INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Tosprogede elever og matematik i gymnasiet

-en case-baseret analyse af didaktiske kontrakter

Servet Dönmez

Kandidatspeciale

Maj 2011

IND's studenterserie nr. 21

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
Nr. 18: Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
Nr. 19: Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
Nr. 20: Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
Nr. 21 Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)

Abstract

In this Thesis, it is investigated how the learning of mathematics of the so-called bilingual pupils is taking shape in the secondary school, especially with regard to linguistic and culturally determined challenges related to the mathematical content. The theory of didactical situations, especially the theory of didactical microcontracts are used. It is investigated if bilingual pupils do better than monolingual, and explanations are offered of the differences which are found.

It is asked if there exists a linguistic dimension in mathematics with negative consequences for the bilingual pupils in connection with the didactic contracts and the didactic situations.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Kandidatspeciale

Servet Dönmez

Tosprogede elever og matematik i gymnasiet

-en case-baseret analyse af didaktiske kontrakter

Vejleder: Carl Winsløw

Afleveret den: 05/05/2011

INDHOLD

ABSTRACT

In this Thesis, it is investigated how the learning of mathematics of the so-called bilingual pupils is taking shape in the secondary school, especially with regard to linguistic and culturally determined challenges related to the mathematical content. The theory of didactical situations, especially the theory of didactical microcontracts are used. It is investigated if bilingual pupils do better than monolingual, and explanations are offered of the differences which are found.

It is asked if there exists a linguistic dimension in mathematics with negative consequences for the bilingual pupils in connection with the didactic contracts and the didactic situations.

INDLEDNING

Dette projekt handler om tosprogede gymnasieelever og matematik som fag i gymnasiet. Projektet vil tage udgangspunkt i en case-baseret analyse af didaktiske kontrakter.

En person kan tage ophold i et miljø for at opnå visse varige ændringer i sin adfærd. For eksempel kan han/hun tage et kursus i engelsk for at lære at læse og tale dette sprog. Personen er så elev, mens den, der bibringer eleven den nye viden, er lærer. Teorien om selve adfærdsændringen kaldes matetik, mens didaktik er teorien om hvilke former for adfærd hos læreren, der maksimerer den ønskede effekt hos eleven. Ordet didaktik blev første gang anvendt i 1680, af den polske pædagog Jan Amos Komensky (latiniseret: Comenius).

Et miljø, der er beregnet til at lære noget i, kaldes et didaktisk miljø. Det spil, der er mellem lærer og elev, kaldes et didaktisk spil, og den (implicitte) kontrakt, der er mellem lærer og elev, kaldes en didaktisk kontrakt. En situation, hvor en lærer udfører en handling, der er tænkt at føre til en således ønsket adfærdsændring hos en elev, kaldes en didaktisk situation.

En didaktisk kontrakt er således en aftale, der angår kontrahenternes gensidige adfærd og holdninger, og som i almindelighed træder i kraft mellem de to personer, når den ene bliver den andens lærer. Den er stiltiende og kan fungere hvad enten de aktuelle personer gør sig det klart eller ej. En nødvendig betingelse for at den træder i kraft er, som nævnt, at de to parter formelt træder ind i roller som henholdsvis elev og lærer, men de skal også opleve, at der er et didaktisk spil i gang, og at de har lyst til at træde ind i det.

Efterhånden er der en betydelig andel af tosprogede elever i danske gymnasier. Dette fører nogle spørgsmål med sig, fx om gymnasieverdenen er klar til at håndtere de mulige problemer i undervisningen. I dette projekt vil jeg kigge nærmere på om tosprogede elever har sproglige og kulturelle vanskeligheder i matematikundervisningen.

Matematik er formuleret i sprog, og al undervisning foregår ved hjælp af sprog. Hvis en elev har sproglige vanskeligheder, kan det ventes, at dette medfører faglige og også didaktiske problemer. Det er muligt, at selv mindre og sporadiske mangler i beherskelsen af dansk kan medføre store vanskeligheder ved indlæringen og beherskelsen af matematik.

Tosprogede elever er elever med andet modersmål end dansk. Som regel behersker de dansk næsten på lige fod med deres modersmål. Disse elever er tit belastede af sproglige vanskeligheder i undervisningen på en anden måde end etsprogede elever, fx når der er tale om udtryk der er dannet ud fra dagligsproget. Sådanne udtryk er gerne nemmere for de etsprogede at have med at gøre frem for de tosprogede, da de etsprogede har flere muligheder for at lege med sproget også udenfor skoletiden.

Man siger, at eleverne, for at forstå en tekst, skal forstå 90-95 % af ordene (Gimbel, 1995). Men for en matematisk tekst er tallet snarere 100 %. Er der i en matematisk tekst ord, man ikke forstår, er det meget sandsynligt at det netop er der, (en del af) den nye information ligger. Matematik består blandt andet i at nye begreber defineres ved hjælp af gamle. Her er hvert ord en mursten, der bruges til den videre konstruktion. Alt det foregående skal forstås for at man kan tage det næste skridt.

I dag er det et problem, der er undersøgt i PISA Etnisk 2009 (Egelund, Nielsen og Rangvid, 2009) rapporten, at tosprogede elever er fagligt svage i matematik sammenlignet med etnisk danske elever, selvom de magter sproget næsten på lige fod med etnisk danske elever. Især i forskellige didaktiske situationer opstår problemet. Tosprogede elever har det besværligt med hensyn til at bruge det didaktiske miljø. Det er fx lidt svært at hente hjælp fra lærebogen, når man står over for en særligt vanskelig situation ift. sproget, altså det ikke er nemt at forstå pga. sproget.

PROBLEMFORMULERING

I denne afhandling vil jeg på basis af case-studier undersøge, hvordan tosprogede elevers arbejde med matematik former sig i gymnasiet med særligt henblik på sproglige og kulturbestemte udfordringer i forhold til det matematiske indhold.

Med projektet vil jeg forsøge at opnå viden om hvorvidt der er en sproglig dimension i matematikundervisningen, som giver nogle elever vanskeligheder, især tosprogede elever, ift. det didaktiske miljø. Jeg vil især fokusere på situationer der omfatter didaktiske kontrakter. Så spørgsmålet kan formuleres således: Er der noget der tyder på eksistensen af en sprogfaktor, og, hvis det er tilfældet, hvordan og i hvilket omfang vil den påvirke indlæringen af matematik. Er det en fordel eller ulempe ift. matematikundervisningen at være tosproget? Og hvis det er en ulempe, er det så fagsproget eller dagligsproget der skaber vanskelighederne?

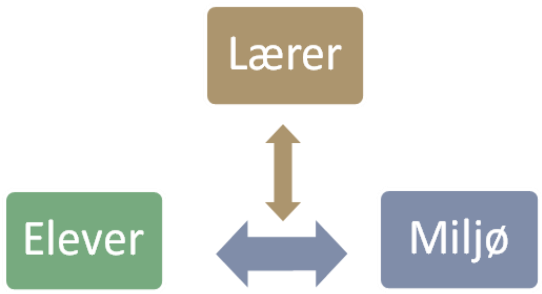
TEORIEN OM DIDAKTISKE SITUATIONER

I dette afsnit vil der blive behandlet en af hoved teorierne til projektet, nemlig teorien om didaktiske situationer. Afsnittet handler om hvad Teorien om didaktiske situationer er, og her under didaktisk spil og didaktisk kontrakt også bliver behandlet.

Teorien om didaktiske situationer, som bliver forkortet til TDS, er et system af begreber som bruges både til design og analyse af matematikundervisning. Teorien er grundlagt af franskmanden Guy Brousseau i 1970'erne, og siden da er den udviklet gennem hans og mange andres arbejde med den. Formålet er bl.a. at personliggøre den officielle viden. Officiel viden er viden fra fx artikler og lærebøger. Den personlige viden er den viden, som eleven opnår ved at arbejde med konkrete situationer. Det er så ikke muligt, at eleven kan personliggøre ny viden, hvis den officielle viden meldeles af læreren uden et forarbejde fra elevens side. Man skal altid huske på at elevens personlige viden er en slags ikke færdigbehandlet officiel viden. Altså har eleven selv, som ovenfor sagt, arbejdet med nogle konkrete situationer og har dermed dannet sig et billede af den officielle viden. Og dette billede er højst sandsynlig et ikke færdigt billede. Disse ”personlige billeder” er med til at gøre, at personlige viden ikke let glemmes af eleven.
TDSs grundbegreber kommer herunder i spil; det er bl.a. det didaktiske miljø, der spiller en stor rolle ved tilegnelsen af ny viden, altså personlig viden.

Det didaktiske spil

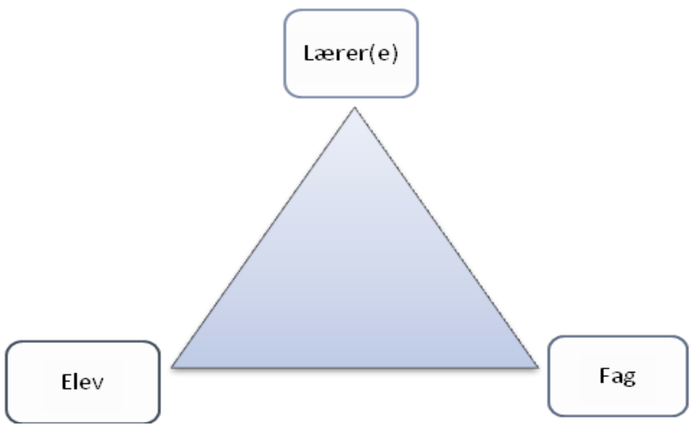
Når eleven skal tilegne sig personlig viden, foregår det bl.a. ved et samspil mellem læreren og det didaktiske miljø. I TDS er det didaktiske miljø et miljø, som eleven benytter sig af ved en adidaktisk situation. Selvom det er nemmest og mest tillokkende for læreren at opskrive den officielle viden på tavlen, er det ikke en givtig måde for elevens indlæring. Spillet foregår mellem læreren, eleven og miljøet. Lærerens opgave i spilet består bl.a. af at re-personliggøre den officielle viden fx ved at regulere spillet mellem elev og miljø. (Winsløw, 2006, s.137). Dette spil kaldes det didaktiske spil.



Figur 1 Det didaktiske "dobbeltspil"

Eleven har pligt til at deltage aktivt i spillet og dermed personliggøre den officielle viden i det af lærerens arrangerede didaktiske miljø og er nødt til at udvikle en vinderstrategi for at vinde spillet, hvilket er også muligt, da der er en lærer, som kan kanalisere eleven bort fra vildspor. Læreren kan også, udover planlægning af det didaktiske miljø, som regel regulere spillet efter behov, da resultatet er velkendt af læreren. Eleverne kan ikke tabe spillet, da der er en lærer, hvilket er en fordel for eleven sammenlignet med en forsker. Dvs. der er tale om en kombination (læreren og eleven) af to "spil", som er illustreret af Figur 1 Det didaktiske "dobbeltspil".

Figur 1 Det didaktiske "dobbeltspil" er en viderebearbejdet version af den didaktiske trekant.



Figur 2 Den didaktiske trekant

Det er ikke altid nok at viden fremlægges og forklares, selv om det (når det er nok) er den mest økonomiske måde at undervise på. Og hvis det er nok, er det oven i købet et relativt enkelt arbejde, læreren skal udføre (en slags gentagelse af hvad han selv har lært). Mange elever har svært ved at tilegne sig matematiske resultater på en brugbar måde, og selv hvis eleven har lært mange matematiske resultater udenad, vil det stadig indebære vanskeligheder at lære nye. Hvis man skal give eleven en mulighed for at tilegne sig et stykke viden på en mere grundlæggende måde, er det ofte nødvendigt, at læreren tilrettelægger udfordrende situationer, der kræver at eleven konstruerer den pågældende viden. Læreren kan gøre det ved at designe en situation under hensyn til, hvad eleven antages allerede at vide. Hvad betyder det så at designe en situation? Det betyder, at eleven skal arbejde målrettet på at løse det matematiske spørgsmål, så derfor skal læreren fx have klargjort specifikke opgaver, der kan muliggøre, at eleven tilegner sig den tilsigtede viden. Et objektivt miljø består af de dele af situationen, som er uafhængige af elev og lærere (dvs. som kan beskrives uden henvisning til specifikke elever og lærere). En sådan situation kan sammenlignes med et spil, som læreren indbyder eleven til at spille, og hvor eleven formulerer strategier (hypoteser), og dernæst afprøver strategierne mhp. at forkaste eller bekræfte dem. Spillet fortsætter i princippet indtil eleverne formulerer den rigtige hypotese. Undertiden skal læreren også gribe ind, hvis eleven ikke selv magter at "vinde" spillet. I andre sammenhænge kan feedback fra miljøet (altså de genstande og udfordringer, spillet rummer) være tilstrækkelige uden indgreb fra lærerens side.

Didaktiske Situationer:

TDS handler således om forskellige undervisningssituationer i matematik. Didaktiske situationer er et samspil mellem elever og læreren, men der er to forudsætninger der skal være opfyldt for at man kan kalde en situation for didaktisk.

- Lærerens hensigt med situationen skal være, at eleverne skal lære noget, men ikke bare "et eller andet"
- Eleverne skal deltage i undervisningen.

Når eleverne selv arbejder med opgaverne, befinder de sig i en adidaktisk situation. I en adidaktisk situation venter læreren og er klar til at regulere spillet efter (elevens) behov.

Devolution

Læreren introducerer opgaven og dens betingelser, og dernæst overgiver han/hun det didaktiske miljø til eleverne (Winsløw 2006, 138). Men det er ikke nok, at læreren blot devaluerer; eleverne skal også sikre sig, at de har forstået problemstillingen. Hvis problemstillingen ikke er forstået af eleverne, vil der ikke opstå en adidaktisk situation, da eleverne fra første minut vil prøve at indhente hjælp fra læreren. Meningen er, at eleven skal hente hjælp fra miljøet, men i dette tilfælde vil der ikke være tale om hjælp, hvis ingen har forstået problemstillingen.

Devolutionssituationen kaldes en didaktisk situation i TDS. Efter at læreren har overgivet det didaktiske miljø, følger der en adidaktisk situation. Der er næsten ingen input fra lærerens side i en adidaktisk situation, men det er stadig læreren, der er ansvarlig for at eleverne påtager sig ansvaret fx for at løse opgaven.

Handlingssituation

Læreren holder sig tilbage, så eleverne effektivt går i gang med at arbejde med opgaverne selv. Eleverne henter selv viden fx fra deres matematikgrundbog for at løse opgaven. Altså får eleven ingen assistance fra læreren, men arbejder i stedet i samspil med det didaktiske miljø. Det kaldes en adidaktisk situation.

Formuleringssituation

Denne situation handler om, at eleverne formulerer deres første hypoteser. De vil ofte være upræcise, og dermed kan læreren forlange en præcisering af hypoteserne. Den personlige viden som de har fået fra en adidaktisk situation, skal gøres til fælles viden i denne fase.
Formuleringssituationen kan enten være didaktisk eller adidaktisk. Hvis læreren vælger at hjælpe den enkelte elev eller gruppe for at præcisere deres hypoteser/personlige viden, vil man befinde sig i en adidaktisk situation, men læreren kan også hjælpe med deres formuleringer ved at trække alles opmærksomhed op på tavlen.

Valideringssituation

Valideringssituationen er en systematisk diskussionsproces. Læreren styrer denne proces, dvs. man er i en didaktisk situation. Ved denne situation validerer man, eller man forkaster de mulige hypoteser. Læreren kan også vælge at devaluere et miljø, således at eleverne selv kan være med til at evaluere fx ved at komme med modeksempler.

Institutionalisering

Her befinder man sig i en didaktisk situation, hvor læreren præsenterer den officielle viden for at præcisere den personlige viden, som eleverne har opnået under valideringssituationen.
Institutionalisering virker som en godkendelsesfase for den fælles viden, som er resulteret af valideringsfasen. Denne fælles viden kan bygges videre på af de efterfølgende didaktiske spil.
Her nedenunder samles alle situationer i en tabel.

	Lærerens rolle	Elevernes rolle	Miljø	Situation
Devolution	Igangsætte Afklare	Modtage og forstå opgave	Etableres	Didaktisk
Handling	Observeres Reflekteres	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskningsfelt	Adidaktisk
Formulering	Organisere Spørge	Formulere Præcisere	Åben diskussion	Adidaktisk el. Didaktisk
Validering	Lytte Evaluere	Argumentere Reflektere	Styret diskussion, Bedømmelse	Normalt Didaktisk
Institutionalisering	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutionel Viden	Didaktisk

Tabel 1 Faser i det didaktiske spil (klasseundervisning) (Winsløw 2006, s.140)

Didaktisk kontrakt

En didaktisk situation inkluderer en adidaktisk situation og en didaktisk kontrakt.

"In TDS, the model of a didactic situation includes an adidactic situation (with an objective milieu) and a didactic contract. The didactic contract is a way of regulating the mutual expectations of the teacher and the students with respect to the mathematical notions at stake. Devolution and institutionalization are two important ways of regulation of the didactic contract." (Hersant og Glorian, 2005, s116)

En didaktisk kontrakt er et hjælpemiddel til at regulere de gensidige forventninger mellem læreren og de studerende med hensyn til beherskelsen af matematiske begreber. Devolution og institutionalisering er to vigtige måder, på hvilke man kan regulere den didaktiske kontrakt i en situation. Eller sagt på en anden måde, den didaktiske kontrakt er en slags stiltiende aftale mellem læreren og eleven, som på et givet tidspunkt bestemmer, hvad der forventes af begge parter. Den ændrer sig hen gennem situationens forskellige faser og indebærer pligter for både læreren og eleven. Eleven skal tage ansvar i adidaktiske faser, groft sagt ved selv at arbejde sig frem til løsningen af en opgave, der kan sammenlignes med det at "forske" i miljøet. Hvis eleven ikke bruger miljøet til at have feedback i eller ikke vil arbejde sig frem til løsningen, vil det selvfølgelig give problemer for gennemførelsen af situationen. Når det er en specifik opgave, læreren har givet, kender han/hun også løsningen på den. Dvs. lærerens pligt i forhold til eleven kan indebære at skjule noget, fordi eleven selv skal afdække det. Læreren kan svigte denne pligt ved mere eller mindre at ”lede” eleven til løsningen. Da eleven også ved at løsningen er kendt hos læreren, kan det lede til uønskede effekter...

Effekter af den didaktiske kontrakt

Der er to sider af den didaktiske kontrakt, lærerens og elevens side. Læreren vil opfylde sin del af kontrakten til enhver tid. Det fremkalder nogle ikke gode effekter. Vi kan herunder nævne de fem mulige effekter (Winsløw, s.148-150).

Topaze-effekten

Effekten opstår typisk, når eleven har prøvet at løse opgaven med en forkert metode. Da læreren stadig vil have eleven med i det didaktisk spil, gives der en masse henvisninger og hints via spørgsmål. Mængden af hints afhænger selvfølgelig af, hvornår eleven kan indse den rigtige

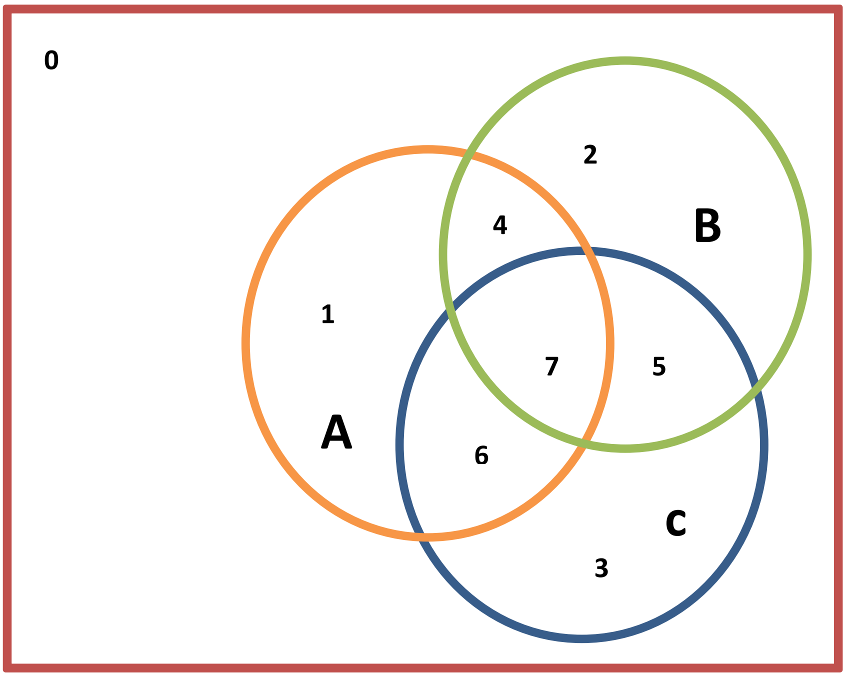
metode. Hvis eleven allerede har ”forsket” opgaven nøje, vil et lille hint sætte eleven på den rigtige kurs. Men her er der også en anden side af sagen, nemlig hvor god læreren er til at skjule de ”indlysende” hints for eleven, altså at holde eleven i spillet men samtidig i ”forsknings”planen, så hintsene ikke medfører dovenskab eller destruerer selve ”forskningen”.
Det er en typisk situation i de adidaktisk situationer. Men det er faktisk ikke kun læreren, der vil beholde eleven i spilet, eleven selv vil også prøve ikke at komme bagud med løsningerne, og ønsker dermed at få masser af hints.

