INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Eksponentialfunktioner i STX

Jan Henrik Egballe Heinze

Specialerapport

Juni 2010

IND's studenterserie nr. 19

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
Nr. 18: Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
Nr. 19: Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)

Abstract

Formålet med dette speciale er at undersøge de muligheder der er for at indføre eksponentialfunktioner i gymnasieundervisningen. Til det formål inddrages den antropologiske teori for didaktik som et værktøj der benyttes til at beskrive rammerne for matematisk læring.

Målet er at designe et forløb om eksponentialfunktioner, som derefter testes på en 1.g klasse i et STX-gymnasium ved at bruge en liste af hypoteser.
De ydre og indre kræfters indflydelse på stoffets form analyseres ved at benytte begreberne didaktisk transposition og matematisk praxeologi.

Eleverne skriftlige arbejde analyseres herefter for at undersøge i hvilken grad den matematiske organisation er etableret.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Jan Henrik Egballe Heinze

Eksponentialfunktioner i STX

Speciale for cand.scient graden i matematik

Vejleder: Carl Winsløw

Afleveret den: 01/06/10

Resume:

Formålet med dette speciale er at undersøge de muligheder der er for at indføre eksponentialfunktioner i gymnasieundervisningen. Til det formål inddrages den antropologiske teori for didaktik som et værktøj der benyttes til at beskrive rammerne for matematisk læring.

Målet er at designe et forløb om eksponentialfunktioner, som derefter testes på en 1.g klasse i et STX-gymnasium ved at bruge en liste af hypoteser.

De ydre og indre kræfters indflydelse på stoffets form analyseres ved at benytte begreberne didaktisk transposition og matematiske praxeologi.

Eleverne skriftlige arbejde analyseres herefter for at undersøge i hvilken grad den matematiske organisation er etableret.

Abstract:

The aim of this master’s thesis is to investigate the possibilities for ways to introduce exponential functions in a high school setting. To that end, the anthropological theory of didactics is used as a tool to describe the conditions for mathematical learning.

The goal is to design a course on exponential functions and then test it, using a list of hypotheses, on a high school first year class.

The exterior and interior agents, and their effect on the curriculum, will be analyzed, using the concepts of didactical transposition and mathematical praxeology.

Lastly the hypotheses will be investigated, using the results of the exercises handed in by the students.

Indhold

Indledning

Dette speciale handler om at strukturere et forløb om eksponentialfunktioner. Forløbet vil blive testet på en 1.g klasse på Gribskov Gymnasium hvor jeg i skoleåret 2009/2010 er tilknyttet som årsvikar.
Grunden til at jeg har valgt dette emne er, at jeg som kommende matematiklærer ønsker at optræne en struktureret og kritisk tilgang til hvordan jeg tilrettelægger og udfører min undervisning.

Jeg vil benytte mig af ordet *eksponentialfunktion* i den forstand, at der er tale om en reel funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvor a og b er givne, positive reelle tal. Dette er ikke nødvendigvis standarden, men det er den terminologi jeg har valgt ud fra min læsning af det lærebogsmateriale der er til rådighed på Gribskov Gymnasium.

I første afsnit beskriver jeg den generelle didaktiske *teori* jeg har brugt. Derefter går jeg i gang med min a priori analyse i afsnittet om den *didaktiske transposition*. Herefter præsenterer jeg min *problemformulering*, dvs. de hypoteser jeg ønsker at teste gennem forløbet. Herefter følger de tanker jeg har gjort mig omkring forløbets *design*. Til sidst fremlægger jeg mine observationer under forløbet og kommer med en konklusion.

Specialet har fem bilag. De fire første er de opgaver som jeg har stillet eleverne og brugt i min bedømmelse. Det femte bilag er en kort opsummering af det matematiske indhold jeg har valgt at inkludere i forløbet, som følge af min analyse af den didaktiske transposition.

Teori

I dette først afsnit vil jeg beskrive den teoretiske baggrund for den analyse jeg vil foretage i specialet. Jeg introducerer begreberne *praxeologi* og *didaktisk transposition*. I næste afsnit vil jeg så anvende begreberne i den konkrete situation.

Den antropologiske teori for didaktik

Jeg vil i denne opgave arbejde ud fra den didaktiske teori der kaldes den *antropologiske teori for didaktik* (i det følgende blot ATD). ATD er en del af det såkaldte epistemologiske didaktiske program og arbejder således ud fra idéen om at faget, i dette tilfælde matematik, ikke kan analyseres uafhængigt af den række af *institutioner* gennem hvilke den er blevet formet – fra universitet gennem undervisningsministerium til klasseværelse. Dette er den såkaldte *didaktiske transposition*. Den udfylder den følgende funktion:

"… it formulates the need to consider what is being taught at school ('contents' or 'knowledge') is, in a certain way, an exogenous production, something generated outside school that is moved – 'transposed' – to school out of a social need of education and diffusion."

(Bosch & Gascón, 2006, s. 53).

Den matematik der undervises i gymnasiet er påvirket af rejsen – transpositionen – gennem en række institutioner. Der er ikke blot tale om, at emnerne gøres mindre "tekniske", snarere gælder der, at den didaktiske transposition:

"…starts far away from school, in the choice of the bodies of knowledge that have to be transmitted. Then follows a clearly creative type of work – not a mere "transference", adaption or simplification –, namely a process of de-construction and rebuilding of the different elements of the knowledge, with the aim of making it 'teachable' while keeping its power and functional character" (Bosch & Gascón, 2006, side 53).

Denne dekonstruktion og den følgende opbygning varetages af en række individer (*agents*). Dette er blandt andet politikere og forskere (den såkaldte *noosphere*).
Den didaktiske transposition er som begreb et produkt af franskmanden Yves Chevallards didaktiske arbejde. Han betragter den didaktiske transposition som analytisk enhed, dvs. at enhver didaktisk analyse må starte der, og at de enkelte delkomponenter er irrelevante hver for sig. Det kendetegnende for analyseprocessen er altså, at:

"… [it] highlights the institutional relativity of knowledge […] it's main consequence is that the minimal unity of analysis of any didactic problem cannot be limited to the consideration of how students learn (and teachers teach) mathematics. It must include all the steps of the

process of didactic transposition, including data coming from each and every one of the involved institutions as an empirical basis" (Bosch, Chevallard & Gascón, 2005, side 4).

I dette speciale arbejdes der med en af de gymnasiale uddannelser (STX), så vi kan begynde med at dele den didaktiske transposition op i følgende dele:

Hvad kan der undervises i?
Forskerne på universiteterne arbejder i et væk på at producere ny viden. Deres virkning på undervisningen foregår på meget langt sigt, da de som regel arbejder med emner der ikke har nogen direkte berøringsflade med gymnasiet (undtagelsen er forskning i matematikdidaktik). Universitetet styrer også stoffet på den måde, at det forudsættes at en elev der har taget *A*-niveau kan afslutte 3.g og derefter gå direkte ind på en kortere videregående uddannelse.

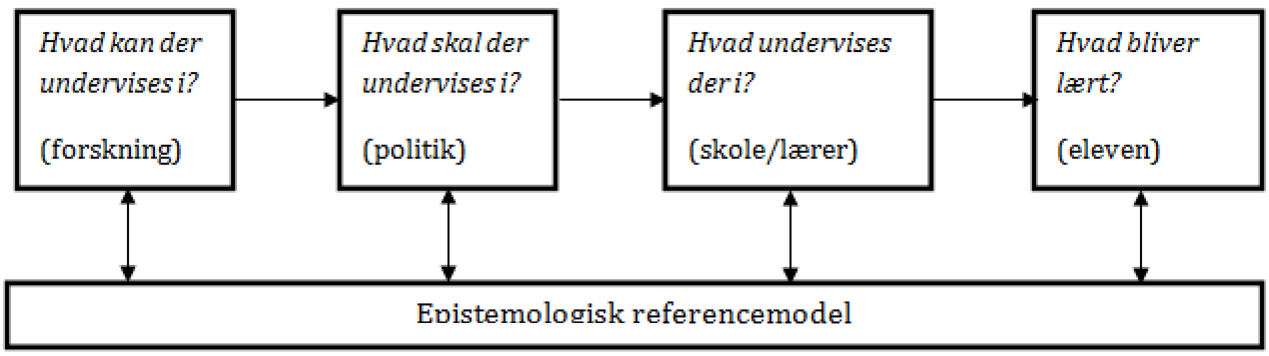
Hvad skal der undervises i?
Dette er undervisningsministeriets job. Der udgives en bekendtgørelse der beskriver hvad kernestoffet er. Desuden er der en vejledning med paradigmatiske eksempler, og det fastlægges hvordan eleverne skal bedømmes ud fra hvordan de tilegner sig stoffet. Dette er som regel et ideologisk projekt og et regeringsskift kan føre til markante ændringer, som vi fx så med den nye gymnasiereform. I forbindelse med matematik er den mest markante ændring nok, at faget blev gjort obligatorisk for alle studieretninger.

Hvad bliver der undervist i?
Dette dækker både over den enkelte undervisningsinstitution og den enkelte lærer. Som regel holder faglærerne et møde i starten af et skoleår og koordinerer hvilke forløb der skal gennemgås i grundforløbet. Dette gøres for at lette overgangen for de elever der skifter studieretning ved årsskiftet. Desuden besluttes det hvilke IT-værktøjer de enkelte klasser skal arbejde med (fx et CAS-værktøj til en klasse hvor A- eller B-niveauet er obligatorisk). Herudover foretager den enkelte lærer en række bevidste og ubevidste valg når de skal strukturere den enkelte time.
Ydre påvirkninger kan i dette tilfælde fx være længden af lektioner. Der kan fx være tale om lektioner af 60 minutters længde eller blokke på 100 minutter.
Noget andet der har stor betydning er *lærebogen*. Efter reformen er der blevet skrevet en del nye sæt som skulle være skræddersyet til de ændrede forventninger og krav. Det vil dog formentlig være uundgåeligt at de lærere der skriver bogen mere eller mindre bevidst projicerer egne didaktiske valg ind i skrivningen. Hvis læreren har et andet naturvidenskabeligt fag ved siden af (fx fysik) vil det måske fremgå tydeligt af de valg af eksempler der medtages i bogen.

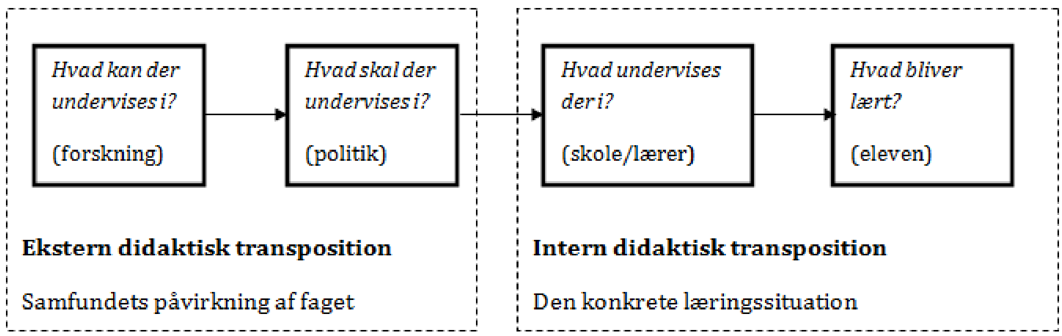
Hvad lærer eleverne?
Den sidste overgang er også den mest komplekse og uforudsigelige af slagsen. Eleverne hører læreren snakke og ser han/hende skrive på tavlen. De kan fx lære ved at reproducere

lærerens undervisning, men dermed opnår de ingen faglig selvstændighed. De flittige elever vil måske søge alternativ litteratur og opnå faglig modenhed ved at studere hvordan den samme matematik kan variere alt efter hvilke institutioner der har formet den. Eleverne skal måles på det de kan, idet de skal aflevere opgavesæt der kræver at de reproducerer den viden læreren har gennemgået i timerne. Læreren kan efter behov gå ind og hjælpe i selve opgaveskrivningen.

Når man skal opstille og analysere en didaktisk transposition skal man naturligvis være så objektiv som muligt. Som fagkyndig vil man jo altid høre hjemme i mindst én af de nævnte institutioner. Derfor er det vigtigt at man opretter en såkaldt *epistemologisk referencemodel*. Hermed menes en dynamisk model der holdes op mod de enkelte institutioner. Dens job er at sikre at analysen sker uafhængigt af de enkelte institutioner. Den er derfor i kontinuerlig forandring. Skematisk kan vi stille det op således:



Man kan argumentere for hvorvidt uddannelsesinstitutionen har mest indflydelse på hvad der *skal* undervises i, og hvad der *bliver* undervist i. I den forbindelse kan det være nyttigt at opdele den didaktiske transposition i to dele der, løst set, svarer til at dele op på følgende måde:



Der tales her om en *ekstern* og en *intern* del af den didaktiske transposition. Den eksterne del omhandler det omkringliggende samfund, mens den interne omhandler den konkrete læringssituation.

I ATD bruges der en række konkrete værktøjer, der kaldes *praxeologier.* Hermed menes en systematisk beskrivelse af en menneskelig handling. Vi kan dele ordet op i *praxis* og *logos*. Vi har en praktisk del som beskriver handlingens direkte manifestation. Desuden har vi *logos* som løst kan beskrives som ræsonnement eller retfærdiggørelse. Således kan en praxeologi $\mathcal{P}$ beskrives som et ordnet par $[P/L]$ eller blot (P, L). De to delblokke P og L er skarpt adskilte men alligevel giver de hver især ingen mening uden den anden. En hovedidé i ATD er nemlig, at:

… no human action can exist without being, at least partially, "explained", made "intelligible", "justified", "accounted for", in whatever style of "reasoning" such an explanation or justification may be cast. Praxis *thus entails* logos *which in turn backs up* praxis*. For* praxis *needs support – just because, in the long run, no human doing goes unquestioned.* (Barbe et. al., 2000).

Den praktiske blok P kan opdeles i to dele: $P = (T, \tau)$. Disse to dele er defineret således:

Type	T	Den konkrete opgave.
Teknik	τ	Metode til at løse opgavetypen. Denne er ikke unik, da der kan være mange forskellige måder at løse opgaven på

Opgavens teknik ligger således på et højere abstraktionsniveau end den enkelte opgavetype. Som sagt kan der til en given opgavetype være mange forskellige teknikker. Et eksempel med to teknikker er følgende:

Type	T	Løs ligningen $b \cdot a^x = y$
Teknik 1	τ_1	Tag logaritmen på begge sider af lighedstegnet. Brug regnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ og isoler x i ligningen (*algebraisk teknik*)
Teknik 2	τ_2	Tegn grafen (evt. på et CAS-værktøj). Aflæs den x-værdi hvor grafen når højden y (*grafisk teknik*)

De to teknikker er ikke ligestillede da τ_1 er mere præcis. Til gengæld kan den opnåede præcision i nogle opgavetyper være irrelevant (specielt hvis ligningen er opstået i forbindelse med eksponentiel regression). Hermed kan τ_2 også vise sig at være en effektiv teknik. Vi har altså allerede to forskellige praxeologier med praktiske blokke $P_1 = (T, \tau_1)$ og $P_2 = (T, \tau_2)$.

Lad os nu kaste blikket på den teoretiske blok L. Den kan ligesom den praktiske opdeles i to dele: $L = (\theta, \Theta)$. Disse to dele er defineret på følgende måde:

Teknologi	θ	Beskrivelse af teknikken
Teori	Θ	Retfærdiggørelse af teknikken ("beviset")

Vi ser med det samme at L er tæt knyttet til P. Teknologien er nemlig endnu en forøgelse af abstraktionsniveauet, da den går ind og beskriver teknikken sådan at den kan reproduceres. Lad os fx betragte den algebraiske teknik τ_1 til at løse eksponentialligninger. En passende teknologi kunne fx være:

Teknologi 1	θ_1	Tag logaritmen på begge sider. Ryk eksponenten ud og ned foran. Dividér.

En passende teknologi til den grafiske teknik τ_2 kunne være:

Teknologi 2	θ_2	Find y på den lodrette akse. Ryk vandret ud til grafen og gå derefter lodret ned til du rammer den vandrette akse.

Denne teknologi er en hel del mere primitiv end den første. Til gengæld er den en del mere intuitiv og kræver mindre matematisk forarbejde. De to teknologier læner sig hver især på to forskellige diskurser. Dette er *teorien*, dvs. det sidste løft af abstraktionsniveauet. Til de to teknologier kan vi fx opstille disse to følgende teorier:

Teori 1	Θ_1	I en ligning kan man udføre operationer der efterlader løsningsmængden uændret. Logaritmefunktioner er injektive så $\ln(x) = \ln(y)$ hvis og kun hvis $x = y$. Regnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ kan vises ved induktion
Teori 2	Θ_2	En graf måler x-værdier i bredden og y-værdier i højden. $y = f(x)$ svarer grafisk til at punktet (x, y) ligger på grafen for f. Dette skyldes at grafen er defineret som mængden $\{(x, y) \mid f(x) = y\}$.

Vi så altså at en opgavetype T gjorde det muligt at opstille to forskellige praxeologier:

$$\mathcal{P}_1 = (T, \tau_1, \theta_1, \Theta_1)$$

$$\mathcal{P}_2 = (T, \tau_2, \theta_2, \Theta_2)$$

Vi kan således strukturere en matematisk handling gennem den såkaldte *4T-model*.

Mere interessant er det dog at betragte praxeologier der har fælles teoretisk blok. Vi snakker da om en *didaktisk organisation* eller i vores tilfælde: en *matematisk organisation* (idet følgende ofte blot MO).
Hvis vi fx har en række praxeologier med fælles teknologi så taler vi om en *lokal* MO.
Vi kan desuden arrangere en række lokale MO'er med samme teori i en såkaldt *regional* MO.
I en regional MO kan vi fastlægge en teknologi. Til denne kan vi også fastlægge en Teknik og en dertil hørende type. Hermed har vi en punktuel MO. Dette er naturligvis det samme som en praxeologi, da der er tale om et punktnedslag i den matematiske organisation.

I ATD er praxeologier dog et større begreb end som så. Enhver menneskelig handling kan indlejres i 4T-strukturen, ikke blot matematiske organisationer. Matematiklærerens mål er at etablere en MO hos eleverne. Der tales her om en *didaktisk praxeologi*. Den har som alle praxelogier en praktisk blok og en teoretisk blok. Den praktiske blok indeholder Typen, som er etableringen af MO'en. Teknikken er lærerens strukturering af undervisningen. Den teoretiske blok indeholder Teknologien, som er den diskurs læreren benytter sig af i klasseværelset og Teorien, som er den didaktiske optik der bruges. Denne kan fx være ATD.
I ATD sker denne etablering i seks faser (eller *momenter*). Disse er (jf. Barbé et. al., 2005, side 238) de følgende:

1) Åbningsfasen (det første møde)
2) Udforskningsfasen
3) Den teknisk-teoretiske fase
4) Institutionaliseringsfasen
5) Evalueringsfasen

Åbningsfasen foregår ved at eleverne bliver konfronteres med nogle opgavetyper, og at de efterhånden skimter nogle fællestræk ved dem. Udforskningsfasen går ud på at de forsøger at udkrystallisere disse fællestræk og fremsætte a priori antagelser. I den teknisk-teoretiske fase finpudser eleverne teknikkerne og forsøger at argumentere for at de er korrekte, og altid vil være det i den pågældende kontekst. Institutionaliseringsfasen og evalueringsfasen afslutter etableringen ved en endelig opstilling af praxeologierne (muligvis i form af et kompendium som læreren har skrevet i forløbet – eventuelt med indlæg fra eleverne) og en undersøgelse af om MO'en har rodfæstet sig. Dette kan ske formelt, med skriftlige opgaver, eller mere uformelt i forbindelse med en klassediskussion.

Instrumenterede teknikker

Af speciel interesse er alle de teknikker der involverer elektroniske værktøjer. Dette kan være et regneark (fx Excel), en lommeregner (fx TI-30 Multiview) eller et CAS-værktøj (fx TI-Nspire eller TI-89). Jeg vil her begrænse mig til at betragte CAS-værktøjer, da brugen af dem er obligatorisk (dette følger af min læsning af bekendtgørelsen senere).

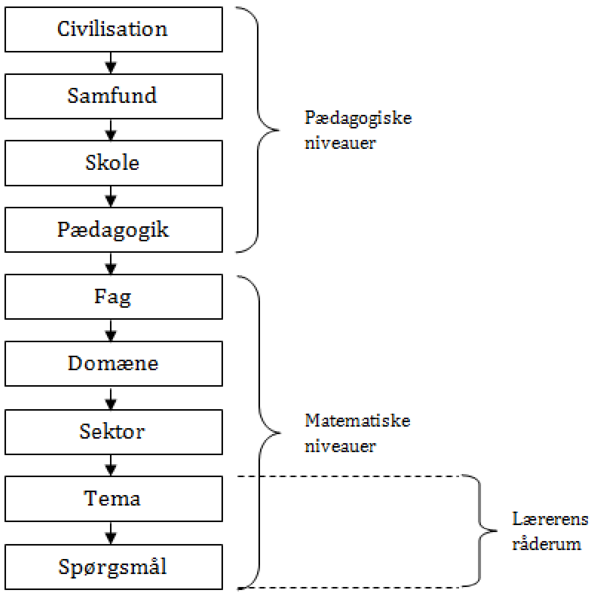
Brugen af et CAS-værktøj (også kaldet et *artefakt*) indlæres gennem en proces der kaldes *instrumental genese*. Der er her tale om kontinuerlig kommunikation mellem artefaktet og subjektet. Artefaktet præger subjektet i den proces der kaldes *instrumentationen*. Firmaet der har konstrueret værktøjet har inkorporeret et programmeringssprog som man som bruger først skal tilegne sig. CAS-værktøjer er typisk konstrueret specielt med henblik på gymnasiale uddannelser, for at gøre instrumentationen til en naturlig del af undervisningen. Et eksempel kan være at man indtaster et matematisk udtryk på samme måde som det skrives på papiret, fx at man dynamisk indtaster $\frac{x^2+6}{x+4}$ i stedet for $(x\text{^}2 + 6)/(x + 4)$.
Et CAS-værktøj har altid en lang række indstillingsmuligheder og desuden vil der være mulighed for at programmere. Ligesom artefaktet præger subjektet kan subjektet altså præge artefaktet, hvilket kaldes *instrumentaliseringen*.
Subjektets brug af artefaktet sker ved at optræne og bruge kognitive skemaer, hvilket er sekvenser af tastetryk og aflæsning på skærmen. Disse skemaer danner sammen med artefaktet et *instrument*.
Jeg vil definere en *instrumenteret teknik* som en teknik (i en praxeologi) der benytter sig af et CAS-værktøj (eller regneark) som et uundværligt element.
Artigue (2002) mener at en teknik har en *pragmatisk* værdi og en *epistemisk* værdi. Jo hurtigere og enklere en teknik er, jo højere er dens pragmatiske værdi. Den kan til gengæld have en lav epistemisk værdi hvis brugen af den ikke giver indsigt i de matematiske objekter der er i spil.
Winsløw (2003) nævner *løftestangspotentialet* som en mulig fordel ved CAS-værktøjer. Eleverne har mulighed for at arbejde på et højere niveau, og lade CAS-værktøjet tage sig af detaljerne. Som eksempel kan nævnes at eleverne undersøger fortegnsvariation og monotoniforhold og lader CAS-værktøjet om at differentiere og løse ligninger.
Dette kan dog også give bagslag i form af en *Jourdain effekt*, hvilket betyder at eleverne bruger teknikkerne slavisk og uden at forstå hvad de gør. Derfor kan de ikke reproducere dem hvis opgaven varieres, eller blot skrives op på en anden måde. En anden fare er den såkaldte *animator effekt*. Her forsøger læreren at "animere" eleverne til at benytte sig af CAS-værktøjet så meget som muligt. Det er således ikke elevernes resultater, men mere deres teknik der fokuseres på.
CAS-værktøjer er beregnet til at udregne eksempler og optræne en induktiv tankegang (dvs. "gætte et mønster"). Derfor kan brugen af dem undergrave elevernes evne til at argumentere og bevise. Dette problem kaldes *partikularitets effekten* (jf. Winsløw (2003) side 280).
Et andet problem ved CAS-værktøjet er at de går direkte fra input til output. Dette kaldes *Black box effekten*. Dette kan muligvis undgås, ved at der til en instrumenteret teknik (som formentlig har en meget høj pragmatisk værdi og en meget lav epistemisk værdi) er en alternativ ikke-instrumenteret teknik. Den epistemiske værdi vil her typisk være meget høj, mens den pragmatiske værdi kan være middel til meget lille. Denne teknik kan muligvis blot skitseres på tavlen.

Didaktiske Codeterminationsniveauer

I ATD er holdningen altså, at undervisningen i høj grad er påvirket af ydre kræfter i samfundet, og det er en nødvendighed at medtage disse i en enhver analyse. Disse ydre kræfter opdeler Chevallard i et hierarki af institutioner som kaldes *didaktiske codeterminationsniveauer*. Niveauerne er indlejret i hinanden og begrænser hinanden. Først og fremmest betragtes den *civilisation* og det *samfund* hvori undervisningen finder sted. Dernæst betragtes *skolen*, dvs. det konkrete uddannelsessted, og den *pædagogik* der bruges. Dernæst betragtes *faget*, i dette tilfælde matematik. Faget er opdelt i *domæner*, fx analyse, geometri, osv. Inden for domænet analyse kan man præcisere en sektor, hvilket fx kan være reel funktionsteori. Der er her et *tema*, der kan være den funktionstype der arbejdes med (lineær, trigonometrisk etc.) Det sidste niveau er så det konkrete spørgsmål der stilles inden for temaet. Dette kan fx være at man skal bestemme nulpunkter og/eller monotoniforhold. De sidste to niveauer er typisk det eneste som den enkelte lærer har indflydelse på. Barbé et. al. (2005) skriver om dette at:

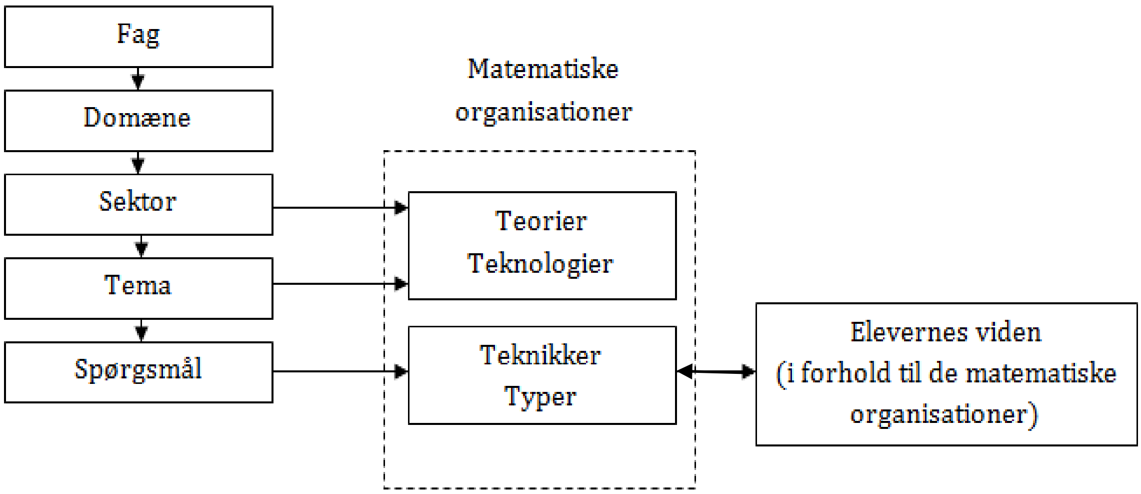
"... the teacher is destined to go no further than the thematic level, and this situation has important consequences. In particular, the most significant outcome is the disappearance of the reasons of being of the studied MO" (side 257).

Chevallard kalder dette for lærerens *tematiske autisme*. Han mener at skolematematik typisk ikke bevæger sig højere end det tematiske niveau, hvilket gør at der ikke kan dannes regionale eller globale MO'er. Dette fænomen kalder Chevallard for *monumentaliseringen* af matematik. Begreberne og sætningerne står som urørlige isolerede elfenbenstårne uden en forklaring på hvorfor og hvordan de er opstået. Læreren skal altså på en eller anden måde finde plads i undervisningen til at arbejde på et højere niveau. Så når der i figuren står at emnerne Tema og Spørgsmål til sammen danner "lærerens råderum" så skal det ikke forstås som en definition, men snarere som en uheldig tilstand, der ifølge Chevallard er en statistisk kendsgerning.



