INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Matematik for Sjov

Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst

Line Kabell Nissen

Specialerapport

.

August 2011

IND's studenterserie nr. 24

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk

Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
Nr. 10: Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
Nr. 11: Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
Nr. 12: Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
Nr. 13: Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
Nr. 14: Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
Nr. 15: Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
Nr. 16: Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
Nr. 17: Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
Nr. 18: Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
Nr. 19: Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
Nr. 20: Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
Nr. 21: Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
Nr. 22: Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
Nr. 23: Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
Nr. 24: Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov - Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst.

Abstract

I specialet undersøges forudsætninger og muligheder for at konstruere et nyt tilbud til danske gymnasieelever, som i specialet benævnes "Matematik for Sjov". Dette er inspireret af det franske projekt "Math en Jeans", som inddrages gennem en undersøgelse af et undervisningsforløb i en dansk gymnasieklasse, hvor der blev arbejdet med afsæt i den metodiske og didaktiske tilgang, som findes i "Math en Jeans". Hensigten er at finde muligheder for en alternativ tilgang til formidling af matematik på frivillig basis, som kan skabe interesse blandt gymnasieelever for at beskæftige sig med matematik. Specialet analyserer derfor, ved hjælp af den antropologiske teori om didaktik, de matematiske udfordringer og problemstillinger, der kunne arbejdes med i "Matematik for Sjov", og sammenholder disse med et andet frivilligt tilbud, Georg Mohr konkurrencen, som har eksisteret i mange år og danner grundlag for de internationale konkurrencer i matematik.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. juli 2011

Matematik for Sjov

Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst.

Line Kabell Nissen

Speciale i matematikkens didaktik

Vejleder: Carl Winsløw

Abstract

This thesis examines the prerequisites and possibilities of constructing a new project for Danish high school students, called Math for Fun. This is done with inspiration from the French project Math a Jeans which is incorporated into the thesis through a study of Danish high school students working on a problem, which is based on the methodological and didactical approach found in Math en Jeans.
The intention is to identify opportunities for an alternative approach to conveying mathematics on a voluntary basis, which might generate interest among high school students to engage in mathematics. By using the Anthropological Theory of Didactics, the thesis analyzes the mathematical challenges and problems that could be included in Math for Fun and compares these with another project, namely the Georg Mohr competition that has existed for many years and which provides a basis for international competitions in mathematics.

Resumé

I specialet undersøges forudsætninger og muligheder for at konstruere et nyt tilbud til danske gymnasieelever, som i specialet benævnes Matematik for Sjov. Dette er inspireret af det franske projekt Math en Jeans, som inddrages gennem en undersøgelse af et undervisningsforløb i en dansk gymnasieklasse, hvor der blev arbejdet med afsæt i den metodiske og didaktiske tilgang, som findes i Math en Jeans.
Hensigten er at finde muligheder for en alternativ tilgang til formidling af matematik på frivillig basis, som kan skabe interesse blandt gymnasieelever for at beskæftige sig med matematik. Specialet analyserer derfor, ved hjælp af den antropologiske teori om didaktik, de matematiske udfordringer og problemstillinger, der kunne arbejdes med i Matematik for Sjov og sammenholder disse med et andet frivilligt tilbud nemlig Georg Mohr konkurrencen, som har eksisteret i mange år og danner grundlag for de internationale konkurrencer i matematik.

TAK TIL KASPAR NISSEN OG LISBETH KABELL NISSEN FOR UENDELIG STØTTE IGENNEM HELE SPECIALEFORLØBET.

Indhold

1 Indledning

Matematik er et fag, der har eksisteret i mange tusind år og igennem historien har dets betydning ændret sig i trit med civilisationens, teknologiens og kulturens udvikling. Fagets status og interesse ændres derfor sammen med samfundets holdning til og interesse for matematik som videnskab.

I moderne tid har faget matematik haft svært ved at samle bred interesse og har blandt almindelige mennesker fået status af at være et svært og måske lidt kedeligt fag, hvilket meget godt illustreres ved følgende tegning, som stammer fra 1861.

"- Naa; af det allerede erfarede synes at fremgaa, at Du har noget Begreb om Regning, Skrivning, Religion, Svømning og saa fremdeles. Siig mig endvidere: kan du nogen Mathematik?
- Næ.
- Det gjør intet til Sagen. Men hvad bringer Dig til at smile? Der er aldeles ikke noget Forlystende ved Mathematik — tvertimod!"

Figur 1.1: Fritz Jürgensen om matematikkens unødvendighed

Idag er nogle af grundene til, at mange vælger matematik i gymnasiet, at de skal bruge faget for at komme ind på deres drømmestudier, eller fordi det er et krav på den studieretning, de vælger. Derfor er det vanskeligt at vide, hvor mange elever, der faktisk vælger matematik, bare fordi de synes, at det er sjovt og interessant.

Ofte møder man som matematiklærer spørgsmålet: 'Hvad skal jeg bruge matematik til?' og mange lærere svarer med forskellige variationer af: 'Du skal blive god til at lave strukturerede løsninger til forskellige virkelige problemer'.
Det er dog ikke disse 'virkelige problemer' der er flest af i matematikundervisningen i gymnasiet. Dette er både på grund af traditionelle undervisningsformer og på grund af mangel på tid, når der er udvalgte kernestofområder, som skal indgå i undervisningen. Det er derfor forståeligt, at eleverne har svært ved at se relevansen af matematikken og dermed få eller bevare en interessere for faget, fordi det bliver for abstrakt og formelt.

Men der er uden tvivl mange unge, som kan lide at bruge deres hoveder og lade sig udfordre af matematiske problematikker. Rigtig mange unge er vilde med at spille spil, løse soduko og løse andre sjove opgaver, der kræver en skarp logisk sans og evnen til at se sammenhænge og konsekvenser - evner der blandt matematikere bliver brugt flittigt i løsningen af matematiske problemer.
Der er også mange tusind gymnasieelever, der hvert år deltager i 1. runde af Georg Mohr konkurrencen og dermed viser, at de har en interesse i at arbejde med matematikken på andre måder, end det der opleves i de daglige matematiktimer.

På den baggrund kan det antages, at der kunne være en interesse for, at vi i Danmark kan tilbyde alternative matematiske tilbud til gymnasieelever, der kan skabe en øget interesse for matematik.

Gennem disse tilbud kan de elever, der har lyst til at løse alternative opgaver, få mulighed for at opleve et forum, hvori de kan udfolde deres evner. Der burde altså være grobund for, at der kan konstrueres et nyt tilbud til eleverne, som involverer virkelige matematiske problemstillinger og som lægger op til brug af de evner, som eleverne allerede har, men som de endnu ikke er klar over, kan benyttes i forbindelse med matematik.

Det optimale vil i første omgang være at udfordre eleverne matematisk i et frivilligt tilbud, som supplerer den almindelige undervisning. Det vil kunne få den effekt, at den didaktiske tilgang i den daglige undervisning med tiden også udfordres og optimeres.

Med afsæt i denne antagelse vil jeg derfor i dette speciale undersøge de forudsætninger og muligheder, der er for at konstruere et nyt tilbud til de danske gymnasieelever, som jeg vil kalde Matematik for Sjov.

For at finde frem til hvad dette nye tilbud skal være, vil jeg, ved hjælp af den Antropologisk Teori om Didaktik, undersøge to allerede eksisterende tilbud:
Det franske projekt Math en Jeans og den danske Georg Mohr konkurrence.

Jeg vil i specialet præsentere begge tilbuddene og analysere de matematiske udfordringer og problemstillinger, som de arbejder med for at finde frem til, hvordan disse problemer er forskellige og hvilken type problemer, det ville være relevant at inddrage i det nye tilbud.

Da Math en Jeans er et fransk tilbud for elever i alderen 12-16, vil jeg undersøge, hvordan der kan arbejdes med dette på et dansk gymnasium. Det vil jeg gøre ved at foretage observationer af danske gymnasieelever, der arbejder med et forløb, der tager afsæt i den metodiske og didaktiske tilgang, som findes i Math en Jeans.
Når jeg har fundet frem til hvilken type alternative opgaver, det kunne være interessant at inddrage i det nye tilbud, vil jeg desuden undersøge, hvilke øvrige betingelser, der skal opfyldes for at det nye tilbud Matematik for Sjov, kan blive en realitet i Danmark. Det betyder, at jeg vil undersøge hvilke ydre rammer, der skal være opfyldt og hvad lærerne og eleverne ønsker sig af et nyt tilbud.

Specialets struktur

Jeg vil starte mit speciale med at præsentere den Antropologiske Teori om Didaktik og de begreber, som vil danne den teoretiske ramme for mine undersøgelser.
Igennem hele specialet vil figurer og tabeller være efter egen tilvirkning, medmindre andet er angivet.
I teorikapitlet vil jeg inddrage et forskningsstudium, foretaget af Leone Burton, med henblik på at identificere, hvad der engagerer forskere i matematikken og hvilke elementer det med afsæt heri kunne være ønskeligt at integrere i det nye tilbud.
Når den teoretiske ramme er på plads, vil jeg præsentere den teoretiske problemformulering og metodologien.

Herefter vil jeg præsentere og analysere de to udvalgte tilbud. Først vil jeg præsentere Math en Jeans og 3 af de problemer, der er blevet arbejdet med i denne sammenhæng.
De tre problemer er:

- Den Rejsendes Problem
- Lukkethedsproblemet
- Pengeproblemet

Jeg vil foretage en grundig analyse af disse 3 problemer, hvorefter jeg vil analysere mine observationer af danske gymnasieelever, der arbejder med Den Rejsendes Problem.

Når jeg har undersøgt Math en Jeans, vil jeg præsentere et portræt af Georg Mohr konkurrencen, hvor jeg analyserer 4 af de opgaver, der er karakteristiske for konkurrencen.

Til sidst vil jeg give et bud på, hvad det nye Matematik for Sjov skal være.
På baggrund af analyser og observationer af Math en Jeans problemerne og portrættet af Georg Mohr, vil jeg give et bud på hvilken type problemer, der skal inddrages i Matematik for Sjov og desuden hvilke praktiske forudsætninger, der kræves opfyldt for, at tilbuddet kan blive en realitet.

2 Teori

Generelt om ATD

Den Antropologiske Teori om Didaktik (ATD) er grundlagt af Yves Chevallard som en udvidelse af teorien om didaktisk transposition. Teorien om didaktisk transposition fastslår, at der sker en transposition fra den videnskabelige matematiske viden til den viden, der skal læres (ekstern transpostion) og igen fra den viden, der skal læres til den viden, der bliver lært (intern transposition). Her tales om viden i bred forstand: både teoretisk viden, men også praktisk viden - know how - og hvordan denne bliver påvirket af de forskellige institutioner.
ATD udvider denne teori ved at opstille modeller for viden i sig selv og for hvordan viden formes i samfundet. Den opstiller både en teoretisk model for, hvordan viden samles i vores hoveder, de såkaldte prakseologier, og for hvilke ydre faktorer der påvirker udvælgelsen af den viden, der skal læres, niveauer af didaktisk bestemmelse. Sidst, men ikke mindst, eksisterer der inden for ATD en teoretisk model for, hvordan viden kan overgives til elever på en måde, der gør matematikken levende og relevant, de såkaldte studie- og forskningsforløb (S&F-forløb), som jeg senere i dette speciale vil bruge som analyseværktøj.

I dette kapitel vil jeg derfor gennemgå de begreber, som er centrale for ATD. Jeg vil supplere med dele af Leone Burtons forskningsstudium for at give et billede af, hvad forskningens modalitet er. Tilsidst vil jeg slutte af med en gennemgang af teorien bag studie- og forskningsforløb.

Prakseologier

For at kunne opstille modeller for hvordan viden læres, eller for hvordan den viden, der skal læres, udvælges, er det nødvendigt at kunne beskrive, hvad objektet for denne viden egentlig er. Til at beskrive egenskaberne ved viden, indfører Chevallard (Chevallard, 2005) begrebet prakseologi, hvorved han beskriver opbygningen af viden som enheder, der kan ses enkeltvis eller i en større sammenhæng. Som introduktion til begrebet prakseologi siger han:

> *"Some dictionaries define praxeology as the study of human action and conduct. Up to a point, this is not foreign to the use I will make of that key word of the anthroppological approach to didactics - provided we include in "praxeology" the study, not only of what people do, and how they do it, but also of what they think, and how they do so. [...] But what I shall call a praxeology is, in some way, the basic unit into which one can analyse human action at large. (Chevallard, 2005, s. 22)"*

En prakseologi består (ligesom ordet) af to dele:

- Praksisdelen, der dækker typer af opgaver, T, og den teknik vi behandler disse med, τ.
- Logosdelen, der dækker den diskurs, der omhandler teknikken, her kaldet teknologien, θ, og den bagvedliggende teori, Θ.

En prakseologi er altså et sæt $[T, \tau, \theta, \Theta]$.
Dette er illustreret nedenfor.

"Praxis"	"Logos"
Typer af opgaver	Teknologi
Teknik	Teori

Tabel 2.1: En prakseologi.

Selv om illustrationen kunne antyde det modsatte, er de to dele dybt afhængige af hinanden. Praksisdelen nødvendiggør logosdelen, som igen danner grundlag for praksis (Chevallard, 2005). Det skal pointeres, at en prakseologi på ingen måde er en statisk konstruktion, den kan altid ændres og tilpasses. Den antropologiske teori påpeger, at en prakseologi er påvirket af det samfund, den er opstået i. F.eks. er en prakseologi, der omhandler situationen 'at sige goddag', forskellig fra kultur til kultur.
Indenfor matematikken består prakseologier typisk af typer af matematiske opgaver og hvordan de løses. Det er derfor også her vigtigt, at konstruktionen er fleksibel, idet opgaveløsning i matematikfaget ofte er en måde at opdage sine egne fejl og misforståelser på, og som et resultat af dette skulle prakseologien gerne ende med at eksistere i en ny og forbedret udgave.
I didaktikken kan en opgavetype være at skulle introducere det grafiske forløb for 2. grads polynomiet, $f(x) = ax^2 + bx + c$, for en klasse, teknikken kunne være at lade eleverne eksperimentere med koefficienterne i et program som Geogebra, mens teknologien er diskursen omkring 2. gradspolynomier og formidlingen af opgaven og dens rammer. Teorien for denne didaktiske prakseologi kan være teorien om det didaktiske spil eller andre mere almindelige og uformelle læringsteorier. Den didaktiske prakseologi er derfor delvist bestemt af de matematiske prakseologier.

Mere praktisk kan man bruge teorien om analyse af viden i fire dele til at analysere og modellere de matematiske (eller faglige generelt) og didaktiske prakseologier, der bliver bragt i spil i forskellige undervisningssituationer. I matematik, didaktik og alle andre fag eksisterer der mange forskellige prakseologier, som er samlet i organisationer efter deres fælles træk.

- Punktvise organisationer består af prakseologier, der benytter samme teknik: $[T, \tau, \theta, \Theta]$.
- Lokale organisationer består af prakseologier, der benytter samme teknologi: $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$.
- Regionale organisationer består af prakseologier, der benytter samme teori: $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_i, \Theta]$.
(Barbe et al., 2005, s. 238).

En matematisk organisation skabes, ifølge Barbe (ibid.), igennem en didaktisk proces, der indeholder 6 momenter:

1. Momentet for første møde: Første møde med en opgavetype, T, der tilhører den matematiske organisation.
2. Udforskningsmomentet: Udvikling af den teknik, τ, der hører til opgavetypen.
3. Det teknologisk-teoretiske moment: Sammensætning af det teknologiske-teoretiske miljø, der hører til teknikken.
4. Det tekniske moment: Forbedring af teknikken, så den bliver mere pålidelig og beherskelse af dens brug.
5. Institutionaliseringsmomentet: Identificering af, hvad den matematiske organisation egentlig er.
6. Evalueringsmomentet: Reflektion over den matematiske organisation og hvad den kan bruges til.

En prakseologis form afhænger derfor af den person, der skaber den.

Selv inden for faget matematik er der stor forskel på prakseologier, idet de også tilpasses de institutionelle sammenhænge i hvilke de benyttes. En prakseologi for en bestemt opgave inden for den videnskabelige matematik er meget anderledes end prakseologien for den samme type opgave, som den bliver præsenteret af en gymnasielærer. Det er derfor nødvendigt også at undersøge de påvirkninger, de forskellige institutionelle niveauer har på den viden, vi forsøger at formidle. Dette bliver forklaret af teorien om didaktisk transposition og dens udvidelse med niveauer af didaktisk codetermination.

Niveauer af didaktisk codetermination

Den didaktiske codetermination er, når en matematisk organisation er med til at bestemme hvilken type didaktisk organisation, der skal benyttes i formidlingen. Det begrænser f.eks. de mulige teknikker kun at stille op med tegneredskaber, hvis opgavetypen er at bestemme grænseværdier. Men den didaktiske codetermination er også, når en didaktisk organisation er med til at bestemme den matematiske organisation, der præsenteres. Et eksempel på det sidste kan være de studie- og forskningsforløb, jeg vil præsentere i slutningen af dette kapitel, hvor den didaktiske model leder eleverne i forskellige retninger og dermed også initierer udviklingen af forskellige matematiske prakseologier.

ATD deler de forskellige niveauer af codetermination op i grupper. Den øvre gruppe er de niveauer, som den almindelige underviser normalt ikke kan påvirke. Her er der tale om samfundet, typisk repræsenteret via ministerier, samt skolen og dens pædagogik. Den nedre gruppe er de niveauer (1.-2. i tabel 2.2), hvor læreren har en indflydelse på organisationen. Disse niveauer kan forbindes med det teknologiske niveau i de tilhørende matematiske organisationer (Artigue og Winsløw, 2010).
Fagområdet dækker samlingen af de regionale matematiske organisationer (MO) og denne samling af prakseologier former det, der kaldes faget.
En sektor fokuserer på en bestemt regional MO og dermed en bestemt teori ved brug af forskellige teknologier. Temaniveauet fokuserer på en udvalgt teknologi og svarer dermed til en lokal MO. Nederst findes emnet, hvor fokus er på en bestemt teknik, svarende til en punktvis MO.
De didaktiske organisationer er gennem codeterminationen også bestemt af disse niveauer.

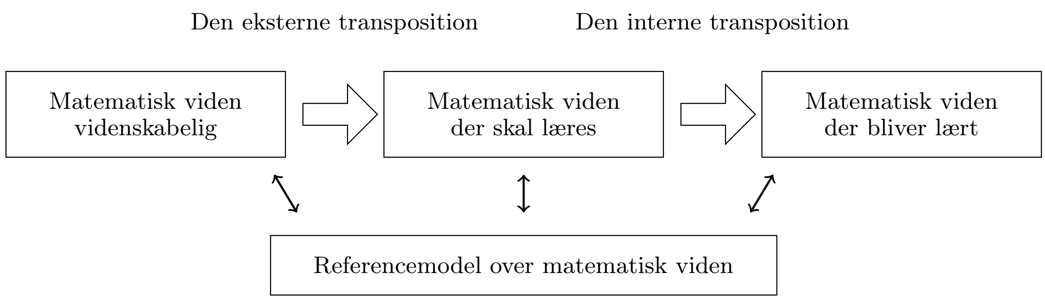
Det er vigtigt for at kunne analysere og forklare udviklingen af prakseologierne og deres organisation, at man også foretager en analyse af de niveauer af didaktisk codetermination, der påvirker dem.
I figuren nedenfor er også givet et eksempel på, hvad niveauerne kunne betyde for gymnasietema'et: Eksponentialfunktioner.

	Niveauer af didaktisk bestemmelse	Eksempel
9.	Kultur	Vestlig kultur
8.	Samfund	Undervisningsministeriet
7.	Skole	Gymnasiet
6.	Pædagogik	Klasseundervisning
5.	Fag	Matematik
4.	Fagområde	Modellering
3.	Sektor	Funktioner
2.	Tema	Eksponentialfunktioner
1.	Emne	Fordoblingskonstant

Tabel 2.2: Niveauer af didaktisk codetermination (Artigue og Winsløw, 2010, s. 6).

Referencemodeller

I forrige afsnit blev der redegjort for, at de prakseologier, vi underviser i og lærer, ikke er isolerede, men forekommer som et resultat af den didaktiske transposition og er co-determinerede på forskellige niveauer. Det er derfor en vigtig del af forskerens og underviserens job at analysere denne transposition. Her tænkt som en bredere sammenhæng mellem den videnskabelige matematiske viden, den matematiske viden der skal læres og den matematiske viden, der bliver lært.
For gymnasiet i almindelighed tales der her om bekendtgørelser, lærerplaner, vejledninger til læreplaner og eksamensopgaver, der udgives af undervisningsministeriet, som et udtryk for den officielle viden, der ligger til baggrund for den viden, der skal læres. Gennem analyse af de forskellige udgivelser, kan de prakseologier, der skal læres, identificeres.



Figur 2.1: Model for den didaktiske transposition og referencemodellen (Barbe et al., 2005, 241).

Referencemodellen er den basale teoretiske model for forskeren og den udvikles ud fra empiriske data fra de tilhørende institutioner (Barbe et al., 2005, s. 240-241). I dette specialeprojekt vil referencemodellen for de observerede lektioner på Rødovre Gymnasium være den didaktiske og matematiske a priori analyse af opgaven 'Den Rejsendes Problem', som jeg vil foretage i kapitel 6. Jeg vil til analysen bruge teorien om studie-og forskningsforløb. Først vil jeg komme ind på problemerne omkring kløften mellem forskningens og elevarbejdets modalitet.

Kløften mellem undervisningens og forskningens modalitet

Som tidligere nævnt er der på grund af den didaktiske transposition stor forskel på den samling af prakseologier, der er til stede i forskerens arbejde på universitetet og den samling af prakseologier, der gør sig gældende i undervisningen i gymnasiet. I næste afsnit vil jeg beskrive en uheldig konsekvens, der kan opstå som følge af den didaktiske transposition.

Monumentalisering af prakseologier

Begrebet 'Monumentalisering' stammer fra Chevallard, som skriver om transpositionen af prakseologier:

> *"Still, the prevailing mode of turning a taught praxeology into a school monument consists indeed in cutting it off, more or less surreptitiously, from the authentic mathematical situations whose treatment might reasonably call forth the praxeology in question."*
> *(Chevallard, 2005, s. 25)*

Monumentalisering er en konsekvens af den didaktiske transposition og opstår igennem længere tid på prakseologiernes rejse gennnem niveauerne af didaktisk codetermination. Monumentalisering opstår, som Chevallard påstår, fordi prakseologierne er konstrueret af mennesker, og forskersamfundet har en tendens til at forsøge at frigøre dem fra deres oprindelige menneskelige påvirkninger. Dette betyder, at prakseologierne bliver set som viden for videns skyld og igennem undervisningsinstitutionerne bliver gjort til monumenter, der ikke længere har forbindelse til de situationer, de blev opfundet for at forklare.
Dette giver anledning til at kigge på Brousseaus analyse af rollefordelingen i tilegnelsen af viden.

Forskerens arbejde

Forskeren opdager ny viden og formulerer det, så det kan læses af andre. Som Brousseau skriver:

> *"In addition, all irrelevant reflections must be supressed - the traces of one's errors and haphazard progress. One must conceal the reasons which led her in these directions and the personal influences which guided succes. One must skillfully contextualize even ordinary remarks, while avoiding trivialities. One must look too, for the most general theory within which the results remain valid. Thus, the producer of knowledge depersonalizes, decontextualizes and detemporalizes her results as much as possible. (Brousseau, 1997, s. 22)"*

Andre forskeres opgave er herefter at læse om den nye viden og udvide og inddrage den til egen brug eller måske at anfægte den nye viden ved at identificere den som allerede kendt viden eller ved direkte at modbevise den.
Den nye viden ændres derfor hele tiden indtil, den har en nogenlunde fast form som officiel viden.

Lærerens arbejde

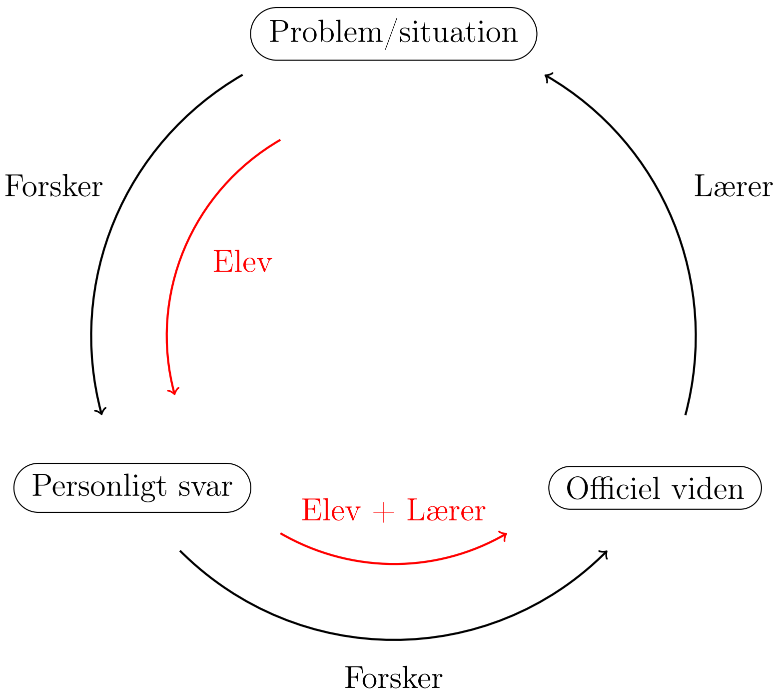
Lærerens arbejde kan næsten siges at være det modsatte af forskerens, idet han skal rekontekstualisere og repersonliggøre den officielle viden. Han skaber et lille matematisk miljø i klasserummet, hvor eleven kan 'opdage' den viden, som læreren formidler.

Elevens arbejde

Eleven opnår (forhåbentlig) igennem interaktion med det didaktiske miljø, som læreren har opstillet, at personliggøre den ønskede viden og skal derpå redekontekstualisere og atter depersonliggøre den. Som beskrevet af Brousseau:

> *"A faithful reproduction of a scientific activity by the student would require that she produce, formulate, prove, and construct models, languages, concepts and theories; that she exchange them with other people; that she recognize those which conform to the culture; that she borrow those which are useful to her; and so on. (Brousseau, 1997, s. 22)"*

Elevens arbejde er altså et arbejde, der ligner forskerens på visse punkter. Hvis undervisningen derfor består i en guided tur til den samling af monumentale prakseologier, som samfundet har samlet, så vil eleven have svært ved at personliggøre den viden, som hun bliver præsenteret for og derved også have sværere ved at opnå tilnærmelsesvis et lignende engagement for matematikken, som forskeren besidder. Ifølge Leone Burtons forskningstudie, som inddrages senere, opleves personliggørelse af viden engagerende. Sammenhængen mellem de tre parters arbejde kan illustreres på følgende måde:



Figur 2.2: De tre parters arbejde.

I det næste afsnit vil jeg præsentere uddrag fra Leone Burtons omfattende forskningsstudie, som undersøger, hvordan 70 forskere arbejder. Det gør jeg i den hensigt at identificere, hvad der engagerer forskere i matematikken og hvilke elementer det med afsæt heri kunne være ønskeligt at integrere i undervisningen i gymnasiet med henblik på didaktisk kvalificering af læringsmiljøet.

Forskningens modalitet

Inden jeg kommer nærmere ind på Leone Burtons resultater, vil jeg præcisere, hvad jeg mener med begreberne studium, forskning og akademisk arbejde.

Studium

Studium beskriver det man gør, når man opsøger eksisterende officiel viden.
Det kan være igennem alle former for *kilder*[1] - bøger, artikler, på nettet eller gennem mennesker, der har stor viden indenfor området. Begrebet dækker også den del af arbejdet, hvor man sætter sig ind i konkret viden. Den viden, der er fundet, skal personliggøres. Det er altså både læs og forstå. Studium kan være styret af en præcis problemstilling, men er ofte en undersøgelse af en matematisk organisation, der relaterer til en række af problemer.
Det er f.eks. studium, der foregår, både når studerende læser et givet pensum og når forskeren opsøger litteratur i forbindelse med et konkret problem.

Forskning

Forskning er ofte styret af en præcis problemstilling og beskriver det man gør, når man, alene eller i samspil med andre, udleder nye resultater og argumenter for disse. Med resultater mener jeg her både de brugbare og de knap så frugtbare hypoteser for sammenhæng, idet en sammenhæng som virker sandsynlig, lige når den opdages, ikke nødvendigvis holder. En hypotese for en sammenhæng kan derfor afkræftes, hvis der opstår inkonsistens i tankegangen i forskningsfasen eller hvis der gennem studiefasen afdækkes en modstrid med den nyligt opstillede hypotese. Modsat kan en hypotese også verificeres i forskningsfasen ved, at der opfindes et bevis eller gennem studium ved, at denne nye ide identificeres med noget allerede bevist.

Akademisk arbejde

Akademisk arbejde er forskerens arbejde.
Forskeren bruger ca. 80% af sin tid på at konsultere artikler, bøger og andre kilder og forstå det, de fortæller om en given problemstilling, dvs. på at studere. De sidste ca. 20% af tiden bliver udnyttet til forskning, dvs. til opstilling af hypoteser og verificering. (Brousseau, 1999, s. 44).

I det næste afsnit vil jeg præsentere Leone Burtons resultater om, hvordan akademisk arbejde foregår blandt forskere i matematik (Burton, 2004).

[1]Svarer til Chevallards begreb 'medium'.

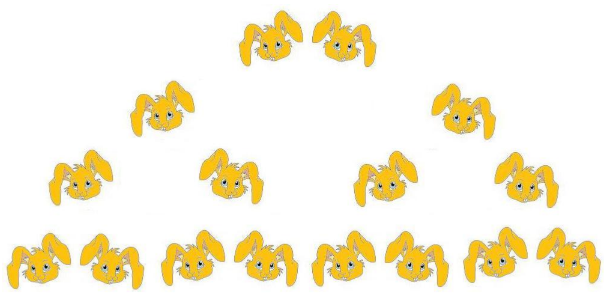
Leone Burtons resultater om akademisk arbejde

Leone Burton har tre områder, hun undersøger:

1. Hvordan tænker matematiske forskere matematisk?
2. Hvilken rolle spiller æstetik og intuition i det akademiske arbejde?
3. Hvilken rolle har samarbejde og konkurrence?

Med hensyn til det første spørgsmål fandt Burton frem til, at matematikere ofte arbejder med flere problemer, forstået på den måde, at de sjældent udelukkende arbejder med kun et bestemt problem ad gangen, men med flere forskellige, som de veksler imellem. Desuden fortalte flere forskere, at de ikke tænkte bedst, når de sad på kontoret, men snarere når de var i bevægelse (gåture, i bil, busser og fly) eller lige inden de skulle sove.
Når det kom til, hvordan forskerne tænkte matematisk, identiferede Burton tre forskellige typer af tænkning:

Type A Visuel: Tænker i billeder, ofte dynamiske.
Dette kan f.eks. være, at hvis vi ser på en model for populationsvækst for kaniner, så ser man for sig hvordan to kaniner måske får to unger, og hver af disse får også to, osv. Så kan man have følgende mentale billede.



Figur 2.3: Population af kaniner.

Type B Analytisk: Tænker i symboler og er formalistiske i deres tankegang.
Dette beskrives bl.a. af en af de interviewede forskere, som udtaler: *"When I think about a problem, I see it in my mind as equations... I manipulate these equations on my mental screen.(Burton, 2004, s. 57)"*
Ordet 'analytisk' er en direkte oversættelse af Burtons 'analytic'. Man kunne måske også bruge ordet 'logisk', men dette ville være misvisende, da både den visuelle tænkemåde og den konceptuelle også er logiske, så jeg vælger i dette speciale at bruge 'analytisk' om denne type tænkemåde.

Type C Konceptuel: Tænker i begreber og klassicificerer disse.
F.eks. en forsker der udtaler: *"It is quite word dependent. So I have words in boxes and connectors between the steps and I might be interrogating the words or the connectors. (Burton, 2004, s. 57)"*
Begrebskort er en måde at illustrere denne tænkemåde på.

Det skal dog tilføjes at få af matematikerne hovedsageligt benyttede sig af en type, de fleste kombinerede to typer og en enkelt benyttede sig bevidst af alle tre.
Præcis dette at kunne skifte tænkemåde, blev derfor også en brugbar teknik, som forskerne anvendte, f.eks. når de gik i stå i arbejdet med et bestemt problem.
Mange af de adspurgte forskere fortalte, at de kendte situationen 'at gå i stå', ikke at kunne komme et skridt videre i processen, særdeles godt, og deres løsning bestod i at bruge en af følgende teknikker til at hjælpe dem videre i processen og/eller komme på en ny ide (Burton, 2004, s. 59-60):

- Tal med en anden om problemet.
- Studér relevante kilder, der beskæftiger sig med samme eller lignende problemer.
- Gå en tur.
- Bliv ved med at prøve.
- Find alternative tilgange. F.eks. det at benytte en anden type tænkemåde.
- Giv op.
- Sov på det.
- Gør noget andet. Svar på emails, læs, eller arbejd med andre problemer.
- Tegn et billede eller et begrebskort på papir.
- Løs delproblemer.