Jourdain-effekten

Denne effekt handler om lærerens iver efter at danne faglig indsigt hos eleven, som kun følger lærerens vejledning. Læreren designer opgaverne således at eleven opnår formel succes ved at følge hans/hendes instruks. Denne formelle succes bruger læreren til at stille sig tilfreds med. Dermed kan andre også overbevises. Men eleven har ikke nødvendigvis opnået den tilsigtede viden. Læreren vil også her beholde eleven i det didaktiske spil, men denne gang er det ikke mundtlige hints ligesom i Topaze-effekten, men i stedet skriftlige anvisninger (hints).

Metakognitivt skift

Læreren erstatter den formelle viden med en selvlavet model, når eleverne ikke har forstået de officielle begrebers repræsentationer. Dette behøver ikke at føre til større forståelse. Der kan gives et eksempel, hvor mængdebegrebet erstattes med Venn-diagrammer. Dette kan føre til en forfladigelse af begreberne, og eleverne kan tro at der er noget galt med begreberne, når Venn-diagrammerne ikke er i stand til at belyse det problem, man venter af dem. For eksempel: en mængde A i et univers U giver i almindelighed en opdeling af U i to delmængder, nemlig A og $\neg A$. Tilsvarende vil to mængder, A og B, give en opdeling af U i fire delmængder, nemlig A∩B, $A \cap \neg B, \neg A \cap B$ og $\neg A \cap \neg B$. Har man tre mængder, giver de tilsammen en opdeling af universet i otte delmængder. Dette kan let illustreres med Venn-diagrammer (også kaldet Euler-cirkler). Men søger man at få den analoge opdeling i 16 delmængder, der skulle kunne fås med fire mængder, kommer man i vanskeligheder. Så mængder kan ikke uden videre identificeres med cirkler i et Venn-diagram.



	A	B	C
0	-	-	-
1	+	-	-
2	-	+	-
3	-	-	+
4	+	+	-
5	-	+	+
6	+	-	+
7	+	+	+

Figur 3 Eulercirkler

Ovenfor er illustreret hvordan tre Eulercirkler kan klare den klassedeling af universet, som tre mængder giver anledning til. Hver af de otte delmængder af universet indeholder, eller indeholder ikke, elementer fra A, B, C.

Misbrug af analoge miljøer

Der kan opstå en Topaze lignende effekt i de analoge miljøer, når læreren vælger at give et eksempel der minder meget om opgaverne, som eleverne løser under et adidaktisk miljø. Eller samme situation har man også, når læreren eller lærebogen giver institutionaliserede eksempler på tavlen eller i bogen, som er meget tæt relateret til de givne opgaver. Eleven vil gætte sig frem til løsningen frem for at løse den.

Misforstået behov for variation

Det er meget vanskeligt for læreren at genbruge den samme didaktiske situation overfor en anden gruppe af elever, da elevernes måde at reagere på ikke vil være de samme som i den forrige gruppe. Lærerens behov for variation i devolutionsfasen vil formindske den gavn, eleverne har af de adidaktiske situationer. Variationen kan give grundlag til de ovenstående effekter.

Strukturen af den didaktiske kontrakt

Hersant & Glorian beskriver strukturen af didaktiske kontrakter således, at de har af fire dimensioner: det matematiske område, den didaktiske status af viden, karakteristik af den didaktiske situation, fordeling af ansvar.

Der tilføjes yderligere tre niveauer: mikrokontrakt, mesokontrakt og makrokontrakt.

Det matematiske område:

I denne dimension beskrives det matematiske område som relevant for den didaktiske situation og som det, lærere og elever er afgrænset af. Den didaktiske kontrakt vil ændres hvis der ændres på dette område, såvel på et globalt plan som på et lokalt.

Den didaktiske status af viden:

Den didaktiske status af viden kan på en skala opdeles i tre slags viden.

Figur 4 Opdeling af den didaktiske status af viden

Viden i udvikling kan ligeledes deles i tre faser, som vi kan se ovenfor.

Karakteristik af den didaktiske situation:

Fx kan det specificeres ved den fase i det didaktiske spil, som situationen repræsenterer (fx institutionalisering).

Fordeling af ansvar:

I denne dimension beskrives fordelingen af ansvar mellem læreren og eleven i den pågældende situation (af større eller mindre varighed). I princippet er det læreren, der designer den didaktiske situation og herunder udformer miljøet, så i princippet kan han selv bestemme, hvor meget ansvar der skal overlades til eleven; men det er meget mere komplekst i praksis.

Tre niveauer:

Tre niveauer i strukturen af den didaktiske kontrakt er følgende:

Makrokontrakt

Handler om overordnede mål for undervisningen.

Mesokontrakt

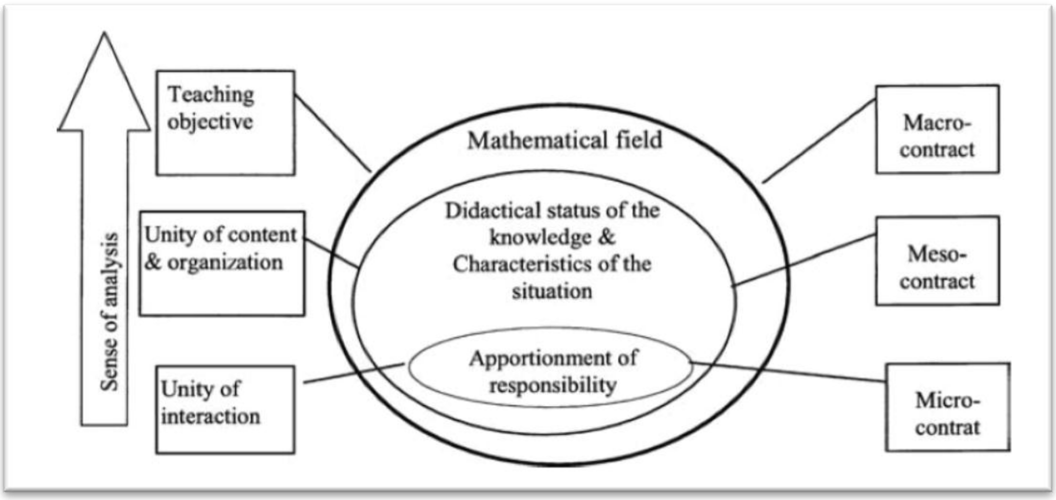
Realisering af en aktivitet, fx løsning af en øvelse.

Mikrokontrakten

Fx et konkret spørgsmål i en øvelse.

Alle de tre niveauer har hver deres didaktiske mål.

Nedenfor kan ses en figur, der illustrerer den didaktiske struktur.



Figur 5 Struktur af didaktisk kontrakt (Hersant og Perrin-Glorian, 2005, s.120)

Det er vigtigt at gøre sig klart, at der ikke er tale om mange kontrakter, men om mange egenskaber I forbindelse med kontrakten mellem en lærer og en elev. Fx underviser læreren i matematik på 5. klasses niveau, og eleven er tosproget og har behov for at lære de enkelte fagtermer at kende med alle deres bibetydninger, da sproget i elevens hjem er lidt forarmet, dvs. ordfattigt. De enkelte detaljer i en kontrakt tilhører mikrodelen af kontrakten, mens de mest overordnede aspekter tilhører makrokontrakten. En kontrakt – mange egenskaber.

ANDETSPROGSDIDAKTIK

Her i dette afsnit vil jegbegynde med at definere, i hvilke sammenhæng andetsprog bruges og hvad det betyder i dette projekt.

Sproget i undervisningen er et vigtigt redskab. Sprogets rolle ved tilegnelse af ny viden er ret tydelig og klar, det er et medium for indlæringen. Når der introduceres nye begreber, kan det give store vanskeligheder for eleverne og endnu større vanskeligheder, når det handler om elever som har dansk som andetsprog. Der er en del undersøgelser, der har påpeget problemet (Helle Pia Laursen & Gun Hägerfelt, 2007).

Andetsprog

Det sprog, det spæde barn først lærer at fungere med og i, og som forældrene og/eller de vigtigste voksne personer bruger, kaldes her modersmålet. Hvis personen gennem længere tid udsættes for andre sproglige miljøer og ventes at tilpasse sig dem og fungere i dem, kaldes det første sådanne sprog andetsproget. – At være tosproget defineres i denne opgave som at have dansk som andetsprog.

Det er først og fremmest vigtigt at definere, hvad andetsprog er, er det sprog nummer to? Men der er jo en del elever, som har dansk som tredje sprog, fx kurdisk-tyrkiske unge, og der er mange elever, som også behersker engelsk i gymnasiet. Så andetsprog er ikke nødvendigvis barnets andet sprog. Det kan godt være det tredje, fjerde osv.

Men der er også forskel på begreberne fremmedsprog og andetsprog. Et fremmedsprog læres i et land, i hvilket landets modersmål er anderledes end fremmedsproget. Dvs. dansk er ikke et fremmedsprog for etniske danskere i Danmark, men det er deres andetsprog. Andetsprog og modersmål vil være svært at skille ad i nogle tilfælde, fx de elever som er opvokset i Danmark med dansk som andetsprog, (dvs. at forældrene snakker deres modersmål derhjemme), har kendskab til dansk helt fra vuggestuen, når de er 2-3 år gamle. Så det vil være åbent for diskussion, om der er tale om to modersmål eller om dansk er et andetsprog. (Holm & Laursen, 2001). Men her i projektet vil jegantage at elevernes andetsprog er næsten på lige fod med modersmålet.

Der er en problematik her som gør, at der findes områder indenfor modersmålet hos tosprogede elever som dermed vil være dårligere stillet hvis man sammenligner med deres andetsprog, dansk. Tosprogede elever får ikke udviklet deres faglige kompetencer indenfor deres modersmål, men derimod i deres andetsprog. Fx vil med stor sandsynlighed ingen tosprogede (tyrkiske) elever kende til termen ”kesir”, som betyder brøk på dansk. Det er meget naturligt, da eleverne helt fra 1. klassetrin kun har modtaget matematikundervisning på dansk, og det selvfølgelig ikke har været muligt at snakke med forældrene hjemme om emnet brøker på tyrkisk.

Der er forskellige sproglige elementer der spiller en rolle i matematik, fx matematiske registre, de nye fagudtryk og taksonomier. Det er helt naturligt, at der kommer nye begreber til de nye emneområder, men de begreber, de unge møder, er ikke alene de nye fagtermer, det er også termer, der har været i faget i umindelige tider, men som er nye for alle elever på et eller andet trin. Fx udtrykket ”*f-mærke*”, som hører ind under differentialregning, og udtryk, der hører til læren om potenser og til funktionsteori, som *”i anden”, ”i tredje”, ”består af”, ”er sammensat af”* eller *”f af x”*, det giver i sig selv en forvirring hos eleven.

Tosprogethed

Elever med dansk som andetsprog betegnes i dag som tosprogede elever. Der findes forskellige definitioner af dette, men her forstås elever med dansk som andetsprog, og dette andetsprog er et sprog, de også bruger i hverdagen, dvs. det er næsten på lige fod med deres modersmål. Selv om andetsproget er på lige fod med deres modersmål, vil det ikke give anledning til at de er gode til at læse og forstå, fordi de er faktisk heller ikke gode til at læse på og forstå deres modersmål, sammenlignet med en jævnaldrende fra det land de kommer fra. Det giver et billede af de manglende sprogkundskaber hos de tosprogede elever.

Man bruger sit andetsprog til at kommunikere hurtigere med snarere end til analyse, syntese og vurdering. Tilegnelsen af sprog er tilknyttet til konkrete situationer; man lærer de ord, der er relevante for de bestemte situationer (Gimbel, 1995). Fx vil en tosproget elev, som i sin fritid har arbejdet som servicemedarbejder, efter en periode beherske og udvikle sit andet sprog i denne konkrete situation. Han/hun vil kommunikere nemmere og hurtigere med kunderne.

Derfor er det også meget svært for tosprogede elever at udvikle et skolerelevant sprog udenfor skolen. En anden af de mange mulige årsager vil ofte være deres kulturelle baggrund, som vil være en ulempe mht. et skolerelevant sprog. Der er undersøgelser der viser, at man skal have kendskab til næsten alle ordene i en tekst for at læse den med rimelig hastighed og forståelse (Gimbel, 1995).

Ikke etnisk danske elever vil blive kaldt etsprogede, og man skal igen her forstå det således, at det ikke er ensbetydende med at de ikke kan andre sprog end dansk. Etsprogede elever er her forstået som elever, hvis modersmål er dansk, og de snakker dansk derhjemme og i omgivelserne. Men de kan godt være i stand til at snakke engelsk eller et andet sprog på lige fod med deres modersmål, dvs. dansk.

Sprog og Matematik

Sproglige udfordringer, der opstår i forbindelse med matematikundervisningen, er ikke forbeholdt tosprogede elever. Etsprogede elever kan også have sproglige udfordringer i matematikundervisningen. Men her skal man skelne mellem tosprogede og etsprogede elever, fordi der er forskel på at en elev kender et ord/begreb, men har svært ved at se det i matematisk perspektiv, og at eleven ikke kender et ord eller et begreb overhovedet og så ser ordet/begrebet i matematisk perspektiv.
Ordet ’omegn’ er et almindeligt forekommende dansk ord. Omegnen af fx København betegner under ét alt det, der er i nærheden af København. Men når en matematiker taler om en omegn af et punkt, må man spørge hvad der ligger hvad ligger der i begrebet ’en omegn’? Er der ikke bare det samme? Her kan man hurtigt gøre sig klart, at man i analogi med denne opfattelse af begrebet kan definere en omegn af et punkt som indholdet af en kugle (med samme antal dimensioner som det rum, man har at gøre med) med centrum i punktet (eller mere generelt som en mængde, der indeholder en sådan kugle som en delmængde, dvs.: En omegn af et punkt er enhver mængde, der indeholder en kugle med centrum i punktet som delmængde). Hvis ordet omegn ikke er kendt af en tosproget elev, vil det ikke give nogen opfattelse af, hvad det betyder at et punkt har en omegn, men tværtimod vil den etsprogede elev måske have en opfattelse af hvad det kan betyde at et punkt har en omegn, hvis der er tale om et ord som den etsprogede er fortrolig med.

Den vigtigste forskel på de etsprogede og de tosprogede er, at de etsprogede kan samle alle deres kræfter på ét sted, mens de tosprogede uundgåeligt kommer bagud, fordi de skal kæmpe på to fronter samtidigt.
Jeg vil gruppere ordene/termerne man møder i matematikundervisningen i tre grupper.

1) Ord man ofte bruger i dagligsproget, og som betegner det samme i dagliglivet og i matematikken. Her vil fx en etsproget elev have det nemmere end en tosproget. Fordi der måske er tale om en kulturel baggrund der kan være i spil. Lad os se på et eksempel:
   Der bliver præsenteret et nyt emne i klassen, og for at forstå emnet bedre er der givet et eksempel i bogen og læreren tager det samme eksempel og gennemgår det på tavlen. Eksemplet kunne handle om en koncert og der vil måske være ord som orkester, violin, band, byspecifikke billetter eller soloinstrument. Jeg mener, at der er stor sandsynlighed for, at nogle af disse ord er ukendt for den tosprogede elev pga. hans/hendes kulturbaggrund.

2) Ord som man ikke bruger så tit i dagligsprog: fx i vores tilfælde at differentiere, tangent, sekant osv. Det kan måske være lige svært både for etsprogede og tosprogede elever.
3) Særlige ord og udtryk: man bruger særlige udtryk i matematikundervisningen, dvs. ord og vendinger som kun forekommer der. Fx ”x i anden”, ”f mærke” osv. Tosprogede elever vil i et vist omfang have svært ved disse særlige udtryk. Udtrykkene giver mening, men kun i matematik og kun efter at være blevet defineret, og det er heller ikke noget man bruger i dagligsproget. Men tværtimod vil en etsproget elev have det nemmere med at fange meningen i disse særlige udtryk og dermed bruge dem i forskellige sammenhæng i matematikundervisningen, fordi de etsprogede er vant til at deres modersmål bruges kreativt til at danne nye begreber i en blanding af leg og alvor, der er karakteristisk for nytænkning: man prøver sig frem, og selv om det ligner leg, er det fuldstændig alvor. Dette kræver at man er fortrolig med sproget, som netop de etsprogede er det.

Der er ifølge David Pimm tale om forskellige relationer mellem sprog og matematik. David Pimm samler det under fire punkter.

1. *"det talte sprog i matematikklasseværelset (herunder både lærerens og elevernes sprog);*
2. *brug af bestemte ord til matematiske formål (ofte kaldet matematikregistret)*
3. *sproget i teksterne (konventionelle problemer med ord eller med lærebøger som helhed, herunder grafisk materiale og andre former for repræsentation);*
4. *sproget i skriftlige symbolske former (David Pimm, 1994, s.159)*

I denne opdeling spiller langue-parole-dikotomien (Hesselbart, 2007) en vigtig rolle. Parole er sproget som det forekommer, uafhængigt af alle regler, forud for at det beskrives. Langue er sproget som man lærer det når man modtager det, ikke fra en bruger men fra en grammatiker, en sprogteoretiker. Matematikregistret er en samling af alle matematikkens ord, dvs. et langue-fænomen.
1 og 3 ovenfor er parole mens 2 og 4 er langue i hhv. mundtligt og skriftligt.
Det mundtlige sprog i klasseværelset i matematikundervisningen kommer i brug ved

1. læreren fortæller om et emne
2. eleverne diskuterer et emne
3. læreren diskuterer et emne med (en eller flere elever i) klassen
4. en elev forklarer en anden elev om et emne

5. en elev forklarer et emne for læreren og de øvrige elever som et led i at vise at han/hun har forberedt en fremlæggelse af emnet

Disse fem situationer har hver sin form og hver sine forventninger knyttet til sig. 1, 3 og 5 er led i didaktiske situationer, mens 2 og 4 er adidaktiske.

Til 1, 3 og 5 er der knyttet mikrokontrakter. I forbindelse med 1 ventes det af læreren at han fortæller om noget der er relevant i forhold til eksamen snarere end morsomt for ham selv. I forbindelse med 3 forventes det at læreren holder sig til hvad eleverne spørger om og ikke giver sig til at spørge eleverne ud for at se hvor meget hver af dem kan, altså at han suspenderer sin rolle som kontrollant og giver eleverne det frirum, der gør at de tør spørge og åbne sig overfor faget og gøre sig parat til at tage imod ny viden, selv om de derved blotter sig overfor læreren. Til 5 ventes det af læreren at han giver eleven lov til at formulere sig uden at gribe ind undervejs, og at han bagefter ikke giver sig til at krydsforhøre eleven om uklare punkter under fremlæggelsen, men så at sige lader elevens ord stå for sig selv.