Artigue og Winsløw (2009) skriver, at de didaktiske codeterminationsniveauer kan kobles sammen med 4T-modellen på følgende måde: Vi betragter den nedre halvdel af skalaen, dvs alt der er underlagt *faget*. I dette tilfælde er faget matematik. Et valgt *domæne* involverer en eller flere regionale MO'er med hver deres teori. Ved at fokusere på en enkelt regional MO fastlægges en *sektor*, og den er således kendetegnet ved en fælles teori. *Temaer* opstår da ved

at vælge en teknologi (og tilhørende lokal MO). En sektor og et tema danner da en teoretisk blok *L*. En tilhørende praktisk blok *P* beskriver da det enkelte *spørgsmål*.
Det sidste led i figuren er at medtage hvordan de matematiske organisationer kommunikeres videre til eleverne og i hvilken grad de etableres. Denne proces er ikke nødvendigvis ensrettet. Hvis elevernes faglige niveau ikke stemmer overens med MO'erne (for højt eller for lavt – eller begge dele) så kan det være nødvendigt for læreren at justere MO'erne.
Disse betragtninger kan sammenfattes i følgende figur:



Figuren beskriver dog kun læringssituationen fra et ydre synspunkt. Læreren forsøger at etablere de konstruerede MO'er, men hver enkelt elev rekonstruerer den i sit hoved, og derved får man måske mange forskellige udgaver af den samme MO. Man får måske også nogle elever der tilegner sig uhensigtmæssige MO'er (fx teknikker der kan forkortes betrageligt) eller direkte katastrofale, hvis man fx blander teknikkerne i to disjunkte MO'er (et eksempel kan være at man vil finde forskriften for en eksponentiel funktion gennem to givne punkter, og bruger formlerne for en lineær funktion).
De didaktiske codeterminationsniveauer giver altså en mulighed for yderligere at strukturere den didaktiske transposition.

Studie- og forskningsforløb

I den antropologiske teori for didaktisk bruges der et designredskab der kaldes et *studie- og forskningsforløb* (ofte blot kaldet SFF – eller RSC på engelsk). Det giver mulighed for at strukturere progressionen i undervisningen ved brug af ATD. Målet er at eleverne skal delagtiggøres i den proces der går forud for den matematiske modellering.
Dette er for at undgå en monumentalisering af matematikken. Eleverne skal opnå indsigt i *hvorfor* og *hvordan* matematikken er opstået. Hvis dette ikke gøres kan der ske det følgende:

"The modelling activity hence degenerates and is restricted to the algorithmic use of preexisting models. On the way, any questioning related to the origin of the models and adequacy is eliminated" (Barquero et. al., 2008).

Som alternativ til denne fremgangsmåde kan man som lærer implementere et SFF i undervisningen. Dette vil formentlig tage længere tid i begyndelsen, men det designes godt, kan det spare masser af tid på længere sigt.
Udgangspunktet er et *genererende spørgsmål* S (eller Q på engelsk):

"A RSC must be generated by the study of a question Q, of real interest to the students ("alive"), and strong enough to generate many other questions" (Barquero et. al., 2008).

Dette spørgsmål skal opfylde de følgende betingelser:

1) Det skal være relevant for samfundet (*kulturel legitimitet*)
2) Det skal inddrage den matematik der undervises i (*matematisk legitimitet*)
3) Det skal lede frem til nye spørgsmål (*funktionel legitimitet*)

Hvis S ikke opfylder disse betingelser, er spørgsmålet *dødt*, da det ikke er interessant nok.
Svaret på S bliver en praxeologi:

$$S \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P} = (T, \tau, \theta, \Theta)$$

Hvis S er interessant nok, vil det lede frem til andre spørgsmål $S_1, S_2, \ldots, S_i$, hvis besvarelser hver især fører til nye praxeologier $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_i$. Hvert af disse spørgsmål fører til nye spørgsmål $S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots, S_{2,1}, S_{2,2}, \ldots, S_{,1}, S_{i,2}, \ldots$ der igen besvares med praxeologier. Der opstilles altså et net af spørgsmål med tilhørende praxeologier.
Barquero et. al. (2008) skitserer et studieforskningsforløb hvor der arbejdes med gåsebestanden på en øde ø. Eleverne deles op i grupper og skal forsøge sig med at opstille en matematisk model. Det genererende spørgsmål er altså det følgende:

S: Givet størrelsen på en population X over en tidsperiode, kan vi forudsige dens størrelse efter n tidsenheder? Hvilke antagelser er nødvendige?

For at gøre dette mere overskueligt startes der med denne antagelse:

A_1: Tidsvariablen varierer diskret.

Hermed kan populationen beskrives ved hjælp af tilstande $x_0, x_1, x_2, \ldots$
Mellem to nabotilstande x_n og x_{n+1}er den relative vækstrate defineret ved $r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$.

For igen at gøre tingene simple benyttes den følgende antagelse med tilhørende spørgsmål:

A_2 : Vækstraten er konstant. S_1: Hvordan vokser populationen i dette tilfælde?

Hvis det antages at vækstraten er en konstant $r_n = r$ så fås den *malthusianske model*. Der omskrives til $x_{n+1} = (1+r) \cdot x_n$. Det betyder så at $x_{n+1} = (1+r)^{n+1} \cdot x_0$, hvor x_0 er en givet start-tilstand. Hvis $r < 0$ vil tilstandene aftage strengt, hvis $r = 0$ vil alle tilstande være x_0, og de vil vokse strengt hvis $r > 0$.
Svaret på S_1 antyder at populationen kan vokse til uendelige størrelser og med stadig større hastighed. Dette giver anledning til den følgende antagelse:

A_3 : Der eksisterer en maksimumsværdi M som angiver populationens mætningspunkt. Den relative vækstrate aftager lineært.

Med A_3 er den malthusianske model omformet til den såkaldte *logistiske model*. Den kan beskrives ved hjælp af *Verhulst-ligningen*:

$$x_{n+1} = ax_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

Hvis man i A_1 i stedet havde antaget at tidsvariablen varierede kontinuert, ville man efter antagelsen A_3 stå med en sædvanlig differentialligning, hvis løsning er det vi forstår ved logistisk vækst.
I slutningen af 1.g har jeg tænkt mig at gennemføre en studie- og forskningsaktivitet med eleverne hvor de skal arbejde med matematiske modeller. Som inspiration har jeg brugt Garcia & Higueras (2005) og Barquero et. al. (2008).
Aktiviteten er indlejret i et studie- og forskningsforløb der handler om *vækst*. De vækstformer der er i spil er dem der er relevante for 1.g. Ifølge Stx-bekendtgørelsen (2008) består kernepensum i 1.g af de følgende emner:

- Ligefrem og omvendt proportionalitet
- Lineære sammenhænge
- Eksponentielle sammenhænge
- Potenssammenhænge
- Finansielle sammenhænge (heraf specielt annuitetsregning)
- Beskrivende statistik
- Trigonometri i retvinklede trekanter

Det er min påstand at alle disse emner, på nær det sidste, på naturlig måde kan indlejres i et SFF og således skabe et solidt matematisk fundament. Desuden kan denne fokus på

vækstformer være en god indslusning til differentialregningen der studeres intensivt resten af uddannelsen.
Det der skal undersøges, er variationsmulighederne mellem to størrelser x og y. x er en tidsparameter og ligger i en diskret talmængde (fx hvis den måler terminer eller vareenheder). Den kan variere på to måder. Den kan vokse med en *absolut* tilvækst (additiv) eller med en *relativ* tilvækst (multiplikativ). Det samme kan størrelsen y. Typisk vil en størrelse kun variere på en måde, hvor man så taler om en *konstant* tilvækst. Fx kan en konstant absolut tilvækst på 1 danne sekvensen 1,2,3, …
Mere præcist kan vi betragte den følgende sekvens:

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$$

Denne sekvens har en konstant *absolut* tilvækst Δx hvis der for alle naturlige tal k gælder at:

$$x_k - x_{k-1} = \Delta x$$

Den har en konstant *relativ* tilvækst $®x$ hvis der for alle naturlige tal k gælder at:

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = ®x$$

Symbolet $®x$ er et forslag fra Confrey & Smith (1994).
Der startes med det følgende genererende spørgsmål, som er inspireret af García & Higueras (2005) side 1649:

S: Hvordan kan vi beskrive variationstypen mellem x og y?

Typisk vil udgangspunktet være en kort tekst og måske et datasæt med givne x-værdier og tilhørende y-værdier. Pointen med at "beskrive variationstypen" vil typisk være ekstrapolation. Denne kan være mere eller mindre præcis. Der kan være tale om en latent matematisk sammenhæng der skal afsløres, eller noget beskrivende statistik hvor der skal bruges regression. Det er en del af opgaverne at eleverne skal tage stilling til hvor præcis deres beskrivelse kan/skal være.
Det typiske første skridt vil være at undersøge hvordan den uafhængige variabel x opfører sig. Det er typisk at dele op i de to følgende antagelser:

S_1: x varierer med en konstant absolut tilvækst. S_2: x varierer med en konstant relativ tilvækst.

Jeg har valgt at kalde dem S_1 og S_2 da der til antagelserne hører et naturligt efterfølgende spørgsmål: *Hvilke muligheder er der for at beskrive variationstypen?*

Den afhængige variabel y kan naturligvis også variere med konstant absolut eller relativ tilvækst. Inden for pensum i 1.g vil en konstant relativ tilvækst i x typisk medføre det samme i y. Dvs. vi står med antagelsen:

$S_{2,1}$: Både x og y varierer med en konstant relativ tilvækst.

Modellen der opstår, vil være omvendt proportionalitet eller potensvækst. Man kan også tænke sig en antagelse $S_{2,2}$ hvor y varierer med konstant absolut tilvækst, hvilket resulterer i logaritmisk vækst. Men logaritmefunktioner (i deres selvstændige form) spiller ikke en stor rolle i gymnasiet (se afsnittet om Stx-bekendtgørelsen) og derfor er denne antagelse ikke medtaget.
Ud fra antagelsen om at x varierer med en konstant absolut tilvækst vil modellen blive lineær eller eksponentiel ud fra de to følgende antagelser:

$S_{1,1}$: Både x og y varierer med en konstant absolut tilvækst. $S_{1,2}$: x og y varierer hhv. med en konstant absolut tilvækst og konstant relativ tilvækst.

Den uafhængige variabel x er låst fast til de to antagelser S_1 og S_2. Ellers bliver det for svært for eleverne at finde et system og opstille modellen. Med den afhængige variabel y er der dog mere frihed. Fx kan man kigge på den følgende situation:

En mand opretter en opsparingskonto i april og indsætter med det samme 2000 *kroner. Han indsætter* 100 *kroner om måneden. Renten er* 2 % *p.a. og tilskrives 31. december efter eventuelle ydelser*.

Tiden x kan her være enten måneder eller år. Da renten tilskrives per år, vælger vi det. Ydelsen er altså samlet på 1200 kroner. Den første ydelse er dog kun 800 kroner, da han starter i april. Dette giver den følgende tabel:

			+1		+1		+1
År, x	0		1		2		3
Kroner, y	2000	2800	2856	4056	4137,12	5337,12	5443,86
		+800	· 1.02	+1200	· 1,02	+1200	· 1.02

Dette virker umiddelbart som en smule kaotisk, men der kan lægges en fast struktur ved at lade 2856 være begyndelsesværdien, hvorefter y alternerer mellem at variere med en konstant absolut tilvækst på 1200 og en konstant relativ tilvækst på 2 %.

Det giver altså mening at introducere endnu en antagelse:

$S_{1,3}$: x varierer konstant absolut og y alternerer mellem at variere konstant absolut og relativt.

I det ovenstående eksempel kom ydelsen før renten (fordi ydelserne lå mellem forrentningerne). Heri ligger der også en antagelse, fordi hvis ydelsen og renten ligger på samme tid (fx i slutningen af en måned) så vil renten typisk blive tilskrevet før ydelsen.

$S_{1,3,1}$: x varierer konstant absolut. y skifter mellem at variere konstant absolut og relativt.
$S_{1,3,2}$: x varierer konstant absolut. y skifter mellem at variere konstant relativt og absolut.

Begge disse antagelser fører til en annuitetsformel, men der er tale om to vidt forskellige formler og modelleringsprocesser. Jeg beskriver dette i detaljer senere.
Således opstår der et SFF der udfylder det meste af 1.g.

Sammenhænge og deres kovariation

Når der skal arbejdes med vækst kan man som lærer fremstille funktioner på to måder:

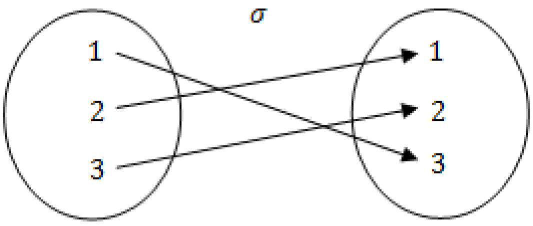
1) Funktioner som korrespondancer mellem tal
2) Funktioner beskrevet ved kovariation

Den første metode går ud på at betragte en funktion som en korrespondance der knytter et element x til et andet element y. Denne korrespondance er (hvis det er muligt) givet ved en ligning:

$$y = f(x)$$

Denne metode er meget udbredt i gymnasiet (se også senere, i afsnittet om lærebogen). Over for eleverne bruger man også typisk en anden metafor, nemlig at en funktion er en *maskine* der omregner et tal til et andet. Denne anskuelse kommer af det mere abstrakte begreb *afbildning* hvor der jo arbejdes med korrespondancer mellem mængder af matematiske elementer der ikke nødvendigvis har en indre struktur (jf. Confrey & Smith (1994) side 137).

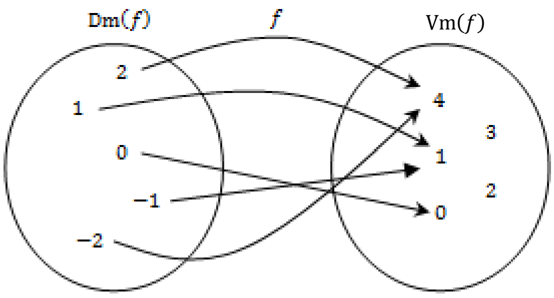
Desuden er der ikke nødvendigvis en struktur på den måde afbildningen fungerer. Et eksempel er permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Den kan repræsenteres grafisk således:



Denne repræsentation viser afbildningen som en statisk størrelse hvor det indbyrdes forhold mellem elementerne i mængden er vilkårlig. Elementerne kunne jo lige så godt hedde x, t og k og ligge hulter til bulter i cirklen. Der er således ud fra figuren ingen antydning af hvad der sker med $\sigma(i)$, hvis i ændrer sig. En anden måde at repræsentere denne afbildning er ved at beskrive successiv brug af σ:

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Brugen af disse repræsentationer benyttes stadig i gymnasiet. Specielt bruges de to cirkler til at beskrive symbolske definitions- og værdimængder for reelle funktioner. For eksempel kan begrebet *injektiv funktion* vises ved at betragte funktionen $f(x) = x^2$. Der tegnes derefter cirkler med udvalgte x-værdier og deres funktionsværdier:



Funktionsbegrebet kan defineres ud fra konceptet om at "der kun går én pil fra hvert tal i definitionsmængden". Dette svarer til den grafiske metode med at "holde en lineal lodret, køre den fra venstre mod højre og tjekke om den hele tiden kun skærer et enkelt sted".
At funktionen er injektiv kan herefter beskrives ved at "vende pilene om, og se om man får en funktion". Grafisk svarer det til i stedet at holde linealen vandret og køre den opad.
I dette eksempel kan f gøres injektiv ved at tilpasse definitionsmængden.
Korrespondancemetoden er glimrende til at beskrive injektive funktioner og sammensatte funktioner. Den er dog knap så effektiv når funktioner skal bruges i vækstmodeller. Der er en mere praktisk indgangsvinkel, som vi nu skal se på.
I stedet for at beskrive funktionen ved dens virkning på den enkelte x-værdi kigger vi i stedet på kovariationen mellem x-værdier og deres funktionsværdier.

Med andre ord skal vi koordinere bevægelsen fra x_1 til x_2 med bevægelsen fra $f(x_1)$ til $f(x_2)$. Denne metode er tæt knyttet til tabeller:

x	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Eleverne skal her i højere grad arbejde med funktionens *vækstrate*. Dette begreb kan dog forstås på flere måder.
Først og fremmest kan vi betragte den *absolutte* vækst af f, som kan kaldes Δf. Den er i ovenstående tabel defineret som:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

Vi kan også snakke om den relative vækst. Confrey & Smith (1994) foreslår som nævnt tidligere notationen ®f her, sådan at eleverne kan optrænes i at arbejde med både absolut og relativ vækst. ®f er defineret som:

$$®f = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

Den absolutte vækst Δf beskriver den direkte afstand mellem to punkter. Den relative vækst beskriver det geometriske forhold. En kombination af disse to kan kaldes "proportionel ny-til-gammel", jf. Confrey & Smith (1884) side 141. Hermed menes at man udregner forholdet mellem afstanden og startpunktet, dvs:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$$

Et eksempel på dette ses typisk i eksponentielle modeller hvor eleverne typisk arbejder med vækstrater, og selv skal finde fremskrivningsfaktoren.

Den didaktiske transposition

I dette afsnit vil jeg analysere den didaktiske transposition i den givne konkrete situation.

Tidspunkt	Forår 2010
Uddannelsestype	STX
Uddannelsessted	Gribskov Gymnasium
Klasse	1.s (samfundsvidenskabelig studieretning)

Den eksterne og interne didaktiske transposition beskrives hver for sig.

Ekstern didaktisk transposition

Den eksterne didaktiske transposition beskriver som sagt de valg og påvirkninger der sker før undervisningssituationen. Dette vil jeg dele op i tre dele:

Institution	**Analysemetode**
Videnskabsfaget	Konstruktion af eksponentialfunktion
Undervisningsministerium	Læsning af bekendtgørelse
Uddannelsessted	Læsning af det lærebogsmateriale der er til rådighed.

Disse tre institutioner vil jeg nu analysere. Jeg vil dog ikke holde dem strengt adskilt.

Videnskabsfaget

Jeg vil i dette afsnit se på hvordan der arbejdes med eksponentialfunktioner inden for videnskabsfaget matematik. Dette gøres ved at gennemgå nogle forskellige måder de kan konstrueres på. Jeg vil tage udgangspunkt i Jessen (1934). Her gives et eksempel på hvordan eksponentialfunktioner kan konstrueres med et minimum af antagelser.
Først er der nogle indledende bemærkninger:

Definition: *For $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{N}$ defineres a^n på følgende måde:*

$$a^n := a \cdot a \cdot \dots \cdot a \qquad (n \text{ faktorer})$$

Sætning: *For alle $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{N}$ eksisterer der netop én løsning $x \in \mathbb{R}_+$ til ligningen $x^n = a$.*

Bevis: Påstanden gælder klart for $n = 1$, da $a^1 = a$. Det antages derfor at $a > 1$.
Der defineres en funktion $f(x) = x^n - a$. En positiv rod x_0 svarer altså til en løsning af ligningen $x^n = a$.
For $a = 1$ er $f(1) = 1^n - 1 = 0$, hvilket betyder at løsningen eksisterer.
Hvis $a < 1$ gælder der at $f(1) = 1^n - a > 1 - 1 = 0$.

Hvis $a > 1$ gælder der at $f(a) = a^n - a = a(a^{n-1} - 1) > 0$.
Således er $f(a) > 0$ for alle $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$. Samtidig er $f(0) = 0^n - a = -a < 0$.
Da f er et polynomium er det kontinuert, så ved at bruge middelværdisætningen er eksistensen af en rod vist. Entydigheden følger af, at f er strengt voksende på $\mathbb{R}_+$. ■

Definition: *Den entydige løsning* x *til ligningen* $x^n = a$ *kaldes den* n'te rod af a *og betegnes* $\sqrt[n]{a}$.

Herefter kommer hovedsætningen:

Sætning: *For et fastlagt* $a \in \mathbb{R}_+$ *(kaldet* grundtallet*) eksisterer der én og kun én funktion* $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *der opfylder de følgende betingelser:*

a) $f_a(1) = a$
b) $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$ *for alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
c) f_a *er kontinuert*

Bevis: Der skal vises eksistens og entydighed af en funktion f_a der opfylder betingelserne.

Entydighed af f_a
For $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gælder der klart at $f_a(n_1 + n_2) = f_a(n_1) + f_a(n_2)$. Omvendt, hvis *b)* gælder for $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ så kan vi skrive:

$$f_a(x+1) = f_a(x) \cdot f_a(1) = f_a(x) \cdot a$$

Ved at bruge induktion gælder der nu at:

$$f_a(n) = f_a(1 + 1 + \cdots + 1) = f_a(1) \cdot f_a(1) \cdot \cdots \cdot f_a(1) = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$$

Det betyder at $f_a(x) = a^n$ er den eneste funktion på $\mathbb{N}$ der opfylder *a)* og *b)*.
Vi ser at:

$$f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1) \cdot f_a(0)$$

Dette betyder at $f_a(0) = \frac{f_a(1)}{f_a(1)} = \frac{a}{a} = 1$ da $a \neq 0$ er antaget.
Det ses nu også at:

$$1 = f_a(0) = f_a\big(1 + (-1)\big) = f_a(1) \cdot f_a(-1)$$

Hvilket betyder at:

$$f_a(-1) = \frac{1}{f_a(1)}$$

Ved induktion vises det for $n \in \mathbb{N}$ at:

$$f_a(-n) = \frac{1}{f_a(n\ )}$$

For et $m \in \mathbb{N}$ og et $x \in \mathbb{R}$ gælder desuden

$$f_a(m \cdot x) = f_a(x + x + \cdots + x) = f_a(x) \cdot f_a(x) \cdot \cdots \cdot f_a(x) = f_a(x)^m$$

Da der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder $f_a(x) = f_a\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f_a\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f_a\left(\frac{x}{2}\right) = f_a\left(\frac{x}{2}\right)^2$ er funktionen altid positiv, og derfor kan vi skrive:

$$f_a(x) = \sqrt[m]{f_a(m \cdot x)}$$

Specielt gælder der at:

$$f_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f_a\left(q \cdot \frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{f_a(p)}, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Derfor er f_a entydigt bestemt for alle $x \in \mathbb{Q}$ ved betingelserne *a)* og *b)*. Dette udvides til alle $x \in \mathbb{R}$ ved at inddrage betingelsen *c)*.

Eksistens af f_a

Nu skal vi vise *eksistensen* af en funktion f_a der opfylder betingelserne *a)-c)*.
For et $x \in \mathbb{N}$ defineres:

1) $f_a(x) := a^x$
2) $f_a(-x) := 1/a^x$

Desuden defineres:

3) $f_a(0) := 1$

Med disse definitioner gælder $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Udvidelse til alle rationelle tal

For $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ vises det ved induktion at:

$$f_a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2) \cdot \cdots \cdot f_a(x_n)$$

Specielt gælder der:

$$f_a(q \cdot x) = f_a(x)^q$$

For et rationelt tal $x = \frac{p}{q}$ defineres nu:

$$f_a(x) := \sqrt[q]{f_a(p)}$$

Roden eksisterer, da f_a kun antager positive værdier. Det skal nu vises at denne definition ikke giver et andet resultat når der specielt gælder $x \in \mathbb{Z}$.
Hvis $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ er $p = qx$, hvilket betyder at $\sqrt[p]{f_a(p)} = \sqrt[q]{f_a(qx)} = \sqrt[q]{f_a(x)^q} = f_a(x)$.
Desuden skal det vises at:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[p]{f_a(p)} = \sqrt[s]{f_a(r)} \quad , r, s \in \mathbb{N}$$

Dette er ensbetydende med $\left(\sqrt[p]{f_a(p)}\right)^{qs} = \left(\sqrt[s]{f_a(r)}\right)^{qs}$, hvilket betyder at $f_a(p)^s = f_a(r)^q$ eller at $f_a(sp) = f_a(qr)$. Dette gælder, da $sp = qr$.
Definitionen gør, at $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$ nu også gælder for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$.
Dette ses ved at skrive x_1 og x_2 som to brøker med samme nævner:

$$x_1 = \frac{p_1}{q} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{p_2}{q} \quad , p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Det skal vises at $\sqrt[q]{f_a(p_1 + p_2)} = \sqrt[q]{f_a(p_1)} \cdot \sqrt[q]{f_a(p_2)}$. Dette er ensbetydende med:

$$\left(\sqrt[q]{f_a(p_1 + p_2)}\right)^q = \left(\sqrt[q]{f_a(p_1)} \cdot \sqrt[q]{f_a(p_2)}\right)^q = \left(\sqrt[q]{f_a(p_1)}\right)^q \cdot \left(\sqrt[q]{f_a(p_2)}\right)^q$$

Dette er ensbetydende med $f_a(p_1 + p_2) = f_a(p_1) \cdot f_a(p_2)$, hvilket vi ved er sandt, da $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$.

Udvidelse til alle reelle tal
$f_a(x)$ skal defineres for $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. For det første husker vi at $f_a(x) > 0$ og $f_1(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{Q}$. Vi sætter $f_1(x) := 1$ for alle irrationelle tal x også.
Det skal nu vises at f_a er monoton, da $f_a(x)$ vil blive defineret som en grænseværdi.
Det antages først at $a > 1$. Det skal da vises at der for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ gælder:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f_a(x_1) < f_a(x_2)$$

Dette er klart hvis x_1 og x_2 er hele tal.

Hvis de er rationelle så skrives de med fælles nævner:

$$x_1 = \frac{p_1}{q} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{p_2}{q}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Det betyder at:

$$f_a(x_1) = \sqrt[q]{f_a(p_1)} \quad \text{og} \quad f_a(x_2) = \sqrt[q]{f_a(p_2)}$$

Da det antages at $x_1 < x_2$ ved vi at $p_1 < p_2$, hvilket betyder at $f_a(x_1) < f_a(x_2)$.
Det antages nu at $0 < a < 1$. Det skal vises at der for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ gælder:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f_a(x_1) > f_a(x_2)$$

Dette vises analogt med tilfældet $a > 1$.