Typisk ville en eller to af disse teknikker (dog ikke det at give op) være nok til, at de kom på en god ide, der kunne hjælpe dem videre med deres problemstilling og flere af dem beskriver, at når de finder en løsning fremkommer en dyb følelse af tilfredshed. Som en af dem udtaler:

> *"I might go and read journal papers, math reviews... I might formulate a question for a collaborator. That's marvelous when it works.(Burton, 2004, s. 58)"*

Her kommer affekt og desuden æstetik ind i billedet. En stor del af matematikerne beskriver en løsning af et matematisk problem som smukt og hertil, at de føler tilfredsstillelse, når deres resultater bliver smukke. En af dem udtaler:

> *"[...] the one thing that would keep me there [i matematikken] would be these five seconds, these moments when you feel you have seen one of the most beautiful things in the world. (Burton, 2004, s. 67)"*

Æstetik spiller altså en markant rolle i matematikernes arbejde, idet de bruger ordet 'smukt' om forklaringer, beviser og andre sammenhænge, der er kortfattede, simple, strukturede og elegante og som giver mening for dem. Det fungerer både som motivationsfaktor, idet matematikerne stræber efter skønheden, men også som evalueringskriterium, idet et argument, som er smukt, bliver set som mere rigtigt end et andet (ibid.).
Forud for de smukke resultater ligger dog en arbejdsproces, som også er fyldt med følelser: Fascination, gåpåmod, frustration, håb, spænding, lettelse og glæde er kun nogle af de føleser, der kan betegne processen for løsningen af en matematisk problemstilling.

For at opnå denne glæde og det smukke resultat kræves typisk en hel del arbejde og en lang proces. I denne proces beskriver matematikerne i Burtons studie, at de ofte bruger deres intuition til at komme videre. Intuition bliver beskrevet som:

> "*Intuition is that faculty of the mind for which comprehension is spontaneous and immediate as opposed to rational and linear, and very often, though not always, sudden. (Burton, 2004, s. 73)*"

Der er dog nogen af matematikerne, der foretrækker begreberne indsigt og instinkt i stedet for intuition, idet de mener, at det er deres tidligere erfaringer, der hjælper dem til at se hvilke metoder, der er frugtbare og hvilke, der vil være ineffektive.
Uanset hvilket begreb man vælger at bruge, så har de det fællestræk, at det er ting, der foregår i hjernen, som er svære at forklare. Det er processer, der er blevet fintunet af tidligere erfaringer, f.eks. teknikker eller teorier tilhørende prakseologier, som man tidligere har brugt, som man kan fornemme vil kunne bruges i løsningen af det aktuelle problem.
Jeg vil bruge ordet intuition om disse processer i dette speciale.

Samarbejde og konkurrence

Det sidste spørgsmål, om hvilken rolle samarbejde og konkurrence har, er der meget delte meninger om. Nogle af forskerne samarbejder ofte og med mange, som de bruger som sparringspartnere, mens andre foretrækker at arbejde alene. Dem, der foretrak at samarbejde, gav følgende specifikke grunde til det:

- At tale om et problem er en god måde at løse det på.
- Det deler arbejdet ud på flere.
- Man kan drage fordel af de andres erfaringer.
- Det øger antallet og kvaliteten af ideerne.
- Man har sparringspartnere.

- Det øger udbuddet af færdigheder.
- Man bliver inddraget i områder, man måske ikke ville have opsøgt på egen hånd.
- Man lærer meget af ældre kolleger.
- Når man står til ansvar for et fælles projekt, laver man mere.
- Der er nogen til at tage over, hvis man rammer en blindgyde.
- Man har nogen at dele glæden med, når noget lykkes.
- Man er ikke så isoleret.

Selvom det kunne se ud som om, der er mange positive effekter af et samarbejde og det måtte være at foretrække, kan det være svært i det matematiske forskersamfund, da der også findes forskere, der af forskellige grunde ikke vil samarbejde. Derudover kan et samarbejde også blive ødelagt, hvis der er for meget konkurrence mellem de deltagende parter, hvilket der ofte er blandt forskere.
Størstedelen af de forskere, der deltog i Burtons undersøgelse, mente, at der var for meget konkurrence og at det var negativt for det matematiske forskersamfund, fordi mange var aggresive i deres måde at kritisere andres arbejde på og derfor ikke var særlig konstruktive, hvilket kunne få nogle gode matematikere til at forlade forskersamfundet. Nogle mente, at det mest positive, der var at sige om konkurrencen var, at det betød at artikler og andre publikationer blev skrevet i en form, der var velskrevet, klart forklaret og logisk struktureret. Dette er samtidig et eksempel på en institutionel betingelse, der er med til at forme de prakseologier, der opstår.

Samlet set er matematikerne en blandet flok, der arbejder på mange forskellige måder og med mange forskellige metoder, men det, de essentielt set gør, er, at tilegne sig matematiske prakseologier ved at kombinere studium og forskning. De matematiske forskere er mindst lige så forskellige som eleverne i en klasse, men forskerne er som udgangspunkt motiverede, engagerede og interesserede i matematikken og på baggrund af deres metoder og arbejdsformer, opretholder forskerne denne interesse og deres engagement. Vi må derfor kunne bruge elementer af denne viden om deres metoder og arbejdsformer til at designe og analysere undervisningsforløb for andre, der skal tilegne sig matematiske prakseologier, f.eks. elever i gymnasiet, således, at også de bliver interesserede og engagerede. I det næste afsnit vil jeg lave en kort opsamling på, hvad der i så fald skulle indarbejdes i et undervisningsforløb, baseret på de af Burtons resultater, jeg har gennemgået her.

Hvilke konsekvenser har Burtons forskningstudie for design af undervisningsforløb?

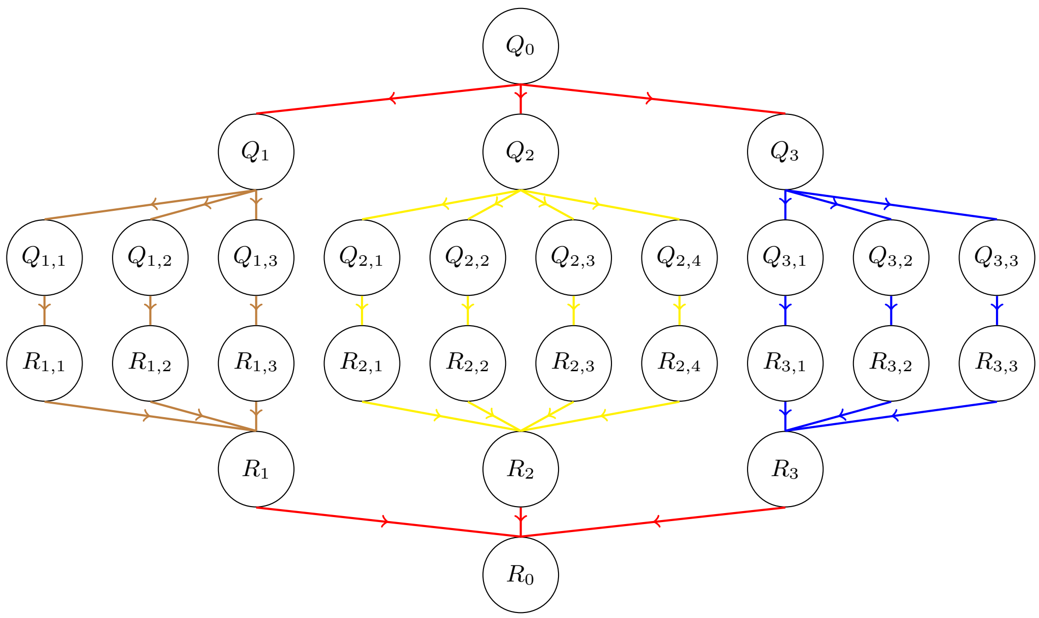
Hvis forskere, der foretager akademisk arbejde i matematik, er entusiastiske og engagerede i deres fag og de resultater, der er gennemgået i forrige afsnit, kan være indikationer på, hvad det er, der er med til at gøre dem engagerede, så kan man udlede følgende seks forslag til, hvad et undervisningsforløb, der kan være med til at engagere gymnasieelever (eller andre elever), skal indeholde:

1. Eleverne skal have mulighed for at udvikle deres egne måder at tænke på, hvad enten det er visuelt, analytisk eller konceptuelt (se side 14). En lærer bør derfor ikke planlægge undervisningsforløb, der ensidigt trækker på f.eks. den visuelle tankegang.
2. Eleverne skal støttes i deres udvikling af teknikker til at komme videre, når de støder på problemer, de ikke kan svare på, således at perioder med frustration er korte og de lærer, at sådanne perioder kan være frugtbare.
3. Der skal være plads til alle de følelser en læringssituation kan frembringe og det er vigtigt, at eleverne oplever følelsen af gennembrud og tilfredsstillelsen ved at finde et svar. Intuitive spring skal være velkomne - dog under forudsætning af, at der arbejdes videre med at finde argumenter for rigtigheden af en pludselig opstået ide.
4. Der skal være mulighed både for samarbejde med andre, men også rum til at sidde alene og arbejde.
5. De må gerne lære af hinandens arbejde og af andres. Der skal altså være mulighed for at opsøge viden andetsteds - dvs. mulighed for at studere.
6. Der må gerne være en sund konkurrence, forstået på den måde, at eleverne motiveres til at komme frem til resultater hurtigt, men samtidig med at kritik skal være velkommen og tages som opfordring til at arbejde videre. Sidst men ikke mindst skal det være lovligt at begå fejl.

Vi har nu nogle evidensbaserede bud på, hvad det er ønskeligt at få med i designet af en undervisningssituation i forhold til at engagere eleverne og vi ved også, at for at undgå monumentalisering af den matematiske viden skal eleven have mulighed for at (gen)opdage den viden, som formidles, i et miljø, hvor den giver mening og har relevans for eleven. Chevallards forslag til en model, der kan være med til at løse problemet med monumentalisering, er studie- og forskningsforløb, som jeg vil komme ind på nu.

Studie- og forskningsforløb

Som lærer hører man tit spørgsmålene: "Hvorfor er det sådan?" eller "Hvad skal det bruges til?" og når man vil videregive en lokal matematisk organisation (MO), er dette et godt sted at starte.
Teorien om studie- og forskningsforløb (S&F-forløb) tager udgangspunkt i lige netop sådanne grundlæggende genererende spørgsmål, Q_0, som kræver dannelse af prakseologier som svar. Der tales her om en model, der kan bruges til at planlægge og analysere undervisningsforløb - en didaktisk prakseologi.
Modellen for S&F-forløb kræver, at eleverne selv laver en slags akademisk arbejde, dvs. hvor de veksler mellem studie og forskning ligesom de matematiske forskere gør. Det indbefatter, at de, når de stilles overfor det genererende spørgsmål Q_0, selv skal stille de relevante underspørgsmål (og evt. underspørgsmål til disse), hvis svar kræves, for at kunne give et fyldestgørende svar på det oprindelige spørgsmål Q_0. Modellen for S&F-forløb er illustreret nedenfor:



Figur 2.4: Figuren viser, hvordan et genererende spørgsmål, Q_0, deler sig i flere grene af delspørgsmål og igen med flere underspørgsmål. Som svar på hvert underspørgsmål dannes en prakseologi, som samles til delsvar og til sidst til et samlet svar, R_0

Det er vigtigt, at det genererende spørgsmål er bredt nok til at kræve alle de underspørgsmål, hvor de prakseologier, der dannes som svar, tilsammen udgør hele den matematiske organisation, der skal læres. Ved brug af denne model til design af et undervisningsforløb får eleverne mulighed for at knytte teorien til en virkelig problemstilling og derved undgås monumentalisering af matematikken.

I et S&F-forløb er det ikke sikkert, at hver enkelt elev kommer frem til alle underspørgsmål, f.eks. på grund af tidsbegrænsninger, og de får derfor igennem forløbet kun dannet nogle af prakseologierne. Dette har dog mindre betydning, idet de prakseologier der dannes, hver især tilføjer en komponenent til det endelige svar, og teorien bliver derfor stadig knyttet til en virkelig problemstilling. Gennemføres forløbet i en klasse løses dette formentlig også af, at eleverne i klassen danner forskellige prakseologier og således kan klassen samlet give et svar på det genererende spørgsmål.

For at et S&F-forløb skal lykkes er der nogle faktorer, der skal tages hensyn til:

- Elevernes forudsætninger.
  Hvis eleverne intet ved om en givet problemstilling er det svært for dem at komme frem til meningsfyldte delspørgsmål og underspørgsmål. Omvendt skal det heller ikke være et problem, som de allerede ved alt om, da forløbet i så fald mister sit formål.
- Forløbets fokus skal være at finde svarene og ikke på de matematiske teknikker, det kræves for at nå dem.
  Dette hænger sammen med, at eleverne danner forskellige prakseologier: Hvis fokus ligger på de matematiske teknikker, kan eleverne komme til at fokusere på at finde så mange prakseologier som muligt, i stedet for at fokusere på den konkrete problemstilling, som skulle give mening til prakseologierne og dermed også give eleverne mulighed for personliggørelse. Det kunne således betyde, at fokus på de matematiske teknikker igen ville føre til monumentalisering af prakseologierne.
- Elevernes arbejde skal valideres undervejs for at støtte forløbet og forhindre misforståelser.
- Eleverne skal tage initiativet og involvere sig. De pålægges en stor del af ansvaret for processens forløb.

Det sidste punkt kan være svært at arrangere på forhånd, men hvis det genererende spørgsmål, og især dets svar, er relevant for eleverne og fanger deres interesse, samtidig med at forløbet indeholder alle (eller mange af) de 6 forslag (side 18) til, hvad et undervisningsforløb skal indeholde for at engagere eleverne, bør der være gode chancer for at forløbet bliver en succes.

Det er tidligere blevet forsøgt at give en karakterisering af, hvad et godt forskningsspørgsmål er og (Cartier et al.) opstiller følgende fem betingelser:

1. *Spørgsmålet skal være let at forstå.*
   Det skal være let for eleverne at forstå den overordnede problemstilling, så de har mulighed for at danne sig ideer om hvilke del- og underspørgsmål, der kunne være relevante.

2. *Forskningsfeltet skal potentielt være stort og en stor del af det skal være tilgængeligt for eleverne.*
   Som en konsekvens af dette vil svaret på et delspørgsmål ofte ikke give endelige svar men i stedet føre til formuleringen af et andet delspørgsmål.

3. *Eleverne skal selv være med til at styre forløbet.*
   Blandt de mange didaktiske variable, som et godt spørgsmål opstiller, skal mindst en af dem overlades til eleverne. Eksempelvis kan eleverne selv styre den matematiske retning, i hvilken de går og hvilke delspørgsmål de stiller og hvilke metoder de bruger til at be-/afkræfte deres resultater. Samtidig kan de også styres i forløbet af f.eks. et hypoteseark, hvor de løbende skal beskrive deres teorier.

4. *Det skal være let at gå i gang med forløbet* og de første delspørgsmål skal opstå relativt hurtigt og naturligt og det skal være forholdsvist nemt at opnå delresultater, så eleverne kan se, at de kommer videre.

5. *Der skal være flere mulige strategier.*
   Der skal være mulighed for at bruge forskellige strategier og forløbet skal kunne udvikle sig med mulighed for, at der opstår matematisk viden og at eleverne opnår matematiske færdigheder.

Disse 5 betingelser drejer sig om det gode forskningsspørgmål.
For at det er et godt genererende spørgsmål, kan vi sagtens bruge de ovenstående betingelser, men må tilføje endnu en betingelse vedrørende studium.

6. *Det skal være muligt for eleverne at kunne opsøge viden andetsteds.*
   Det er godt hvis nogle af de spørgsmål, der opstår i forløbet, kan give anledning til at søge efter, hvad der tidligere er blevet opdaget om emnet.

Der er nu mange forslag og betingelser, som skal være til stede for at et studie- og forskningsforløb i teorien burde blive en succes. Dette behøver dog ikke at betyde, at det ikke kan blive en succes, engagere eleverne og lære dem noget, hvis ikke samtlige betingelser er opfyldt.

Udgangspunktet var, at elever skulle arbejde akademisk med matematikken i en veksling mellem studie og forskning, men det forventes ikke af eleverne, at fordelingen mellem disse elementer er 80/20 ligesom forskerne, men nærmere, at de finder deres egen balance, som svarer til det læringsniveau, eleverne er på.

Balancen mellem studium og forskning

For at der bliver en god proces omkring studie- og forskningsforløbet, er det vigtigt at eleverne får erfaringer med både studium og forskning.
Hvorledes de vælger at fordele deres tid mellem enten studium eller forskning kan variere fra elev til elev, hvilket kun er naturligt, da også dette er en del af elevernes forskellighed. Til forskel fra 'rigtig' akademisk arbejde, som det udføres af forskere, indeholder begrebet 'forskning' i en undervisningsituation ikke kun den individuelle tankevirksomhed, men betegner også den interaktion, der foregår mellem eleverne og det adidaktiske miljø[2], som læreren opstiller. Det adidaktiske miljø er en vigtig faktor, idet eleverne igennem interaktion med dette har mulighed for både at formulere og validere deres hypoteser. Det er dog vigtigt, at eleverne ikke udelukkende forsker, men også opfordres til at opsøge informationer om det givne emne, som kan hjælpe dem til at forstå dele af problematikken, således at de ikke skal starte fra bunden hver gang, og som kan hjælpe dem videre i processen. Som Winsløw et al. skriver om den generelle nødvendighed af studium:

> *"Human societies simply cannot afford to discard the knowledge accumulated by previous generations, or to require every generation to reconstruct it anew. So, even at the level of 'modes of work and thought', students should not just learn to attack problems in a 'bare-handed way'; they should also learn to search for existing knowlegde and make use of it. (Winsløw et al.,2011, s.1)"*

Der er desuden en risiko for, at hvis forløbet kun indeholder forskning, vil eleverne på et tidspunkt støde på et uløseligt problem, fordi de mangler yderligere informationer og studie- og forskningsforløbet vil gå i stå. Hvis omvendt forløbet kun indeholder studium, vil eleverne få svært ved at se relevansen af de matematiske prakseologier og derved vil forløbet igen gå i stå,
Der skal altså være en sund balance, hvor forskningens kreativitet, intuition og logik styrer forløbet, mens studium kan be-/afkræfte hypoteser og være med til at konkretetisere og præcisere de matematiske prakseologier og inspirere til yderligere spørgsmål.

Jeg vil i dette speciale bruge modellen for S&F-forløb til at analysere forskellige opgaver, både dem der stiller meget gode genererende spørgsmål og dem der stiller mere fagligt snævre spørgsmål. Jeg vil bruge den i a priori analysen af Den Rejsendes Problem og i analysen af de to andre problemer, som alle tre er problemer, der har karakter af gode forskningsspørgsmål. Herefter vil jeg også benytte modellen til at analysere mine observationer af elever, der arbejder med Den Rejsendes Problem. Til sidst vil jeg benytte modellen til at tegne et portræt af de opgaver, der tilhører et af de danske fritidsmatematiske initiativer, nemlig Georg Mohr.

På baggrund af dette kapitel og de begreber, der er blevet introduceret, vil jeg nu præcisere min problemformulering.

[2] Begreb anvendt af Brousseau (Brousseau, 1997).

3 Problemformulering

Hvordan kan en alternativ tilgang til frivillig matematik på gymnasialt niveau i Danmark bidrage til, at kløften mellem matematikkens modalitet i elevarbejdet i gymnasiet og som forskningsområde mindskes?

- Analyse og sammenligning af den didaktiske co-determination (Matematiske og didaktiske organisationer) i to konkrete tilbud: Det franske Math en Jeans og det danske Georg Mohr.
  - Hvad er forskellen på en opgave med tilhørende teknikker og et spørgsmål?
  - Hvordan fungerer Math en Jeans opgaverne i praksis?
  - Hvad karakteriserer elevarbejde med Math en Jeans opgaver set i forhold til forskningens modalitet?
- Hvilke institutionelle betingelser er der i dag for alternative fritidsmatematiske tilbud til gymnasieelever i DK?
  - Hvad er vigtige forudsætninger for, at et nyt tilbud som Matematik for Sjov kan lade sig gøre i Danmark?
    * Hvilke ydre rammer skal være opfyldt for, at det kan blive en realitet?
    * Hvad skal der til for at tiltrække eleverne?
    * Hvad skal der til for at tiltrække lærerne?
- Hvordan kan didaktiske organisationer være med til at mindske problemet med kløften mellem forskningens modalitet og elevarbejde i gymnasiet?
  - Hvilken form skal opgaverne have, der skal arbejdes med i det nye tilbud Matematik for Sjov?
  - Hvilke didaktiske teknikker skal inddrages i det nye tilbud?

4 Metodologi

Baseret på problemformuleringen i forrige kapitel vil jeg nu beskrive, hvilke undersøgelser og analyser jeg har foretaget for at besvare problemstillingerne.
Som tidligere nævnt undersøges to allerede eksisterende fritidsmatematiske tilbud: Math en Jeans og Georg Mohr.
Jeg vil lægge ud med at beskrive, hvordan jeg undersøger Math en Jeans og hvilke analyser, jeg har foretaget i den sammenhæng. Derefter vil jeg lave en lignende beskrivelse af min undersøgelse af Georg Mohr konkurrencen og som det sidste i dette kapitel, vil jeg beskrive hvilke yderligere undersøgelser, jeg har foretaget for at finde frem til de institutionelle betingelser.

Math en Jeans

Min undersøgelse af Math en Jeans foretages i tre dele: Først ved en generel beskrivelse af projektet, så ved en analyse af tre Math en Jeans problemer og til sidst via observation og analyse af elevarbejde med et af problemerne.

For at give en generel beskrivelse af det franske projekt har jeg besøgt en Math en Jeans session ved den franske skole i København, hvor jeg talte med Geraldine Benmamar, der er ansvarlig for projektet på skolen. Samtalen med Geraldine var baseret på nogle specifikke spørgsmål, men blev ikke udført som et direkte interview. I bilag A ses min efterfølgende opsamling af Geraldines svar på mine spørgsmål baseret på noter fra besøget.
Sidst i bilaget er en meget kort beskrivelse af de observationer, jeg foretog af en af de grupper, der arbejdede med et problem under mit besøg. Den generelle beskrivelse af Math en Jeans kan ses i kapitel 5.

Analysen af de 3 Math en Jeans problemer blev foretaget for at undersøge, om denne type problemer kan bruges som genererende spørgsmål i et S&F-forløb.
De tre problemer, Den Rejsendes Problem, Lukkethedsproblemet og Pengeproblemet, er hentet fra hjemmesiden for Math en Jeans[1] og oversat til dansk af min studiekammerat Mikael Arnbjerg, der har fransk som hovedfag.

Problemerne vil blive analyseret ved hjælp af S&F-modellen og de 6 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål.
Den Rejsendes Problem vil blive analyseret på baggrund af den formulering af problemet, som blev brugt under observationerne, men vil blive sammenholdt med den oprindelige Math en Jeans formulering. A priori analysen af Den Rejsendes Problem findes i kapitel 6, mens analyserne af Lukkethedsproblemet og Pengeproblemet kan ses i kapitel 7

[1] http://mathenjeans.free.fr

Undersøgelsen af hvordan Math en Jeans problemer fungerer i praksis og hvad der karakteriserer elevarbejdet med disse problemer, foregik ved at observere to 1.g klassers arbejde med Den Rejsendes problem. I de følgende afsnit vil jeg beskrive, hvordan obsevationerne foregik og hvordan jeg har behandlet og analyseret de indsamlede observationsdata.

Valg af observationsgruppe

Da formålet med dette speciale er at undersøge mulighederne for et nyt fritidsmatematisk tilbud, ville det have været ideelt at foretage observationer af en gruppe danske gymnasieelever, der havde meldt sig frivilligt til at arbejde med Den Rejsendes Problem.
Det var min ide at gennemføre et frivilligt pilotprojekt på N. Zahles Gymnasieskole, men på trods af fuld opbakning fra skolen ledelse og egentlig positiv indstilling fra såvel kollegaer som elever, måtte jeg desværre erfare, at det ikke var muligt at gennemføre.
Årsagen til dette var primært tiden, både som tid på skoleåret, men også som konkret forbrug af tid fra såvel kollegers som elevers side.

Observationerne blev derfor foretaget af to 1.g klasser på Rødovre Gymnasium. Grunden til at det blev disse to klasser er, at deres lærer, Julian Bybeck Tosev, tidligere har beskæftiget sig med Math en Jeans opgaver. Kontakten til Julian blev formidlet igennem Carl Winsløw.

De to klasser er meget forskellige, idet eleverne i den ene klasse har valgt en sproglig linje, hvilket betyder, at de har matematik på C-niveau, mens eleverne i den anden klasse har valgt en naturvidenskabelig linje og dermed har de matematik på A-niveau.

Observationerne

Observationerne blev foretaget over 4 lektioner af en times varighed i hver klasse. Forløbet startede med en introduktion af opgaven og herefter arbejdede grupperne selvstændigt. Med jævne mellemrum fremlagde en eller flere af grupperne deres foreløbige resultater for de andre i klassen.

Til at støtte observationerne benyttede jeg to diktafoner. Grunden til at jeg benyttede diktafoner frem for filmoptagelse er, at det ikke er så forstyrrende for eleverne at have en diktafon liggende foran sig, som det er, hvis de skal forholde sig til et kamera.

De første to gange to lektioner lå på samme dag og i begge klasser var fordelingen af diktafoner således, at den ene diktafon var fast placeret hos en udvalgt gruppe, mens jeg gik rundt mellem grupperne med den anden. Dette fungerede ikke, da Den Rejsendes Problem giver anledning til mange notater og tegninger, som jeg ikke kunne notere og følge med i, da jeg forsøgte at følge flere grupper. Dette betød at, lydoptagelserne fra de første to gange to lektioner ikke kunne bruges.

I de to sidste lektioner fulgte jeg derfor en udvalgt gruppe i hver klasse og havde en diktafon fast placeret hos dem. Den anden diktafon brugte jeg til at optage gruppernes fremlæggelser ved tavlen. De to grupper, jeg fulgte, meldte sig frivilligt til at blive observeret. Denne metode gav meget bedre resultater og i begge klasser blev der derfor brugbare optagelser. S&F-forløbet for Den Rejsendes Problem udviklede sig stort set ens for de to grupper, men eleverne i den matematiske klasse var mere præcise i deres formuleringer og det er derfor observationerne af gruppen i den matematiske klasse, der er blevet transkriberet.
Transkriptionen af gruppens arbejde kan ses i bilag E.
De 5 elevpræsentationer, som forskellige grupper lavede ved tavlen, er transkriberet i bilag F og den 5. elevpræsentation, blev foretaget af den gruppe, jeg fulgte.

Gruppen bestod af tre elever, som jeg har valgt at kalde A, B og C af hensyn til deres anonymitet. I transkriptionerne betegnes læreren med L og jeg selv betegnes med I.

Analyserne

Alle analyserne er foretaget ved hjælp af S&F-modellen.
Først er modellen illustreret, hvor de forskellige grene af underspørgsmål er indikeret således af underspørgsmål til spørgsmålet Q_1 har 1, som første indeks. Underspørgsmål til $Q_{1,1}$ har 1,1 som første indeks osv. Direkte afledninger er markeret med fuldt optrukne pile, mens indirekte sammenhænge, eller senere udledte sammenhænge, på tværs af grenene er markeret med stiplede pile.

Efter illustrationen gives en oversigt over, hvad hvert enkelt spørgsmål er. Dette følger en gren ad gangen, således at grenen for Q_1 bliver præsenteret før grenen for Q_2 osv.

Alle analyserne bliver afslutningsvis sammenholdt med de 6 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål for at identificere, hvilke af disse det genererende spørgsmål opfylder.
Analysen af elevarbejdet vil desuden indeholde en analyse af, hvilke af de 6 forslag fra Burtons studium (side 18), der er til stede i elevarbejdet, for at undersøge hvorvidt eleverne arbejdede akademisk med Den Rejsendes Problem. Analysen vil også inddrage lærerens ideer til forløbet og de didaktiske teknikker, han benytter, for at kunne give et bud på hvilke didaktiske teknikker, det kan være en god ide at inddrage i et nyt tilbud.

Georg Mohr

For at undersøge det danske tilbud Georg Mohr har jeg foretaget to interviews, studeret hjemmesiden georgmohr.dk og analyseret 4 opgaver, der er karakteristiske for konkurrencen.

Interviews

Begge interviews er foretaget ved det andet vinderseminar for Georg Mohr i Sorø i april og er understøttet af diktafonoptagelser.

Det første interview var med Kirsten Rosenkilde, der er en af arrangørerne for konkurrencen. Kirsten er både med i gruppen, der konstruerer opgaverne til konkurrencen og er ansvarlig for vinderseminaret i april. Jeg interviewede hende med den hensigt at finde ud af, hvad Georg Mohr konkurrencen er, hvordan den foregår, hvilke elever der deltager og om opgaverne har særlige karakteristika.
Transkriptionen af interviewet kan ses i bilag B.

Det andet interview var med 3 deltagere i Georg Mohrs vinderseminar.
De tre interviewede er to drenge fra henholdsvis 1. og 3.g og en pige fra 3.g hvilket giver et godt billede af fordelingen af elever på vinderseminaret, hvor der var mange drenge og overvægt af elever fra 3.g. De tre interviewede meldte sig frivilligt.
Interviewet havde til formål at finde frem til, hvad der tiltrækker dem ved at deltage i Georg Mohr konkurrencen. I transkriptionen af interviewet er de tre benævnt med A, B og C, mens jeg som interviewer er benævnt med I.
Transkriptionen kan ses i bilag C.

Begge interviews er inddraget i første afsnit af kapitel 9, hvor jeg giver et portræt af Georg Mohr konkurrencen.

Opgaverne

Georg Mohr opgaverne stilles inden for 4 hovedområder i matematikken:
Geometri, diskret matematik, talteori og algebra.

Opgaverne, som jeg vil analysere, er udvalgt af cand. scient. Sune Precht Reeh, som er en tidligere deltager i Georg Mohr konkurrencen, der gik videre til den Internationale Matematik Olympiade. I disse år skriver han sin Ph.D. i matematik ved Københavns Universitet og er også tilknyttet den gruppe, der laver opgaver til konkurrencen.
Han har udvalgt to lette og to svære opgaver, der tilsammen dækker de fire hovedemner for konkurrencen på følgende måde:

De lette:
Geometri: 2. runde 2009 - opg. 1
Talteori: 2. runde 2007 - opg. 2

De svære:
Diskret Matematik: 2. runde 2004 - opg. 5
Algebra: 2. runde 2005 - opg. 5

Opgaverne vil blive præsenteret i andet afsnit af kapitel 9.
For hver af opgaverne vil jeg først præsentere en eller flere løsninger, som er konstrueret med inspiration fra hjemmesiden, hvorefter jeg vil analysere opgaverne ved hjælp af S&F-modellen.
Som afslutning på kapitlet vil jeg give en karakteristik, af hvad en Georg Mohr opgave er, baseret på de 6 betingelser for et studie- og forskningsspørgsmål.

I kapitel 10 vil jeg på baggrund af analyserne af Math en Jeans problemerne og Georg Mohr opgaverne give et svar på, hvad forskellen mellem en opgave og et spørgsmål er og foreslå hvilken form opgaverne i det nye tilbud Matematik for Sjov skal have.

De institutionelle betingelser

Ud over at undersøge de to tilbud Math en Jeans og Georg Mohr, har jeg foretaget et fokusgruppeinterview med en gruppe gymnasieelever og holdt et møde med mine kolleger i matematisk faggrupe på N. Zahles Gymnasieskole. Dette har jeg gjort med den hensigt at identificere hvilke forudsætninger, der er, for at et nyt tilbud som Matematik for Sjov kan blive en realitet.

Fokusgruppeinterview

Dette interview blev afholdt for at spørge eleverne om, hvad der skal til for, at de kunne tænke sig at deltage i et fritidsmatematisk tilbud og hvilke rammer, der skulle være for et sådant tilbud.

Gruppen bestod af 4 elever fra N. Zahles Gymnasieskole.
Eleverne er blevet udvalgt på baggrund af en rundspørge blandt matematiklærerne, som udpegede mindst to elever, som kunne tænkes at have interesse i matematik, fra hver af de i alt 7 matematikhold på skolen.
Af disse elever udvalgte jeg 7 baseret på klassetrin og kønsfordeling, som jeg inviterede til at deltage i fokusgruppen. Heraf var der 4 som accepterede min invitation.

Gruppen kom således til at bestå af 3 drenge og en pige alle fra 2.g.
Interviewet blev optaget med diktafon og er transkriberet i bilag D, hvor eleverne er benævnt med A, B, C og D.

Kollegamøde

Mødet med mine kolleger blev holdt som en indledning til at samle en frivillig gruppe til at arbejde med Math en Jeans problemerne på N. Zahles Gymnasieskole. Under mødet spurgte jeg mine kolleger om, hvad de mente der skulle til, for at tiltrække dem og eleverne til at deltage i et nyt tilbud Matematik for Sjov og deres svar kan ses i kapitel 10 i afsnittet om lærerne på side 105.