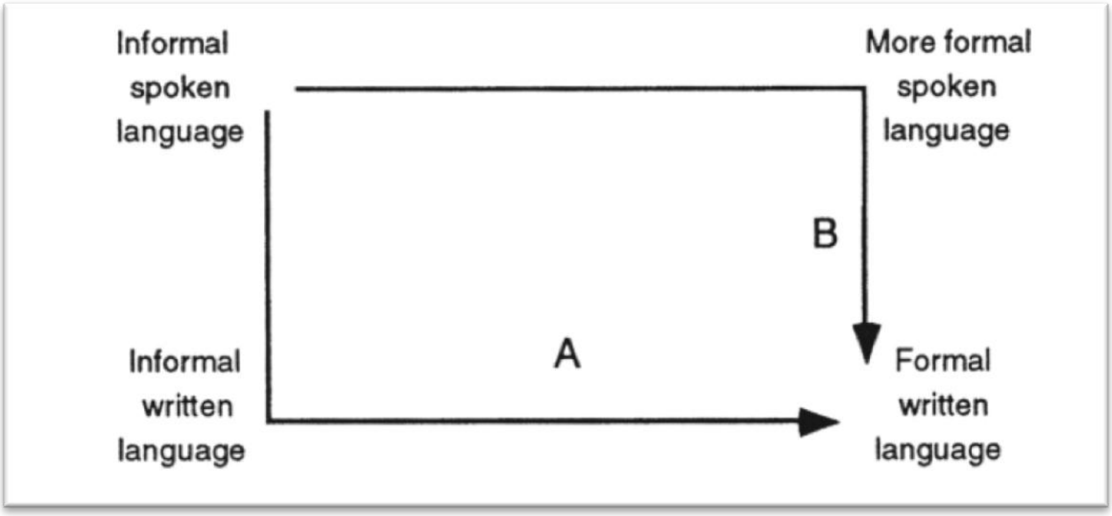
Diskussionen er i almenlighed en blanding af fagsprog og dagligsprog, især når læreren perspektiverer til nogle eksempler fra dagligdagen.

Matematikkens register kan indeholde noget helt nyt for både etsprogede og tosprogede elever, og disse nye elementer er ofte uundværlige for det matematiske formål med undervisningen.

Sproget i lærebøger og grafiske materialer og repræsentationsformer er også en relation mellem sprog og matematik i matematikundervisningen.

Eller der findes specielle semiotiske register i matematik mht. sprog, nemlig symboler. Det er ikke nødvendigvis noget der står i lærebøger, fx i forbindelse med et algebraisk udtryk/en algebraisk formel kan det være svært at vide, hvordan de forskellige tegn og skrivemåder udtales. Fx $x^2, \sqrt{a^2+b^2}, x_{y^2}, f(x)$ osv.

Iflg. Duval (Hesselbart, 2007) er det, der karakteriserer matematisk aktivitet, at forskellige repræsentationer af det samme objekt samles i semiotiske registre, og at man finder metoder til så let som muligt at passere fra den ene til den anden repræsentation. Forskellige repræsentationer af det samme objekt kan betragtes som ækvivalensklasser af repræsentationer. Fx en parabel er givet 1) ved en velkendt graf eller 2) ved et andengradspolynomium eller 3) ved et brændpunkt og en ledelinje.



Figur 6 Fra uformel tale til formel skrivesprog (Biehler, Rolf & Scholz, Roland W. & Strässer, Rudolf & Winkelmann Bernard (1994), s. 163)

Pimm & Keynes 1994 s. 163 gør opmærksom på at et aspekt af det at lære matematik er at kende den form, man bruger for at præsentere den. Der er i forhold til det anvendte medium to former, nemlig den talte og den skrevne form. Den talte er fra mund til øre, med lyd, dvs. mediet er luftsvingninger. Den skrevne er fra hånd til papir/tavle/bog og anvender fotoner, dvs. elektromagnetiske svingninger. Undervisning har sit udspring i det talte, men det skrevne inddrages næsten med det samme. Nogle registre er nærmest umulige at bringe i mundtligt repræsentation, fx en ligning $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ for rødderne til andengradspolynomiet ax^2+bx+c. Det er nemlig således at det enkelte tegn består af et eller flere ord (her fx *b i anden* eller et langt udtryk som *kvadratrod*), der gør det svært at huske det udtalte men let at huske det skrevne, der opleves som mere kompakt end det udtalte.

Et andet vigtigt aspekt af de didaktiske situationer er deres forløb over tiden. Et standardforløb kan skrives I(nitiation) – R(esponse) – F(eedback). Det vil sige at eleven bliver sat i en situation, der får ham/hende til at reagere, hvorefter der kommer et feedback, typisk fra læreren. Den reaktion der betegnes Learned Helplessness kan analyseres ved hjælp af dette skema, og det, der læres, er at feedbacket er ydmygende, og det at reagere gør kun ydmygelsen større, så man lærer at være passiv i alle situationer, hvor et ydmygende feedback er muligt/sandsynligt.

Ifølge Helle Pia Laursen er der tale om grundlæggende sproglige udfordringer i naturfagsundervisningen både for etsprogede og tosprogede elever, men Laursen mener at det ikke er muligt ud fra hendes analyse at vurdere i hvilket omfang og på hvilke punkter udfordringerne er anderledes for dem. Men en ting man kan være enig om, ligesom Laursen skriver:

"Hvad der kan siges af mere generel karakter, hvad angår udfordringerne for de elever, der har dansk som andetsprog, er, at vejen ind i det faglige register går gennem et sprog, som ikke er deres modersmål." (Laursen 2004, s.89)

Da der endnu ikke er fuld klarhed over, hvilken betydning sproget har for læring i matematik, argumenterer Dale og Cuevas (1987) for, at sproget spiller en sandsynlig rolle i følgende sammenhænge:

- *Der ser ud til at være en høj korrelation mellem tosprogede elevers færdigheder i læsning og deres fremgang i matematik, især når det gælder problemløsningsopgaver der er indlejret i sproglige kontekster.*
- *Sproget fungerer som formidler for matematisk tænkning og refleksion. Pointen er at matematisk tænkning medieret gennem lingvistiske processer, er en forudsætning for fremgang i matematik.*
- *Matematiklæring fordrer at eleverne tilegner sig metakognitive kompetencer i matematik for at kunne udtrykke reflekterede matematiske tanker og ideer.*
- *Sproget, der anvendes i matematik, er en integreret del af de matematiske begreber, processer og applikationer det udtrykker.*

Derfor bør undervisning i matematisk sprog ikke adskilles fra matematikundervisning. Eleverne får ofte mulighed for at praktisere læsning og lytning i matematikundervisningen, men mere sjældent får de også mulighed for at tale eller skrive om matematik. (Andersen, 2004)

Ligesom David Pimm kommer Michael W. Andersen også med nogle sammenhænge mellem matematik og sprog. Fx peger Andersen ligeledes på, at der er et problemfelt, nemlig læsning af matematiske tekster eller matematiske begrebers vigtighed.

Men det vigtigste er nok, at han peger på tilegnelsen af metakognitive kompetencer som læres igennem matematikindlæring. Her spiller sproget en vigtig rolle, det er ligesom at man, når man lærer et nyt sprog og når til et punkt, hvor den indre tale begynder at kommunikere på det ny sprog. Ligesom også David Pimm kalder den at matematikkens sprog er et sprog der bl.a. omfatter den indre tale, det er nemlig det når eleven arbejder stille med sine opgaver, altså tænker med matematisk sprog.

Syntaks og semantik

Et sprog kan defineres som en mængde af symboler, hvor der er vilkårligt mange eksemplarer af hvert symbol til rådighed. En delmængde af symbolerne bliver, ved at anføres i en struktur, til et udsagn. De udsagn, der faktisk er afgivet eller bliver afgivet, udgør tilsammen sprogets parole, mens langue er de abstrakte regler for sproget. Sprogets semantik gør rede for symbolernes betydning, mens sprogets syntaks er reglerne for hvordan symbolernes sammensætning skal struktureres. Man kan udtrykke det således, at syntaksen er sprogets form, semantikken symbolernes indhold.

I forbindelse med syntaks kan man skelne mellem makrostruktur og mikrostruktur. Makrostrukturen for den formelle matematiske diskurs har siden Euklid været

definitioner, aksiomer, sætning, bevis, …, sætning, bevis

og med jævne mellemrum nye definitioner og aksiomer.

Mikrostrukturen angår reglerne for tilladelige placeringer af symbolerne mellem hinanden. I forbindelse med den formelle matematiske diskurs er der tre slags symboler: elementer, operatorer og relationer. Elementerne er tal, der er opbygget af cifre og nogle specialtegn, samt ord der symboliserer tal. Operatorer er $+ \ - \cdot /$ () ^ (parenteser kaldes sekventielle operatorer, idet de bestemmer rækkefølgen, operationerne skal foregå i) samt operatorer såsom sin, cos, tan osv. osv. Relationer er

$$\neq = \ \geq \ > \ \leq \ < \quad .$$

En interessant regel siger at hvis to tal, der står lige efter hinanden, består af et naturligt tal efterfulgt af en brøk af naturlige tal, så skal det forstås sådan at der mellem det hele tal og brøken står et plus (+). Ellers skal to tal eller symboler for tal, der står lige efter hinanden, opfattes sådan at der står gange mellem dem. Der er tale om en konvention, der skal gøre livet lettere og smukkere for os (jo enklere et udtryk er, jo smukkere synes vi (også) det er). Eller med Hilberts ord:

”For hvad der er klart og let forstået tiltrækker, det komplicerede frastøder os.” (Hilbert, David, 1900).

DEN SPROGLIGE DIMENSION I DIDAKTISKE KONTRAKTER

I dette afsnit vil jeg argumentere for at der er en mulig sproglig effekt under de didaktiske kontrakter. I forskellige didaktiske situationer er der potentiale til at der opstår uheldige effekter, og de kan opstå pga. sproglige udfordringer, der måske er implementeret fra noget syntaks- og semantikfejl.

Altså er læreren enten klar over at eleven ikke har forstået opgaven pga. deres sproglige uformåen, og denne uklarhed kan også få læreren til at tro at eleven ikke er i stand til at løse opgaven pga. matematiske vanskeligheder. Og så begynder en Topaze-effekt pga. sproglige vanskeligheder.

Det må være umiddelbart klart, at sproget spiller en essentiel rolle i forbindelse med indlæring af matematik. De situationer, matematikken beskæftiger sig med, er idealiserede situationer fra dagligdagen og/eller "fagligdagen", og både det dagligdags/faglige og det idealiserede kræver verbal præsentation og debat for at blive godtaget. Dette betyder at eleven er nødt til at beherske både dagligsproget og fagsproget og være indstillet på at udvide sine sproglige færdigheder i løbet af kurset. Her er de etsprogede heldigere stillet end de tosprogede. De etsprogede kan koncentrere deres indsats.

Det er uden tvivl at sprog er et medium for indlæring af matematik. Men det er også uden tvivl at der findes sproglige vanskeligheder ved indlæring af matematik både hos etsprogede og tosprogede elever. Disse sproglige udfordringer vil typisk forekomme ved forskellige situationer i undervisningen. Fx ved lærerens forelæsning eller ved opgaveløsning i grupper. Disse sproglige vanskeligheder vil påvirke de didaktiske kontrakter i høj grad, især mikrokontrakten. Da der som regel er et flertal af etsprogede elever i klassen, er der kun i ringe grad tale om påvirkning af sproget ved meso- og makrokontakter. De tosprogede står derfor alene med eventuelle sproglige vanskeligheder i forbindelse med meso- og makrokontrakter, og det sker let at de ikke får deres sproglige vanskeligheder behandlet.

Der er termer der ikke findes i dagligsproget, men som er sammensat eller dannet af ord, der bruges i dagligsproget og har en mening her, således at de giver anledning til en række associationer, der på forhånd gør dem meningsfulde.

Termerne er kendt i dagligsproget, og de har en bestemt betydning her, så det der er opgaven i forbindelse med at give dem en matematisk betydning er bl.a. at fastslå, hvordan den matematiske betydning er afledet af den dagligdags. Der er altid tale om en præcisering, både af begrebets betydning og af omfanget og arten af objekter, det anvendes på.

En anden situation som giver anledning til nogle uheldige effekter er under et såkaldt metakognitivt skift. Her er det meget vigtigt, at eleven er med på hvad læreren giver som eksempler, og eksemplerne er hjemmelavede og gælder kun i konkrete tilfælde. Dvs. sproget er enormt vigtigt her, da der med stor sandsynlighed er tale om at dette skift har dagligsproget som forudsætning.

Det didaktiske miljø er det miljø, læreren sætter op for eleverne med den hensigt, at de, ved at tilpasse sig miljøet, opnår den tilsigtede viden. Men det gør de ikke, fordi de har oplevet så mange nederlag, at de giver op og kommer i den tilstand, Martin Seligman (1967) kalder det learned helplessness. Men de lærer også at bære en maske.

I et adidaktisk miljø vil disse tosprogede elever have en del barrierer sammenlignet med etnisk danske elever. Deres muligheder for at hente hjælp fra lærebøger vil være af begrænset omfang. Dvs. udover de nævnte effekter findes der også en sproglig dimension, og især de tosprogede elever. Udover det vil de nævnte effekter være dybere hos tosprogede elever. Under Topaze-effekten vil den mærkes tydeligt. Læreren har ikke mulighed for at skjule svaret så godt, som han gør det ved etsprogede elever. Læreren er nødt til nærmest at afsløre det helt fra starten pga. de sproglige vanskeligheder.

METODOLOGI

I dette afsnit vil jegkomme ind på hvordan jeg har behandlet mine data, hvordan jeg har samlet data og med hvilke teoretiske rammer er mine data analyseret.

Undervisningen i Ørestad og Avedøre gymnasier undersøges med hensyn til teorien om didaktiske situationer. TDS bruges ved at undersøge, i hvilke didaktiske situationer sprog-faktoren er tydeligst. TDS bruges også til at beskrive den didaktiske kontrakt i undervisningen, således om der opstår negative sproglige effekter i de forskellige faser. De uheldige effekter i den didaktiske kontrakt vil ses på baggrund af den sproglige dimension.

Observationsklasser

Det har helt fra begyndelsen været meningen at have to forskellige klasser på et gymnasium. Jeg har rettet henvendelse til forskellige gymnasier i Københavnsområdet. Det var meningen at holde sig til et gymnasium, således at det vil være nemmere at observere tidsmæssigt. Men der har været afvisninger fra elevernes side, og dermed har det været nødvendigt at få materiale fra to forskellige gymnasier.

Matematiklæreren fra 2. HF fra Avedøre Gymnasium har fået snakket med to af sine elever om de vil være med til at blive observeret. Efter elevernes accept, har eleverne og jeg skrevet en uofficiel kontrakt, således at det har været mere bindende, så undervisningen kunne følges i over tre uger. Ligeledes har der også været to elever fra 1.l i Ørestad Gymnasium, hvor de skulle begynde på eksponentielle funktioner. I Avedøre Gymnasium var emnet differentialregning, og det drejer sig om matematik på B-niveau, hvor derimod i Ørestad Gymnasium har matematik undervisningen været på C-niveau.

Navnene på eleverne holdes anonymt, derfor de angivende navne er konstrueret.

Undervisningsmaterialer

Eleverne får ikke lov til at bruge CAS-værktøjer til at differentiere i de givne opgaver, da læreren mener at de ikke behøver dette pga. at opgaverne ikke er så komplicerede. Elever kommer ikke til at lære regnereglerne for produktet eller kvotienten af to differentiable funktioner.

Observationer

Dataindsamlingen er begyndt før der har været en a priori analyse på plads, da man var nødt til at hoppe på båden fra et nyt kapitels/emnets begyndelse.

Data

Ved enkelte lektioner i Avedøre har der været i alt fire elever, altså udover Saida og Yasmin var Maria og Lotte også tilstede. Det har medført to dialoger parallelt, hvilket har gjort dataindsamlingen svær.

Dataindsamlingen foregår bl.a. og primært ved at lydoptage selve undervisningen (dvs. lærerens forelæsning/oplæg om emnet) og de forhånd bestemte elevers gruppearbejde. Når gruppearbejdet begynder, vil jeg flytte mig tættere på de elever, jeg observerer, så jeg kan følge med i, hvor og hvordan de håndterer opgaverne, dvs. jeg ser på deres måde at løse på og samtidig på, hvad de siger ved løsning af opgaverne. Det er nemlig vigtigt i dette projekt at finde frem til, om eleverne har sproglige vanskeligheder. Af mine lydoptagelser vil jeg finde frem til nogle episoder, hvor man kan høre/se tydeligt, om der er tale om sproglige vanskeligheder. Lydoptagelser er de nyttigste data, jeg har i mit projekt. Ved lydoptagelserne har man mulighed for at høre, om der er vanskeligheder i den sproglige dimension. Men der er forskel på det talte sprog og det læste eller hørte. Man kan sagtens tænke sig en elev, der har svært ved at formulere nogle sager, men har nemt ved at forstå et udsagn.

Udover lydoptagelser har jeg også adgang til deres afleveringer i de emner, indenfor hvilke jeg har været observant. Jeg har også samtidig kopier af deres noter i undervisningen og under gruppearbejdet. Det skriftlige data vil også være med til at bestemme, om der er vanskeligheder ved sprogbrug. Men det vil ikke nødvendigvis være ligeså nyttigt som lydoptagelser, da der ikke er særlig meget tekst i deres skriftlige arbejde.

Jeg bliver nødt til at være påpasselig ved vurdering af de episoder, som jeg mener, er udtryk for et sprogligt problem for eleven, fordi det kan være svært at afgøre om elevens vanskeligheder er matematiske eller sproglige.

Veli fra 1.l har skiftet studieretning, så han er i en anden klasse i en af mine optagelser, og der startede de også på et nyt emne, nemlig trigonometri.

Desuden har jeg ingen episoder fra 1.l klassen, selvom der er optagelser i lektioner. Transskriptionerne er skrevet således, at de bibeholder deres originalitet med det mundtlige sprog, dvs. der er ikke foretaget skriftlige rettelser af det, eleverne siger. Jeg mener, at det kunne ødelægge vores data, fordi jeg søgte nemlig efter sproglige effekter af det de siger.

Kildemateriale til elevernes færdigheder mht. de to medier er hhv. lydoptagelser og kopier af deres skriftlige arbejde. Dette sidste skal helst være af deres kladder, hvor man kan se, hvordan de er kommet til resultaterne; det færdige arbejde kan være sterilt i den forstand, at det ikke informerer om den vej, de er gået.

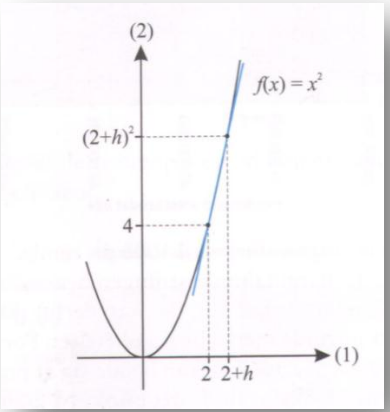
A PRIORI ANALYSE AF INDLEDNING TIL DIFFERENTIALREGNING

I dette afsnit vil jeg behandle den del af differentialregningen, der blev gennemgået af læreren under mine observationer, så jeg kan se, hvilke nye ting eleverne skal møde, og hvad der kan være vanskeligt for dem. Dvs. jeg ser på stoffet med elevernes synspunkt samtidig med et overblik over emnet, så man kan nemmere forstå analysen af data. Konkret vil jeg bl.a. tage fat i tangenthældning, differentialkvotient og definition heraf vha. grænseværdi for at skabe et samlet overblik over det matematiske indhold, som eleverne arbejder med under observationerne. Det omfatter foruden det nævnte også metoder til beregning af elementære funktioners afledede funktioner, bestemmelse af tangentens ligning og generelle regneregler for differentiation. Afsnittet vil dermed danne en slags epistemologisk referencemodel for præsentation og analyse af data.

Differentialregning

Før eleverne når til differentialregning, har de fået en bred gennemgang af emnet ”funktioner”, hvor blandt andet variabelsammenhænge, proportionalitet, vækstmodeller, andengradspolynomier og det generelle funktionsbegreb er gennemgået. Dvs. eleverne har et vist kendskab til funktioner. Differentialregningsdelen i elevernes bog handler om en introduktion til differentialregning, regning med afledede funktioner og anvendelser af differentialregning.

Læreren har valgt at introducere differentialregning ved at fortælle eleverne om tangenten til en graf i et givet punkt og tangentens hældningskoefficient. Dernæst følger han bogen (Jensen, Jessen og Nielsen, 2006) og giver et eksempel derfra på tavlen (Figur 7 Graf for funktionen $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ (Jensen, Jessen og Nielsen 2006, s88)). Meningen er at tage hul på emnet via et eksempel.