Før jeg kan definere $f_a(x)$ for et vilkårligt reelt tal x må jeg lige indskyde de følgende to lemmaer:

Lemma: *Hvis der for en rationel følge* $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *gælder at* $y_n \longrightarrow 0$ *for* $n \longrightarrow \infty$ *så gælder der at:*

$$f_a(y_n) \longrightarrow 1 \quad \textit{for} \quad n \longrightarrow \infty$$

Bevis: Vi sætter $y_n = p_n/q_n$ sådan at $q_n \in \mathbb{N}$ og $p_n \in \mathbb{Z}$. Da $\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$ kan vi, for et givet N, finde N' sådan at:

$$n > N' \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{N}$$

Dvs. at der for dette n gælder $N \cdot p_n < q_n$ (da $q_n \in \mathbb{N}$). Dette betyder så at:

$$f_a(y_n) = f_a\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \sqrt[q_n]{f_a(p_n)} < \sqrt[N \cdot p_n]{f_a(p_n)} = \sqrt[N]{f_a(1)} = \sqrt[N]{a}$$

Det skal altså vises at $\sqrt[N]{a} \longrightarrow 1$ for $N \longrightarrow \infty$. For det første ses det at $\sqrt[N]{a} \geq 1$. Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N' sådan at:

$$N' \geq N \quad \Longrightarrow \quad (1+\varepsilon)^{N'} \geq a$$

Dette betyder at $\sqrt[N']{a} \leq 1 + \varepsilon$. Nu ses det at $\sqrt[N]{a}$ for $n \longrightarrow \infty$. ■

Lemma: *Betragt* $x \in \mathbb{R}$ *og lad* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *og* $(x_n')_{n=0}^{\infty}$ *være to følger i* $\mathbb{Q}$ *sådan at* $x_n \nearrow x$ *og* $x_n' \nearrow x$. *Da gælder der at:*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_a(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_a(x_n')$$

Bevis: Eksistensen af $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ og $(x_n')_{n=0}^{\infty}$ følger af fuldstændigheden af $\mathbb{R}$.
Påstanden er ensbetydende med:

$$\frac{f_a(x_n)}{f_a(x_n')} \longrightarrow 1 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty$$

Da følgeelementerne i $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ og $(x_n')_{n=0}^{\infty}$ er rationelle tal, kan vi bruge de etablerede regneregler for f_a til at omskrive på følgende måde:

$$\frac{f_a(x_n)}{f_a(x_n')} = f_a(x_n) \cdot \frac{1}{f_a(x_n')} = f_a(x_n) \cdot f_a(-x_n') = f_a\big(x_n + (-x_n')\big) = f_a(x_n - x_n')$$

Det skal således vises at $f_a(x_n - x_n') \longrightarrow 1$ for $n \longrightarrow \infty$. Men dette følger af at bruge det foregående lemma på følgen $(y_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n - x_n')_{n=0}^{\infty}$. ■

Således kan vi for et vilkårligt $x \in \mathbb{R}$ definere $f_a(x)$ ved at bruge en vilkårlig rationel følge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ der opfylder $x_n \nearrow x$:

$$f_a(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} f_a(x_n)$$

Det skal vises at denne definition ikke fører til et nyt resultat når x specielt er rationel. Er dette tilfældet betragtes blot den konstante følge $(x_n)_{n=0}^{\infty} = (x)_{n=0}^{\infty}$ og således er definitionen $f_a(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)$ stadig entydig.
Det skal vises at ligningen $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$ nu gælder for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Hvis det ene af tallene er irrationelt, fx x_1, bruges kontinuiteten af addition og multiplikation til at omskrive:

$$f_a(x_1 + x_2) = f_a\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n,1} + x_2\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_a\big(x_{n,1} + x_2\big)$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} f_a\big(x_{n,1}\big) \cdot f_a(x_2) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$$

Hvis både x_1 og x_2 er irrationelle skrives:

$$f_a(x_1 + x_2) = f_a\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n,1} + \lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n,2}\right)$$

$$= f_a\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n,1}\right) \cdot f_a\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n,2}\right) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$$

Således opfylder f_a betingelsen b). Til sidst skal det vises at f_a er kontinuert (betingelse *c)*).
Vi lader $x_1 < x_2$ være to vilkårlige tal. Vi har vist at f_a er monoton. Det betyder at f_a er kontinuert hvis der for alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gælder:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f_a(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f_a(x)$$

For alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gælder $f_a(x) = f_a\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f_a(x_0) \cdot f_a(x - x_0)$.
Det er derfor nok at vise at:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f_a(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f_a(x) = 1$$

Vi sætter $g_- \coloneqq \lim_{x \longrightarrow 0^-} f_a(x)$ og $g_+ \coloneqq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f_a(x)$.
Det vises nu at $g_- = 1$.
Der gælder at $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f_a(2x) = g_-$. Da $f_a(x + x) = f_a(x) \cdot f_a(x) = f_a(x)^2$ betyder det at $g_- = g_-^2$. Dette giver de to muligheder $g_- = 0$ eller $g_- = 1$.
Vi betragter følgen $(x_n)_{n=0}^{\infty} = \left(-\frac{1}{n}\right)_{n=0}^{\infty}$. Det betyder at $x_n \nearrow 0$. Det ses nu at:

$$f_a(x_n) = f_a\left(-\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f_a(-1)} = \sqrt[n]{\frac{1}{f_a(1)}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \longrightarrow 1 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty$$

Det betyder at $g_- = 0$ ikke er muligt, og således er $g_- = 1$. På analog vis sluttes det at $g_+ = 1$ og således er f_a kontinuert.
Den konstruerede funktion opfylder altså betingelserne a), b) og c) og eksistensen er derfor vist.■

Sætning: *Funktionen* $E_1 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *defineret ved:*

$$E_1(x) \colon= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

er en eksponentialfunktion.

Bevis: Først skal det vises at $E_1(x)$ er veldefineret. Dette gøres ved at fastholde et vilkårligt $x \in \mathbb{R}$ og betragte følgen $(x^n/n!)_{n=0}^{\infty}$. Herefter udregnes:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n \cdot n! \cdot (n+1)} = \frac{x}{n+1}$$

Det ses let nu let for alle $x \in \mathbb{R}$, at $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$. Ved at bruge kvotientkriteriet giver det nu mening at definere $E_1(x)$ på den givne måde., da rækken er absolut konvergent.

Det skal vises at E_1 er kontinuert. Dette følger af, at funktionen $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ er kontinuert og uniformt konvergent.

Det skal vises at E_1 opfylder betingelsen $E_1(x_1 + x_2) = E_1(x_1) \cdot E_1(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ved at bruge formlen for multiplikation af absolut konvergente rækker fås:

$$
\begin{aligned}
E_1(x_1 + x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1 + x_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_1^m \, x_2^{n-m}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{x_1^m x_2^{n-m}}{m!\,(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{x_1^m}{m!} \cdot \frac{x_2^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^n}{n!} \\
&= E_1(x_1) \cdot E_1(x_2)
\end{aligned}
$$

Hermed er det ønskede vist. ■

Sætning: *Funktionen* $E_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *defineret ved, at* $E_2(x)$ *er den entydige løsning* y *til ligningen:*

$$\int_1^y \frac{1}{t} dt = x,$$

er en eksponentialfunktion.

Bevis: Først defineres funktionen $L: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ved:

$$L(x) \coloneqq \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

Det skal vises at L er bijektiv, hvorefter det følger at E_2 er den omvendte funktion til L, og veldefineret. Herefter skal det vises at E_2 er kontinuert, og at den opfylder $E_2(x_1 + x_2) = E_2(x_1) \cdot E_2(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Da $\frac{1}{t} > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}_+$ er L strengt voksende, og derfor injektiv. L er surjektiv, da det ugentlige integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} dt,$$

er divergent. Dette følger af divergensen af den harmoniske række $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}$.
E_2 er kontinuert , da L er det . L er til gengæld kontinuert da $t \mapsto \frac{1}{t}$ er integrabel. Jeg vil ikke gennemgå beviset her, men henviser til Rudin (1976) side 133.
Det vises nu at $L(x_1 \cdot x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Det antages at $x_1 < x_2$.
Ved at bruge indskudsreglen og substitutionen $u = \frac{t}{x_1}$ fås følgende:

$$\int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x_2} \frac{1}{u} du$$

Det betyder per definition at $L(x_1 \cdot x_2) = L(x_1) + L(x_2)$.
Da E_2 og L er hinandens modsatte funktioner gælder der at:

$$L\big(E_2(x)\big) = x, \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}, \quad \text{og} \quad E_2\big(L(x)\big) = x, \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}_+$$

Det betyder for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gælder:

$$x_1 \cdot x_2 = L\big(E_2(x_1)\big) \cdot L\big(E_2(x_2)\big) = L\big(E_2(x_1) + E_2(x_2)\big)$$

Da E_2 kun antager positive værdier er $E_2(x_1) + E_2(x_2) > 0$, hvilket gør udtrykket veldefineret,
Ved at bruge $E_2\big(L(x)\big) = x$ fås:

$$E_2(x_1 \cdot x_2) = E_2(x_1) + E_2(x_2)$$

Og så er det ønskede vist. ∎

De eksponentialfunktioner E_1 og E_2 er ens (hvad jeg ikke vil vise her), og deres fælles grundtal kaldes *Eulers konstant*.

Konklusion
Den metode der er beskrevet ovenfor har den ulempe at den benytter sig af begreber som ikke umiddelbart ser ud til at kunne bruges i gymnasiet. Begreber som kontinuitet og grænseværdi berøres, men som regel først på matematik A.
Spørgsmålet er, om det overhovedet er praktisk at indføre en stringent definition af det udvidede potensbegreb? Jeg vil komme nærmere ind på dette senere, i den interne didaktiske

transposition, og beskrive hvordan læreplanerne og lærebøgerne håndterer dette.
Umiddelbart virker det som om at der er to muligheder:

1) a^x defineres stringent ved at henvise til konvergens og kontinuitet.
2) a^x defineres som $a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ med specielle definitioner for negative og rationelle x. Der henvises til lommeregneren for reelle eksponenter, uden definition.

Jeg vil vende tilbage til hvad der kan være passende når jeg opstiller den epistemologiske referencemodel senere.

Undervisningsministeriet

Dernæst ser vi på *undervisningsministeriet*, dvs. det formelle uddannelsessystem. Det mest oplagte er naturligvis at tage udgangspunkt i Stx-bekendtgørelsen (2008) og dens læreplan for matematik C. Derfor vil alle citater i det følgende være taget fra den. Jeg vil lave en praxeologisk analyse af læreplanen og på den måde prøve at afdække hvilke muligheder og begrænsninger der opstår i forbindelse med det praktiske forløb.
Jeg vil altså undersøge hvordan teori, teknologier og teknikker bliver påvirkede. Med hensyn til opgavetyperne vil jeg dog vente til at jeg har analyseret lærebogen i næste afsnit. Herefter vil jeg holde de to teksters opgavetyper op foran hinanden og se om der er en sammenhæng.
Læreplanen starter med at skrive følgende:

"Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen".

(side 3).

Vi ser her med det samme at fokus først og fremmest ligger på *tværfagligheden*. Det påstås at matematikken har udviklet sig i et kontinuerligt parløb med de andre naturfag.
Der står i læreplanen at eleverne skal "*opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår*". Dette er naturligvis meget løst. Den matematik der indgår i et ingeniørstudie er meget forskellig fra den der indgår i et statistikstudie. Man kan måske vælge de rene matematiske fag på universiteterne (der selvfølgelig også er indbyrdes forskellige) og bruge dem som målepind.

Teori

Eleverne skal ifølge læreplanen kunne "*gennemføre simple matematiske ræsonnementer*". Som eksempel nævnes udledningen af formlen for fremskrivningsfaktoren for en eksponentiel funktion (underforstået: gennem to givne punkter). Der er desuden *"stor frihed til på det enkelte hold selv at vælge inden for, hvilke områder man går i dybden med den* *matematiske teori"*. Læreplanen nævner at den indledende geometri har rige muligheder for dette, men jeg vil personligt mene, at det vil være mest frugtbart at gå i dybden med de tre vækstformer, som er pensum det første år: *lineær*, *potensiel* og denne opgaves fokus, *eksponentiel*.

Teknologi: Hvordan skal teknikkerne så fremstilles? Ifølge læreplanen gøres dette *"bedst gennem eksemplarisk materiale"*. Hermed menes at læreren udvælger nogle cases som derefter præsenteres for eleverne. Dermed skal eleverne indse, at mange forskellige situationer kan beskrives ved hjælp af den samme teknologi.
Læreplanen fortsætter herefter med at beskrive hvordan abstraktionsniveauet i matematik gør det muligt at opnå "*ny indsigt*" om at "*mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet*". Dernæst står der også at " *Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori*".

Teknik: Typisk deler lærere teknikker op i "*på papiret*" og "*på lommeregneren"* (der menes her et CAS-værktøj). Denne opdeling hentyder måske til en fordom om, at "rigtige" matematikere klarer sig uden lommeregner. Lommeregnere kan som regel ikke give mellemregninger og de har indbyggede idiosynkrasier om hvordan et resultat skrives. Denne diskussion ligger i spændingsfeltet om matematik som filosofi eller værktøjskasse. Den filosofiske side vil måske mene, at der ikke er nogen kongevej til matematikken. Man skal "ned i snavset" og udføre alle de kedelige og lange udregninger for at optræne matematisk disciplin. Ikke desto mindre må man erkende at matematikken til alle tider har benyttet sig at artefakter der kunne gøre udregningerne lettere (regnestokke, logaritmer). Derfor kan det på det ikke automatisk antages, at en intensiv brug af CAS-værktøjer er skadende for elevernes begrebsdannelse. I læreplanen står der det følgende om IT-værktøjer:

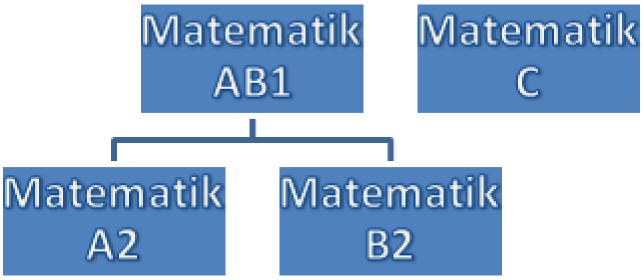
"Uanset hvor man er i undervisningen, skal det altid overvejes, hvorledes it-værktøjer kan udnyttes til at støtte for såvel færdighedsindlæring som den matematiske begrebsdannelse" (side 13).

I læreplanen står der desuden at *"Undervisningen tilrettelægges, så lommeregnere og it indgår som væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning"* (side 17).
Der står om it at det *"skal være en naturlig del af den daglige undervisning i matematik på lige fod med andre undervisningsmaterialer"* (side 17).

Type
I læreplanen står der hvilke typer af problemstillinger som det forventes at eleverne kan håndtere. Dog er disse ret konkrete, så det er op til læreren at opstille en liste af typer. Jeg vil som sagt ikke skrive eksemplerne op her, men vil nævne dem i slutningen af næste afsnit, hvor jeg sammenligner dem med de opgavetyper som lærebogen behandler.

Uddannelsesinstitutionen

Den valgte uddannelsesinstitution er Gribskov Gymnasium, der ligger i Helsinge. Der arbejdes med blokke på 100 minutter ad gangen. Dette giver glimrende muligheder for at variere sekvenseringen i undervisningen. Der er mulighed for at splitte klassen op, og undervise på to forskellige niveauer. Efter tre kvarter kan der holdes pause, og derefter byttes der om. Eleverne i klassen kan deltage ved tavlen, eller der kan forelæses. Eleverne uden for klassen kan regne opgaver, enten individuelt eller i grupper.
Lærebøgerne som gymnasiet har indkøbt, er serien *Vejen til Matematik* som er udgivet af forlaget HAX (også kaldet *Silkeborg Bøgerne*). Der er fire matematikbøger i serien:



Der er to bøger til 1.g. Bogen *Vejen til Matematik AB1* (Nielsen & Fogh, 2007) er beregnet til elever der skal have matematik på højere niveau end C. *Vejen til Matematik C* er beregnet til elever der kun skal have matematik i 1.g. Problemet er blot, at forskellene på de to bøger er minimale. C er ganske enkelt blot AB1 hvor enkelte passager er blevet slettet. Der er samme eksempler, samme figurer og samme opgaver. Der er til gengæld slettet nok til, at der ingen sammenhæng er mellem sidetal og opgavenummer. Det er problematisk, da alle elever i en klasse skal have samme bog, men de følger ikke nødvendigvis samme studieretning. Der vil fx i klasser med sproglig eller kunstnerisk studieretning være en forgrening mellem elever der kun har matematik på C-niveau og dem der tager det på B-niveau på anden eller tredje år.
I forordet til Nielsen & Fogh (2007) står det følgende:

"Hvad der er god tone inden for matematikundervisning ændrer sig hurtigt i disse år. De pædagogiske paradigmer holder ikke længe. De tider, hvor man blot kunne begynde forfra i lærebogen og arbejde sig frem til slutningen, er nok forbi. Vi har forsøgt at imødekomme de nye tendenser ved at gøre vores bøger til en slags oversigtsværker, der beskriver metoder, værktøjer og grundlæggende strukturer".

Bogen forsøger sig altså med en løs struktur hvor de forskellige kapitler ideelt set skal kunne læses uafhængigt af hinanden. Med hensyn til beviser skrives der, at de for det meste er medtaget. Dette gøres fordi "det er lettere at springe noget over end at tilføje det". Hermed menes at der er mulighed for at differentiere undervisningen, uden at læreren skal uddele noter til de stærkere elever. Dette skurrer dog en smule i forhold til deres argument for at udgive to bøger til 1.g. De skriver:

"Bogen begynder på samme niveau som Vejen til Matematik C, men vejen stiger mere, og nogle opgaver er sværere".

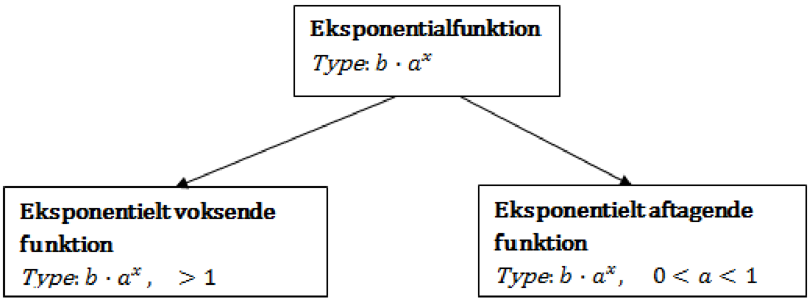
En sammenlignende læsning giver dog snarere indtrykket af, at C stort set er en ægte delmængde af $AB1$. Det eneste kapitel C der ikke også er i $AB1$ er et afsnit om Procent- og rentesregning (side 145-165) og her er blot tale om en omskrivning af det første afsnit i kapitlet om eksponentiel vækst i $AB1$ (side 167).
Når nu forfatterne har medtaget beviser fordi læreren blot kan skære ned på beviserne, hvorfor så ikke udgive en enkelt bog til 1.g, og så lade læreren skære ned på argumenterne?
Bogen kalder funktionen $f(x) = 2^x$ for en *eksponentialfunktion*. Den kaldes også en *eksponentielt voksende funktion*, og det nævnes at disse har en generel forskrift på følgende form (side 186):

$$f(x) = b \cdot a^x \qquad a > 1 \text{ og } b > 0$$

Bogen har desuden den følgende margennote på side 187:

"I nogle matematikbøger skelner man mellem funktioner af typen a^x, som man kalder eksponentialfunktioner *og funktioner af typen $b \cdot a^x$, som man kalder* eksponentielle udviklinger*. I denne bog bruges mest betegnelserne* eksponentielt voksende *og* eksponentielt aftagende*."*

Bogen virker altså ikke synderligt interessant i at opstille en præcis terminologi. Sætningen "bruges mest", og brugen af en margennote, antyder at forfatterne ikke er specielt interesserede i en præcis sprogbrug. Desuden ser den ud til at sætte lighedstegn mellem ordene *eksponentialfunktion* og *eksponentiel funktion*.
Hvis der var et ønske om at præcisere terminologien kunne forfatteren med lethed have skrevet *voksende eksponentialfunktion* og *aftagende eksponentialfunktion* i stedet for.



En anden mulighed kunne være, at man definerede en *eksponentialfunktion* som en funktion af typen a^x. Alle funktioner der så var ligefremt proportionale med en eksponentialfunktion, kunne kaldes *eksponentiel vækst*, dvs. de var af typen $b \cdot a^x$.
Jeg vil nu koncentrere mig om afsnittet "IV: Eksponentiel vækst og potensvækst" i *Vejen til Matematik AB1* (side 182-236).
Først perspektiveres der til lineær vækst (hvilket forudsætter at kapitlet om lineære sammenhænge allerede er gennemgået). Forskellen mellem absolut og relativ ændring

nævnes. Den konkrete problemstilling der startes med, er *forrentning*. Det beskrives hvordan man fremskriver og tilbageskriver et pengebeløb med en fastlagt rentefod en enkelt gang. Herefter er der en øvelse (side 184) hvor en tabel skal udfyldes. Øvelsen indeholder de følgende opgavetyper:

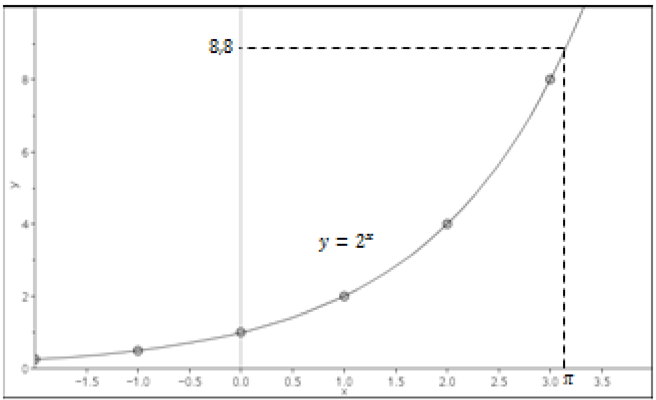
T_1	Givet en startpris og en procentforøgelse, udregn fremskrivningsfaktor og slutpris
T_2	Givet en startpris og slutpris, udregn procentforøgelse og fremskrivningsfaktor

Herefter opstilles kapitalfremskrivningsformlen $K_n = K_0(1+r)^n$ og der stilles en øvelse af typen:

T_3	Givet et startbeløb, en rentefod og et antal forrentninger (terminer), udregn slutbeløbet

Det ses at der ikke er den store forskel på T_1 og T_3.
I det næste introduceres *eksponentialfunktionerne* ud fra det konkrete eksempel $f(x) = 2^x$. Grafen vises, og det nævnes kort at den er en ”blød, glat kurve” (der menes at funktionen er kontinuert, men det der beskrives er snarere differentiabilitet). Dernæst repeteres det udvidede potensbegreb ganske kort, idet 2^π udregnes til at være ca. 8,8. Dette gøres ved at udregne støttepunkter for grafen for funktionen $f(x) = 2^x$:

x	1	2	3	0	-1	-2
2^x	2	4	8	1	0,5	0,25



Herefter tegnes indtegnes punkterne i et koordinatsystem og grafen tegnes. Hermed kan 2^π aflæses til at være ca. 8,8. Denne metode er naturligvis betinget af at eleven tegner mange støttepunkter og har en idé om hvordan grafen opfører sig. Det kan jo være at eleven tegner grafen som en parabelgren og dermed ikke gør grafen flad nok for små x-værdier. Metoden er selvfølgelig meget bedre på enkeltlogaritmisk papir da eleven her i princippet blot skal bruge to støttepunkter og en lineal. Jeg vil komme tilbage til denne metode når jeg senere kommer ind hvordan det udvidede potensbegreb kan indføres.

Hernæst er der en opgave (s. 185) af typen:

T_4	Givet en funktion, opstil en tabel og tegn grafen

Det ses igen at der er ligheder med T_1, da man ud fra en uafhængig variabel skal udregne en afhængig variabel. T_2 er omvendt et tilfælde af, at man ud fra den afhængige variabel skal udregne den uafhængige. Dette kræver som regel at der skal løses en ligning.
Bogen beskriver derefter den generelle definition for eksponentialfunktioner og giver et par eksempler og øvelser der er af samme type som det ovenstående.
Hernæst gennemgås definitionen af titalslogaritmen ganske kort, og med eksempler af samme type som T_2, dvs. der er opstillet en eksponentialligning, og titalslogaritmen bruges til at isolere x.
Dernæst introduceres en opgave af typen:

T_5	Givet en forskrift, udregn støttepunkter og indtegn dem i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Som teknik beskrives både brugen af regneark, i dette tilfælde Excel, og brugen af enkeltlogaritmisk papir.
Det næste afsnit (side 202) hedder ”bestemmelse af forskrift”. Der er opstillet en situation hvor man har en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Det aflæses at punkterne (2,18) og (4,162) ligger på grafen. Sammenhængen er givet ved $f(x) = b \cdot a^x$ og punktet (2,18) bruges til at opstille den følgende ligning:

$$18 = b \cdot a^2$$

Herefter bruges punktet (4,162):

$$162 = b \cdot a^4$$

De to ligninger divideres med hinanden:

$$\frac{162}{18} = \frac{b \cdot a^4}{b \cdot a^2}$$

Dette forkortes til:

$$9 = a^2$$

Nu følger det, da a per definition er positiv, at $a = 3$.

Konstanten b findes ved at bruge $a = 3$ og punktet (2,18):

$$18 = b \cdot 3^2 \qquad \text{dvs.} \qquad b = \frac{18}{3^2} = 2$$

Forskriften er altså $f(x) = 2 \cdot 3^x$.
Den opgavetype der beskrives, er følgende:

T_6	Givet to punkter på grafen for en eksponentialfunktion, bestem forskriften

Om den givne teknik skrives der at den ”altid [kan] anvendes, men hvis tallene er skæve eller har mange cifre, bliver beregningerne ret omfattende” (side 203). Bogen går ikke i detaljer med hvorfor beregningerne bliver omfattende eller hvad ”skæve tal” betyder.
Bogen introducerer nu som alternativ formlen:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}},$$

hvor (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er de to givne punkter på grafen. Det efterfølgende bevis er en gentagelse af den ovenstående teknik, med disse to generelle punkter.
Det næste afsnit (side 204) hedder ”At afsløre en eksponentiel sammenhæng”. Der er givet en tabel:

x	6	9	10	11	12
y	800	1500	1800	2200	2700

Det skal vises at punkterne med god tilnærmelse ligger på grafen for en eksponentialfunktion. Desuden skal forskriften bestemmes. Ifølge teksten løser en ”dygtig elev” opgaven ved at skrive følgende:

”Da punkterne med tilnærmelse ligger på en voksende ret linje, er y en eksponentielt voksende funktion af x og har derfor en forskrift af typen $f(x) = b \cdot a^x$ ” (side 205).

Herefter aflæses punkterne (4,540) og (14,4000) og forskriften bestemmes:

$$f(x) = 242{,}4 \cdot 1{,}222^x$$

Der var altså her en kombination af T_6 og en ny opgavetype:

T_7	Givet et datasæt, undersøg om punkterne tilnærmelsesvist ligger på grafen for en eksponentialfunktion

Den givne teknik, som kan kaldes den *grafiske teknik*, er ret løst formuleret. Opgaven er lukket formuleret, da der står ”vis at…” i stedet for ”undersøg om…”. Derfor ved eleven fra starten at punkterne skal ligge på en ret linje, og teknikken mister derfor en smule af sin brugbarhed.
Der introduceres en anden teknik, nemlig *eksponentiel regression*. Dette kan gøres i et regneark eller på en grafregner. Kontrolfunktionen er da den såkaldte *forklaringsgrad*, også kaldet r^2. Tommelfingerreglen er, at jo tættere r^2 er på 1, jo tættere ligger punkterne på grafen. Bogen opstiller følgende kriterier:

$0 < r^2 \leq 0{,}95$	Der er ikke nogen eksponentiel sammenhæng mellem x og y
$0{,}95 < r^2 \leq 0{,}99$	Der er en *acceptabel* eksponentiel sammenhæng mellem x og y
$0{,}99 < r^2 < 1$	Der er en *meget god* eksponentiel sammenhæng mellem x og y
$r^2 = 1$	Der er en *perfekt* eksponentiel sammenhæng mellem x og y

I det sidste tilfælde ligger alle punkterne på grafen. Dette vil fx ske hvis der kun er to punkter (i så fald er opgaven blevet til typen T_6). Skellet mellem hvorvidt der er tale om eksponentiel sammenhæng er, om forklarings graden er større end 0,95 eller ej.
Det næste afsnit (side 208) hedder ”Eksponentiel matematisk model”. Det handler om hvordan man kan opstille en konkret kontekst hvori de foregående opgavetyper kan indgå. Som eksempel bruges følgende tabel (side 209):

Årstal		1800	1810	1820	1830	1840
År efter 1880, x	År	0	10	20	30	40
Befolkning, y	Mio.	5,31	7,24	9,64	12,87	17,07

Det nævnes herefter at populationer (mennesker, bakterier etc.) har en tendens til at vokse med en konstant procent, dvs. eksponentielt. Efter eksponentiel regression fås forskriften:

$$y = 5{,}36 \cdot 1{,}0295^x$$

Forklaringsgraden er $r^2 = 0{,}9997$ så der er tale om en god tilnærmelse. Begyndelsesværdien bliver 5,36 hvilket ikke helt stemmer overens med tabellen. Men det er blot en afvigelse på halvtreds tusind mennesker, hvilket man måske kan argumentere for ikke er meget i denne sammenhæng. Ud fra fremskrivningsfaktoren ses det, at befolkningstallet omtrent har vokset med lidt under 3 % om året.

Den matematiske model er her oversættelsen mellem ”almindelig tekst” og matematiske symboler. Ord knyttes sammen med bogstaver (variable) og udsagn (ligninger). Der er altså en opgave af typen:

T_8	Givet en tekst, opstil en passende matematisk model.

