Der blev afsat 3 moduler til den første og to til hver af de efterfølgende. Disse moduler skulle dels give eleverne et tidsrum, hvor de blev tvunget til at at arbejde med opgaven, dels give eleverne mulighed for at få hjælp til at komme videre med de spørgsmål, der voldte problemer. Ud over den tid, der blev afsat på skolen, blev der afsat to timer af den tid eleverne bør bruge på skriftligt arbejde til hver af opgaverne. Dette var hovedsageligt tænkt til skriveprocessen; selve den matematiske udforskning af emnet skulle finde sted i undervisningstiden.

Eleverne blev opfordret til at arbejde med temaopgaverne i små grupper, men skulle aflevere opgaverne individuelt. Grupperne giver eleverne mulighed for at støtte og hjælpe hinanden, men sikrer samtidig at læreren har mulighed for at nå rundt til alle de elever, der har brug for hjælp. Det var vigtigt at læreren ikke løste opgaven for eleverne, men kom med brugbare hints, uddybende spørgsmål og lignende, hvilket ofte tager længere tid. Samtidig side var bedømmelsen af den afleverede besvarelse den vigtigeste eksterne motivation. For at sikre at alle elever deltog aktivt i arbejdet med temaopgaverne, var det derfor vigtigt at kræve, at alle afleverede en individuel besvarelse.

Planen for arbejdet med temaopgaverne var ret stram, og det ville være godt at sprede forløbet ud over længere tid. Dette ville i højere grad give mulighed for at eleverne kunne arbejde med temaopgaverne derhjemme, således at modulerne på skolen, der blev sat af til dette arbejde, kunne fokusere på vejledning. Desuden ville mere tid til forløbet i højere grad give mulighed for, at dele af temaopgaverne kunne diskutteres i klassen, eventuelt med elevoplæg om udvalgte opgaver, efter tilbagelevering af rettede opgaver. Imidlertid gør tidsplanen for resten af året at det ikke var muligt at bruge mere tid på dette forløb.

6.5 Faglige forudsætninger for temaopgaverne

Forud for at klassen fik udleveret temaopgaverne, havde der været et forløb på seks moduler om differentialligninger. Differentialligninger var blevet introduceret, dels ud fra en simpel vækstmodel, dels ved hjælp af diagrammer over linjeelementer og dels gennem simple eksempler, hvor eleverne selv skulle gætte løsningen til differentialligningen. Eleverne var ligeledes blevet introduceret til hvordan man tester om en funktion er løsning til en differentialligning. I forbindelse med dette havde eleverne løst opgaver inden for disse områder.

Derudover var følgende tre specialtilfælde af løsningsformlen for lineære differentialligninger blevet introduceret og (delvist) bevist: $y' = ky$, $y' + ay = b$ og $y' + ay = h(x)$, hvor $a, b, k \in \mathbb{R}$ og y og h er funktioner af samme variabel. Eleverne havde også haft lejlighed til at løse en del opgaver af følgende type:

> Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' + 2y = x$.
>
> Bestem derefter den løsning $f(x)$, hvorom det gælder at $f(3) = 7$.

og tilsvarende ud fra alle tre specialtilfælde.

Forskellen mellem den fuldstændige og den specifikke løsning til en differentialligning var blevet diskuteret i klassen. I forbindelse med beviserne for de tre specialtilfælde, blev det desuden kort diskuteret, hvorfor det var vigtigt både at bevise at løsningen var en løsning, samt at det var den eneste mulige (og dermed den fuldstændige) løsning.

6.6 Didaktiske valg i forbindelse med udformningen af temaopgaverne

I formuleringen af temaopgaver, er det vigtigt at man først formulerer de specifikke kompetencemål, som opgaven skal hjælpe eleverne til at opfylde. Derefter kan disse fungere som samlende faktor for alle spørgsmålene i temaopgaven, og derved sikre at opgaverne reelt koncentrerer sig om et tema.

Alle tre temaopgaver kan findes i deres fulde form i bilag A.

6.6.1 Temaopgave 1

Generelle kompetencemål

Ud over kommunikationskompetencen er det især ræsonnementskompetence og (i mindre grad) symbol- og formalismekompetence, der er i fokus i den første temaopgave.

Selvom temaopgaverne i dette forløb ikke direkte skal bruges til en mundtlig eksamen, var det alligevel vigtigt at dække denne side af matematik. For eleverne på dette hold, har det været et problem at de ikke formulerede sig tilstrækkeligt klart og fagligt korrekt i forbindelse med beviser. Det var derfor oplagt at kombinere kommunikations- og ræsonnementskompetencen i en af temaopgaverne. På den måde kunne alle holdets elever få trænet disse kompetencer.

Disse overvejelser giver anledning til formuleringen af følgende:

Specifikke kompetencemål

- at opøve elevernes evne til at kunne give de forklaringer, der hører til de matematiske udtryk i et givent bevis.
- at skærpe elevernes opmærksomhed på hvilke faktorer, der har betydning for gyldigheden af et bevis.

hvor faktorer henviser til såvel antagelser som forskellen på implikation og biimplikation. Det er ikke tanken at eleverne skal introduceres til denne terminologi, men udelukkende til den betydning forskellen har for beviser af løsningsformler for differentialligninger.

Det er generelt ikke realistisk at bede gymnasieelever om at bevise sætninger helt på egen hånd. På et A-niveau hold kan eleverne muligvis selv gennemføre meget simple beviser, der reelt er generaliseringer af en metode, eleverne allerede kender. Denne form for bevis ses i opgave 1 af temaopgave 1:

> Bevis at funktionen $y = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} \cdot h(x)dx$ er en løsning til differentialligningen.

hvor det er underforståét af 'differentialligningen' henviser til $y' + g(x) \cdot y = h(x)$.

Holdet havde i perioden op til at temaopgaven blev udleveret blandt andet arbejdet med, hvordan man undersøger om en funktion er løsning til en differentialligning. Dermed bør denne generalisering af den type opgaver ligge inden for elevernes nærmeste udviklingszone.

Resten af beviset, hvor det vises at funktionen er den fuldstændige løsning til differentialligningen, er det tilgengæld ikke realistisk muligt for eleverne at opstille på egen hånd. Dertil kommer at hvis eleverne selv skulle opstille et sådant bevis, ville fokus i høj grad blive på den nødvendige manipulation af de matematiske symboler. For at tilgodese dette forhold, samt for at sikre det nødvendige fokus på de matematiske formuleringer, er de vigtige matematiske ligninger i beviserne derfor givet i opgave 2 og 3 i temaopgave 1. Eleverne kan dermed koncentrere sig om de matematiske begrundelser for at symbolmanipulationen er korrekt. Desuden er der væsentlig forskel på sværhedsgraden af at forklare gyldigheden af de forskellige trin, og nogle elever vil formentlig ikke være i stand til at give uddybende forklaringer på disse trin. Den valgte struktur er med til at sikre at disse elever alligevel kan vise deres styrker ved nogle af de andre trin, også selvom disse ligger senere i beviset.

I forbindelse med matematiske ræsonnementer er det vigtigt at eleverne bliver bevidste om, hvornår et ræsonnement er gyldigt, hvilke antagelser der er gjort, og hvilken indflydelse disse antagelser har på det bevistes gyldighed og anvendelse. For at styrke elevernes udvikling på dette punkt er der valgt to forskellige beviser i temaopgave 1. I forbindelse med det første bevis, laves visse antagelser, der tilsammen gør at det er muligt at lave et simplere bevis. Simplere skal i denne sammenhæng forstås på den måde, at der ikke i løbet af beviset anvendes tricks - det eneste, eleverne ikke har benyttet før i forbindelse med ligningsløsning, er muligheden for at integrere begge sider af en ligning. Dette betyder imidlertid ikke at de enkelte trin i beviset er lettere at begrunde i opgave 2 end i opgave 3. I opgave 4 bliver eleverne bedt om at overveje forskellene på beviserne i opgave 2 og 3, både med hensyn til anvendelighed og bevisgang. På den måde vil eleverne forhåbentlig blive opmærksomme på disse forskelle, og i hvert fald blive tvunget til at overveje konsekvenserne af de forudsætninger, der ofte optræder i matematiske sætninger.

For desuden at sikre at eleverne bliver bevidste om forskellen på at en funktion er løsning til en differentialligning og at en gruppe af funktioner er den fuldstændige løsning, bliver eleverne bedt om følgende i slutningen af opgave 3:

> Forklar til sidst, hvorfor dette sammen med opgave 1 giver et bevis for sætningen.

Pointen med dette spørgsmål er at sikre, at eleverne overvejer sammenhængen mellem de to dele af beviset: i opgave 1 bevises at funktionen er løsning til differentialligningen, mens det i opgave 3 bevises af kun funktioner af denne type kan være løsninger til differentialligningen. Det er vigtigt at eleverne er opmærksomme på at begge dele er nødvendige før sætninger af denne type er bevist. Dette forhold har kort været diskuteret i klassen i forbindelse med beviserne for de andre løsningsformler, men her skal eleverne selv indse, at det er en relevant overvejelse for dette bevis, samt at begge dele af beviset faktisk er gennemført.

Forventede problemer

I opgave 1 vil en stor del af eleverne formentlig mangle de nødvendige forklaringer på, hvorfor de forskellige regneoperationer er gyldige. Manglen på denne type refleksioner har generelt været udtalt på holdet, også i forbindelse med almindelige skriftlige afleveringer. Desuden har en del af eleverne stadig problemer med dele af differentiation og integration. Den nødvendige brug af produktreglen og differentiation af sammensat funktion kan derfor komme til at volde en del problemer.

I opgave 2 vil det formentlig i særdeleshed være forklaringerne mellem trin 3 og 4 og mellem trin 5 og 6, eleverne vil få problemer med. I det første tilfælde er der tale om integration ved substitution, hvilket mange elever stadig synes er svært. I det andet tilfælde skal eleverne bruge potensregnereglerne på ret avanceret vis.

Endelig vil mange af eleverne formentlig få problemer i forbindelse med spørgsmålet "overvej også hvorfor konstanten c i trin 6 ikke kan være 0". Hvis direkte adsprugt er de fleste formentlig godt klare over, at eksponentialfunktionen aldrig vil antage værdien 0, men det er tvivlsom, om de vil se sammenhængen til dette spørgsmål.

I opgave 3 vil forklaringerne til de enkelte trin næppe give anledning til alvorlige problemer for hovedparten af eleverne. Tilgengæld vil det formentlig være meget forskelligt på hvilket niveau eleverne får besvaret spørgsmålet om hvorfor sætningen nu er bevist, og en del af eleverne vil sikkert være ude af stand til at se nødvendigheden af at have begge opgaver med.

Opgave 4 er en meget åben opgave, hvor eleverne i højere grad selv skal tage stilling til, hvad der er relevant for opgaven. Dette vil formentlig give en del problemer, alene af den grund at eleverne er ret uvante med denne type opgaver fra den øvrige undervisning i matematik.

Matematiske praxeologier Den første temaopgave skal støtte elevernes udvikling af matematiske praxeologier til at klare problemer af disse typer:

- genkende lineære differentialligninger af første orden.
- anvende løsningsformlerne for lineære differentialligninger af første orden til at finde fuldstændige og specifikke løsninger.

Det er færre problemer end de andre to temaopgaver, men tilgengæld ligger temaopgave 1 som den eneste op til at eleverne skal udvikle en (del af en) teoriblok, idet fokus er på begrundelsen og beviset for at lineære differentialligninger kan løses ved hjælp af løsningsformlen. Dermed er det ikke udviklingen af praksisblokken, men begyndelsen til en teoriblok for de ovenstående praxeologier, der skal understøttes i denne temaopgave.

6.6.2 Temaopgave 2

Generelle kompetencemål

I temaopgave 2 er fokus især på den matematiske modelleringskompetence og repræsentationskompetence, samt i mindre grad på hjælpemiddelkompetencen.