Afslutningsvis vil jeg i kapitel 10 samle resultaterne fra de empiriske undersøgelser og på baggrund heraf give et bud på, hvad et nyt frivilligt tilbud Matematik for Sjov kunne være i det almene gymnasium.

I næste kapitel vil jeg begynde analyserne af Math en Jeans med den generelle beskrivelse af projektet.

5 Math en Jeans

I dette kapitel vil jeg introducere det franske fritidsmatematiske tilbud Math en Jeans.

I Frankrig, og på franske skoler i hele verden, eksisterer der et projekt for elever i alderen 12-16, som hedder Math en Jeans (Matematik i cowboybukser).
Dette projekt foregår i et samarbejde mellem skolerne og universiteterne og har efterhånden kørt i mange år.
Det går ud på, at en gruppe af elever i september frivilligt melder sig til at arbejde med et Math en Jeans-problem frem til maj. De får udleveret et matematisk spørgsmål, som er stillet af en professor ved et universitet, og som stiler efter at opfylde de første 5 krav for et godt studie- & forskningsspørgsmål (se side 21).

Eleverne arbejder i løbet af skoleåret med dette spørgsmål en gang om ugen frem til maj, hvor de mødes med elever fra andre skoler til en konference, der har til formål, at eleverne skal præsentere deres arbejde og deres resultater for hinanden.
Ved konferencerne er der fokus på om eleverne er matematisk korrekte og har gode argumenter/beviser for deres påstande.

Den måde, eleverne arbejder på, kan karakteriseres som et forskningsforløb, hvor spørgsmålene deler sig ud i delspørgsmål med flere underspørgsmål, inden hvert af de undersvar, som eleverne finder, bliver en samlet prakseologi og flere af disse samles til punktvise matematiske organisationer; og måske til lokale matematiske organisationer, som giver et samlet svar på det oprindelige spørgsmål.

Grunden til, at forløbet ikke kan karakteriseres som et studie- og forskningsforløb, er, at eleverne ikke foretager studium i forløbet.
Math en Jeans er et projekt, hvor eleverne kun benytter sig af det, de allerede ved og kan argumentere sig frem til. Lærerne, der er tilknyttet projektet, ved ikke mere end eleverne om det givne problem, når de starter forløbet.

Math en Jeans bliver på denne måde et fælles projekt for lærere og elever, hvor lærerens hovedfunktion er at være en konsulent, der kan holde overblikket over hvilke delresultater, der er fundet og kan være med til at strukturere elevernes besvarelser. Det er klart, at lærerne også har en bedre ide om hvilke hypoteser, der er frugtbare og hvilke der ikke er, så de på den måde kan hjælpe eleverne og guide dem i de 'rigtige' retninger.

I min samtale med Geraldine Benmamar, fortalte hun, at den største udfordring for lærerne er, at de med jævne mellemrum må indrømme overfor eleverne, at de ikke kender det rigtige svar og ikke ved, om den hypotese eleverne opstiller er frugtbar eller ej, hvorefter de i fællesskab må prøve at teste hypotesen og enten arbejde videre med den eller forkaste den.

I arbejdet med opgaverne benytter eleverne sig ofte af deres computere. De bruger computerne som lommeregnere, til at illustrere og 'lege' med forskellige situationer via programmer som Geogebra og til at lave programmer, der kan hjælpe dem med at løse deres problem.

Da jeg besøgte en Math en Jeans session, oplevede jeg, at en dreng der havde arbejdet længe med et program, der skulle vise hvilke træk, der er mulige for skakbrikken 'hesten', endelig fik det til at virke. Da det virkede, jublede han som om, han havde scoret et mål i en afgørende fodboldkamp.
De elever, der deltager i Math en Jeans, går virkelig op i det, men ifølge læreren er det ikke kun de elever, der er bedst til matematik i skolen, der deltager, men også de elever, der kan lide en udfordrende opgave, der kræver kreative løsninger.

De deltagende skoler arbejder sammen to og to på den måde, at de skoler, der arbejder med det samme spørgsmål mødes eller laver videokonferencer et par gange i løbet af året, således at de kan hjælpe og inspirere hinanden. Det betyder også, at eleverne til den afsluttende konference ser, både hvad andre skoler har arbejdet med, men også en anden skoles besvarelse af det spørgsmål, de selv har arbejdet med.

I dette speciale er observationerne foretaget af to klasser, der arbejdede med det samme problem og hvor eleverne løbende fremlagde deres resultater for de andre i klassen.

Det problem, som eleverne arbejdede med, er Den Rejsendes Problem, som jeg vil analysere a priori i næste kapitel, hvor jeg også vil inddrage den oprindelige Math en Jeans formulering af problemet.
Jeg har også udvalgt to andre problemer, Lukkethedsproblemet og Pengeproblemet, som stammer fra Math en Jeans projektet og som jeg vil analysere efterfølgende.

6 A priori analyse af Den Rejsendes Problem

Som jeg beskrev i metodologien, kunne det ikke lade sig gøre at få gymnasieelever til at melde sig frivilligt til et matematisk tilbud, som lå efter skoletid. Derfor er arbejdet med Den Rejsendes Problem blevet observeret i to 1.g klasser. Dette betyder, at forudsætningerne for forløbet bliver ændret, da der i undervisningssituationer eksisterer en didaktisk kontrakt mellem lærer og elever, som betyder, at eleverne hovedsageligt deltager aktivt i forløbet, fordi det er en del af deres matematikundervisning og fordi deres indsats bliver bedømt af læreren. En anden forudsætning, som også bliver ændret, er, at eleverne i en klasse har stort set samme faglige niveau og er blevet undervist i de samme matematiske prakseologier. Dette er i modsætning til en gruppe elever, der ville melde sig frivilligt, fordi de var interesserede i matematik og som måske kom fra forskellige klasser og klassetrin. Disse ændringer af forudsætningerne betyder, at udfordringen med at engagere eleverne i en problemstilling er større og at det bliver sværere for dem at få forskellige ideer til løsninger, da de har samme matematiske baggrund. Jeg vil i dette kapitel præsentere en a priori analyse af det spørgsmål, som eleverne skal arbejde med nemlig Den Rejsendes Problem.

Funktionen af denne a priori analyse er at identificere hvilke underspørgsmål, der kan opstå ud fra det genererende spørgsmål og hvilke muligheder, der i besvarelsen af disse spørgsmål er for eleverne til at foretage både studium og forskning. Analysen kan derfor bruges til at finde ud af, hvad der er mulighed for at observere i elevernes arbejde med opgaven og til at se ,hvilke underspørgsmål læreren har mulighed for at stille i forlængelse af det genererende spørgsmål.

Den Rejsendes Problem er et problem, som har eksisteret længe: En rejsende skal rejse til forskellige byer: Hvordan gør han det smartest? Der findes mange variationer af problemet, nogle, hvor der er et krav om, at den rejsende skal vende hjem til udgangspunktet, nogle, hvor der er veje, der ikke kan bruges, nogle, hvor den rejsende er en sælger, der skal samle nye varer op på vejen osv. Den udgave af problemet, som eleverne fik udleveret i de timer, der blev observeret, kan ses på næste side:

JT

Den rejsendes problem

En rejsende bor i København og flyver rundt med sin flyvemaskine til forskellige tilfældige byer for at sælge sit produkt.

Du skal hjælpe den rejsende med at finde den korteste vej mellem tilfældig placerede byer, så han sparer penge på brændstof

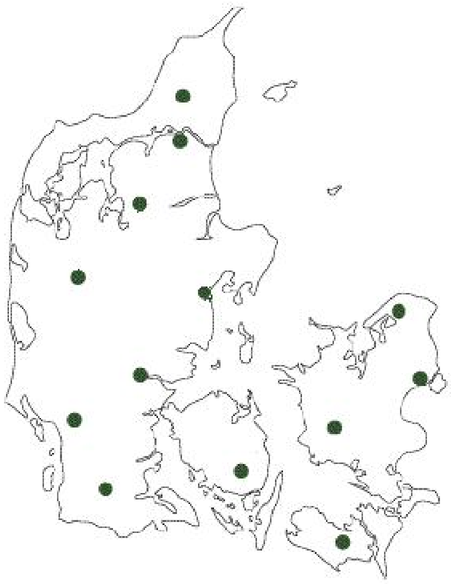
Problemformulering: **Find den korteste vej mellem 2 byer, 3 byer, 4 byer, 5 byer, osv.**

Kreative arbejdsformer er mere end velkomne.

Skriv jeres ideer og tanker på hypotesearket og argumenter for, hvorfor jeres hypoteser er korrekte eller forkerte.

Der skal afleveres en grupperapport pr gruppe, hvor I argumenterer for jeres hypoteser.

Kort til inspiration



Figur 6.1: Opgaven som den blev udleveret til eleverne. Hypotesearket kan ses i bilag G

I formuleringen af spørgsmålet bliver det nævnt, at eleverne skal benytte et hypoteseark og at de skal aflevere en grupperapport. Et hypoteseark er en didaktisk teknik, der støtter eleverne i at beskrive deres egen tankegang, når de bagefter skal skrive rapporten derhjemme, hvilket hjælper eleverne til at udvikle en teknologi for de opgavetyper, der opstår i S&F-forløbet.

Når et hypoteseark bliver brugt i forbindelse med et S&F-forløb, er det samtidig en didaktisk teknik, der hjælper læreren til at se, hvilke ideer, og måske hvilke hele matematiske prakseologier, eleverne udvikler, samtidig med, at det er med til at vise, hvilke retninger elevernes arbejde med problemet drejer sig i.

Når der i problemformuleringen lægges op til gruppearbejde, er der både fordele og ulemper: Fordelene har jeg været inde på i teoriafsnittet om forskningens modalitet, idet mange af fordelene ved et samarbejde mellem forskere må antages også at kunne gælde for samarbejde mellem elever. Ulempen i dette tilfælde kan være, at kravet om en grupperapport kan forhindre de elever, der helst vil arbejde alene, i at gøre det. Kravet kan dog ikke forhindre eleverne i at sidde og tænke over en bestemt problemstilling hver for sig i løbet af S&F-forløbet. For at opfylde det 4. forslag fra Burtons forskningsstudium kræves det blot, at dette er en mulighed for eleverne:

4. Der skal være mulighed både for at samarbejde med andre, men også rum til at sidde alene og arbejde.

I afsnittet om S&F-forløb blev der opstillet 6 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål (side 21). Den første betingelse var, at spørgsmålet skulle være let at forstå. Det opfylder ovenstående introduktion til Den Rejsendes Problem, fordi det indeholder alt det, som eleverne har brug for at vide: Situationen er, at en rejsende sælger vil flyve den korteste rute for at spare penge på brændstof og der er tegnet et kort med nogle byer på for at illustrere, hvordan situationen kunne se ud. Denne formulering lægger op til, at eleverne selv skal opstille nye betingelser for problemet, f.eks. om sælgeren skal vende tilbage til udgangspunktet eller ej. På den måde opfylder spørgsmålet også den 4. betingelse for et godt studie- og forskningsspørgsmål, at det skal være let at stille de første delspørgsmål.

Hvis vi sammenligner med formuleringen af Den Rejsendes Problem, som det er blevet præsenteret i Math en Jeans sammenhæng, kan vi se at der er ret stor forskel.[1]:

> En rejsende vil besøge n interessante steder med udgangspunkt i sit hjem. Disse steder er forbundet med veje.
>
> (a) Find en eller flere betingelser for, at den rejsende kan besøge alle byerne præcis en gang og vende tilbage til udgangspunktet.
>
> (b) Find en eller flere betingelser for, at den rejsende benytter hver rute højst en gang, før han vender hjem.
>
> Vi vil bruge grafteori for at svare på problemet.

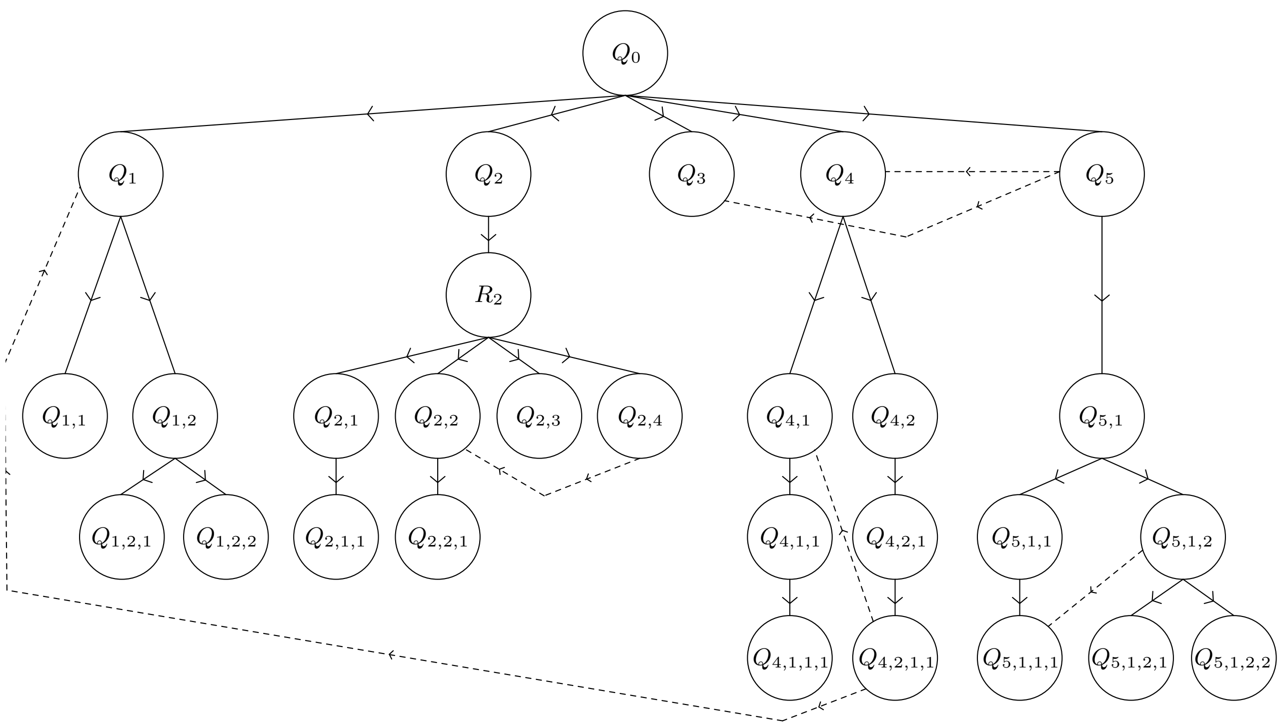
[1] Kilde: Bordeaux & Bordeaux Lycée François Magendie & Lycée Gustave Eiffel, Frédéric Bayart, 2007
http://mathenjeans.free.fr/amej/evenements/cong_07/partsuj_07/s07_bord_bord/s07_bord_bord.pdf

Forskellen ligger i, at Math en Jeans formuleringen indeholder to konkrete spørgsmål, der skal svares på, mens disse er implicitte i den udleverede udgave. Derudover er der i Math en Jeans udgaven også angivet, at grafteori skal bruges i løsningen af problemet. Dette kan skyldes, at Math en Jeans spørgsmålet sigter efter at opfylde kravene for et godt forskningsspørgmålet, mens der i den udleverede udgave også skal lægges op til studium.

Jeg vil nu bruge modellen for S&F-forløb til at undersøge, om den udleverede udgave af problemet kan generere spørgsmål, der lægger op til studium og om den opfylder den 2. betingelse for et godt studie- og forksningsspørgsmål, at forskningsfeltet potentielt skal være stort.

Den Rejsendes Problem som S&F-forløb

Det genererende spørgsmål for dette S&F-forløb er den formulering af problemet, som blev udleveret til eleverne (figur 6). I dette afsnit vil jeg beskrive de underspørgsmål, som denne formulering lægger op til. Jeg vil også beskrive, hvilke kendte matematiske problemer de forskellige underspørgsmål viser sig at kunne indeholde. Af hensyn til overblikket har jeg illustreret forløbet først og beskriver bagefter, hvad de enkelte spørgsmål er, inden jeg til sidst går i dybden med nogle udvalgte.



Figur 6.2: A priori model for Den Rejsendes Problem.

Q_0: En rejsende bor i københavn og flyver rundt med sin flyvemaskine til forskellige tilfældige byer for at sælge sit produkt.
Du skal hjælpe den rejsende med at finde den korteste vej mellem tilfældigt placerede byer, så han sparer penge på brændstof.
Problemformulering: Find den korteste vej mellem 2 byer, 3 byer, 4 byer, 5 byer, osv.

Q_1: Kan man flyve en rute, som besøger alle byerne præcis én gang?
$Q_{1,1}$: Hvad kan gøre det umuligt at flyve en rute, som besøger alle byerne præcis en gang?
$Q_{1,2}$: Hvilken af disse ruter er så den korteste?
$Q_{1,2,1}$: Hvor langt er der mellem hver by?
$Q_{1,2,2}$: Kan det betale sig altid at flyve til den by, der er nærmest, men som ikke er den, man kom fra?

Q_2: Hvilke faktorer har betydning for brændstoføkonomien på et fly?
R_2: Vind- og vejrforholdene, vægten af flyet, længden af ruten og hastigheden hvormed man flyver.
$Q_{2,1}$: Vind: Er det ligegyldigt, om der er medvind, modvind eller vindstille?
$Q_{2,1,1}$: Hvis et fly flyver den samme strækning ud i modvind og hjem i medvind, vil det så være det samme som at flyve ud og hjem, hvor der ikke er nogen vind?
$Q_{2,2}$: Vægt af lasten: Hvor mange varer skal sælgeren have med?
$Q_{2,2,1}$: Hvordan finder man ud af, hvor mange varer han skal have med?
$Q_{2,3}$: Længde af ruten: Hvordan finder vi den korteste rute?
$Q_{2,4}$: Hastighed: Hvordan hænger hastigheden sammen med vindmodstanden?

Q_3: Hvad er den korteste rute mellem 2 byer?

Q_4: Hvad er den korteste rute mellem 3 byer?
$Q_{4,1}$: Skal man flyve rundt mellem de tre byer eller kan det betale sig at flyve ud og hjem ad samme rute?
$Q_{4,1,1}$: Hvad ændres, hvis det ikke er muligt at flyve mellem to udvalgte byer, f.eks. by 2 og 3?
$Q_{4,1,1,1}$: Kan man flyve uden om en spærret linje mellem to byer eller skal man tilbage til den by hvortil linjen er fri?
$Q_{4,2}$: Hvad sker der, hvis vi starter i en anden by?
$Q_{4,2,1}$: Skal man ende i samme by, som man starter i?
$Q_{4,2,1,1}$: Hvad sker der, hvis man ikke skal ende i samme by, som man startede i?

Q_5: Hvad er den korteste rute mellem n byer?
$Q_{5,1}$: Hvor mange linjer er der maksimalt?
$Q_{5,1,1}$: Hvor mange mulige ruter er der maksimalt?
$Q_{5,1,1,1}$: Hvad sker der, hvis nogle af linjerne ikke er mulige?
$Q_{5,1,2}$: Kan man flyve en rute, hvor man benytter alle linjer præcis én gang?

$Q_{5,1,2,1}$: Kan man flyve en rute, hvor man bruger alle linjerne én gang, men ikke ender det samme sted?
$Q_{5,1,2,2}$: Hvor mange linjer skal hver by mindst have, for at det kan lade sig gøre at flyve på dem alle præcis én gang?

Matematiske problemstillinger i Den Rejsendes Problem.

I dette afsnit vil jeg beskrive de matematiske problemstillinger, som opstår i forløbet for Den Rejsendes problem. Jeg følger en gren af modellen ad gangen.

Om Q_1: Kan man flyve en rute, som besøger alle byerne præcis én gang?

Dette spørgsmål kan opstå, som et grafteoretisk spørgsmål vedrørende eksistens af Hamilton-kredse, ud fra illustrationen af byerne på kortet, hvis man repræsenterer sælgerens muligheder for flyveruter med kanter og repræsenterer byerne, han skal besøge med knuder. En kreds i sådan en graf er en rundtur, hvor sælgeren starter i en knude, flyver ud ad nogle kanter til nogle andre knuder og siden vender hjem til startknuden.
Definitionen af en Hamilton-kreds er:

Lad $G = (V, E)$ være en graf, hvor V er mængden af knuder og E er mængden af kanter. En kreds i G kaldes en Hamilton-kreds, hvis den har længde $|V|$, altså hvis den går gennem alle knuder i grafen, og grafen G kaldes en Hamilton-graf, hvis der eksisterer en Hamilton-kreds i G. (Forst, 2006)

Hvis grafen er fuldstændigt sammenhængende, dvs. at man fra alle knuder kan komme ad kanter til alle andre, så er det klart, at der må kunne findes en Hamilton-kreds. Spørgsmålet om eksistens af en Hamilton-kreds bliver derfor især relevant, når der ikke er kanter mellem alle knuderne og kan derfor også afledes af spørgsmålene $Q_{4,1,1}$ og $Q_{5,1,1,1}$.

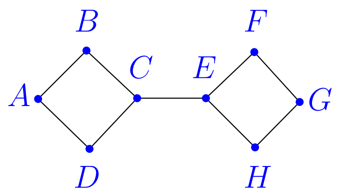
I følge Forst findes der ikke en karakterisering af Hamilton-grafer via en simpel nødvendig og tilstrækkelig betingelse (Forst, 2006, 73), men der findes en række nødvendige egenskaber, som en graf skal opfylde for at kunne være en Hamilton-graf:

- Den har mindst 3 knuder.
  Det vil sige, at dette spørgsmål bliver relevant, når eleverne kigger på situationer, hvor den rejsende skal besøge mindst 3 byer.

- Den er sammenhængende.
  Det betyder, at sælgeren skal kunne flyve til alle byerne enten direkte eller via andre byer fra hans udgangspunkt.

- Alle knuder har valens ≥ 2.
  Valens er antallet af kanter til en knude. Dvs. dette betyder, at sælgeren skal kunne flyve til mindst en anden by, udover den han kom fra, fra enhver by.

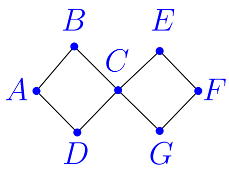
- Ingen kant i grafen må være afgørende for grafens sammenhæng.
  Dette er bedst illustreret på følgende måde:



Figur 6.3: Kanten CE er afgørerende for grafens sammenhæng

På figur 6.3 ses det tydeligt, at uanset hvilken vej man flyver, eller hvor man starter, vil man komme til at skulle besøge C og eller E to gange.

- Ingen knude i grafen er afgørende for grafens sammenhæng. Dette kan illustreres på følgende måde:



Figur 6.4: Knuden C er afgørende for grafens sammenhæng.

På figur 6.4 ses det, at sælgeren vil skulle besøge knude C mindst to gange.

Spørgsmålene Q_1 og $Q_{1,1}$ lægger derfor op til en rig matematisk udfordring for eleverne: Identificér de betingelser, som er nødvendige for eksistens af en Hamilton-kreds.
Idet der endnu ikke er fundet én nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at kunne identificere grafer som Hamilton-grafer, er det også stadig et åbent forskningsspørgsmål, som kan udvides yderligere sammen med spørgsmål $Q_{4,2,1,1}$: Hvad sker der, hvis man ikke skal ende i samme by, som man startede i?.

Spørgsmålet $Q_{1,2}$ kan besvares ved at opstille en afstandstabel og $Q_{1,2,1}$ kan besvares ved at finde et modeksempel f.eks. ved at bruge afstandstabellen.

Om Q_2: Hvilke faktorer har betydning for brændstoføkonomien på et fly?

Dette spørgsmål bliver afledt af det genererende spørgsmål ved, at motivationen for at finde den korteste rute er angivet til at være at spare penge på brændstof.
Hele grenen tilhørende spørgsmålet Q_2 er et eksempel på, at et svar på et givet spørgsmål kan give anledning til flere spørgsmål.

For dette spørgsmål er svarene:
R_2: Vind- og vejrforholdene, vægten af flyet, længden af ruten og hastigheden hvormed man flyver.
Da man ved at svare på spørgsmålet angiver, at disse faktorer har en indflydelse på brændstoføkonomien, er det kun naturligt at spørge yderligere: Hvordan har de en indflydelse?

Dette yderligere spørgsmål afleder direkte spørgsmålene:
$Q_{2,1}$: Vind: Er det ligegyldigt, om der er medvind, modvind eller vindstille?
$Q_{2,1,1}$: Hvis et fly flyver den samme strækning ud i modvind og hjem i medvind, vil det så være det samme som at flyve ud og hjem, hvor der ikke er nogen vind?
$Q_{2,3}$: Længde af ruten: Hvordan finder vi den korteste rute?
$Q_{2,4}$: Hastighed: Hvordan hænger hastigheden sammen med vindmodstanden?

Den sidste faktor er vægten af lasten og yderligere spørgsmål vedrørende denne faktor blivet til et optimeringsproblem. Det skal optimeres, hvad det koster at flyve med et vist antal varer i forhold til hvor meget, sælgeren kan sælge og til hvilken pris. Dette kan igen afhænge af, om sælgeren har har faste kunder, der altid aftager den samme mængde varer eller ej; om han har depoter undervejs eller ej; om det er mandag eller ej; om han laver et tilbud eller ej; hvor meget han maksimalt kan have med på flyet osv.
Der er således mange faktorer, der kan have en indvirkning på lastens størrelse og de to spørgsmål, jeg har afledt i modellen, er derfor kun starten.
$Q_{2,2}$: Vægt af lasten: Hvor mange varer skal sælgeren have med?
$Q_{2,2,1}$: Hvordan finder man ud af, hvor mange varer han skal have med?

Denne gren af Den Rejsendes Problem fører derfor til mange opgavetyper og dermed til mange prakseologier, som alle hører til i den matematiske organisation, der beskriver det matematiske fagområde operationsanalyse. Et eksempel på en sådan prakseologi kan være:

T	Hvordan sikrer man, at ruten går igennem hver enkelt knude én gang?
τ	Vi opstiller følgende betingelser for grafen med knudemængden $N = \{1, \ldots, n\}$, hvor x_{ij} er kanten fra i til j og hvor x_{ij} antager værdien 1, hvis kanten er med i ruten: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N, \quad i \neq j$ og $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N, \quad i \neq j$ De to betingelser sikrer, at vi kun går ind og ud af hver knude én gang.
θ	Diskurs om grafer, summer og mængder som f.eks: x_{ij} er kanten fra i til j x_{ij} antager værdien 1, hvis kanten er med i ruten. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{(n-1)n}$
Θ	Teori om Travelling Salesman Problem.

Tabel 6.1: Prakseologi der hører til fagområdet operationsanalyse.

Jeg vil ikke gå yderligere i detaljer med operationsanalyse her, men blot nævne at selve det at finde den korteste rute under givne betingelser, er en stor sektor inden for fagområdet, der meget passende kaldes: The travelling salesman problem.

I forbindelse med denne række af spørgsmål er der især to vinkler, der kan lægge op til studium. For det første kan det undersøges på nettet, hvordan vindmodstand og hastighed hænger sammen og for det andet, hvis eleverne undersøger den engelske oversættelse 'The travelling salesman', fremkommer der 1.800.000 sider, som kræver, at eleverne i det mindste læser og forstår lidt af problematikken og dens løsninger.

Dette kan f.eks. være at forstå, hvad wikipedia-hjemmesiden[2] for 'Travelling Salesman Problem' mener med, at en graf er symmetrisk: At afstanden fra knude i til knude j er den samme, som afstanden fra knude j til knude i.
Hvis man læser lidt længere på denne hjemmeside, findes der en henvisning til 'Hamiltonian cycle', som måske kan lede eleverne til at undersøge grenen for Q_1.

Jeg forventer ikke, at eleverne vil kaste sig over detaljer i fagområdet operationsanalyse, da dette kræver mange matematiske prakseologier, som elever i 1.g endnu ikke besidder: F.eks. at kunne håndtere de store summer, som er en forudsætning for at kunne udvikle den prakseologi, der er beskrevet i tabel 6.1, men det er alligevel taget med i modellen, som en mulig udvikling af forløbet.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

Q_3: Hvad er den korteste rute mellem 2 byer?

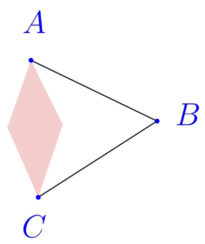
Denne lille gren viser, hvordan det genererende spørgsmål Q_0 fører til et spørgsmål, som eleverne kan svare på med det samme.
Den korteste rute mellem to byer er den lige vej.

Der er altså en del af svaret på det genererende spørgsmål, som opstår meget hurtigt og dermed er den 4. betingelse for et godt studie- og forskningsspørgsmål opfyldt: Eleverne kan nemt komme frem til et intuitivt delresultat.

Q_4: Hvad er den korteste rute mellem 3 byer?

Følgende spørgsmål opstår naturligt ud fra spørgsmålet Q_4:

$Q_{4,1}$: Skal man flyve rundt mellem de tre byer eller kan det betale sig at flyve ud og hjem ad samme rute?
$Q_{4,1,1}$: Hvad ændres, hvis det ikke er muligt at flyve mellem to udvalgte byer, f.eks. by 2 og 3?
$Q_{4,1,1,1}$: Kan man flyve uden om en spærret linje mellem to byer eller skal man tilbage til den by hvortil linjen er fri?

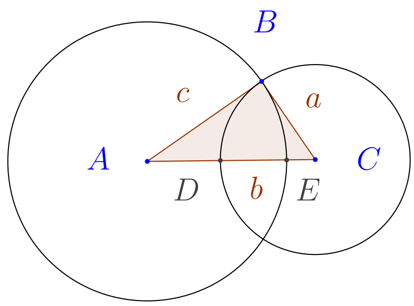


Figur 6.5: Tre byer hvor linjen mellem A og C er spærret.

$Q_{4,2}$: Hvad sker der, hvis vi starter i en anden by?
$Q_{4,2,1}$: Skal man ende i samme by, som man starter i?
$Q_{4,2,1,1}$: Hvad sker der, hvis man ikke skal ende i samme by, som man startede i?

Et interessant spørgsmål i denne gren er spørgsmålet $Q_{4,1}$, da det lægger op til en overvejelse vedrørende trekanter, som elever i slutningen af 1.g burde have den nødvendige matematiske teknik til at kunne illustrere og identificere med spørgsmålet Q_3: Kan summen af to af siderne i en trekant være kortere end den sidste side?

Dette spørgsmål kan nemt besvares ved hjælp af en visuel tænkemåde:



Figur 6.6: Trekant ABC, samt cirklen med centrum i A og radius c og cirklen med centrum i C og radius a.

På figur 6.6 ses det, at $a = |CD|$, $c = |AE|$ og at $|AD| < |AE|$. Dermed bliver det klart, at $b = |AC| = |CD| + |AD| < |CD| + |AE| = a + c$.
Det kan måske siges, at det er almen viden, at den korteste vej mellem to punkter er den lige vej, men spørgsmål Q_4 lægger alligevel op til, at eleverne bliver nødt til at overveje sandheden af påstanden og måske give et kort argument. Nødvendigheden af argumentet kan især opstå, hvis en anden elev, eller læreren, direkte spørger: Hvorfor er den lige vej den korteste?

Q_5: Hvad er den korteste rute mellem n byer?

Dette er det generelle tilfælde og hænger derfor også sammen med spørgsmålene Q_3 og Q_4.

De første delspørgsmål er oplagte, fordi det skal bruges til at give overblik over de mulige flyveruter n byer kan skabe.
$Q_{5,1}$: Hvor mange linjer er der maksimalt?
$Q_{5,1,1}$: Hvor mange mulige ruter er der maksimalt?
For at besvare disse skal eleverne bruge kombinatorik.

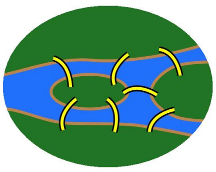
Svaret på spørgmålet $Q_{5,1}$ kan enten tælles op i forskellige situationer og levere et induktivt argument for at antallet af linjer maksimalt er $\sum_{i=1}^{n-1} i$ eller identificeres med spørgsmålet: På hvor mange måder kan der vælges to byer ud af n byer?, hvor svaret giver anledning til at kigge på binomialkoefficienten $\binom{n}{2}$.
Binomialkoefficienten kan både give anledning til at spørge: På hvor mange måder kan man så vælge tre ud af n? og 4 ud n? osv., men kan også bruges som udgangspunkt for at eleverne skal opdage og danne prakseologier for den matematisk fakultetsfunktion.
Fakultetsfunktionen opstår formentlig især i forbindelse med svaret på $Q_{5,1,1}$, hvor det maksimale antal ruter, der findes mellem n byer, er $n!$. Her opstår den netop i en sammenhæng, der kan give anledning til en punktvis prakseologi, som ses nedenfor.

T	Hvor mange ruter findes der maksimalt blandt n byer?
τ	Først skal vælges hvilken af de n byer, der er startbyen $= n$ muligheder. Så vælges hvilken by, der skal flyves til $= (n-1)$ muligheder. Så vælges igen hvilken by, der så skal flyves til $= (n-2)$ muligheder. osv. Samlet bliver antallet af mulige ruter: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 (= n!)$
θ	$n!$
Θ	Kombinatorik

Behovet for en notationen for produktet opstår således naturligt, da det er et langt udtryk at skrive op, men selve notationen $n!$ bliver formentlig formet gennem samtale med læreren eller igennem studium.