Herefter fortsætter eksemplet med følgende spørgsmål:

	Tekst	Type	Teknik
a.	Hvad var befolkningstallet i 1825?	$T_1 + T_3 + T_4$	Udregn $f(25)$
b.	Hvilket år passerede befolkningstallet 16 mio.?	T_2	Løs eksponentialligningen $f(x) = 16$ for x
c.	Hvor mange indbyggere var der i USA i 1875?	$T_1 + T_3 + T_4$	Udregn $f(75)$
d.	Hvor mange indbyggere vil der være i USA i 2010?	$T_1 + T_3 + T_4$	Udregn $f(210)$

Forskellen på a, c og d er ifølge bogen, at vi med $x = 75$ og $x = 210$ bevæger os ud af datasættet, og ekstrapolerer. Derfor skal man holde sig for øje, at modellen bliver mere og mere usikker jo længere væk man kommer fra datamaterialet. Dette kalder bogen *kritik af modellen*. Som grunde til mulige afvigelser nævnes, at USA's befolkningsvækst i 1800-tallet i høj grad skyldtes indvandring, som senere er stagneret. Desuden nævnes det, at velstående samfund som regel har lavere fødselstal, og desuden nævnes (meget løst) grundmekanikken i logistisk vækst.
Det sidste afsnit (side 211) hedder ”Fordobling og halvering”. Der gives et eksempel, hvori et pengebeløb sættes i en bank med en rente på 4,7 % p.a. Derfor vil saldoen være fordoblet efter femten år, da $1{,}047^{15} = 2$ (ca.). Man siger at kapitalen har *fordoblingstiden* 15 år. I en generel eksponentialfunktion kaldes denne tilvækst for T_2 og kaldes *fordoblingskonstanten*. Der stilles en øvelse hvor man ud fra en figur med linjer i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, skal aflæse fordoblingskonstanten.
Herefter opstilles formlen for T_2 ud fra fremskrivningsfaktoren a:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Beviset kører på følgende måde:
En eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ betragtes. Til en vilkårlig x-værdi x_1 skal findes en større x-værdi x_2 sådan at $2 \cdot f(x_1) = f(x_2)$. Hermed er $T_2 = x_2 - x_1$.
Ved at benytte forskriften fås:

$$2 \cdot ba^{x_1} = ba^{x_2}$$

Dette omskrives til:

$$2 = a^{x_2 - x_1}$$

Dette er en eksponentialligning, som løses på normal vis:

$$x_2 - x_1 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Hermed er det ønskede vist. Den tilsvarende formel med ln vises analogt.
Der stilles herefter flere opgaver af typen:

T_9	Givet en voksende eksponentialfunktion, udregn dens fordoblingskonstant.

En teknik til dette er enten at bruge formlen (til hvis bevis man skal løse en eksponentialligning) eller at aflæse på grafen. I begge tilfælde er der dog tale om at man ud fra nogle y-værdier skal udregne nogle x-værdier. Typen T_9 er således nært beslægtet med T_2. Der stilles en øvelse (side 214) hvor man kender fordoblingskonstanten og et punkt. Man skal da bestemme forskriften. På symmetrisk vis bliver *halveringskonstanten* $T_{1/2}$ defineret for aftagende eksponentialfunktioner. Formlen opstilles:

$$T_{1/2} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}$$

Beviset efterlades i bogen som en øvelse, da det jo ganske analogt med beviset for T_2.
Der er hermed lagt op til en sidste opgavetype:

T_{10}	Givet en aftagende eksponentialfunktion, udregn dens halveringskonstant.

Denne type er selvfølgelig meget tæt beslægtet med T_9, og dermed også med T_2.

Grundtyper

Jeg vil nu prøve at gruppere opgavetyperne på en anden måde. Først vil jeg opstille tre basale *grundtyper*:

I) **Model**: Der er givet en kontekst, som er beskrevet med tabeller og almindelig tekst. Opgaven går ud på at knytte symboler sammen med begreberne. Fx kan "antal timer" knyttes sammen med x etc.

II) **Afbildning**: Der er givet nogle matematiske symboler og et hint om deres sammenhæng. Dette hint kan fx være en tabel eller en graf. Opgaven går ud på at opstille et formeludtryk der knytter symbolerne sammen på passende vis.

III) **Udregning**: Der er givet et konkret matematisk udtryk. Opgaven går ud på at udregne det. Et eksempel er "udregn $12 \cdot 1{,}03^5$".

Dette er de tre grundtyper. Allerede efter årets første forløb kan man stille opgaver at type **III**. De fungerer på daværende tidspunkt blot som dele af instrumentationen når eleverne skal lære at bruge deres CAS-værktøj.
I starten af forløbet om eksponentielle funktioner kan man stille opgaver af typen **II–III**. Et eksempel på dette kan være ”En forskrift er givet ved $f(x) = 1{,}3^x$. Udregn $f(4)$”.
Senere vil man også kunne inddrage en konkret kontekst: ”En størrelse starter på 4 og vokser med 12 % per time. Hvor meget er den vokset til efter en dag?” Dette eksempel kan udregnes på en af de to følgende måder:

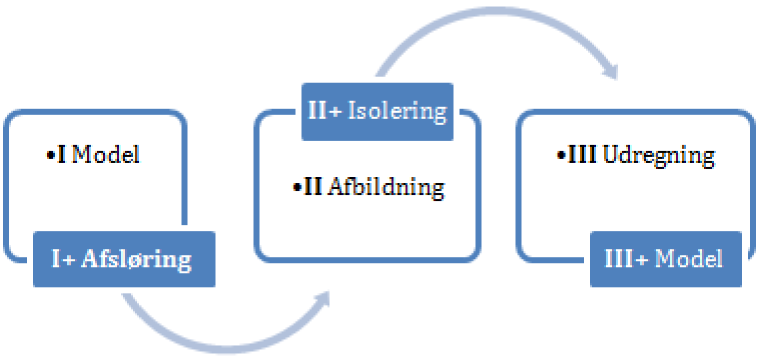
I–III	Vi kalder størrelsen for y. Da den vokser med 12 % fireogtyve gange må den være: $$y = 4 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot \ldots \cdot 1{,}12 = 60{,}7$$
I–II – III	Vi kalder størrelsen for $f(x)$, hvor x er antallet af timer. Funktionen f har altså følgende forskrift: $$f(x) = 4 \cdot 1{,}12^x$$ Der er fireogtyve timer på et døgn, så vi udregner: $$f(24) = 4 \cdot 1{,}12^{24} = 60{,}7$$

Den eneste forskel på disse to metoder er om hvorvidt man eksplicit opstiller den eksponentielle funktion eller ej.
Vi ser at denne opdeling er for simpel til at indeholde de syv opgavetyper vi så foroven. Jeg har derfor valgt at indskyde nogle *undertyper* mellem grundtyperne. Det er fx ikke altid muligt at gå direkte fra **II** til **III**. Som eksempel kan tages ”En funktion er givet ved $f(x) = 100 \cdot 1{,}45^x$. Løs ligningen $f(x) = 500$”. Vi starter med **II** og skal, for at kunne komme til **III**, finde et udtryk $x = \cdots$ med konkrete tal. Dette gøres naturligvis ved at *isolere* x. Jeg introducerer da en opgavetype **II+** kaldet *Isolering*. Skematisk gøres følgende:

II	**II+**	**III**
Forskriften er $f(x) = 100 \cdot 1{,}45^x$	Ligningen $f(x) = 500$ løses. Den har løsningen $x = \frac{\ln(5)}{\ln(1{,}45)}$	Udregn $x = \frac{\ln(5)}{\ln(1{,}45)} = 4{,}33$

Denne proces hedder **II+–III**. Jeg vil dog forkorte den til **II+III**. Dvs. det er de to grundtyper **II** og **III** med en undertype som bindeled.
Ligeledes kan man også indskyde en undertype efter **I**, som jeg vil kalde **I+**. For at komme fra model til afbildning kan det nemlig være nødvendigt at indskyde en opgave. Typisk vil man kende to eller flere punkter og skal finde en forskrift. Jeg vil kalde den *Afsløring*.

Efter **III** vil jeg desuden lægge endnu en undertype **III+**. Den er betinget af, at **I** også indgår i opgaven. Der startes med en kontekst og derfor skal der også sluttes med konteksten. Dette kan fx gøres ved at man efter udregningen af størrelsen oversætter resultatet til almindeligt sprog. En anden grund er at eleven derved tjekker om resultatet giver mening. Har man valgt de rigtige enheder? Er det en snydeopgave uden løsninger? Et eksempel kan være at man gerne vil udregne sidelængden på et rektangel med givet areal. Dette kræver som regel at man løser en andengradsligning som giver to løsninger, en positiv og en negativ. Ved at medtage leddet **III+** kan eleven argumentere at det kun er den positive løsning der giver mening. Skematisk kan processen stilles således op:



Den mest komplette opgave er altså **I+II+III+**. I praksis er det dog nødvendigt at udvide notationen yderligere:

Definition: *En opgave* $\mathcal{O}$ *er en* n*-tupel* $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. *Elementerne* $s_1, s_2, \dots, s_n$ *er spørgsmål, der hver især er tilknyttet en praxeologi:*

$$s_i \longrightarrow (T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i)$$

Lad os se et eksempel (som jeg selv har konstrueret) på dette:

Bakterierne i et biologisk system blev målt over et tidsrum. Følgende resultater blev målt:

Timer	1	2	3	4	5
Bakterier	280	1180	1610	4050	9800

a) *Argumenter for at antallet af bakterier tilnærmelsesvist vokser eksponentielt.*
b) *Hvor lang tid går der før der er en halv million bakterier?*
c) *Hvor mange bakterier vil der være efter en halv dag?*

Vi har altså en opgave med tre spørgsmål. Det første spørgsmål kan opsummeres således:

I Model	I+ Afsløring
x er antallet af timer og $f(x)$ er antallet af bakterier.	Vi benytter os af eksponentiel regression og får $r^2 = 0{,}97$, så det er en acceptabel model.

Det andet spørgsmål kan opsummeres således:

II Afbildning	II+ Isolering	III Udregning	III+ Model
Forskriften (fundet ved hjælp af regression) er $f(x) = 151 \cdot 2{,}3^x$	Ligningen $f(x) = 500000$ løses for x.	$x = \frac{\ln(3311)}{\ln(2{,}3)} = 9{,}7$	Efter 9,7 timer Er der en halv million bakterier

Det sidste spørgsmål kan opsummeres som:

II Afbildning	III Udregning	III+ Model
Forskriften (fundet ved hjælp af regression) er $f(x) = 151 \cdot 2{,}3^x$	$f(12) = 151 \cdot 2{,}3^{12} = 3309208$	Der er 3.309.208 bakterier efter en halv dag (godt tre en kvart million)

Opgaven er altså af typen $\mathcal{O}_1 = (s_1, s_2, s_3) = (\textbf{I+},\ \textbf{II+III+},\ \textbf{II–III+})$.
De to spørgsmål s_2 og s_3 er uafhængige og afhænger begge af s_1.
Et andet eksempel er den følgende opgave:

2500 kroner blev sat ind på en konto der forrentes en gang om året. Efter et antal år, hvor der hverken er blevet indsat eller hævet penge, er saldoen 3200 kroner.

a) Hvor stor var renten hvis der er gået ti år, og den ikke har ændret sig?
b) Hvor lang tid er der gået, hvis renten er 3 % *p.a.?*

Der er tale om to opgaver af typen **I–II+III+**. Den første del, **I–II**, er fælles:

I Model	II Afbildning
Vi bruger følgende symboler: K_0: startsaldo K_n: saldo efter n: antal terminer r: rentesats per termin	Vi har følgende sammenhæng: $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$

Den anden del, **II+III+**, forgrener sig således:

II+ Isolering	**III Udregning**	**III+ Model**
r isoleres i formlen. Løsningen er $r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$	$r = \sqrt[10]{\frac{3200}{2000}} - 1 = 0{,}048$	Renten har været 4,8 % p.a.
II+ Isolering	**III Udregning**	**III+ Model**
n isoleres i formlen. Løsningen er $n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$	$n = \frac{\ln(3200) - \ln(2000)}{\ln(1{,}03)} = 15{,}9$	Der er gået næsten seksten år (15,9 år).

Opgaven er altså af typen $O_2 = (s_1, s_2) = \big($**I–II+III+, I–II+III+**$\big)$.
Here er et eksempel på en øvelse, fra side 232 i Nielsen & Fogh (2007):

188. Om en funktion f oplyses det at den vokser eksponentielt, og af grafen går gennem punkterne $(-2{,}17)$ og $(10{,}214)$.
a. Bestem en forskrift for f.
b. Beregn $f(7)$.
c. Løs ved beregning $f(x) = 100$.

Den er af typen $O_3 = (s_1, s_2, s_3) = \big($**I+II, II–III, II+III**$\big)$.
Et andet eksempel er den følgende øvelse, fra side 234 i bogen:

201. En patient har taget en pille med 800 mg af et smertestillende middel. Blodprøver viser, at massen af stoffet i patientens blod aftager som vist i tabellen.

Tid t	Timer	0	10	20	30	40	50
Masse	Mg	800	560	390	270	190	135

a. Påvis, at massen aftager eksponentielt med tiden.
b. Bestem halveringstiden.

For at midlet kan være effektivt, skal indholdet i blodet være over 300 mg.

c. Hvor mange timer går der før patienten skal tage den næste pille?

Det første spørgsmål er implicit af typen **I+II**. Man skal vise at datasættet er eksponentielt fordelt ved at bestemme forskriften.
Det andet spørgsmål kan både være af typen **II–III** og **II+III**. Ud fra forskriften skal man finde T_2. Dette gøres enten ved at bruge formlen (**II–III**), eller ved at bemærke at grafen skærer y-aksen i 800 og derefter løse ligningen $f(x) = 1600$ (**II+III**).

Til sidst vil jeg som lovet tidligere, sammenligne lærebogens typer med læreplanens. Der står af eleverne bør kunne håndtere problemstillinger som:

- *"Når spinat blancheres, ændrer vitaminindholdet,* y*, sig (målt i bestemte enheder) efter følgende forskrift:* $y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^x$ *, hvor* t *er tiden. Bestem* y *for given værdi af* t *og omvendt.*
- *Isoler* n *i formlen* $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$
- *Det radioaktive stof strontium* 90 *henfalder med* $2{,}45\ \%$ *pr år. Et laboratorium indkøber* $7\ \mathrm{g}$ *af stoffet i* 2004*. Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver, hvor mange gram radioaktivt stof, der vil være tilbage om et givent antal år."*

(Stx-bekendtgørelsen, 2008, side 4)

Den første problemstilling er af type **I–II+III** og **I–II–III**. Der skal omregnes fra uafhængig variabel til afhængig, og omvendt.
Den anden problemstilling er af type **II+**. Vi kan her betragte n som uafhængig variabel, K_n som afhængig variabel og de andre som konstanter.
Den tredje problemstilling handler om at opstille en matematisk model og udregne funktionsværdier, dvs. den er af typen **I+II–III**.
I læreplanen står der også:

"Logaritmiske koordinatsystemer er ikke et selvstændigt emne, men eleverne skal kunne aflæse på grafer i logaritmiske koordinatsystemer, da de i mange sammenhænge og i andre fag vil kunne møde sådanne. Logaritmefunktioner indføres som de regnetekniske hjælpemidler til at løse bestemte ligninger og skal således ikke underkastes særlige undersøgelser"

(Stx-bekendtgørelsen, 2008, side 8)

Dette betyder altså at logaritmefunktioner stort set kun bruges til at løse eksponentialligninger. Man kan som lærer vælge at introducere titalslogaritmen og den naturlige logaritme, eller kun en af dem. De eneste undersøgelser de skal underkastes er:

- Man kan tage logaritmen på begge sider af en ligning uden at ændre løsningsmængden.
- Regnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ gælder.

Disse to egenskaber kan anføres med eller uden bevis. Dog kræver det et godt stykke forarbejde at bevise dem.

Intern didaktisk transposition

I det følgende afsnit vil jeg komme ind på de interne faktorer i den didaktiske transposition. Omkring årsskiftet 2009-2010 udleverede jeg spørgeskemaer til de andre matematiklærere på Gribskov Gymnasium. Målet var at holde min læsning af den eksterne didaktiske transposition op overfor den tilsvarende hos de udøvende kræfter. Desuden var målet også at afdække eventuelle blinde vinkler og idiosynkrasier hos mig selv. Desværre fik jeg kun to spørgeskemaer udleveret. Derfor vil de blive betragtet som et sekundært indlæg i analysen, og ikke som et egentligt datamateriale. I spørgeskemaet opstillede jeg de matematiske organisationer **I+II**, **I-II**, **II+II**, **II-III** og **III** på listeform og bad dem om at tage stilling til om de mente den var udtømmende. Ud fra deres besvarelser har jeg udvidet med to typer.

Først og fremmest mente lærerne at der burde være en opgave der specifikt handlede om at finde skæringspunktet mellem graferne for to eksponentialfunktioner. Dernæst mente de at eleverne skulle kunne fortolke konstanterne a og b i forskriften $y = b \cdot a^x$, dvs. have forståelse for deres betydning for grafens udseende.

Disse to typer hører begge til typen **II**, da der i begge er en (i det ene tilfælde, to) kendte forskrifter. Jeg har derfor kaldt dem **IIA** og **IIB**.

IIA vil jeg kalde at *beskrive funktionen*. Dette betyder at der skal findes skæringspunkt med y-asken, monotoniforhold og fordoblings- eller halveringskonstant.

IIB er at finde skæringspunktet (x, y) mellem to eksponentialfunktioner f og g.

Forløbet i forhold til 1.g

I dette afsnit vil jeg beskrive forløbets placering i forhold til hele 1.g. Det er min mening at det første år så vidt som muligt skal være en sammentømret enhed, hvor de enkelte forløb samler op på de forrige, forbereder de næste, og samtidig har en klar og markant identitet.

Det indledende forløb – det udvidede potensbegreb

Typisk vil det foregå sådan at skoleåret starter med et forløb om algebra og ligningsløsning. Her vil eleverne blive introduceret til naturlige, hele, rationelle og reelle tal.

Eleverne skal ifølge læreplanen introduceres til det udvidede potensbegreb i starten af året. Der er således tale om en didaktisk praxeologi, hvis type er:

T: Indfør det udvidede potensbegreb på en måde der er tilgængelig for 1.g-elever.

Med ”tilgængelig” mener jeg at teknikkerne skal ligge inden for pensum.

I afsnittet om videnskabsfaget beskrev jeg en teori der dannede rammen for de mulige teknikker. Fælles for dem er, at de definerer a^x med rationelle eksponenter ved at bruge brøker og roduddragning. Dette kan gøres ved at opbygge en illusion af ”naturlighed”. Hermed menes at eleverne får en let forståelig forklaring af potenser med naturlige eksponenter. Herefter bruges den induktive metode til, gennem et par konkrete eksempler, at opstille en

regneregel. Denne regneregel ekstrapoleres så på hele og efterhånden også rationelle eksponenter.
Teknikken og teknologien kan opsummeres ved, at man for et $a \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{N}$ definerer:

$$a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ gange})$$

Herefter fortsætter man med at "udlede formler". Ved at opstille eksempler argumenterer man hvorfor definitionerne for negative og rationelle eksponenter giver mening på et intuitivt plan.
For det første bemærkes det at $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^3 \cdot a^2$
Dette antyder at man generelt kan vælge et naturligt tal $n_1 < n$ for hvilket der vil gælde:

$$a^n = a^{n_1 + (n - n_1)} = a^{n_1} \cdot a^{n - n_1}$$

Man kan eventuelt også skrive eksemplerne $n = 6$ og $n = 7$ op på tavlen.
Herefter betragtes brøken:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{a \cdot a}{1} = a^2$$

Ved at forkorte brøken vil antallet af a'er så være antallet i tælleren minus antallet i nævneren. Derfor kan man, også eventuelt med flere regneeksempler, gætte regnereglen:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

for naturlige tal m og n med $m > n$.
Hvis man nu prøver at bruge regnereglen på $m = n$ fås:

$$a^0 = a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} = 1$$

Dvs. det vil give mening at definere a^0 til at være 1 for alle positive reelle tal.
Samtidig kan man også prøve at sætte $m < n$. Da får man:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}}$$

Det sidste udtryk giver mening, da $-(m - n)$ vil være et naturligt tal. Regnereglen siger at $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Man kan sætte $m = 0$ og få regnereglen:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{-(0-n)}} = \frac{1}{a^n}$$

Således har man på intuitivt plan udvidet potensbegrebet til at dække alle hele eksponenter. Det næste skridt er nu at se på muligheden for rationelle eksponenter.
Det ses at:

$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^3 \cdot a^3 = (a^3)^2$$

Samtidig ses det også at:

$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a^2)^3$$

Dette antyder regnereglen $a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n$ (for alle hele tal m og n).
Den m'te rod af a, $\sqrt[m]{a}$, defineres ved:

$$\sqrt[m]{a} = b \quad \Rightarrow \quad a = b^m$$

Beviset for at denne definition giver mening gennemgik jeg i afsnittet om videnskabsfaget. Da det benytter sig af middelværdisætningen, er det formentlig bedst over for eleverne blot at bruge definitionen uden beviset.
Herefter betragtes igen potens a^n, hvor n er et helt tal. Man kan nu selvfølgelig gange eksponenten med $\frac{m}{m} = 1$:

$$a^n = a^{n \cdot (m/m)} = a^{(n/m) \cdot m} = \left(a^{n/m}\right)^m$$

Dette betyder per definition af $a^{\frac{n}{m}}$ er den m'te rod af a^n, dvs. man kan definere potensopløftning med rationel eksponent på følgende måde:

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

Problemet kommer med udvidelsen til de reelle tal. Den metode jeg opstillede i afsnittet om videnskabsfaget forudsatte et kendskab til følger og grænseværdier, og det kan nok ikke forventes at eleverne kan arbejde med dette i 1.g. Spørgsmålet er altså nu hvordan man tackler den følgende opgavetype:

T': Indfør potensopløftning med irrationelle eksponenter på en måde der er tilgængelig for 1.g-elever.

Nielsen & Fogh (2007) gik ikke i dybden med denne problematik, men den følgende teknik blev antydet:

τ_1: For valgte rationelle tal $q_1, q_2, \dots, q_k$ tegnes punkterne (q_i, a^{q_i}) i et koordinatsystem. Grafen tegnes efter "bedste evne". Nu kan punktmængden $\{(x, a^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ aflæses på grafen.

Denne teknik kaldes i sagens natur den *grafiske teknik*. Den kan modificeres ved at man arbejder i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og derfor kun behøver 2 støttepunkter. Da grafen bliver en ret linje kan man nøjes med at vælge to naturlige tal n_1 og n_2 og derefter indtegne punkterne (n_1, a^{n_1}) og (n_2, a^{n_2}).
Med hensyn til stringens er der dog store problemer ved denne teknik, da den tilhørende teoretiske blok bliver meget løst defineret.
Teknologien er:

θ_1: a^x er defineret for rationelle eksponenter ved at bruge brøker og roduddragning. Derfor kan grafen tegnes med vilkårligt mange støttepunkter. For irrationelle eksponenter x aflæses på grafen.

Dette giver den følgende teori:

Θ_1: Det kan vises at $x \mapsto a^x$ er kontinuert og differentiabel. Desuden er den konveks med en vandret asymptote i $y = 0$. Derfor kan man med god tilnærmelse ved øjemål tegne grafen i hånden gennem et ønsket antal støttepunkter. Grafen er defineret til at være punktmængden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^x = y\}$ hvilket betyder at $a^x = y$ hvis og kun hvis punktet (x, y) ligger på grafen.

Denne teori benytter sig af begreber som "øjemål" og "god tilnærmelse", der ikke lige lader sig definere. Dette gælder naturligvis for de fleste praxeologier med grafiske teknikker, men da der her er tale om selve grundlaget for eksponentialfunktioner, så er usikkerheden specielt uheldig her.
Det er også uheldigt at Nielsen & Fogh (2007) nævner den som det eneste eksempel. Det første problem er at man skal afsætte og aflæse punkter, hvilket altid er forbundet med stor usikkerhed. Desuden er grafens udseende afhængigt af antallet af støttepunkter.
Dette kunne omgås ved at bruge et logaritmisk koordinatsystem, men dette kræver til gengæld at man indfører logaritmefunktionen. Standardmetoden er at bruge stamfunktioner eller eksponentialfunktionen, og så er man lige vidt.
Jeg vil i stedet foreslå den følgende teknik, som jeg kalder den *numeriske teknik*:

τ_2: Tallet x afrundes til et ønsket antal decimaler n, hvilket giver tallet x_n. Herefter udregnes tallet $\sqrt[10^n]{a^{10^n \cdot x_n}}$.

Teknologien er som følger:

θ_2: Skriv x som et decimaltal med n decimaler. Ryk kommaet n pladser til højre, sådan at tallet bliver helt. Divider med 10^n sådan at det stadig er samme tal. Eksponenten er nu et rationelt tal, og potenser med rationelle eksponenter er allerede defineret.

Teorien bag ved er:

Θ_2: For et vilkårligt reelt tal x betragtes definitionen:

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &:= a^x \quad &, \quad x \in \mathbb{N} \\
f_a(-x) &:= \frac{1}{a^x} \quad &, \quad x \in \mathbb{N} \\
f_a\left(x^{p/q}\right) &:= \sqrt[q]{x^p} \quad &, \quad p, q \in \mathbb{N} \\
f_a(x) &:= \lim_{n \to \infty} \sqrt[10^n]{a^{10^n x_n}} \quad &, \quad x \in \left]0,1\right[
\end{aligned}
$$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er den rationelle følge defineret ved:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i 10^{-i},$$

hvor d_i er den i'te decimal i $x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$
Den definerede funktion er eksponentialfunktionen med grundtal a.

Bevis: De tre første definitioner er blot gentagelser af det tidligere.
Det kan antages at $x > 0$ da man ellers blot bruger regnereglen:

$$f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)}$$

Det kan også antages at $x < 1$ da man ellers blot bruger regnereglen:

$$f_a(x) = f_a([x] + \{x\}) = f_a([x]) \cdot f_a(\{x\}),$$

hvor $[x]$ er heltalsdelen, og $\{x\} = x - [x]$ er decimaldelen. Vi kan altså skrive x på formen:

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

Nu defineres:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i 10^{-i}$$

Derfor ses det klart at $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.
Det ses desuden at:

$$10^n x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i 10^{n-i} \in \mathbb{N}$$

Hvilket betyder at:

$$x_n = \frac{10^n x_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

Herefter defineres:

$$a^{x_n} := a^{\frac{10^n x_n}{10^n}} = \sqrt[10^n]{a^{10^n x_n}}$$

Denne definition giver mening, da $10^n x_n \in \mathbb{N}$.
Da følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$er strengt voksende gælder der, at følgen $(a^{x_n})_{n=1}^{\infty}$er strengt voksende for $a > 1$ og strengt aftagende for $0 < a < 1$.
Det skal nu vises at følgen $(a^{x_n})_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge, hvilket på grund af fuldstændigheden af $\mathbb{R}$ gør den konvergent. Vi skal med andre ord vise at:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : |a^{x_n} - a^{x_m}| < \varepsilon$$

Det antages at $n > m$:

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| = |a^{x_n}(1 - a^{x_m - x_n})| \leq |a^{x_n}| \cdot |1 - a^{x_m - x_n}|$$

Givet et $\varepsilon > 0$ eksisterer der et $N > 0$ sådan at $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Det betyder at:

$$|1 - a^{x_m - x_n}| \longrightarrow 0 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty$$

Derfor, givet et $\varepsilon' > 0$ eksisterer der et $N' > 0$, sådan at $\forall n, m > N' : |a^{x_n}| \cdot |1 - a^{x_m - x_n}| < \varepsilon'$.
Følgen $(a^{x_n})_{n=1}^{\infty}$ er derfor en Cauchy-følge, da:

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| < \frac{\varepsilon'}{|a^{x_n}|}$$

Da følgen $(a^{x_n})_{n=1}^{\infty}$ således er en Cauchy-følge er den også konvergent. ■

Opsummering af den epistemologiske referencemodel

Jeg gennemgik først de muligheder der kan være for at definere eksponentialfunktionen. Fælles for dem alle var, at de krævede et forarbejde der lå ud over det gymnasiale niveau. Dette kunne jeg konkludere ud fra læsningen af bekendtgørelsen, samt den respons jeg fik fra de andre lærere. Lærerne sagde desuden at deres strategi var at definere potenser med eksponenter der er naturlige, hele og rationelle ved at bruge de gængse regneregler. Definitionen af reelle eksponenter blev ikke gennemgået, men til gengæld blev det heller ikke problematiseret. I læsningen af lærebøgerne konkluderede jeg, at alle de relevante opgavetyper kan findes som delmængder af typen **I+II+III+**. Dette blev herefter udvidet med to typer

Jeg vil nu opstille praxeologier for alle disse typer. En forkortet udgave af denne liste findes i bilag 1.

I og III+ (Konstruktion og brug af model)

Type

Eleverne skal oversætte en tekst til matematiske symboler (eller omvendt). I opgaverne formuleres det tit som ”indfør passende betegnelser”.