Differentialligninger anvendes i høj grad inden for matematisk modellering i form af vækstmodeller. Som nævnt ovenfor regner mange af eleverne på holdet med at gå videre med fag inden for de biologiske og økonomiske videnskaber. Derfor er det særligt relevant at beskæftige sig indgående med netop væktsmodeller på dette hold. Dertil kommer, at det er et krav i læreplanen at man beskæftiger sig med differentialligningsmodeller.[40]

Desuden er det vigtigt at udvikle elevernes repræsentationskompetence og deres evne til at anvende forskellige, nye repræsentationsformer.

Endelig er det vigtigt, blandt andet i forhold til en kommende skriftlig eksamen, at sikre at eleverne er i stand til at anvende deres CAS-værktøj bedst muligt. Dette betyder først og fremmest at eleverne skal kende til CAS-værktøjets funktioner i forhold til differentiallignigner. Men netop inden for differentialligninger, kan eleverne komme ud for tilfælde hvor CAS-værktøjet ikke kan løse differentialligningen, fordi der ikke findes en lukket løsning til ligningen. I sådanne situationer er det vigtigt at eleverne får nogle metoder til at håndtere differentialligningen på anden vis.

Matematiske praxeologier Temaopgave 2 skal understøtte udviklingen af praxeologier omhandlende følgende problemer:

- tegne et fasediagram ud fra en given autonom differentialligning.
- fortolke at fasediagram.
- læse en given differentialligningsmodel, og udtale sig om sammenhængen mellem vækst og funktion.
- genkende de forsimplinger, der foretages i forbindelse med opstillingen af en differentialligningmodel.
- forholde sig kritisk til en differentialligningsmodel.

Disse overvejelser giver anledning til følgende specifikke kompetencemål.

Specifikke kompetencemål

[40]Læreplanen for matematik A-niveau, afsnit 2.3

- At introducere eleverne til modellering vha. differentialligninger
- At introducere eleverne til fasediagrammer, hvor væksthastigheden (differentialkvotienten) plottes som funktion af funktionsværdien
- At introducere eleverne til løsning af differentialligninger ved hjælp af CAS, samt til alternative metoder når dette *ikke* virker.

Forud for temaopgaverne blev eleverne introduceret til differentialligninger via en meget simpel vækstmodel. Men dette er elevernes første rigtige møde med mere komplicerede differentialligningsmodeller. Derfor er det naturligt at lade dem udforske en allerede opstillet model, fremfor at få eleverne selv til at opstille modellen. Dertil kommer at eleverne kan arbejde med væsentligt mere komplicerede modeller end de kan opstille på egen hånd ud fra en virkelig sammenhæng.

I temaopgave 2 udforskes en fiskerimodel. Modellen kommer fra en bog om matematisk modellering i biologi[41], hvilket vil være med til at give den en større relevans og gyldighed for eleverne, der oftest præsenteres for modeller, der ikke har nogen reel anvendelse. Modellen introduceres på følgende vis:

> Væksthastigheden for en bestand af fisk kan udtrykkes som:
>
> $$\frac{dN}{dt} = kN(K-N) - F$$
>
> hvor $N = N(t)$ er antallet af fisk i bestanden som funktion af tiden t, målt i en passende enhed,
> k er formeringsraten (dvs. hvor mange fisk, hver fisk i gennemsnit føder pr. tidsenhed),
> K er det maksimale antal fisk og
> F er fangsten.
>
> Vi skal kigge på to tilfælde: 1) F er konstant og 2) F er proportional med antallet af fisk, dvs. $F = rN$.

Ud over at modellen kommer fra en mere virkelighedsnær sammenhæng end mange af de modeller, eleverne ser i gymnasiet, har en model, der tager sit udgangspunkt

[41] Doucet og Sloep (1992), s. 420-424

i et biologisk problem, den fordel at en stor del af eleverne på holdet har biologi som vigtigeste studieretningsfag, og derfor må forventes at være interesserede i faget. Ydermere er den differentialligning, som modellen anvender, en logisktisk differentialligning i et af de tilfælde, der undersøges (tilfælde 2). Dette var en type differentialligning, som eleverne ikke på forhånd var blevet præsenteret for. Denne type differentialligning bruges til at beskrive begrænset vækst, hvilket optræder i flere forskellige sammenhænge inden for såvel biologi som økonomi. Dermed får denne model en øget relevans for eleverne.

Modellen er dog relativt simpel, og der er en hel del faktorer, der formentlig influere fiskebestanden i virkeligheden, men som ikke kan udtrykkes i modellen. Når man arbejder med matematiske modeller, er det meget vigtigt at overveje modellens gyldighed. Med til dette hører at undersøge hvilke antagelser og forsimpelser, der er foretaget da modellen blev opstillet. Virkelige situationer er for komplicerede til at det er muligt at modellere dem nøjagtigt, så det er nødvendigt at foretage visse valg. Disse valg kan for eksempel være hvilke faktorer, man vælger at se på i en given model. Desuden vil den virkelige situation, som modellen skal beskrive, ofte give anledning til en begrænsning af definitions- og værdimængde af de indgående funktioner. Disse begrænsninger kan meget vel ligge ud over de begrænsninger, de matematiske udtryk i modellen giver anledning til, og det er derfor vigtigt at overveje disse begrænsninger, inden selve arbejdet med modellen går igang. Eleverne bliver derfor bedt om at gøre sig disse overvejelser i opgave 1, inden de går i gang med at arbejde med modellen. Derved håber jeg at kunne hjælpe dem til at udvikle de ovenfor nævnte praxeologier, der omhandler differentialligningsmodeller.

I de efterfølgende to opgaver bliver eleverne bedt om at undersøge de to ovenfor nævnte tilfælde af modellen. I begge tilfælde skulle eleverne tegne fasediagrammer for differentialligningerne for derefter at bruge disse til at undersøge, hvornår væksten er maksimal, hvad den størst mulige fangst er, samt hvilke ligevægte der eventuelt findes for væksten. Eleverne har ikke tidligere stiftet bekendskab med fasediagrammer, og vil derfor skulle udforske denne nye repræsentationsform på egen hånd. Fasediagrammer er naturligvis en form for grafer, og udforskningen af fasediagrammer kan forhåbentlig være med til at give eleverne en ny måde at arbejde med grafer på og derved styrke de grafbaserede teknikker, de allerede bruger. Desuden vil arbejde med fasediagrammer støtte udviklingen af praksisblokken af praxeologier om kvantitativ analyse af differentialligninger.

Mange elever ser grafer som værende processer mere end statiske objekter. [42] Grafer er for mange elever ikke blot billeder af sammenhørende koordinatpar, der opfylder funktiones forskrift, men derimod udtryk for en bevægelse fra venstre mod højre, fra lavere x-værdier mod højere x-værdier. Dette kommer for eksempel til udtryk, når elever taler om at grafen "går nedad"uden at angive om den går nedad mod højre eller venstre. Denne opfattelse styrkes muligvis af, at grafer ofte tegnes ved at starte i venstre side af koordinatsystemet og tegne mod højre, hvilket også gælder på det CAS-værktøj, holdet bruger, samt af pilene på koordinatsystemets akser. Når eleverne skal undersøge differentialligningens ligevægte ud fra fasediagrammet er det imidlertid nødvendigt at ændre denne opfattelse. Antallet (funktionsværdien) kan bevæge sig både hen imod eller væk fra ligevægten, og ikke nødvendigvis bevæger sig mod højre eller venstre.

Desuden skal eleverne generelt udtale sig om modellen ud fra fasediagrammet. De skal for eksempel tage stilling til, hvor mange fisk, det er ansvarligt at fange, hvilket kun kan gøres under anvendelse af fasediagrammet. I det første tilfælde (opgave 2) skal eleverne derudover tegne generelle grafer, der viser antallet af fisk som funktion af tiden, ud fra fasediagrammet. Disse skift i repræsentationsformer kan medvirke til at styrke elevernes repræsentationskompetence, både med henblik specifikt på fasediagrammer, men også mere generelt.

Forventede problemer

Eleverne har tidligere arbejdet en hel del med modeller, og de tre spørgsmål i opgave 1 er alle af typer, eleverne har set før. Men modellering er generelt svært for mange af eleverne, hvilket kan føre til problemer i forbindelse med disse spørgsmål.

De fleste problemer vil dog formentlig opstå i forbindelse med tegning og brug af fasediagrammer i opgave 2 og 3. Dette er som sagt en helt ny repræsentations-

[42] Sfard? Find reference og korrekt ordbrug

form for eleverne. Indtil nu har de kun arbejdet med grafer, der viste antal som funktion af tiden, eller mere generelt, viste funktionsværdien som funktion af den uafhængige variabel. Det at skulle tegne væksten som funktion af antallet, eller differentialkvotienten som funktion af funktionsværdien, vil formentlig give mange af eleverne problemer. Ydermere vil elevernes opfattelse af grafer, som er beskrevet ovenfor, formentlig føre til at mange har svært ved at forstå spørgsmålet "Hvad sker der med antallet af fisk når N kommer i nærheden af ligevægtene?". Mere generelt vil mange af elevernes problemer formentlig have rod i deres opfattelse af, hvad en graf er.

I opgave 3 vil det sikkert også volde problemer at gentage punkt a)-e) fra den ovenstående opgave, idet disse ikke er udspecificeret på samme måde anden gang. Dette er dog gjort bevidst for at tvinge eleverne til at tage stilling til, hvad de egentlig har gjort i opgave 2.

6.6.3 Temaopgave 3

Generelle kompetencemål

I temaopgave 3 er fokus igen på den matematiske modelleringskompetence og repræsentationskompetence. Denne gang skal eleverne dog selv opstille den model, de skal arbejde med.

Temaopgaven styrker også i nogen grad elevernes hjælpemiddelkompetence, idet de igen skal anvende deres CAS-værktøj til at løse en differentialligning. Da dette endnu er meget nyt for eleverne er det rimeligt at tale om at de får styrket deres hjælpemiddelkompetence. Dette er dog en meget lille del af temaopgaven, og er derfor ikke medtaget i de specifikke kompetencemål:

Specifikke kompetencemål

- At træne eleverne i modellering vha. differentialligninger
- At træne eleverne i selvstændigt at opstille en matematisk model ud fra en situation beskrevet i dagligdagssprog (og ikke i det semi-matematiske sprog, som eksamensopgaverne ofte stilles i)

Denne temaopgave skal hjælpe eleverne til at udvikle den nødvendige matematiske praxeologi for at kunne opstille en differentialligningsmodel ud fra en beskrivelse i almindeligt sprog af en simplificeret model (jf. afsnit 5.5). I typiske modelleringsopgaver på gymnasieniveau (se afsnit 5.1.2), skal eleverne blot afkode en matematisk tekst, og ikke selv tage stilling til de problemer der opstår når man modellerer en virkelig situation. Pointen med temaopgave 3 er at lade eleverne opbygge en differentialligningsmodel på egen hånd. For at dette ikke skal blive en umulig opgave for eleverne, er der valgt en relativt simpel situation, nemlig spredningen af et rygte i en lukket gruppe. Denne situation kan modelleres ved hjælp af en enkelt logistisk differentialligning, og ligner dermed den model, eleverne blev præsenteret for i temaopgave 2. For at kunne modellere situationen på denne måde, er det nødvendigt at gøre visse antagelser. I temaopgaven er disse antagelser gjort på forhånd: alle er interesserede i rygtet, alle snakker om det, hver gang de møder en ny person, og disse møder finder sted på en regelmæssig vis. På denne måde kan man se bort fra faktorer som dalende interesse og uregelmæssig spredning af rygtet, og væksten i antallet af personer, der kender rygtet kan beskrives ved hjælp af en logistisk differentialligning. For at lede eleverne på sporet af dette, er temaopgaven udformet som en række spørgsmål, der skal få dem til at overveje de nødvendige ting i den rigtige rækkefølge.