Figur 7 Graf for funktionen $f(x) = x^2$ (Jensen, Jessen og Nielsen 2006, s88)

Opgaven er at finde tangenthældningen for tangenten i punktet (2,4) (se figuren) på grafen. Man har brug for to punkter for at beregne hældningskoefficienten for en linje, derfor vælger man dette hjælpepunkt, som ligger stykket *h* væk fra tallet 2 på *x*-aksen. Hjælpepunktet har så *x*-værdien $2 + h$. *y*-værdien for dette hjælpepunkt findes på følgende måde:

$$y = f(2 + h) = (2 + h)^2 = 4 + h^2 + 4h$$

x-værdien indsættes i funktionens regneforskrift.

Den blå linje, der går igennem to punkter på grafen, kaldes en sekant til grafen. Hældningen for sekanten kan udregnes ved

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{2 + \mathrm{h} - 2} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

Hvis de to punkter ligger tæt på hinanden, dvs. hvis man kun tager et meget lille skridt væk fra *x*, altså meget lille *h* værdi, så vil tangenten og sekanten også ligge tæt på hinanden.

Vi kan altså beregne sekantens hældning, og figuren viser intuitivt, hvad man mener med at den vil ligge tæt på tangentens hældning. Derfor bliver det også nemmere at introducere begrebet differentialkvotient i det konkrete eksempel.

Nu kan man indsætte de to forskellige *x*-værdier i regneforskriften og dernæst kan det reduceres;

$$a = \frac{4 + h^2 + 4h - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

Sekanthældningen vil nærme sig tangenthældningen, hvis *h* bliver forsvindende lille. Det betyder at *h* bliver ”tæt på 0”, og så vil tallet $4 + h$ være tæt på tallet 4.

Altså er tangenthældningen

$$a = 0 + 4$$

Det er oplagt, at begrebet hældning af en linje er meget relevant i arbejdet med differentialregning. Efter kendskab til tangenthældningen er sekanthældningen også relevant, når vi har at gøre med ikke lineære funktioner.

Man kan nu skrive $f'(2) = 4$ og siger at ”differentialkvotienten for f i 2 er 4” (Jensen, Jessen & Nielsen (2006), s.88). Det er første gang eleverne møder noget der hedder ”f mærke”. Der er måske sandsynlighed for at eleverne vil tro, at læreren har ikke bevidst lavet en streg (altså mærke) og at den lille streg efter *f* (altså ”mærke”) er bare en del af bogstavet *f*, hvis eleverne ikke har læst bogen inden lærerens introduktion. Den diskrete notation (altså ”mærke”) kan føre til vanskeligheder under en adidaktisk situation. Eleverne vil nok heller ikke, på basis af kun et eksempel, være i stand til at følge en tilsvarende metode i andre eksempler, ligesom grænseovergangen formentlig vil forblive lidt mystisk, da det lyder upræcist at tale om at noget er ”tæt på” (i matematik plejer man jo at regne præcist). Det begreb, man mangler at stifte bekendtskab med, er netkonvergens.

Ud fra det ovenstående eksempel, begynder bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)), (og også læreren), at generalisere til en metode, som kaldes tretrinsreglen. Denne regel består af tre trin, som navnet siger. I første trin udregner man *y*-værdien for punktet, som ligger en lille afstand væk fra x_0. Man udregner også ændringen i funktionsværdierne. I andet trin udregner man sekanthældningen ved at dividere ændringen i funktionsværdierne med ændringen i *x*-værdierne. Ved det sidste trin skal man finde værdien af tallet $\frac{\Delta f}{\mathrm{h}}$, når tallet *h* bliver ”uendelig” lille (altså grænseovergangen). Det kan kun lade sig gøre, hvis nævneren på en eller anden måde ”forsvinder” (hvilket naturligvis ikke altid er tilfældet – tænk fx på udregning af differentialkvotienten af sinus i 0). Metoden har altså også begrænset rækkevidde.

Differentialregning er en form for syreprøve for elevens dygtighed indenfor matematik, fordi det at sætte sig ind i differentialregning kræver at man forstår og behersker en meget stor del af det tidligere lærte, herunder brøkregning (der tit læres meget sent), forkortningsregler, reduktion af aritmetiske udtryk, kontinuitet, grænseovergang og konvergens/divergens, sumformler og afbildninger, specielt funktionsteori. Man skal kende til følgekonvergens, men man lærer ikke om netkonvergens, og dermed får Riemann-integralet ikke helt den behandling, det burde have. Den samvittighedsfulde elev står her med en diffus fornemmelse af at der mangler noget - og også dette er med til at gøre tilegnelsen vanskelig.

Regneregler for differentiable funktioner:

Der gælder følgende regneregler for differentiable funktioner:

G1	$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
G2	$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
G3	$\left(k\cdot f(x)\right)' = k\cdot f'(x)$
G4	$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
G5	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Tabel 2 Generelle regler for differentialregning

Det er forudsat, at f og g er differentiable funktioner, og at tallet k er et reelt tal; for G5 skal man også vide at g er forskellig fra 0 i en omegn af x. Det siges så (indirekte), at med disse forudsætninger er funktionerne $f+g$, $f-g$, $k\cdot f$, $f\cdot g$ og $\frac{f}{g}$ også differentiable. Jeg fokuserer her på G1-G3, da kun disse er relevante i observationerne. Regnereglerne formuleres altså her med en del implicitte forudsætninger og konklusioner. En mere principiel vanskelighed er, at de forudsætter et abstrakt funktionsbegreb, som eleverne ellers (og også i den praktiske anvendelse af reglerne) ikke for alvor har haft brug for i praktiske opgaver (og derfor nok ikke fuldt ud besidder).

De generelle regler skal kombineres med flg. specielle regneregler for differentiation, som i lærebogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)), og i lærerens institutionalisering på tavlen, formuleres vha. en tabel af formen:

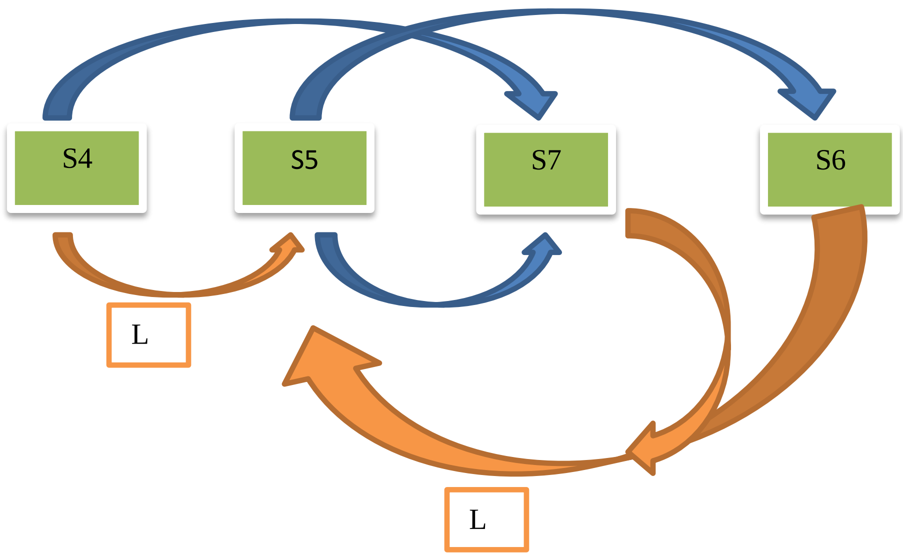
	f(x)	f'(x)
S1	$\boldsymbol{x^2}$	$2x$
S2	$\boldsymbol{x^3}$	$3x^2$
S3	$\boldsymbol{x^4}$	$4x^3$
S4	$\boldsymbol{x^n}$	nx^{n-1}
S5	$\boldsymbol{ax + b}$	a
S6	$\boldsymbol{k}$	0
S7	$\boldsymbol{x}$	1
S8	$\boldsymbol{x^{-1} = \frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
S9	$\boldsymbol{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Tabel 3 Specielle regler som er skrevet op på tavlen

Man skal lægge mærke til, at store dele af tabellen i princippet er specialtilfælde af S4 og S5. S1-S3, og S7-S9 i er princippet specialtilfælde af S4, mens S6 er et specialtilfælde af S5, og samtidig er alle disse funktionsfamilier differentiable. Eleverne er faktisk ikke klar over disse specialtilfælde, faktisk var jeg med til at forklare gruppen lidt om S4, og hvordan de kunne få S1-S3 og S7-S9. Dernæst har de taget denne regel i betragtning ved opgaveløsninger. Fx i Episode N2 er Maria i gang med at forklare denne regel til Lotte om hvordan man skal bruge det.

De to regler G1 og G3 definerer tilsammen linearitet. I det følgende skrives de forkortet tilsammen som L. Det bemærkes, at det netop er de mængder af forudsætninger, der fører til S5, der indeholder linearitet.

Der gælder følgende ”genealogiske” regler, her med skitseret bevis:



Figur 8 "Genealogiske" regler

- S4 medfører S7 i tilfældet af hvis n er lig 1.

$$S4 \to S7: Lad\ n = 1$$
$$x^1 = x$$

- S6 er et specialtilfælde af S5, når $x = 1, b = 0$

$$S5 \to S6: Lad\ x = 1, b = 0$$
$$ax + b = a \cdot 1 + 0 = a$$

,hvor a er en konstant.

$$S4, L \to S5: S4\ giver$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{-1} = 0, \qquad (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1, \quad (ax + b)' = a \cdot (x)' + b' = a$$

- S5 medfører S7: lad $a = 1, b = 0$.

  Så gælder:

$$(\mathrm{ax} + \mathrm{b}) = (1 \cdot \mathrm{x} + 0)' = 1$$

- Dvs.,

$$S6, S7, L \ \rightarrow S5:$$

ifølge L er $(ax+b)' = a \cdot (x)' + b'$. S6 og S7 siger henholdsvis $x' = 1$ og $b' = 0$.

Vi kan udlede S5 via reglerne S4, G1 og G3 (bemærk at L udtrykker G1 og G3).

- $S4, L \ \rightarrow S5$:

$$\begin{aligned}
(ax+b)' &= (a \cdot x)' + b' && :G1 \\
&= a \cdot (x)' + b' && :G3 \\
&= a \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 && :\text{S4} \\
&= a \cdot x^0 \\
&= a \cdot 1 \\
&= a
\end{aligned}$$

I princippet vil eleverne have en god indsigt efter offentliggørelsen af Tretrinsreglen, lad os se på et eksempel med hvor vi differentierer tredjegradspolynomium.

Tredjegradspolynomiet $f(x) = x^3$:

Første trin:

Vi skal igen udregne $f(x_0+h)$ og ændringen i funktionsværdierne (Δf):

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = (x_0+h) \cdot (x_0+h) \cdot (x_0+h) = x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3$$

Og så

$$\Delta \text{f} = f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3) - x_0^3 = 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3$$

Andet trin:

Vi finder sekanthældningen for dette tredjegradspolynomiet:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\text{h}} = \frac{3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3hx_0 + h^2$$

Tredje trin:

Der er kun to af leddene i sekanthældningen, som indeholder tallet h, nemlig $3hx_0 + h^2$. Så hvis vi lader *h* går mod nul, altså vi indsætter et "uendelig" lille *h værdi og dermed bliver ledet* $3hx_0 + h^2$ *også "uendelig" lille, dvs. næsten nul.*

Dermed er vores differentialkvotient udregnet til:

$$f'(x_0) = 3x_0^2 + 3 \cdot 0 \cdot x_0 + 0^2 = 3x_0^2$$

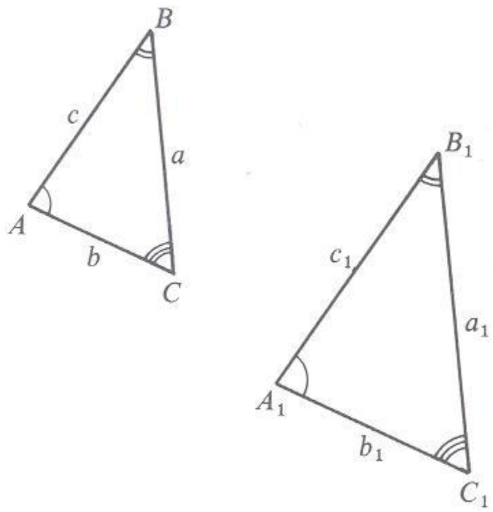
Her vil eleverne være i stand til at forstå, hvordan funktionen falder en grad ned ved differentieringen. Dvs. der vil ikke være noget mystisk med denne ny regel, eleverne kommer til at lære.

A PRIORI ANALYSE AF INDLEDNING TIL TRIGONOMETRI

Et nyt emne som gymnasieelever møder på C-niveau i gymnasiet er emnet trigonometri. Det er første gang, ordet trigonometri bliver præsenteret for dem. Selve ordet er af græsk oprindelse og betyder trekantmåling. Det er nødvendigt for læreren at fortælle om Pythagoras sætningen; til gengæld har eleverne kendskab til denne sætning fra folkeskolen. Og det vil være en naturlig proces for læreren at begynde på emnet via retvinklede trekanter og endnu naturligere at introducere ensvinklede trekanter.

Ensvinklede Trekanter

De to trekanter nedenfor kaldes ensvinklede, da de har vinkler, der er parvis lige store.



Figur 9 Ensvinklede trekanter[1]

Vinklerne bliver navngivet med store bogstaver, i vores tilfælde A, B, C, A_1, B_1, og C_1 og kateterne overfor vinklerne får samme navn som vinklen, bare med små bogstaver i stedet, fx ligger vinkel A_1 over for kateten a_1. Det er vigtigt at være opmærksom på at buerne i de to trekanter indikerer, at der er tale om samme vinkelstørrelse.

[1] http://www.detslor.dk/matematik/trekanter.htm

Man kan se at den store trekant er en forstørret version af den lille, de to trekanter har nemlig samme form, da de er ensvinklede. På Figur 9 Ensvinklede trekanter ses trekanterne ΔABC og $\Delta A_1B_1B_{1,}$ og vi antager at trekanten $\Delta A_1B_1B_1$ er forstørret med en faktor $\frac{3}{2}$. Derfor;

$$a_1 = \frac{3}{2}a, \qquad b_1 = \frac{3}{2}b, \qquad c_1 = \frac{3}{2}c$$

Vi kan dernæst isolere ligningerne således at $\frac{3}{2}$ kommer til at stå alene på en af siderne af lighedstegn.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{3}{2}$$

Man kan nu se at ensvinklede trekanter har proportionale kateter.

Der er nye termer i dette afsnit, der sandsynligvis vil få eleverne til have det lidt svært ved forståelsen af det matematiske indhold, fx termerne *proportional, katete, ligning, ensvinklede.* Der er faktisk også ord som skal forstås i matematisk sammenhæng, fx *forstørret, isolere og buer.*

Pythagoras Sætning

Navnet Pythagoras vil altid fremkalde et billede af retvinklede trekanter. Selve Pythagoras' sætningen er som følger:

Sætning:

I en retvinklet trekant med kateterne *a, b,* og hypotenusen *c*, gælder der følgende ligning;

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sætningen kan kun bruges til retvinklede trekanter. Bogstaverne a og b er kateterne på trekanten. Kateter er de korteste sider i en trekant, som også danner den rette vinkel. Det tredje bogstav *c* er den længste side og kaldes *hypotenusen*. Dvs. Pythagoras' sætning fortæller os at summen af kvadraterne af de korte sider er lig kvadratet af hypotenusen.

Eksempel:

En retvinklet trekant har længden af de korte sider $a = 3$ og $b = 4$. Find længden af hypotenusen vha. Pythagoras' sætning.

Man skal blot sætte tallene i formlen for at for kvadratet på hypotenusen.

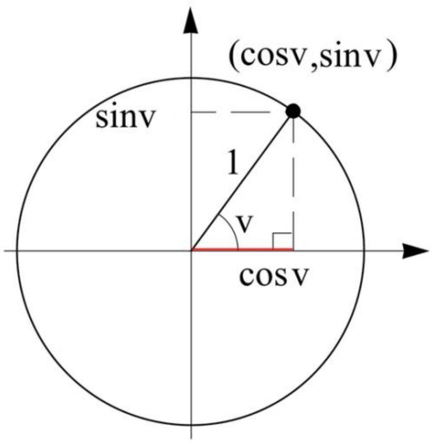
$$3^2 + 4^2 = 25$$

Dvs. $25 = c^2 \Leftrightarrow c = 5$. Så længden hypotenusen er 5.

Selve navnet Pythagoras er kendt af de fleste elever fra folkeskolen, og ligeledes bør termen hypotenuse også være kendt.

Sinus og Cosinus

Nedenstående cirkel kaldes en enhedscirkel, den har centrum i (0,0) i koordinatsystemet og har en radius 1. Dernæst kan man indføre størrelserne *sinus* og *cosinus.*



Figur 10 Enhedscirklen[2]

Punktet $(cosv, sinv)$ ligger på enhedscirklen og venstre vinkelben skærer cirklen i dette punkt, som kaldes retningspunktet.

[2] Billedet er taget fra nedenstående hjemmeside og er bearbejdet af mig.
http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Trigonometri/sinus

Definition (Carstensen, Frandsen og Studsgaard, 2005)**:**

Cosinus til en vinkel v er x-koordinaten til vinklens retningspunkt.

Sinus til en vinkel v er y-koordinaten til vinklens retningspunkt.

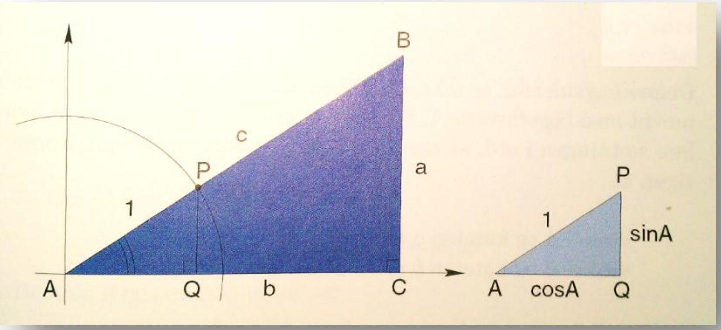
På lommeregneren vil der stå [sin] og [cos], fx $cos 50° = 0{,}6428$, kan fås ved at benytte knappen [cos]. Man kan ligeledes gå den omvendte vej, dvs. fx vi får $cosv = 0{,}6428$ vide, og så kan vi trykke på $[sin^{-1}]$ på lommeregneren og få $v = 50°$.

Den Retvinklede Trekant

Lad der være givet en vilkårlig retvinklet *ABC,* lad *C* være den rette vinkel og *A* og *B* de to spidse vinkler. Lad endvidere *c* have længden 1. Så er $sinA = a$ og $cosA = b$. Da $c = 1$, kan vi i stedet skrive

$$sinA = \frac{a}{c} \qquad \text{og} \qquad cosA = \frac{b}{c}$$

Da alle retvinklede trekanter er ensvinklede, når blot A er givet, er forholdet mellem a og c altid det samme for fast A, dvs. $sinA = \frac{a}{c}$ for alle retvinklede trekanter med fast vinkel A. Et helt analogt argument giver at c $cosA = \frac{b}{c}$. Vi har altså at sinus til en spids vinkel i en retvinklet trekant er lig med modstående katete divideret med hypotenusen, og cosinus til en spids vinkel i en retvinklet trekant er lig med hosliggende katete divideret med hypotenusen.



Figur 11 Retvinklede trekanter (Carstensen, Frandsen & Studsgaard (2005), s.137)

Tangens

Den tredje trigonometriske størrelse, der vi skal indføre nu er, tangens. Den skrives som $tan\ v$, til en vinkel v. Og den er defineret som;

$$tanv = \frac{sinv}{cosv} \qquad ,cosv \neq 0$$

Af det ovenstående fås at

$tanA = \frac{sinA}{cosA} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$, dvs.

Tangens til en spids vinkel i en retvinklet trekant er lig med den modstående katete divideret med den hosliggende katete. På Figur 11 Retvinklede trekanter (Carstensen, Frandsen & Studsgaard (2005), s.137) er $tanA$ lig med længden af det linjestykke, der går fra punktet (1,0) lodret op til skæring med linjen *AB*. Det ses, at *sin*, *cos* og *tan* alle fås som forholdet mellem to længder, dvs. de er dimensionsløse, rene tal.