Det andet underspørgmål til $Q_{5,1}$ kan, lige som spørgsmålet om en rute til alle byer, ses som et grafteoretisk problem og svarer til spørgsgmål (b) i Math en Jeans formuleringen:
$Q_{5,1,2}$: Kan man flyve en rute, hvor man benytter alle linjer præcis én gang?
$Q_{5,1,2,2}$: Hvor mange linjer skal hver by mindst have, for at det kan lade sig gøre at flyve på dem alle præcis én gang?

Disse spørgsmål blev løst første gang i den grafteoretiske form af Leonhard Euler, der tog udgangspunkt i de syv broer i Königsberg.
Kan man gå en tur i Königsberg, hvor man krydser alle broerne, men kun én gang?



Figur 6.7: Illustration af broerne i Königsberg

Eulers løsning var følgende matematiske definitioner og sætning:

Definition: En tur i en graf er en rute ad flere kanter.

Definition: En lukket tur er en tur, der ender i den knude, hvor den startede.

Definition (Forst, 2006, 69-70): Lad $G = (V, E)$ være en graf. En tur i G kaldes en Euler-tur, hvis den omfatter samtlige kanter i G, og G kaldes en Euler-graf, hvis der findes en lukket Euler-tur i G.

Sætning:
Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende og ikke-triviel graf. Så findes en lukket Euler-tur i G hvis og kun hvis alle knuder i G har lige valens.

Det betyder altså, at eleverne, for at svare på spørgsmålet, skal finde frem til, at det kun kan lade sig gøre i de tilfælde, hvor hver by har et lige antal linjer tilknyttet.

Sætningen bliver relevant for eleverne, når de har fundet frem til en formodning om, at betingelsen må være lige valens af alle knuder og har brug for at give et godt argument eller bevis for deres formodning. Beviset for sætningen er ikke nemt (Forst, 2006, 70-71), så her kan det være vigtigt, at eleverne via studium finder frem til en hjemmeside eller et andet værk, hvor beviset er gengivet og således kan bruges til at overbevise både dem selv og andre om sandheden af deres formodning.

$Q_{5,1,2,1}$: Kan man flyve en rute, hvor man bruger alle linjerne én gang, men ikke ender det samme sted?
Dette spørgsmål bygger videre på det forrige og har også en løsning i form af en matematisk sætning (Forst, 2006, 72):

Sætning:
En sammenhængende graf $G = (V, E)$ har en ikke-lukket Euler-tur hvis og kun hvis to knuder har ulige valens, og alle andre knuder har lige valens.

For Den Rejsendes Problem betyder det, at eleverne skal finde frem til, at dette kun kan lade sig gøre i de tilfælde, hvor der kun er to byer med et ulige antal flyruter tilknyttet og at man i så fald skal starte i den ene af disse og ende i den anden.

Hvis eleverne finder disse svar, enten vha. studium eller ved at have ubeviste formodninger, har de fundet frem til, at man kun kan flyve en tur ad alle linjer præcis én gang, hvis der enten er ingen eller 2 byer med et ulige antal flyruter tilknyttet. Et naturligt spørgsmål, der kunne udvide denne gren, er derfor: Kan det lade sig gøre at have et ulige antal byer med et ulige antal flyruter tilknyttet?

Hele grenen for $Q_{5,1,2}$ er oplagt som grundlag for studium idet, Königsbergs broproblem, og følgerne af det, er omfangsrigt behandlet i både litteraturen og på internettet. En betingelse for dette kan dog være, at læreren bliver nødt til at fortælle eleverne, at problemet har netop dette navn eller udlevere materialer, som behandler problemet.

Samlet om Den Rejsendes Problem

Den Rejsendes Problem har gennem denne analyse vist sig at være et spørgsmål, der spreder sig over mindst 3 forskellige matematiske områder (Kombinatorik, Grafteori og Operationsanalyse) og må derfor kunne opfylde betingelse 2 for et godt studie- og forskningsspørgsmål: Det dækker over et potentielt stort forskningsområde. Det viste sig også, at de to specifikke spørgsmål i Math en Jeans formuleringen af Den Rejsendes problem kan genereres af den udgave af problemet, som eleverne har fået udleveret, som henholdsvis spørgsmål Q_1 og $Q_{5,1,2}$.

Da eleverne igennem arbejdet med Den Rejsendes Problem har mulighed for at bevæge sig ind på forskellige matematiske områder, opfylder problemet også betingelse 5: Der skal være flere mulige strategier.

Når der er flere mulige strategier for at undersøge et matematisk problem er der også mulighed for, at eleverne kan benytte sig af den tænkemåde (visuelt, analytisk eller konceptuelt, se side 14), som de finder naturligt og derfor er også det første forslag fra Burtons studium til stede i S&F-forløbet for Den Rejsendes Problem.

Sidst men ikke mindst er der også rige muligheder for studium og dermed er den 6. betingelse for studie- og forskningsspørgsmål også opfyldt.

For at give et overblik er følgende betingelser og forslag fra Burtons studium opfyldt i arbejdet med Den Rejsendes Problem:

Betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål:

1. Spørgsmålet er let at forstå.
2. Forskningsfeltet er potentielt stort.
4. Det er let at gå igang og der opnås hurtige delresultater.
5. Der er flere mulige strategier.
6. Det lægger op til studium.

Forslag fra Burtons studium som er til stede i arbejdet med problemet:

1. Eleverne har mulighed for at benytte deres egen måde at tænke på.
4. Der er mulighed for samarbejde og rum til at tænke alene.
5. Der er mulighed for studium.

I betingelserne mangler

3. Eleverne skal selv styre forløbet.

Det betyder ikke, at det ikke kan blive opfyldt i arbejdet med Den Rejsendes Problem, kun at det ikke kan ses direkte af problemformuleringen. Om betingelsen er tilstede eller ej, vil jeg komme ind på i forbindelse med analysen af observationerne.

Generelt kan det siges om problemet, at det opfylder tilstrækkeligt med betingelser til at blive kategoriseret som et godt studie- og forskningsspørgsmål.

Inden jeg går videre til analysen af observationerne af elevernes arbejde med Den Rejsendes Problem, vil jeg analysere yderligere to spørgsmål. Disse to spørgsmål har også baggrund i det franske Math en Jeans, og jeg har til hensigt at vurdere, om også disse er gode studie- og forskningsspørgsmål.

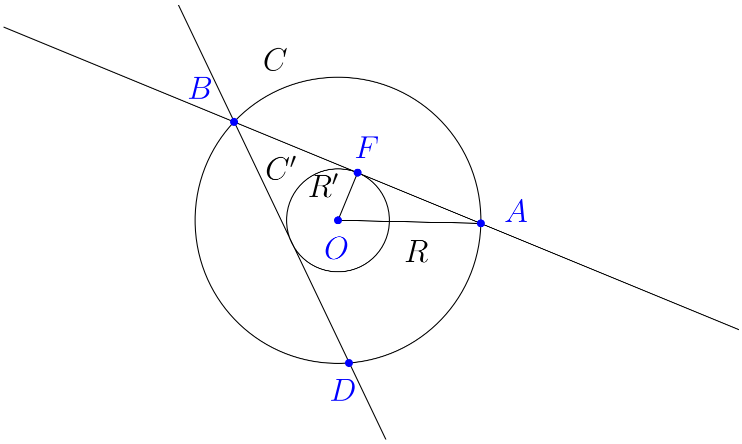
7 Analyse af to andre Math en Jeans problemer

I dette kapitel vil jeg analysere yderligere to problemer: Lukkethedsproblemet og Pengeproblemet.
Jeg vil benytte modellen for S&F-forløb til analysen og jeg vil identificere, hvilke af de 6 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgmål de to problemer opfylder.

Begge spørgsmål er, som tidligere nævnt, blevet arbejdet med i Math en Jeans-sammenhæng, men er her oversat til dansk og formuleret, så de kan benyttes i et undervisningsforløb.

Ligesom i analysen af Den Rejsendes Problem vil jeg først illustrere forløbet for herefter at beskrive, hvad de enkelte spørgsmål er. Jeg vil ikke uddybe disse to problemer i samme grad som Den Rejsendes Problem, men jeg vil beskrive nogle enkelte svar og delløsninger.

Lukkethedsproblemet

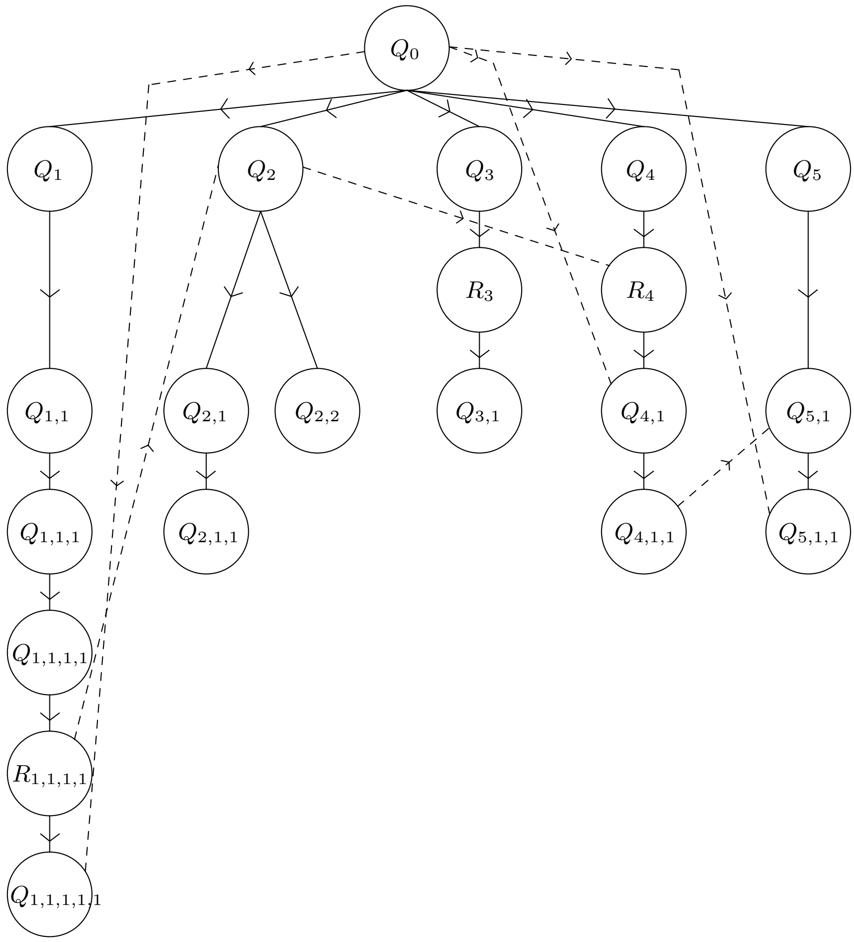


Figur 7.1: Illustration af konstruktionen til Lukkethedsproblemet.

Q_0: Man tager to cirkler med samme centrum O:
C med radius R.
C' med radius R'.
Begge har samme centrum og $R > R'$.
Med udgangspunkt i et punkt A på C tegner man en tangent til C', der går gennem A.

Denne skærer igen C i punktet B.
Man gentager proceduren fra B og fortsætter på samme måde. På denne måde opnås en række linjestykker.
Vil en af disse igen gå igennem A?

Modellen for S&F-forløbet ser ud på følgende måde:



Figur 7.2: S&F-model for Lukkethedsproblemet

Q_1: Hvad er koordinaterne for B, hvis A ligger i $(R, 0)$ og O i $(0, 0)$?
$Q_{1,1}$: Hvordan kan man finde vektoren $\overrightarrow{OB}$?
$Q_{1,1,1}$: Kan man måske dreje $\overrightarrow{OA}$, så den bliver til $\overrightarrow{OB}$?
$Q_{1,1,1,1}$: Hvordan drejer man en vektor?
$R_{1,1,1,1}$: Ved hjælp af studium, der består i at google 'drejning af vektor i planen', findes følgende for drejning omkring origo:

Hvis man drejer vektoren $(r\cos(u), r\sin(u))$ *om origo med vinklen* v*, får man vektoren* $(r\cos(u+v), r\sin(u+v))$.

Det betyder at i det tilfælde, der her er opstillet, bliver udgangsvektoren

$$\overrightarrow{OA} = (R\cos(0), R\sin(0)) = (R, 0)$$

og dermed bliver

$$\overrightarrow{OB} = (R\cos(v), R\sin(v))$$

hvor v er vinklen $\angle AOB$.

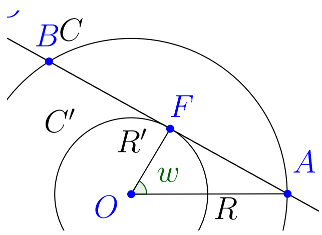
Her kræver denne gren, at man inddrager grenen for Q_2, før den fortsætter med spørgmålet:

$Q_{1,1,1,1,1}$: Når vi nu ved, at vi får en følge af punkter:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= (R\cos(0), R\sin(0)) = (R, 0) \\
\overrightarrow{OB} &= (R\cos(v), R\sin(v)) \\
\overrightarrow{OD} &= (R\cos(2v), R\sin(2v)) \\
&\vdots \\
\overrightarrow{ON} &= (R\cos(nv), R\sin(nv))
\end{aligned}$$

Findes der så n så $(R\cos(0), R\sin(0)) = (R\cos(nv), R\sin(nv))$?

Q_2: Hvad er størrelsen af vinklen $\angle AOB$?
$Q_{2,1}$: Hvad kan vi bruge til at finde vinklen?
$Q_{2,1,1}$: Står linjen $\overrightarrow{OF}$ vinkelret på tangenten?



Figur 7.3: Den retvinklede trekant AOF.

I så fald er R_2: $\angle AOB = 2w = 2\cos^{-1}(\frac{R'}{R})$.
$Q_{2,2}$: Vil vinklen være det samme, når vi næste gang tager tangenten?

Q_3: Hvad er længden af linjestykket $|AB|$?
R_3: Vha. Pythagoras findes: $|AB| = 2\sqrt{R^2 - R'^2}$.
$Q_{3,1}$: Er det punkt F, hvor tangenten rører C', midtpunkt for linjestykket AB?

Q_4: Hvis vi kender vinklen $\angle AOB$, hvad er så længden af buestykket $\widehat{\mathrm{AB}}$?

R_4: Længden af buestykket kan findes enten direkte ved at kende til radianer eller ved studium og er:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{AB}} &= R \cdot \angle AOB \\ \widehat{\mathrm{AB}} &= 2R\cos^{-1}\left(\frac{R'}{R}\right)\end{aligned}$$

$Q_{4,1}$: Hvis vi har fundet længden af buestykket $\widehat{\mathrm{AB}}$. Findes der så en sum af disse buestykker, så længden samlet kommer til at ramme A igen? Dvs. findes der så et n, så

$$\begin{aligned} n \cdot \widehat{\mathrm{AB}} &= 2\pi R \cdot p \\ n2R\cos^{-1}\left(\frac{R'}{R}\right) &= 2\pi R \cdot p \\ n\cos^{-1}\left(\frac{R'}{R}\right) &= \pi \cdot p \\ \frac{R'}{R} &= \cos\left(\frac{\pi p}{n}\right)\end{aligned}$$

hvor n er et naturligt tal større end 3 og p er et naturligt tal?
$Q_{4,1,1}$ Når vi ved ovenstående, hvilke tilfælde af n og p kan så lade sig gøre samtidig?

Q_5: Hvad nu hvis R kan variere?
$Q_{5,1}$: Hvis man bruger Geogebra, hvad kan man så finde ud af?

Hvis man i Geogebra tegner situationen og tegner mindst 12 tangenter på den måde der foreskrives i Q_0, så kan man observere ved at rykke på radius i den yderste cirkel, at det godt kan lade sig gøre at have et forhold mellem R og R', hvor tangenterne igen vil gå igennem A - og at det kan lade sig gøre i mange tilfælde.

Vi ved fra Q_2 at:

$$\cos\left(\frac{\angle AOB}{2}\right) = \frac{R}{R'}$$

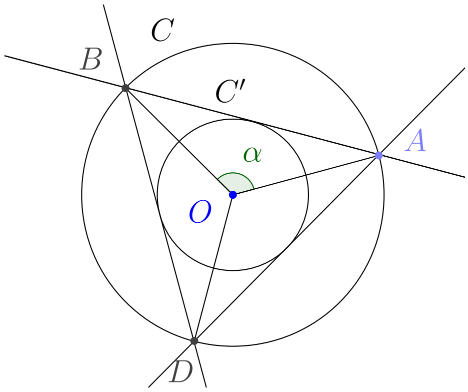
Hvis man vil have tangenterne til at tegne en trekant, skal man dele 2π med 3 for at få vinklen $\angle AOB$, derfor må der gælde:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{3})}$$

Ligeledes kan man finde frem til, at for at tangenterne skal danne en regulær polygon med n sider, skal der gælde:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n})} = \frac{R'}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

Ved at rykke på R' i Geogebra, kan man få en ide til, hvordan denne ide kan udvikles og den fører til følgende sammenhænge:



Figur 7.4: Situationen hvor $R' = 1$ og $R = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = 2$.

For $n \geq 5$ vil den n'te tangent gå igennem A, hvis:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{2\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

For $n \geq 7$ vil den n'te tangent gå igennem A, hvis:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{3\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{2\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

For $n \geq 9$ vil den n'te tangent gå igennem A, hvis:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{4\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{3\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{2\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

For $n \geq 11$ vil den n'te tangent gå igennem A hvis:

$$R = \frac{R'}{\cos(\frac{5\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{4\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{3\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{2\pi}{n})} \quad \vee \quad R = \frac{R'}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

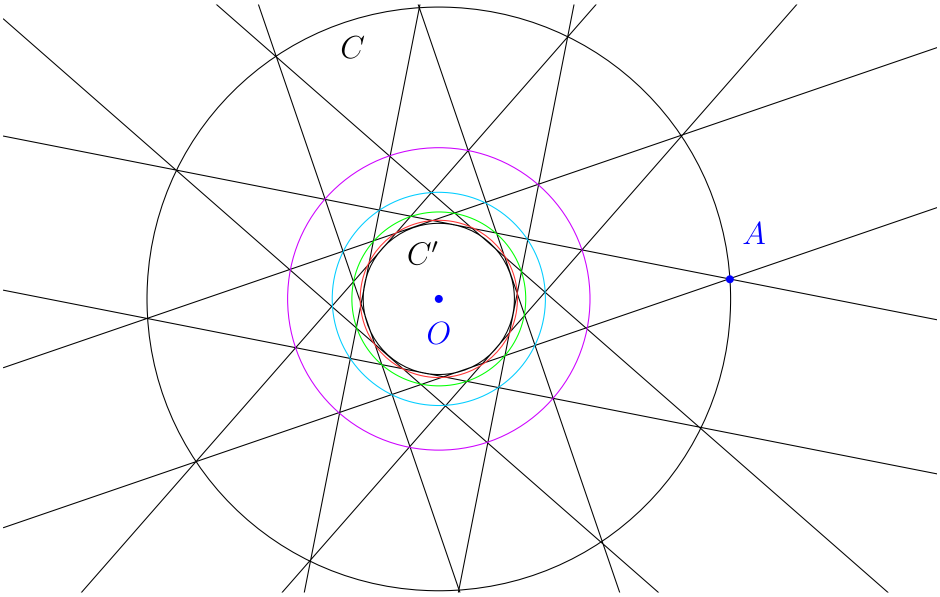
Dette er illustreret i figur 7.5 på næste side med 12 tangenter.

Det svarer også til, at hvis antallet af tangenter er givet, er der mulighed for et bestemt antal omgange rundt langs C.
Derfor giver denne udvikling med Geogebra mulighed for at illustrere, hvad svaret på $Q_{4,1,1}$ er:

Der er følgende sammenhæng mellem antallet af tangenter n og antallet af omgange rundt langs C, p:

$$\begin{aligned}
n \in \{3,4\} &\quad\Rightarrow\quad p = 1\\
n \in \{5,6\} &\quad\Rightarrow\quad p \in \{1,2\}\\
n \in \{7,8\} &\quad\Rightarrow\quad p \in \{1,2,3\}\\
n \in \{9,10\} &\quad\Rightarrow\quad p \in \{1,2,3,4\}\\
&\ \ \vdots\\
n \in \{(l-1),l\} &\quad\Rightarrow\quad p \in \left\{1,\dots,\left(\frac{l}{2}-1\right)\right\}
\end{aligned}$$

hvor l er et lige tal større end 2.



Figur 7.5: Illustration af $R' = 1$ og $R = \frac{1}{\cos(\frac{5\pi}{12})}$.

I figur 7.5 svarer den lyserøde cirkel til $R = \frac{1}{\cos(\frac{4\pi}{12})} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}$.
Den blå cirkel svarer til $R = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{12})} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})}$.
Den grønne cirkel svarer til $R = \frac{1}{\cos(\frac{2\pi}{12})} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})}$.
Den røde cirkel svarer til $R = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{12})}$.

$Q_{5,1,1}$: Fortsætter dette i det uendelige?

Det er klart, at denne brug af Geogebra og udledning af formler stammer fra mange spørgsmål og genererer mange flere, men af hensyn til overksueligheden af S&F-forløbet, har jeg valgt ikke at udpensle disse yderligere end $Q_{5,1,1}$.

Samlet om Lukkethedsproblemet

Ud fra denne analyse kan man konkludere, at Lukkethedsproblemet opfylder følgende betingelser for et godt studie- og forskningsspørgmål:

1. Spørgsmålet er let at forstå.
   Teksten og illustration til problemformuleringen er nemme at forstå.

2. Forskningsfeltet er potentielt stort.
   I dette afsnit har jeg beskrevet hvilke delspørgsmål Lukkethedsproblemet kan generere. Det kan ses i analysen af disse spørgsmål, at de kan give anledning til studium af:

   - Polære koordinater.
   - Vektorer.
   - Drejninger af vektorer.
   - Pythagoras.
   - Radianer.
   - Sinus og cosinus i retvinklede trekanter.
   - Cirklens geometri.

   Desuden giver spørgsmålene anledning til udvikling af teknikker og teknologier til løsning af opgavetyper, der vedrører de 7 ovenstående emner - dvs. til udvikling af prakseologier.

4. Det er let at gå i gang med forløbet.

5. Der er flere mulige strategier.
   For Lukkethedsproblemet kan jeg se 3 hovedstrategier:

   1. Bestem koordinaterne for B og de næste mange punkter og se om et af dem igen er A.
   2. Beregn længden af buestykkerne og læg dem sammen og se om de er delelige med 2π.
   3. Brug Geogebra og brug centervinklen til at sige noget om forholdet mellem radierne.

6. Der er mulighed for studium.
   Se under betingelse 2.

Da alle disse betingelser er opfyldt, må det forventes, at Lukkethedsproblemet er et godt studie-og forskningsspørgmål.

I det næste afsnit vil jeg analysere Pengeproblemet ved samme metode.

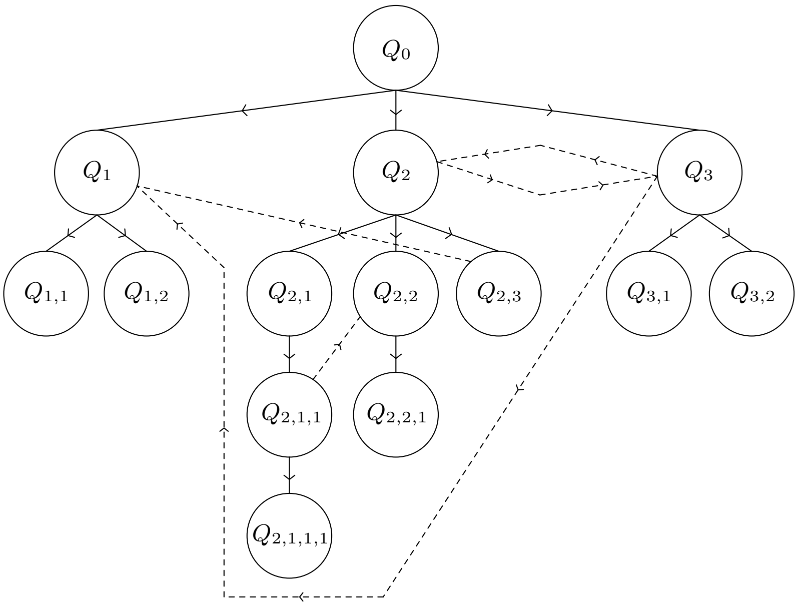
Pengesedlerne

I dette afsnit vil jeg lave en analyse af Pengeproblemet ved hjælp af S&F-modellen. Det genererende spørgsmål for Pengeproblemet er:

> Q_0: Hvordan kombinerer man penge og bestemmer hvilke beløb, der er smarte at have som mønter eller sedler?

Af hensyn til overskueligheden af analysen vil jeg i det følgende betegne både mønter og sedler som sedler.

S&F-modellen for pengeproblemet er :



Figur 7.6: S&F-model for Pengeproblemet.

Q_1: Hvis man har n sedler af forskellig værdi, hvordan kan man så kombinere disse?

Dette spørgsmål kan opstå hvis man har n forskellige sedler og er interesseret i at finde ud af hvor mange forskellige beløb, disse kan danne. Spørgsmålet kan besvares på følgende måde. Hvis vi har n sedler, så kan man skrive kombinationerne op i en liste, f.eks. for $n = 5$:

1	1,2	1,2,3	1,2,3,4	1,2,3,4,5
2	1,3	1,2,4	1,2,3,5	
3	1,4	1,2,5	1,2,4,5	
4	1,5	1,3,4	1,3,4,5	
5	2,3	1,3,5	2,3,4,5	
	2,4	1,4,5		
	2,5	2,3,4		
	3,4	2,3,5		
	3,5	2,4,5		
	4,5	3,4,5		
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Så det samlede antal kombinationer af n sedler er

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$$

Spørgsmålet her kræver derfor udvikling af prakseologier til at håndtering af kombinatorik og summer.

Det forventes ikke, at eleverne vil kunne give det generelle svar for n sedler med det sammme, men ud fra eksempler med f.eks. 5, 6 og 7 sedler kan de måske udvikle teknologier omkring summer og binomialkoefficienter. Det, at finde den korrekte matematiske notation, kræver enten studium eller diskusion af diskurs med læreren.

Spørgsmålet Q_1 kan udvides med:
$Q_{1,1}$: Hvilke beløb er der på de n sedler og hvilke beløb, kan vi så betale?
$Q_{1,2}$: Hvordan betaler man smartest med de sedler, man har?

Q_2: Hvis man trykker sedlerne 1, 2, 5, 10, 20, 50. Hvordan vælger man så sedler for at betale alle beløb f.eks. op til 200, således at antallet af sedler er mindst muligt? Dette spørgsmål kan lede til prakseologier vedrørende division med rest, således at man f.eks identificerer følgende for beløbet 195:

$$\begin{aligned} 195 &= 3 \cdot 50 + 45 \\ 45 &= 2 \cdot 20 + 5 \\ 5 &= 1 \cdot 5 \end{aligned}$$

Når der ikke er nogen rest, har man fundet den optimale måde at betale på, som i eksemplet er:
For at betale 195 skal man bruge tre 50'ere, to 20'ere og en 5'er.

Spørgsmålet kan også besvares ved en rekursiv algoritme, som fungerer på følgende måde: n_i er antallet af i-sedler og k er det beløb, der skal betales.

$$\begin{aligned}
n_{50} &= \left\lfloor \frac{k}{50} \right\rfloor \\
n_{20} &= \left\lfloor \frac{k-(n_{50}\cdot 50)}{20} \right\rfloor \\
n_{10} &= \left\lfloor \frac{k-(n_{50}\cdot 50)-(n_{20}\cdot 20)}{10} \right\rfloor \\
n_{5} &= \left\lfloor \frac{k-(n_{50}\cdot 50)-(n_{20}\cdot 20)-(n_{10}\cdot 10)}{5} \right\rfloor \\
n_{2} &= \left\lfloor \frac{k-(n_{50}\cdot 50)-(n_{20}\cdot 20)-(n_{10}\cdot 10)-(n_5\cdot 5)}{2} \right\rfloor \\
n_1 &= k-(n_{50}\cdot 50)-(n_{20}\cdot 20)-(n_{10}\cdot 10)-(n_5\cdot 5)-(n_2\cdot 2)
\end{aligned}$$

Q_2 genererer følgende underspørgsmål:
$Q_{2,1}$: Skal man trykke flere seddeltyper?
$Q_{2,1,1}$: Hvilke krav er der til de beløb man vælger at trykke?
$Q_{2,1,1,1}$: Hvorfor har man i Danmark valgt at have 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 og 1000?

Et delvist svar på $Q_{2,1,1}$ kan opstå ud fra division med rest, idet hvert beløb skal være mindst dobbelt så stort som et allerede eksisterende, da man ellers risikerer nogle vældigt usmarte kombinationer.
Et eksempel på dette kan være tilfældet, hvor vi har sedlerne 1, 45 og 50 og vi skal betale beløbet 90 kr.
Ved hjælp af division med rest findes:

$$\begin{aligned}
90 &= 1\cdot 50+40 \\
40 &= 0\cdot 45+40 \\
40 &= 40\cdot 1
\end{aligned}$$

Resultatet bliver så, at man skal betale 90kr med en 50'er og fyrre 1'ere, i stedet for det mest smarte: To 45'ere.

Dette argument kan også bruges i svaret på $Q_{2,1,1,1}$ sammen med argumenter for at et multiplum af 10 er nemt at regne med. Spørgsmålet $Q_{2,1,1,1}$ kan, med lidt hjælp fra læreren, udvide sig til et matematikhistorisk studium af, hvorfor vores talsystem har base 10 og ikke f.eks. 60, som de havde havde hos babylonerne.

$Q_{2,2}$: Kan man finde på nogle bedre sedler?
$Q_{2,2,1}$: Hvis man finder på nogle nye, er de så smarte at regne med?
$Q_{2,3}$: Hvis man fjerner nogen af seddeltyperne, hvor mange flere sedler af de resterende seddeltyper skal man så bruge for at betale alle beløb f.eks. op til 200?
Det sidste spørgsmål er et spørgsmål, der ændrer ved forudsætninger for algoritmen med division med rest og kan derfor også besvares i den sammenhæng.

Det betyder, at dette spørgsmål viser tilbage til især Q_2, men også til Q_1, da fjernelse af nogle sedler vil ændre antallet af kombinationer.

Q_3: Hvordan betaler man smartest med de sedler vi har i Danmark nu?
$Q_{3,1}$: Hvilke sedler har vi nu?
$Q_{3,2}$: Hvad skal jeg betale?

De sidste tre spørgsmål kan måske ses som en udvidelse af spørgsmålet Q_2, men i et S&F-forløb i en klasse, kunne en måde at hjælpe forløbet igang på, være at medbringe danske kroner i de forskellige udgaver, der eksisiterer. På den måde ville der også kunne ske det, at Q_2 kunne blive en udvidelse af Q_3, idet eleverne i så fald kunne forventes at starte med at forsøge at løse problemerne ved brug af samtlige mønter og sedler, inden de vil prøve at forsimple situationen.

Samlet om Pengeproblemet

Det genererende spørgsmål for Pengeproblemet lægger generelt op til to hovedproblemstillinger:

1. Forudsat et givet antal seddeltyper: Man kan prøve at optimere, hvor mange af de forskellige seddeltyper, man skal bruge for at kunne betale samtlige beløb op til f.eks. 200.

2. Hvilke sedler skal man trykke for at skulle have det færrest mulige antal sedler i pungen og stadig være i stand til at betale alle beløb op til f.eks. 200?
   Og hvordan betaler man smartest?

Gennem spørgsmålene fra grenene i modellen for Pengeproblemet, behandles disse hovedproblemstillinger ved hjælp af

- Kombinatorik.
- Division med rest.
- Følger.
- Evt. matematikkens historie.

Forskningsfeltet er derfor også i dette sidste problem potentielt stort og opfylder betingelse 2 for et godt studie- og forskningsspørgsmål.
Desuden opfylder spørgsmålet også:

1. Det er let at forstå.

4. Det er let, at gå igang med forløbet.
   Penge er en stor del af alle mennesker hverdag, så eleverne ved allerede, hvordan mønter og sedler kan kombineres. De er således allerede i gang med forløbet i forvejen og bliver måske gennem et genererende spørgsmål, som Pengeproblemet, opmærksomme på, at der er andre perspektiver på noget, som de allerede kender godt.

5. Der er flere mulige strategier.
   Det gælder især spørgmål Q_2, der både kunne omhandle division med rest og rekursive følger.

6. Der er muligheder for studium.

Pengeproblemet må derfor også anses for at være et godt studie- og forskningsspørgsmål.

Om Math en Jeans problemer

De tre gennemarbejdede problemer: Den Rejsendes Problem, Lukkethedsproblemet og Pengeproblemet stammer alle fra Math en Jeans. Gennnem denne analyse har det vist sig, at selvom Math en Jeans spørgsmålene hovedsageligt stiler efter at opfylde de første 5 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål, så kan de alle tre også lægge op til studium af forskellige matematiske fagområder.