Mange elever har svært ved selvstændigt at opstille matematiske modeller. En af de faktorer, der medvirker til dette, er at det ofte er svært for eleverne at afgøre, hvad det vil være hensigtsmæssigt at definere som de uafhængige og afhængige variable i en given situation. Dette gælder selv i situationer, hvor det for mere erfarne brugere af matematisk modellering, kan virker oplagt; for eksempel når der er tale om et fænomen, der udvikler sig over tid, og hvor det er naturligt at fænomenet (fx antal eller størrelse) afhænger af tiden. Derfor er det vigtigt at få eleverne sporet ind på at de skal finde en afhængig variabel eller funktion, samt det denne funktion afhænger af. Først derefter er det muligt at finde ud af, hvordan disse ting afhænger af hinanden. Af denne grund fokuserer de første to spørgsmål i temaopgave 3 på de variable, samt på hvilke variable, der umiddelbart er afhængige af hinanden.

De næste tre spørgsmål fokuserer på opstillingen af differentialligningen:

c) Hvad afhænger væksten af?

d) Hvordan afhænger væksten af disse parametrer?

e) Opstil differentialligningen.

Disse spørgsmål er meget åbne, hvilket en del af eleverne ikke kan klare på egen hånd. De elever, der selvstændigt kunne besvare disse meget åbne spørgsmål, skulle have mulighed for at gøre dette og for at vise, at de kunne gøre dette. På den anden side var det også vigtigt at sikre at, alle eleverne fik netop hjælp nok til at besvare disse spørgsmål. Endelig var det nødvendigt at finde en måde at sikre, at eleverne rent faktisk prøvede at besvare spørgsmålene på egen hånd i stedet for bare at bede om hjælp ved det første tegn på problemer.

I et forsøg på at tilgodese alle disse interesser, valgte jeg at lave fem hints, der kunne hjælpe eleverne på rette spor. For at undgå at eleverne gav op for hurtigt, kom disse hints til at koste en lille smule: eleverne kunne når som helst bede om at få udleveret det hint, der bedst kunne hjælpe dem videre fra det punkt, hvor de var gået i stå. Men for hvert hint en gruppe bad om, ville der blive trukket 2 point fra den samlede bedømmelse (til sammenligning var det i alt muligt at opnå 100 point i hele temaopgaven). Idet hele temaopgaven i virkeligheden er en række spørgsmål, der skal hjælpe eleverne til at opstille en differentialligningsmodel, kan disse hints ses som en række yderligere hjælpende spørgsmål.

Derefter kommer tre spørgsmål (f-h) til den opstillede model. Disse skal sikre at eleverne får taget stilling til gyldigheden af den opstillede model, og bygger dermed videre på de dele af temaopgave 2, der knytter sig til det første af de specifikke kompetencemål.

Temaopgaven afsluttes med at eleverne skal anvende den model, de har opstillet. På den måde sikres at eleverne er i stand til at forbinde modellen med den situation, de skulle modellere.

Forventede problemer

Formentlig vil det, som omtalt ovenfor, være problematisk for en del af eleverne at skulle opstille en matematisk model på egen hånd. Problemerne i denne temaopgave vil formentlig i lige så høj grad skyldes mangler i elevernes modelleringskompetence, som mangler i deres viden om differentialligninger. Forhåbentligt kan dette imødegås ved hjælp af de ovenfor omtalte hints.

6.7 Dataindsamling

Den vigtigeste kilde til viden om elevernes udbytte af temaopgaverne er de besvarelser, eleverne afleverer, men der vil være faktorer, man ikke kan se direkte ud fra temaopgaverne. Elevinterviews og siagnostiske opgaver udleveret til klassen kan hjælpe med at afdække disse. Dertil kommer enkelte andre mulige kilder, beskrevet nærmere i afsnit 6.7.5.

6.7.1 Temaopgaver

Temaopgaverne kommer til at udgøre hovedparten af datamaterialet i forbindelse med dette forsøg. Spørgsmålene skulle gerne være udformet på en sådan måde at de ligger op til at eleverne danner de relevante matematiske praxeologier. Ligeledes vil der forhåbentlig være muligt at læse ud af elevernes svar, hvorvidt dette er lykkedes. Dette kan understøttes med nedenstående kilder.

6.7.2 Diagnostiske opgaver

Efter eleverne har afleveret temaopgaverne vil de få uddelt to diagnostiske opgaver. Disse opgaver skal forsøge at klarlægge i hvilken grad og på hvilket niveau, eleverne har dannet praxeologier.

For at sikre at eleverne ikke bare bruger deres CAS-værktøj til at løse differentialligningerne, har jeg valgt at opgaverne skal løses uden hjælpemidler. Dette betyder at opgaverne kun kan løses ved at anvende de ting, eleverne forhåbentlig har lært i temaopgaverne. Dermed giver opgaverne et billede af hvorvidt eleverne har opfyldt de specifikke kompetencemål.

Den første opgave fokuserer på arbejdet med differentialligninger, der ikke kan løses ved hjælp af de løsningsformler, eleverne er blevet introduceret til.

6.7.3 Elevinterviews

Efter hver temaopgave vil jeg holde elevinterviews med elever, udvalgt på baggrund af deres besvarelse af temaopgaven. I forbindelse med disse elevinterviews vil jeg forsøge at klarlægge elevernes motivation og bagvedliggende ræsonnementer, for derved at tydeliggøre de konklusioner, der kan drages på baggrund af besvarelsen af temaopgaverne. Det er altså tanken at elevinterviewene skal understøtte fortolkningen af elevernes besvarelser af temaopgaverne.

6.7.4 Spørgeskemaer

Jeg har valgt at udarbejde et spørgeskema til eleverne, som de skal besvare ved afslutningen af forløbet. Spørgeskemaet skal sætte fokus på hvordan eleverne har oplevet arbejdet med temaopgaverne, samt hvad de mener de kan bruge det til fremadrettet. Spørgeskemaet kan ses i bilag C

De første to spørgsmål søger at afdække elevernes forståelse af, hvad en differentialligning er. Jeg forventer at svarene på disse spørgsmål vil blive meget blandede, men at mange elever vil opfatte en differentialligning som en ligning, der indeholder y'. Jeg håber at en del af eleverne vil svare at differentialligninger omhandler sammenhængen mellem funktionsværdi og væksthastighed.

Derefter følger en række spørgsmål, hvor eleverne skal evaluere temaopgaverne og arbejdet med disse. De bliver blandt andet bedt om at tage stilling til hvorvidt de har lært mere eller mindre ved denne type undervisning end ved mere traditionelle uindervisningsformer. Spørgsmål af denne type er nødvendigvis meget hypotetiske og subjektive. Ikke desto mindre mener jeg at det er interessant at få eleverne mening om arbejdsformens anvendelighed. Jeg håber at eleverne nyder den anderledes arbejdsform, samt at de føler at de har fået mere ud af den. Dog er det et velkendt fænomen fra undervisningsevalueringer, at elever selv føler at de får meget eller endda mest ud af tavleundervisning med læreren ved tavlen.

Det næste spørgsmål omhandler muligheden for at anvende de ting, eleven mener at have lært gennem arbejdet med temaopgaverne, til en kommende eksamen, mundtlig eller skriftlig. Jeg forventer at eleverne især føler at de har fået noget med til den mundtlige eksamen i temaopgave 1, mens temaopgave 2 og 3 i højere grad er rettet mod den skriftlige eksamen.

De fleste elever har prøvet lignende arbejdsformer i matematik i gymnasiet før. De har ikke hørt ordet temaopgaver, men har arbejdet i projektforløb om et tema (for eksempel bestemmelse af monotoniforhold for en funktion ved hjælp af funktionens afledte). Det er derfor muligt at en pæn del af eleverne vil svare positivt på spørgsmålet "Har du prøvet at arbejde på en lignende måde før i matematik?" Desværre er der også en vis sandsynlighed for at eleverne vil hæfte sig ved at de ikke før har hørt om temaopgaver, og derfor svare negativt.

Endelig får eleverne mulighed for at komme med forslag til forbedringer af forløbet. I forbindelse med didaktiske designs af denne type er det vigtigt at videreudvikle designet inden det eventuelt bruges igen. I den forbindelse er det relevant at få eleverne input, selvom der naturligvis er mange andre hensyn, der skal tilgodeses.

6.7.5 Andre kilder

Jeg har valgt ikke at forsøge at optage elevernes gruppearbejde med temaopgaverne. Dette er hovedsageligt et praktisk valg, idet det ville være noget nær umuligt at optage ordentlig lyd i et klasselokale, der ikke er specielt indrettet til dette. Jeg vil dog optage de klassediskussioner, der skal afholdes om temaopgaverne ved hjælp af en diktafon. Optagelse af video af nogen art er desværre umuligt på grund af de praktiske forhold for undervisningen.

Da jeg selv i høj grad skal undervise i forbindelse med forløbet vil det næppe være muligt at lave organiseret observation af timerne.

7 A Posteriori analyse

7.1 Praktiske Forhold

Der er 25 elever på holdet. Der var 16 elever, der afleverede temaopgave 1 og 2, mens kun 13 afleverede temaopgave 3. Af de 16 elever, der afleverede opgave 1, var der kun 1, der ikke afleverede opgave 2. Af de 13, der afleverede opgave 3, havde 12 afleveret både opgave 1 og 2, mens den sidste ikke havde afleveret nogle af de andre opgaver. Af holdets 25 elever var det altså kun de 12, der afleverede alle tre opgaver, mens tre elever afleverede de første to opgaver og yderligere tre elever afleverede en temaopgave hver.

Dette mønster stemmer godt overens med klassens gennerelle afleveringsmønster. Af de 12 elever, der afleverede alle tre temaopgaver, har de 10 intet skriftligt fravær i matematik, og disse elever er de eneste med 0% skriftligt fravær. Blandt de øvrige elever svinger det skriftlige fravær i matematik fra 7% til 60%. De elever, der ikke har afleveret en eneste af temaopgaverne, har en fraværsprocent på mindst 25% Mønstret for hvilke af eleverne, der afleverer, er altså ikke væsentligt anderledes for temaopgaverne, end det er generelt. Desuden er der generelt mellem 5 og 11 elever, der ikke afleverer de skriftlige opgaver. Så antallet af elever, der ikke har afleveret temaopgaverne ligger over gennemsnittet, men ikke uden for det område, der i øvrigt ses. Der er dermed ikke noget usædvanligt i afleveringsmønstret for disse opgaver.

Den hyppigst forekommende forklaring på manglende aflevering af temaopgaverne var, at forløbet med temaopgaverne lå lige før SRP. Dette har formentlig været medvirkende til at afleveringsprocenten ligger lidt lavere end normalt, men ovenstående betragtninger taget i betragtning har det næppe været en afgørende faktor. Tilgengæld spillede SRP ind på en anden måde: eleverne på holdet kommer som sagt fra to forskellige klasser, og repræsentanter fra den ene klasse gik midt i november til rektor, og bad om at få udskudt klassens skriftlige opgaver til efter jul. Rektor accepterede dette, hvorfor alle skriftlige afleveringer skulle flyttes fra de sidste to uger før SRP-perioden. På grund af temaopgavernes rolle i matematikundervisningen i denne periode, var dette ikke en mulighed. I stedet valgte vi at opfordre eleverne til at aflevere det de havde lavet i modulerne på gymnasiet, og aftalte med eleverne at temaopgaverne ikke ville komme til at tælle med i deres årskarakter. Dermed forsvandt den vigtigeste eksterne motivation for at få eleverne til at arbejde med opgaverne. Dette ses blandt andet ved at ingen af eleverne aflev-erede opgave 3 i temaopgave 2. Præcist hvad dette betød for elevernes mulighed for at danne matematiske praxeologier, samt for elevernes opfyldelse af de specifikke kompetencemål vil jeg vende tilbage til i gennemgangen af den enkelte temaopgave.

I det efterfølgende arbejde med a posteriori analysen af forløbet vil jeg fokusere på de 12 elever, der har afleveret alle tre temaopgaver. Dette gælder i særdeleshed for de dele af analysen, hvor jeg bruger eksempler fra de diagnostiske opgaver, mens jeg vil inddrage eksempler fra alle de afleverede temaopgaver som nødvendigt.