Det ser ud til at der er en del termer, der er nødt til at indføres for at institutionalisere emnet trigonometri. Fx er ”hosliggende”, ”modstående”, ”tangens”, ”cosinus”, ”sinus”, ”spids vinkel”, ”enhedscirklen”, ”retningspunkt”, ”koordinatsystem” og ”vinkelben” nogle af dem, som stikker i øjnene. Men som jeg tidligere har været ind på i forbindelse med gruppering af ord, vil man her måske være i stand til at gruppere disse termer.

Termerne ”hosliggende”, ”modstående”, ”spids vinkel”, ”enhedscirklen”, ”retningspunkt” og ”vinkelben” er matematiske termer, men de giver også den, der ikke kender deres matematiske betydning, en række associationer, der hjælper den person, der har dansk som modersmål, til så at sige at komme på talefod med begrebet med der samme. Fx vil ordet ”hosliggende” vække associationer i retning af noget, der befinder sig hos nogen eller noget, fx en bog der ligger hos Frederik.

Men termerne ”tangens”, ”cosinus”, ”sinus” og ”koordinatsystem” er nok lige så fremmede for etsprogede som for tosprogede elever. Derfor mener jeg at disse termer tilhører det matematiske register snarere end de tilhører det danske dagligsprog.

OBSERVATION OG ANALYSE

Dette afsnit handler om observation og analyse af nogle udvalgte episoder fra transskriptionerne. Episoderne består af samtaler mellem de elever, som jeg har fået lov til at følge gennem deres matematikundervisning. Nogle elever har deltaget i gruppearbejdet selv om de ikke var blandt dem, jeg har observeret, så jeg har deres bidrag til dialogerne, men ingen noter fra dem. Næsten alle episoder stammer fra 2. HF-klassen på det ene gymnasium, og der har ikke været nogen episoder fra 1.g-klassen på det andet gymnasium, som jeg kunne bruge. Dette skyldes, at 2.HF-klassen har haft mere klassisk undervisning efterfulgt af gruppearbejde, og selve gruppearbejdet er også foregået i den samme klasse, som de har fået undervisning i, og dermed har der ikke været støj fra åbne miljøer. Eleverne var også lidt mere modne sammenlignet med 1.g-klassen.

Undervisningen men 1.g-klassen er to gange foregået på det såkaldte gruppemiljø, hvor der er op til 6-7 store runde borde på gangen, og der er en whiteboardtavle. Der har været meget støj pga. omgivelserne. Den ene gang var undervisningen foregået på et såkaldt individmiljø, der var tale om en forberedt undervisning til almenlig klasseundervisning, men pga. ændring af skemaer/lokaler fra administrationens side (der var også booket lokaler til brug til eksamen, fx NV-eksamen), har det ikke været så anvendeligt til optagelserne, da der blev brugt tid på at få projektoren til at virke og det bageste del af klassen ikke var så koncentreret i timen pga. miljøet. De andre 2 moduler med 1.g-klassen har været helt almindelig klasseundervisning i form af forelæsning, og der var der heller ikke nogen dialoger, der var brugbare for mig.

Der har faktisk været yderligere en modul med eleven Veli, da han har valgt at skifte klasse pga. studieretning. Dette er så en episode, jeg skal komme ind på under dette afsnit. Her handler emnet så om trigonometri. Det er indledende og er stort set nyt for eleverne. Der er kun én episode, der handler om trigonometri; resten handler om differentielregning.

Vi skal lægge mærke til, at transskriptionerne er udformet så de afspejler så nøjagtigt som muligt hvordan eleverne udtaler og danner sætninger, da jeg mener at det er vigtigt for at se om der er nogle sproglige faktorer. Derfor kan nogle steder i dialogerne virke fejlbehæftede. Der er dog også enkelte steder som er rettet til et sprog der er nærmere skriftsprog for at opfatte teksten.

Der vil være en gennemgang af episoderne i form af præsentation af data og dernæst en analyse af dem. Ved præsentation af data vil jeg prøve at billedliggøre observationerne så godt som muligt, dvs. der vil komme en del forklaringer mellem data(transskriptionerne), så man fx kan se for sig hvem der sidder overfor hinanden, eller om læreren er siddende eller stående, når han hjælper gruppen. Det kan måske give uklarheder, hvis man ikke gjorde det, fordi der ikke er nogen videooptagelser af mine observationer.

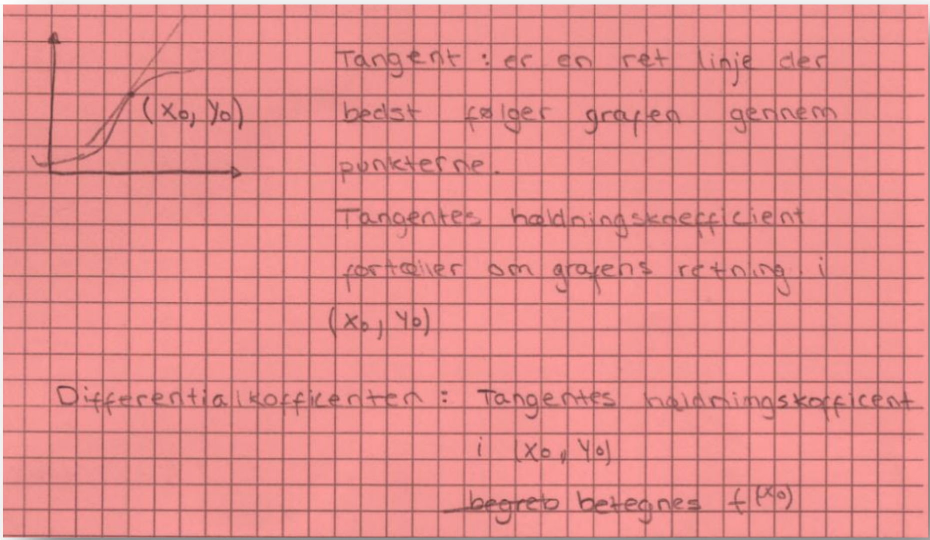
Episode 1

Denne episode er en samtale fra 2.HF klassen. Det er især i første lektion der bliver gennemgået noget nyt stof. Ved de andre lektioner gennemgår nogle elever opgaver på tavlen med efterfølgende gruppearbejde. En helt tredje lektion består kun af gruppearbejde.

Observation

Efter en kort præsentation af hvad læreren gennemgår på tavlen vil jeg gøre rede for to elevers gruppearbejde. Første del af elevernes grundbog er gennemgået, og i denne lektion er de begyndt på den anden del af bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)), der handler om differentialregning. Den første del af bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)) handler om funktioner og indeholder bl.a. følgende kapitler: Variabelsammenhænge, Proportionalitet, Vækstmodeller, Funktionsteori og Andengradspolynomier.

Læreren har gennemgået opgaver fra det sidste emne i ca. 20 minutter, derefter er de begyndt på differentialregning. Læreren indleder emnet ved at definere en tangent og gøre rede for begrebet differentialkvotient. Her nedenfor kan man se noget af Yasmins noter fra tavlen.



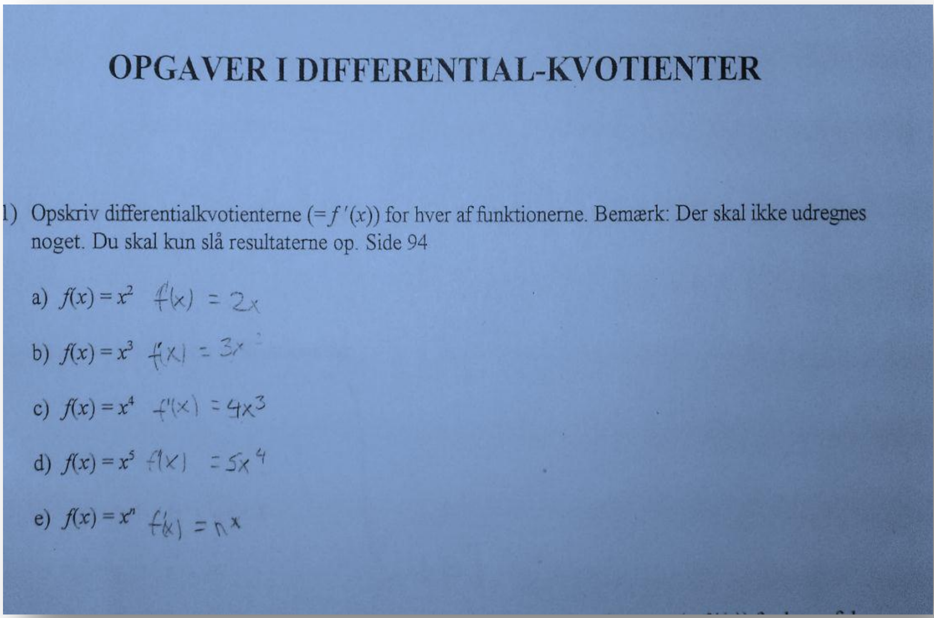
Figur 12 Yasmin's noter fra tavlen i 1.lektion

Læreren har også skrevet en tabel op på tavlen, der indeholder stort set den samme som side 94 i elevernes bog (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)):

f(x)	f'(x)
$\mathbf{x^2}$	$2x$
$\mathbf{x^3}$	$3x^2$
$\mathbf{x^4}$	$4x^3$
$\mathbf{x^n}$	nx^{n-1}
$\mathbf{ax + b}$	a
$\mathbf{k}$	0
$\mathbf{x}$	1
$\mathbf{x^{-1} = \frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{\mathbf{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Tabel 4 Specielle regler

Dernæst skriver han tretrinsreglen op og udfører beviset. Måden at udføre undervisningen på er meget klassisk, først ved bevisførelsen dukker der dialoger op mellem læreren og eleverne. Efter klasseundervisningen uddeler læreren opgaver, og eleverne går i gang med at arbejde med dem. Her nedenfor kan man se, hvilke delopgaver de skal arbejde med i opgave 1. Besvarelserne, der er skrevet på opgavearket, tilhører Yasmin.



OPGAVER I DIFFERENTIAL-KVOTIENTER

1) Opskriv differentialkvotienterne ($= f'(x)$) for hver af funktionerne. Bemærk: Der skal ikke udregnes noget. Du skal kun slå resultaterne op. Side 94

a) $f(x) = x^2$ $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^3$ $f(x) = 3x$

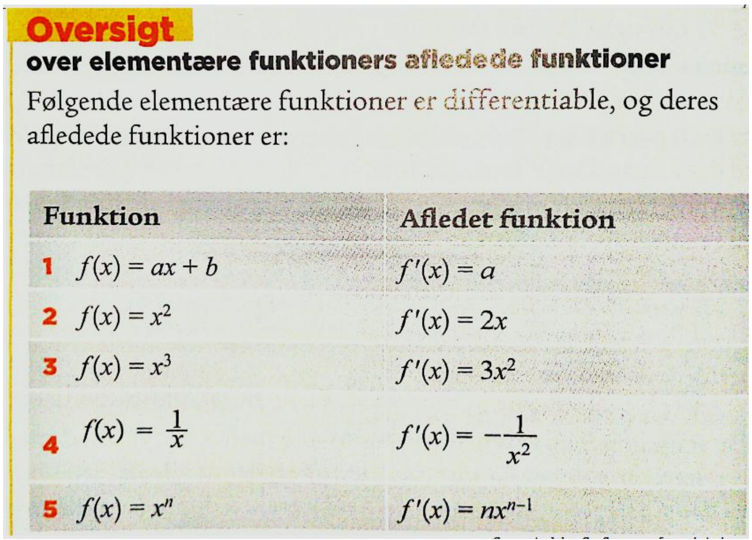
c) $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$

d) $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

e) $f(x) = x^n$ $f(x) = nx$

Figur 13 Første gang løser Yasmin sådanne opgaver.

Eleverne bliver blot henvist til side 94 i bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)), og de skal bruge nedenstående oversigt.



Oversigt

over elementære funktioners afledede funktioner

Følgende elementære funktioner er differentiable, og deres afledede funktioner er:

	Funktion	Afledet funktion
1	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
2	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
3	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
4	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
5	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Figur 14 Specielle regler fra bogen (Jensen, Jessen og Nielsen, 2006, s.94)

Der er faktisk igen tale om udregninger som i den første opgave; det nævner læreren også i opgaven.

Der foregår en samtale mellem Saida og Yasmin, der følger lidt længere nede. Saida spørger mig om, hvor hun skal kigge på side 94 i bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)) for at løse opgaven, og jeg peger på ovenstående oversigt. Derefter finder hun f' til funktionen $f(x) = 2x$.

1.1 SAIDA: *Her står der noget andet.*

1.2 SD: *Så find den her.*

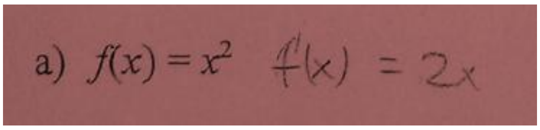
1.3 SAIDA: O*kay, den er i hvert fald der, det er lige med 2x.*

1.4 SD: *ja.*

Nu begynder en samtale mellem Yasmin og Saida. Det er Yasmin, som prøver at hjælpe Saida, så hun kan få en mening med det, hun laver.

1.5 SAIDA: *Det giver ikke mening*

1.6 YASMIN: *Du vender det bare om, du skriver det her 2 tal, det står der oppe. Så skriver du 2 stort og så det ved siden af, dvs x.*



Figur 15 Yasmin's besvarelse af opgave a)

1.7 SAIDA: *Det det, der står her.*

1.8 YASMIN: *Altså vender du det om, prøv lige at se.*

1.9 SAIDA: *Nåååååååå.*

1.10 YASMIN: *Så skriver du 2 stort i stedet sådan småt og så skriver du x ved siden af.*

1.11 SAIDA: *Jeg forstår det godt nu indtil videre.*

1.12 YASMIN: M*å jeg lige så? Er det lige med der? Ja.*

1.13 SD: *Måske gør jeres lærer det således. Hvad giver så f'(x)? Det var nok det han sagde efter…*

Jeg får dem til at skrive f'= og så resultatet, i stedet for bare resultatet, fx ved opgave a) har de først skrevet

$$\text{a) } f(x) = x^2 \qquad 2x$$

Bagefter har de rettet til

$$a)\ f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x.$$

SAIDA: *Så skal vi vel skrive 2x, er lige med 2x. Har jeg ret?... Okay, så har jeg gjort det rigtigt.*

Analyse af episode 1

Det er første gang de skal løse opgaver i differentialregning. Læreren har overgivet miljøet til eleverne, dvs. vi befinder os i en adidaktisk situation. Vi har noget der ligner en lokalvalideringssituation, således at eleverne får bekræftet de enkelte opgaver, før de fortsætter. Der er en tendens til at søge typeopgaver, det er nærmest blevet en vane hos denne gruppe. Man kan sige, at miljøet er opbygget af det, fordi læreren skynder sig fra den ene elev til den anden; dette medfører bl.a. Topaze-effekter.

Eksponenten er åbenbart et glemt eller ikke kendt udtryk for både Yasmin og Saida. Derfor nævner Yasmin eksponenten som noget småt. Her er det tydeligt, at bl.a. begrebet ”eksponent” ikke er for nylig præsenteret viden. Det er heller ikke viden som eleverne skal institutionalisere i disse lektioner, men noget der er gennemgået i forrige kapitler i bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)). I øvrigt bør de have kendskab også til de begreber der præsenteret året før.

Ordet ”eksponent” er ikke et man bruger tit i dagligdagen. Men ordet kan faktisk også bruges i almindeligt dagligdags sprog.

Selv om ordet er institutionaliseret og er brugt før i deres bog (Jensen, Jessen & Nielsen (2006), s.38), undlader de at bruge ordet. Det kan skyldes tosprogede elevers udfordringer med sproget. Det er ikke et ord som de vil bruge derhjemme, og det står nogenlunde klart, at de ikke kender den matematiske betydning af udtrykket. Derfor kan de have svært ved at billedliggøre, hvad det betyder. Der er en mulig sproglig dimension i denne didaktiske mikrokontrakt, det virker nemlig lidt mystisk at eleverne ikke har forstået denne institutionaliserede viden endnu. Men det er også svært at afmystificere situationen om at det skyldes en sproglig variation. Men episoden afspejler nogle særlige besværligheder i sproget i matematikundervisningen.

Ifølge mikrokontrakten for den didaktiske status af viden har læreren forventninger om, at eleverne har kendskab til en del begreber angående funktioner, i dette tilfælde begrebet ”eksponent”.

For eksempel har eleverne også givet udtryk for forskelle mellem det mundtlige og det skriftlige sprog i matematikundervisningen. Fx nævner Yasmin, at efter at man har differentieret, bliver den stor (altså tallet to) og kommer foran x, siger hun. Dvs. de er heller ikke klar over at der står gange mellem 2 og *x*. Den samme fejl laver de også i de andre lektioner. Selve betydningen af symbolerne er ikke helt på plads, derfor der er tale om en semantikfejl i denne mikrokontrakt.

Når Yasmin forklarer Saida i 1.6, hvordan hun skal skrive resultatet efter differentiering, er Saida stadig ikke helt klar over, hvad Yasmin mener. De manglende termer gør det svært for hende at forklare, de har nærmest deres eget paradigme, der består af dagligsprog. Saida siger nemlig i 1.7, at der allerede står som Yasmin siger. Altså bare at "vende det om", "at skrive 2 stort" eller "ved siden af", alle disse udtryk er direkte taget fra dagligsprog. De nye fagudtryk er ikke i de sætninger de danner, men heller ikke de særlige udtryk, som følger med dette nye emne. Yasmin forklarer det igen i 1.8 ved samtidig at pege på papiret, at "vende det om" er ikke et udtryk som er brugt af læreren eller bogen (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)). Det er et særligt udtryk som eleven har dannet for at lukke hullet for det manglende matematiske register. Man vender faktisk ikke noget om, hvis jeg skal forklare med hendes ord, så kommer 2 tallet ned foran x i en forstørret version.

Det vil faktisk være lettere for Saida at forstå, hvis Yasmin sagde *" 2 tallet kommer ned foran x i en forstørret version"*. Det her er tydeligt et tegn på at Yasmin selv ikke klar over, hvad bare at *"vende det om"* betyder.

Som sagt gentager Yasmin denne hjemmelavet udtryk igen, men denne gang viser hun også på papiret, hvad det betyder bare at *"vende det om"*. Og så kommer der først et "Nååååååååå" fra Saida.

Hvis man betragter x^n rent typografisk, som x i stuen, *n* på første sal, vil en typografisk algoritme for differentiation lyde:

Ombyt *x* og *n*, skriv begge i stuen (og lige store, *n* skal have samme størrelse som *x*)
Giv *x* en ny eksponent, $n - 1$.

Hvis *n* specielt er 2, kan den sidste linje undværes.
Der er her ikke tale om nogen som helst matematisk forståelse, kun en manipulation af symbolerne, en rent formel fremgangsmåde.

Opgave e) i Figur 13 er ikke regnet/skrevet rigtigt, Yasmin har blot byttet om på *x* og *n* efter differentiation, så der står n^x i stedet for nx^{n-1}. Hun er heller ikke klar over, at der skal et mærke på *f* efter differentiering. Det kan ses tydeligt på den forstørrede Figur 15.

Episode 2

Denne episode er fra en samtale i 3.lektion på 2.HF klassen. Arbejdsformen i denne lektion har kun været gruppearbejde. Læreren har delt opgaverne ud til eleverne i form af papir. Yasmin, Saida, Maria og en anden elev, Lotte, er også med i denne gruppe. Eleverne danner selv deres grupper og hverken jeg eller læreren har haft nogen effekt på deres gruppedannelse. Det eneste jeg har udvirket, er at Yasmin og Saida skal sidde tæt sammen og arbejde også sammen under gruppearbejder. Det har jeg sagt til dem allerede i første lektion, så det vil være nemmere for mig at observere dem. Men andre elevers deltagelse i denne gruppe har helt klart beriget mit data. Fx denne episode er en dialog mellem Maria og Lotte.

Observation

Lotte beder Maria om at forklare hende opgave a), som er

$$Bestem\ f'(x) for\ hver\ af\ funktionerne:$$
$$a)\ f(x) = 5x^2$$

Her starter Marias hjælp til Lotte. Maria og Lotte sidder ved siden af hinanden og overfor dem sidder Yasmin og Saida.