Hver for sig kan de tre spørgsmål lede eleverne til undersøgelser af mindst 3 forskellige matematiske fagområder og til dannelse af prakseologier inden for disse.

Det er klart, at det ikke kan sikres, at alle eleverne møder de samme opgavetyper og derfor udvikler de samme matematiske teknikker, men teknologien og teorien bag de nye prakseologier kan hjælpes til at blive stort set den samme, enten hvis eleverne skal fortælle resten af klassen om deres resultater eller hvis læreren løbende hjælper eleverne ved at introducere de konkrete og ønskede termer og validere deres teorier.

Et S&F-forløb baseret på et Math en Jeans spørgmål opfylder derfor det oprindelige formål for denne type forløb, nemlig at gøre matematikken nødvendig og relevant for eleverne samt give mulighed for personliggørelse af ny viden.

Den samlede konklusionen på de tre analyser må derfor være, at hvis man vil sætte gang i et studie- og forsknings forløb i en gymnasieklasse, er det oplagt at hente inspiration til genererende spørgsmål på hjemmesiderne for Math en Jeans.

Jeg har i dette kapitel og det forrige analyseret genererende spørgsmål på baggrund af deres formulering. I det næste kapitel vil jeg analysere en gruppe gymnasieelevers arbejde med Den Rejsendes Problem i den hensigt at identificere, hvilke grene af modellen eleverne undersøger, hvilke prakseologier de udvikler og om de arbejder både med studium og forskning.

8 Analyse af elevarbejde med Den Rejsendes Problem

Observationernes genstandsfelt var to gange to lektioner i to 1.g klasser. Den første klasse var en sproglig klasse med matematik på C-niveau, mens den anden klasse skulle fortsætte med matematik på A-niveau.
S&F-forløbet for Den Rejsendes Problem udviklede sig, som tidligere nævnt, stort set ens for de to klasser, men eleverne i den matematiske klasse var mere præcise i deres formuleringer.
Derfor er følgende analyse foretaget på baggrund af transkriptioner af den matematiske klasse.

Som nævnt i metodologien, var lydoptagelserne af de første to lektioner ikke brugbare, derfor er det de to sidste lektioner, hvortil den udvalgte gruppes arbejde og klassens fremlæggelser er blevet transkriberet. Transkriptionerne kan ses i fuld længde bilag E og vil blive citeret i løbet af kapitlet.

De første to lektioner brugte gruppen på at måle op på billedet af Danmarkskortet og teste to hypoteser:
Hvis man vælger altid at flyve til den nærmeste by, vil det så altid resultere i den korteste rute?
Kan det altid betale sig at flyve i rundkreds?

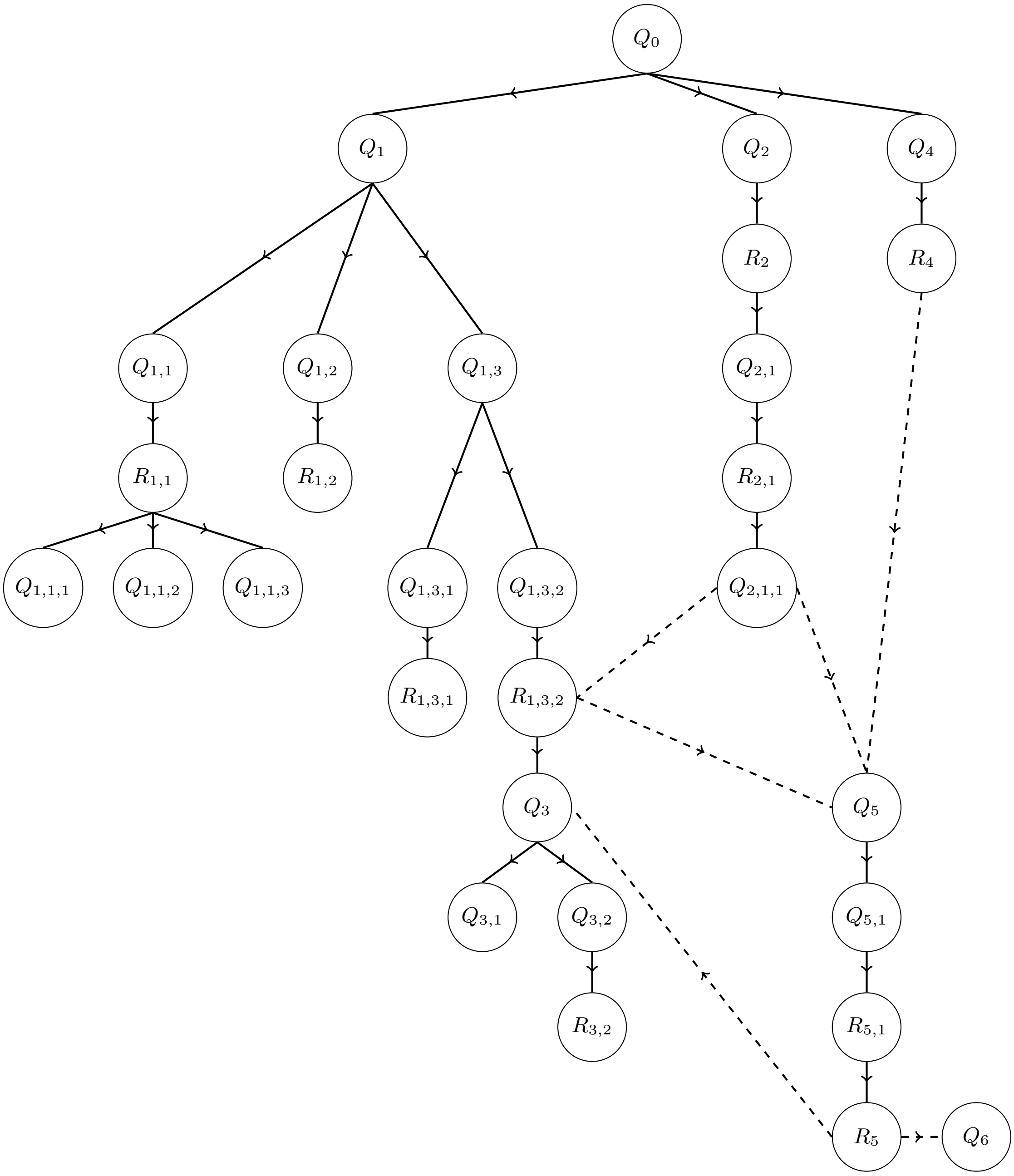
I forbindelse med den sidste hypotese faldt gruppens snak på hvilke veje, der gik til hvilke byer og i den forbindelse, om det var muligt at flyve en tur, der benyttede dem alle sammen én gang. I første lektion nåede de ikke at diskutere dette yderligere og de sidste to lektioner startede derfor med dette som udgangspunkt.

Analysen af elevarbejdet er derfor en analyse af de sidste to lektioner som et S&F-forløb. Jeg vil starte med en illustration af forløbet og fortælle, hvad hvert spørgsmål og eventuelle svar er.

Efter oversigten over forløbet, vil jeg gennemgå en gren af spørgsmålene ad gangen, hvor jeg inkluderer transkriptioner, der viser, hvor spørgsmålene opstår. Jeg vil til hver gren gøre rede for de teknikker, der bliver udviklet til præcise opgavetyper og identificere eventuelle fuldt udviklede prakseologier.

Når jeg har behandlet gruppens arbejde vil jeg se på, hvilke ideer læreren havde til forløbet og hvordan disse relaterer til a priori analysen.
I forbindelse med lærerens forslag, vil jeg også identificere, hvilken effekt hypotesearkene og de løbende fremlæggelser har på et S&F-forløb.

Gruppens arbejde som S&F-forløb



Figur 8.1: S&F-model for gruppens arbejde med Den Rejsendes Problem.

Q_0: En rejsende bor i København og flyver rundt med sin flyvemaskine til forskellige tilfældige byer for at sælge sit produkt.
Find den korteste vej mellem 2 byer, 3 byer, 4 byer, 5 byer osv. (Se den fulde problemformulering på side 34).

Q_1: Kan man gå en tur i en graf, der benytter alle kanterne én gang - Eksisterer der en Euler-tur?
$Q_{1,1}$: Hvilke kanter mellem knuder, må bruges?
$R_{1,1}$: Kun kanterne i de givne grafer.
$Q_{1,1,1}$: Må man tilføje en ekstra kant?
$Q_{1,1,2}$: Må man fjerne en kant?
$Q_{1,1,3}$: Skal man ende i samme knude, som man starter i?
$Q_{1,2}$: Skal der være minimum 7 kanter, før der er eksistens af en Euler-tur?
$R_{1,2}$: Modbevises af stjernefiguren, hvori der eksisterer en Euler-tur, men kun er fem kanter.
$Q_{1,3}$: I hvilke grafer med fem knuder, eksisterer der en Euler-tur?
$Q_{1,3,1}$: Er det en betingelse, at alle flader i grafen skal være trekanter?
$R_{1,3,1}$: Modbevises af stjernen og sløjfen, hvori der er henholdsvis en femkant og en firkant.
$Q_{1,3,2}$: Hvad har de figurer, hvor der eksisterer en Euler-tur, tilfælles?
$R_{1,3,2}$: Alle knuder, i grafer med eksistens af en Euler-tur, har lige valens.

Q_2: Hvordan tegnes en graf med n kanter fra hver knude?
R_2: Man tager $n + 1$ knuder og tegner kanter mellem alle.
$Q_{2,1}$: Kan man konstruere en graf, hvor alle knuder har lige valens, men ikke nødvendigvis har samme valens?
$R_{2,1}$: Ja.
$Q_{2,1,1}$: Eksisterer der en Euler-tur i disse grafer?

Q_3: Hvordan beviser man, at der er eksistens af en Euler-tur i en graf, hvor alle knuder har lige valens?
$Q_{3,1}$: Skal det bevises stringent?
$Q_{3,2}$: Kan man konstruere en graf med én knude med ulige valens?
$R_{3,2}$: Der vil altid være et lige antal knuder med ulige valens.

Q_4: Hvad ændres, hvis der er to knuder med ulige valens?
R_4: Så eksisterer der en Euler-sti. Dvs. en tur der benytter alle kanter én gang, men ender i et andet punkt.

Q_5: Königsbergs broproblem: Kan man gå en tur i Königsberg, hvor man krydser alle broerne én gang?
$Q_{5,1}$: Hvilke betingelser er der for problemet?
$R_{5,1}$: I udgangspunktet, må man kun benytte broerne. Men det er også interessant, hvis man må tilføje broer.
R_5: Der er ikke eksistens af en Euler-tur i Königsbergsbroproblem.

Q_6: Hamilton-problemet: Hvilke betingelser skal være opfyldt, for at man kan gå en tur i en graf, der går igennem alle knuder én gang?

Grenen for Q_1

I dette afsnit vil jeg gengive nogle af de ture i transkriptionen, hvor spørgsmålene opstår. Jeg vil ikke gengive turene til samtlige af spørgsmålene, da afsnittet i så fald bliver utroligt langt, men vil altid henvise til de relevante ture i bilag E.

Jeg vil til gengæld gengive turene til samtlige svar, da disse viser hvilke teknikker og teknologier, der bliver udviklet af eleverne i gruppen.

Q_1: Kan man gå en tur i en graf, der benytter alle kanterne én gang - Eksisterer der en Euler-tur?

Turene 11-13.

$Q_{1,1}$: Hvilke kanter mellem knuder, må bruges?

14. *C: Er der nogen steder, du ikke må flyve mere? [Henviser til problemets oprindelige formulering og indførelsen af 'no fly' zones i forrige lektion.]*

I første lektion blev der indført 'no fly zones' mellem byer på Danmarkskortet for at give flere forskellige situationer.
Samtlige grupper arbejdede i starten med hypotesen om, at en rundtur mellem alle byerne burde være kortest.
Læreren indførte begrebet 'no fly zones' for at få grupperne til også at overveje situationer, hvor det ikke længere er muligt at flyve mellem to byer, som var afgørende for rundturen.

$R_{1,1}$: Kun kanterne i de givne grafer.

23. *C: Men det er kun dem her, vi skal bruge ikke [vejene]?*

24. *A: Ja, det var kun dem der, der var mulige.*

Dette svar viser, at gruppen har udviklet en repræsentationsform, der kan hjælpe dem til at besvare spørgsmålet Q_1.

De tegner grafer med byer og veje.
De er altså her ved at udvikle den teknologi, der skal bruges til de opgavetyper, der opstår i forløbet og er således igang med det teknologisk-teoretiske moment (side 7) i skabelsen af den matematiske organisation.

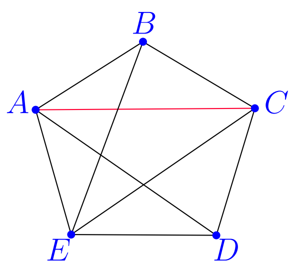
$Q_{1,1,1}$: Må man tilføje en ekstra kant?
$Q_{1,1,2}$: Må man fjerne en kant?
Gruppen arbejder med forskellige udgaver af graferne med 5 punkter, så de overvejer ikke spørgsmålet direkte, men når de tegner nye udgaver, svarer det til, at de tilføjer eller fjerner kanter. Svaret på disse to delspørgsmål er derfor ja, så længe ændringerne bliver brugt, som basis for generelle overvejelser.
Se også følgende ture:

35. C: Altså, der er jo kun en streg, der er lidt for meget. Og man kan ramme alle? Kan man godt ramme alle?

36. A: Se hvis denne der nu havde været væk [BE i sløjfen + BE].

37. B: Ej det kan man heller ikke.

38. B: Jeg mangler en der [AC]. Skal vi ikke tegne den ind der?



$Q_{1,1,3}$: Skal man ende i samme knude, som man starter i?

Turene 47-48.

Dette spørgsmål opstår, fordi opgaven indtil nu kun har været at finde en tur, der benyttede alle kanter og det er der to muligheder for. I denne situation går det op for gruppen, at der er brug for en specificering af de to mulige opgaver: Skal man ende samme sted eller ej?

$Q_{1,2}$: Skal der være minimum 7 kanter, før der er eksistens af en Euler-tur?

Tur 76.

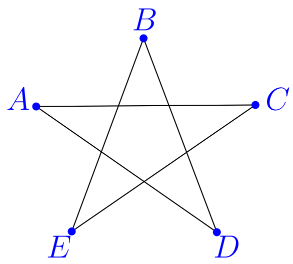
Her er gruppen nået frem til, at det kunne smart at finde nogle betingelser for, hvornår der er eksistens af en Euler-tur. Spørgsmålet her er et godt eksempel på intuition.

B har været med til at tegne mange grafer, hvoraf gruppen identificerede Euler-ture i nogle af dem og ikke i andre. Spørgsmålet her kommer derfor som en pludselig indskydelse, B får på baggrund af hans erfaringer.

$R_{1,2}$**: Modbevises af stjernefiguren, hvori der eksisterer en Euler-tur, men kun er fem kanter.**

78. *B: Hvor mange er der her? Der er 7.*

79. *I: Ja, men prøv at se her. Det kunne jo lade sig gøre på stjernen ik? Og hvor mange veje er der der?*



80. *B: Der er kun 5.*

Her benytter B og jeg praksisdelen af en præcis matematisk organisation:

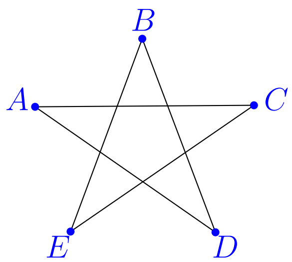
T	Modbevis hypotesen om, at der er Euler-tur i grafen under en given betingelse.
τ	Find et modeksempel: Find et eksempel, hvor den givne betingelse er opfyldt, men der ikke er Euler-tur.

Teknikken med at finde modeksempler, har de mødt mange gange før og accepterer derfor dens gyldighed også til denne opgave.

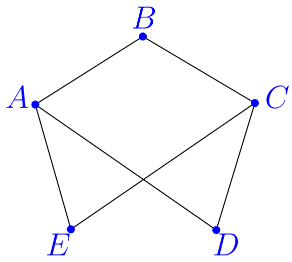
Det moment, som gruppen er midt i her, er udforskningsmomentet, hvor de udvikler den teknik, der hører til opgaven: Hvornår er der eksistens af Euler-tur? og momentet fortsætter med:

$Q_{1,3}$**: I hvilke grafer med fem knuder, eksisterer der en Euler-tur?**

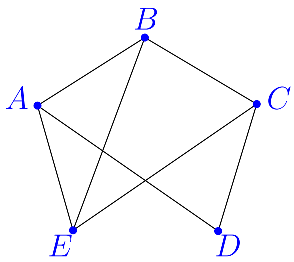
87. *I: Så I havde stjernen, hvor det kunne lade sig gøre.*



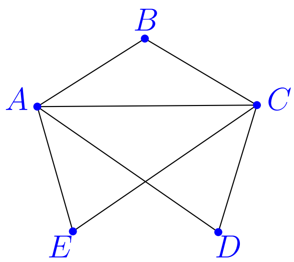
Så havde I den med sløjfen, hvor det også godt kunne lade sig gøre.



Men hvis man tilføjede en ekstra vej her på sløjfen [BE], så kunne det ikke lade sig gøre.



Hvis vi tilføjer en ekstra vej lige over på sløjfen [AC], så kunne det godt lade sig gøre.



88. *B: Ja.*

89. *I: Så ok, ok, ok, og den hernede [Sløjfen + BE] den virker ikke. Så det er klart, at den der er symmetrisk til den, den virker heller ikke.*

90. *A: Ja.*

91. *I: Ja, men hvad er der ellers af muligheder?*

I denne situation er gruppen løbet tør for ideer til, hvad der kunne være betingelser for eksistens af Euler-tur og har derfor en periode, hvor de er frustrerede. De bliver hjulpet videre af mig, idet jeg hjælper dem til at samle op på deres hidtil opnåede resultater og stiller det næste spørgsmål.

Det, der sker, er derfor, at de bliver præsenteret for en teknik til at komme videre, når de går i stå: Dan overblik over allerede opnåede delresultater og spørg, om de har noget tilfælles.

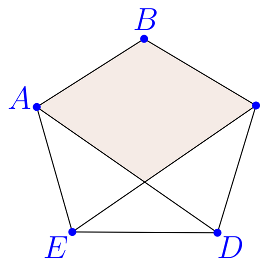
$Q_{1,3,1}$**: Er det en betingelse, at alle flader i grafen skal være trekanter?**

Turene 126-129.

Dette er direkte afledt af spørgsmålet $Q_{1,3}$.

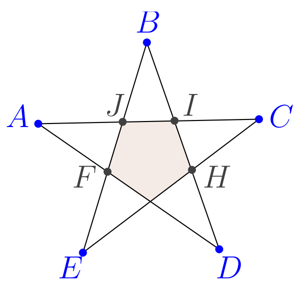
$R_{1,3,1}$**: Modbevises af stjernen og sløjfen, hvori der er henholdsvis en femkant og en firkant.**

130. A: Nej, for den der, det er ikke en trekant.



131. B: Næh.

132. I: Men i denne her [Stjernen], den er jo heller ikke en trekant.



133. A: Nej, det var jo det jeg sagde. Det var så der, den gik galt.

134. I: Men meget god hypotese.

135. A: Ja, men det virker bare som om, at så snart det der kvadrat kommer med ind [sløjfen + DE], eller et eller andet. Altså, når der er et stort kvadrat, så bliver det bare svært at få den til at løbe rundt. På den anden side, hvis man så fjerner de der to [AE og CD], så er det også bare et kvadrat og en trekant. Så kunne man godt.

Teknikken, at modbevise en hypotese ved at finde et modeksempel, er fuldstændig tilegnet.

$Q_{1,3,2}$: **Hvad har de figurer, hvor der eksisterer en Euler-tur, tilfælles?**

Turene 171-176.

Spørgsmålet er en naturlig forlængelse af samme spørgsmål, der kun forholder sig til figurer med 5 knuder.

$R_{1,3,2}$: **Alle knuder, i grafer med eksistens af en Euler-tur, har lige valens.**

177. B: De har alle sammen kun gået hen til to punkter, nej...

178. C: Nej, fordi der går den jo hen til flere. Fordi jeg tænkte også sådan et eller andet med, at de skulle have sådan lige mange sider, de kunne gå ud hver ik, fordi det kan den her jo [stjernen]. På hver side går den ud det samme sted ik. Så talte jeg op [på sløjfen + AC], her går den ud fra to og her går den ud til meget mere ik. Så det passer jo heller ikke.

179. B: Nåh, det skal være i alle.

180. C: Så modsagde jeg mig selv med det samme jo.

181. I: Så i den her [sløjfen + AC] der havde du 4, 2, 4, 2 og 2. Og heroppe med stjernen og rundt om, der havde du hvor mange?

182. B: 4, 4, 4...

183. C: Ja, 4 hele vejen rundt.

184. A: Ja, og i den her [stjernen] er der 2 hele vejen rundt.

185. B: Så det skal bare være et lige tal!

Dette svar er første artikulering af teknikken i følgende prakseologi:

T	Afgør, om der eksisterer en Euler-tur i en given graf?
τ	Find valensen for hver knude, så det kan afgøres, om de alle er lige eller ej.
θ	Grafer og valensbegrebet.
Θ	Eulers sætning (se side 44).

Inden gruppen gør sig overvejelser om, hvordan man argumenterer for sandheden af hypotesen: Der er eksistens af Euler-tur, når alle knuder har lige valens, tester de, om det er en god hypotese ved at lave flere eksempler.
Dette giver anledning til grenen for Q_2.

Grenen for Q_2

Gruppen tegner en graf med 7 knuder og kanter mellem dem alle, således at alle knuder har valens 6.
De prøver sig frem og finder en rute, der benytter alle kanter og ender i samme punkt (se turene 255-267 inkl. tegneserien).

Der opstår følgende udledning af spørgsmål.

Q_2: Hvordan tegnes en graf med n kanter fra hver knude?

278. B: Det kan også bare være, at der skal være det samme antal?

279. C: Ja, men vi har jo lige prøvet med den der, hvor der var 3, 3, 3... alle mulige steder.

280. I: Er du ved at konstruere en med 5 A?

281. A: Ja.

282. B: Hvordan fanden har du tænkt dig at gøre det?

R_2: Man tager $n + 1$ knuder og tegner kanter mellem alle.

283. A: Jeg bruger det samme princip, som det der [den med 6], det er bare uden den heroppe [den 7. knude i grafen med 6 veje fra hver].

Spørgsmålet Q_2 og det tilhørende svar R_2 udgør derfor følgende prakseologi:

T	Hvordan tegnes en graf med n kanter fra hver knude?
τ	Man tager $n + 1$ knuder og tegner kanter mellem alle.
θ	Repræsentationer af grafer.
Θ	Kombinatorik.

Tur 283 viser derfor, at A har tilegnet sig denne prakseologi og kan give den videre til B og C.

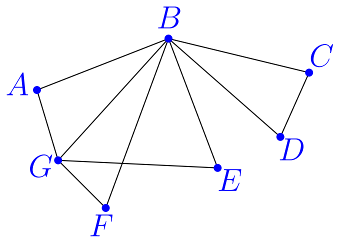
$Q_{2,1}$: Kan man konstruere en graf, hvor alle knuder har lige valens, men ikke nødvendigvis har samme valens?
Gruppen har nu kigget på forskellige udgaver af grafer med 5 knuder og på graferne, hvor alle knuderne har samme valens, 2,3,4,5 og 6.
Derfor afledes spørgsmålet $Q_{2,1}$ naturligt:

322. A: Så indtil videre, så passer de jo meget godt, det der med at... Men kan man så ikke prøve at lave sådan en der hedder. Nu har vi jo alle sammen, det er de samme tal. F.eks. hvis der var 6 hele vejen rundt [valens 6 på alle 7 knuder]. Men kan man ikke lave en der hedder sådan 6, 4, 2, 2, 4 f.eks. Eller sådan et eller andet?

323. B: Så bliver det jo et lige tal.

324. A: Ja, ja, men det er bare det der med, at der skal være lige muligheder hver gang. Det er bare i stedet for at sige, at nu har vi det samme tal hele vejen rundt, altså 6.

$R_{2,1}$**: Ja.**



328. A: Så har den der 6, 2, 4, 2, 2, 2, og 2. Men lidt skør jo.

Dette er det modsatte af at modbevise med modeksempel og giver derfor følgende praksisdel af en præcis matematisk organisation:

T	Bevis eksistens af Euler-tur i en graf med en given betingelse.
τ	Find en Euler-tur i grafen.

Denne teknik med at vise eksistens ved eksempel har eleverne formentlig også mødt før og i denne situation, viser den sig at være effektiv.

Teknikken her virker desværre ikke altid og kan være uhyre vanskelig at benytte. Det erfarer gruppen også i forbindelse med det næste underspørgsmål og grenen for Q_3.

$Q_{2,1,1}$**: Eksisterer der en Euler-tur i disse grafer?**

Turene 329-332.

Gruppen viser, at der eksisterer en Euler-tur i den specifikke graf, men har meget svært ved at kontruere et bevis for, at betingelsen for eksistens af en Euler-tur er at alle knuder har lige valens. Dette kommer til udtryk i grenen for Q_3.

Grenen for Q_3

Q_3: Hvordan beviser man, at der er eksistens af en Euler-tur i en graf, hvor alle knuder har lige valens?

341. A: Den her hypotese ser ud til at virke sådan forholdsvis helt sikker.

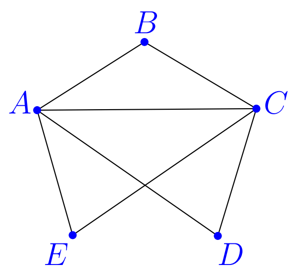
342. B: Min hypotese.

343. C: Hvilken hypotese?

344. A: Det er stadig den samme, vi beviser den bare ved og...

345. B: Det er stadig den her oppe ikke? [Hypotese: Hvis alle knuder har lige valens, findes en Euler-tur]

346. A: Jo. Jo, det er jo ligesom den der, den har jo også 2, 4, 4, 2, 2, ikke altså?



347. B: 2, 4, 4, 2..

348. A: Det behøves bare ikke at være det samme.

349. B: Aha.

350. C: 6 og den her den har jo, 2 og...

351. A: Fordi hvis det... Det passer også meget godt, hvis den der den så bare havde været 3, så kunne det ikke lade sig gøre. Hvis der bare er en ulige, så kan det ikke lade sig gøre.

352. B: Det er fandme en god hypotese. Og så kan vi bevise den ved og... Hvordan fanden beviser man sådan en hypotese? Bliver ved og bliver ved og prøve til...?

Her kan gruppen ikke svare og går derfor videre med grenene for Q_4, Q_5 og Q_6 inden, de vender tilbage med uddybende spørgsmål.
Grunden til at de vender tilbage til problemet med at bevise deres hypotese er, at de under deres fremlæggelse mangler et argument, der virker overbevisende.

I slutningen af lektionen kommer de derfor frem til følgende spørgsmål:

$Q_{3,1}$: **Skal det bevises stringent?**

Turene 553-554.

$Q_{3,2}$: **Kan man konstruere en graf med én knude med ulige valens?**
Gruppen mangler ideer til, hvordan de kan gribe beviset an, så jeg foreslår en kontrapositiv.
Dette får i stedet gruppen til at overveje et nyt aspekt ved graferne:

554. *I: Ellers kan I arbejde med den omvendte: Hvis der flere end to ulige, så kan det ikke lade sig gøre.*

555. *B: Så vil det sige, to ulige...*

556. *A: Hvis der er én ulige, var det ikke der, vi burde starte?*

557. *C: Kan det lade sig gøre kun at have én ulige?*

Løsningen finder gruppen hurtigt frem til:
$R_{3,2}$: **Der vil altid være et lige antal knuder med ulige valens.**

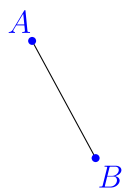
563. *B: Det kan ikke lade sig gøre... Jo, det kan det faktisk...*

564. *A: Fordi hver gang du bare sætter en til...*

565. *B: Jo, det kan du faktisk godt.*

566. *A: Hvordan?*

567. *B: [tegner og peger på A]*



568. *A: Ja, okay.*

569. *I: Men der er da to, der er ulige. Den anden [punkt B] er da også. Der er to endepunkter.*

570. *B: Pis. Det var tæt på!*

571. *A: Men kan du jo ikke nej, fordi at den der... Hver gang du sætter en streg, så vil den anden også reagere på den streg.*

Grenen for Q_4

Grenen her starter lige efter, at gruppen første gang er gået videre fra at diskutere, hvordan deres hypotese skal bevises.

Q_4: Hvad ændres, hvis der er to knuder med ulige valens?

353. *A: Nej, nej, hvis nu vi bare laver de der eksempler, vi har lavet her og så prøver at lave nogle eksempler, som ikke lykkes.*

354. *I: Hvad nu hvis der er to ulige?*

A foreslår, at de bliver ved med at lave flere eksempler med Euler-ture og nogen uden.
Jeg stiller et spørgsmål for at gøre opmærksom på, at der er en tredje mulighed: Der kan også være en Euler-sti, dvs. en tur i grafen som benytter alle kanter én gang, men ikke ender i samme knude.
Gruppen har tidligere diskuteret denne mulighed, se turene 110-118, så derfor minder jeg dem om den igen.
Jeg er overbevist om, at de selv ville have taget denne mulighed op igen, hvis de lavede flere eksempler, da de allerede har været inde på den.
I dette tilfælde var jeg dog interesseret i at se, hvilke resultater de yderligere kunne komme frem til inden for tidsgrænsen på to lektioner, så derfor stiller jeg spørgsmålet.
Dette eksemplificerer tydeligt forskellen på et kort forløb på 4 lektioner i en klasse og et længere frivilligt forløb. Eleverne i denne gruppe har ikke overblikket over, hvilke resultater de allerede har og de har ikke tiden til at få det. Hvis det havde været et længere frivilligt forløb, kunne man forestille sig, at eleverne ville være nødt til at skabe et bedre overblik og skrive deres resultater ned undervejs for at kunne huske dem til sidst. Foruden dette, ville de også have bedre tid til at følge deres helt eget tempo.

Svaret på spørgsmålet opstår ret hurtigt, fordi de allerede en gang har diskuteret muligheden.

R_4: Så eksisterer der en Euler-sti. Dvs. en tur der benytter alle kanter én gang, men ender i et andet punkt.

373. *B: Du kommer bare aldrig tilbage igen. Det er vores hypotese, der skal...*

374. *C: Man kan ikke komme tilbage.*

375. *B: Nej, det den. Det var jo egentlig vores første hypotese.*

376. *A: Det er jo bare, at man skal kunne komme tilbage.*

377. *C: Vi startede her [D] og vi sluttede her [G].*

378. B: Det er vores... Det er den der hypotese jo.

379. I: Men I har jo stadig ikke gået på nogen veje to gange?

380. A: Nej, nej, men du kan bare ikke komme tilbage.

381. B: Man skal jo hjem.

382. A: Det er jo det vi har kæmpet med.

383. I: Er det generelt for to ulige?

384. B: Det gælder altid.

385. A: Det kommer an på om du skal hjem eller ej stadig.

386. I: Men hvis ikke jeg skal hjem?

387. A: Så kan du jo godt. Det har vi jo lige bevist, at du godt kan. Måske skulle vi lave en ny figur, der er jo ikke andet for. Det er svært sådan bare og tage en og så kaste den ud i et helt system. Hvis vi nu tager det lidt mere abstrakt end det der.

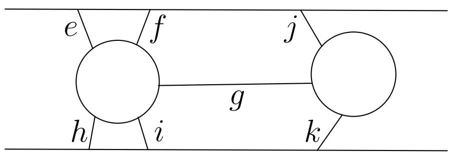
Turene her viser tre ting:
Gruppen ved godt, hvad svaret er: Hvis der er to knuder med ulige valens, så findes der en Euler-sti.
De vil meget gerne holde fast i, at der kun er én hypotese, nemlig for den situation, hvor man skal ende i samme knude, som man startede i.
De har stadig svært ved at bevise resultaterne og holder sig derfor til eksempler.

Den næste gren starter, fordi en anden gruppe har fremlagt Königsbergs broproblem på tavlen og dermed har givet gruppen endnu et eksempel, de kan diskutere.

Grenen for Q_5

Q_5: Königsbergs broproblem: Kan man gå en tur i Königsberg, hvor man krydser alle broerne én gang?

Turene 411-415, som også indeholder følgende illustration:



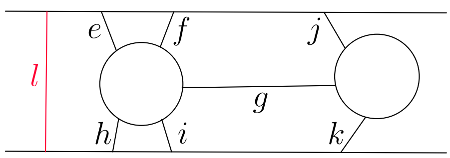
Dette problem er blevet introduceret og diskuteret i a priori analysen under delspørgsmålene på side 44.
$Q_{5,1,2}$: Kan man flyve en rute, hvor man benytter alle linjer præcis én gang?
$Q_{5,1,2,2}$: Hvor mange linjer skal hver by mindst have, for at det kan lade sig gøre at flyve på dem alle præcis én gang?

Disse delspørgsmål er klart indeholdt i elevernes arbejde med Den Rejsendes problem.