Teknik

Eleverne skal trænes i at genkende sammenhænge. Hvis der fx står noget om procentvis vækst, så vil der formentlig være tale om eksponentiel vækst eller potensvækst.

Alt i alt går opgaven ud på at identificere en uafhængig variabel, som typisk benævnes med x, t eller n. t og n plejer at repræsentere henholdsvis kontinuerlig og diskret tid, mens x duer i alle sammenhænge. Der skal også identificeres en afhængig variabel, som typisk benævnes y. I en opgave om eksponentielle sammenhænge vil disse to fastlagte, mens der i opgaver med lineære eller potensielle sammenhænge godt være tilfælde hvor begge variable kan være den uafhængige (dette skyldes naturligvis at begge variable har den samme væksttype).

Teknologi

Hvis opgaven beskriver noget der udvikler sig vil den uafhængige variabel typisk være en tidsvariabel. Enheden kan være sekunder, dage, kvartaler eller år. Der kan også være tale om et mere abstrakt tidsbegreb, hvor man blot snakker om hændelser, og derefter tæller dem, eller en enkelt hændelse der gentages.

Eleverne skal eksplicit skrive de variable op og beskrive med bogstaver og enheder hvad de betyder.

Teori

Retfærdiggørelsen af modellerne bygger på induktion. De har vist sig som rigtigt gode værktøjer og de bruges indtil de begynder at skabe flere problemer end løsninger (jf. Lakatos’ ideer om progressive forskningsprogrammer).

I+II (Afsløring af afbildning).
Der er her tale om to typer:

1) Bestemmelse af forskrift gennem to givne punkter
2) Eksponentiel regression på et datasæt

Type 1 - Bestemmelse af forskrift gennem to givne punkter
I den første type er der givet to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Opgaven består i at bestemme a og b sådan at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$.

Teknik
Der er to teknikker. For det første kan benytte sig af formlerne $a = \sqrt[x_2 - x_1]{y_2/y_1}$ og $b = y_1 \cdot a^{-x_1} = y_2 \cdot a^{-x_2}$. Jeg vil kalde dette for den *algebraiske teknik*.
Den anden teknik består i at opstille en tabel med punkterne. Herefter kan Δx udregnes og det benyttes at en absolut tilvækst i x betyder en relativ tilvækst i y. Ud fra dette kan fremskrivningsfaktoren a bestemmes, og begyndelsesværdien b kan bestemmes ved at tilbageskrive. Denne teknik kalder jeg den *kovariationelle teknik*.
Af disse to teknikker foretrækker jeg personligt den kovariationelle, da eleven her skal arbejde med de matematiske mekanismer hver gang der stilles en opgave. Ud fra spørgeskemaerne kunne jeg dog se, at de andre lærere var uenige (de brugte faktisk kun den algebraiske teknik i undervisningen). Den algebraiske teknik giver også læreren mulighed for at gennemføre et bevis med passende sværhedsgrad, hvilket kan være svært at finde det første år. Jeg vil derfor sidestille de to teknikker som ligeværdige i undervisningen.

Teknologi
De to teknikker har den samme overordnede teknologi:

1) Der er givet to punkter.
2) Brug de to punkter til at udregne a.
3) Brug a og et punkt til at udregne b.
4) Kontrollér eventuelt resultatet.

Den algebraiske teknik beskrives ganske enkelt som de fire punkter ovenfor. Der gennemregnes desuden en masse eksempler på tavlen.
Den kovariationelle teknik beskrives ved at man opstiller de to punkter i en tabel på følgende måde:

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

Dette gøres sådan at $x_1 < x_2$. Herefter nævnes det, at hver gang der lægges 1 til x så ganges y med a, som er det tal der skal udregnes. Fra x_1 til x_2 er der naturligvis $\Delta x = x_2 - x_1$. Derfor ganges y_1 med a Δx gange for at blive y_2:

$$\begin{tikzcd} x & x_1 \arrow[r, bend left, "+\Delta x"] & x_2 \\ y & y_1 \arrow[r, bend right, "\cdot a^{\Delta x}"'] & y_2 \end{tikzcd}$$

Ligningen $y_1 \cdot a^{\Delta x} = y_2$ kan nu løses for a. Hermed får man naturligvis den samme formel som ved den algebraiske teknik, men med denne teknik skal tabellen altid opstilles med de konkrete tal og Δx skal udregnes. Begyndelsesværdien b kan findes ved at opstille den følgende tabel:

$$\begin{tikzcd} x & 0 & x_1 \arrow[l, bend right, "-x_1"'] \\ y & b & y_1 \arrow[l, bend left, ": a^{x_1}"] \end{tikzcd}$$

Hermed kan $b = y_1 : a^{x_1}$ udregnes.
Disse to teknologier har hver deres styrke og svagheder. Den første er kortere og kan hurtigt læres ved hjælp af gentagelse. Den anden kræver at eleverne er optrænede i at arbejde kovariationelt med funktioner. Min påstand er dog, at hvis dette er tilfældet, så vil denne teknik være det ekstra besvær værd for eleverne.

Teori: Formlerne for a og b kan med fordel bevises på tavlen ved at bruge det følgende bevis: Den eksponentielle funktion $y = b \cdot a^x$ går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) så der gælder at:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad og \quad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Herefter isoleres b i begge ligninger og substitutionsmetoden bruges:

$$\frac{a^{x_1}}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{y_2}$$

Dette omskrives til:

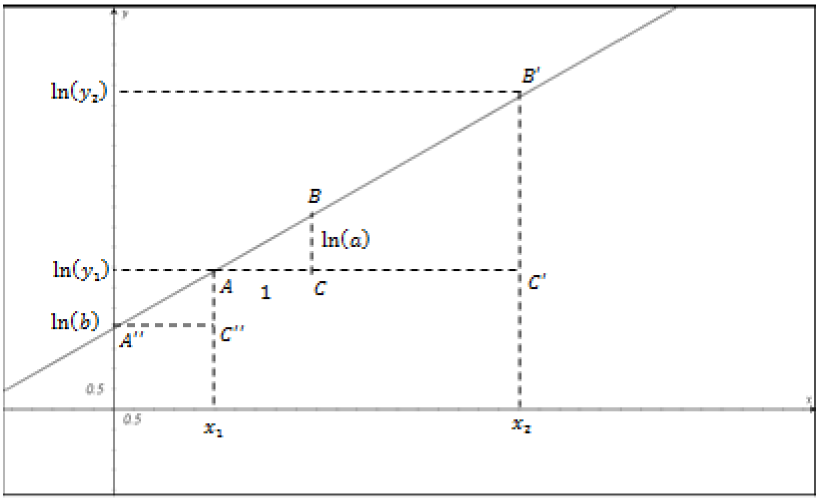
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

Ved at bruge regneregler for potenser kan dette omskrives til:

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

Det antages at $x_2 > x_1$, hvorefter det følger at $a = \sqrt[x_2-x_1]{y_2/y_1}$

Hvis eleverne er opmærksomme på, at grafen for en eksponentiel funktion bliver en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem kan man gennemgå det geometriske bevis for lineære funktioner, hvor man benytter sig af to ensvinklede retvinklede trekanter. Det kan ses på følgende figur:



Det ses at $AC^{'} = x_2 - x_1$ og $B^{'}C^{'} = \ln(y_2) - \ln(y_1)$.
Da trekanterne ABC og $AB^{'}C^{'}$ er ensvinklede gælder der at:

$$\frac{BC}{B^{'}C^{'}} = \frac{AC}{AC^{'}} \quad \text{dvs.} \quad \ln(a) = BC = \frac{B^{'}C^{'} \cdot AC}{AC^{'}} = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{x_2 - x_1}$$

Det betyder så at $\ln(a) \cdot (x_2 - x_1) = \ln(y_2) - \ln(y_1) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$. Dette omskrives til $e^{\ln(a)\cdot(x_2 - x_1)} = \frac{y_2}{y_1}$. Dette betyder så at $a^{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, hvilket giver det ønskede resultat.
Det ses desuden at trekanterne ABC og $A^{''}AC^{''}$ er ensvinklede. Det ses også at $AC^{''} = \ln(y_1) - \ln(b)$ og $A^{''}B^{''} = x_1$. Det betyder at:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{\ln(y_1) - \ln(b)}{\ln(a)}$$

Det betyder så at $\ln(b) = \ln(y_1) - x_1 \cdot \ln(a) = \ln(y_1) - \ln(a^{x_1}) = \ln(y_1 \cdot a^{-x_1})$. Ved at bruge den naturlige eksponentialfunktion fås $b = y_1 \cdot a^{-x_1}$ hvilket betyder at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$.

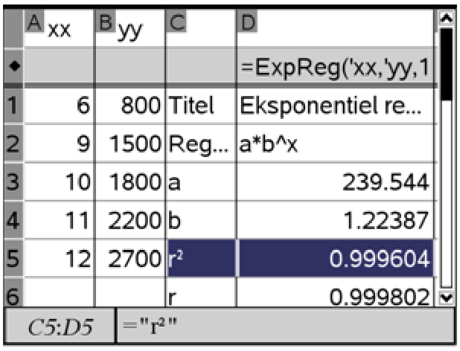
Type 2 – Eksponentiel regression på et datasæt

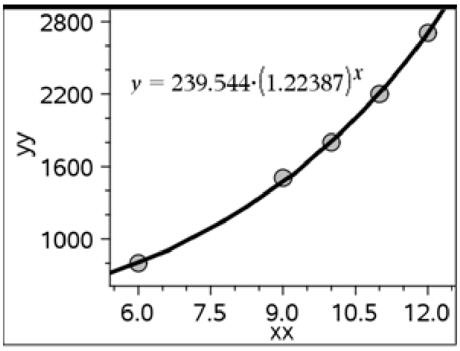
Der er her givet et sæt af punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. I ligningen $f(x) = b \cdot a^x$ skal a og b bestemmes sådan at grafen for f ligger "tættest muligt" på punkterne. Hvad det betyder, afhænger i sidste ende af den enkelte lærer.

Teknik

Efter at have analyseret lærebogsmaterialet og lærernes respons er jeg kommet frem til to teknikker. Begge har de det aspekt at man i stedet for at betragte $y = b \cdot a^x$ betragter det lineære udtryk $y = B + Ax$ for $B = \ln(b)$ og $A = \ln(a)$. Herefter bruges lineær regression i en eller anden form, og man udregner (eller aflæser) $a = e^A$ og $b = e^B$.

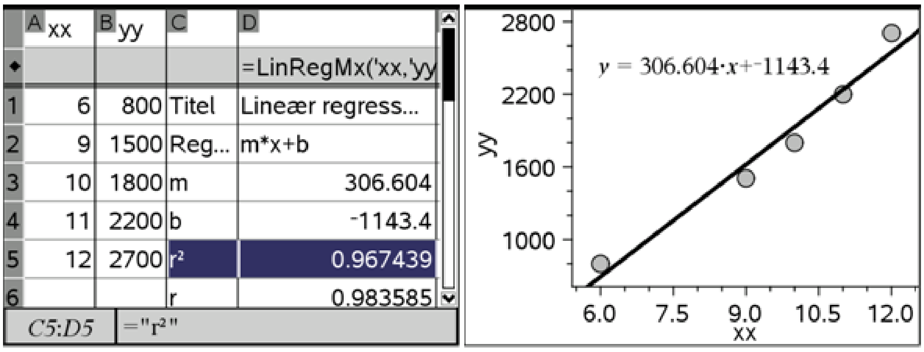
Den første teknik kalder jeg den *instrumenterede teknik*. Der er tale om en *Blackbox*-teknik hvor eleven taster punkterne ind på et CAS-værktøj, eller i Excel. Derefter aflæses svaret direkte fra skærmen. Som kontrol aflæses forklaringsgraden r^2. Jo tættere dette tal ligger på 1, jo tættere ligger punkterne på grafen. Hvis $r^2 = 1$ ligger de alle *på* grafen. Det er op til den enkelte lærer at lægge en tolerance på hvornår man kan antage at punkterne tilnærmelsesvist er eksponentielt fordelt. Nielsen & Fogh (2007) foreslår en grænse på $r^2 < 0{,}95$ (side 76) men har en selvmodsigelse på side 82 hvor et fysikforsøg om trykvariation i en lukket beholder bedømmes som godkendt, selvom datasættets forklaringsgrad er langt mindre end 0,95. På figuren nedenfor er vist hvordan man kan lave eksponentiel regression på TI-Nspire:





Forklaringsgraden bliver $r^2 = 0{,}999604043451$. Der er altså tale om en god tilnærmelse, og vi skal ud i fire decimaler før der ikke afrundes direkte til 1.

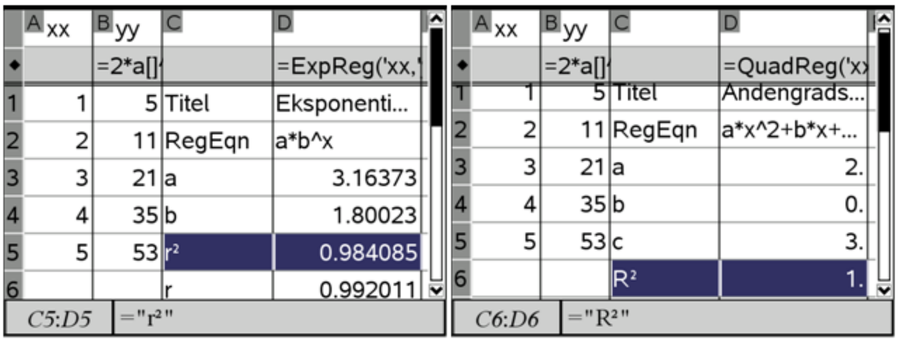
Problemet med denne teknik er, at den ikke altid virker. Fx kan vi også lave lineær regression på det ovenstående datasæt:



Den lineære regression giver en forklaringsgrad på $r^2 = 0{,}967439091409$. Der er altså tale om en *god* lineær tilnærmelse. I dette tilfælde kan vi stadig holde fast på at der er tale om en eksponentiel sammenhæng, da forklaringsgraden er større. Værre er det dog, hvis vi ser på følgende datasæt:

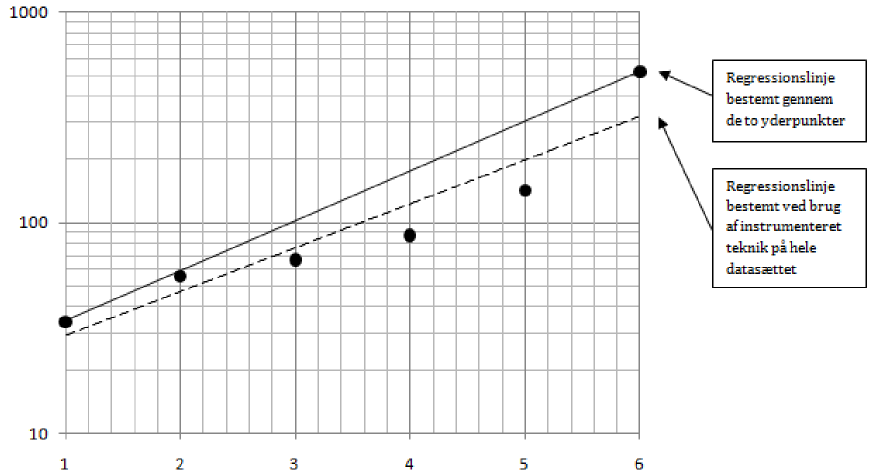
x	1	2	3	4	5
y	5	11	21	35	53

En eksponentiel regression giver forklaringsgraden $r^2 \approx 0{,}984$. Der er altså tale om en god tilnærmelse.



Vi kan dog også forsøge os med andre regressioner, fx *kvadratisk regression* (se figuren). Dette giver forklaringsgraden $r^2 = 1$, hvilket er en *perfekt* sammenhæng (datasættet blev skabt ved at bruge funktionen $y = 2x^2 + 3$).
Moralen må altså være, at forklaringsgraden ikke er en sikker metode, men den tilføjer et kontrollerende element til den instrumenterede teknik.

Den anden teknik kalder jeg den *grafiske teknik*. Her afsættes punkterne på enkeltlogaritmisk papir og eleven afgør med øjemål om punkterne ligger nogenlunde på linje (som nævnt skrev lærebogen at dette var, hvad den "dygtige elev" gjorde). Herefter aflæses to punkter på grafen, der gerne ligger langt fra hinanden, og opgaven er nu reduceret til den type jeg gennemgik tidligere. Jeg har medtaget teknikken, fordi at der i læreplanen stod at eleverne skal trænes i at aflæse på grafer i enkeltlogaritmiske koordinatsystemer.



Nielsen og Fogh (2007) nævner på side 75 at man skal passe på *skæve* punkter når man bruger denne teknik. De nævner det i forbindelse med lineær regression, men problematikken kan også opstå i forbindelse med eksponentiel regression.

Lad os fx sige at eleverne har tegnet punkterne fra et datasæt ind på enkelt-logaritmisk papir. Teknikken kræver at de med øjemål tegner den bedste rette linje gennem punkterne og derefter aflæser to punkter på linjen. Det nævnes at det bedste vil være hvis disse to punkter også er punkter fra datasættet. Dette kan eleverne måske misforstå som om, at de *skal* bruge to punkter fra datasættet. Som vist på figuren kan dette skævvride regressionslinjen. Jeg vil definere *skæve* punkter på følgende måde: Den instrumenterede teknik (dvs. de mindste kvadraters metode) defineres som værende den mest præcise teknik. Den giver en forskrift $y = \beta \cdot \alpha^x$. Ud fra de to punkter fås en forskrift $y = b \cdot a^x$. Jeg vil dele opgaverne op i to typer.

1) Opgaven bruger regressionsligningen til udregninger i resten af opgaven.
2) Opgaven indeholder kun regression, og regressionsligningen skal ikke bruges til yderligere udregninger.

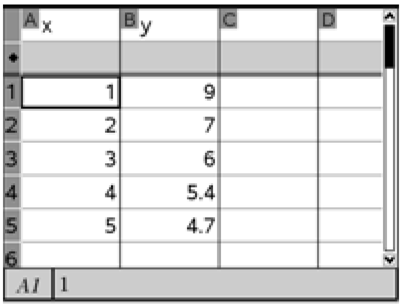
I det første tilfælde vil der være tale om opgaver af typen **II-III** eller **II+III**, dvs. ud fra den fundne forskrift $y = b \cdot a^x$ udregner man enten y ud fra x, eller omvendt. De præcise værdier, udregnet ved at bruge forskriften $y = \beta \cdot \alpha^x$ kaldes hhv. x' og y'. De to punkter er *skæve* hvis:

$$\left|\frac{x' - x}{x'}\right| \geq 0{,}05 \quad \text{eller} \quad \left|\frac{y' - y}{y'}\right| \geq 0{,}05$$

Med andre ord: punkterne er skæve, hvis blot en enkelt af de følgende udregninger i opgaven afviger 5 % eller mere fra dem der kommer af den præcise regressionsligning.

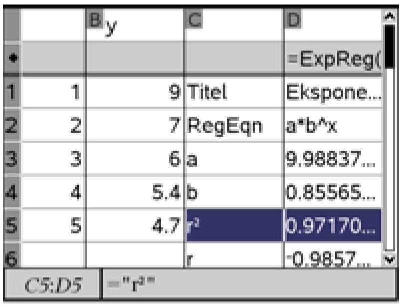
Hvis der for en sjælden gangs skyld skulle være en opgave uden følgespørgsmål udregnes den relative afvigelse mellem $y = b \cdot a^x$ og $y = \beta \cdot \alpha^x$ for alle x-værdier i data-sættet. Hvis blot et enkelt punkt afviger med 5 % eller mere, er punkterne skæve.

Teknologi
Den instrumenterede teknik er ren indtastning. x-værdierne og y-værdierne tastes ind i separate søjler (som eventuelt kan navngives). Der laves eksponentiel regression og tallene a, b og r^2 aflæses. Eventuelt kan der åbnes en side med data og statistik og punkterne kan tegnes sammen med grafen (her er det et krav at søjlerne er navngivet).



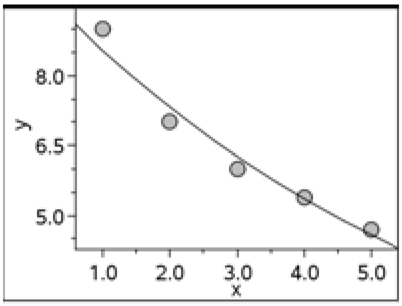
	A x	B y	C	D
◆				
1	1	9		
2	2	7		
3	3	6		
4	4	5.4		
5	5	4.7		
6				

A1 1



		B y	C	D
◆				=ExpReg(
1	1	9	Titel	Ekspone...
2	2	7	RegEqn	a*b^x
3	3	6	a	9.98837...
4	4	5.4	b	0.85565...
5	5	4.7	r²	0.97170...
6			r	-0.9857...

C5:D5 ="r²"



Eleverne skal være opmærksomme på, at forskriften står på formen $a \cdot b^x$, så begyndelsesværdi og fremskrivningsfaktorer er byttet om i forhold til det de er vant til.
Den grafiske teknik kan deles op på følgende måde:

1) Tilpas den vandrette akse til punkterne.
2) Tilpas dekaderne på den lodrette akse til punkterne.
3) Indtegn punkterne og se om de ligger nogenlunde på en ret linje.
4) Find forskriften gennem to punkter på linjen.

Eleverne vil formentlig være en smule intimiderede over den logaritmiske akse, men som lærer kan man argumentere at den faktisk er meget lettere at arbejde med. Man skal blot fastlægge en enkelt dekade, hvorefter hele aksen er fastlagt, med påtrykte værdier. Hvis man sætter den nederste dekade til at være 1 vil aksen hedde $1 - 10 - 100$ etc.

Teori:
Den instrumenterede teknik kan umiddelbart kun retfærdiggøres ved, at man stoler på CAS-værktøjet er konstrueret rigtigt. Den grafiske teknik kan til gengæld retfærdiggøres på en overkommelig måde. Eleverne skal introduceres til de logaritmiske egenskaber $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$. Herefter kan den eksponentielle forskrift $y = b \cdot a^x$ omformes til:

$$\ln(y) = \ln(b \cdot a^x) = \ln(b) + \ln(a^x) = \ln(b) + x \cdot \ln(a)$$

Hermed er $\ln(y) = B + Ax$ for $B = \ln(b)$ og $A = \ln(a)$.

Algebraisk teknik

I afsnittet om instrumenterede teknikker skrev jeg at jeg ville forsøge at supplere de instrumenterede teknikker med en algebraisk teknik. I forbindelse med eksponentiel regression vil jeg introducere en algebraisk teknik som er inspireret af CAS-værktøjets løsningsalgoritme: *de mindste kvadraters metode*. Det er naturligt at skitsere metoden på tavlen for eleverne, men jeg vil gå skridtet videre og gøre metoden til en matematisk organisation. Dette mener jeg er muligt, hvis det følgende er opfyldt:

a) Begyndelsesværdien (grafens skæring med y-aksen) skal være kendt.
b) Eleverne skal kende regnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$
c) Eleverne skal kunne reducere udtryk af mellemlang størrelse ($3n$ led, når der er n punkter i datasættet)
d) Eleverne skal have arbejdet med andengradsfunktioner og toppunktsformlen.

Jeg vil nu argumentere for at disse betingelser er acceptable inden for 1.g:

Ad. a) Hvis fx den uafhængige variabel er årstal, kan man blot vælge et basisår i datasættet og omdefinere den uafhængige variabel til ”år efter [basisår]”. Hvis der er tale om et forsøg i fysik eller kemi, vil der som regel være en kendt begyndelsesværdi (fx en startvægt eller starttemperatur).
Ad. b) Dette sker naturligt i forbindelse med eksponentialligninger.
Ad. c) Her kan der benyttes et CAS-værktøj (dette vil naturligvis også gøre teknikken delvist instrumenteret, men det stadig den algebraiske del vil være den primære).
Ad. d) Dette er en del af pensum i 1.g og et forløb kan nemt og naturligt placeres mellem forløbene om lineære funktioner og eksponentialfunktioner.
Jeg gennemgår nu den matematiske organisation.

Type

Dette er det naturligvis det samme som hos den instrumenterede og den grafiske teknik.

Teknik

Regressionen forløber på følgende måde:

a) Opskriv begyndelsesværdien.
b) Omskriv datasættet, så at de to variable er ligefremt proportionale.
c) Opstil kvadratrestsummen og reducer udtrykket til et andengradspolynomium. Find toppunktet.
d) Udregn gennemsnittet af y-værdierne og den totale kvadratsum (”samlet kvadreret afstand”). Udregn gennemsnittet af punkternes y-værdier og brug det til at udregne den totale kvadratsum (”total kvadreret afstand”).

e) Brug den totale kvadratsum til at udregne forklaringsgraden og argumenter hvorvidt de to variable tilnærmelsesvist er ligefremt proportionale.
f) Omskriv den fundne hældningskoefficient til fremskrivningsfaktor og opstil eksponentialfunktionen.

Jeg vil forklare og uddybe begreberne når jeg gennemgår teknologien.

Teknologi
Jeg vil beskrive teknologien gennem et konkret eksempel. Lad os fx antage at vi har den følgende opgave:

En kasserolle med vand stilles på en tændt kogeplade. Med et termometer måler vi vandets starttemperatur til at være $20°\mathrm{C}$*. Derefter tager vi temperaturen hvert halve minut og får de følgende resultater:*

Tid, minutter (x)	0	1	2	3	4
Temperatur, °C (y)	20	26	34	44	58

Det skal nu undersøges om temperaturen tilnærmelsesvist vokser eksponentielt.
Vi ved at begyndelsesværdien er 20*, så en eventuel forskrift er på formen:*

$$y = 20 \cdot a^x$$

Først divideres der med 20 *i datasættet:*

x	0	1	2	3	4
$y/20$	1	1,3	1,7	2,2	2,9

Herefter tages den naturlige logaritme af de nye y*-værdier*

x	0	1	2	3	4
$ln(y/20)$	0	0,26	0,53	0,79	1,06

Forskriften er nu på formen:

$$Y = Ax,$$

for $Y = ln\left(\frac{y}{20}\right)$ *og* $A = ln(a)$.