7.2 Temaopgaver

7.2.1 Temaopgave 1

Specifikke kompetancemål

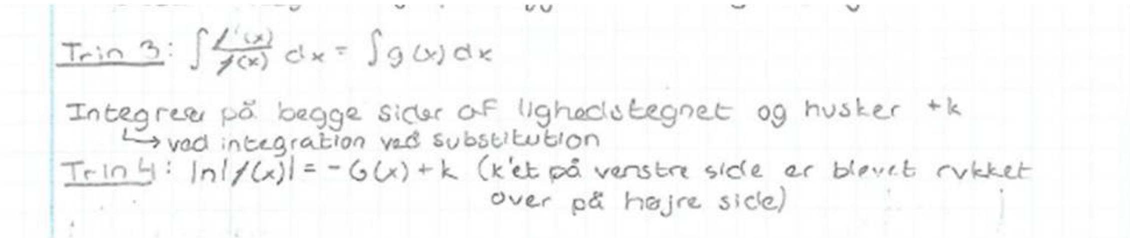
De specifikke kompetancemål for temaopgave 1 er

- at opøve elevernes evne til at kunne give de forklaringer, der hører til de matematiske udtryk i et givent bevis.
- at skærpe elevernes opmærksomhed på, hvilke faktorer der har betydning for gyldigheden af et bevis.

Den vigtigeste kilde, til at evaluere i hvor høj grad eleverne har opfyldt disse mål, er temaopgaven selv. Derudover vil jeg kort komme ind på, hvorvidt der er sket en ændring i elevernes gennemgang af beviser i klassen.

Det første af de to specifikke kompetencemål kan deles i to hovedpointer. Dels skal eleverne komme med tilstrækkelig forklaringer, og dels skal disse forklaringer være korrekte, og korrekt formuleret.

Flere af eleverne har problemer med at komme med tilstrækkelig med forklaringer i temaopgave 1, til trods for at de specifikt bliver bedt om at give disse forklaringer. Som forventet giver forklaringerne, der hører til overgangen mellem trin 3 og 4 i opgave 2 anledning til en del problemer. Dette var dels tydeligt i forbindelse med vejledningsmodulerne på skolen, men ses også ved at flere af eleverne har nogle meget kortfattede forklaringer til dette trin. Se figur 11 og **??**

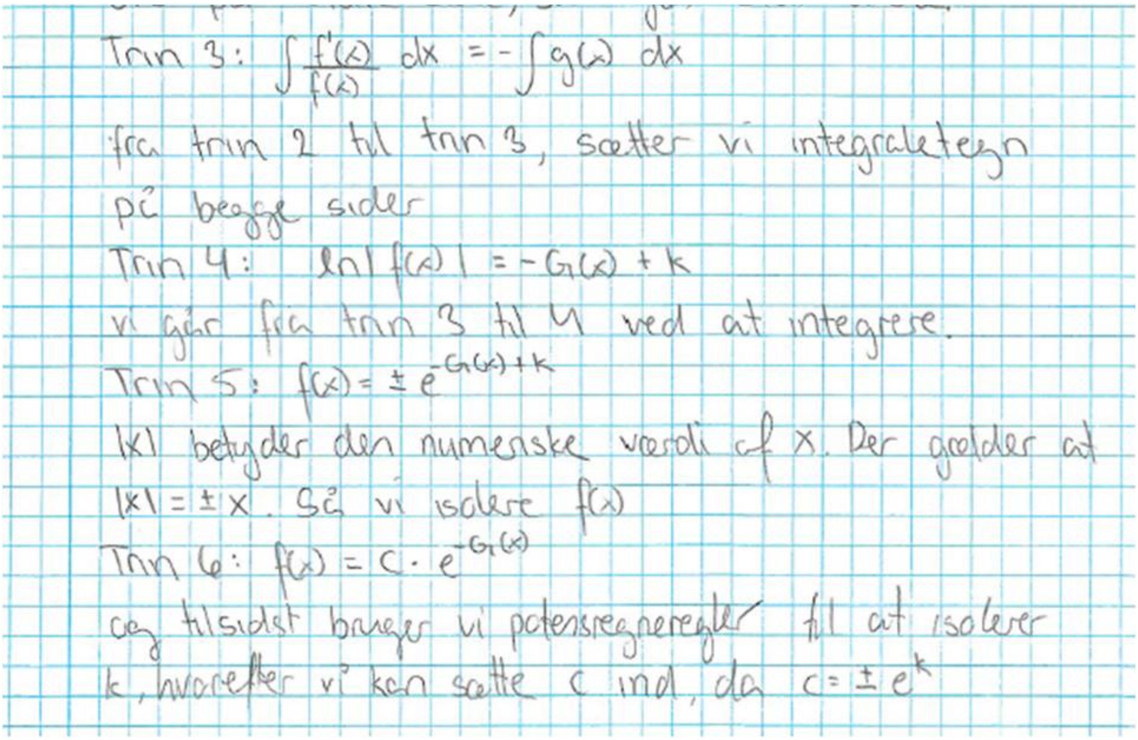


Trin 3: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int g(x) dx$

Integrere på begge sider af lighedstegnet og husker +k
↳ ved integration ved substitution

Trin 4: $\ln|f(x)| = -G(x) + k$ (k'et på venstre side er blevet rykket over på højre side)

Figur 11: Temaopgave 1, opgave 2, Elev 1



Trin 3: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int g(x) dx$

fra trin 2 til trin 3, sætter vi integraletegn på begge sider

Trin 4: $\ln|f(x)| = -G(x) + k$

vi går fra trin 3 til 4 ved at integrere.

Trin 5: $f(x) = \pm e^{-G(x)+k}$

|x| betyder den numeriske værdi af x. Der gælder at |x| = ± x. Så vi isolere f(x)

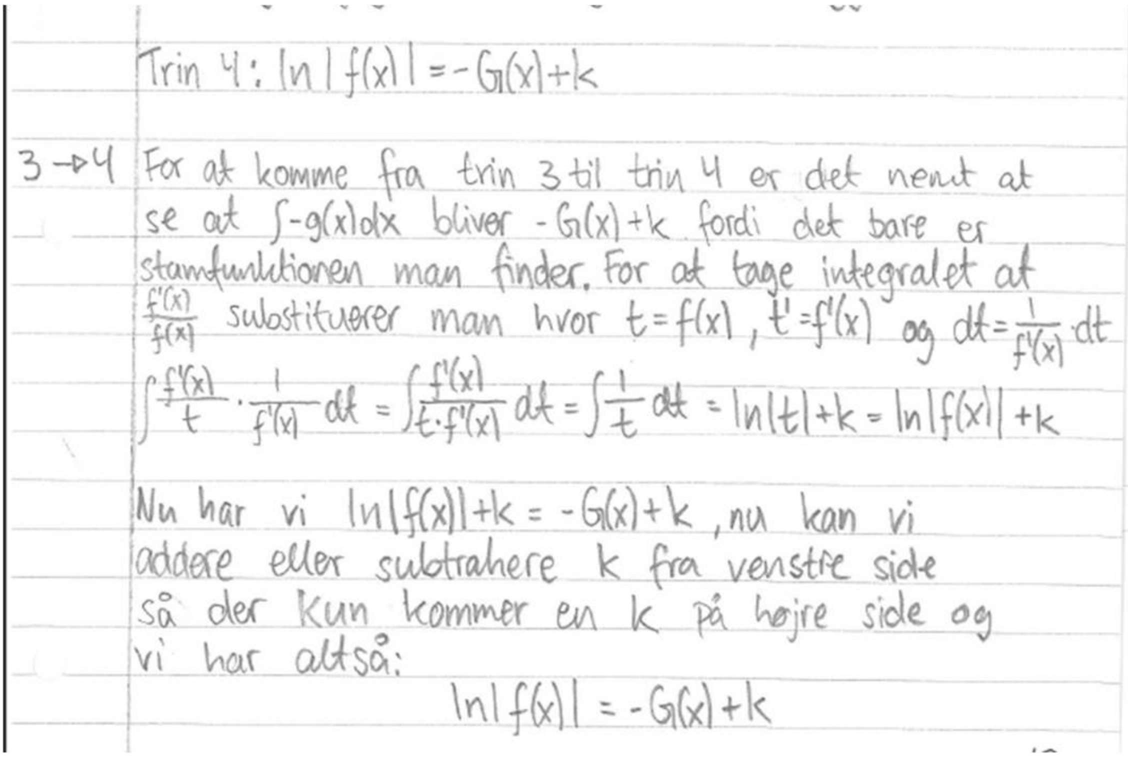
Trin 6: $f(x) = c \cdot e^{-G(x)}$

og tilsidst bruger vi potensregneregler til at isolere k, hvorefter vi kan sætte c ind, da $c = \pm e^k$

Figur 12: Temaopgave 1, opgave 2, Elev 2

Der er dog også eksempler på elever, der har beskrevet samme udregning langt mere detaljeret, se figur 13

Nogle af elevernes forklaringer i denne temaopgave er, om ikke direkte ukorrekte, så i hvert fald meget lidt matematisk formuleret. Der er mange eksempler på at selv



Trin 4: $\ln|f(x)| = -G(x)+k$

3 → 4 For at komme fra trin 3 til trin 4 er det nemt at se at $\int -g(x)dx$ bliver $-G(x)+k$ fordi det bare er stamfunktionen man finder. For at tage integralet af $\frac{f'(x)}{f(x)}$ substituerer man hvor $t=f(x)$, $t'=f'(x)$ og $dt=\frac{1}{f'(x)}dt$

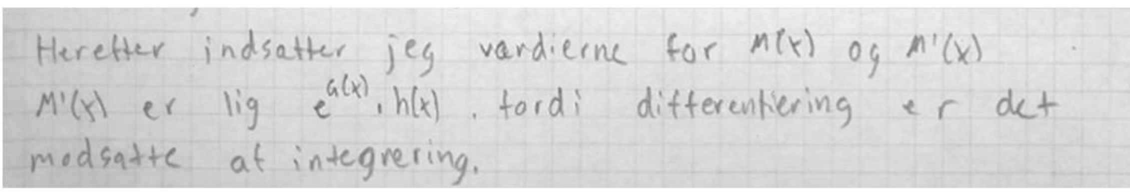
$$\int \frac{f'(x)}{t} \cdot \frac{1}{f'(x)} dt = \int \frac{f'(x)}{t \cdot f'(x)} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t|+k = \ln|f(x)|+k$$

Nu har vi $\ln|f(x)|+k = -G(x)+k$, nu kan vi addere eller subtrahere k fra venstre side så der kun kommer en k på højre side og vi har altså:

$$\ln|f(x)| = -G(x)+k$$

Figur 13: Temaopgave 1, opgave 2, Elev 3

i øvrigt stærke elever ikke formulerer sig matematisk, og ikke anvender de korrekte termer. Desuden har mange af eleverne problemer med at udtrykke mere abstrakte idéer klart, selvom de i øvrigt har forstået dem korrekt. Dette ses for eksempel på figur 14



Herefter indsætter jeg værdierne for $M(x)$ og $M'(x)$ $M'(x)$ er lig $e^{G(x)} \cdot h(x)$. fordi differentiering er det modsatte af integrering.

Figur 14: Temaopgave 1, opgave 1, Elev 4

På trods af at mange af eleverne manglede at uddybe væsentlige dele af deres forklaringer, er det alligevel muligt at spore en forbedring af deres mundtlige præsentationer. Da jeg ikke har indsamlet data på dette område, vil jeg ikke komme nærmere ind på det, men udelukkende bemærke at det er mit indtryk, som den ene af klassens lærere, at eleverne er mere opmærksomme på, at de skal komme med forklaringer, når de gennemgår beviser ved tavlen. Der er færre elever, der tavst gennemfører de matematiske udregninger nu, end der var før forløbet med temaopgaver.

Det andet kompetencemål var begrundelsen for at stille det sidste spørgsmål i opgave 3, samt for hele opgave 4. Der er imidlertid også en anden del af dette mål, nemlig elevernes evne til at stille kritiske spørgsmål til de matematiske handlinger, de selv udfører. For eksempel kommenterer de fleste af eleverne ikke at de dividerede begge sider af en ligning med $f(x)$ for at komme fra trin 1 til trin 2 i opgave 2, hvor dette er tilladt på grund af antagelsen af $f(x) \neq 0$. Tilsvarende fandt eleverne det ikke nødvendigt at redegøre for at det er tilladt at dividere med $e^{G(x)}$. Dog kan eleverne godt resonere sig frem til at $e^{G(x)} \neq 0$, hvis de bliver spurgt, som her i et af de efterfølgende elev-interview:

Elev 5: Det er klart så er det problematisk hvis E opløftet i xte giver nul, så kan man jo ikke gøre det.