Med hensyn til selve Königsbergs broproblem, så klargører gruppen først betingelserne for problemet, inden de giver et endeligt svar.

$Q_{5,1}$: Hvilke betingelser er der for problemet?

418. C: Jamen må man godt lige pludselig gå herfra og her til, altså ved at gå den der vej [fra land til land]?



430. C: Der er ingen kant. Men hvad så, han [lærer] siger et eller andet med, at vi måtte lave en til bro ik?

431. B: Jo, hvad nu hvis vi laver en her?

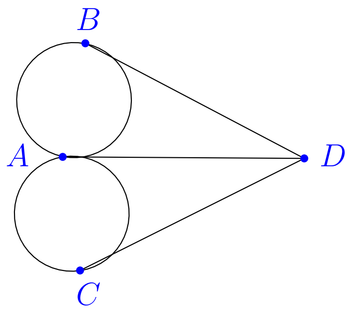
Diskussionen udmønter sig derfor i følgende svar:

$R_{5,1}$: I udgangspunktet, må man kun benytte broerne. Men det er også interessant, hvis man må tilføje broer.

Efter at betingelserne er på plads, bruges der lidt tid på at finde frem til, hvordan man repræsenterer broproblemet som en graf ved hjælp af deres teknologi. Gruppen fanger hurtigt ideen med lidt hjælp og der opstår følgende situation, hvor de kommer frem til svaret:

R_5: Der er ikke eksistens af en Euler-tur i Königsbergsbroproblem.

454. I: Og en bro lige over [AD] og en til hver side



455. B: Og så laver vi en bro til fra den der til den der [fra A til C]. Ja, præcis, jeg forstår det!

456. A: Hvis vi tager en ekstra lige over [fra B til C], det er pænere.

457. B: Det er jo lige meget, det er same, same.

458. A: Hvis vi tager en lige over?

459. B: Så kan det stadig ikke lade sig gøre, for så er der kun 3 til den der [D].

460. A: Det er korrekt.

461. C: Ja, og 5 til den der [A].

462. I: Hvad sker der så?

463. B: Så kan den ikke lade sig gøre.

464. C: Jo, jo, vi har to ulige, så du kan godt komme rundt, men du kan ikke slutte samme sted.

465. B: Nåh ja, så kan du komme rundt, men du kan ikke ende her.

466. A: Yeah!

467. B: Vi har fundet ud af noget!

468. C: Ja!

469. A: Som vi rent faktisk kan bruge!

Svaret her kommer også meget tydeligt frem i gruppens fremlæggelse af problemet (se 5. elevpræsentation i bilag F):

90. C: Ja, vi har en hypotese, der siger, at fra hvert punkt skal der være et lige antal veje ud, før du kan ende samme sted. Men hvis der er to punkter, der har et ulige antal, f.eks. to af dem har 3, så kan det godt lykkes, du kan bare ikke ende samme sted, som du startede. Og det samme gælder egentlig også, med det der, altså det vil vi så bevise via vores tegning, at det samme gælder så også, når du har det der med de der broer. Hvis du laver en ekstra bro så vil det svare til, at du har et lige antal på de fleste af dem og så to af dem, er der et ulige antal veje. Det vil sige det der med, at man kunne godt komme rundt, men du kan ikke ende samme sted, som du sluttede. Hvis du tilføjer to broer, så kan du ende med at have et lige antal hele vejen og så kan det godt lykkes.

Man kan derfor ikke gå en tur i Königsberg, der krydser alle broer én gang.

Gruppen kommer også med to ekstra konklusioner:
Tilføjelse af en bro fører til en graf med to knuder med ulige valens og der er derfor eksistens af en Euler-sti.
Tilføjelse af to broer, således at hver knude har lige valens, fører til eksistens af en Euler-tur.

Turene for det sidste svar viser, at gruppen er i det tekniske moment, idet de forbedrer deres teknik, ved at specificere tilfældene 0, 2 eller flere knuder med ulige valens og behersker dens brug, så de kan konkludere for Königsbergs broproblem.

Grenen for Q_6

Q_6: Hamilton-problemet: Hvilke betingelser skal være opfyldt, for at man kan gå en tur i en graf, der går igennem alle knuder én gang?

Jeg introducerer den omvendte problemstilling for gruppen efter, at de har planlagt fremlæggelsen af deres hypotese for Königsbergs broproblem, fordi de mangler en ny opgave. De laver nogle få overvejelser vedrørende problemet, men stopper, da de bliver kaldt til tavlen for at fremlægge.

Disse overvejelser er kun indledende og drejer sig om at forstå problemet.
Se turene 484-514.

De når derfor kun momentet for første møde og når ikke frem til nogen yderligere spørgsmål eller svar for denne gren.

Akademisk arbejde?

For at finde ud af om det er en slags akademisk arbejde, som eleverne udfører i arbejdet med Den Rejsendes Problem, vil jeg nu gennemgå de seks forslag fra Burtons forskningsstudium og beskrive, hvorvidt de er opfyldt her.

1. **Eleverne skal have mulighed for at udvikle deres egne måder at tænke på, hvad enten det er visuelt, analytisk eller konceptuelt (se side 14). En lærer bør derfor ikke planlægge undervisningsforløb der ensidigt trækker på f.eks. den visuelle tankegang.**

Den Rejsendes Problem kunne ifølge a priori analyse udvikle sig i flere retninger, men den retning, som gruppen tager her, henvender sig klart mest til den visuelle tænkemåde.
Det ses gang på gang, at eleverne i gruppen tegner en graf og konkluderer på baggrund af tegningen. Man må gå ud fra, at den tegning, de tegner, også er det billede, de har i tankerne.
Den gren af a priori analysen, der lægger mest op til de to andre tænkemåder, er grenen, der fører til optimeringsproblemer og operations analyse.

I næste afsnit, hvor jeg gennemgår lærerens forslag til spørgsmål, vil det vise sig, at størstedelen af de spørgmål han stiller til Den Rejsendes Problem, også lægger mest op til den visuelle tænkemåde, fordi de er grafteoretiske problemer.

Den Rejsendes Problem er derfor ikke et spørgsmål, der giver gode muligheder for alle tre tænkemåder.

2. **Eleverne skal støttes i deres udvikling af teknikker til at komme videre, når de støder på problemer, de ikke kan svare på, således at perioder med frustration er korte og de lærer, at sådanne perioder kan være frugtbare.**

I elevernes arbejde havde gruppen brug for hjælp til at skabe overblik over hvilke resultater, de havde fundet. De havde også brug for hjælp til at stille spørgsmål til deres resultater, så de kunne komme videre, når de gik i stå. Dette blev f.eks. observeret i forbindelse med deres fremlæggelse: Først gav fremlæggelsen overblikket, så gav lærerens spørgmål gruppen noget nyt at overveje.
Disse to aktioner kom derfor igennem forløbet til at hænge sammen og blev således til en ny teknik: Først skabes overblikket, så stilles der spørgsmål ud fra dette.

Denne nye teknik til at komme videre, når man går i stå, kan sammenlignes med teknikken: Tal med andre om problemet, idet en samtale typisk vil indbefatte at gøre rede for hvor langt, man er nået, og hvilke delresultater man allerede har opnået.
Den nye teknik adskiller sig dog ved, at man også aktivt kan bruge denne, når man er alene. Det er muligt selv at skabe sig et overblik og stille spørgmål til helheden.

Mange steder kan det ses, at gruppen forventer at blive hjulpet, når de har problemer og de regner med, at de ikke er blevet stillet overfor en umulig opgave.
Det sidste kom især til udtryk i en situation i arbejdet med Q_6: Hamilton-problemet.

513. I: Men hvis du må ende forskellige steder, så må det være et ja, ikke? Hvis I arbejder lidt med den, tror I så i kan finde frem til noget ligeså generelt som den forrige.

514. B: Jo. Det tror jeg. Vi har tyve minutter lige hurtigt.

En didaktisk kontrakt er derfor i høj grad til stede i dette forløb.

Den didaktiske kontrakt for dette forløb stiller følgende krav, som er specielle for et S&F-forløb:

Læreren: Skal fungere både som kilde og som lærer.
Det vil sige, at eleverne skal kunne konsultere ham som kilde til viden med henblik på at validere deres hypoteser, men også for at kunne få ny viden om en given problemstilling, f.eks. at få svar på et specifikt spørgsmål.
Samtidig med skal læreren også overveje, hvornår han skal være læreren, der benytter sig af didaktiske teknikker, som f.eks. at vælge ikke at give eleverne det fulde svar på deres spørgsmål, men kun delvise svar som de selv må arbejde videre med. Hans dobbeltrolle kræver derfor, at han har en god fornemmelse for, hvornår der er brug for en kilde til viden og hvornår, der er brug for læreren.

Eleverne: Skal opstille hypoteser og argumentere for disse.
Eleverne skal altså opstille hypoteser, hvad enten de er frugtbare eller ej, og komme med stærke argumenter, beviser eller modbeviser for, om de er sande.

Fordelen ved at S&F-forløbet foregår i en matematiktime er, at det giver gode muligheder for at udvikle teknikker til at komme videre, netop fordi der er mulighed for hjælp og støtte. Fordelen ved den didaktiske kontrakt er, at eleverne stoler blindt på, at opgaven kan løses, så de bliver ved med at kæmpe for at finde svarene.
Ulempen er, at eleverne kan blive skuffede og irriterede, når det går op for dem, at problemerne ikke har en løsning.
Hvis det sker, mindsker det sandsynligvis elevernes lyst til at give sig i kast med sådanne problemer igen. Det er derfor vigtigt, at læreren i introduktionen af forløbet understreger, at der er dele af problemet, som endnu ikke har en løsning.

3. **Der skal være plads til alle de følelser en læringssituation kan frembringe og det er vigtigt, at eleverne oplever følelsen af gennembrud og tilfredsstillelsen ved at finde et svar. Intuitive spring skal være velkomne - dog under forudsætning af, at der arbejdes videre med at finde argumenter for rigtigheden af en pludselig opstået ide.**

I mine observationer af eleverne er der mange eksempler på følelsesudbrud, nogle af dem er:

65. A: Det kan man sku da ikke det der.

66. B: Ihh!

83. A: Ihh, hvor er det irriterende, at man ikke kan løse den! [Sløjfen + BE]

319. A: Den der med 5 på hver.

320. C: Nej, den er dum.

321. B: Den er meget dum.

Og ikke mindst i udviklingen af svaret R_5:

466. A: Yeah!

467. B: Vi har fundet ud af noget!

468. C: Ja!

469. A: Som vi rent faktisk kan bruge!

Gruppen gennemgår altså både frustration, irritation og tilsidst glæde over at have fundet et resultat.
Arbejdet med Den Rejsendes problem giver derfor plads til mange følelser.

Med hensyn til intuition, så blev den også benyttet af eleverne. Det blev især observeret i forbindelse de to spørgsmål:
$Q_{1,2}$: Skal der være minimum 7 kanter, før der er eksistens af en Euler-tur?
$Q_{1,3,1}$: Er det en betingelse, at alle flader i grafen skal være trekanter?

Begge gange kommer gruppen med et modbevis, så de opfylder også kravet om, at der skal argumenteres for sandheden af en intuitiv hypotese.

4. **Der skal være mulighed både for samarbejde med andre, men også rum til at sidde alene og arbejde.**

Den gruppe, der blev observeret, arbejdede meget tæt sammen.
Hermed ikke sagt at der ikke kunne have været mulighed for det, men formuleringen af opgaven lægger op til, som det blev nævnt i a priori analysen, at der arbejdes i grupper.

Generelt kan man sige, fordi eleverne argumenterer ud fra deres tegninger af grafer, bliver de andre i gruppen tvunget til at se, hvad der foregår.
På den måde ligger den visuelle tænkemåde til grund for tættere samarbejde i gruppen, når den resulterer i tegninger.

5. **De må gerne lære af hinandens arbejde og af andres. Der skal altså være mulighed for at opsøge viden andetsteds - dvs. mulighed for at studere.**

Gruppen lærte meget af hinanden og deres samarbejde, f.eks. var A den første til at tilegne sig praksisdelen af prakseologien for at tegne en graf, hvor alle kanter har samme valens, og han gav den videre til B og C. Dette betyder, at selv om B og C ikke selv fandt frem til den, så har den stadig relevans, fordi den er videregivet i samarbejdet som en del af svaret på en bestemt problemstilling.

Den observerede gruppe konsulterede ikke andre kilder end læreren eller observatøren, når de var gået i stå og observationerne starter med følgende ture:

1. *A: Vi kom fra den der tricky en.*
2. *B: Det var det, de sagde sidst, at det altid bedst kunne betale sig at ramme den ind [følge ruten rundt til alle punkterne langs yderkanten]. Det havde de fundet på nettet. Men det havde vi fundet selv - Det synes jeg vi skal være stolte over.*

At B synes, at de skal være stolte over at have fundet det selv i stedet for på nettet viser, at der i klassen er en kultur, hvori det bliver betragtet som 'snyd' eller 'at springe over hvor gærdet er lavest', hvis man søger på nettet eller i andre kilder.

For at studie- og forskningsforløb skal kunne fungere i matematiktimerne i gymnasiet er det derfor nødvendigt med en ændring af denne kultur.
Hvis ikke kulturen ændres, vil vi blive ved med at observere, at eleverne hovedsageligt foretager forskning og kun en smule studium, når de arbejder med spørgsmål som Den Rejsendes Problem, som ellers kunne give anledning til studium (Se f.eks. a priori analysen side 41).

Det blev også observeret flere gange, at eleverne kun udvikler praksisdelen og deres egen teknologi til de relevante prakseologier. Dette har selvfølgelig mange årsager, men der er ingen tvivl om, at manglende studium er med til at forhindre eleverne i at udvikle den officielle matematiske teknologi og opdage den bagvedliggende teori. Fordi det fungerer for gruppen, og fordi ingen foreslår dem at undersøge, hvad de officielle matematiske termer er, bliver gruppen f.eks. ved med at kalde det for figurer med veje og byer, mens det grafteoretisk ville blive kaldt grafer med kanter og knuder.

At eleverne ikke har den officielle teknologi og teoretiske baggrund, kan blive et problem, f.eks. når eleverne skal gennemgå det tekniske moment (se side 7), hvor de skal forbedre deres teknik og beherske dens brug.
Dette blev f.eks. observeret, da gruppen skulle omsætte Königsbergs broproblem til et grafteoretisk problem ved hjælp af deres egen teknologi.
De skulle pludselig benytte deres termer byer og veje om situationen øer og broer, hvilket gjorde, at de havde svært ved at se situationen som et grafteoretisk problem. Der gik derfor en del tid, inden de kunne beherske brugen af deres teknik i den nye situation: Königsbergs broproblem.

6. **Der må gerne være en sund konkurrence, forstået på den måde, at eleverne motiveres til at komme frem til resultater hurtigt, men samtidig med at kritikken skal være velkommen og tages som udfordring til at arbejde videre. Sidst men ikke mindst skal det være lovligt at begå fejl.**

Flere ture viste, at gruppen meget gerne ville fremlægge deres resultater og var stolte over, at de havde fundet frem til noget centralt før de andre i klassen. En af disse er:

403. B: Hvis der er to ulige, kan du komme hele vejen rundt, men ikke ende det samme sted. Det er sat'me en hypotese, der siger spar fem. Den der. Jeg synes altså stadig, vi skal have lov og tegne den der deroppe [refererer til tegningen med 6 til alle og at de gerne vil gennemgå den på tavlen].

Eleverne kæmper derfor om at være de første til at fremlægge nye resultater, hvilket betyder, at der er en sund konkurrence i klassen.

I forbindelse med deres fremlæggelse fik gruppen kritik af læreren for ikke at have noget bevis. Dette slog ikke gruppen ud, men ansporede dem i stedet til at stille underspørgmål til, hvordan sådan et bevis kunne konstrueres.

Det er inkluderet i den didaktiske kontrakt, at det er helt i orden at opstille hypoteser, der ikke er sande, hvilket er tydeligt ved at følgende spørgsmål opstår:
$Q_{1,2}$: Skal der være minimum 7 kanter, før der er eksistens af en Euler-tur?
$Q_{1,3,1}$: Er det en betingelse, at alle flader i grafen skal være trekanter?

Det er derfor helt lovligt at tage fejl og dette forslag fra Burtons studium er derfor tydeligt opfyldt i elevernes arbejde med Den Rejsendes Problem.

Akademisk arbejde

I dette forløb har gruppen dannet en tre praksisdele af prakseologier og en enkelt fuldstændig prakseologi, med deres egen teknologi, som er:

T	Modbevis hypotesen om, at der er Euler-tur i grafen under en given betingelse.
τ	Find et modeksempel: Find et eksempel, hvor den givne betingelse er opfyldt, men der ikke er Euler-tur.

T	Hvordan tegnes en graf med n kanter fra hver knude?
τ	Man tager $n+1$ knuder og tegner kanter mellem alle.
θ	Repræsentationer af grafer.
Θ	Kombinatorik.

T	Bevis eksistens af Euler-tur i en graf med en given betingelse.
τ	Find en Euler-tur i grafen.

Og praksisdelen af prakseologien:

T	Afgør, om der eksisterer en Euler-tur i en given graf?
τ	Find valensen for hver knude, så det kan afgøres, om de alle er lige eller ej.
θ	Grafer og valensbegrebet.
Θ	Eulers sætning (se side 44).

Forløbet har derfor givet relevans til matematiske prakseologier. Eulers sætning i den sidste prakseologi er ikke blevet bevist, men gruppen har overbevist sig selv om dens rigtighed og her kan det ses, at de har udviklet en brugbar teknologi, men mangler en bagvedliggende teori.

Konklusionen på observationerne af gruppen må være, at det er en slags akademisk arbejde, de har foretaget, men i en form hvor langt hovedparten af tiden bliver brugt på forskning.
Det er blevet beskrevet i dette afsnit at følgende af de 6 forslag fra Burtons studium, var til stede i klassen under forløbet.

2. Eleverne blev støttet i udviklingen af teknikker til at komme videre.
3. Den Rejsendes Problem skabte mange følelser og eleverne benyttede sig af intuition.
5. Der var mulighed for, at de kunne lære af hinanden og der var mulighed for studium, selvom dette ikke i særlig høj grad blev udnyttet af eleverne.
6. Klassens arbejde med Den Rejsendes Problem skabte en sund konkurrence og kritik blev vel modtaget.

Formålet med forløbet må derfor siges at være opfyldt for denne gruppe, idet de udviklede og gav relevans til prakseologier ved hjælp af en slags akademisk arbejde.

I det næste afsnit vil jeg gennemgå, hvilke ideer læreren havde til forløbet og hvordan disse hænger sammen med a priori S&F-modellen for Den Rejsendes Problem på side 37.

Lærerens forslag

I de første to lektioner arbejdede stort set samtlige grupper med de samme situationer og nogle havde svært ved at komme videre. Det betød, at læreren fandt på nogle opgaver, som han kunne uddele til grupperne, hvis de gik helt i stå i de to sidste lektioner. Disse opgaver er:

1. Gælder det, at man kan finde en Euler-kæde, hvis deg(v) er lige for alle v?
2. På hvor mange måder kan man danne hold af 2 (2,3,4...), hvis man har 3,4,5,6... personer?
3. Hvis man skal tage højde for vind, fortjeneste, mm. Hvordan finder man så den billigste rute?
4. Broerne i Königsberg: Kan man komme rundt og se alle uden at gå over den samme to gange?
5. Hypotese: Flyv altid til den nærmeste by. Giver dette altid den korteste rute?
6. Gælder der altid: Et lige antal personer har udvekslet et lige antal håndtryk?
7. Eulers polyederformel: Flader+punkter-kanter=1. Modbevis.
8. Kan man altid finde en Eulersti, hvis der er netop to punkter med lige grad?

For at komme frem til disse opgaver, kræves det, at læreren selv laver, hvad der svarer til et S&F-forløb og det kan ses, at nogle af spørgsmålene kan identificeres med spørgsmålene i a priori modellen for Den Rejsendes Problem (side 37).

Spørgsmålene 1 og 4 kan identificeres med spørgsmålet:
$Q_{5,1,2}$: Kan man flyve en rute, hvor man benytter alle linjer præcis én gang?
Dette spørgsmål er diskuteret tidligere.

Spørgsmål 2 er udvidelsen af spørgsmålet:
$Q_{5,1,1}$: Hvor mange linjer er der maksimalt? (i en graf, hvor alle knuder har samme valens.)
Dette blev diskuteret på side 43 i a priori analysen.

Spørgsmål 3 kan give anledning til hele grenen for Q_2: Hvilke faktorer har betydning for brændstoføkonomien på et fly? og leder derfor, som minimum, til en overvejelse om optimering.
Hvis det lykkes for læreren at få en gruppe elever til at arbejde intensivt med denne opgave, vil det nok være her, hvor der er rig mulighed for, at de benytter tænkemåderne analytisk og konceptuelt. Det er, fordi brændstoføkonomi er en sammenhæng mellem mange faktorer og begreber, der typisk opstilles i ligninger.

Spørgsmål 5 er en hypotese, som kan modbevises, og det er det samme som spørgsmålet:
$Q_{1,2,2}$: Kan det betale sig altid at flyve til den by, der er nærmest, men som ikke er den, man kom fra?
Der er mange eksempler på hypoteser, som kan modbevises og i analysen af elevarbejdet var der også en praksisdel for, at en hypotese om eksistens kunne bevises med et eksempel. Gruppen kunne ikke konstruere et bevis for deres bedste hypotese, formentlig både fordi de ikke havde nok kendskab til den relevante teori og generelle bevismetoder og fordi de ikke foretog studier af problemet.
Dette betyder, at arbejdet med Den Rejsendes Problem kan være et udmærket grundlag for en diskussion af den matematiske teori og af matematisk metode i en undervisningssituation.

Spørgsmål 6 kom ikke frem i a priori analysen, men eleverne i gruppen kom faktisk frem til en anden udgave af problemet og gav et fint argument. Deres udgave af spørgsmålet var:
$Q_{3,2,1}$: Kan man konstruere en graf med et ulige antal knuder med ulige valens?
Gruppens argument var: Nej, det kan man ikke, fordi hver gang man tilføjer en kant, øger den valensen i 2 knuder, nemlig de to den forbinder.
Hvorvidt læreren selv er nået frem til problemet på denne måde eller er stødt på det i forbindelse med studium af grafteori vides ikke.

Spørgsmål 7 er hverken med i a priori modellen eller i den observerede gruppes arbejde.
Det er formentlig opstået i forbindelse med lærerens studium af Euler og grafteori. Den Rejsendes Problem giver anledning til en udviklingen af repræsentation af grafer og spørgsmålet er derfor en undersøgelse af en sammenhæng af denne repræsentationsform.

Det sidste spørgmål opstår til gengæld både i a priori modellen og i gruppens arbejde.

I a priori modellen opstår det som spørgsmålet $Q_{5,1,2,1}$: Kan man flyve en rute, hvor man bruger alle linjerne én gang, men ikke ender det samme sted?
Og i elevarbejdet som Q_4: Hvad ændres, hvis der er to knuder med ulige valens?

Da læreren har uddelt disse opgaver til de forskellige grupper (dog ikke til den observerede), fremkommer alle disse spørgsmål selvfølgelig i klassens arbejde.

I næste afsnit, vil jeg diskutere effekten af to af de didaktiske teknikker, som læreren benyttede i forløbet.

De didaktiske teknikker

I undervisningsforløbet benyttede læreren sig af mange didaktiske teknikker, men der er to, som jeg vil fremhæve her. Den første er hypotesearket, som jeg også var inde på i a priori analysen (se side 34), og den anden er de løbende fremlæggelser.

Hypotesearket

I bilag G kan man se eksempler på tre hypoteseark.

Det første hypoteseark tilhører den gruppe, der blev observeret og hvis man sammenligner hypotesearket med S&F-modellen for deres arbejde (side 60), kan vi se, at hypotesearket beskriver alle grene i modellen:

Hyp. 4: Q_6: Om hamiltonproblemet.

Hyp. 5: $Q_{1,2}$: Om 7 kanter er en betingelse.

Hyp. 6: $Q_{1,3,1}$: Om fladerne skal være trekanter.

Hyp. 7: $Q_{1,3,2}$: Lige valens.

Hyp. 8: $Q_{2,1}$: Om det samlede antal mulige kanter.

Hyp. 9: $Q_{2,2}$: Findes der grafer, hvor alle knuder har lige valens, men ikke den samme?

Hyp. 10: Q_4: 2 knuder med ulige valens.

Hyp. 11: $Q_{3,2}$: Eksisterer der en graf med én knude med ulige valens?

Hyp. 12: Q_5: Om løsningen til Königsbergproblemet.

Hypoteserne 1-3 blev dannet i de to første lektioner, så hypotesearket viser også, at der skete en langt større udvikling i elevernes arbejde i de to sidste lektioner, hvor de havde forstået problemet og gjort sig indledende overvejelser.
At Q_6 kommer først skyldes, at gruppen først gik igang med at udfylde hypotesearket for de to sidste lektioner efter, de havde arbejdet et stykke tid.

På denne måde kan et hypoteseark bidrage til analysen af et S&F-forløb og det har jeg gjort for de to andre eksempler i bilag G. Hypotesearkene giver ikke mulighed for at identificere de mange underspørgsmål, som grupperne formentlig stiller undervejs og hvilken rækkefølge, de er opstår i, men kan bruges til at skabe overblik over klassens udvikling.

De tre eksempler på hypoteseark (bilag G) viser, at de forskellige grupper arbejder med mange forskellige spørgsmål og kommer derfor frem til forskellige resultater. To af grupperne fordybede sig i en specifik problemstilling, henholdsvis Euler-ture og Eulers Polyederformel, mens den sidste gruppe arbejdede med flere forskellige.

Hypotesearkene er derfor en ganske effektiv didaktisk teknik til at give overblik, både for lærere og elever, og kan støtte eleverne igennem de forskellige momenter, især de to sidste: Institutionaliseringsmomentet og evalueringsmomentet, hvor de skal identificere den matematiske organisation og reflektere over den (se side 7).
Det kan derfor være en god ide at inddrage disse i andre S&F-forløb.

Løbende fremlæggelser

Som allerede nævnt i analysen af elevarbejdet medvirkede de løbende fremlæggelser til at frembringe en sund konkurrence i klassen og de skabte et forum, hvor kritik var velkommen. Hvis man inkluderer løbende fremlæggelser i et S&F-forløb, vil det derfor være med til at sørge for, at det 6. forslag fra Burton studium vil være tilstede.

Løbende fremlæggelser er også et forum, hvor eleverne kan lære af hinandens resultater og fejltagelser og er således med til at sørge både for, at der er mulighed for samarbejde, men også for at eleverne kommer i både det teknologisk-teoretiske moment og i det tekniske moment, hvor de skal forbedre deres teknikker. Hvis man ønsker denne effekt, betyder det, at fremlæggelserne skal være løbende fremfor afsluttende, da en fremlæggelse i slutningen af forløbet ikke giver muligheden for at ændre eller tilpasse sine hypoteser.

En afsluttende fremlæggelse kan dog også være glimrende af inddrage i forløbet, da en sådan kan være med til at sørge for at eleverne gennemgår institutionaliseringsmomentet og evalueringsmomentet (se side 7).

Konklusion på observationerne

I denne analyse af observationerne af elevarbejdet og af nogle af lærerens didaktiske teknikker, fandt jeg frem til følgende:

Der blev dannet både teknikker og teknologier til forskellige opgavetyper, men ingen formelle teorier.
De mangler derfor at stifte bekendtskab med officiel matematisk terminologi og de bagvedliggende teorier, som de f.eks. kunne have mødt igennem mere systematisk studium.

Der var ikke mange af grupperne, der konsulterede andre kilder end læreren, så analysen identificerede et stort hul i elevernes arbejdsmetoder.
På den ene side har eleverne foretaget en slags akademisk arbejde, som kan sammenlignes med forskernes, fordi mange af de 6 forslag fra Burtons studium var opfyldt. På den anden side adskiller deres arbejde sig også markant fra 'rigtigt' akademisk arbejde, fordi de hovedsageligt foretog forskning.
Hvorvidt dette kunne skyldes, at eleverne kun havde en begrænset tidsperiode, vil kræve yderligere eksperimentelle undersøgelser.

For at problemet kan løses, hvis det engang skulle prøves på frivillig basis, kræves der en markant holdningsændring hos eleverne, hvor de går fra at synes, det er 'snyd' til at synes, det er sejt, hvis man har fundet og forstået teoretisk materiale i eksterne kilder.
Denne udvikling vil kræve støtte fra læreren eller fra eventuelle arrangører af et frivilligt projekt og et design af forløbet, der tager højde for problemet.

Udover at støtte eleverne i at foretage studium er det også blevet vist her, at det er vigtigt, at de får hjælp og støtte til at udvikle teknikker til at komme videre, når de går i stå. Dette var allerede kendt på baggrund af Burtons forskningsstudium, men observationerne understreger vigtigheden af netop denne støtte.

I forbindelse med analysen, blev det også beskrevet, at de didaktiske teknikker 'hypoteseark' og 'løbende fremlæggelser' er effektive støtter for eleverne og det er derfor en meget god ide at inkludere disse i fremtidige S&F-forløb, hvad enten det er i matematiktimerne eller frivilligt.

9 Portræt af Georg Mohr

I dette kapitel vil jeg introducere et af de tilbud til danske gymnasieelever, der allerede er eksisterer i Danmark i dag, og som prøver at gøre matematikken interessant, nemlig Georg Mohr konkurrencen.

Først vil jeg give en beskrivelse af konkurrencen baseret på informationer fra hjemmesiden georgmohr.dk og fra interviewet med arrangør Kirsten Rosenkilde (bilag B). Jeg vil også inddrage udtalelser fra et interview med tre af deltagerne om, hvordan det er at deltage i konkurrencen (bilag C).

I de sidste afsnit vil jeg analysere 4 opgaver, der er karakteristiske for konkurrencen og undersøge, hvilken type opgaver disse er set i forhold til studie- og forskningsspørgsmål. I opsamlingen om opgaverne vil jeg også inddrage dele af interviewet med Kirsten Rosenkilde, der udtaler sig om karakteristiske egenskaber ved en Georg Mohr opgave.

Georg Mohr konkurrencen

Georg Mohr konkurrencen har eksisteret i mange år og er derfor et gennemprøvet koncept, der nu har en nogenlunde fast form. På hjemmesiden beskrives formålet for konkurrencen på følgende måde:

> *"Formålet med Georg Mohr-Konkurrencen er at stimulere interessen for matematik ved at udfordre de dygtigste elever med opgaver der i sværhedsgrad ligger ud over det, de møder i den daglige undervisning. Desuden fungerer konkurrencen som et led i udvælgelsen af deltagere til IMO, den Internationale Matematikolympiade."*

Der bør bemærkes, at Georg Mohr henvender sig til 'de dygtigste' elever og at sværhedsgraden er højere end den daglige undervisning.

Georg Mohr konkurrencen består af to indledende runder og et par vinderseminarer, der fører til udvælgelsen af de elever, der skal deltage i de internationale konkurrencer.
1. runde af konkurrencen er for alle de gymnasieelever, der måtte have lyst til at deltage. Den første runde er en multiple choiche prøve, der foregår på de forskellige gymnasier rundt om i landet. Der kan samles maksimalt 20 point og for at gå videre, skal man have mindst 12 point. Der regnes med, at flere tusinde deltager i denne runde på landsplan.

Ca. 1000 af de elever, der deltog i første runde, går videre til 2. runde, som også foregår på gymnasierne. Her er det en 4 timers prøve og igen udvælges de bedste baseret på point.

Efter den sidste runde inviteres de 25-30 bedste elever til at deltage i vinderseminarerne, som er weekendkurser, hvor eleverne trænes i at blive bedre til at løse Georg Mohr opgaver og hvor der vælges deltagere til de internationale konkurrencer: Nordic Mathematics Competition (NMC), International Mathematical Olympiad (IMO) og Baltic Way.

En af de interessante aspekter ved Georg Mohr konkurrencen er, at den er udbredt til hele landet. På mange skoler er der i løbet af efteråret Georg Mohr træningssessioner, hvor elever, der har lyst til at deltage i 1. runde, kan komme og prøve kræfter med de alternative og sommetider meget svære opgaver. På hvert deltagende gymnasium er der en matematiklærer, der er koordinator for konkurrencen, og denne lærer (og evt. andre matematiklærere) mødes med eleverne i sessionerne, der ligger uden for skoletid, og hjælper dem til at lære at løse denne type opgaver.
Georg Mohr konkurrencen er interessant i relation til dette speciale, fordi den er et fritidsmatematisk tilbud, der involverer mange elever og disse elever deltager af egen lyst.