Vi ved at punktet $(0{,}0)$ *ligger på grafen, uanset hvad* A *er, så det ignorerer vi.*
Vi kigger nu på punktet $(1; 0{,}26)$*. Punktets* y*-værdi er altså* $0{,}26$*. Linjens* y*-værdi er* $A \cdot 1 = A$*.*

Vi vil måle den lodrette afstand mellem punktet og linjen. Vi tager kvadratet af afstanden så vi altså får et positivt tal, uanset om punktet ligger over eller under linjen:

$$(Ax - y)^2 = (A \cdot 1 - 0{,}26)^2 = A^2 - 0{,}52A + 0{,}0676$$

Denne størrelse skal gøre så lille som muligt. Samtidig skal afstandene fra linjen til de andre punkter også være så lille som muligt. Vi lægger derfor afstandene sammen, og prøver at gøre den samlede afstand så lille som muligt. Hvis vi fx ser på punktet $(2; 0{,}53)$*, så er punktets* y *-værdi* $0{,}53$ *mens linjens* y *-værdi er* $A \cdot 2$*. Den kvadrerede afstand er derfor:*

$$(Ax - y)^2 = (A \cdot 2 - 0{,}53)^2 = 4A^2 - 2{,}12A + 0{,}2809$$

Hvis vi opstiller afstanden $(Ax - y)^2$ *for alle fire punkter og lægger dem sammen får vi en funktion* f *der ser således ud:*

$$f(A) = (A \cdot 1 - 0{,}26)^2 + (A \cdot 2 - 0{,}53)^2 + (A \cdot 3 - 0{,}79)^2 + (A \cdot 4 - 1{,}06)^2$$

$$= 30A^2 - 15{,}86A + 2{,}0962$$

Der er altså tale om et andengradspolynomium. Da den ledende koefficient er 30 *er grafen en "glad parabel" så funktionen har et globalt minimum i sit toppunkt. Diskriminanten er* $(-15{,}86)^2 - 4 \cdot 30 \cdot 2{,}0962 = -0{,}0044$*. Toppunktet bliver da:*

$$T = \left(\frac{-(-15{,}86)}{2 \cdot 30}, \frac{-(-0{,}0044)}{4 \cdot 30}\right) = (0{,}2643; 0{,}00004)$$

Vi har $A \coloneqq 0{,}2643$*. Det betyder så at* $a = e^{0{,}2643} = 1{,}3$
Den samlede forskrift er altså:

$$y = 20 \cdot 1{,}3^x$$

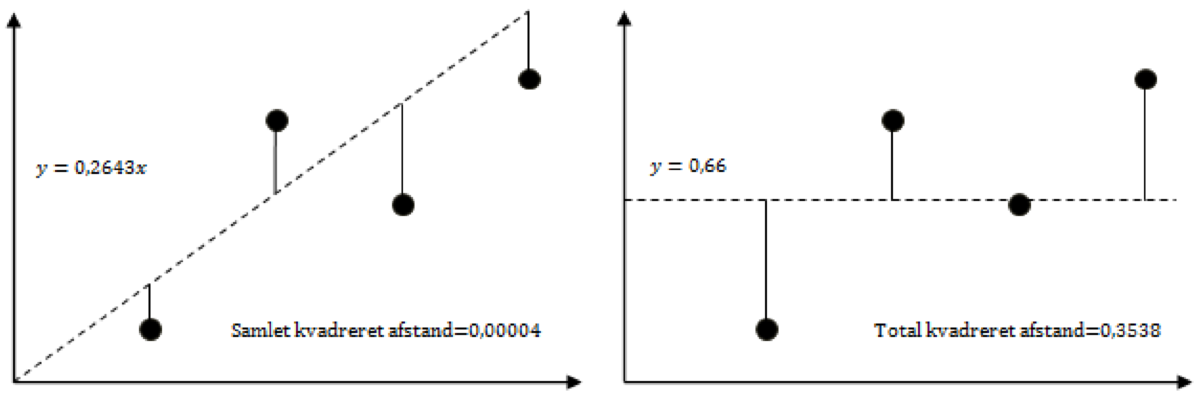
Dvs. vandets temperatur stiger med ca. $30\ \%$ *i minuttet.*
Det skal nu kontrolleres hvor god regressionsligningen passer på data-sættet.
Toppunktets andenværdi $0{,}0004$ *er den minimerede samlede kvadrerede afstand mellem punkter og linje. Vi udregner gennemsnittet af punkternes* y *-værdier:*

$$\bar{y} = \frac{0{,}26 + 0{,}53 + 0{,}79 + 1{,}06}{4} = 0{,}66$$

Vi udregner nu de kvadrerede lodrette afstande fra punkterne til linjen $y = 0{,}66$:

$$(0{,}66 - 0{,}26)^2 + (0{,}66 - 0{,}53)^2 + (0{,}66 - 0{,}79)^2 + (0{,}66 - 1{,}06)^2 = 0{,}3538$$

Denne afstand markerer en form for "maksimalafstand" mellem punkterne og linjen. Vi kalder dette den totale kvadrerede afstand.



Vi udregner så hvor meget den minimale kvadrerede afstand 0,00004 *fylder i forhold til den gennemsnitlige kvadrerede afstand punkterne indbyrdes. Dette tal kalder vi* forklaringsgraden *og benævner med* r^2*:*

$$r^2 := 1 - \frac{0,00004}{0,3538} = 1 - 0,000113 = 0,9999$$

Jo mindre den samlede kvadrerede afstand er i forhold til den totale, jo tættere vil forklaringsgraden ligge på 1 *(da brøken så bliver meget lille). I dette tilfælde ligger den meget tæt på, så der er tale om en rigtig god tilpasning.*

Teori

Teorien bygger på Wikipedia-artiklerne *Least Squares* (2010) og *Coefficient of Determination* (2010). Der startes med et datasæt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Funktionen $y = b \cdot a^x$ skal tilpasses sådan at de kvadrerede lodrette afstande fra punkterne til grafen er mindst mulige. Da b forudsættes kendt, kan vi omskrive til $\frac{y}{b} = a^x$. Det betyder så at $\ln\left(\frac{y}{b}\right) = x \cdot \ln(a)$. Ved at bruge omskrivningerne $\tilde{y} = \ln\left(\frac{y}{b}\right)$ og $A = \ln(a)$ fås altså udtrykket:

$$\tilde{y} = A \cdot x$$

Datasættet skal altså tilpasses sådan at punkterne (x_i, y_i) omskrives til $(x_i, \widetilde{y_i})$ ved at bruge $\widetilde{y_i} = \ln(y_i) - \ln(b)$, $n = 1,2, \dots, n$. Herefter skal det undersøges om de to variable tilnærmelsesvist er ligefremt proportionale.

Der defineres en funktion SS_{err}, kaldet *kvadratrestsummen*. Den måler summen af de kvadrerede lodrette afstande mellem datasættets y-værdi $\widetilde{y_i}$ og regressionlinjens y-værdi $f(x_i) = A \cdot x_i$:

$$SS_{err}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot x_i - \widetilde{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(A^2 \cdot x_i^2 + \widetilde{y_i}^2 - 2A \cdot x_i \cdot \widetilde{y_i}\right)$$

$$= A^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2A \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2$$

SS_{err} er naturligvis et andengradspolynomium med A som indgående variabel. Da $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ har funktionen et globalt minimum i toppunktet:

$$\bar{A} = \frac{-(-2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i})}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Hermed sættes $\tilde{y} := \bar{A} \cdot x$. Regressionsfunktionen er nu givet ved:

$$y = b \cdot e^{\bar{A} \cdot x}$$

Dette kan naturligvis omskrives til:

$$y = b \cdot a^x, \qquad a = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(y_i/b)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

Styrken i denne regression måles på følgende måde:
Den minimerede kvadratrestrum $SS_{err}(\bar{A})$ findes ved først at udregne diskriminanten:

$$d = \left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i}\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i}\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2$$

$$= 4\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2\right)$$

Det betyder at:

$$SS_{err}(\bar{A}) = \frac{-4\left((\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i})^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2\right)}{4\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{y_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widetilde{y_i}\right)^2\right)$$

Der defineres nu også en funktion SS_{tot}. Den kaldes den *totale kvadratsum*, og er defineret ved:

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - \bar{y})^2$$

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i$ er gennemsnittet af datasættets y-værdier.
Nu defineres korrelationskoefficienten r^2 (også kaldet *forklaringsgraden*) på følgende måde:

$$r^2 = 1 - \frac{SS_{err}(\bar{A})}{SS_{tot}}$$

Det er klart, at $SS_{err}(\bar{A})$ går mod nul, jo tættere punkterne ligger på regressionslinjen. Det betyder altså at punkterne ligger tæt på linjen, når r^2 ligger tæt på 1. I tilfældet $r^2 = 1$ er kvadratrestsummen nul, og da det naturligvis er en sum af positive tal, så må alle led være nul. Det betyder så at alle punkterne i datasættet ligger præcis på regressionslinjen.

II+ (Ligningsløsning)
Mit umiddelbare indtryk var, at den eneste opgavetype der var relevant her, var at bestemme en x-værdi udfra en eksponentiel sammenhæng og en given y-værdi. Den respons jeg fik fra lærerne gjorde mig dog opmærksom på, at der manglede en større nuancering. Derfor har jeg opstillet tre typer:

Type 1 – Bestemmelse af y -værdi ud fra x -værdi.
Eleverne skal isolere x i formlen $y = b \cdot a^x$ med givne værdier for a, b og y.

Type 2 – Renteformlen
En opgave af denne type vil man arbejde med formlen:

$$K_n = K_0(1 + r)^n$$

Der er givet en kontekst hvor en startkapital forrentes med en fast procentdel efter en fast tidsperiode, hvorefter en slutsaldo opnås. I opgaven er alle variable givne, på nær én, som skal findes. Hvis dette er slutkapitalen er opgaven i stedet af type **III**.

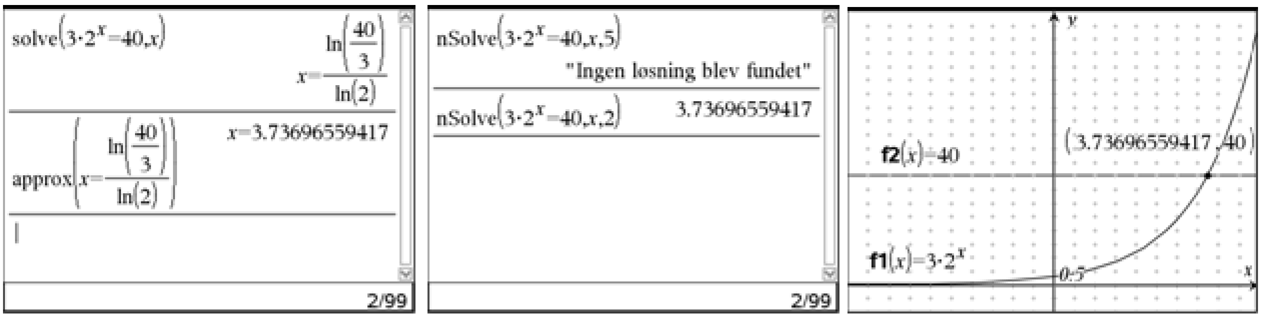
Type 3 – Udregning eller brug af fremskrivningsfaktoren
Disse opgaver involverer alle fremskrivningsfaktoren a på en eller anden måde. Det kan være noget så simpelt som at finde vækstraten ud fra fremskrivningsfaktoren eller omvendt. Her bruges selvfølgelig $a = 1 + r$. Opgaven kan også gå ud på at finde fremskrivningsfaktoren når man kender populationens fordoblingstid (eller halveringstid). Hertil bruges naturligvis formlerne $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$ og $T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}$.

Disse tre typer kan alle løses ved brug af tre teknikker. Der er en *algebraisk teknik*, en *grafisk teknik* og en *instrumenteret teknik*.

Algebraisk teknik
Eleverne isolerer den ubekendte størrelse ved at foretage operationer på ligningen der ikke ændrer på løsningsmængden. Dette gøres indtil den ubekendte størrelse er isoleret, hvorefter opgaven er reduceret til type **III** (teknikken bliver delvist instrumenteret hvis der ønskes et numerisk resultat). I opgaver vil denne teknik skulle bruges når der står ”ved beregning”, ”i hånden” eller ”uden hjælpemidler”.

Grafisk teknik
Ligningen repræsenterer et udsagn $a(x_1, x_2, \dots, x_n) = b(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Hertil hører en punktmængde af n-tupler der gør udsagnet sandt. Når de indgående variabel $x_2, \dots, x_n$ er givne vil punktmængden beskrive en graf i planen. Udsagnet oversættes til en egenskab ved grafen som derefter aflæses. Denne teknik vil altid være mindre præcis end de to andre. Desuden er der tale om et skift af register, hvilket kan gøre det besværligt for eleverne at forstå den når de står over for en opgave der ikke har de samme givne værdier. I det hele taget kan der være store problemer ved denne teknik, hvilket jeg kommer ind på, når jeg beskriver teknologien.

Instrumenteret teknik
Eleverne indtaster ligningen på et CAS-værktøj og bruger herefter en kommando der skriver svaret på skærmen. Dette kan ske algebraisk (fx med **solve**-kommandoen) eller numerisk. Fx kan en lommeregner måske løse ligningen $f(x) = g(x)$ numerisk ved at køre Newton-Raphson algoritmen på $f(x) - g(x)$. Dette kræver naturligvis et gæt fra eleven og en tolerance.



Den instrumenterede teknik kan kombineres med de to andre. Fx kan CAS-værktøjet fungere som en interaktiv ligning, hvor eleven indtaster de operationer der skal udføres, mens lommeregneren foretager udregningerne. Der kan dog her opstå problemer i forbindelse med instrumentationen, da CAS-værktøjet kan have indbyggede ”idiosynkrasier” og skrive ligningen op på en måde som eleverne ikke kan genkende. Fx kan man komme ud for at man bruger titalslogaritmen, men at resultatet på skærmen bruger den naturlige logaritme.

Teknologi

Den algebraiske teknik kan beskrives ved et enkelt ord: *isolering*. Den ubekendte størrelse skal stå alene på den ene side af lighedstegnet og den må ikke stå på den anden side. For at fjerne uønskede ting bruges omvendte operationer. I folkeskolen bruger man typisk *flytte*-metaforen som dog kun er praktisk for addition og subtraktion.

Med eksponentialligninger har man dog det problem at man ikke introducerer en omvendt operation til den generelle eksponentialfunktion. Min læsning af bekendtgørelsen, lærebogsmaterialet og responsen fra lærerne har gjort at jeg kun vil introducere den naturlige logaritmefunktion og titalslogaritmen. Titalslogaritmen er taget med fordi den er nemmere at introducere (hvilket derefter gør den naturlige logaritmefunktion nemmere at introducere). Hermed er det kun to eksponentialfunktioner der har omvendte operationer, hvorefter ligningsløsningen i stedet benytter sig af regnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ efterfulgt af division med $\ln(a)$.

Renteformlen er speciel i dette henseende da teknikken er voldsomt varieret alt efter hvilken variabel der skal isoleres. Dette ses i følgende tabel:

Variabel	Løsningsteknik	Løsning (udregning)
K_n (slutkapital)	(ingen)	$K_n = K_0(1+r)^n$
K_0 (startkapital)	Omvendt operation (division)	$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$
r (vækstrate)	Omvendt operation (division, roduddragning, minus)	$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$
n (antal terminer)	Omvendt operation (division) Regneregel ($\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$)	$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)}$

Det svære kan her ligge i, at eleven skal kunne skelne mellem de forskellige ligningstyper. Fx skal de kunne se at teknikkerne til at løse ligningen $a^x = y$ er vidt forskellige alt efter om det er a eller x der er den ubekendte.

Jeg nævnte tidligere at den grafiske teknik var problematisk. Den er uden tvivl den sværeste for eleverne at lære. Problemerne består af det følgende:

1) *Registerskift*. Eleverne skal omskrive ligningen til to funktioner og en geometrisk egenskab (fx "skæringspunkt").
2) *Passende koordinatsystem*. Eleverne skal tilpasse akserne således, at det geometriske sted kan aflæses. Dette kan være en langsommelig proces, da skæringspunktet selvfølgelig ikke kendes.
3) *Tegning af grafen*. Der skal udregnes støttepunkter, hvilket indebærer endnu en række registerskift (fra forskrift til tabel og videre til graf).
4) *Aflæsning*. Efter alt det foregående arbejde vil resultatet være præget af usikkerhed. Desuden er der også usikkerheden ved, om det er stedet (x-værdien) der skal aflæses, eller hele punktet.

Grunden til at jeg har medtaget teknikken alligevel, er ikke fordi den er "klassisk". Det er fordi at jeg mener at disse problemer kan overkommes ved at kombinere den grafiske teknik med den instrumenterede. Fx har TI-Nspire en kommando der hedder **ZoomFit** der gør det lettere at finde et passende koordinatsystem. Hermed menes at eleven blot skal indtaste **xmin** og **xmax** (definitionsmængden). Lommeregneren bestemmer **ymin** og **ymax** (værdimængden) sådan at alt på graferne indenfor intervallet bliver vist på skærmen.
Den instrumenterede teknik handler blot om indtastning. Typisk vil eleven bruge **solve**-kommandoen. Syntaksen er blot *solve(ligning,variabel)* som jo er ganske enkel. Ligningen kan skrives direkte ind som udsagn, og eleven skal blot specificere hvilken variabel der skal isoleres. Er der flere løsninger, bliver de alle skrevet op.

Teori
Der er ikke nogen egentlig teoretisk del i den instrumenterede teknik. Man bruger **solve**, og kan tjekke efter om resultatet gælder. Hvis man som lærer skal retfærdiggøre teknikken kan det fx ske ved at skitsere den løsningsalgoritme CAS-værktøjet benytter sig af.
Med hensyn til den algebraiske teknik, så skal læreren argumentere for at de operationer der udføres på ligningen godt nok ændrer på ligningens *udsagn*, men de ændrer ikke *løsningsmængden*. Læreren kan derfor argumentere for at operationerne er injektive. Her er det naturligvis logaritmefunktionerne der kommer i fokus. Retfærdiggørelsen af den grafiske teknik handler om registerskiftet. Læreren kan simpelt hen nævne af man definerer en graf ud fra en punktmængde, og punktmængden er bestemt ved ligningens udsagn.

III (Udregning)

Type
Eleverne skal udregne konkrete udtryk. Det kan fx være at udregne funktionsværdier for $f(x) = b \cdot a^x$ eller det kan være udregninger af fordoblings- eller halveringskonstanten ud fra en given fremskrivningsfaktor (eller omvendt).

Teknik
Da bekendtgørelsen understreger at IT-værktøjer skal integreres på lige fod med andre værktøjer i undervisningen kan eleverne løse denne opgave udelukkende ved brug af lommeregner, og jeg vil kun forvente at de kan bruge hovedregning når der er tale om små, naturlige eksponenter og grundtal.

Teknologi
Der er her igen tale om instrumentering. Læreren har fortalt om regnehierarkiet og argumenteret for at potenser er veldefinerede for op til reelle eksponenter.

Teori
Teknikken er fastlagt ved regnehierarkiet, der er bestemt sådan at et udtryk altid kan udregnes på en entydig måde.

IIA (Beskrivelse af funktion)

Type
Givet en funktion $f(x) = b \cdot a^x$, hvor a og b er kendte konstanter, beskriv grafens udseende og kovariationen.

Teknik
Det følgende skal gøres:

1) Bestem grafens skæringspunkt med y-aksen.
2) Bestem funktionens monotoniforhold.
3) Find funktionens vækstrate, og brug den til at beskrive kovariationen.

Teknologi
Teknikken beskrives på følgende måde:

1) Grafen skærer y-aksen i punktet $(0, b)$.
2) Funktionen er strengt stigende hvis $a > 1$ og strengt aftagende hvis $a \in]0,1[$.
3) Vækstraten er $r = (a - 1) \cdot 100$ %. Når x forøges med 1 så forøges y med r %.

Teori
Teknologien retfærdiggøres på følgende måde:

Ad. 1) Dette ses direkte af, at $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$-
Ad. 2) Først antages det at $x_1 < x_2$ og at $a > 1$. Det betyder at $\frac{ba^{x_2}}{ba^{x_1}} > 1$ hvilken igen betyder at $ba^{x_2} > ba^{x_1}$. Derfor er funktionen strengt voksende. Argumentet er analogt for $a \in]0,1[$.
Ad. 3) Vækstraten for et vilkårligt $x \in \mathbb{R}$ er

$$r = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{ba^{x+1} - ba^x}{ba^x} = \frac{ba^x(a-1)}{ba^x} = a - 1$$

Dvs. når x forøges med 1, så ganges y med $a - 1$.

IIB (Skæringspunkt mellem to eksponentialfunktioner)

Type
Find skæringspunktet mellem to eksponentialfunktioner.

Teknik
Der er to teknikker, en *algebraisk* og en *grafisk*.
Den grafiske består af at tegne graferne ind i på enkeltlogaritmisk papir og aflæse deres skæringspunkt. Dette kræver at der udregnes mindst to støttepunkter til hver funktion. Dernæst skal akserne tilpasses til punkterne. Det er dog ikke sikkert at skæringspunktet kan aflæses. Hvis det er tilfældet så skal akserne udvides.
Den algebraiske handler om at bruge substitutionsmetoden på to ligninger med to ubekendte x og y.

Teknologi
Betragt de to eksponentialfunktioner $f_1(x) = b_1 \cdot a_1^x$ og $f_2(x) = b_2 \cdot a_2^x$. De to forskrifter sættes lig hinanden og ligningen løses for x. Herefter indsættes den fundne x-værdi i en af forskrifterne og y-værdien udregnes.

Teori
Ligningssystemet $y = b_1 \cdot a_1^x$ og $y = b_2 \cdot a_2^x$ løses ved at sætte de to højresider lig hinanden. Herefter isoleres x og resultatet bliver:

$$x_0 = \frac{\ln(b_2) - \ln(b_1)}{\ln(a_1) - \ln(a_2)}$$

Derfor er skæringspunktet:

$$(x, y) = \left(x_0, b_1 \cdot a_1^{x_0}\right) = \left(x_0, b_2 \cdot a_2^{x_0}\right)$$

De matematiske codeterminationsniveauer

I afsnittet om de didaktiske codeterminationsniveauer beskrev jeg hvordan de forskellige niveauer gik ind og styrede hinanden. Jeg vil ikke gå i detaljer med de pædagogiske niveauer, men først og fremmest koncentrere mig om de matematiske niveauer, dvs. fra niveauet "Fag" og nedefter. Faget er naturligvis matematik. Domænet er reel analyse.
Hvis man som lærer skal hæve sig over det tematiske niveau så kan det hjælpe at starte med en kort beskrivelse af generel funktionsteori. Hermed menes begreber som forskrift, kovariation, definitionsmængde og værdimængde. Efter en gennemgang af den generelle funktionsteori kan man så arbejde med de følgende grupper:

Funktionstype	**Eksempler**
Vækstype	Lineær, eksponentiel, potens, logaritmisk
Polynomium	Lineær, andengradsfunktioner, etc.
Trigonometrisk	Sinus, cosinus, tangens

Her er vi først og fremmest interesserede i væksttyperne. Opgavetyperne for eksponentialfunktioner kan generaliseres til at gælde for de andre væksttyper på følgende måde:

T – Type	**τ – Teknik**	**θ – Teknologi**	**Θ – Teori**
Beskrivelse af funktion (fortolkning af konstanter i forskriften)	Omskrivning af $f(x+\Delta x)$ eller $f(x \cdot \circledR x)$ fortolkes grafisk	"Når x vokser med … så vokser y med …"	Omskrivninger vises ved at bruge regler for parenteser eller potenser.
Udregning af y når x er givet	Udregning	"indtast på lommeregneren"	Regnehierarki sikrer entydighed af resultat
Udregning af x når y er givet	Isoler den ukendte variabel	"sæt $y = \cdots$ og isoler x"	Regneregler for ligningsløsning (evt. egenskaber for logaritmer)
Bestemmelse af forskrift med to eller flere givne punkter	Formler eller regression	"udregn a og brug den sammen med et punkt til at finde b"	Regler for ligningsløsning og substitutionsmetoden
Tilpasning af forskrift til tre eller flere givne punkter	Regression (mindste kvadraters metode i passende koordinatsystem)	*Grafisk:* "indtegn i passende koordinatsystem…" *Instrumenteret:* "indtast på lommeregneren"	Mindste kvadraters metode (skitseres eventuelt på tavlen)
Bestemmelse af skæringspunkt mellem to funktioner (af samme type)	To ligninger med ubekendte x og y og løses ved at bruge substitutionsmetoden.	"Sæt de to forskrifter lig hinanden og isoler x. Indsæt x i en af forskrifterne og udregn y".	Regler for ligningsløsning og substitutionsmetoden

Der er ikke nogen generel pendant til udregning af halverings- og fordoblingskonstant. Dette skyldes at lineær vækst og potensvækst opfører sig homogent i forhold til kovariation. I lineær vækst vil en absolut tilvækst i x medføre en systematisk absolut tilvækst i y. Dette gælder også for potensvækst, men for relativ tilvækst. Dette er også grunden til at de af nogle kaldes hhv. "plus-plus-vækst" og "gange-gange-vækst". Eksponentiel vækst er unik ved at den er "plus-gange-vækst". Dette skaber en form for skævhed idet den karakteristiske egenskab er på formen:

$$f(x+\Delta x) = f(x) \cdot \circledR f$$

Additiv variation er behagelig at arbejde da man har en naturlig vækstenhed i 1. Man kan beskrive en væksttype med ordene ”hvis man går 1 hen på x-aksen…”. Med multiplikativ variation er tingene mere besværlige, da der her ikke er nogen naturlig vækstenhed. Fordoblings- og halveringskonstanten introduceres dermed for at en konstant absolut tilvækst i x kan beskrives med en konstant relativ tilvækst i y. Logaritmisk vækst har en lignende egenskab, dog med ombytning af $+$ og $\cdot$. Den skal dog ikke behandles som en væksttype i gymnasiet (jf. afsnittet om læreplanen).
Teorierne har jeg delt i de tre følgende ækvivalensklasser:

Algebraisk teori	Sætninger bevises ved at opstille ligninger og omskrive dem
Grafisk teori	Sætninger bevises ved at tegne figurer og henvise til geometriske egenskaber. Heraf kan specielt nævnes, at ensvinklede trekanter er proportionale
Induktiv teori	Sætninger bevises ikke, men det vises ved et par eksempler at de ser ud til at virke. Nogle af disse sætninger kan dog blive bevist algebraisk eller grafisk på et senere tidspunkt i uddannelsen

Af disse tre teorier er det specielt den induktive der bruges i forløbet. Dette er fordi der ikke er så mange overkommelige beviser i 1.g.
Lærerens beskrivelse har jeg opdelt i tre ækvivalensklasser af teknologier:

Algebraisk teknologi	læreren beskriver funktionerne ved at bruge funktionsforskrifter og undersøger dem ved at opstille tilsvarende ligninger
Grafisk teknologi	Læreren beskriver de matematiske sammenhænge ved at tegne grafer i koordinatsystemer.
Kovariationel teknologi	Læreren beskriver de matematiske sammenhænge ved at opstille tabeller og beskrive deres koordination. Han undersøger dem ved at inddrage den algebraiske teknologi og en tilhørende teknik

De beskrevne teknikker har jeg også opdelt i tre ækvivalensklasser:

Algebraisk teknik	Opgaven løses ved at løse ligninger
Instrumenteret teknik	Opgaven løses ved at indtaste på CAS-værktøjet
Grafisk teknik	Opgaven løses ved at tegne grafer og aflæse punkter på dem

Problemformulering

Jeg vil designe et forløb om eksponentialfunktioner. Målet er at introducere de matematiske organisationer jeg har opstillet ud fra min analyse af den didaktiske transposition.
Min problemformulering er den følgende:

Hvilke muligheder kan der som lærer være for at designe et forløb om eksponentiel vækst hvor man kommer over det tematiske determinationsniveau?

Ud fra mine observationer under forløbet ønsker jeg at teste de følgende hypoteser:

1) Den matematiske organisation **I+II+III+** kan etableres hos eleverne.
2) Det er en fordel at lægge vægt på de instrumenterede teknikker, og derved stimulere løftestangsprincippet.
3) Eleverne kan opnå dybere indsigt i de forskellige væksttyper ved primært at arbejde med dem ud fra deres kovariationelle egenskaber.
4) Eksponentiel vækst kan på naturlig vis knyttes sammen med lineær vækst for at introducere annuitetsregning.

Design af forløbet

Jeg har designet forløbet ud fra de følgende faktorer:

1) Der er fem uger til rådighed, svarende til ti blokke af 100 minutter.
2) Der stilles to opgavesæt. Et mindre, normeret til 2,5 elevtimer, og et større, normeret til 5 elevtimer.
3) Eleverne skal have adgang til det lille opgavesæt en uge før det skal afleveres.
4) Eleverne skal have adgang til det store opgavesæt to uger før det skal afleveres.
5) De fem faser fra ATD skal medvirke i designet.
6) Målet er at etablere **I-II-III** før det lille opgavesæt afleveres, og **I+II+III+** før det store opgavesæt afleveres.
7) Forløbet rundes af med en aktivitet om annuitetsregning.

Ud fra dette har jeg udarbejdet en lektionsplan. Forløbet deles op i to dele. Den første del indeholder blok 1-5. Den ser således ud:

Blok	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Didaktisk fase	Det første møde	Udforskning	Udforskning	Teknisk-teoretisk	Teknisk-teoretisk
Etableret MO	**III**	**II-III**	**I-II-III**	**I-II-III**	**I-II+III**
Emner	Rentefremskrivning	Forskrift og graf	Konstruktion af simpel model	Logaritmer	Eksponential-ligninger
Opgaver		Lille opgavesæt offentliggøres		Lille opgavesæt afleveres	Opsamling

I løbet af denne del etableres **I-II-III**. Denne MO danner også grundlag for det lille opgavesæt, som afleveres i blok 4.

I fasen "det første møde" stifter eleverne bekendtskab med diskret rentefremskrivning. Dette er i tråd med progressionen i lærebogen Nielsen og Fogh (2007).

Det lille opgavesæt starter og slutter den udforskende fase. Eleverne lærer at udvide forrentning til kontinuert tid, og møder nye kontekster hvor funktionstypen forekommer (bakterier, ukrudt, etc.).

På dette tidspunkt skal eleverne ud fra en kontekst (**I**) kunne indføre passende betegnelser og opstille modeller, dvs. identificere en uafhængig variabel (typisk kaldet x) og en afhængig variabel (typisk kaldet y) og knytte dem sammen i en eksponentiel sammenhæng (**II**). Dette skal de kunne gøre blot ved et blik på teksten. Dernæst skal de kunne indsætte x-værdier direkte i sammenhængen og udregne de tilhørende y-værdier (**III**). Dette kan typisk være for at svare på et enkelt spørgsmål ("hvad er saldoen efter…?"). Det kan måske være en tabel der skal udfyldes, eller en graf der skal tegnes.