Sofie: Kan det her (henviser til $e^{G(x)}$) give nul?

Elev 5: Nej, det kan det ikke. E opløftet i nul, det giver 1.

Eller som en anden elev udtrykte det:

Elev 4: Fordi E opløftet i et eller andet kan aldrig blive nul.

Det samme mønster viste sig i forbindelse med vejledningen. De elever, der blev spurgt direkte, om de måtte dividere med $f(x)$ eller $e^{G(x)}$, fandt frem til at det var tilladt og gav en forklaring på hvorfor dette var tilfældet. Men disse elever har ikke nødvendigvis husket at lave samme overvejelser i den anden af de to udregninger, hvor de muligvis dividerer med 0. Dette ses i figur 15 og 16, der begge er fra samme elev.

Som nævnt ovenfor var især de følgende spørgsmål relevante for det andet specifikke kompetencemål:

> Forklar til sidst, hvorfor dette sammen med opgave 1 giver et bevis for sætningen.

Fra Trin 1 til trin 2 har vi isoleret g(x), ved at dividere med f(x) på begge sider af lighedstegnet, dette kan vi gøre da vi får at vide at $f(x) \neq 0$. Derefter har vi trukket f'(x) fra på begge sider. Ved at gange med -1 på begge kommer man nu frem til trin 2. Grunden til at f(x) skal være forskellig fra 0, er at man ikke må dividere med 0.

Figur 15: Temaopgave 1, opgave 1, Elev 6

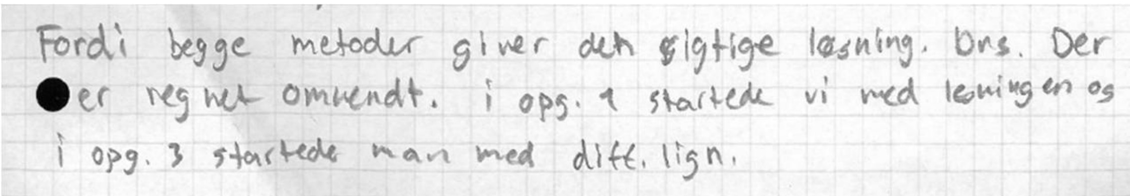
Fra trin 5 til trin 6: f(x) kan ikke være 0, da e opløftet aldrig kan blive 0. Det vil altid give et positivt eller negativt tal. C må heller ikke være 0, da højresiden derved giver 0 og så står der f(x)=0, hvilket f(x) ikke må være forudsat hvad der stod i starten.
C≠ 0 da f(x) ≠ 0

$\pm e^{-G(x)+k} = e^{-G(x)} \cdot e^{k}$, så hvis $c = e^{k}$, så passer det.

Figur 16: Temaopgave 1, opgave 1, Elev 6

> Hvilke forskelle er der mellem sætningerne og beviserne i opgave 2 og 3? Overvej både om der er forskel på, hvor generelt man kan anvende sætningen og på metoden i beviset.

En stor del af eleverne har ikke besvaret det første af disse spørgsmål. Blandt de elever, der har svaret på spørgsmålet, har en del af dem givet nogle ret upræcise svar, som for eksempel dette fra elev 4 (se figur17):



Fordi begge metoder giver den rigtige løsning. Dvs. Der er regnet omvendt. i opg. 1 startede vi med løsningen og i opg. 3 startede man med diff. lign.

Figur 17: Temaopgave 1, opgave 3, Elev 4

Denne usikkerhed blev yderligere understøttet i det efterfølgende interview:

Lærer: Men kan du være sikker på at man f.eks herover kunne sige plus A her eller et eller andet. Ovre på venstre side . Ud fra det her. Alene ud fra1-teren. Bevise at her er en løsning, at det her en løsning på differentilligningen. Kan du så være sikker på, at det her ikke også er en løsning på differentialligningen.

Elev 4: Nej det kan man vel ikke, Jo det kan man godt for når man har differentieret så konstanten den går jo væk

Lærer: Ja OK men lad os sige at det er en funktion så

Elev 4: Så kan man ikke være sikker

Lærer: Kan man så sige at det er den fuldstændige løsning

Elev 4: Det vil jeg sige —

Lærer: Men du kan ikke være sikker på, at der ikke er en anden klasse af funktioner —-,som også kunne være løsninger og det er det der er pointen i det her med den fuldstændige løsning.

Elev 4: Hvis der så kommer en anden funktion ind her, så er det vel ikke den her type differentialligning

Lærer: Det er det ikke, men det beviser man faktisk også i opgave 3. det er først der man beviser at det er den fuldstændigeløsning at vi har ramt alle løsninger

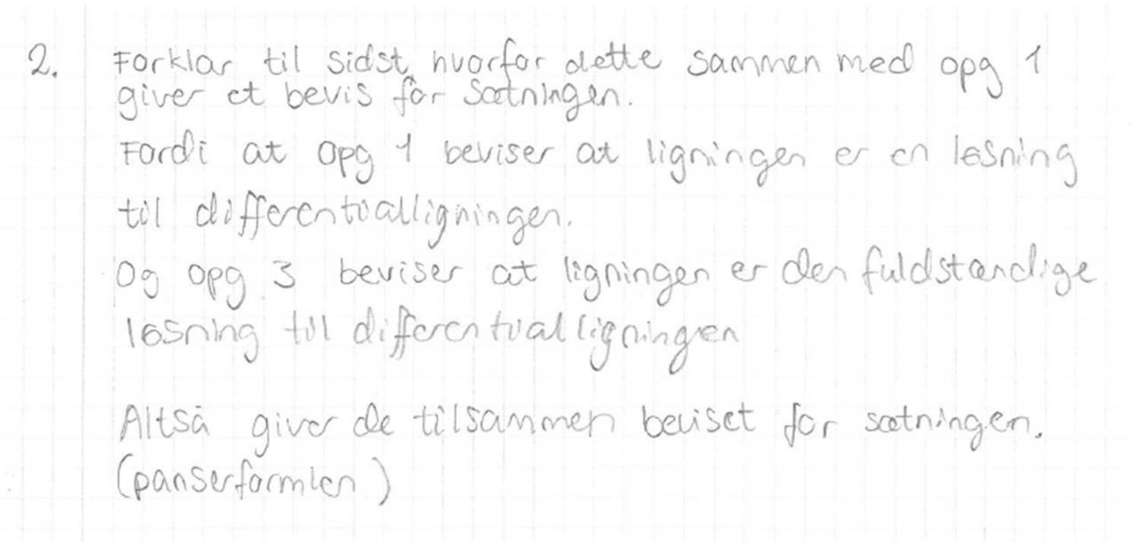
Elev 4: Fordi man har regnet begge veje

Lærer: Det at man regner begge veje beviser at det er både den fuldstændige og løsningen

Elev 4: OK

Eleven synes ikke at have forstået forskellen på en specifik og fuldstændig løsning til en differentialligning og har derfor problemer med at forstå, at beviset skal have to dele.

Der er dog også elever, som klart og kortfattet giver en forklaring på, hvorfor både opgave 1 og 3 er nødvendige for at give et bevis for sætningen, hvilket ses på figur 18:



2. Forklar til sidst hvorfor dette sammen med opg 1 giver et bevis for Sætningen.
Fordi at opg 1 beviser at ligningen er en løsning til differentialligningen.
Og opg 3 beviser at ligningen er den fuldstændige løsning til differentialligningen
Altså giver de tilsammen beviset for sætningen.
(panserformlen)

Figur 18: Temaopgave 1, opgave 3, Elev 7

Da spredningen af svar er så stor, som det er tilfældet her, er det ikke muligt at afgøre, i hvor høj grad denne temaopgave har haft indflydelse på elevernes opmærksomhed på, hvorvidt et bevis er gyldigt og fuldstændigt. Det rette sted at teste dette er i forbindelse med en mundtlig eksamen, hvilket desværre ikke er muligt, da eleverne først afslutter faget til sommer.

Elevernes matematiske praxeologier

Denne temaopgave tager sit udgangspunkt i teknologidelen af teoriblokken for den matematiske praxeologi, der omhandler løsning af lineære differentialligninger. Der er flere måder at teste på om eleverne har dannet en specifik praxeologi for denne type opgaver. Eleverne kan testes i deres evne til at reproducere beviset, altså deres viden om teknologidelen af denne praxeologi. Dette kan dog igen først rigtig ske i forbindelse med en mundtlig eksamen.

Derudover kan man teste, hvorvidt eleverne har opbygget en brugbar praksisdel af denne praxeologi ved at bede eleverne finde fuldstændige og specifikke løsninger til linære differentialligninger af en type der nødvendiggør, at man bruger panserformlen. Dette blev blandt andet gjort i en efterfølgende prøve, hvor 12 ud af de 25 elever besvarede et spørgsmål af denne type korrekt.

7.2.2 Temaopgave 2

Specifikke kompetancemål

De specifikke kompetancemål for temaopgave 2 er

- At introducere eleverne til modellering vha. differentialligninger
- At introducere eleverne til fasediagrammer, hvor væksthastigheden (differentialkvotienten) plottes som funktion af funktionsværdien
- At introducere eleverne til løsning af differentialligninger ved hjælp af CAS, samt til alternative metoder når CAS *ikke* virker.

Igen er temaopgaven selv den vigtigeste kilde til indsigt i elevernes opfyldelse af disse mål. Derudover er den første af de to diagnostiske opgaver i høj grad rettet mod temaopgave 2, især mod det andet og tredie specifikke kompetencemål.

De elever, der afleverede opgaven, har alle arbejdet med modellering, og temaopgaven tjente som deres første reelle møde med matematisk modellering med differentialligninger. Den første opgave i temaopgaven satte fokus på modelleringsaspektet, idet eleverne skulle tage kritisk stilling til den opstillede model. Mange af klassens elever havde en del problemer med dette. De har ganske vist arbejdet med denne dimension af modellering før, men ikke i så åbne spørgsmål. Dette viste sig især i vejledningsmodulerne, men også i elevernes besvarelser hvor svarene generelt manglede begrundelser. Dette ses for eksempel i følgende opgave fra elev 1:

Der er dog også enkelte eksempler på elever, der er i stand til at begrunde deres resultater ud fra modellen, for eksempel:

Temaopgave 2 var første gang eleverne skulle arbejde med diagrammer, der ikke viser en funktion plottet mod dens frie variabel. Mange af eleverne var ikke selv i stand til at tegne diagrammet, men måtte have hjælp fra andre elever eller fra lærere. I forbindelse med vejledningsmodulerne var vi meget opmærksomme på, at eleverne skulle have hjælp til at komme videre i deres egen arbejdsproces. En del af eleverne valgte imidlertid at benytte sig af lektiecaféen til at arbejde videre med opgaven. Selvom dette normalt er en særdeles positiv ting, betød det i denne situation, at jeg ikke havde styr over præcis hvilken form for hjælp, eleverne modtog. De fleste af de elever, der afleverede temaopgaven, havde løst opgave 2 tilfredsstillende. På figur **??** ses afleveringen fra elev 3, hvor eleven tydeligt demonstrerer, at han kan aflæse de relevante informationer på diagrammet, samt at han har tilstrækkeligt overblik til at kunne sammenkoble sine konklusioner fra opgave 1 med den nye opgave.