I et interview med 3 af deltagerne i vinderseminaret (bilag C), fortæller de, at det de bedst kan lide ved Georg Mohr konkurrencen er:

4. *A: Matematik. Og så er der en masse der er gode til det. Det har jeg sådan aldrig oplevet i mit liv før måske. Det er sjovt at være sammen med nogen der er ret skarpe.*

5. *C: Ja, man kan jo sige at undervisningen her og arbejdet i det hele taget det er jo noget mere seriøst, end det er i skolen. Man lærer noget her. Det er rart.*

6. *B: Altså her skal man bare sådan set bruge sin hjerne. Når man sidder i matematik undervisningen, så skal man jo bare, man skal regne. Det er det. Altså man kan ikke... Man skal næsten ikke tænke over noget. Og man kan bruge lommeregneren til det hele. Det synes jeg er ret slemt på en eller anden måde.*

De fremhæver altså fællesskab og anderledes udfordringer som faktorer, der gør, at de har lyst til at bruge deres fritid på at deltage i Georg Mohr.
De 3 interviewede deltagere har alle den forudsætning, at de er udtaget til Georg Mohr seminaret og må derfor antages at have en interesse og talent for matematik på forhånd, som ligger over gennemsnittet. Men det interessante ved deres udtalelser, set i forhold til tilbud om matematik uden for den almindelige undervisning, er, at de desuden peger på glæden ved de alternative matematiske udfordringer samt oplevelsen af fællesskab med andre. Det er derfor nærliggende at antage, at dette kan være vigtige forudsætninger for tilbud i matematik generelt.

Jeg vil nu præsentere 4 opgaver, som er karakteristiske for konkurrencen, og analysere disse med S&F-modellen.

Georg Mohr opgaverne

Som nævnt i metodologien på side 28 er de karakteristiske opgaver udvalgt af Sune Precht Reeh.
De 4 udvalgte opgaver dækker de 4 hovedområder og de er:

De lette:
Geometri: 2009 opg. 1
Talteori: 2007 opg. 2

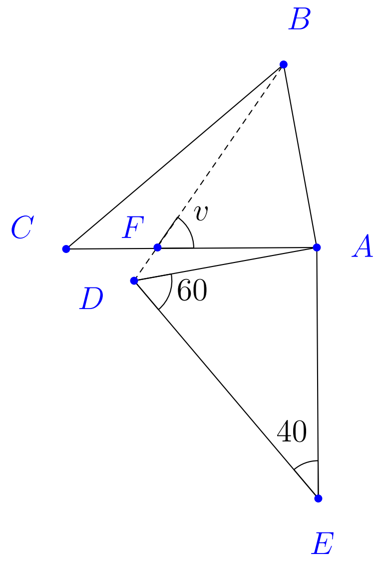
De svære:
Diskret Matematik: 2004 opg. 5
Algebra: 2005 opg. 5

Jeg vil i de følgende fire afsnit først gengive opgaveformuleringen, hvorefter jeg vil præsentere en eller flere løsninger, som er konstrueret med inspiration fra Georg Mohr konkurrencens hjemmeside og passende uddybet. Hvert afsnit vil ende med en analyse af problemet og efter det sidste afsnit, vil jeg give en samlet karakteristik af Georg Mohr opgaverne.

Geometri

Opgave 1 (2009)

I figuren fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på $90°$ om punktet A.
Hvis vinkel D er $60°$, og vinkel E er $40°$, hvor stor er så vinkel v?



Figur 9.1: Illustration af konstruktionen

Løsning

Lad F være skæringspunktet mellem AC og BD.

Da trekant ADE er en drejning af trekant ABC, må $\angle ACB = \angle AED = 40°$, $\angle ABC = \angle ADE = 60°$ og $\angle CAB = \angle EAD = 180° - (60° + 40°) = 80°$.
Der må desuden gælde, at $|AB| = |AD|$, således at trekant ABD er ligebenet med $\angle BAD = 90°$.
Dette giver os, at
$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180-90}{2} = 45°$.

Vi har nu $\triangle ABF$ med vinklerne $\angle CAB = \angle BAF = 80°$ og $\angle ABD = 45°$, således at

$$v = \angle AFB = 180° - (80° + 45°) = 55°$$

Alternativ løsning, som udnytter samme forudsætninger:
Da v er nabovinkel til vinkel F i trekant CBF er

$$v = 180 - \angle CFB$$

Det vides desuden at vinkelsummen i en trekant er 180°, således at
$\angle CFB = 180 - \angle ACB - \angle CBF$.

$$\begin{aligned} v &= 180 - (180 - \angle ACB - \angle CBF) \\ v &= \angle ACB + \angle CBF \end{aligned}$$

Det ses også, at $\angle CBF = \angle ABC - \angle ABD$.

Samlet fås:

$$\begin{aligned} v &= \angle ACB + \angle CBF \\ v &= \angle AED + (\angle ABC - \angle ABD) \\ v &= 40^\circ + (60^\circ - 45^\circ) \\ v &= 55^\circ \end{aligned}$$

Endnu en alternativ løsning kan findes ved at bruge $\triangle AFD$ og det faktum, at $v = 180^\circ - \angle AFD$.

Alle tre løsningsmetoder kan beskrives ved besvarelse af samme underspørgsmål, så analysen bliver følgende:

Analyse

Q_0: I figuren fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på 90° om punktet A.
Hvis vinkel D er 60°, og vinkel E er 40°, hvor stor er så vinkel v?

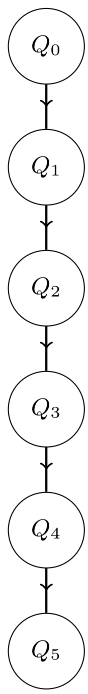
Q_1: Hvilke trekanter er der?

Q_2: Hvad vides om trekanterne?

Q_3: Hvilke vinkler har de?

Q_4: Hvilke af trekanterne indeholder v eller $180^\circ - v$?

Q_5: Hvordan isoleres v?

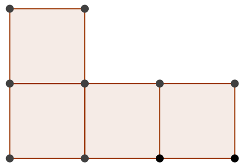


Figur 9.2: S&F-model for Geometriopgaven.

Diskret matematik

Opgave 5 (2004)

Bestem for hvilke naturlige tal n man kan dække et $2n \times 2n$ skakbræt med ikke overlappende L-brikker. En L-brik dækker 4 felter og har udseende som bogstavet L.
L-brikken må roteres og spejles efter behag.

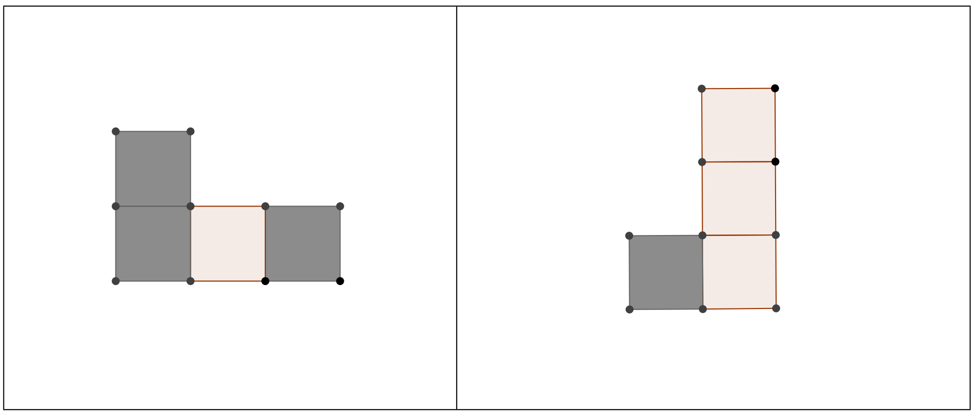


Figur 9.3: L-brik

Løsning

Man kan dække et 4×2 rektangel med 2 L-brikker og når n er lige kan skakbrættet dækkes med disse.
Antag for et givet n at brættet er dækket er L-brikker. Der må være anvendt netop n^2 brikker til overdækningen, da det samlede antal felter er $2n \cdot 2n = 4n^2$ og hver brik dækker 4 felter.
Ved at vise at der må være anvendt et lige antal brikker, fås at n^2 er lige og dermed at n er lige.

Mal felterne i de lige rækker sorte og de øvrige felter hvide. Hver L-brik i overdækningen dækker enten 3 eller 1 sort felt.



Tabel 9.1: Illustration af hvordan en L-brik kan farves

Hvis vi lader x være antallet af L-brikker som dækker 3 sorte og ét hvidt felt og y være antallet af L-brikker som dækker ét sort og 3 hvide.
Så er antallet af sorte felter

$$3x + y$$

og antallet af hvide felter er

$$3y + x$$

Antallet af sorte og hvide felter er ens, da antallet af kolonner er lige ($2n$). dvs.

$$3x + y = 3y + x$$

Hvilket giver

$$x = y$$

Der er altså lige mange brikker af de to slags og dermed et lige antal brikker i alt. Da antallet af brikker er n^2 må n^2 være et lige tal. Og dermed kan det lade sig gøre at dække et $2n \times 2n$-skakbrik med L-brikker, netop når n er lige.

Analyse

Q_0: Bestem for hvilke naturlige tal n man kan dække et $2n \times 2n$ skakbræt med ikke overlappende L-brikker.

Q_1: Hvordan kan L-brikker ligge på et skakbræt?

Q_2: Hvordan skal L-brikker ligge opad hinanden, så de fylder mindst?

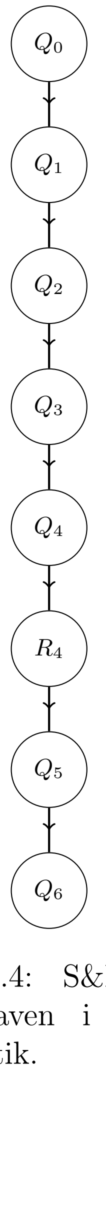
Q_3: Hvor meget fylder de så, når de ligger som rektangler?

Q_4: Hvor mange rektangler kan der ligge på et bræt med $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ osv.?

R_4: $n = 1$: Ingen.
$n = 2$: 2 rektangler, dvs. 4 L-brikker.
$n = 3$: 4 hele rektangler, men så mangler et 2×2hjørne.
$n = 4$: 8 rektangler, dvs. 16 L-brikker.
osv.

Q_5: Hvordan bevises det, at n skal være lige?

Q_6: Hvordan bevises det, at antallet af L-brikker, og dermed n^2, skal være lige?



Figur 9.4: S&F-model for opgaven i Diskret Matematik.

Talteori

Opgave 2 (2007)

Hvad er det sidste ciffer i tallet 2007^{2007}?

Løsning

Ethvert heltal kan skrives på formen $10a + b$ hvor $a \in \mathbb{Z}$ og $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Når vi ganger to heltal sammen, får vi altså:

$$\begin{aligned}(10a+b)(10c+d) &= 10^2ac + 10ad + 10bc + bd \\ &= 10(10ac + ad + bc) + bd\end{aligned}$$

Dermed er sidste ciffer i et produkt lig sidste ciffer i produktet af faktorernes slutcifre.

Det vides derfor, at det sidste ciffer i 2007^2 er det samme som for 7^2- dvs. 9.
Ligeledes vides det, at det sidste ciffer i 2007^3 er det samme, som for $49 \cdot 7$ eller $9 \cdot 7 = 63$ nemlig 3.
Og til sidst: Det sidste ciffer i 2007^4 er det slutcifret i $3 \cdot 7$=21, nemlig 1.

Ser vi nu på tallet 2007, ses det at $2007 = 4 \cdot 501 + 3$.
Så vi får

$$2007^{2007} = (2007^4)^{501} \cdot 2007^3$$

Da 2007^4 har sidste ciffer 1, har også $(2007^4)^{501}$ slutciffer 1.
Vi så også at 2007^3 har sidste ciffer 3.
Så produktet, af et tal med slutciffer 1 og et tal med slutciffer 3, vil have slutciffer $1 \cdot 3 = 3$.

Analyse

Q_0: Hvad er det sidste ciffer i tallet 2007^{2007}?

Q_1: Hvordan ganger man to tal sammen?

Q_2: Hvad er det sidste ciffer i produktet?

Q_3: Hvad sker der hvis vi ganger 2007 med 2007?
R_3: Sidste ciffer er 9

Q_4: Hvad er det sidste ciffer, hvis vi udregner 2007^3?
R_4: Ved at gange sidste ciffer i 2007^2 med 2007 findes frem til, at sidste ciffer er 3

Q_5: Hvad med 2007^4?
R_5: Ved at gange sidste ciffer i 2007^3 med sidste ciffer i 2007, findes frem til, at sidste ciffer er 1

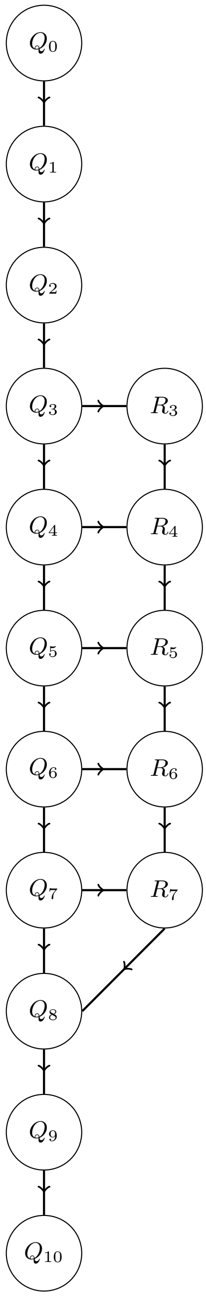
Q_6: Hvad med 2007^5?
R_6: Ved at gange 1 med 7, fås sidste ciffer 7

Q_7: Hvad med 2007^6?
R_7: Ved at gange 7 med 7, fås sidste ciffer 9. Det ses, at $2007^6 = 2007^4 \cdot 2007^2$ og de har samme slutciffer.

Q_8: Kan man ikke dele potensen 2007 op og tage produktet lidt af gangen?

Q_9: Hvordan opdeler vi en potens?

Q_{10}: Hvordan opdeler vi potensen 2007 i noget med 4?



Figur 9.5: S&F-model for Talteoriopgaven.

Algebra

Opgave 5 (2005)

For hvilke reelle tal p har ligningssystemet

$$\begin{aligned}
x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= px_2 \\
x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= px_3 \\
&\vdots \\
x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= px_{2005} \\
x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= px_1
\end{aligned}$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ er reelle tal?

Løsning

Ligningssystemets venstresider er positive, så der er ingen løsninger for $p = 0$.
$(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$ er en løsning for p hvis og kun hvis $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{2005})$ er en løsning for $-p$.
Det er derfor tilstrækkeligt at se på de tilfælde hvor p er positiv og i det tilfælde må alle x_i'er være positive.

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2005} = x$ er en løsning til ligningssystemet, hvis x er en løsning til $x^4 + \frac{1}{x^2} = px$.
Denne ligning kan omskrives til

$$\begin{aligned}
px &= x^4 + \frac{1}{x^2} \\
px^3 &= x^6 + 1 \\
0 &= x^6 - px^3 + 1 \\
0 &= (x^3)^2 - px^3 + 1
\end{aligned}$$

som er er en skjult 2. grads ligning med diskriminant $d = (-p)^2 - 4 \cdot 1^2 = p^2 - 4$.
Hvis der højest må være en løsning må diskriminanten ikke være positiv. Dette giver os $p \leq 2$.

Kigger vi nu på venstre siden ses det, at

$$x_i^4 + \frac{1}{x_i^2} = (x_i^2)^2 + (\frac{1}{x_i})^2 - 2x_i + 2x_i = (x_i^2 - \frac{1}{x_i})^2 + 2x_i$$

og af det sidste kan vi se, at $x_i^4 + \frac{1}{x_i^2} \geq 2x_i$.
Bruges ligningssystemet fås

$$px_{i+1} \geq 2x_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 2005 \quad \text{hvor } x_{2006} = x_1$$

Dette giver os en række uligheder

$$\begin{aligned} px_2 &\geq 2x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{px_2}{x_1} \geq 2 \\ px_3 &\geq 2x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{px_3}{x_2} \geq 2 \\ &\vdots \\ px_{2005} &\geq 2x_{2004} \quad \Rightarrow \quad \frac{px_{2005}}{x_{2004}} \geq 2 \\ px_1 &\geq 2x_{2005} \quad \Rightarrow \quad \frac{px_1}{x_{2005}} \geq 2 \end{aligned}$$

Som når de ganges sammen giver

$$\begin{aligned} 2^{2005} &\leq \frac{px_2}{x_1} \cdot \frac{px_3}{x_2} \cdots \frac{px_{2005}}{x_{2004}} \cdot \frac{px_1}{x_{2005}} \\ 2^{2005} &\leq p^{2005} \\ 2 &\leq p \end{aligned}$$

For at der er netop en løsning, må der derfor gælde $p = 2$ og dermed

$$(x_i^2 - \frac{1}{x_i})^2 + 2x_i = 2x_i$$

Det kræver dog at

$$x_i^2 - \frac{1}{x_i} = 0$$

Hvor med det ses at $x_i = 1$.
Eneste mulige og faktiske løsning for $p = 2$ er derfor $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2005} = 1$.
Der er derfor netop én løsning for $p = \pm 2$.

Analyse

Q_0: For hvilke reelle tal p har ligningssystemet netop én løsning $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ er reelle tal?

Q_1: Er der noget p ikke kan være?

Q_2: Kan p være 0?

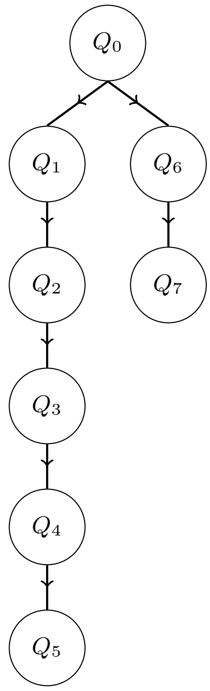
Q_3: Kan p være negativ? Og i så fald er er der så en sammenhæng med p positiv?

Q_4: Hvad kan x_i'erne så være?

Q_5: Hvis x_i'erne er ens, hvad kan p så være?

Q_6: Kan vi omskrive ligningssystemet?

Q_7: Hvilke begrænsninger giver det på p?



Figur 9.6: S&F-model for opgaven i Algebra.

Om Georg Mohr opgaver

Hvilken type opgaver kan Georg Mohr opgaverne siges at være og opfylder de betingelserne for et godt studie- og forskningsspørgmål?

For at svare på det sidste først, kan vi se på betingelserne en ad gangen:

1. Spørgsmålet skal være let at forstå.
   Spørgsmålene er generelt lette at forstå og der ledes efter et præcist svar:
   Hvor stor er vinkel v?
   For hvilke n kan man dække et $2n \times 2n$ skakbræt med L-brikker?
   Hvad er det sidste ciffer i 2007^{2007}?
   For hvilke p er der én løsning?

   Så denne betingelse opfyldes af Georg Mohr opgaverne.

2. Forskningsfeltet skal potentielt være stort.
   Her er Georg Mohr opgaverne igen meget præcise. Opgaverne er designet, så løsningen kan findes indenfor et af følgende specifikke matematiske fagområder:
   Geometri.
   Diskret matematik.
   Talteori.
   Algebra.

   Forskningsfeltet for hver opgave er derfor ikke så bredt, som vi så det for nogle af opgaverne i de forrige kapitler.

   Opgaverne til Georg Mohr er ikke designet til at skulle lægge op til studium af matematiske fagområder, som arrangør Kirsten Rosenkilde, udtaler om en klassisk Georg Mohr opgave (bilag B):

   > *"Man må godt bruge noget teori, f.eks. basale ting som Pythagoras eller basal trigonometri eller sådan nogle helt basale ting. Men man skal helst have ikke brug for avanceret teori, for vi vil egentlig gerne have at det skal være, sådan den matematiske intuition, der skal gøre sig gældende. Selvfølgelig også den matematiske forståelse, men ikke nødvendigvis at man har stort teoretisk kendskab. Så det er sådan det allervigtigste. Og så skal det ikke være standard."*

   Opgaverne er konstrueret til at skulle optræde i en individuel skriftlig prøve og der er derfor under konkurrencen ingen mulighed for samarbejde og for at få hjælp.
   Hvis man bruger disse opgaver som træningsopgaver inden den skriftlige prøve, er der selvfølgelig mulighed for at slå løsningsforslagene op på Georg Mohrs hjemmeside. Dette lægger dog ikke op til studium i bred forstand, såsom at opsøge en grundbog i algebra for at svare på den sidste opgave, men kun til studium af den specifikke løsning.

Både betingelse 2 og betingelse 6 er derfor ikke opfyldt af Georg Mohr opgaverne.
6. betingelse er: Det skal være muligt for eleverne at opsøge viden andetsteds.

3. Eleverne skal selv styre forløbet.
   Da disse er konkurrenceopgaver, som tager udgangspunkt i specifikke matematiske fagområder, er der ikke meget eleverne selv kan styre.
   De kan højst bestemme, om de vil (forsøge at) løse opgaven eller ej og i så fald, hvor længe de vil arbejde med en bestemt opgave inden, de går videre til en anden.

4. Det skal være let at gå igang og stille de første delspørgsmål.
   Dette er let for de første 3 opgaver, men i den sidste opgave, kan der være tvivl om, hvorvidt det først skal overvejes hvilke værdier p kan antage eller hvilke værdier x_i'erne kan antage og det kan være svært at overskue ligningsystemet.

5. Der skal være flere mulige strategier.
   Analysen af geometriopgaven viser, at der i løsningen af en Georg Mohr opgave kan være flere mulige strategier.
   De tre sidste har ikke nogen oplagte alternative løsningsmetoder.

Georg Mohr opgaverne er derfor matematikopgaver i mere klassisk forstand, de er opgaver, der søger et præcist svar ved hjælp af løsningsmetoder, der tilhører specifikke matematiske fagområder.

Denne opgavetype er derfor rigtig god til at undersøge, om eleven har viden eller en intuitiv forståelse af netop det matematiske fagområde den aktuelle opgave tilhører. Intuition kan være en meget god allieret i processen med at løse denne type opgaver, da den kan være med til at opstille hypoteser, der herefter skal bevises eller argumenteres for. Dette kan ses både i løsningen af opgaven i diskret matematik og i talteoriopgaven, hvor man får en række svar, der induktivt giver svaret.
Selv hvis en elev ikke selv kan konstruere et bevis, kan denne elev stadig få fornemmelsen af, at have fundet det rigtige svar.

I det næste kapitel vil jeg, på baggrund af analyserne af Math en Jeans problemerne og dette portræt af Georg Mohr konkurrencen give et bud på, hvad det nye tilbud Matematik for Sjov skal være.

10 Matematik for Sjov - hvad skal det være?

Når man ser på opgaverne, der hører til de to tilbud, Georg Mohr og Math en Jeans, er de meget forskellige med hensyn til, hvilke type opgaver de stiller og hvordan disse evalueres.
Math en Jeans problemerne giver anledning til længere forløb og afsluttes med konferencer, mens Georg Mohr er en konkurrence og derfor benytter opgaver, der skal løses inden for en tidsgrænse.

Gennem analyserne i dette speciale har Math en Jeans problemerne vist sig at være gode studie- og forskningsspørgmål, der hver især lægger op til arbejde med og studium af flere forskellige matematiske fagområder (side 58). Selve strukturen for løsningen af denne type problemer har vist sig at være meget bred, idet problemerne genererer mange grene med underspørgsmål.
Arbejdet med disse spørgsmål giver derfor eleverne mulighed for at udforske forskellige matematiske emner og for at udvikle de tilhørende prakseologier, som de senere kan dele med andre elever, f.eks. ved konferencer eller ved fremlæggelser i klassen.
Analysen af elevarbejdet viste, at eleverne arbejdede akademisk med Den Rejsendes Problem, men at de lagde langt større vægt på forskning end på studium (side 87). Analyserne viste også, at eleverne udviklede både teknikker til specifikke opgavetyper og en teknologi for de problemer, de arbejdede med.

Opgaverne til Georg Mohr konkurrencen viste sig gennem analyserne i kapitel 9 at være matematikopgaver i mere klassisk forstand, idet de knytter sig til et specifikt matematisk område og ikke lægger op til studium. I de 4 analyser kunne det ses, at strukturen for løsningen af denne type opgave ofte kun består af én gren af underspørgmål, som fører frem til et præcist svar på opgaven.

På denne måde har analyserne i dette speciale illustreret, hvad forskellen på en matematisk opgave og et matematisk spørgmål er.
En opgave giver en løsningsstruktur med få grene, mens et spørgsmål giver en bredere løsningsstruktur, med flere forskellige grene af underspørgsmål.

Hvis der skal skabes interesse for et nyt tilbud til danske gymansieelever, skal det være et tilbud, der er anderledes en Georg Mohr konkurrencen, som eleverne allerede kender. Analyserne har vist, at Math en Jeans problemerne er et godt alternativ ud fra de 6 betingelser for gode studie- og forskningsspørgsmål.

Herudover vil jeg i det næste afsnit komme ind på hvilke institutionelle betingelser, der skal tages højde for ved indførelsen af det nye tilbud Matematik for Sjov.

De institutionelle betingelser

Hvis der skal skabes et nyt tilbud i Danmark, bliver man først nødt til at undersøge, hvilke muligheder der er, for at starte et sådant op og hvad lærerne og eleverne ønsker sig.

I det følgende vil jeg beskrive, hvad der kræves af samfundet og gymnasierne for at et nyt tilbud kan startes op, hvad lærerne mener er vigtige faktorer at tage højde for og hvad eleverne har lyst til at deltage i.
Til sidst vil jeg give et bud på, hvad det nye Matematik for Sjov kan være.

Samfundet og gymnasierne

Baseret på informationer om Georg Mohr og Math en Jeans, kræves der følgende for at starte et projekt op og få det til at køre:

Der skal være en økonomisk støtte til tilbuddet, således at der kan bookes lokaler, laves materialer og betales løn til lærerne.
Dette kan ske på tre måder:
Enten kan det financieres uden om gymnasierne, dvs. enten med støtte fra undervisningsministeriet eller via private fonde.
Ellers skal gymnasiernes ledelser stille lokaler og materialer til rådighed og afsætte løn til de lærere, der arbejder på tilbuddet.
Som den tredje mulighed, kan det være en kombination mellem de to forrige.

Der skal være grobund for et samarbejde mellem universiteterne og gymnasierne.
Dette er nødvendigt både for at udvikle opgaver til tilbuddet, men også for at skabe en kontakt, hvor undervisere ved universiteterne kan fungere som konsulenter på forløbet. En konsulent fra universitetet kan involveres på to måder enten i kontakt med læreren, hvor der kan hjælpes med at udvikle ideer til løsninger, eller i kontakten med eleverne for at give inspiration til løsninger og relevans til de problemer, de skal løse.
Hvis en konsulent er med et par gange i forløbet og giver inspiration til eleverne, kan det være, at dette kan være med til at mindske kløften mellem elevarbejde og akademisk arbejde, idet konsulenten kan beskrive sine egne metoder og opfordre eleverne til at foretage både studium og forskning.

For at et nyt tilbud skal blive til et nationalt tilbud, skal gymnasier over hele landet involveres - eller inviteres til at være med. Præcis som det i dag er tilfældet med Georg Mohr konkurrencen.
Et nyt tilbud vil i praksis formentligt skulle starte som pilotprojekt med engagerede lærere på enkelt gymnasier som forsøg. Herefter kan det vokse til et nationalt tilbud. Det er derfor vigtigt, at der udvikles et godt samarbejde mellem gymnasierne, hvilket kræver, at der er matematiklærere på alle de deltagende gymnasier, der har lyst til at involvere sig og har lyst til at deltage i konferencer med andre gymnasier.
En kritisk faktor for at starte et nyt tilbud er derfor lærernes engagement.

Lærerne

Det økonomiske perspektiv for et tilbud bør ikke undervurderes. Det er en vigtig faktor, at der kan findes midler til aflønning af de involverede lærere.
Herudover skal det også være en fagligt velfunderet lærer, som brænder for sit fag og er interesseret i at udforske nye matematiske problemstillinger. Desuden skal læreren være så velfunderet, at han bevarer sin autenticitet og autoritet, selv om hans position i forhold til det matematiske problem bliver at forske i problemstillingen sammen med eleverne. En position der adskiller sig fra den traditionelle lærerposition, idet læreren her som oftest kender svarene på de matematiske opgaver.

På et møde med mine kolleger fra N. Zahles Gymnasieskole, spurgte jeg dem om, hvad de mente, et nyt tilbud skulle indeholde for at tiltrække både dem og eleverne.

- Problemerne skal være nye og spændende, så de kan fastholde alle deltagernes interesse i længere perioder ad gangen. De må også gerne lægge op til kreative løsningsmuligheder.
- Det er godt, hvis problemerne er 'virkelige' problemstillinger, som elever kan forholde sig til, og de må gerne lægge op til ekskursioner eller andre muligheder for at komme ud af klasselokalet.
- Tilbuddet skal ikke stille store krav om forberedelse.
  Det er bedst, hvis læreren kun skal forberede sig en smule og hvis eleverne slet ikke skal lave lektier, da de har rigeligt med opgaver i forvejen.
- Tilbuddet skal være for alle gymnasieelever, dvs. både 1.g, 2.g og 3.g.
- Der må gerne være krav om et afsluttende produkt.
  Det kan f.eks. en prøve, et skriftligt projekt eller en fremlæggelse.
- Der må også gerne skulle evalueres undervejs.
  F.eks. løbende fremlæggelser eller opgaver, der skal løses.

Kort sagt: Spændende 'virkelige' opgaver for alle elever, der kun arbejdes med i de timer man mødes og som afsluttes med et endeligt produkt.

Dette stemmer meget fint overens med, hvad eleverne fra N. Zahles gymnasieskole fremhævede i fokusgruppeinterviewet (se bilag D).

Eleverne

Det, som eleverne havde ideer til, ud over det som lærerne foreslog, var til, hvornår tilbuddet skulle ligge, hvad formålet skulle være og hvordan det kunne startes op.

Med hensyn til hvornår, så sagde eleverne, at det er svært for dem at få tid til aktiviteter efter skoletid, fordi de har mange afleveringer og andre lektier. Derfor skal et nyt tilbud være et tilbud, hvor der ikke er krav om tilstedeværelse ved hver eneste session, især hvis det skal ligge om eftermiddagen. Fokusgruppen syntes, at ideen om samarbejde/konkurrence med andre gymnasier var rigtig god og mente, at det ville få interessen til at stige, hvis der var sociale arrangementer i forbindelse med et sådant tilbud.

Da jeg spurgte fokusgruppen om, hvordan et nyt tilbud skulle evalueres opstod følgende ture (se bilag D):

21. D: Folk skal have noget ud af det. Men de ved ikke, hvad man får ud af det fagligt. Man skal deltage for at få en bedre karakter.

22. C: Hvis der er kredit for det, så kommer alle dem der ikke rigtig er interesserede, men bare vil have ekstra kredit og så bliver det ikke sjovt for dem, der er interesserede.

23. A: Så man skal kun få kredit, hvis man har gennemført. Fed følelse af gennemførelse, som står for evigt på ens eksamensbevis.

24. C: Men så bliver det igen noget man SKAL komme til. Det er bedre hvis det er frivilligt.

25. D: Ok, hvis det kan få folk til komme.

Eleverne indikerer her, at for at de har lyst til at deltage i et frivilligt matematisk tilbud, skal det komme dem til gode, enten ved at de bliver bedre i den almindelige undervisning eller ved, at deres deltagelse bliver bemærket på deres eksamensbeviser. De er dog godt klar over, at hvis deltagelse i sådan et tilbud bliver noteret på eksamensbeviset, så går det ud over frivilligheden.

Det må derfor være vigtigt at tydeliggøre for eleverne, at et nyt fritidsmatematisk tilbud kan hjælpe dem til at blive bedre i den almindelige undervisning.
Det kan hjælpe dem til at blive bedre både til den almindelige opgaveløsning og til at strukturere, argumentere og ræssonere matematisk.
Hvis projektet lægger op til studium, kan det desuden også hjælpe dem til at forbedre deres studiefærdigheder, dvs. de bliver bedre til både at opsøge viden, identificere relevante kilder og til at kunne opnå ny viden ud fra disse kilder.

Når det kom til, hvordan projektet kunne startes op, havde eleverne følgende ide:
De foreslog, at man på gymnasiet brugte en eller flere af fleksdagene på at dele eleverne op i forskellige fag, således at hvert fag skulle lave et forslag til dagsprojekt, som eleverne herefter kunne tilmelde sig til at arbejde med på fleksdagen.

De, der meldte sig til matematikprojektet, ville derefter have en hel dag til at lave noget anderledes og spændende matematik i samarbejde med en gruppe, der også var interesserede i matematik, uden at det lå ud over skoletiden.
Det skulle dog være en betingelse for brug af en fleksdag, at alle elever skulle melde sig til et fag, så ingen fik fri, mens andre arbejdede.

Jeg mener, at dette er en god ide til opstartsfasen for et nyt tilbud.
På denne måde vil eleverne i gymnasiet stifte bekendtsskab med tilbuddet og opleve de positive effekter af et alternativt forløb, uden at det krævede, at de brugte deres fritid. Dette hænger også godt sammen med, at eleverne påpegede, at for at lokke dem til, kræver det en massiv omtale og information, da de sjældent melder sig til noget, de ikke ved, hvad er og som de ikke har hørt om.

Konklusionen på fokusgruppeinterviewet må derfor være, at det skal være meget tydeligt for eleverne, at deltagelse i det nye tilbud, vil gøre dem bedre både til matematik og til at studere. Desuden kan det være en god ide, at lade eleverne blive bekendte med tilbuddet i skoletiden, inden man starter det som fritidsaktivitet.