Efter at have rettet det lille opgavesæt identificeres eventuelle fejlagtige MO'er. Dette vil være emnet for den næste blok, hvor der er opsamling.

Den anden halvdel af forløbet ser således ud:

Blok	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Didaktisk fase	Teknisk-teoretisk	Teknisk-teoretisk	Institutionalisering	Institutionalisering	Evaluering
Etableret MO	**I+II+III**	**I+II+III**	**I+II+III+**	**I+II+III+**	**I+II+III+**
Emner	Bestemmelse af forskrift	Regression	Eksempler på MO Modelkritik	Gennemgang af beviser	Aktivitet om opsparing
Opgaver	Stort opgavesæt offentliggøres			Stort opgavesæt afleveres	

Den anden halvdel af forløbet går ud på at etablere mellemleddene mellem **I**, **II** og **III.** I den mest fuldendte form skal eleverne præsenteres for en kontekst (**I**). Eleverne skal optrænes i umiddelbart at kunne indføre passende betegnelser for en uafhængig og afhængig variabel. Det vil dog ikke umiddelbart være klart hvad den præcise sammenhæng mellem dem er. Der vil i dette tilfælde være to muligheder:

1) Der kan identificeres to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ud fra teksten.
2) Der er givet et datasæt, enten i tabelform eller i et diagram.

I begge tilfælde bestemmer eleven en sammenhæng, fx på formen $y = b \cdot a^x$, der er mindre eller mindre eksakt, alt efter typen (**I+II**).
Herefter skal eleven udregne udvalgte variabler i sammenhængen. Dette kan enten ske ved direkte udregning (**II-III**) eller ved først at isolere den og derefter foretage udregningen (**II+III**). Eleven skal herefter tage den matematiske udregning og holde den op mod modellen. De skal med andre ord tage stilling til om resultatet giver mening (**III+**).
Det store opgavesæt offentliggøres med det samme, sådan at eleverne vil have næsten to uger til at det skal afleveres i blok 9. De vil dog først have lært alt det de skal i blok 8.
Den teknisk-teoretiske fase kører fra blok 4 til blok 7. Eleverne introduceres her til de kernefaglige elementer, nemlig: løsning af eksponentialligninger, bestemmelse af forskrift gennem to givne punkter, og eksponentiel regression. I institutionaliseringsfasen afleveres det store opgavesæt. De matematiske organisationer bliver konsolideret i blok 9 hvor beviserne for de følgende påstande gennemgås på tavlen:

a) At eksponentiel vækst er "plus-gange vækst", dvs. at $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$
b) Formlerne for fordoblings- og halveringskonstanten.
c) Formlerne for bestemmelse af forskriften ud fra to givne punkter.
d) At grafen for en eksponentialfunktion bliver en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

I den sidste blok evalueres forløbet. Desuden skal eleverne i timerne arbejde med en aktivitet om opsparing hvor både lineær og eksponentiel regression kommer i spil.

Beskrivelse af det lille opgavesæt
Opgaveteksten er vedlagt som bilag 1.
Den første opgave er blot af typen (**III, III, III, III**). Den anden opgave er af typen (**II-III**).
Der er givet en forskrift, og der skal udregnes støttepunkter. Det er dog ikke nødvendigt at tegne grafen. Den tredje opgave er af typen (**I-II, I-II, I-II, I-II, I-II**). Der er givet en konktekst med en begyndelsesværdi og en vækstrate. Opgaven går altså blot ud på at opstille udtrykket $y = b \cdot a^x$ i fem tilfælde.
Den fjerde opgave er af typen (**I-II, II-III**) og er således en mønsteropgave på dette tidspunkt.
Der er givet en kontekst med et indsat beløb og en årlig rente. Der skal opstilles et eksponentielt udtryk og derefter skal saldoen efter fem år udregnes.
Opgave fem og seks er overgangsopgaver. De ligger ud over **I-II-III** men eleverne er på dette tidspunkt introduceret til enkelt-logaritmisk papir, så der kan bruges grafiske teknikker.
Den femte opgave er af typen (**II-III, II-III, II+III**). Der er givet en eksponentialfunktion g uden kontekst. Der skal løses en eksponentialligning $g(x) = a$. Denne ligning *skal* løses grafisk, hvilket er lettest på enkelt-logaritmisk papir.
Den sjette opgave er af typen (**I-II, II-III, II-III, II+III**). Der er givet en kontekst med et radioaktivt stof. Der er en begyndelsesværdi og en vækstrate. Der skal opstilles en model og halveringstiden skal bestemmes. Det er her op til eleven at vælge teknikken. Det er en del af opgaven at tegne grafen på enkelt-logaritmisk papir, så det ligger lige for at bruge den grafiske teknik.

Beskrivelse af det store opgavesæt
Opgaveteksten er vedlagt som bilag2 . Sættet består af 8 opgaver. Den første er af typen (**IIA, IIA, IIA**). Der er givet tre funktioner og eleverne skal bestemme begyndelsesværdi, vækstrate og fordoblings- eller halveringskonstant. Dette er for at undersøge om der er sket en udvikling med deres forståelse af vækstraten, i forhold til den lille opgave. Dette er også tilfældet med opgave 2, 3 og 4. Opgave 5 er af typen (**I+II, I+II, I+II**). De skal bestemme forskriften for en eksponentialfunktion gennem tre par af givne punkter.
Opgave 6 er af typen (**IIB**). To givne eksponentialfunktioner skal tegnes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Derefter skal skæringspunktet findes. Da teknikken ikke er nævnt er både den grafiske og den instrumenterede i spil. Dog vil den grafiske være ligetil, da graferne skal tegnes.
Opgave 7 og opgave 8 repræsenterer de to eksemplariske opgaver i forløbet. I opgave 7 er der et datasæt med abstrakte variable x og y, skal eleverne først argumentere for at der *ikke* er en tilnærmelsesvist lineær mellem x og y. Dernæst skal de argumentere for at der er en tilnærmelsesvist eksponentiel sammenhæng mellem x og y. Dernæst skal der udregnes en funktionsværdi (**II-III**) og der skal løses en eksponentialligning (**II+III**).
Opgave 8 indeholder også et datasæt, men her er der en kontekst, nemlig målinger af bakterier på en daglig basis. Der skal argumenteres for, at antallet af bakterier

tilnærmelsesvist har udviklet sig eksponentielt. Dernæst skal det undersøges hvornår der, ifølge modellen , vil være en million bakterier (I+II+III+). Til sidst skal eleverne udregne hvor mange bakterier der vil være efter tre uger, ifølge modellen (I+II-III+).

Beskrivelse af afsluttende aktivitet
Forløbet sluttes af med en skriftlig opgave, som skal danne grundlag for en studie- og forskningsaktivitet senere på året. Denne aktivitet handler om at eleverne ud fra nogle kontoudtog skal opstille en passende model. De to opgavesæt er vedlagt som bilag 3 og 4. Aktiviteten har de følgende funktioner:

1) Den skal skabe sammenhæng mellem lineær og eksponentiel vækst.
2) Den skal få eleverne til at forholde sig kritisk til den matematiske model.
3) Den skal introducere begrebet annuitet som en kombination af de to væksttyper.

Der er altså tale om en introduktion til den SFA der afslutter 1.g og det SFF jeg har opstillet i teoriafsnittet.
Den korrekte måde vil formentlig ligge over elevernes niveau på nuværende tidspunkt. Den bearbejdes senere i 1.g, i forløbet om annuitetsregning. Teorien er som følger: Vi bruger de første tre punkter i datasættet:

Måned	0	1	2
Saldo, kr.	S_0	S_1	S_2

Der er to variabler i spil når den uafhængige variabel forøges. Der er renten r og ydelsen y. Der står intet i opgaveteksten om hvad der kommer først, så man prøver begge dele, og ser hvilken model der passer med de givne data:

$$\begin{array}{l|l}
\text{Måned} & 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \\
\hline
\text{Saldo, kr.} & S_0 \xrightarrow[+y]{+r\,\%} S_1 \xrightarrow[+y]{+r\,\%} S_2
\end{array}$$

Ud fra dette kan ydelsen og renten bestemmes ved at løse ligningssystemet:

$$S_0 \cdot a + y = S_1 \quad \text{og} \quad S_1 \cdot a + y = S_2 \quad \left(a = 1 + \frac{r}{100}\right)$$

Løsningen er:

$$(a, y) = \left(\frac{S_2 - S_1}{S_1 - S_0}, \frac{S_1^2 - S_0 \cdot S_2}{S_1 - S_0}\right)$$

Der kan nu opstilles en rekursiv følge:

$$S_n = S_{n-1} \cdot a + y \quad (n = 1,2,3 \dots)$$

Startsaldoen er selvfølgelig S_0. Ved at udregne S_2, S_3 og S_4 gættes det at:

$$S_n = S_0 \cdot a^n + y(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

Dette vises ved induktion. Desuden vises det også ved induktion at:

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Derfor kan formlen nu omskrives til:

$$S_n = S_0 \cdot a^n + y \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} = S_0 \cdot (1 + r)^n + y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Denne formel er ganske vist en udvidelse af den normale opsparingsformel, hvor der ikke er nogen startsaldo S_0. Den ovennævnte måde at opstille formlen vil jeg kalde den *kovariationelle teori*. En anden metode er at gøre følgende: Til at begynde med er der ikke nogen startsaldo. De n ydelser på y kroner bliver hver især forrentet hhv. $n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ gange, så med en startsaldo på 0 bliver slutsaldoen det følgende:

$$S_n = y \cdot a^{n-1} + y \cdot a^{n-2} + \dots + y \cdot a + y \tag{1}$$

Herefter ganges (1) med a:

$$a \cdot S_n = y \cdot a^n + y \cdot a^{n-1} + \dots + y \cdot a^2 + y \cdot a \tag{2}$$

Ved at trække (2) fra (1) og benytte at $a = 1 + r$ fås:

$$S_n + r \cdot S_n - S_n = y \cdot a^n - y$$

Hvilket omskrives til:

$$S_n = y \frac{a^n - 1}{r} = y \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Man kan nu eventuelt indsætte en startsaldo S_0 og argumentere at denne forrentes n gange. Det betyder så at den samlede formel bliver:

$$S_n = S_0 (1 + r)^n + y \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Denne fremgangsmåde vil jeg kalde den *algebraiske teori*.
Af disse to teorier er det typisk den algebraiske der bruges i lærebøgerne. Det matematiske indhold er ganske enkelt. Der er tale om løsning af lineære ligninger og reducering af lineære udtryk.
Både den kovariationelle og algebraiske teori er gode kandidater til den fremgangsmetode eleverne kan vælge. De vil dog formentlig gøre det ud fra de konkrete variable, og opstille en lokal model.
Som introduktion til denne aktivitet vil jeg indsætte en mindre aktivitet i forløbet om eksponentialfunktioner. Der er givet en kontekst som bevidst er meget løst beskrevet:

En kvinde har en opsparingskonto. Hun indsætter et fast beløb, samtidig med at kontoen trækker renter.

Herefter er der en tabel med saldoen på hendes konto de første syv måneder. Opgaven går ud på at opstille en model der kan udregne saldoen efter et vilkårligt antal måneder.
På dette tidspunkt er de dog kun blevet introduceret til lineær vækst og, i forbindelse med det nærliggende forløb, eksponentiel vækst. Det er derfor naturligt at de vil bruge disse metoder.
Hvis vi ser på formlen for saldoen S_n, så ser vi at man under visse betingelser kan bruge lineær eller eksponentiel regression. Først ser vi at:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{(1+r)^n - 1}{r} = n$$

Det betyder at:

$$\lim_{r \to 0^+} S_n = S_0 + y \cdot n$$

Med andre ord vil en lav rente gøre datasættet tilnærmelsesvist lineært.
Endnu nemmere er det at se, at:

$$\lim_{y \to 0^+} S_n = S_0 \cdot (1+r)^n$$

Dette betyder at en lav ydelse gør datasættet tilnærmelsesvist eksponentielt.

Observationer under forløbet

I dette afsnit vil jeg beskrive det forløb om eksponentiel vækst som jeg gennemførte i foråret 2010. Først vil jeg kort beskrive sammensætningen af klassen og deres niveau. Jeg beskriver derefter den relevante matematik de har gennemgået før forløbet. Herefter kommer de tanker jeg har gjort mig om forløbets struktur og til sidst en konkret progressionsmodel.

Beskrivelse af klassen

Der er 32 elever i 1.s. 17 af dem er drenge og 15 er piger. De er fagligt set meget spredt og der er omtrent lige mange stærke og svage elever fordelt på kønnene. Klassen er meget sammentømret og der er et voldsomt overskud af energi. Dette kan gøre det svært at holde ro i klassen. I stedet for enkelte elever der larmer, er der snarere tale om 90 % af klassen der snakker på tværs af klassen. Denne problematik går igen i alle klassens fag.
Blokkene er typisk konstrueret sådan at jeg opstiller definitioner og gennemgår eksempler på tavlen i den første halvdel (typisk omkring 40 minutter). Ved påstande spørges der ind til hvorfor det gælder (Fx hvis jeg påstår at en funktion er voksende). I anden halvdel af blokken uddeles der opgavesæt, som eleverne regner i grupper, enten i klassen, eller uden for. I slutningen af timen afleveres opgaverne.
Klassens officielle CAS-værktøj er TI-Nspire. To elever bruger i stedet TI-89. Et par elever bruger TI-30 Multiview (den officielle lommeregner på Matematik C) mens to elever overhovedet ikke har nogen lommeregner. Min undervisning har dog taget udgangspunkt i at de har TI-Nspire, og de instrumenterede teknikker er blevet gennemgået ud fra det.

Resultater af den lille opgave

Ud fra elevernes afleveringer har jeg valgt at udkrystallisere nogle *fejltyper*. Disse er teknikker der enten er fejlagtige eller uhensigtsmæssige. Jeg har grupperet fejltyperne på følgende måde:

$\boldsymbol{f_1}$: udregningsfejl

Der er her tale om indtastningsfejl på lommeregneren, dvs. den relevante MO er **III**. Dette har vist sig kun at være et problem for de elever der ikke har et CAS-værktøj. Dette er måske fordi at TI-Nspire har interaktiv indtastning der gør usynlige parenteser unødvendige, fx i brøker. En typisk fejl er også afrunding i mellemregninger, fx:

$$y = 43 \cdot 0{,}85^6 = 43 \cdot 0{,}38 = 16{,}34$$

Her er det rigtige svar selvfølgelig 16,22.

f_2: ombytning af x og y

Denne fejl bunder i en misforståelse af symbolsproget for funktioner. Eleverne har nemt ved at forstå funktioner på formen $y = 24 \cdot 1{,}08^x$, men nogle af dem har en del problemer hvis der i stedet står $f(x) = 24 \cdot 1{,}08^x$.

Jeg har fortalt eleverne, at hvis der i en opgave er en funktionsforskrift (enten givet, eller en de selv skal finde) så er der stor sandsynlighed for at der vil være en opgave hvor y skal udregnes ud fra x (”sæt ind på x’s plads”) og en opgave hvor x skal findes ud fra y (”sæt lig med y og løs ligningen”). Eleverne skal ud fra teksten kunne identificere opgavetypen. Den relevante MO er enten **II-III** eller **II+III**.

f_3: fejlagtig brug af logaritmisk akse

Den typiske fejl var her, at eleverne indrettede dekaderne forkert. Det var fx $0 - 1 - 10 - 100$ eller $100 - 101 - 102$.

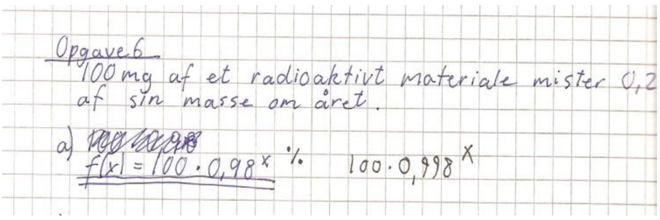
f_4: Fejl ved omregning fra vækstrate til fremskrivningsfaktor.

Dette var den hyppigst forekommende fejl.

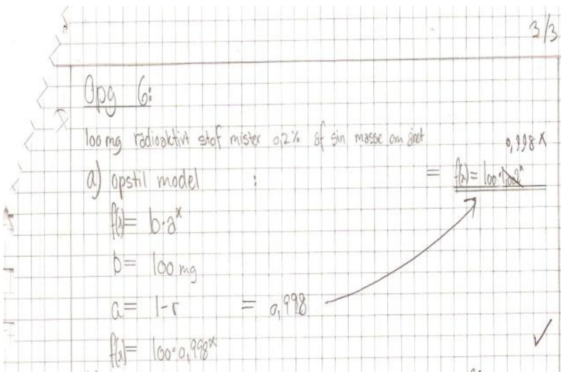
Hvis vækstraten er et helt tal mellem 0 % og 100 % er der næsten ingen problemer. Stort set alle elever kan finde den rigtige fremskrivningsfaktor. Men der opstod problemer i de følgende tilfælde:

Vækstraten har decimaler: Eleverne havde en tendens til at glemme at kommaet skulle rykkes to gange, når procenttallet skulle skrives som decimaltal. I opgaven blev 1000 kroner forrentet 0,5 % per år. Der var da en del elever der skrev at sammenhængen var $y = 1000 \cdot 1{,}05^x$, i stedet for $y = 1000 \cdot 1{,}005^x$.

Vækstraten er negativ: Eleverne havde en tendens til at glemme vækstratens fortegn. I opgaven var der fx en vækstrate på -3 %. Mange elever skrev da fremskrivningsfaktoren som 1,03 eller $-1{,}03$ i stedet for det korrekte 0,97.



Den sidste opgave var især problematisk for eleverne. Der var som sagt her tale om 100 milligram et ratioaktivt materiale der mistede 0,2 % af sin masse om året. Vækstraten var altså et negativt decimaltal. Der stod desuden ikke noget minus i teksten, og det var overraskende mange elever der overså ordet ”mistede” i teksten og blot skrev $100 \cdot 1{,}002^x$ eller $100 \cdot 1{,}02^x$ (dobbeltfejl).



Blandt dem der havde fortegnet med, var der så også nogle der lavede decimalfejlen, og skrev $100 \cdot 0{,}98^x$ i stedet for det korrekte $100 \cdot 0{,}998^x$.
Der var også en enkelt elev der byttede om på fremskrivning og tilbageskrivning. Han mente at sammenhængen var på formen:

$$y = \frac{100}{1{,}002^x}$$

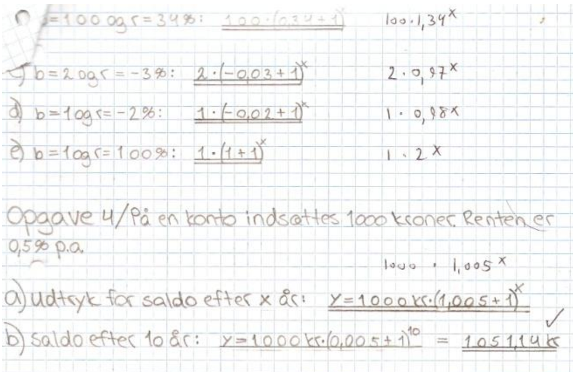
Han mente altså at der er ækvivalens mellem at fjerne 0,2 % og at dividere med 1,002.
Dette er en metodefejl, men den er numerisk set meget lille, da:

$$y = \frac{100}{1{,}002^x} = 100 \cdot \frac{1}{1{,}002^x} = 100 \cdot \left(\frac{1}{1{,}002}\right)^x = 100 \cdot 0{,}9980004^x$$

Det blev forklaret for eleven, at der er tale om en fejl. Den er svær at se her, da vækstraten ligger tæt på nul.

Vækstraten er større end 100 %: Enkelte elever havde svært ved at forstå at fx $y = 4^x$ havde vækstraten 300 %. Det bundede i, at de hele tiden skulle huske at man startede med 100 % hvorefter vækstraten blev lagt til eller trukket fra.

En sidste afart af denne fejltype var elever der blot skrev fremskrivningsfaktoren op på formen $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$. Hvis fx vækstraten var -2 % så skrev de virkelig blot $\left(1 + \frac{-2}{100}\right)$ eller $(1 + -0{,}02)$. Dette er egentlig ikke en fejl, men det demonstrerer en algebraisk usikkerhed hos eleven. En elev skulle senere i opgaven finde forskriften for eksponentialfunktionen med begyndelsesværdi 1 og vækstrate 100 %. Hendes svar var: $y = 1 \cdot (1 + 1)^x$ Her må det forventes at hun kan se at dette kan skrives som $y = 2^x$.

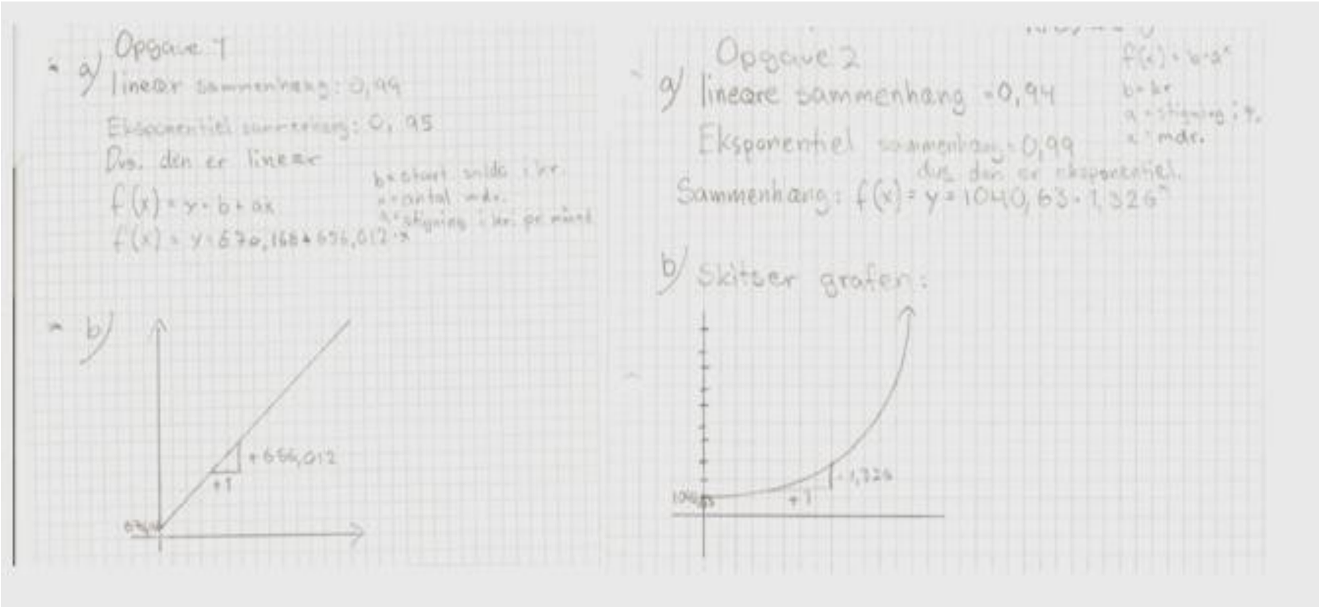


Indsatsområder i opsamlingsblokkene:
Ud fra de beskrevne fejltyper har jeg bestemt mig for at sætte fokus på det følgende:

1) Forholdet mellem vækstrate og fremskrivningsfaktor skal gentages, og eventuelt omformuleres.
2) Opgavetyper som ”find y ud fra x” og ”find x ud fra y” skal gøres mere eksplicitte og symbolet $f(x)$ skal præciseres.

Indgangsvinkel til modelbygningen

Målet med opgaven var at eleverne skulle forsøge at beskrive et datasæt ud fra de metoder de allerede kendte til. Det var overraskende at stort set alle eleverne kun brugte én slags regression i opgaven. Når de havde fundet den brugbare model i opgave 1 undersøgte de ikke om der var andre muligheder i opgave 2 (hvilket der var, på grund af opgavesættets design). Der var faktisk kun en enkelt elev der forsøgte sig med flere modeller, hvilket ses på følgende figur:



Eleven udregnede forklaringsgrader for både lineær og eksponentiel regression i begge opgaver.
I opgave 2 skulle eleverne forsøge at forudsige størrelsen på en børneopsparing på barnets 18 års fødselsdag, uden at kende til ydelser og rente. I det ene opgavesæt passede en lineær model bedst, og det opsparede beløb kom til at ligge på godt 140.000 kroner. Dette virker højt, men er realistisk hvis forældrene betaler en månedlig ydelse på omkring 600 kroner.
I det andet opgavesæt passede en eksponentiel model bedst, hvilket gav et opsparet beløb på godt $7 \cdot 10^{25}$ kroner. Det positive er her, at eleverne med det samme sagde at det ikke var realistisk. Dernæst spurgte jeg dem om hvad man kunne konkludere ud fra det. Enkelte svarede lidt usikkert at modellen var god i datasættet men at den måske hurtigt blev dårlig når man gik frem i tiden.
Det er overraskende hvor få elever der gjorde brug af deres CAS-værktøj. Selvom de flere gange blev gjort opmærksomme på at de kunne gøre, og at det ville spare tid. De fagligt stærke sagde (dog med andre ord) at de ikke brød sig om *blackbox*-elementet i den instrumenterede teknik og foretrak den grafiske med millimeterpapir og enkeltlogaritmisk papir (for hhv. lineær og eksponentiel regression). Det interessante er dog at de heller ikke var så interesseret i indtegningen af punkterne, der hos mange var direkte sjusket. Det var det algebraiske i opgaven der virkede tiltrækkende for eleverne. Flere elever sagde direkte at de

mente at lommeregneren var ulogisk bygget op, og at de foretrak at bruge den udelukkende til type **III** opgaver, dvs. kun til direkte udregning.
En anden positiv ting var at der fra starten var nogle elever der undrede sig over at grafernes værdier ikke stemte overens med datasættet. De pågældende elever havde altså luret at der var forskel på et datasæt hvor usikkerhed var ok (fx målinger) og et hvor det ikke var, som i dette tilfælde. De var således på forkant med den aktivitet om opsparing jeg senere på året vil bruge til at opstarte annuitetsregningen med.

Resultater af den store opgave

Eleverne fik generelt høje karakterer for deres besvarelser af den store opgave. Der er mange elever der har fået 10 eller 12 (hvilket igen efter min mening er sket med et minimum af afskrivning). Der er dog også et par stykker som er dumpet, for de fleste er det fordi at der mangler for mange opgaver i besvarelsen.

Regression

Af speciel interesse var elevernes indgangsvinkel til regression. Jeg vil ikke klassificere dette som en egentlig fejltype, men det viste sig at mange elever brugte teknikker der enten var forkerte, eller uhensigtsmæssige og potentielt forkerte.
Som eksempel kan nævnes en elev, der først havde udregnet forklaringsgraden på sit CAS-værktøj, hvilket betyder at hun også har bestemt forskriften, da denne information står på den samme skærm som forklaringsgraden (men måske har hun ikke vidst dette).
Overraskende nok insisterede hun på at bruge den algebraiske teknik til at finde forskriften på i stedet for. Hun valgte de to yderpunkter (1,25) og (10,7604).
Problemet ved at eleven bruger denne metode er at hun misforstår den matematiske organisation.

I et system måles antallet af bakterier hver dag.

Jeg vil argumentere for at antallet af bakterier har vokset ekspotentiel. Jeg vil gøre som jeg har gjort i ovenstående opgave. Jeg har lavet en statistisk beregning af den ekspotentielle regression. Forklaringsgraden = 0,989. Den er over 0,95 og tæt på 0,99 og derfor er den tilnærmelsesvis ekspotentiel voksende. ✓

Opstil en passende model. Forskriften kan både findes ved hjælp af TI-Nspire og udregnes selv. Jeg vil selv udregne den, derfor kan resultaterne godt vige lidt fra dem fra lommeregneren. For at opstille en forskrift bestemmer vi først a:

$10-1\sqrt{7604/25}$ = 1,887

Derefter bestemmer vi b:

$\frac{25}{1{,}887\text{^}1}$ = 13,248

Derfor ser forskriften således ud:
$F(x) = 13{,}248 * 1{,}887^x$
x = antal dage
y = antal bakterier

Godt!