2.1 LOTTE: *vil du ikke lige forklare mig det Maria?*

2.2 MARIA: *jov, vi har 5x …[uforståeligt]… jeg tror det er den vi skal bruge. Se! k bliver bare til k og den bliver til 5. Så skal du skrive f'(x)… så skal du kigge på x i anden, så hvad bliver det. Det er denne her. Så bliver det til et tal x og det her tal minus én. Det tal der står her oppe skal du skrive her nede.. Så skal du skrive 2 nede.*

Maria vælger faktisk den rigtig regel til at differentiere denne opgave med, nemlig G3.

G3	$\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)' = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

Og derefter benytter hun også speciel regel S4.

S4	$\boldsymbol{x^n}$	$\boldsymbol{nx^{n-1}}$

2.3 LOTTE: *hvor skal jeg skrive 2?*

2.4 MARIA: *her ved siden af..*

2.5 MARIA: *her nede, så står der 2 gange*

2.6 LOTTE: *2*

Lotte vil have Maria til at pege på nøjagtigt, hvor hun skal placere dette 2 tal.

2.7 MARIA: *hhmm, og x. du skal bare bytte om på de her to.*

2.8 LOTTE: *Hvad skal jeg så skrive nu?*

2.9 MARIA: *Så skal du skrive. Tallet minus 1, så det 1, fordi du siger 2-1. Kan du se det?*

2.10 LOTTE: *nej, jeg er fuldstændig […], jeg kan ikke finde ud af matematik. Det kan jeg virkelig ikke.*

2.11 MARIA: *Se, Du ved godt hvis du kun kigger på x2* ***[Hun siger faktisk x 2 og ikke x i anden]*** *ikke.* ***[…]*** *x og så et tal, n det er et tal ikke. Så bliver det til, så laver du om til f', så skal du sige n-tallet ned foran, du skal sætte tallet ned foran, det rykker du ned og skriver x ved siden af. Og så skriver du…*

Maria forklarer Lotte om reglen S4 og hvordan hun skal bruge det og hvad *n* betyder i reglen.

2.12 LOTTE: *skal jeg skrive 2x? 1?*

2.13 MARIA: *oppe så skal du skrive, n-1, altså tallet minus 1. Det er bare 1. Forstår du?*

2.14 LOTTE: *jaja, hvad skal jeg så?*

2.15 MARIA: *du kan også bare skrive 1, fordi du ved det er 1.*

2.16 MARIA: *og så kan du bare sige 5 gange 2, det er 10, og så x i anden, eller x.*

2.17 SAIDA: *Maria?*

2.18 LOTTE: *skal man ikke skrive det op?*

2.19 MARIA: *hva?*

2.20 LOTTE: *skal man ikke skrive det op?*

2.21 MARIA: *jov*

Analyse af Episode 2

Dansk er i dette tilfælde deres modersmål.

Terminologien er ikke helt på plads, når Maria forklarer Lotte, hvordan hun skal løse denne opgave. Selve sproget er meget præget af naturligt sprog, når hun siger *x2* i stedet for *x i anden*.

Det har været muligt for Maria at opstille en formel regel for hvordan hun skal løse denne opgave. Det ser måske ud til at Maria ikke har praksisbaseret kendskab til brug af nogen matematisk repræsentationsformer. Lotte er behersket af forvirring, og hun kan ikke rigtig komme videre efter Marias forklaring på løsningen. Derfor, ved slutningen af samtalen ønsker hun, at Maria bekræfter hendes løsning.

LOTTE: skal jeg skrive 2x? 1? (2.12)

Lotte henter hjælp fra det didaktiske miljø, men der er en del sproglige barrierer, der skaber en uheldig Topaze-lignende effekt. Maria bliver simpelthen nødt til at give svaret til sidst. Men selve kommunikationsmidlet har måske været med til at starte denne effekt. Det fagsprog, man opbygger igennem de dagligsproglige koder er ikke kommet til udtryk i denne episode, hvilket man måske kunne have forventet. Det er mere forståeligt fx at undlade at bruge ordene differentialkvotient eller f-mærke, men selve ordet eksponent er som sagt noget, eleverne har haft kendskab til fra s.38 i deres grundbog (Jensen, Jessen & Nielsen (2006)), i hvilken de er nået til et andet kapitel på s.84. De manglende fagsproglige koder gør faktisk ”valideringssituationen” vanskeligere for Maria.

Maria siger også, at Lotte skal skrive tallet minus 1 (2.9). Her er situationen også lidt forvirrende for Lotte, men Maria afhjælper manglen på termer ved at pege på tallet hun vil have minusset med. Der er selvfølgelig ikke tale om en rigtig valideringssituation, da dialogen foregår mellem to elever i en adidaktisk situation. Men det minder lidt om Topaze-effekten, da Maria prøver at forklare Lotte under denne mikrokontrakt, hvordan man skal løse opgaven ved at kombinere specielle og generelle regler til differentialregning. Og det tackler hun faktisk godt nok, men rationale forklaringer har hun lidt svært ved. Maria anvender den sprogkategori, som Pimm & Keynes betegner som ”informal spoken language”. Der er ingen tegn til at hun bevæger sig frem mod at beherske et ”formal written language”.

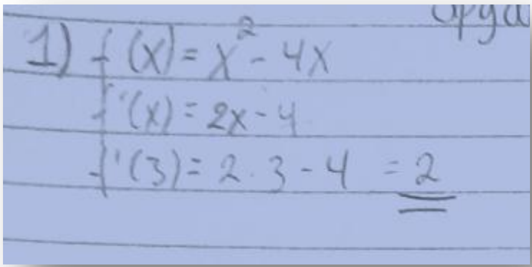
Episode 3

Episoden er en dialog fra 2.HF klassen.

Der er 4 personer i gruppen. Yasmin er i gang med at forklare Lotte opgave 1. Saida og Maria snakker ikke særlig meget i denne episode. Yasmin er tosproget her.

Observation af episode 3

Episoden handler om nedenstående opgave. Det er Yasmin, der prøver at gøre rede for løsningsmetoden for Lotte.



Figur 16 Besvarelse af opgave 1)

Specielle regler er skrevet op på tavlen.

3.1 YASMIN: *de er dem når man har regnet stykket?? Så ser man hvilke af disse formler man skal bruge, hvis formlen nogenlunde ser sådan der ud, er det den man bruger, og k det er fx her hvis der nu havde stået f (x), og så skal der står x i anden, så minus bare 4 uden x bag i, ik'?*

Hun kan ikke kombinere reglerne så godt som Maria gjorde. Det ser ud til at hun bruger først G3 på den anden led, så hun slipper fra et *x, dvs.* hun er klar at det er S7 hun bruger.

$$f(x) = x^2 - 4$$

Det giver ikke mening når hun siger at *"så står der x og det var bare et tal ik'?"*

3.2 YASMIN: *så når man skal regne det ud, så giver det 2 x, det der, der kigger man her over, så står der x og det var bare et tal ik'? Så giver det bare tallet og x, kan du se det?*

Men i hvert fald hun differentierer også det første led.

3.3 Lotte: *nej*

3.4 YASMIN: *se når man kigger på den her ik'? Vi lader som om der står x 2 der ik'? og der står to der, så når det er man kigger på, hvordan man skal regne det ud og når man skal regne det ud skal man huske på det der ting, f1 hedder det ik'? så bliver det til tal, og så bliver det til x, så skal man omskrive det ik'? til to x, også minus og det der er k.*

Yasmin er ikke klar over at *f'* udtales som f-mærke, i stedet siger hun *f1*. Men når hun siger ”regne det ud”, så mener hun at hun differentierer.

3.5 LOTTE: *Hvad så det der n - 1*

3.6 YASMIN: *Det bare noget andet, det er med her.*

3.7 Lotte: *Og så bliver 4 hvis nu er man, iiihhhmmm…*

3.8 YASMIN: *Man skal finde ud af hvad der skal stå, der skal nemlig ikke stå 4 … [ikke forståeligt], så kigger man på, når der ikke står noget bag i, det står ikke x, eller x i anden, så det et k, og så kigger man på k, og så giver det 0. Så det bare 0. Så derfor det her formler det er sådan her dvs. hvis tallet starter bare uden noget bag i, så det fx den. Derfor er det sådan her.*

Her prøver Yasmin at redegøre brug af S6.

3.9 LOTTE: *Det lidt besværligt, det svært at forstå, det tog mig virkelig lang tid.*

3.10 YASMIN: *Hvis du ikke forstår det nu vil du nok forstå det.*

Analyse af episode 3

Denne episode er interessant, da der kræves samme kombination af regler som i

Episode 1. Men denne gang er det en anden opgave og det er Yasmin som prøver at forklare den samme person, dvs. det er Lotte der benytter det didaktiske miljø. Der er lidt forskel på sprogbrugen sammenlignet med Marias forklaringer, fx (3.1) siger hun ”uden *x* bag i” ved slutningen af sætningen. Eller på samme måde i 3.8, ”uden noget bag i”. Symbolsproget er mangelfuldt, ligeledes er der tale semantikfejl, dvs. hun kender ikke betydningen af symbolerne. Hvis man sammenligner episoderne Analyse af Episode og Analyse af episode 3, kan man tydeligt se, at der er noget, Yasmin ikke helt har forstået, hendes forklaringer er ikke rationale eller overbevisende overfor Lotte.

Selve udtrykket ”noget x bag i”, kan måske komme ind under den kategori, jeg tidligere har grupperet med navnet ”særlige ord og udtryk”. Det er godt nok noget hjemmelavet af Yasmin, men det giver åbenbart mening for hende, som er meget inspireret af dagligsproget.

Yasmins tekniske og symbolske sprog er en videreudvikling af dansk, der er hendes andetsprog, ikke hendes modersmål, og dette kan være en årsag til hendes manglende færdigheder indenfor problemløsning. Men sproget er en nødvendig forudsætning, ikke en tilstrækkelig. Det ser ud som om Yasmin ikke er klar over at et tal efterfulgt af et x betyde r at tallet multipliceres med x, og her er det ikke sproget, der er årsag til problemet – men hun er nødt til at kunne sproget for at kunne modtage vejledning/undervisning så hun kommer til at kende tingenes sammenhæng.

Maria er fx klar over at når tallet 2 står foran *x*, kaldes det gange (2.5); det nævner hun en gang imellem, når hun forklarer noget.

Episode 4

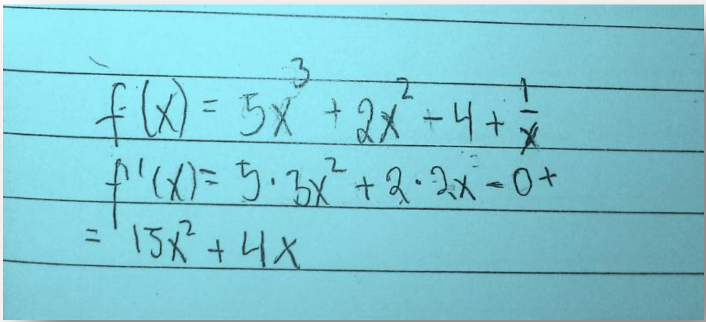
Denne episode er også taget fra en dialog i 2. HF klassen. Det er en af de næste opgaver fra den foregående episode (der arbejdede de med opgave a)). De er nået til opgave f), der ser lidt anderledes ud for eleverne end de foregående. Denne sammensatte funktion indeholder nu også en reciprokfunktion.

Observation af episode 4

Eleverne arbejder med følgende opgaver, denne episode handler om opgave f). Dialogen foregår mellem Saida og læreren. Her nedenfor kan man se alle delopgaverne i denne opgave.

$$Bestem\ f'(x) for\ funktionen:$$

$$f)\ f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{1}{x}\ ; x \neq 0$$



Figur 17 $\frac{1}{x}$ **mangler at blive be handlet**

Læreren er kommet over til Saida efter hendes markering og hun viser ham den ovenstående løsning.

4.1 SAIDA: *Vil du ikke se om denne her er rigtig?*

4.2 L: *jov*

Læreren accepterer at se om det hun har lavet er rigtig og går i gang med at se igennem den stående.

4.3 L: *den er ikke rigtig, nej.*

4.4 SAIDA: *Hvad er der forkert?*

Læreren reagerer allerede og siger at hun ikke har lavet den rigtigt. Billedet ovenfor er den sidste version af hvad hun har lavet, derfor man kan ikke se at hun har skrevet $2x^3$.

4.5 L: *du har byttet om på 2 og 3,*

4.6 SAIDA: *nej det har jeg ikke*

4.7 L: *jov, du skal altid trække 1 fra eksponenten, så bliver det til 2.*

4.8 SAIDA: *Altså 2 der op?*

4.9 L: *hvor kom 2 fra her?*

4.10 SAIDA: *Det denne her.*

Hun peger på det andet led {$2x^2$*}.*

4.11 L: *nej du er stadig i gang med denne her, 5 tallet bliver stående x i 3. er 3x i... Sådan her. Hvad står der 7 eller 2?*

Læreren har nu rettet det første led i løsningen og ser på det andet led, der kan han ikke se om hun har skrevet 7 eller 2.

4.12 SAIDA: *Hvor? Her? 2.*

4.13 L: *okay*

4.14 SAIDA: *er det så, bliver det så til 1?*

4.15 L: *2 gange x i 2., hvad bliver det til?*

4.16 SAIDA: *2x i 1.*

Saida stoppede efter hun sagde 2x, men straks hviskede Yasmin "i første", hvor efter Saida gentog.

4.17 SAIDA: *Skal det stadig stå der?*

Læreren er stadig i gang med at rette det Saida har lavet indtil videre.

4.18 L: *Det er det samme du har gjort her oppe, helt det samme.*

4.19 SAIDA: *Det kan jeg ikke huske.*

4.20 L: *Det nytter ikke noget, jeg bare siger det, det få du ikke noget ud af.*

4.21 SAIDA: *skal Der står 2 her oppe?*

4.22 L: *Nej*

4.23 SAIDA: *1?*

4.24 L: *du skal trække 1 fra eksponenten. Der står 2 her, hvad bliver det her til?*

4.25 SAIDA: *1?*

”Ja”, siger en fra gruppen. Saida skriver dernæst 1 på eksponentens plads, men bliver advaret af læreren, om at hun ikke behøver skrive noget overhovedet.

4.26 SAIDA: *Det var også det jeg sagde.*

4.27 L: *Det behøver du ikke at skrive.*

4.28 SAIDA: *Hvorfor behøver man ikke at skrive, hvis man alligevel skal sige det?*

4.29 L: *Fordi x i første er det samme som x, hvad er pænest?*

4.30 SAIDA*: jeg hader ham der har fundet på matematik!*

(siger Saida, imens læreren er i gang med at skrive $x^1 = x$ på tavlen)

4.31 SAIDA*: x (svarer hun på lærerens spørgsmål)*

Analyse af episode 4

Saida udtrykker sig upræcist og de sproglige vanskeligheder gør udtrykkene mere upræcise. ”Altså der op”, hun peger på det sted på papiret, i stedet for at sige det mundtligt. Ordet ”eksponent” kan ikke være noget nyt for hende, da de har mødt udtrykket adskillige gange undervejs i forbindelse med emnet ’funktioner’. Hun behøver kun at se efter sin tabel over de specielle regler, hvorved hun vil opdage at hun blot skal bruge specialreglen S2.

Samspillet mellem mundtligt dagligsprog og symboler på papiret er noget man hurtigt lægger mærke til. De snakker hele tiden sammen, og de har et stykke papir foran sig hvor der er en hel masse tegn. Den sproglige udfordring består i at man skal bruge sit mundtlige sprog for at forstå det her.

Saida ønsker, at læreren validerer hendes løsning af denne opgave før hun går videre. Det er meget typisk for Saida, og det er en klassisk kontraktadfærd. Situationen er ikke adidaktisk, idet læreren er til stede.

Saida virker som om hun ikke er sikker på, hvad læreren mener med at trække 1 fra eksponenten (4.7). Derfor reagerer hun med ”Altså 2 der op?”. Men det er en typisk Topaze-effekt der opstår her, læreren har allerede sagt at eksponenten får værdien 2 i stedet for at henvise hende til fx at bruge regel S4. Det viser, at ordet ”eksponent” ikke er kendt (selv om det er noget der er institutionaliseret), når hun spørger om det er der oppe. Dette ord vil måske også være ukendt for en etsproget elev. Men det er ikke muligt at konstatere i denne analyse, om det også er ukendt blandt de etsprogede elever såvel som her hos denne tosprogede elev. Men i hvert fald er der tale om en sproglig udfordring for Saida, der forårsager noget besvær ved at ville forstå lærerens kommentar (eller rettere sagt svar). Denne sproglige vanskelighed kan være med til at skabe en uheldig effekt i den didaktiske kontrakt.

Læreren virker også meget ivrig efter at danne faglig indsigt hos eleven her. Endvidere ser opgaverne ud til at være designet således at eleverne formelt opnår succes. Der er ikke rigtig nogen matematisk forståelse, det virker som en rent formel fremgangsmåde, hvilket er en Jourdain lignende effekt. Det er ikke så svært at konkludere, at eleven ikke har opnået den tilsigtede viden, hun prøver bare ikke at miste tråden under denne manipulation af symboler. Hun har fået et par skriftlige hints og er dermed stadig med i spillet. Hun snyder sig selv ubevidst og tror at det er på denne måde man lærer at differentiere. Men på den anden side ved jeg ikke, om læreren er klar over, om han har lært hende noget på denne måde, men han har i hvert fald holdt hende i spil, nu kan hun roligt gå videre med den næste opgave.

Men den onde cirkel vil fortsætte i de kommende opgaver, da hun ikke har lært hvad hun skal gøre. Nu vil hun måske bruge denne løsning som læreren har kigget og rettet igennem som et eksempel, der ligner den i de kommende opgaver. Der er måske et misbrug af analoge miljøer under dette adidaktiske miljø, hvilket læreren også peger på ved at sige, nemlig at der er opgaver, der ligner hinanden (4.18).

Det er ligefrem et hjemmelavet argument (4.29), hvis man kan kalde det et argument overhovedet, når læreren mener, at det er pænest at skrive x fremfor at skrive x^1. Jeg vil ikke ligefrem kalde det et metakognitivt skift, men det er meget oplagt, at argumentet er med til at forvirre eleven. Nu er Saida i tvivl om, hvornår hvad er pænest i matematik. Hendes reaktion her siger sig selv, hvilke tanker hun slås med i hovedet lige nu, når hun siger;

”*jeg hader ham der har fundet på matematik!*”.

Det pæneste er det der kræver færrest symboler, dvs. alt hvad der kan undværes skal undværes, i dette tilfælde x.

Episode 5

Denne episode er taget fra en dialog i 4.lektion i 2.HF klassen på Avedøre gymnasium.

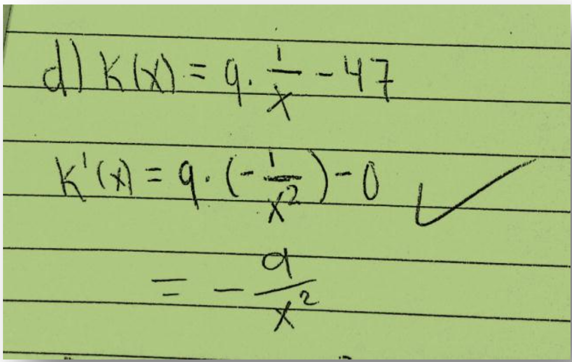
Observation af episode 5

De er i gang med at arbejde på deres aflevering, der er ikke rigtig nogen hjælp fra læreren.

Opgaven lyder således:

$$Bestem\ uden\ hjælpemidler\ differentialkvotienten:$$

$$d)\ k(x) = 9 \cdot \frac{1}{x} - 47$$



Figur 18 Saida' besvarelse af opgave d)

5.1 *YASMIN: skal vi gå videre. Fandt du det Saida?*

5.2 *SAIDA: Nej, bare gå videre.*

5.3 *YASMIN: Vi er blevet færdige med c'eren, eller jeg har lige skrevet det af.*

5.4 *YASMIN: ups det d, jeg skrev k.*

Her bemærker Yasmin, at hun har noteret opgaven som opgave k) og det retter hun her til d). Det skyldes, at selve funktionen er $k(x)$.

5.5 *YASMIN: så!*

5.6 *MARIA: husk k i mærke.*

5.7 *YASMIN: ja, og så 9.*

5.8 *MARIA: ja*

5.9 *YASMIN: er det så minu.. minus?*

5.10 *MARIA: jeg tror, det er sådan. Jeg ved det ikke.*

5.11 *YASMIN: og så minus igen?*

5.12 *MARIA: ja, minus 0.*

5.13 *MARIA: og så ved jeg ikke igen.*

[Yasmin siger noget, som man ikke rigtig kan forstå/høre, men jeg tror hun siger den nedenfor understregede sætning.]