Selvom de fleste af afleveringerne indeholdt stort set korrekte besvarelser af opgave 2, betyder det ikke nødvendigvis at eleverne har opfyldt det andet specifikke kompetencemål. I den anden diagnostiske opgave (se bilag B) blev eleverne bedt om at sige så meget som muligt om en differentialligning:

$$\frac{df}{dx} = sin(f)$$

Ligningen kan ikke løses ved hjælp af nogen af de løsningsformler, eleverne har lært, og pointen med opgaven var at eleverne skulle bruge de teknikker, de havde udviklet i arbejdet med temaopgave 2 til at arbejde med differentialligningen. Der var dog kun en enkelt elev, der gjorde dette, mens resten enten helt gav op, eller kom med meget generelle formuleringer, som for eksempel:

En del af grunden til dette skal formentlig findes i det ovenfor omtalte forhold, nemlig at ingen af eleverne besvarede den sidste af opgaverne i temaopgave 2. Opgaven skulle som omtalt i afsnit 6.6.2 være med til at forme elevernes forståelse af, hvornår det er relevant at arbejde med andre værktøjer end løsningsformlerne og CAS. Da eleverne ikke havde besvaret opgave 3 er det nærliggende at tro, at de ikke var kommet frem til denne forståelse.

Dermed bliver det også umuligt at diskutere det sidste af de specifikke kompetencemål. De fleste af eleverne er ganske vist på nuværende tidspunkt i stand til at bruge DeSolve funktionen på TI-89, men dette kan ikke nødvendigvis henføres til temaopgave 2. Desuden kom eleverne aldrig frem til en brugbar teknik, der kunne hjælpe dem i de tilfælde, hvor der ikke findes en lukket løsning til differentialligningen.

Ud over elev 3, var der dog også andre elever, der kom med brugbare omend knap så specifikke svar på den første af de to diagnostiske opgaver. Dette gælder for eksempel elev 8, der kommer med følgende betragtning:

Elevernes matematiske praxeologier

Ud fra det ovenstående afsnit, er det desværre tydeligt at eleverne ikke har dannet en brugbar teknik, der inkorporerer fasediagrammer. Dette understøttes desuden af elevernes efterfølgende vanskeligheder med at håndtere denne type diagrammer, når de er dukket op i skriftlige afleveringer. Til gengæld er der elementer i elevernes besvarelser af den anden diagnostiske opgave, der tyder på, at de betragtninger de er blevet bedt om at gøre med hensyn til modellen i opgave 1, er blevet en del af deres matematiske praxeologi om modellering. Det gælder for eksempel for følgende kommentar fra elev 9:

7.2.3 Temaopgave 3

Specifikke kompetancemål og matematiske praxeologier

De specifikke kompetancemål for temaopgave 3 er

- At træne eleverne i modellering vha. differentialligninger
- At træne eleverne i selvstændigt at opstille en matematisk model ud fra en

situation beskrevet i dagligdagssprog (og ikke i det semi-matematiske sprog, som eksamensopgaverne ofte stilles i)

Det er klart at de elever, der afleverede temaopgaverne, opfyldte begge kompetencemålene i en vis grad. Det interessante spørgsmål bliver dermed, i hvilken grad disse elever opfyldte kompetencemålene. For at få et indblik i dette, er det relevant både at benytte data fra besvarelserne af den tredje temaopgave og fra de diagnostiske opgaver.

Mange af eleverne havde i vejledningsmodulerne svært ved arbejdet med de opgaver, der handler om opstilling af differentiallignignen, dvs. opgave c) til e). Idéen med at eleverne kunne købe hints til opgaven (se side 67) virkede desværre ikke efter hensigten. Eleverne var ellers positive overfor idéen, omend mere på grund af show-elementet end på grund af nogen videre reflektion over formålet. Men rent praktisk var det ikke muligt at gennemføre. Dels var vi to lærere, og det blev hurtigt omstændigt at holde styr på hvilke elever, der havde fået hvilke hints, samt hvilke grupper de tilhørte. Den vigtigste indvending mod idéen er imidlertid at udvalget af hints ikke altid passede præcist til elevernes behov. Jeg havde desværre ikke været i stand til at forudsige præcist nok, hvor problemerne ville opstå, og hvilke uddybende spørgsmål, der kunne hjælpe eleverne videre. Dertil kommer at eleverne ofte allerede havde forsøgt at løse opgaven på en måde, der ikke kunne føre til et svar, og derfor først skulle indse, at det de havde lavet var forkert.

Elevernes problemer med disse spørgsmål kommer til udtryk i flere af afleveringerne. Mange af eleverne er kommet frem til den rigtige funktion, men er ude af stand til at forklare, hvordan de er nået dertil. Et eksempel på dette kan ses i følgende uddrag af elev 8s besvarelse:

Der var dog også en enkelt gruppe af elever (elev 1, 3, 6 og 10), der brugte den teknik, de havde udviklet i temaopgave 2 til at angribe problemet med at opstille en differentialligning. Ud fra beskrivelsen af situationen i temaopgaven fandt de frem til at væksten i antallet af personer, der kendte rygtet, måtte først vokse og derefter aftage igen, når næsten alle i den store gruppen kendte til rygtet. Ud fra disse betragtninger tegnede eleverne et fasediagram og gættede ud fra dette på at differentialligningen måtte være logistisk. Desværre lykkedes det ikke rigtig for eleverne at argumentere for at dette virkelig var tilfældet (se figur **??** for et uddrag af elev 3s besvarelse). Den ledende kraft i gruppen af elever var elev 3, der også som den eneste anvendte denne teknik i forbindelse med den første af de diagnostiske opgaver. Alt i alt tyder det på, at i hvert fald denne elev fik dannet en specifik matematisk praxeologi om brugen af fasediagrammer. Desværre er der ikke noget i datamaterialet, der tyder på at de andre elever var i stand til at gøre det samme.

Som det også var tilfældet med den første af de diagnostiske opgaver, var de fleste af eleverne ikke i stand til at løse den anden diagnostiske opgave. Flere af eleverne var slet ikke i stand til at opstille en differentialligning, og kun otte af eleverne fik opstillet den korrekte differentialligning. Selv blandt disse elever var det kun ganske få der var i stand til at forholde sig kritisk til modellen. Dette tyder desværre, på at hovedparten af eleverne ikke var i stand til at forme en matematisk praxeologi om det at lave matematiske modeller ved hjælp af differentialligninger.

7.3 Elevernes reaktion på brugen af temaopgaver

Eleverne havde mange forskellige holdninger til temaopgaverne. Selvom det således ikke er muligt at sige noget samlet for holdet, er der alligevel visse tendenser, det er interessant at diskutere.

I alt 19 elever har besvaret det uddelte spørgeskema. Af disse synes 13, at antallet af opgaver var passende, og kun fire tilføjer at tidspunktet var uheldigt valgt, eller at opgaverne hellere skulle have været spredt ud over længere tid. Dette kom i høj grad som en overraskelse for mig, idet flere af eleverne undervejs i forløbet havde sagt, at de havde for travlt. Det er muligt at alle de 12 elever, der afleverede alle tre opgaver, har svaret, at de synes af antallet var passende. Men under alle omstændigheder har mindst en elev, der ikke har afleveret alle opgaver, indikeret, at antallet var fint.

Dertil kommer at henholdsvis 16, 17 og 13 elever svarer at niveauet var passende i temaopgave 1, 2 og 3. Af disse har kun to skrevet at temaopgave 2 var lidt sværere eller længere end de andre. Dette skal sammenholdes med, at ingen af eleverne har afleveret en fuldstændig besvarelse af temaopgave 2. Der er umiddelbart to mulige forklaringer på dette. For det første er en del af eleverne vant til at aflevere ufuldstændige besvarelser. Men selvom der hver gang afleveres en del ufærdige besvarelser, er det ikke i så stort antal. Det er også muligt at eleverne ikke tæller de dele af opgave, som de bevidst valgte ikke at besvare med, når de evaluerer opgaven. Så niveauet i temaopgaverne var fint, når man ser bort fra den sidste opgave i temaopgave 2.

På trods af elevernes problemer med at løse såvel temaopgaver som diagnostiske opgaver mener 8 ud af de 19 elever, at de har fået lige så godt styr på beviset for panserformlen og modellering med differentialligninger, som hvis de havde fået det gennemgået på "traditionel vis", altså som en blanding af tavlegennemgang og opgaveregning. 7 af eleverne mener ligefrem at de har fået bedre styr på emnerne på denne måde.

Alt i alt tyder dette på at temaopgaver er en populær undervisningsform blandt eleverne. Det er formentlig oplevet positivt at arbejdet med temaopgaver repræsenterer et afbrud i den almindelige undervisning, hvor eleverne selv kan få lov til at udforske et emne i det tempo, der passer dem. Der kan ikke helt ses bort fra det forhold at eleverne fik lov til at lave det meste af arbejdet i undervisningstiden, og at de ikke havde andre lektier for i matematik i denne periode.

7.4 Diagnostiske opgaver

En stor del af holdet valgte at udeblive fra matematik den sidste gang før de skulle skrive SRP. Dette skyldtes ifølge eleverne selv tidspres. Det medførte imidlertid at ca. to tredjedele af holdet først besvarede de diagnostiske opgaver efter juleferien, hvor det var godt en måned siden de sidst havde arbejdet med differentialligninger og mere generelt med matematik. Dertil kommer at mange af de elever, der mødte om den sidste gang før jul på grund af SRP ikke havde arbejdet så grundigt med temaopgave 2 og 3, som de formentlig ville have gjort på et andet tidspunkt.

Disse faktorer gør at besvarelserne af de diagnostiske opgaver ikke nødvendigvis afspejler, hvad eleverne potentielt kunne have fået ud af forløbet. Det forhold ændrer dog ikke på at de diagnostiske opgaver afspejler, hvad eleverne reelt fik ud af forløbet. Dermed er de diagnostiske opgaver en god måde at undersøge de matematiske praxeologier, eleverne har dannet i forbindelse med forløbet. De konklusioner, der kan drages på baggrund af de diagnostiske opgaver, er taget med hvor de er relevante i afsnittene om temaopgaverne (afsnit 7.2).

7.5 Elevinterviews

Det lykkedes desværre kun at gennemføre elevinterviews efter den første temaopgave. I forbindelse med de to andre var tiden blevet så knap at det ikke var muligt at afsætte tid i undervisningen til at gennemføre interviews. På andre tidspunkter af året havde det muligvis været muligt at arrangere interviews i frikvartere eller efter skoletid, men på grund af placeringen lige inden SRP, var eleverne travlt optagede. De interessante dele af elevinterviewene er taget med i a posteriori analysen af temaopgave 1 i afsnit 7.2.1.

Heldigvis var det i særdeleshed i forbindelse med temaopgave 1, at elevinterviewene var vigtige. Ved temaopgave 2 og 3 blev elevernes dannede praxeologier testet gennem de diagnostiserende opgaver. Det ville selvfølgelig have været godt at få belyst, hvilke praxeologier eleverne havde dannet fra flere kilder, men det har ikke givet anledning til videre problemer.

7.6 Andre kilder

Desværre blev optagelserne fra klassediskusionerne så dårlige at de ikke kan anvendes til at analysere elevernes praxeologier i forbindelse med temaopgaverne. Som forventet blev det ikke muligt at foretage en systematisk observation, hverken af klassediskussioner eller af gruppearbejde. Dermed bliver temaopgaverne som forventet den vigtigeste kilde til a posteriori analysen.

7.7 Konklusion på analysen

Ud fra ovenstående observationer er det muligt at sige noget om i hvor høj grad eleverne har fået dannet de matematiske praxeologier, der blev opstillet i afsnit 5.5.

De første fem specifikke praxeologier omhandlede løsning af differentialligninger:

- genkende lineære differentialligninger af første orden.
- genkende logisktiske differentiallignigner.
- anvende løsningsformlerne for lineære differentialligninger af første orden til at finde fuldstændige og specifikke
- anvende løsningsformlerne for logisktiske differentiallignigner til at finde fuldstændige og specifikke løsninger.
- anvende deres valgte CAS-værktøj til at løse differentialligninger, der har en lukket løsning.

Ved forløbets afslutning havde de fleste af eleverne dannet praksisblokke af matematiske praxeologier, der gjorde dem i stand til at løse problemer, der krævede ovenstående kompetencer. Flere af eleverne havde også dannet teoriblokke til de praxeologier, der omhandler lineære differentialligninger. Disse teoriblokke var dog ikke udviklet i en sådan grad at eleverne ville være i stand til selvstændigt at udbygge dem yderligere.