Hun løser en opgave af typen **I+II** ved at blande den instrumenterede og den grafiske teknik sammen. Men hun bruger den grafiske teknik som om den er algebraisk. I stedet for at tegne datasættet ind på enkelt-logaritmisk papir, tegne linjen og aflæse to punkter på den, bruger hun blot det første og sidste punkt i datasættet. Hun får et acceptabelt resultat, men hun tager ikke højde for at punkterne kunne have været *skæve*. Denne fejltype beskrev jeg i afsnittet hvor jeg gennemgik de matematiske organisationer.

En af eleverne havde en interessant indgangsvinkel til opgave 7. Han skulle argumentere for at datasættet ikke var tilnærmelsesvist lineært fordelt, men at det til gengæld var tilnærmelsesvist eksponentielt fordelt. Han forsøgte at eksperimentere med en algebraisk teknik. Hans ide var at finde hhv. hældning og fremskrivningsfaktor mellem de to første punkter og de to sidste punkter.

Opgave 7
Betragt følgende datasæt.

x	12	13	17	19	25	31
f(x)	0,0049	0,0036	0,0029	0,0022	0,0013	0,0005

a) Argumenter for at f ikke er en tilnærmelsesvis lineær funktion.

Hvis f skulle være tilnærmelsevis linieær, bør hældningen a være relativ ens.
da a = y_2 - y_1 / x_2 - x_1 være ens ved forskellige punkter, derfor
så (0,0036 - 0,0049) / (13 - 12) ≈ (0,0005 - 0,0013) / (31 - 25) (✓)
så da -11,9968 ikke er tilnærmelsesvist lig med -24,9995 er f ikke en lineær funktion
Hvad er „tilnærmelsesvist lig"?

b) Argumenter for at f er en tilnærmelsesvis eksponentiel funktion.
Hvis f er eksponentiel bør grundtallet a være tilnærmelsesvist ens.
a = $\sqrt[x2-x1]{y_2/y_1}$ eller y_2=y_1 * a^{x2-x1}
0,0029 = 0,0049 * a^5
a = $^5\sqrt{}$0,0029 / 0,0049 = 0,900410153
0,005 = 0,0013 * a^6
a = $^6\sqrt{}$0,005 / 0,0013 = 0,852782
Kontrol med de 2 yderpukter viser at f er en tilnærmelsevis eksponentiel funktion.
a = $^{19}\sqrt{}$0,0005/0,0049 = 0,886809234

Hans argument var, at hvis nogle punkter $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ligger "tilnærmelsesvist" på en linje, så må der gælde at hældningen mellem et punkt og dets nabopunkt ikke må variere "for meget" i datasættet. Dette kan løst formuleres som:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \approx \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \approx \cdots \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Her skal man naturligvis tage stilling til hvordan relationen ≈ ("tilnærmelsesvist lig med") er defineret. En mulighed er denne:

$$a_1 \approx a_2 \quad \overset{\text{definition}}{\iff} \quad \left|\frac{a_2 - a_1}{a_1}\right| < t$$

Tallet $t \in \,]0,1[$ skal forstås som en fastlagt tolerancetærskel.
Eleven bruger dog kun de to første punkter og de to sidste, dvs. han udregner:

$$a_1 = \frac{0{,}0036 - 0{,}0049}{13 - 12} = -0{,}0013$$

$$a_2 = \frac{0{,}0005 - 0{,}0013}{31 - 25} = -0{,}00013$$

Afvigelsen bliver $\left|\frac{-0,00013+0,0013}{-0,0013}\right| = 0,90$, dvs. 90 %.
Med hensyn til eksponentiel regression undersøger han hvordan fremskrivningsfaktorerne varierer i datasættet. Dette kan man løst formulere som:

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \approx \sqrt[x_3-x_2]{\frac{y_3}{y_2}} \approx \cdots \approx \sqrt[x_n-x_{n-1}]{\frac{y_n}{y_{n-1}}}$$

Igen undersøger dog kun de første og sidste punkter:

$$a_1 = \sqrt[13-12]{\frac{0,0036}{0,0049}} = 0,735 \quad \text{(afrundet)}$$

$$a_2 = \sqrt[31-25]{\frac{0,0005}{0,0013}} = 0,853 \quad \text{(afrundet)}$$

Dette giver en afvigelse på 0,161, dvs. 16,1 %. Den er selvfølgelig mindre end afvigelsen for hældningerne, men i lyset af at Nielsen og Fogh (2007) sætter en tolerancetærskel på 0,95 for forklaringsgraden (svarende til 5 procents afvigelse) så er afvigelsen mellem fremskrivningsfaktorerne også højere end hvad man normalt ville acceptere.
En sidste mulighed kunne være at man betragtede punkterne $(x_i, \log(y_i))$ og undersøgte afvigelserne mellem hældningerne. Men dette fører til en afvigelse på 48,3 %.
Idéen havde selvfølgelig været bedre hvis han havde udregnet den gennemsnitlige hældning/fremskrivningsfaktor og derefter fundet *spredningen*, dvs. den gennemsnitlige kvadrerede afstand fra gennemsnittet. Hermed kunne han faktisk komme ganske nær en forståelse af hvordan forklaringsgraden måler hvor god en regressionsligning er. Eleven forsøger sig med at opstille en praxeologi der ikke er blevet gennemgået til undervisningen, men når aldrig længere end den praktiske blok. Han benytter sig af argumentet ”tilnærmelsesvist lig med” men går ikke i detaljer med hvad det betyder. Desuden er der ikke noget argument for hvorfor han kun betragter hældningerne mellem nabopunkter. Det ville have været stærkere hvis han havde udregnet alle hældningerne, dvs. tallene:

$$a_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \quad i, j = 1,2, \dots, n, \quad i \neq j$$

Herefter kunne han have udregnet gennemsnittet $\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i\neq j} a_{ij}$ og variansen:

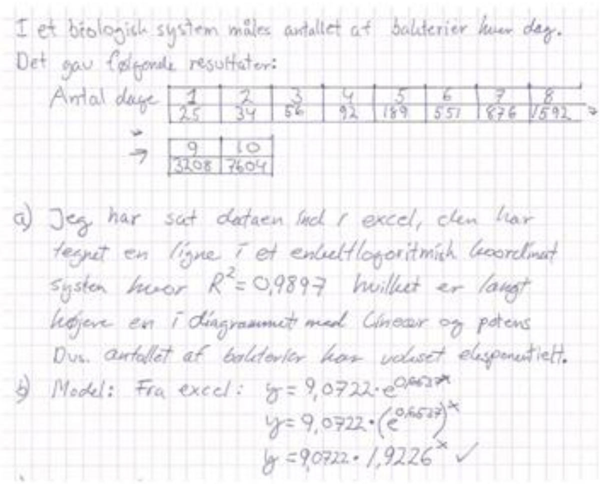
$$V = \sum_{i\neq j} \left(a_{ij} - \bar{a}\right)^2$$

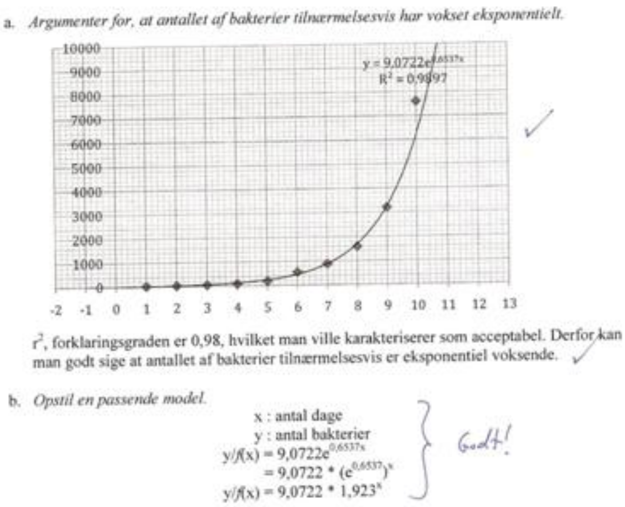
Spredningen er så $\sigma = \sqrt{V}$. Her kunne der så være et argument for at forholdet mellem σ og variationsbredden (afstanden mellem mindste og største hældning) skulle være mindre end en fastlagt tolerancetærskel, evt. 0,05.

For den eksponentielle regression kunne han have erstattet tallet a_{ij} med $a_{ij} = \frac{\ln(y_i) - \ln(y_j)}{x_i - x_j}$ eller $a_{ij} = \sqrt[x_i - x_j]{y_i / y_j}$.

Eleven viser alt i alt en intuitiv forståelse af hvordan man kan undersøge hvor godt en regressionsligning fungerer, men han mangler i høj grad stringens. I timerne har jeg nævnt at forklaringsgraden bruges til dette, men åbenbart har jeg ikke gjort nok for undgå *blackbox*-effekten, hvorefter han har forsøgt at finde en anden metode.

De elever der ikke havde et CAS-værktøj valgte for det meste *ikke* at bruge den grafiske teknik. I stedet valgte de at bruge den instrumenterede teknik ved hjælp af Excel. To eksempler på det kan ses her:





I begge af disse besvarelser har eleverne måttet gøre brug af omskrivningen $y = be^{kx} = b(e^k)^x$.

Det er her værd at bemærke forskellen på de to besvarelser. Den første elev har blot skrevet at hun har tastet ind i Excel og at "den har tegnet en linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem". Hun har dog ikke vedlagt denne graf som bilag. Hun påstår til gengæld at hun også har forsøgt sig med en lineær og potensiel model, med at den eksponentielle giver en "langt højere" forklaringsgrad. Hun blander altså den instrumenterede teknik sammen med den grafiske. Hun nævner til gengæld ikke at forklaringsgraden ligger over den valgte grænse på 0,95. Det gør den anden elev derimod. Hun har indsat det konkrete skærmbillede fra Excel og nævnt at regressionen er "acceptabel" (svarende til at r^2 ligger i intervallet]0,95; 0,99[). Hun har altså klart været i stand til at skelne den instrumenterede teknik fra den grafiske.

Fejltyperne er grupperet på følgende måde:

F_1 – Udregnings- og afrundingsfejl
Der var nogle tilfælde af hvor eleverne skrev det rigtige udtryk op, men skrev det forkerte resultat. Det var altså den matematiske organisation **III** der var problemer med.
Der var elever der udregnede fremskrivningsfaktoren a og derefter afrundede forkert, eller med for få decimaler. Et eksempel er punkterne $(1{,}25)$ og $(10{,}7604)$. Fremskrivningsfaktoren udregnes til at være $a = 1{,}89$. Nogle elever afrundede dette til 1 og udregnede herefter $b = \frac{y}{a^x} = \frac{7604}{1^{10}} = 7604$ hvilket ligger lagt fra det ønskede resultat $b = 13{,}23$. Andre elever afrundede korrekt men brugte formlen $b = \frac{y}{x^a}$ i stedet for $b = \frac{y}{a^x}$. Nogle elever skrev den rigtige formel op men fik et helt forkert resultat. Dette kan skyldes en fejl i den instrumenterede teknik, fx med at de skal udregne $a = \sqrt[x_2-x_1]{y_2/y_1}$ og i stedet kommer til at udregne $(x_2 - x_1) \cdot \sqrt{y_2/y_1}$ eller $x_2 - x_1 \cdot \sqrt{y_2/y_1}$.

F_2 – Usynlig begyndelsesværdi
I den første opgave skulle eleverne bestemme konstanterne a og b i en given forskrift $f(x) = b \cdot a^x$. I eksemplet $f(x) = 6^x$ var der en hel del elever der svarede at b-værdien var 0. Dette kan skyldes at de i arbejdet med lineære funktioner $f(x) = ax + b$ har vænnet sig til at "intet tal" betyder 0, fx $f(x) = ax = ax + 0$. Det har været et tilbagevendende problem at eleverne glemmer usynlige symboler i udtryk, fx:

$$x = 1 \cdot x \qquad x = x + 0 \qquad a = a \cdot x^0 \qquad xy = x \cdot y \qquad \sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$$

F_3 – Omregning fra fremskrivningsfaktor til vækstrate
Der var en klar forbedring af den lille opgave med hensyn til denne type opgave. Den eneste opgave hvor der var en hvis usikkerhed var den førnævnte forskrift $f(x) = 6^x$. Mange elever skrev her at vækstraten var 600 % og ikke 500 %. De havde dog ingen problemer når vækstraten lå i intervallet $]-100\ \%, 100\ \%[$.

Konklusion

Ud fra mine observationer under forløbet er jeg kommet frem til det følgende:

a) Eleverne har vist forståelse for hvordan eksponentiel vækst forholder sig i forhold til lineær vækst og potensvækst. Ud fra deres opgavebesvarelser kan jeg konkludere at de har opnået indsigt i hvordan en vækstype er bestemt ved dens kovariation.
b) Ud fra elevernes besvarelser af det store opgavesæt kan jeg konkludere at den praktiske blok i den matematiske organisation **I+II+III+** er blevet etableret hos de fleste af eleverne, i en form der minder meget om den jeg har gennemgået til timerne.
c) Eleverne har i opgaverne demonstreret at de har tilegnet sig den matematiske organisation **II+III** (ligningsløsning). De har indset potentialet ved at bruge **solve**-funktionen (instrumenteret teknik). Denne metode har de gjort flittig brug af i timerne. I deres skriftlige opgaver er det dog ofte den algebraiske metode der er blevet brugt, og det uden nævneværdige fejl. Heraf slutter jeg også at blackbox-effekten ved den instrumenterede teknik er undgået.

Dette er selvfølgelig positivt. Af negative observationer kan nævnes:

a) De instrumenterede teknikker er etablerede men, udover den ovennævnte, kun som sekundære teknikker. Eleverne har ikke opnået fortrolighed med hvordan de skal bruge deres CAS-værktøj, og derfor har det ikke været muligt at realisere løftestangspotentialet.
b) Det er meget få af eleverne der har et egentligt fyldestgørende billede af teorierne i de matematiske organisationer. Forløbet har ikke haft nok fokus på matematisk stringens.
c) Blackbox-effekten i den matematiske organisation **I+** (eksponentiel regression) er i høj grad til stede. Dette konkluderede jeg ud fra den afsluttende aktivitet om opsparing. Eleverne har ikke opnået den ønskede indsigt i teorien bag de mindste kvadraters metode. Desuden er de ikke i stand til at se om de skal udføre regression ud fra en opgavetekst.

Jeg har altså kun delvist formået at hæve det didaktiske codeterminationsniveau til over det tematiske. Det store problem har været de instrumenterede teknikker. I stedet for at bruge løftestangsprincippet har der nok snarere været tale om en animatoreffekt. Næste gang jeg starter op med en 1.g klasse vil det nok være en god idé at sætte fokus på dette med det samme. Dog er min konklusion også, at den kovariationelle tilgang til væksttyperne har skabt en sammenhæng og således dannet grobund for en homogen matematikforståelse.

Litteraturliste

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. I: C. Winsløw (red.), *Nordic research in Mathematics Education:* Proceedings from NORMA08, 7-16, Rotterdam: Sense Publishers.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Barbe, J., Bosch, M., Espinoxa, L. & Gascon, J. (2005). Didactic restrictions on teacher's practice – the case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascon, J. (2008). Using research and study courses for teaching mathematical modeling at university level. I: D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (red.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2050-2059, Nicosia.

Biehler, R. (1996). Reconstruction of meaning as a Didactical Task: The concept of Function as an Example. I: J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero. (red.), *Meaning in Mathematics Education*, 61-81, New York: Springer.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascon, J. (2006). 'Science or magic?' The use of models and theories in didactics of mathematics. I: M. Bosch (red.), *European Research in Mathematics Education IV*, Proceedings of CERME 4, 1254-1263. Barcelona: Raimond Llull Universitet.

Bosch, M. & Gascon, J. (2006). *Twenty-Five years of the Didactic Transposition*, ICBM bulletin (58). Lokaliseret den 25. marts 2010 på http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Characterizations of the exponential function. Lokaliseret 25. marts, 2010, på: http://en.wikipedia.org/wiki/Characterizations_of_the_exponential_function

Coefficient of Determination. Lokaliseret 25. marts, 2010, på http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135-164.

Garcia, J. & Higueras, L. (2005). *Mathematical praxeologies of increasing complexity : Variation systems modelling in secondary education*. Lokaliseret 31. marts, 2010, på http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG13.pdf

Jessen, B. (1934). Hvordan behandler man bedst potenslæren? I: S. Elkjær & T. Uglebjerg (red.), *Børge Jessen – Matematiker, Pædagog*. 47-61. Skive: Matematikerforeningen, 1995.

Least squares. Lokaliseret 25. marts, 2010, på http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares

Matematik C – Stx. Vejledning til Stx-bekendtgørelsen, juli 2008, bilag 37. Lokaliseret 25. marts, 2010, på http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Vejledninger/stx/080701_matematik_C_stx_vejldning.ashx

Nielsen, K. & Fogh, E. (2007). *Vejen til Matematik AB1*. 1. udgave, 4. oplag. Silkeborg: HAX.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. 3. udgave. McGraw – Hill International editions.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 271-288.

Bilag 1 – Skriftlig opgave 9 (2,5 timer)

Opgave 1

Udregn udtrykket.

a) $y = 120 \cdot 1{,}3^4$
b) $y = 43 \cdot 0{,}85^6$
c) $y = 200 \cdot 1{,}42^{-3}$
d) $y = 13400 \cdot 3^{3/5}$

Opgave 2

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = 110 \cdot 1{,}5^x$$

a) Udfyld den følgende tabel:

0	1	2	3	4	5	6	7

Opgave 3

En størrelse y starter med en begyndelsesværdi b og vokser med r % hver gang størrelsen x vokser med 1. Opstil en ligning der udtrykker sammenhængen mellem x og y i de følgende tilfælde:

a) $b = 3$ og $r = 12$ %
b) $b = 100$ og $r = 34$ %
c) $b = 2$ og $r = -3$ %
d) $b = 1$ og $r = -2$ %
e) $b = 1$ og $r = 100$ %

Opgave 4

På en konto indsættes 1000 kroner. Renten er 0,5 % p.a.

a) Opstil et udtryk der udregner saldoen efter x år.
b) Udregn saldoen efter ti år.

Opgave 5

En funktion g er givet ved forskriften:

$$g(x) = 20 \cdot 1{,}3^x$$

a) Udregn $g(0)$ og $g(5)$
b) Tegn grafen på enkelt-logaritmisk papir.
c) Løs ligningen $g(x) = 50$ grafisk.

Opgave 6

100 mg af et radioaktivt materiale mister 0,2 % af sin masse om året.

a) Opstil en passende model.
b) Hvor mange milligram er der tilbage efter fem år?
c) Tegn grafen i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.
d) Find ud af hvor mange år der går før materialets vægt er hal

Bilag 2 – Skriftlig opgave 10 – Eksponentialfunktioner

Opgave 1
Beskriv funktionen (dvs. find begyndelsesværdi, vækstrate og fordoblings- eller halveringskonstant).

a) $f(x) = 200 \cdot 1{,}012^x$
b) $f(x) = 6^x$
c) $f(x) = 50 \cdot 0{,}74^x$

Opgave 2
En størrelse stiger med 2,4 % ti gange. Hvor mange procent stiger størrelsen med i alt?

Opgave 3
En størrelse falder med 7,3 % om dagen. Hvor lang tid er den om at halvere sig (dvs. hvad er halveringskonstanten?)

Opgave 4
Et størrelse vokser eksponentielt og har en fordoblingskonstant på 5. Hvad er dens vækstrate?

Opgave 5
Find forskriften for eksponentialfunktionen f gennem de to punkter.

a) $(2{,}5)$ og $(6{,}32)$
b) $(3{,}8)$ og $(10{,}9)$
c) $f(10) = 1000$ og $f(30) = 20$

Opgave 6
To eksponentielle funktioner f og g er givet ved forskrifterne:

$$f(x) = 0{,}6 \cdot 1{,}479^x \quad \text{og} \quad g(x) = 25 \cdot 0{,}929^x$$

a) Tegn graferne på et enkeltlogaritmisk papir.
b) Find skæringspunktet mellem de to grafer.

Opgave 7
Betragt det følgende datasæt:

x	12	13	17	19	25	31
$y = f(x)$	0,0049	0,0036	0,0029	0,0022	0,0013	0,0005

a) Argumenter for, at der *ikke* er en tilnærmelsesvis *lineær* sammenhæng f mellem x og y
b) Argumenter for, at der er en tilnærmelsesvis *eksponentiel* sammenhæng f mellem x og y
c) Udregn $f(50)$.
d) Løs ligningen $f(x) = 0{,}000001$.

Opgave 8
I et biologisk system måles antallet af bakterier hver dag. Det gav følgende resultat:

Antal dage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal bakterier	25	34	56	92	189	551	876	1592	3208	7604

a) Argumenter for, at antallet af bakterier tilnærmelsesvist har vokset eksponentielt.
b) Opstil en passende model.
c) Hvornår vil der, ifølge modellen, være en million bakterier?
d) Hvor mange bakterier vil der ud fra modellen være efter tre uger?

Bilag 3 – Opsparing – Opgavesæt 1

Navn ___________________

Klasse________

Opgave 1
En kvinde har en opsparingskonto. Hun indsætter et fast beløb, samtidig med at kontoen trækker renter. Bevægelserne på hendes konto så således ud:

Antal måneder	0	1	2	3	4	5	6	7
Saldo, kr.	1000	1380	1866,4	2488,99	3285,91	4305,96	5611,63	7282,89

a) Indfør passende betegnelser og find en sammenhæng mellem antallet af måneder og saldoen.
b) Skitser grafen.
c) Brug din model til at udregne saldoen efter et år.
d) Find ud af hvor lang tid der går før saldoen kommer op på 25.000 kroner.

Opgave 2
Et par opretter en børneopsparing til deres søn det samme år han bliver født. De indsætter et fast beløb, samtidig med at kontoen trækker renter. Bevægelserne på kontoen så således ud:

Antal måneder	0	1	2	3	4	5	6	7
Saldo, kr.	800	1348	1928,88	2544,61	3197,29	3889,13	4622,47	5399,82

a) Indfør passende betegnelser og find en sammenhæng mellem antallet af måneder og saldoen.
b) Skitser grafen.
c) Hvor meget kan drengen hæve når han bliver 18 år?

Bilag 4 – Opsparing – Opgavesæt 2

Navn ___________________

Klasse_________

Opgave 1

En mand har en opsparingskonto. Han indsætter et fast beløb, samtidig med at kontoen trækker renter. Bevægelserne på hans konto så således ud:

Antal måneder	0	1	2	3	4	5	6	7
Saldo, kr.	1000	2040	3121,6	4246,46	5416,32	6632,98	7898,29	9214,23

a) Indfør passende betegnelser og find en sammenhæng mellem antallet af måneder og saldoen.
b) Skitser grafen.
c) Brug din model til at udregne saldoen efter et år.
d) Find ud af hvor lang tid der går før saldoen kommer op på 25.000 kroner.

Opgave 2

Et par opretter en børneopsparing til deres datter det samme år hun bliver født. De indsætter et fast beløb, samtidig med at kontoen trækker renter.
Bevægelserne på kontoen så således ud:

Antal måneder	0	1	2	3	4	5	6	7
Saldo, kr.	500	665	867,95	1117,58	1424,62	1802,28	2266,81	2838,18

d) Indfør passende betegnelser og find en sammenhæng mellem antallet af måneder og saldoen.
e) Skitser grafen.
f) Hvor meget kan pigen hæve når hun bliver 18 år?

Bilag 5 – Opsummering af de matematiske organisationer (side 1 af 3)

III: Udregning

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Et matematisk udtryk på formen $b \cdot a^x$ skal udregnes, typisk med op til tre decimaler.	*Instrumenteret* Der arbejdes med et CAS-værktøj.	*Algebraisk* Der arbejdes med udtryk.	*Induktiv/algebraisk* CAS-værktøjet er konstrueret til at give rigtige svar. Regnehierarkiet sikrer en entydig udregning, og det udvidede potensbegreb er retfærdiggjort på et intuitivt plan.

II+: Ligningsløsning

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
En ligning (typisk lineær eller eksponentiel) skal løses for en ukendt variabel	*Instrumenteret* Der arbejdes med **solve**-funktionen på et CAS-værktøj	*Algebraisk/grafisk* Der indtastes udtryk og CAS-værktøjet svarer med et udtryk, der evt. kan tilnærmes til to decimaler. Ligningens grafiske betydning skitseres på tavlen	*Induktiv* CAS-værktøjet er konstrueret til at give rigtige svar

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
En ligning (typisk lineær eller eksponentiel) skal løses for en ukendt variabel.	*Algebraisk* Den ukendte variabel isoleres i ligningen ved at bruge omvendte operationer.	*Algebraisk/grafisk* Ligningen skrives op, og trin for trin isoleres variablen. Ligningens grafiske betydning skitseres på tavlen.	*Algebraisk/induktiv* Regneregler for logaritmer bruges med intuitive argumenter for at de holder.

Bilag 5 – Opsummering af de matematiske organisationer (side 2 af 3)

IIA: Beskrivelse af funktion

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Givet forskriften for en eksponentialfunktion med forskrift $f(x) = b \cdot a^x$, analyser dens grafiske egenskaber. (skæringspunkt med y-aksen, monotoniforhold og fordoblings- eller halveringskonstant)	*Algebraisk* Der argumenteres ud fra de givne konstanter a og b.	*Algebraisk/grafisk* Grafen skærer y-aksen i b. Monotoniforholdene er bestemt ved a.	*Algebraisk* Påstandene vises på tavlen med hjælp af ligninger og uligheder.

IIB: Bestemmelse af skæringspunkt mellem to eksponentialfunktioner.

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Skæringspunktet mellem to givne eksponentialfunktioner skal bestemmes.	*Algebraisk* Man bruger substitutionsmetoden på de to ligninger som kan opstilles ud fra forskrifterne.	*Algebraisk* De to forskrifter sættes lig hinanden og x findes. Herefter findes x ved at sætte ind i en af forskrifterne.	*Algebraisk* Der arbejdes med de to forskrifter.

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Skæringspunktet mellem to givne eksponentialfunktioner skal bestemmes.	*Grafisk* Der arbejdes med enkelt-logaritmisk papir.	*Grafisk* Udregn mindst to støttepunkter og tegn graferne. Aflæs punktets x-værdi og y-værdi.	*Grafisk* Dette er trivielt

Bilag 5 – Opsummering af de matematiske organisationer (side 3 af 3)

I+: Bestemmelse af forskrift gennem to givne punkter

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Givet (x_1, y_1) og (x_2, y_2), bestem a og b sådan at $y_1 = ba^{x_1}$ og $y_2 = ba^{x_2}$.	*Algebraisk* Tallene a og b udregnes ved at bruge formlerne $a = \sqrt[x_2 - x_1]{y_2/y_1}$ og $b = y_1 a^{-x_1} = y_2 a^{-x_2}$	*Algebraisk* Udregn først a med to decimaler, og derefter b (også med to decimaler)	*Algebraisk* Der opstilles to ligninger, som løses algebraisk.

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Givet (x_1, y_1) og (x_2, y_2), bestem a og b sådan at $y_1 = ba^{x_1}$ og $y_2 = ba^{x_2}$.	*Algebraisk* Tallene a og b udregnes ved at opstille ligninger ud fra en tabel	*Kovariationel* Udregn Δx og ®y. Bestem a og derefter b	*Algebraisk* Det kan vises at denne teknik giver samme resultat som den ovenstående.

I+: Eksponentiel regression

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Eksponentiel regression på et datasæt.	*Grafisk* Der arbejdes med enkelt-logaritmisk papir.	*Grafisk* Det skal afgøres om punkterne ligger ”pænt” på linje.	*Algebraisk* Det kan vises at eksponentialfunktioner bliver rette linjer i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem.

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Eksponentiel regression på et datasæt.	*Instrumenteret* Der arbejdes på et CAS-værktøj.	*Kovariationel* På skærmen aflæses a og b. Korrelationskoefficienten r^2bruges til at afgøre hvor tæt punkterne ligger på grafen.	*Induktiv* CAS-værktøjet er konstrueret til at give rigtige svar.

Type – T	**Teknik – τ**	**Teknologi – θ**	**Teori – Θ**
Eksponentiel regression på et datasæt.	*Algebraisk/instrumenteret* Der arbejdes med kvadrerede summer og toppunktsformlen, eventuelt med et CAS-værktøj når der skal reduceres udtryk.	*Algebraisk/grafisk* Der opstilles et udtryk som reduceres til et andengradspolynomium. Korrelationskoefficienten r^2bruges til at afgøre hvor tæt punkterne ligger på grafen.	*Algebraisk* Toppunktsformlen bruges, og det vises at der er tale om et globalt minimum.