5.14 *YASMIN: <u>Vi kan bare gå videre til 2'eren</u>*

5.15 *YASMIN: er du færdig Saida?*

5.16 *SAIDA: hvad siger du? Undskyld, hvad sagde du?*

5.17 *YASMIN: Er du færdig?*

5.18 *SAIDA: jeg mangler d'eren.*

5.19 *YASMIN: er det sådan her, den skal være?* (Yasmin spørger Maria)

5.20 *Maria: Jeg skal lige prøve at skrive det.*

5.21 *SAIDA: hvorfor har jeg ikke lavet d'eren?*

5.22 *YASMIN: d'eren?*

5.23 *YASMIN: her.*

5.24 *YASMIN: 9 gange parentes minus…*

5.25 *SAIDA: det der 1 x, eller 1 dividerer*

5.26 *YASMIN: ja*

5.27 *SAIDA: hvor skal der parentes i?*

5.28 *YASMIN: nu skal der parentes, minus?*

5.29 *SAIDA: 1x*

Her mener Saida $\frac{1}{x}$, men det siger hun ikke. Hun siger bare "*en x*". "Én divideret med x" eller "1 over x" er ikke noget hun bruger.

5.30 *YASMIN: ja.*

5.31 *MARIA: i anden.*

5.32 *MARIA: ja.*

5.33 *YASMIN: og slut parentes.*

5.34 *MARIA: Du skal huske at skrive i anden op over x.*

5.35 *YASMIN: der?*

5.36 *MARIA: Op over x.*

5.37 *MARIA: ja*

Der er problemer med at skrive *x* i anden, hvilket ses som slut resultat fra deres noter ovenfor, altså $\frac{1}{x^2}$. Selv Yasmin har også det samme problem her. Yasmin har gode matematiske færdigheder, men det undres at hun er ikke sikker på, hvor hun skal placere tallet 2 henne.

5.38 *YASMIN: også minus 2, undskyld minus 0*

5.39 *SAIDA: minus 0 mener du!*

5.40 *YASMIN: ja*

Analyse af episode 5

Der er tale om fem dialoger med Yasmin som fast deltager og Saida og Maria på skift. Maria og Yasmin er lige dygtige, og Saida er den mindst dygtige. Yasmin modtager eller udveksler kundskaber fra/med Maria og giver dem videre til Saida.

I den første dialog mellem Yasmin og Saida bliver de enige om hvilken opgave de er i gang med. I næste dialog, mellem Maria og Yasmin, bliver de enige om de vigtigste ting i forbindelse med løsningen: at skrive k', 9-tallet og de to minus'er. I tredje dialog, mellem Yasmin og Saida, kommer Saida til sidst ind på det væsentligste i opgaven. I fjerde dialog checker Yasmin og Maria de sidste ting af, og i den sidste korte dialog mellem Yasmin og Saida får Saida det sidste på plads.

Eleverne befinder sig i en adidaktisk situation og Yasmin og Saida benytter det didaktiske miljø til at få løst opgave d). Maria er begyndt at bruge udtrykket "mærke" (5.6), det er også noget tid siden de er startet på emnet differentialregning.

Saida er nok den elev som har sværest med at sige det særlige matematiske udtryk, fx "1x" senere hen siger hun "1 dividerer" og ikke mere. Der er klart en sproglig tendens. Disse særlige udtryk er ikke så svært at nævne for Maria. Maria bruger også udtrykket "f-mærke" tidligere end de andre elever.

Vi har igen nogen notationsforvirring hos Yasmin og Saida. De har det lidt svært med at placere 2 tallet på x. Maria hjælper dem så der kommer til at stå x i anden (5.34).

Episode 6

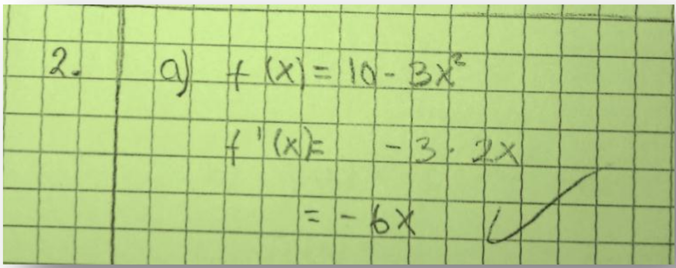
Denne episode stammer fra en dialog ved et gruppearbejde. Eleverne fik lov til at begynde på at lave deres aflevering i denne lektion.

Observation episode 6

Det er opgave 2 som de arbejder med i denne episode.

Bestem uden hjælpemidler differentialkvotienten:

$$a)\ f(x) = 10 - 3x^2$$



Figur 19 Yasmin's løsning af opgave 2 a)

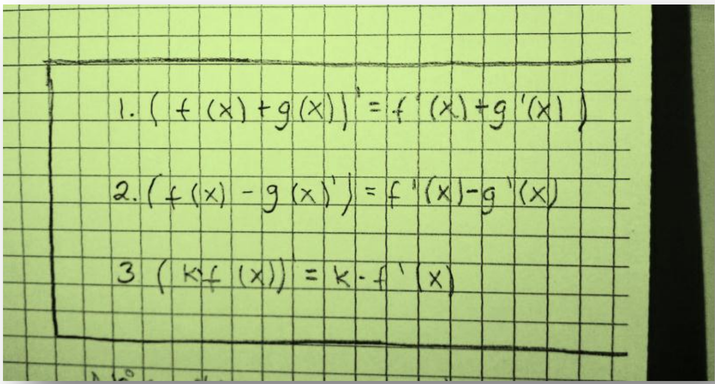
6.1 *YASMIN: også er vi nået til 2'eren.*

6.2 *MARIA: jeg tror nemlig ikke men skal skrive 10, fordi det er.. hvad hedder det? …*

6.3 *YASMIN: hvilken af dem?*

6.4 *MARIA: det fordi, det er ikke den gange vi skal bruge.. (blader i deres noter)*

Nedenstående er fra Yasmin's noter, som hun har skrevet ned, da læreren gennemgik emnet på tavlen.



Figur 20 Generelle regneregler som Yasmin har skrevet ned fra tavlen.

6.5 *MARIA: Det er denne her*

6.6 *MARIA: Det er den her*

6.7 *YASMIN: hvor har jeg skrevet det her henne.*

6.8 *MARIA: du har skrevet det før det der.*

6.9 *YASMIN: der*

6.10 *MARIA: ja*

6.11 *SAIDA: kan i finde ud af 2'eren.*

6.12 *YASMIN: jeg bliver hel forvirrende af det her.*

6.13 *YASMIN: der. Her. (Har fundet noget i hendes noter)*

6.14 *MARIA: der når vi skal gange eller der når vi bare skal lade tallet stå, ikke? Skal vi bruge den her fordi det er gange, når det er minus så skal vi bruge denne der.*

6.15 *YASMIN: nååååր på den måde.*

6.16 *MARIA: Fordi det er minus, skal vi bruge noget med minus, skal vi?*

6.17 *MARIA: skal vi lige prøve at spørge ham?*

6.18 *YASMIN: hmm hmm*

De venter på læreren kommer over til dem.

6.19 *YASMIN: Det var på tide Ertan?*

Nu er læreren kommet for at hjælpe dem.

6.20 *YASMIN: er det sådan den skal være?*

6.21 *MARIA: er det sådan, den skal være?*

6.22 *L: ja men en konstant?*

6.23 *MARIA: den bliver til 0, gør den ikke? Så den skal væk?*

6.24 *YASMIN: så kommer den bare til…*

6.25 *MARIA: så den bare… 3 gange 2x*

6.26 *L: husk fortegnet.*

6.27 *YASMIN: Hvilket fortegn??*

6.28 *L: hvad står der foran 3*

6.29 *YASMIN: minus*

6.30 *L: ja*

6.31 *YASMIN: sådan der, er den så færdig?*

6.32 *L: ja det er den faktisk. Men du kan (…utydeligt)*

6.33 *MARIA: minus 6*

6.34 *L: ja, husk x.*

6.35 *L: minus 6x.*

6.36 *YASMIN: vi kigger lige om vi har spørgsmål til flere, ajj vi kalder bare hvis det er?*

Analyse af episode 6

Den opgave, der her skal løses, er vanskelig fordi den involverer tre forskellige sætninger indenfor differentialregning. De to af dem er tilsammen loven om differentiationens linearitet, og den tredje er loven om en additiv konstant, som er kaldt for G1, G3 og S6. Det bemærkes, at læreren ikke ser ud til at have indført disse begreber for at lette deres arbejde og øge deres forståelse. Eleven kan med fordel gå frem på følgende måde:

1) Konstatere at der er to led: 10, og $-3x^2$.
2) Bruge differentiationens additivitet til at differentiere de to led hver for sig.
3) Bruge loven om en additiv konstant til at differentiere leddet 10 og få 0. Bruge loven om en multiplikativ konstant sammen med loven om differentiation af x^n til at differentiere $-3x^2$ og få facit: $-6x$.

Man kan også med fordel bytte om på de to led i begyndelsen for at få den rækkefølge af leddene, der er den sædvanlige for polynomier.

I replik nr. 6.14 kommer Maria ind på det, der er det væsentlige her, nemlig forskellen mellem en additiv og en multiplikativ konstant. Hun mangler disse ord, både før og efter kontakten med læreren. Han siger, i replik 6.22: Ja men en konstant? og fremhæver netop ikke det, der ville have lettet arbejdet for eleverne.

Til gengæld for at læreren ikke vil øge deres forståelse af og overblik over hvad der foregår, er han yderst gavmild hvad angår løsningen til den konkrete opgave. Han dikterer løsningen under denne mikrokontrakt, fuldstændigt som om ingen havde skrevet om Topaze-effekten.

Fortegn er ikke et ord der bruges meget i dagligdagen. Derfor kan det antages, at det ikke er velkendt blandt tosprogede, men at det kendes af de etsprogede, altså f.eks. at det kendes af Maria, ikke af Yasmin og Saida. Men efter at han alligevel har hjulpet eleverne gennem dette det vigtigste i denne opgave, går resten hurtigt, og opgaven bliver løst korrekt.

Episode 7

Episoden er fra 3.lektion i 2.HF klasssen.

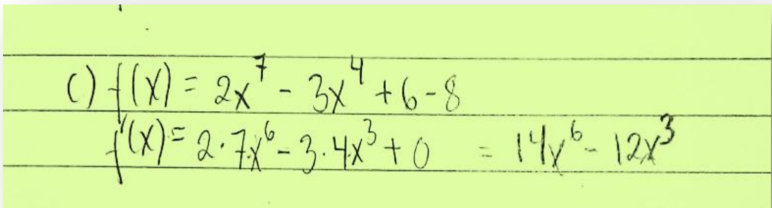
Observation af episode 7

Denne episode handler om nedenstående opgave.

$$\text{Bestem } f'(x) \text{ for funktionen:}$$
$$f(x) = 2x^7 - 3x^4 + 6x - 8$$

Det er især en samtale mellem Maria, Saida og læreren.

Saida har udarbejdet følgende løsning.



Figur 21 Saida' besvarelse af opgave c)

Saida har glemt at tilføje et x på tallet 6. Efter at dette er rettet, ser det ud til, at hun ved, at konstantleddene går ud når hun differentierer (eller hun har set det hos andre uden at forstå det).

Her spørger Maria læreren om det er rigtigt, det hun har lavet indtil videre. Hun opdager, at der er et usynligt gange-tegn imellem koefficienten og x i ethvert led i et polynomium (der ikke er et konstantled).

7.1 MARIA: *vi skal lige have hjælp til den der. Kan man regne videre på den her?*

7.2 L: *Hvilken en? Ja, man kan gange 2 med 7, ik'? man kan regne med 3 gange 4 det 12.*

7.3 MARIA: *Nååå ja, fordi der står et usynlig…*

[Hun peger på at tallene 2 og 7, som ser ud ligesom 27, og mener at der står et usynligt gangetegn]

7.4 L: *ja, derfor.*

7.5 MARIA: *Så kan jeg godt regne videre.*

Derefter forklarer Maria Saida om gange-notationen.

7.6 SAIDA: *Bliver det så 14 x i sjette? Var det ikke det han sagde?*

7.7 MARIA: *nej nej, nej nej, fordi der står sådan en gange her.*

7.8 SAIDA: *Han sagde 2 gange 7 og så 3 gange 4.*

7.9 MARIA: *jaja, 2 gange 7, det er 14. og så*

7.10 SAIDA: *minus?*

7.11 MARIA: *Jeg ved ikke hvordan man skal skrive det i, du skal os have den der x i sjette med*

7.12 MARIA: *3 gange 4 det 12.*

7.13 MARIA: *det er sådan der tror jeg.*

7.14 SAIDA: *bare sådan der, ik´?*

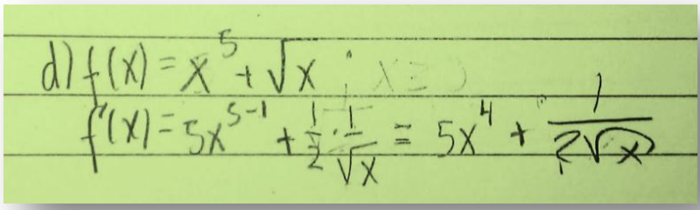
7.15 SAIDA: *det tror jeg ikke, at man kan.*

Nu går Saida videre med næste opgave og er lidt forvirret over hvorfor der er en kvadratrod.

Opgaven er:

2) $Bestem\ f'(x) for\ funktionen$

$d)\quad f(x) = x^5 + \sqrt{x}\ ;\ \ x \geq 0$



Figur 22 Saida' besvarelse af opgaven.

7.16 SAIDA: *ok, hvor fanden kommer kvadratrod fra?*

Samtale mellem Saida og læreren. Læreren prøver at hjælpe hende og viser samtidig formlerne på tavlen.

7.17 SAIDA: *Den der giver ikke mening for mig.*

7.18 L: *hvilken en, den der tegn eller hvad?*

7.19 SAIDA: *Det hele!!*

7.20 L: *Det hele?*

7.21 SAIDA: *Ertan, det her, det hele.*

7.22 L: *okay x i femte*

Læreren begynder at skrive det op på tavlen.

7.23 SAIDA*: 5 x, bliver det så ikke 5x?*

7.24 L: *du skal skrive 5 x i…*

7.25 SAIDA: *femte*

7.26 L: *15?*

7.27 SAIDA: *femte!!*

7.28 L: *Ja, minus?*

7.29 SAIDA: *1*

7.30 L: *ja.*

7.31 L: *Du skrev f´ ikke?*

7.32 L: *ja, så er den fint nok.*

7.33 SAIDA: *Sådan her?*

7.34 L: *kig kig*

7.35 SAIDA: *jamen, kvadratrod?*

7.36 L: *Kvadratrod står også her…*

Det er lidt utydeligt at høre, men han siger noget med " $\frac{1}{2\sqrt{x}}$", og viser at det også står på tavlen, regel S9.

7.37 SAIDA: *skal jeg bruge 1 og 2. Nu har jeg skrevet. Er det rigtig denne her?*

7.38 L: *Du skal lige skrive videre på den. Ja det er rigtigt. Det står ikke på tavlen, prøv og kig.*

7.39 SAIDA: *det står der!*

7.40 L: *nej, det står der i hvert fald ikke. Én divideret med to gange kvadratrod x.*

Saida har skrevet den første afledede af kvadratrod *x* forkert. Derfor gør læreren hende opmærksom på at det ikke er sådan der står på tavlen.

7.41 SAIDA: Der står ikke gange der.

7.42 L: når der ikke står noget, betyder det gange ikke?

7.43 SAIDA: *hmm* (siger hun meget stille)

7.44 SAIDA: *det forstår jeg stadigvæk ikke* (siger hun hviskende).

Analyse af episode 7

Den første opgave består i at differentiere et polynomium. Både Maria og Saida har godt tag på dette, men det er langt fra sikkert, at de forstår reglerne, der ligger til grund for dette, dvs. differentiationens linearitet og reglen for afledning af x^n. Man kan købe en lommeregner – et CAS-værktøj, der kan differentiere et polynomium. Men lommeregneren forstår ikke hvad den gør, den implementerer blot nogle regneregler. Det ser ud til at eleverne, der er blevet fulgt over nogle lektioner, har ambitioner om at være lige så gode som lommeregneren. De drømmer ikke om at forstå matematikken, de drømmer om at kunne regne opgaver uden fejl. De vil kende reglerne for hvordan man gør, ikke hvorfor man gør det. De ved i heldigste tilfælde, at der er noget der hedder tretrinsreglen, der leder en igennem den proces, det er at finde den afledede af en funktion, men de har ingen ambitioner om at beherske den, så de er i stand til selv at finde frem til den afledede af en funktion.

Første gang skriver Maria ikke gange mellem 2 og 7, så det ser ud til at være 27. Derfor opdager hun det først efter lærerens bemærkning om, at der står et gangetegn, som hun ikke har skrevet. Hun kalder det godt nok usynligt gangetegn, hvilket der ikke kan være tale om mellem to tal skrevet med cifre – man ved ikke hvor det ene ender og det andet begynder. Hun sammenligner det med fx 2*x.*

Det er en fordel for det heldige udkomme af undervisningen, at læreren har ret i det, han/hun siger. Det er ikke altid tilfældet, f.eks. ikke her, hvor læreren siger

7.42 *Når der ikke står noget, betyder det gange ikke?*

Og svaret er, at det gør det ikke netop når de to symboler er et helt tal efterfulgt af en ægte brøk med fortegnsløs nævner og tæller – så står der et usynligt plus.

Over en dialog på 29 replikker gennemgår læreren og Saida opgaven. Først erklærer Saida at hun ikke forstår noget af opgaven overhovedet. Ved hjælp af lærerens stille tålmodighed får han tingene på plads. Han begynder med x^5, og her er Saida en samtalepartner, der overfladisk set er på samme niveau som han. Ved fælles hjælp får de x^5 omsat til $5x^4$. Det er kvadratroden, Saida ikke forstår, men læreren kræver heller ikke forståelse, kun afskrift fra en tabel, og her mødes lærer og elev så. Nu kommer læreren ind på den notationsmæssige konvention, der går ud på, at man ikke skriver noget gangetegn mellem to symboler, der skal multipliceres. Hvis læreren havde åbnet munden og sagt at der var tale om en vedtægt, der gør et udtryk smukkere fordi det bliver mere enkelt, jo færre symboler det indeholder, og at der ikke var noget at forstå, havde han gjort Dagens gode gerning. Der er tale om en mikrokontrakt mellem Saida og læreren. Da Saida ikke kan udtrykke sig sprogligt korrekt i forbindelse med matematik, kan hun ikke fortælle læreren om præcis, hvad der ikke giver mening.

Det ser faktisk ud til at være at hun holder sig tilbage mht. at udtale sproget over symbolerne og det særlige udtryk i matematik, derfor i stedet siger hun at det er det hele, der ikke giver mening. Dermed udløses en Topaze effekt pga. sproglige besværligheder, hvor læreren giver svaret trin for trin. Men Saida er faktisk klar over, hvordan man differentierer x^5. Hendes problem er $\sqrt{x}$, som hun ikke har prøvet at differentiere før, selvom det er en af de specielle regler, S9, der stod på tavlen.

Episode 8

Denne episode er taget fra 4.lektion 1.m klassen på Ørestad gymnasium. Veli sidder sammen to andre, som også er tosprogede. Denne dialog foregår mellem Amar og læreren. Veli sidder lige ved siden af Amar ved et rundbord på det såkaldte gruppemiljø.

Observation af episode 6

Læreren begyndte med at præsentere sig for klassen, det er første gang han har klasse, da han har været på barsel. Emnet trigonometri er også noget helt nyt for eleverne i denne klasse. Læreren har forberedt sig til et gruppemiljø, derfor har der ikke været en formel offentliggørelse af officiel viden i begyndelsen af timen. Der har været problemer med Fronter (en slags elev-intra-software) og internettet, så læreren blev nødt til at printe opgaverne ud. Efter at eleverne er sat til at lave opgaver i grupper, har de også fået nogle vinkelmålere på en transparentpapir, så eleverne nemt kunne måle grader, radianer osv.