De fem specifikke praxeologier udgør tilsammen en lokal praxeologi. Ud fra det tilgængelige datamateriale er det ikke noget der tyder på at eleverne har dannet nogen form for sammenhængende struktur, der generelt hjælper dem til at løse differentialligninger. Den eneste generelle teknik, eleverne har lært, er at løse differentialligninger ved hjælp af CAS, hvilket de benytter i størst muligt omfang.

De næste tre specifikke praxeologier omhandlede kvalitativ analyse af differentialligninger:

- fortolke et diagram over linjeelementer.
- tegne et fasediagram ud fra en given autonom differentialligning.

- fortolke at fasediagram.

Den første af disse praxeologier er ikke en del af dette forløb. Med hensyn til de andre to praxeologier ser det desværre ud til, at det kun er enkelte af eleverne, der har dannet fungerende praxeologier inden for dette område. De fleste af eleverne har ikke efterfølgende været i stand til at anvende fasediagrammer på nogen måde. Dette skyldes formentlig til dels at det er en væsentlig anderledes måde at tænke på en den eleverne er vant til i forbindelse med grafiske billeder. Dertil kommer at tidspresset under forløbet betød at mange elever næppe fik den fornødne træning af disse praxeologier under forløbet.

De sidste fire specifikke praxeologier handler om modellering med differentialligninger:

- læse en given differentialligningsmodel, og udtale sig om sammenhængen mellem vækst og funktion.
- genkende de forsimplinger, der foretages i forbindelse med opstillingen af en differentialligningmodel.
- forholde sig kritisk til en differentialligningsmodel.
- opstille en differentialligningsmodel ud fra en beskrivelse i almindeligt sprog af en simplificeret model.

Her er billedet mere blandet. De elever, der i øvrigt har dannet fungerende praxeologier om modellering, var også i stand til at gøre dette for differentialligningsmodeller. De elever, der generelt har svært ved modellering, har det også svært med differentialligningsmodeller. Ikke overraskende har eleverne især svært ved at danne matematiske praxeologier, der omhandler opstilling af differentialligningsmodeller. At dømme ud fra de diagnostiske opgaver er det kun enkelte elever, der har dannet sådanne praxeologier.

Alt i alt er det lykkedes for de fleste af eleverne at danne i hvert fald nogle specifikke praxeologier. Disse praxeologier er blevet styrket siden forløbet ved at de skriftlige afleveringer har indeholdt opgaver med differentialligninger. Generelt er det især praksisblokken, eleverne har dannet. Der er enkelte elever, der desuden viser tegn på at have dannet 'højere' praxeologier (lokale, regionale, globale), for eksempel ved at være i stand til at anvende metoder fra en specifik praxeologi til at løse opgaver, der egentlig hører til en anden specifik praxeologi.

8 Diskussion

En af de vigtigeste ændringer, jeg ville lave, før jeg kørte et lignende forløb, ville være at flytte det væk fra tiden lige før SRP, hvilket også understøttes af elevernes besvarelser af spørgeskemaet. Derudover ville jeg indskrænke antallet af temaopgaver. Ganske vist har hovedparten af eleverne sagt at de syntes at antallet var passende, men jeg vil vove den påstand at et lavere antal temaopgaver pr. emne ville øge elevernes udbytte af den enkelte opgave. Færre temaopgaver ville formentlig betyde at eleverne tog den enkelte opgave mere seriøst.

En af de tind, der vil have ændret sig til næste gang, ville være elevernes ydre motivation. På dette hold skulle temaopgaverne ikke bruges i forbindelse med den mundtlige eksamen. På et kommende hold vil det være anderledes, hvilket kan hjælpe til at eleverne kan se en idé i at lægge noget arbejde i opgaven.

Ud over de rent praktiske ændringer ville jeg ændre på de valg, jeg traf i forbindelse med den didaktiske transposition. Det er ikke et krav i læreplanen at man skal bygge alle forløb deduktivt op med meget fokus på beviser. Netop differentialligninger giver rig mulighed for at ændre fokus fra beviser uden at niveauet af den grund bliver lavere. Tværtimod giver mindre fokus på beviser tid til at udforske andre dele af differentialligninger. Dette kunne med fordel være dynamiske systemer af koblede differentialligninger, der har en meget bred anvendelse. Dette kunne også være med til at motivere eleverne, der formentlig ville finde dette mere interessant end beviserne for de forskellige løsningsformler. Desuden ville et sådan valg passe godt til arbejdsformen med temaopgaver, fordi eleverne ville være i stand til at udforske sådanne systemer mere selvstændigt.

9 Konklusion

Temaopgaver er et oplagt format at bruge i forbindelse med projekter i matematik på gymnasielt niveau. Formatet giver eleverne mulighed for at udforske et matematisk emne på egen hånd, og lægger godt op til den mundtlige eksamen. Ved at bruge ATD i arbejdet med at designe temaopgaverne, kan man sikre at eleverne får de bedst mulige forudsætninger for at opbygge matematiske praxeologier inden for emnet.

I mit didaktiske forsøg har jeg, som beskrevet i afsnit 6.6, anvendt ATD til at designe tre temaopgaver om differentialligninger. I afsnit 5.1.2 har jeg undersøgt, hvilke dele af emnet differentialligninger, eleverne kan forvente at få bruge for til eksamen, og ud fra dette udvalgt to områder at fokusere på: teorien bag lineære differentialligninger (temaopgave 1) og modellering med differentialligninger (temaopgave 2).

Den første temaopgave har hjulpet en stor del af eleverne til at opbygge praktikblokken af en praxeologi om løsning af lineære differentialligninger. Sigtet med temaopgave 1 var imidlertid at hjælpe eleverne til at opbygge teoriblokken af denne praxeologi. Elevernes besvarelser af såvel temaopgaverne som spørgeskemaerne tyder på, at en del af eleverne har gjort netop det, men det er umuligt at sige endegyldigt uden data fra for eksempel en mundtlig eksamen, hvor det netop er teoriblokken af elevernes praxeologier, der er interessant.

Sigtet med temaopgave 2 og 3 var at hjælpe eleverne til at opbygge en matematisk praxeologi om modellering af differentialligninger. Datamaterialet fra elevernes besvarelse af temaopgaverne og de diagnostiske opgaver tyder på, at en stor del af eleverne ved afslutningen af forløbet ikke havde opbygget praxeologien i så høj grad, som jeg havde ønsket og forventet. Som beskrevet i afsnit 7.2.2 og 7.2.3 skyldes dette flere faktorer. En af de vigtigeste faktorer har formentlig været det tidspres, eleverne var under på grund af SRP. Det betød, at eleverne ikke fik arbejdet så indgående med temaopgaverne, som det var hensigten. Desuden valgte mange af eleverne ikke at lave den sidste opgave i temaopgave 2, fordi den mindede meget om opgaven inden. Det betød, at de ikke nåede frem til en af pointerne med temaopgaven.

De vigtigste pointer fra arbejdet med temaopgaverne i dette forløb er altså, at man skal sætte meget tid af til temaopgaverne, enten i undervisningen eller i hjemmearbejdet. I forhold til planlægning af temaopgaver betyder det, at man bør undgå tidspunkter på året, hvor eleverne i forvejen har et meget stort arbejdspres, samt at temaopgaverne bør lægges mere spredt, end det har været tilfældet her. Det nødvendiggør selvfølgelig, at man i højere grad udvælger et enkelt delemne, som temaopgaven fokuserer på, mens resten af emnet dækkes af andre undervisningstyper. Derudover er det vigtigt, at eleverne klart kan se pointen med de enkelte opgaver og delspørgsmål, så de motiveres til at løse alle dele af temaopgaverne bedst muligt.

Hvis man er opmærksom på ovenstående faktorer, er temaopgaver meget velegnede til gymnasiet. Eleverne synes, at det er en interessant arbejdsform og formen kan give en højere grad af selvstændighed i undervisningen.

10 Litteratur

Læreplanen, matematik A-niveau, STX : Bilag 35 til Bekendtgørelse nr 741 af 30/06/2008.
`https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil35`

Vejledningen til læreplanen : Undervisningsvejledning i matematik A-niveau på STX af juli 2008.
`http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Vejledninger /stx/080701_matematik_A_stx_vejledning.ashx`

EVA (2007) : *Matematik B på hhx og stx*, fagevaluering 2007, Evalueringsinstituttet EVA.

Grøn (2008a) : Bjørn Grøn, *Kommentarer til prøveform c) i de justerede læreplaner sommeren 2008*
`http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Eksamen /Fra%20fagkonsulenterne/D-M/080811_kommentarer_proeveformC_mat_2hf_stx.ashx`

Grøn (2008b) : Bjørn Grøn, *Projekter og temarapporter i matematik*, LMFK-bladet, nr. 6, november 2008, s. 12-15.

Evaluering af de skriftlige prøver i matematik på stx og hf ved sommereksamen 2009: undervisningsministeriet, 2009
`http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd /Gym/PDF09/Eksamen/Evaluering/091019_evaluering_skriftlig_ matematik_stx_hf.ashx`

Carstensen at.al. (2007) : Jens Carstensen, Jesper Frandsen og Jens Studsgaard, *Mat A til B*. Systime 2007.

Simmons og Krantz, 2007 : George F. Simmons og Steven G. Krantz, *Differential Equations; Theory, Technique and Practice*. McGraw-Hill Higher Education, 2007.

Sydsæter et.al. (2002) : Knut Sydsæter, Atle Seierstad og Arne Strøm, *Matematisk analyse bind 2*. Gyldendal akademisk, 2002.

Artigue (2002) : Michéle Artigue, *Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7, 245-274. Kluwer Academic Publishers.

Niss et al (2002) : Komtetencer og matematiklæring; Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Mogens Niss og Tomas H. Jensen (red.). Undervisningsministeriet 2002

Winsløw, 2006 : Transformer la theorie en taches: la transition du concret a l'abstrait en analyse reelle. Carl Winsløw, Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp. 1-12. La Pensée Sauvage, 2006

Barbé et al (2005) : Joaquim Barbé, Marianna Bosch, Lorena Espinoza and Josep Gascón, *Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools*. Educational Studies of Mathematics 59, 235-268. Springer.

Bosch et al (2005) : Marianna Bosch, Yves Chevallard and Josep Gascón, *Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics.* Presented at CERME. See http://cerme4.crm.es/ group 11.

Doucet og Sloep (1992) : Poul Doucet og Peter B. Sloep, *Mathematics in the Life Sciences*. Ellis Horwood, 1992.

Eason et.al. (1980) : G. Eason, C. W. Coles and G.Gettinby, *Mathematics and Statistics for the bio-sciences*. Ellis Horwood, 1980.

Chevellard (2002) : Yves Chevallard, *Organiser l'étude. 3. Écologie et regulation.* In Dorier, J.-L. et al. (eds) Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques (pp. 41-56). La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002.

Chevellard (2004) : Yves Chevallard, *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle* *épistémologie scolaire.* 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004, APMEP (pp. 239-263).

Grønbæk og Winsløw (2007) : Niels Grønbæk og Carl Winsløw, *Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate matematics.* Recherces en Didacquetique des Mathématiques 27 (2), 2007, s. 187-220.

Rasmussen (2001) : Chris L. Rasmussen, *New directions in differential equations; A framework for interpreting students' understandings and difficulties*

A Temaopgaver

Temaopgave 1

I skal i denne temaopgave arbejde med følgende sætning (kaldet "Panserformlen"):

> Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' + g(x) \cdot y = h(x)$ er $y = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} \cdot h(x)dx$, hvor G er en stamfunktion til g.

Opgave 1:
Bevis at funktionen $y = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} \cdot h(x)dx$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 2:
For at vise sætningen ovenfor, skal vi desuden vise, at hvis en funktion er løsning til differentialligningen, så er den nødvendigvis af den opskrevne form (dvs. vi får "det hele med"). Vi begynder med at se på det simplere tilfælde, hvor $h(x) = 0$ og $f(x) \neq 0$ for alle x.
Nedenfor er givet fem trin i beviset. Forklar hvordan man kommer fra trin 1 til trin 2, fra trin 2 til trin 3 og så videre.

Trin 1:	$f'(x) + g(x)f(x) = 0$	
Trin 2:	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -g(x)$	Hvordan fik vi det fra trin 1?
Trin 3:	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int g(x)dx$	Hvordan fik vi det fra trin 2?
Trin 4:	$\ln\lvert f(x)\rvert = -G(x) + k$	Hvordan fik vi det fra trin 3?
Trin 5:	$f(x) = \pm e^{-G(x)+k}$	Hvordan fik vi det fra trin 4?
Trin 6:	$f(x) = c \cdot e^{-G(x)}$	Hvordan fik vi det fra trin 5?

Overvej hvorfor vi er nødt til at forudsætte at $f(x) \neq 0$ for alle x.
Overvej også hvorfor konstanten c i trin 6 ikke kan være 0.

Til trin 4: $|x|$ betyder den numeriske værdi af x. Der gælder at $|x| = \pm x$.

Opgave 3:
Herunder er de matematiske ligninger fra et bevis for sætningen i boksen (vi bruger notationen derfra uden nærmere forklaring).

Trin 1: $f'(x) + g(x)f(x) = h(x)$

Trin 2: $e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}g(x)f(x) = e^{G(x)}h(x)$

Trin 3: $e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}G'(x)f(x) = e^{G(x)}h(x)$

Trin 4: $M'(x) = e^{G(x)}h(x)$ hvor vi har defineret $M(x) = e^{G(x)}f(x)$

Trin 5: $e^{G(x)}f(x) = \int e^{G(x)}h(x)dx$

Trin 6: $f(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)dx$

Forklar hvorfor man kan slutte fra trin 1 til trin 2, fra trin 2 til trin 3, osv.
Forklar til sidst, hvorfor dette sammen med opgave 1 giver et bevis for sætningen.

Opgave 4:
Hvilke forskelle er der mellem sætningerne og beviserne i opgave 2 og 3? Overvej både om der er forskel på, hvor generelt man kan anvende sætningen og på metoden i beviset.

Temaopgave 2: Fiskerimodeller

Differentialligninger bruges bl.a. til at modellere udviklingen af en population over tid. I denne opgave skal du kigge på en model for fiskeri.

Væksthastigheden for en bestand af fisk kan udtrykkes som:

$$\frac{dN}{dt} = kN(K - N) - F$$

hvor $N = N(t)$ er antallet af fisk i bestanden som funktion af tiden t, målt i en passende enhed,
k er formeringsraten (dvs. hvor mange fisk, hver fisk i gennemsnit føder pr. tidsenh
K er det maksimale antal fisk og
F er fangsten.

Vi skal kigge på to tilfælde: 1) F er konstant og 2) F er proportional med antallet af fisk, dvs. $F = rN$.

Opgave 1:

a) Forklar hvilke antagelser der gøres i modellen, fx hvilke forsimplinger der er lavet.

b) Forklar, hvilke situationer i den virkelige verden, de to tilfælde svarer til.

c) Overvej hvilke værdier k, K, N og F kan antage. Kan de fx blive negative?

Opgave 2:
I skal starte med at undersøge tilfælde 1.

a) Tegn en graf, der viser $\frac{dN}{dt}$ som funktion af N. Du kan evt. prøve med talværdier for k, K og F først for at komme i gang, men du skal også lave en skitse af grafen for det generelle tilfælde.

b) Marker på grafen de værdier for N, der svarer til at antallet af fisk vokser.

c) Hvad sker der med dette område når fangsten øges?

d) Hvad er den højst mulige fangst, hvis bestanden af fisk ikke skal uddø?

De værdier af N, hvor $\frac{dN}{dt} = 0$ kaldes ligevægte, da antallet af fisk her er i ligevægt (ikke ændres).

e) Hvad sker der med antallet af fisk når N kommer i nærheden af ligevægtene? Nærmer eller fjerner antallet sig yderligere fra ligevægten? Hvad betyder det for den situation, som modellen beskriver?

f) Tegn en skitse for grafen for N som funktion af t. Det er nødvendigt at dele det op i tre tilfælde efter begyndelsesværdien (antal fisk for $t = 0$):

- begyndelsesværdien ligger til venstre for ligevægtene,
- begyndelsesværdien ligger mellem ligevægtene og
- begyndelsesværdien ligger til højre for ligevægtene.

Du skal ikke forsøge at bestemme en forskrift for $N(t)$, men udelukkende tegne graferne på baggrund af dine undersøgelser. Du kan fx overveje hvor hurtigt N vokser eller aftager.

Opgave 3:
I skal nu undersøge tilfælde 2. Start med at skrive differentialligningen op med $F = rN$.

a)-e) Du skal starte med at lave samme undersøgelser for tilfælde 2 som for tilfælde 1, dog ikke det sidste punkt (dvs. ikke opgave 2.f). I d) må det selvfølgelig blive den største procentvise fangst.

I tilfælde 1 har differentialligningen ikke en pæn løsning (prøv selv vha. deSolve for udvalgte værdier af k, K og F). Men i tilfælde 2 er der tale om logistisk vækst, hvilket betyder, at der findes en løsningsformel, der giver den fuldstændige løsning (sætning 5a og 5b).

f) Du skal starte med at lave dit eget eksempel: Vælg passende værdier for k, K og r og opskriv og løs differentialligningen for dette tilfælde. Vælg flere forskellige begyndelsesværdier, både mellem og til højre for ligevægtene (se evt. 3.e) og tegn graferne for de fremkomne funktioner. Du kan med fordel bruge et grafprogram på computer, fx GeoGebra. Hvordan stemmer disse grafer overens med dine resultater fra opgave 3.e?

g) Benyt sætning 5b til at finde den fuldstændige løsning til differentialligningen - det er nødvendigt først at omskrive differentialligningen lidt, så den komme til at ligne den i sætningen. Hvordan stemmer den fuldstændige løsning overens med dine resultater fra resten af opgaven?

Temaopgave 3

Du skal i denne opgave arbejde med at opstille en differentialligningsmodel ud fra en realistisk situation.

En model for rygtespredning i en lukket gruppe.
Vi ønsker at lave en model, der viser spredningen af et rygte i en gruppe mennesker med et bestemt antal medlemmer. Disse mennesker snakker meget, så lige så snart to mennesker fra gruppen mødes, snakker de om rygtet. Vi kan altså regne med at personer, der ikke kender rygtet, finder ud af det lige så snart de møder en, der kender rygtet.

a) Vi vil gerne ende med at finde en funktion, der beskriver spredningen af rygtet. Hvad skal denne funktion måle, og hvad skal det være en funktion af?

b) Hvad er sammenhængen mellem antallet af personer, der kender rygtet, og antallet af personer, der ikke kender rygtet?

Du skal nu forsøge at opstille en differentialligning, der beskriver væksten i antallet af personer, der kender rygtet. Spørgsmål c) og d) er meget åbne, men der er mulighed for at få ledetråde fra lærerne. Hver ledetråd "koster" 2 point i den endelige bedømmelse af opgaven.

c) Hvad afhænger væksten af?

d) Hvordan afhænger væksten af disse parametre?

e) Opstil differentialligningen.

f) Hvilken type differentialligning er der tale om?

g) Løs differentialligningen i dette, generelle tilfælde. Husk at gøre rede for, hvad de forskellige bogstaver står for.

h) Hvilke værdier kan antallet af personer, der kender rygtet, antage? Hvordan passer det med modellen?

På Falkonergårdens Gymnasium og HF er der i alt 904 elever. Et særligt saftigt rygte, der interesserer alle eleverne, bliver sat i omløb. Den første dag er ti mennesker, der har hørt rygtet. Allerede den næste dag, er der 100 mennesker, der har hørt rygtet.

i) Hvad kunne en passende enhed for den uafhængige variabel være i dette tilfælde?

j) Opstil vha. de ovenstående opgaver en funktion, der viser spredningen af rygtet.

Ledetråde (blev udleveret til eleverne en ad gangen):

1. Overvej hvad der sker med væksten, hvis antallet af personer, der kender rygtet fordobles. Overvej hvad der sker med væksten, hvis antallet af personer, der ikke kender rygtet fordobles.

2. Afhænger væksten på nogen måde af hvor ofte personerne i gruppen mødes?

3. Hvilke forskellige måder kan man kombinere parametrene på?

4. Hvad er væksten, hvis der ikke er nogen, der kender rygtet? Hvad er væksten, hvis alle i gruppen kender rygtet?

5. Tænkt tilbage til det du ved om forskellige typer vækst vi har behandlet. Hvilken type vækst har en udvikling, der passer godt på det du har fundet? Du kan evt. se på grafer for de forskellige typer af vækst.

B Bilag 2: Diagnostiske Opgaver

Opgaver om differentialligninger

3g MA, 2/12 2009

Opgaverne skal besvares uden hjælpemidler - dvs. ingen bøger eller lommeregner.
I har 10 min. til hver opgave.

Opgave 1:
Skriv alt det du kan om følgende differentialligning og dens løsninger:

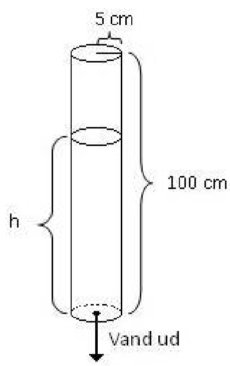
$$\frac{df}{dx} = sin(f)$$

hvor f er en funktion af x.

Opgave 2:
En cylinder, der er 100 cm høj og har en diameter på 5 cm (se figuren), fyldes med vand. Derefter åbnes en ventil i bunden, så vandet løber ud. Pga. vandtrykket fra søjlen, afhænger den hastighed, som vandet løbet ud af beholderen med af vandstanden h. Specifikt er udløbshastigheden lig med $\frac{1}{10}$ af vandstanden.

Brug dette til at opstille en model for, hvordan indholdet af vand i beholderen ændrer sig over tid. Det er en god idé at lade det tidspunkt, hvor ventilen åbnes, svare til tiden 0.

Kommenter modellen. Er der nogle specifikke problemer?



C Spørgeskema

Spørgeskema, temaopgaver om differentialligninger

3g MA, nov.-dec. 2009

1. Hvad er en differentialligning?

2. Giv et eksempel på en differentialligning

3. Hvad synes du om arbejdsformen med temaopgaver?

4. Hvordan synes du niveauet har været i den enkelte temaopgave?

Temaopgave 1: ☐ For svær ☐ Passende ☐ For let
Temaopgave 2: ☐ For svær ☐ Passende ☐ For let
Temaopgave 3: ☐ For svær ☐ Passende ☐ For let

5. Har antallet af temaopgaver være passende?

☐ For få ☐ Passende ☐ For mange

6. Tror du, at du har bedre eller dårligere styr på beviset for panserformlen (temaopgave 2), end hvis vi havde gennemgået det i klassen? Du kan evt. prøve at sammenligne med sætning 3.

☐ Bedre ☐ Lige så godt ☐ Dårligere

7. Tror du, at du har bedre eller dårligere styr på modellering med differentialligninger (temaopgave 2 og 3), end hvis vi havde gennemgået det på traditionel vis (tavleundervisning og småopgaver)?

☐ Bedre ☐ Lige så godt ☐ Dårligere

8. Tror du, at du vil kunne bruge temaopgaverne til eksamen (både forberedelse og selve eksamenen), hvis der kommer spørgsmål inden for de emner, som temaopgaverne handler om?

Temaopgave 1:	☐ Ja, mundtlig eksamen	☐ Ja, skriftlig eksamen	☐ Nej, slet ikke
Temaopgave 2:	☐ Ja, mundtlig eksamen	☐ Ja, skriftlig eksamen	☐ Nej, slet ikke
Temaopgave 3:	☐ Ja, mundtlig eksamen	☐ Ja, skriftlig eksamen	☐ Nej, slet ikke

9. Har du prøvet at arbejde på en lignende måde før i matematik?

☐ Ja Hvis ja, hvornår?____________________ ☐ Nej

Hvis ja, tror du så at det har hjulpet dig i dette forløb at du kendte arbejdsformen?

10. Hvis man skulle gennemføre et lignende forløb, hvad skulle man så gøre anderledes?

11. Har du andre kommentarer og forslag?

Navn: ____________________