8.1 AMAR: Så er det mig.
8.2 *L: Jeg skal lige videre*

(siger læreren til den anden gruppe og kommer over til Velis gruppe, som består af 3 elever. Amar og Rashid. Det er Amar der får hjælp)

8.3 L: Ja?
8.4 AMAR: jeg er nået til opg 4.

Nedenfor kan man se hvilke opgaver eleverne arbejder med.

Sinus, cosinus og tangens til vinkler i retvinklede trekanter

December 11, 2009

Arbejdspapir til 1i 2009 ma - 10/12 og 14/12-2009

Emnet er sinus, cosinus og tangens, som også er behandlet på siderne 134-142 i bogen.

1. Tegn 10 retvinklede trekanter på ternet papir med heltallige katetelængder (vær omhyggelig nok til at man kan måle vinkler), og beregn hypotenusernes længder ved hjælp af Pythagoras sætning. Selvfølgelig skal trekanterne være forskellige, men der må gerne være nogle som er forstørrelser af hinanden.
2. Beregn alle forhold mellem sider ($\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}$) for den første trekant.
3. Mål sinus og cosinus ved hjælp af den udleverede vinkelmåler, og beregn tangens ($\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$) for en vinkel i trekanten. Sammenlign med forholdstallene fra spørgsmål 2 og læg mærke til hvilke forhold der passer bedst sammen (er tættest på) henholdsvis cosinus, sinus og tangens. Brug skemaet på næste side til at holde regnskab med dine observationer.
4. Gå videre med næste spidse vinkel og derefter næste trekant indtil du har et klart mønster.
5. Formuler hvordan sidelængderne i retvinklede trekanter hænger sammen med cosinus, sinus og tangens, ved brug af begreberne hosliggende katete, modstående katete og hypotenuse.

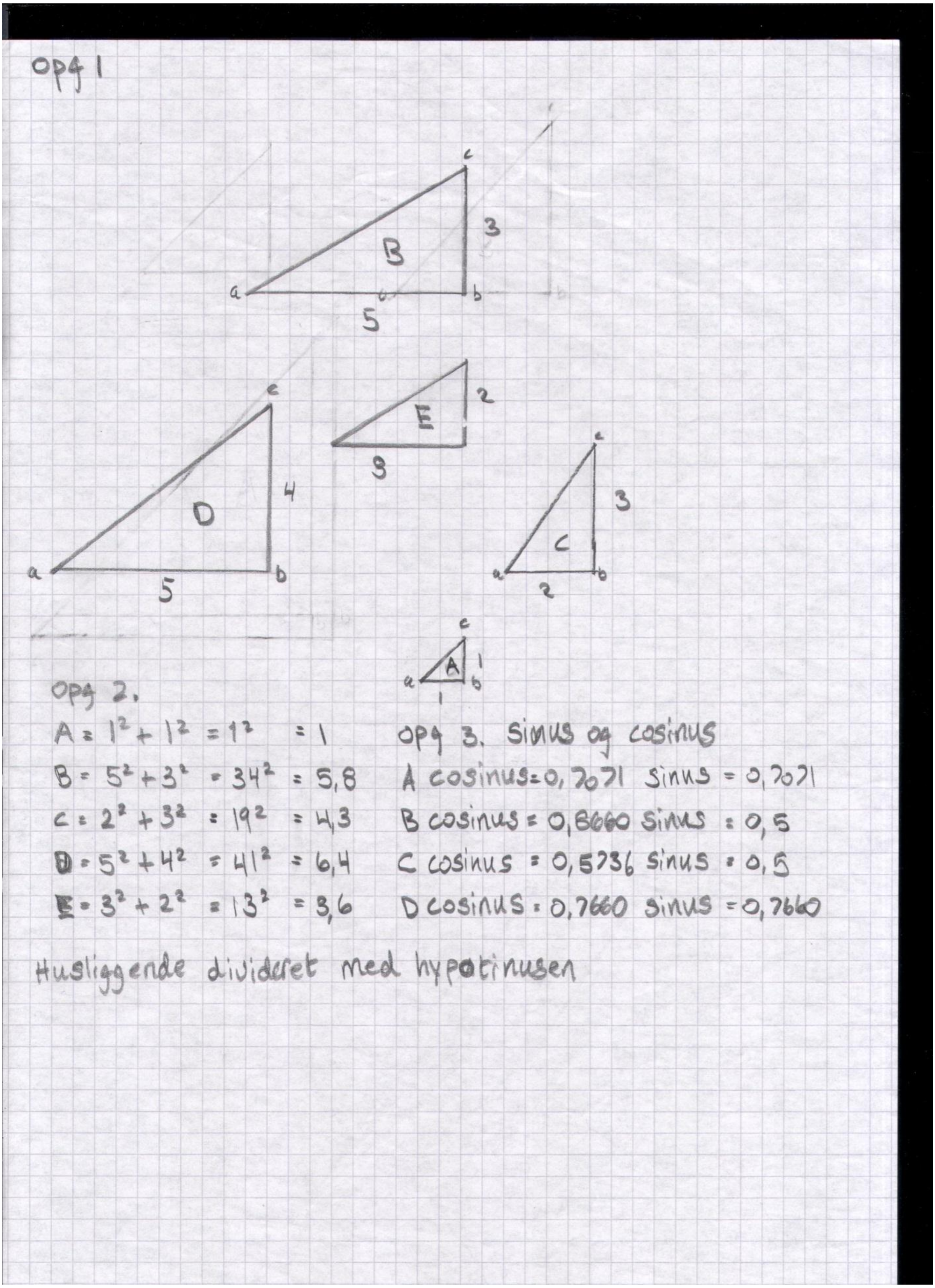
Figur 23 Opgaver til 1.m klassen[3]

8.5 Lærer: Godt

8.6 Lærer: lad os prøve og stoppe op her ved de første vinkler du har været igennem, så hvor har du trekanterne henne i arbejder med?

8.7 AMAR: lige her

[3] Stregerne på opgaverne er tegnet så jeg kunne se hvilke ord der kunne være udfordrende for elever. Dvs det er ikke eleverne eller læreren der har tegnet disse blå streger.



Opg 1

Opg 2.

$A = 1^2 + 1^2 = 1^2 = 1$

$B = 5^2 + 3^2 = 34^2 = 5,8$

$C = 2^2 + 3^2 = 19^2 = 4,3$

$D = 5^2 + 4^2 = 41^2 = 6,4$

$E = 3^2 + 2^2 = 13^2 = 3,6$

Opg 3. Sinus og cosinus

A cosinus = 0,7071 sinus = 0,7071

B cosinus = 0,8660 sinus = 0,5

C cosinus = 0,5736 sinus = 0,5

D cosinus = 0,7660 sinus = 0,7660

Husliggende divideret med hypotinusen

Figur 24 Veli's besvarelse af opgaverne.

Bemærk at ovenstående er Velis løsninger. Jeg har ikke haft en aftale med Amar. Amar er en af de tilfældige elever som er havnet i Velis gruppe. Men da Veli og Amar har lavet opgaverne sammen, har de nogenlunde de samme løsninger og Veli er også nået til opgave 4.

8.8 *Lærer: de er lidt besværlige at blade frem og tilbage* (Amar bryder ind og siger der ikke plads der) *men lad os prøve og kigge på den her.. har du målt cosinus, den vinkel her nede?*

8.9 *AMAR: den her er cosinus, det har jeg fået til... 0,86*

8.10 *Lærer: og det har du gjort midtpunkt og sinus har du målt til?*

8.11 *AMAR: den har jeg målt til 0,5*

8.12 *Lærer: så lad os kigge på de beregnede ... 0,86?*

Det er samme tal som Veli også har.

8.13 *AMAR: den er her, den ligner den der.*

8.14 *Lærer: vent lige med den.*

8.15 *AMAR: okay*

8.16 *Lærer: altså... Hvad er det for nogle tal der skal ... nej det C over … hvis du tager 5 divideret med 5,83 så det B over C*

8.17 *AMAR: Nej det er fordi det også omvendt*

8.18 *Lærer: det forstår jeg ikke ... det der er det samme som står der hvis du har byttet om. Du skal huske det vil være nemmere hvis du får det skrevet, det der C divideret med B.*

8.19 *AMAR: sådan her, der her omvendt*

8.20 *Lærer: Ja og b divideret med c*

8.21 *Lærer: ja godt, man kan også godt sige at den er forhold til den her er hosliggende divideret med hypotenusen. Prøv at skrive; hosliggende divideret med hypotenusen.*

8.22 *AMAR: Kosliggende?*

Eleven sagde *"kosliggende",* men læreren siger *"hosliggende"* ved at lægge lidt tryk på ordet. Læreren er klar over at elev sagde "kosliggende", han vælger at rette eleven ved at gentage ordet "hosliggende".

8.23 Lærer: ja Hosliggende, det var de der med kateterne, den ene kateterne er hosliggende og den anden er modstående.

8.24 AMAR: husliggende?

Men eleven forstår det nu som "husliggende".

8.25 Lærer: det brugte vi os i Pythagoras, i har i hvert fald hørt den.

8.26 AMAR: Vinkelret?

8.27 Lærer: I er måske ikke fuldstændigt banket fast, men [...] holdt tror jeg.

8.28 Lærer: divideret med

8.29 AMAR: ja

8.30 Lærer: hypotenusen

8.31 AMAR: ja

8.32 Lærer: så det var cosinus, man kan finde cosinus ved at måle sig frem eller med lommeregner, prøv hold lommeregneren lidt i baggrunden.. eller man kan finde det ved at kigge på sidelængder også dividere det med hinanden... det er 2 helt forskellige måder, enten måler man på vinklen, eller man måler fra sidemængderne og dividere dem med hinanden... det ikke fuldstændigt oplagt det skal give det samme tal... det ku' være at der en at det her hænger sammen at det sådan virker på flere trekanter eller bare det også virker op i det her hjørne.

8.33 Lærer: så det var cosinus (utydeligt snak)*... sinus den er 0,5 og den kommer også på en anden måde ved at tage*

8.34 AMAR: den der

8.35 Lærer: nemlig, når man tager den modstående divideret med hypotenusen.

8.36 AMAR: 3 her

8.37 Lærer: det virkede på denne her trekant, gad vide om den også kan virke på andre trekanter

8.38 Lærer: hvis systemet er der så er det noget vi kan bruge til noget og så der noget vi kan tage videre i anvendelsen.

8.39 Lærer: Det system må gerne dobbelt tjekkes om det er der, få skrevet ned hvad er det, hvordan kan man udtrykke det system, hvad er det for nogle ting *man skal dividere med hinanden, når man skal finde cosinus og når man skal finde sinus*

8.40 Lærer: så i kan gøre det i en anden trekant hvor i ikke har nogen vinkelmåler men til gengæld har sidelængder.

8.41 Lærer: Okay?

8.42 AMAR: okay.

8.43 *Veli: vent lige lad mig lige skrive den der formel ned.*

Analyse af episode 8

Læreren har introduceret opgaven og dens betingelser for 1.m klassen. Der har været lidt problemer med internettet, så læreren var nødt til at printe opgaverne. Derudover har han devalueret det didaktiske miljø til eleverne. Nu har eleverne kæmpet med opgaverne i en adidaktisk situation, og i slutningen af timen er læreren nået over til den gruppe, som jeg følger.

Handlingssituationen, som eleverne har befundet sig i, er forbi nu, hvor læreren er kommet over til gruppen for at hjælpe/se, hvad de har lavet. Fordi det ikke har været muligt at hente hjælp fra læreren før nu, måtte de nøjes med de noter, der blev leveret af deres lærer. Der har ikke været nogen valideringssituationer i klassen, men der er tale om en lokal valideringssituation, nu når læreren er kommet over til dem. Læreren ser på hvad der er lavet, og samtidig hjælper han også med at rette. I denne didaktiske situation opstår der en Topaze effekt, hvor læreren ligefrem dikterer, hvad eleven skal skrive.
Der er et udtryk som Amar og Veli første gange hører: ”hosliggende”. Det er ikke noget man bruger i dagligsproget, det er et særligt udtryk indenfor matematik. Selv om man bruger udtrykket ”ligger hos” i dagligsproget, er ”hosliggende” ikke forstået af de to elever. Først reagerer Amar med ”kosliggende?” og derefter retter han det til ”husliggende”. Så selve formlen $cosA = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$ ligger lidt fjernt for begge elever. Veli gør det samme og skriver ”husliggende” på sit papir (se Figur 24). Veli skriver også ordet ”hypotenusen” forkert, han skriver nemlig ”hypotinusen”. Det kan måske accepteres at begå den fejl, da det ikke er et dansk ord, men jeg understreger også lige, at dette ord er institutionaliseret helt tilbage i folkeskolen.

”Elevernes sproglige begrebsdannelse skal udfordres. Når eleven skal lære matematik, udfordres de af to sprog – dels dansk og dels matematik, som også fungerer som et fremmedsprog.”
(Andersen, 2004)

Nu sidder Amar og Veli måske helt forvirret over hvad har trigonometri med ”husliggende” at gøre. Mon de synes, at det er meget normalt at have noget med ”huse” at gøre, når nu man har noget geometri på bordet. I hvert fald kan man her blive enig om at de to drenge ikke har forstået meningen med at kalde en katete for hosliggende katete.
Jeg har ikke haft flere episoder om denne sag, da det var slutningen af timen, og det var den sidste lektion, jeg har observeret.
Man kan roligt opstille nogle hypoteser om, hvilke situationer der vil opstå ved det næste gruppearbejde. Fx denne misforståelse af ord vil give anledning til endnu en Topaze effekt. Men det slemmeste er nok, at de to elever er kommet bagud og at de måske aldrig vil være i stand til at løse disse nemme trigonometriopgaver. Det vil jo være rent kaotisk for dem at finde ud af hvilken katete man skal måle længden på og derefter dividere dette tal med hypotenusens længde. Jeg regner med, at de to elever nok vil vænne sig til at begynde at bruge deres lommeregner fremfor at forstå matematikken bag.
Læreren ser også ud til ikke at have forstået vigtigheden af at fremhæve, at man skal udpege en af de to spidse vinkler i en retvinklet trekant som den, der bestemmer hvilke af de to kateter, der er henholdsvis hosliggende og modstående. En katete er hosliggende i forhold til den ene vinkel og modstående i forhold til den anden. Kateten ’ligger hos’ den ene vinkel og ’står mod(sat eller overfor)’ den anden vinkel.

DISKUSSION

Sprog spiller en altafgørende rolle i matematik og i matematikundervisning. Der er endda tale om to sprog, nemlig dagligsprog og matematisk sprog, og en mere nøjeregnende betragtning vil endda vise at der snarere er tale om et kontinuum, hvor den ene ende indeholder de helt dagligdags ord og den anden ende ord og begreber, der har mening for en matematiker men ikke i dagliglivet. Hvis en elev har vanskeligt ved at forstå noget indenfor matematik, kan det ifølge David Pimm være svært at skelne mellem om eleven har sproglige eller matematiske vanskeligheder. I det foreliggende projekt har jeg stræbt efter at skelne mellem de problemer, der skyldes manglende forståelse af et dagligdags begreb og manglende forståelse af et matematisk begreb. I episoderne har jeg fremhævet forskellige situationer, som er tegn på en form for sproglig vanskelighed. Der er steder, hvor det ikke er så tydeligt, men der er også steder hvor det ses tydeligt. I projektet har jeg argumenteret for at der kan være tale om de ord (særlige udtryk), der især skaber vanskeligheder for tosprogede elever, ligesom i episode 8, hvor eleven har svært ved at forstå ordet ”hosliggende”, han hører om det for første gang, og han ender med at skrive ”husliggende” på sit papir efter en konvertering fra ”kosliggende”. Det ser ud til at gælde alment, at de etsprogede elever har nemt ved og er hurtige til at tage de nye ”særlige udtryk” til sig og anvende dem, når de begrebsmæssigt tilhører dagligdagen. Samtidig virker det som om de matematiske ord, der ikke relaterer til dagligdagen, er lige så svære at forstå for en etsproget som for en tosproget elev.

De tosprogede elever virker generelt mere usikre og hjælpsøgende end de etsprogede. Deres søgen efter hjælp har en tilbøjelighed til at ligne et håndklæde, der kastes i ringen, og den hjælp, de får, er tit så massiv, at der snarere er tale om en Topaze-effekt.

Dvs. der er tale om en sproglig dimension i de didaktiske kontrakter, som vi har konstateret under analysen af de forskellige episoder. Både etsprogede og tosprogede elever har sproglige vanskeligheder i matematikundervisningen, især under mikrokontrakten, men udfordringerne dukker op indenfor forskellige områder. Hos etsprogede og tosprogede elever er der måske tale om lige store udfordringer, når det gælder ord/udryk, som man kun bruger i matematik (og i fag, hvor der anvendes matematik). Men måske har tosprogede elever større udfordringer end de etsprogede, når der er tale om særlige udtryk, som er dannet af dagligsproget, fx ”fortegn” eller ”hosliggende”. I bund og grund giver disse sproglige vanskeligheder flere uheldige effekter under de didaktiske kontrakter. Især Topaze-effekten har vist sig en del i min undersøgelse. Det er nok bemærkelsesværdigt, at Topaze-effekten kommer flest gange, fordi det kan være at læreren ikke kan skelne mellem om eleven har matematiske vanskeligheder eller der er tale om sproglige vanskeligheder. Det kan også være en svær situation for tosprogede elever, hvis læreren laver et metakognitivt skift som i sig selv indebærer sproglige uklarheder for eleverne; dermed kan den give en helt anden mening end den læreren har villet give. Fx udtrykket som ”f-mærke” blev hurtigere taget i brug af etsprogede elever end af de tosprogede. Det er der eksempler på i projektet.

LITTERATUR

Andersen, Michael Wahl (2004), s.284-299, Dansk som andetsprog i matematikundervisningen i Arne Engström (ed.) Democracy and participation a challenge for special needs education in mathematics, Örebro University Department of Education, Örebro.

Pimm, David & Keynes, Milton (1994), s.159-169, Mathematics classroom language: Form, Function and Force, i Biehler, Rolf & Scholz, Roland W. & Strässer, Rudolf & Winkelmann Bernard, Didactics of mathematics as a scientific discipline, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Carstensen, Jens & Frandsen, Jesper & Studsgaard, Jens (2005) MAT C, Systime, Århus.

Egelund, Niels & Nielsen, Chantal Pohl & Rangvid, Beatrice Schindler (2009), PISA Etnisk 2009, Anvendt Kommunal Forskning (AKF), København.

Gimbel, Jørgen (1995), Tema: Et ord er et ord, Bakker og udale, Sprogforum: tidsskrift og sprog- og kulturpædagogik, lokaliseret på World Wide Web: http://inet.dpb.dpu.dk/infodok/sprogforum/spr3/Gimbel.html

Hesselbart, Ana (2007), Specialerapport: Mathematical reasoning and semiosis, lokaliseret på World Wide Web: http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie4/thesisery5-medbundtekstmedforside.pdf/

Hersant, Megali & Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (2005) Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactics situations, Educational Studies in Mathematics 59, s.113-151, Springer.

Hilbert, David (1900), Tale ved den internationale matematikerkongres i Paris, lokaliseret på World Wide Web (min oversættelse fra engelsk til dansk): http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html

Holm, Lars & Laursen, Helle Pia (2001) Andetsprogsdidaktik, Dansklærerforeningen og forfatterne, (sted ikke angivet).

Jensen, Thomas & Jessen, Claus & Nielsen, Morten Overgård (2006), Matema10k, Matematik for Gymnasiet B-niveau, Frydenlund, København.

Laursen, Helle Pia & Hägerfelt, Gun (2007), Undervisningsministeriet, Sproget med i alle fag - en rapport over et aktionsforskningsprojekt, Rambøll Management, København.

Pedersen, Gert Kjærgård (1988), Analysis NOW, Springer, Kapitel 1.3 og opgave 1.3.3, New York og andre.

Seligman, Martin E.P., lokaliseret på World Wide Web: http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Seligman

Winsløw, Carl (2006) Didaktiske elementer- en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik, Forlaget Biofolia, Frederiksberg.

FIGUR LISTE

BILAG

Dette projekts bilag er i form af en CD. Den indeholder elevernes noter, lærerens egne noter (som han har undervist efter), elevernes afleveringer og deres redskaber (fx en transparent vinkelmåler) samt transkriptioner af lydfilerne.

CDen indeholder rå data. Der er (naturligvis) data på CD'en, der ikke er anvendt i projektet.