Med baggrund i de forrige afsnit og teorien om S-&F-forløb, vil jeg nu komme med et bud på, hvad det nye tilbud Matematik for Sjov kan være.

Matematik for Sjov

Gennem dette speciale har jeg identificeret mange faktorer, som kan være vigtige at inddrage i det nye tilbud Matematik for Sjov.
Derfor har jeg følgende bud på, hvad det nye tilbud kan indeholde.

Tilbuddet skal være et alternativ til Georg Mohr konkurrencen.
Ifølge teorien og analyserne kan S&F-forløb give anledning til, at eleverne bliver engagerede og interesserede i faget, fordi matematikken gennem forløbet bliver gjort levende og relevant.

For at eleverne, der deltager, skal arbejde med både studium og forskning, foreslår jeg derfor, at man tager udgangspunkt i Math en Jeans opgaverne, da disse stiler efter at opfylde de første 5 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgsmål og har vist sig gennem analyserne (kapitel 6 og 7) også at kunne give anledning til studium.
Dette kræver dog, at arrangørerne/lærerne på det nye tilbud, gør det klart for de deltagende elever, at det er en del af forløbet at opsøge informationer om de givne problemstillinger, dvs. at foretage studium.
Dette kunne f.eks. gøres ved at vejlede i kildesøgning og inddrage et kildeark som en didaktisk teknik. På kildearket skal eleverne udfylde, hvilken kilde de har deres viden fra og hvilken viden, den kilde har givet dem.

I analysen af elevarbejdet (side 85) beskrev jeg to didaktiske teknikker: Hypotesearket og de løbende fremlæggelser, som jeg mener kan være gode at inddrage i det nye tilbud. Analysen viste, at hypotesearkene skabte overblik over forløbet og kunne være en hjælp til eleverne igennem institutionaliseringsmomentet og evalueringsmomentet, mens de løbende fremlæggelser skabte en sund konkurrence og støttede elevernes udvikling af teknologier og teknikker.

Forløbet, som eleverne i de to 1.g klasser var igennem, for Den Rejsendes Problem, blev afsluttet med en skriftlig rapport og aflevering af nogle hypoteseark.
Baseret på de ovenstående afsnit, vil jeg dog foreslå, at hvis der er flere deltagende skoler i tilbuddet Matematik for Sjov, så skal der som afslutning på forløbet afholdes konferencer, hvor eleverne kan præsentere deres arbejde.
Dette foreslår jeg, fordi en konference er et socialt arrangement, hvor deltagerne har mulighed for at møde elever fra andre skoler, der deler deres interesser og fordi det skaber et forum, hvor teknik og teknologi kan blive præciseret.
For at inddrage elementer af konkurrence mellem gymnasierne, som kunne være med til at fastholde elevernes interesse, kunne der udloves en præmie til den bedste præsentation.

Det nye tilbud Matematik for Sjov er derfor:

- **Opgaverne:** Baseres på Math en Jeans problemer, da disse har vist sig at være gode studie- og forskningsspørgsmål.
- **Didaktiske teknikker:** Hypoteseark, kildeark og løbende fremlæggelser på de deltagende gymnasier.
- **Tidspunktet:** I første omgang i skoletiden som introduktion, senere som frivillligt eftermiddagstilbud.
- **Evalueringen:** Elevpræsentationer af opnåede resultater på en konferrence.
- **Underviserne:** Lærere der har lyst til og som kan lide at arbejde med udfordrende problemer.
- **Konsulenter:** Gerne fra universiteterne.
  I første omgang som matematiske inspirationskilder og til at give indblik i både studium og forskning, senere også til at hjælpe med konstruktion af nye problemer.
- **Økonomi:** Gymnasiernes egne bidrag og støtte fra undervisningsministeriet eller andre eksterne muligheder.

11 Konklusion

I dette speciale har jeg undersøgt forudsætningerne og mulighederne for, hvordan en alternativ tilgang til frivillig matematik på gymnasialt niveau kan gøre matematikken sjov, interessant og relevant for eleverne.

Gennem undersøgelser af projektet Math en Jeans og af Georg Mohr konkurrencen fremgik det, at disse to tilbud inddrager meget forskellige typer matematiske problemer. Math en Jeans problemerne opfylder de 6 betingelser for et godt studie- og forskningsspørgmål og er problemer, der kan lægge op til akademisk arbejde indenfor flere matematiske områder. Georg Mohr opgaverne er opgaver i mere klassisk matematisk forstand, idet de ligger indenfor specifikke matematiske områder og kræver præcise svar.

For at mindske kløften mellem matematikkens modalitet i elevarbejdet i gymnasiet og som forskningsområde er det vigtigt, at eleverne kan arbejde med begge typer af problemer for at udvikle deres matematiske evner og intuition. Georg Mohr er som allerede eksisterende tilbud kun for de få. Der bør derfor være grundlag for at starte det nye tilbud Matematik for Sjov, hvor der skal arbejdes med spørgmål af samme type som i Math en Jeans.

Elevarbejdet med Math en Jeans-spørgsmål viste, at den alternative tilgang til matematikken fik eleverne til at arbejde akademisk med problemstillingerne. Dette foregik hovedsageligt gennem forskning, der krævede, at eleverne arbejdede kreativt og benyttede logik og intuition.
Et nyt tilbud skal derfor sørge for at opfordre eleverne til også at foretage studium af de givne problemstillinger gennem konstruktion af didaktiske miljøer.

Det blev tydeligt i undersøgelsen, at lærerens rolle bliver en anden, når der arbejdes med matematiske spørgmål af denne type. Læreren får i et Math en Jeans forløb en dobbeltrolle som henholdsvis kilde til viden og som underviser, der benytter sig af didaktiske teknikker.
Lærere, der har lyst til at involvere sig i det nye tilbud Matematik for Sjov, skal derfor have en god fornemmelse for, hvornår der er brug for hvilken rolle og skal derudover også kunne bevare deres autenticitet og autoritet, også når deres position ændres, så de foretager akademisk arbejde sammen med eleverne.

Som en del af det nye tilbud bør der arrangeres konferrencer, hvor de deltagende elever har mulighed for at møde andre, der har samme interesser og for at opleve andre spændende matematiske problemer og løsninger, der måske kan inspirere dem til selv at prøve kræfter med alternative metoder.

Et nyt frivilligt tilbud af denne type opfylder elevernes ønsker om alternative matematiske udfordringer og fællesskab. Samtidig vil et sådant tilbud også være med til at opfylde samfundets behov for stadigt dygtigere elever og studerende med matematiske kundskaber.

Litteratur

[Artigue og Winsløw, 2010] Artigue, M. and Winsløw, C.: "International Comparative Studies on Mathematics Education: A Viewpoint From the Anthropological Theory of Didactics." Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol., n° pp. 1-35

[Barbe et al., 2005] Barbe, J.,Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J.: "Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The case of limits of functions in spanish highschools." Educational Studies in Mathematics (2005): 235-268

[Barquero et al., 2007] Barquero, B., Bosch, M. and Gascón, J.: "Using Research and Study Courses for Teaching Mathematical Modelling at University Level." CERME 5 (2007): 2050-2059

[Brousseau, 1997] Guy Brousseau: "Theory og Didactical Situations in Mathematics", Kap.1, Kluwer Academic Publishers, 1997

[Brousseau, 1999] Guy Brousseau: "Research in mathematics education: observation and . . . mathematics", in: I. Schwank (Ed.) European research in mathematics education, vol. 1, pp. 35-49. Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

[Burton, 2004] Leone Burton: "Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics", Kluwer Academic Publisher, 2004

[Cartier et al.] Lea Cartier, Paul Dorbec, Eric Duchêne, Nicholas Giroud, Julien Moncel og Cécile Ouvrier-Buffet: "Towards a characterization of research situations for the classroom analysis of a case study Specifities for learners and teachers" findes på http://www710.univ-lyon1.fr/ẽduchene/cv-Eric_fichiers/Article_final.pdf

[Chevallard, 2005] Yves Chevallard: "Steps towards a new epistemology in mathematics education." I M. Bosch (ed.) European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 21-30. Barcelona: Universitat Ramon Llull. Findes på: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=95

[Forst, 2006] Gunnar Forst: "Noter til kombinatorik og grafteori.", Matematisk Afdeling 2006, findes på http://www.math.ku.dk/noter/filer/dis1-01.pdf

[Hansen, 2009] Britta Hansen: "Didaktik på tværs af matematik og historie." IND's studenterserie nr. 10

[Winsløw, 2007] Carl Winsløw: "Didaktiske Elementer: En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik.", biofolia, 2. oplag 2007.

[Winsløw et al.,2011] Carl Winsløw, Yves Matheron og Alain Mercier: "Study and research courses as an epistemological model for didactics", 2011, Manuskript under bedømmelse.

Bilag

A Noter fra besøg på Prins Henriks Skole

- How does the Math en Jeans project run on prince Henriks School?
  They get the subjects from the university in September and they are visited by a professor from the university who functions as a consultant twice a year.

  The students work on the project from September to May once a week.

  They volunteer for the project in September and bind themselves to working on the projects once a week until May where they have to present their findings at a conference in Vienna.

  The French school in Copenhagen cooperates with other French schools outside France, because the math en jeans project has gotten too big in France.

  Normally they confer with another school working on the same project during the period of exploration in order to present partial results, to inspire each other and to practice presenting a mathematical problem. This is usually done by videoconference.
  But this year they were paired up with Abu Dhabi and due to the time difference it hasn't been possible to arrange a videoconference.

  In Vienna in May the students will present their own ideas and listen to others giving their account of entirely different problems. During the presentation the students also have to account for the mathematics used in their partial solution of the problem.

- How many teachers are involved with the project?
  The project involves two teachers per week.
  At every math en jeans session at least two teachers will be present. And this is for every school.

  The teachers also functions as consultants. They summarize the students' ideas and key points and they help them stay on topic. The teachers never teach during these sessions, there is no right way to solve the problems and instead they have to cooperate with the groups and bounce ideas around. They make no preparations prior to introducing the assignment - they know as much as the students when the problem solving is initiated.

  One of the challenges for the teachers is that sometimes they have to simply admit that they don't know and tell the students to leave their idea for a while, try once more to figure it out on their own or to leave it all together and try out another angle to solve the problem.

- How many students?
  This year they have 3 groups of 3-4 attending the math en jeans sessions.

This makes the student-teacher relationship closer and there is no long wait for help.

There is a lively discussion of the problems in every group, between teacher and students and between the teachers.

- What sort of student participates in math en jeans?
  The students attending math en jeans are between the ages of 12 to 15. They are students who like to do math and like to work with problems that require logic, intuition and creativity. These students are not necessarily good in school, but they like the alternative and extremely free tasks of math en jeans.
  They are very intuitive and most of them can't explain the math they use when they solve a problem, but in math en jeans they have to figure out how it works in order to explain the math at the final presentation.

- What characterizes a math en jeans problem?
  It may go in many different directions. That is all up to the participating students.

  This season they are working with games:

  - Pool: What angles do you have to hold to make the ball bounce of the edge once, twice and so on?
    What angles do you have to hold in order to sink the ball in the holes?
    What if there are obstacles like other balls on the table?
  - Chess: The movement of the knight. How do you move the knight around the chessboard in order for it to stay once on every square?

- How do you introduce the different assignments?
  The problems are posed as a text which they acquire from the university and the teachers only pass copies of the text around to the students.
  All interpretation is left up to the students. As Geraldine said: *"It is very free"*.

- How often are you visited by the university consultant?
  They are visited twice during the season.
  The consultant helps the students by explaining the 'real' math which they are working with and may contribute with new perspectives.

- Which practical difficulties have arisen in connection with math en jeans? And how did you solve them?
  The distance/time-difference problem was solved by not having any video-conferences.

  Not everything can be calculated by hand, so they involve Geogebra and other computerprogram that may help their understanding and ease their calculations.
  These uses are often initiated by the students.

Egne observationer:

Mens jeg ser med over skuldrene på en af grupperne, der arbejder med hestens bevægelser på skakbrættet, er der en elev der endelig får et program, han har arbejdet på længe, til at virke og han reagere ved at juble, som om han havde scoret det afgørende mål i en vigtig fodboldkamp.

Gruppen har lavet et program, der fortæller dem, hvor de skal rykke hesten hen for at der er færrest mulige træk næste gang.

5		c		a	
4	g				e
3			X		
2	h				f
1		d		b	
y/x	1	2	3	4	5

Hestens træk: Fra X til:

a: x+1 og y+2

b: x+1 og y-2

c: x-1 og y+2

d: x-1 og y-2

e: x+2 og y+1

f: x+2 og y-1

g: x-2 og y+1

h: x-2 og y-1

Ved kanterne er antallet af træk mindre. En af drengene udtaler:

> *"Det var ikke særlig spændende i starten, hvor vi bare prøvede os frem på et 8×8 bræt med en hest."*

Og

> *"I starten lavede de [den anden gruppe med billard] alt muligt, der så klogt ud, mens vi bare rykkede rundt med skakbrikker, men nu er vi sejere."*

Der er altså en sund konkurrence også mellem grupper, der ikke arbejder med det samme problem.

B Interview om Georg Mohr

- Hvordan forløber Georg Mohr konkurrencen?
  Det starter med 1. runde i november: en multiple choice prøve.
  Så er der 2. runde i januar: En 4 timers prøve.
  To vinderseminarer i foråret.
  NMC i starten af april
  Udtager til IMO og Baltic way i efteråret.

- Hvad underviser I i?
  De 4 forskellige discipliner: Algebra, talteori, geometri og diskret matematik.
  Projektet er godt også for underviseren, som bliver udfordret.

- Hvordan arbejder I med eleverne?
  Der er to lærere til et hold med 15 og 1 lærer til et hold på 4.
  Den store gruppe arbejder alene eller sammen to og to og skal ind imellem aflevere til læreren, som retter løbende.
  Normalt er der også et teoriforløb, men fordi niveauet er spredt på det store hold, regnes der i stedet.

  Der bliver løst opgaver fra 9.00 til 12.00 - Der er ingen indlagte pauser, det styrer de unge selv - men der er meget roligt i lokalet og dyb koncentration.

  Tempoet på det hold, der har været med længe og arbejder med geometri, er enormt hurtigt. Se også programmet for weekenden.

Matematisk program for NMC-træning 1.-4. april 2011.

	Nye deltagere	Nicklas, Rikke, Tine, Thomas og Lasse J	Asbjørn, Anders, Mathias, Mathias.
Fredag 19.30-21.30	**Ligninger** Opgaveløsningsstrategier. (Noter) Opgaver fra noter. Ekstraopgaver til dem der så det sidste år. *Medbring **Ligninger** fra hjemmesiden*		**Algebra og talteori** Opgavesæt
Lørdag 9.00-12.00	**Geometri** Opgavesæt i geometri. *Medbring **Geometri 1** og **Geometri 2** fra hjemmesiden.*		
Lørdag 13.00-15.30	**Funktionalligninger.** Opgaveløsningsstrategier. Opgavesæt.		**Funktionalligninger** Opgavesæt
Lørdag 16.30-18.00	**Orienteringsløb**		
Lørdag 19.00-21.00	**Uligheder Q-A-G-H** Undervisning i Q-A-G-H ulighederne. Opgaver.	**Uligheder** **Cauchy-Schwarz og Jensen** Eksempler. Opgavesæt.	Blandede opgaver som skal afleveres skriftligt
Søndag 9.00-12.00	**Talteori** Flere niveauer: Kap 3-5 i Talteori, Ligninger og det der ligner, Primfaktoropløsning og divisorer, Følger og den kinesiske restklassesætning. *Medbring noter i talteori på det niveau du vil arbejde med.*		**Geometri** Opgavesæt *Medbring noter om affine transformationer.*
Søndag 14.00-17.00	**Kombinatorik** To niveauer: Kombinatorik 1, opvarmningssæt, opgaver fra noter. Kombinatorik 2, opgaver fra noter *Medbring **Kombinatorik 1** og **Kombinatorik 2***		**Kombinatorik** Opgavesæt i kombinatorik
Mandag 9.00-13.00	**Den Nordiske Matematik-Konkurrence**		

Figur B.1: Programmet for vinderseminaret.

- Hvem er det der deltager? På vinderseminaret - 19 i alt: To piger og sytten drenge.

  1. Der er mange tusind der deltager i første runde. Den der multiple choice. Fordi der er mange der kan være med. Og der er også mange helt almindelige elever, som man kan sige: Vi ved godt, de ikke har en chance, men som alligevel kan finde ud af lidt kort og løse dem. Så på den måde bliver det lidt bredere. Der er også nogen gange studiekredse på gymnasiet, på nogle gymnasier, hvor de...
  2. På mit gymnasium skal alle på A- og B-niveau deltage. Så man også snakker om noget anderledes i timerne.
  3. Der er ved at blive produceret to materialer: Det ene er en udgivelse af de sidste 20 års Georg Mohr opgaver og det andet er et hæfte til både lærere og elever, hvor man simpelthen kan træne sådan nogen små opgaver, men på et niveau, hvor almindelige dygtige gymnasieelever kan være med.
  4. Når vi holder 2. runde, så er der ikke længere noget for de ikke udvalgte. Men der er en masse camps.

- Hvordan er fordelingen af årgange? Og om 1.g'erne kan følge med.

  1. Ja, det er både 1. 2. og 3.g vi har her. Vi har kun en enkel 1.g'er i år. Desværre i år, har vi faktisk kun seks 1. og 2. g'er og vi skal udtage 5. Det er lidt ærgerligt. Vi har nogle gange haft 11. I år har vi haft meget få.
  2. Mange af de 3.g'er der er her, har heller ikke været med tidligere, der er selvfølgelig nogen. Vi har 9 her, der har været med sidste år. Så det er jo selvfølgelig også mange.
  3. Der er også noget med opgaverne ikke, altså hvordan... Og jeg tror måske også at opgavesættet i år i Georg Mohr konkurrencen, der havde 2. og 3. g'erne lidt en fordel i forhold til 1-g'ere. Og det er svært når vi laver sådan et sæt og netop, som det jeg sagde før, vælge de der opgaver, så de er rigtig gode. Og der var måske en, hvor jo bedre forståelse man havde af funktioner, jo nemmere klarer man sig. Og en af grundene til vi også gerne vil vælge at man ikke skal bruge for meget teori. Det jo også at vi faktisk helst ikke vil stille 1.g'erne meget dårligere. Selvfølgelig er de ikke lige så gode. Fordi helt klart, når man har haft 2 års undervisning, så bliver man bedre lige meget hvad.
  4. Men det skal helst ikke være sådan, at det falder og står på et eller andet, som de bare ikke har lært. Altså, en ting er, at de bliver bedre til matematik, men det er svært at undgå. Fordi det er svært at stille opgaver der ikke er sådan helt, som jeg sagde, man skal få en god ide og stadigvæk ikke bruger for meget teori.

- Hvem er det der går videre til 2. runde?

1. Der deltager ca. 1000 i 2. runde, det har vi varieret lidt fra år til år. I år var det ca. 800 og sidste år var det ca. 1200. Men så vælger vi mellem 25 og 30, der går videre til vinderseminaret [afgjort af pengene] og derefter vælger vi maks. 20 her. Og grunden til at vi vælger maks. 20 her, det er fordi, det er den nordiske matematik konkurrence, der må vi stille med højst 20. Så det er en begrænsning. Og det er jo sådan i hele norden...
2. Der vælges ud efter point. Vi har Georg Mohr konkurrencen, men til vinderseminaret har vi en afsluttende prøve. Og der kigger vi simpelthen på begge konkurrencer og så vælger vi 20. Det var faktisk sådan her, at denne gang der valgte vi 18 og så var der 3 der stod lige og så skrev jeg til dem, at har I lyst til at deltage i det her. Hvis I alle sammen siger ja, så trækker vi lod om de to pladser. Så var der så en der meldte fra, fordi han havde travlt med en masse andre ting. Og så var det så de to sidste, der så kom med. Fordi vi sagde, I står lige på point og det er det, der ligesom afgør det. Så det er de to konkurrencer.
3. I IMO der deltager 6 og det er igen, hvert land må stille med 6. Så har vi Baltic Way i efteråret, det er en hold konkurrence, vi skal stille med et hold på 5. Og der er det så kun 1. og 2.g'er. Der har vi... Man skal jo egentlig træne sig i at regne opgaver ligesom nu [til nordisk], men i efteråret, hvor vi så har to træningsweekender kun for baltic way holdet, der laver vi selvfølgelig mere og mere, at man skal sidde som et hold. Så man skal selvfølgelig stadig kunne alt det man træner til Georg Mohr. Men det der med at kunne sidde som hold. Så der får de selvfølgelig træning i forskellige emner i efteråret, men der har vi også at man siger, nu får i et opgavesæt med 20 opgaver, ligesom til konkurrencen, nu skal I sidde og arbejde sammen om det. Og i det hele taget arbejder de meget sammen. Vi udtager dem stadig på point, ikke på om de kan samarbejde, det er meget svært at vurdere. Og man kan godt sige at til baltic way, selvom der er 20 opgaver, at nogen måske sidder i virkeligheden og regner alene meget af tiden. Men nogen kan jo slet ikke diskutere det, men vi udtager dem altså på point. Vi udtager heller ikke, det kunne man jo også sige, at hvis vi skulle have et hold der egentlig kunne lidt af hvert. Det gør vi faktisk heller ikke. Det er måske også fordi det er svært at vurdere. Det er mere objektivt.

- Findes der en 'klassisk' Georg Mohr opgave og i så fald, hvilken egenskaber har den?

  1. For det første kan man sige, at hvis det er en rigtig Georg Mohr, altså Georg Mohr niveau, den vi kalder Georg Mohr konkurrencen, så vil jeg sige at så kan man faktisk helst ikke bruge alt for meget teori. Man må godt bruge noget teori, f.eks. basale ting som Pythagoras eller basal trigonometri eller sådan nogle helt basale ting. Men man skal helst ikke have brug for avanceret teori, for vi vil egentlig gerne have at det skal være, sådan den matematiske intuition, der skal gøre sig gældende. Selvfølgelig også den matematiske forståelse, men ikke nødvendigvis at

man har stort teoretisk kendskab. Så det er sådan det allervigtigste. Og så skal det ikke være standard. Det skal ikke være en opgave, så man siger: nåh ja, det er jo en standard opgave, man har set det 100 gange før. I hvert fald ikke på det niveau. Det skal helst være sådan at der er en eller anden... Man skal en eller anden god ide og følge den. Og selvfølgelig er det en ikke rigtig god opgave, hvis man kan få flere forskellige ideer og nå samme mål ikke. Men det vil jeg sige, det er en god Georg Mohr opgave. Hvis man kan det. Og skal den jo stadig... Det er niveauet ikke, den må ikke være for nem og den må heller ikke være alt for svær.

2. Der er 5 opgaver til 4 timer. Og det er jo sådan at den første opgave, men det er jo igen hvem man er ikke. Der mange rigtig dygtige gymnasieelever der regner den første opgave og ikke får lavet ret meget mere. Og det kan godt være, at de faktisk har været $1\frac{1}{2}$ time om at regne den, men det er sådan set fint nok. Så det må godt tage lang tid. Men hvis man er blandt de allerbedste, så skal den første kunne regnes hurtigere ikke. Ellers når man det ikke. Så det kommer an på hvem man er. Men det er jo svære opgaver og opgave 1 er jo også en svær opgave. Så jeg plejer at sige, at hvis man deltager og har kunnet regne opgave 1 rigtig, så er det sådan set fint. Og selvfølgelig er det endnu bedre hvis man så har regnet mere, men de er svære. Så de må ikke være for nemme, de skal selvfølgelig heller ikke være umulige. Det dur ikke, at der ikke er nogen der regner dem blandt alle deltagerne. Det ville være lidt surt.
3. Det er gymnasielærere eller tidligere Georg Mohr vindere, der laver opgaverne.

- Hvordan skal vi få resten af Danmarks ungdom til at interessere sig for matematik?
  Måske involvere flere gymnasielærere, give dem små opgaver de kan gennemgå i timerne. Det er lidt nemmere end hvis man selv skal ud og opfinde alting.

C Interview med deltagere i Georg Mohrs vinderseminar

Dette er et interview med tre af deltagerne ved vinderseminaret efter Georg Mohr konkurrencen.
De tre elever kaldes A, B og C, mens intervieweren kaldes I.

- Hvad kan I godt lide ved matematik?

1. A: For mig er det i hvert fald den der logik og den der spontanitet som... Altså nogen gange så kan man bare se det. Så er det helt vildt fedt. Det tror jeg mest er det.
2. B: Det der med at der er ét svar. Jeg gider ikke sådan en tvetydighed og det kan måske også være. Det der med at det er logisk, at det ene skal følge af det andet og ellers så gælder det slet ikke.
3. C: Altså, jeg tror i virkeligheden, jeg godt kan lide, når det bliver lidt kreativt. Når man skal til... Altså det med at man skal sidde og tænke over og finde... Finde hvilken af den milliard veje der er, man skal bruge. Og så er det bare generelt sjovt og sidde og tænke længe over noget og så når det endelig lykkes, så er det, så er det dejligt. Sådan er det jo med alle ting.

- Hvad kan I godt lide ved Georg Mohr?

4. A: Matematik. Og så er der en masse der er gode til det. Det har jeg sådan aldrig oplevet i mit liv før måske. Det er sjovt at være sammen med nogen der er ret skarpe.
5. C: Ja, man kan jo sige at undervisningen her og arbejdet i det hele taget det er jo noget mere seriøst, end det er i skolen. Man lærer noget her. Det er rart.
6. B: Altså her skal man bare sådan set bruge sin hjerne. Når man sidder i matematik undervisningen, så skal man jo bare, man skal regne. Det er det. Altså man kan ikke... Man skal næsten ikke tænke over noget. Og man kan bruge lommeregneren til det hele. Det synes jeg er ret slemt på en eller anden måde.
7. C: Enig.
8. B: Det er bare virkelig kedeligt. Og her får man lov til sådan at udvikle noget selv på en eller anden måde.
9. A: Det er også lidt derfor at trigonometri i gymnasiet er forfærdeligt. Der sidder du bare nå: Der var lige ti trekanter og så... Taste, taste. Det bliver nok sjovere senere hen.

- Hvordan er det at deltage i Georg Mohr arrangementer?

10. C: Ja, det skide hyggeligt. I nat der sad... Eller i går aftes der sad vi deroppe til det sådan set blev nat. Vi sad og legede Meyer indtil kvart over tolv. Så det er meget skægt.
11. B: Altså sidste år, der ved jeg også at kl. blev tre, så man kan sige det går ikke stille for sig når...
12. C: Det var den sidste nat, var det ikke?
13. B: Jo. Det var lige inden terminsprøven.
14. C: Vi sad og spillede kort. Selvfølgelig et meget intelligent kortspil, meget logisk krævende, vi spillede 'Røvhul'.
15. A: Jeg synes også, at der er en masse dejlige mennesker egentlig. Det er nice.
16. B: Det er bare så rart, at der er nogen der forstår at man godt kan lide matematik.

- Hvilke 3 ord vil I bruge til at beskrive Georg Mohr?

17. B: Udfordrende i hvert fald.
18. C: Totalt ultra blæret. Lærerigt.
19. B: Frustrerende faktisk også, når man ikke kan finde ud af det. Det er frustrerende i sig selv, at jeg er nødt til at få hjælp. Det er både det at jeg ikke kan løse opgaven og at jeg så skal have hjælp til den i stedet for. Jeg kan da godt få hjælp til en opgave, men så er jeg stadig ikke tilfreds med det.
20. C: Hårdt. Sjovt.
21. A: Inspirerende.
22. C: Man vil jo gerne selv kunne det, det er jo klart, men det er jo en selv der bestemmer hvornår man beder om hjælp. Man kan jo bare sige nej, nu... Nu gør jeg det selv. Og så får man den nok løst engang. Jeg har engang siddet med en opgave i et halvt år fordi jeg ikke gad og søge hjælp nogen steder.
23. I: Så i er også stædige når I er her?
24. C: Jeg er i hvert fald.
25. B: Altså ja og så bliver jeg bare endnu mere irriteret på mig selv over, at jeg stadig ikke kan finde ud af det.

- Hvad skal I bruge matematik til I fremtiden?

26. B: Jeg vil gerne studere matematik næste år i København.
27. C: Det samme her, men i Aarhus.
28. A: Jeg ved det så ikke endnu. Men jeg er også 1.g'er.

- Hvordan skal vi få resten af Danmarks ungdom til at interessere sig for matematik?

    29. C: Kage.
    30. B: Det er rigtig svært faktisk.
    31. A: Det ved jeg ikke. Gøre det mindre regning måske. Ja, det tror jeg faktisk slår glæden ihjel, at man bare sidder...
    32. C: Og vis at det giver mening. I stedet for bare at proppe en masse informationer i hovedet af folk, så vis dem at det faktisk giver mening og så få alle med på den måde, i stedet for udelade alle de der svære beviser, så tag beviserne stille og roligt og vis at der er så simpelt her.
    33. A: Netop også det jeg føler er, at det er logisk og intuitivt op til måske 3. klasse eller sådan et eller andet og så derfra, så får man bare smidt en hel masse i hovedet, så er det meget meget sværere at lære det. Så man burde bare blive ved med ligesom og køre på det folk godt kan egentlig.
    34. C: Lær folk at finde frem til formlerne i stedet for. Helt fra starten, lad folk lære selv og finde ud af det. Ja, det vil nok gå langsomt i starten, men jeg tror også...
    35. A: Men så er det lettere at få den der eksponentielle læringskurve eller et eller andet.
    36. C: Ja, ja, lige præcis.
    37. B: Jeg tror bare ikke, det er alle, der vil sådan få gavn af det alligevel. Jeg tror da stadig der er nogen...
    38. C: Der vil altid være nogen, der ikke kan lide det.
    39. B: Der er nogen der ikke tænker logisk sådan rigtigt og dem får man aldrig med. Det er dem, der slet ikke synes det er sjovt.
    40. C: Det er jo klart. Hvis ikke man synes det er sjovt, så skal man jo heller ikke. Så er det jo ikke det man skal. Der er nok også bare et tidspunkt, hvor de fleste mennesker bare siger om mange ting: Det her det er ikke sjovt. Især de ting de skal, altså. Når du når til 7. klasse, så vil over halvdelen jo altid sige: Det her, det er kedeligt.
    41. A: Det med at folk de hopper af, det er vel også ligeså meget i takt med at niveauet det stiger, så det er jo helt naturligt, at der er nogen der falder af der fordi, hold kæft hvor ville jeg da også hade dansk, hvis ikke jeg kan stave.
    42. B: Det er også rigtig svært fordi at når det er i folkeskolen, hvor det ikke er alle der går videre i gymnasiet, så skal det jo være ret praktisk, altså sådan at man skal kunne bruge det [matematikken] bagefter. Og det er ikke det sjove [matematik], altså det er det jo ikke. Så det er måske også derfor, at dem der ikke går i gymnasiet skal kunne bruge matematikken senere, at...
    43. I: Så måske skulle det todeles: i anvendt og logisk.

44. A: Nu siger du det, som jeg faktisk er ret meget fortaler for: en niveaudeling. Det ville måske være smart, fordi altså, nu ved jeg af personlig erfaring at det er ulideligt at gå i folkeskolen og ha' matematik, hvis man er nogenlunde god til det.
45. C: Altså jeg tror, angående det der med at skulle anvende det, der er det jo også, hvis vi kigger på hvad der er mest praktisk at kunne, der er det jo også praktisk selv at kunne tænke sig frem til, hvordan anvender jeg matematik til at løse det her. I stedet for at man husker en eller anden formel, man engang har lært i sjette klasse, når man nu står nede i brugsen og handler ind som tyveårig, at man så har lært noget basisviden inden for matematik og har nogen helt basale redskaber til at anvende matematikken og sige ok, det er nok sådan her det hænger sammen.
46. B: Men hvis man nu ikke kan det. Altså det er jo også et problem. Hvis man virkelig er så dårlig til matematik, at man lige netop kan huske nogen formler og det er sådan det.
47. C: Der var min pointe bare, at jeg tror, så kan du jo ikke huske dem efter tid nok. Så det er i hvert fald også hvad jeg oplever. De folk der er umiddelbart dårlige til matematik, de kan jo ikke huske det der, når først de lige er ude af det. Når først de er ude af undervisningssystemet, så er det jo væk og så aner de ikke, hvordan man gør de mest simple ting.
48. A: Det jeg tror man egentlig vil bruge, der måske er lidt avanceret, det er måske statistik, altså gennemsnit og sådan noget. Og så procentregning, jeg kan ikke rigtig se hvad man ellers sådan skulle bruge, der ikke er helt vildt simpelt.
49. C: Min pointe er sådan set, at det er bedre at være på bunden, men selv kunne klatre op, end det er at man når et trin op og så kommer man aldrig videre. Men det er da et svært spørgsmål.
50. A: Altså hvis du er så dårlig til matematik. Hvorfor skulle man så have interessen for at kunne lære det og udvide og tænke sig frem til det selv?
51. C: Måske fordi altså, nu snakker vi om, når det skal anvendes?
52. A: Ja.
53. C: Fordi man har brug for det. Altså, det er ligesom, jeg har ikke interesse for at løbe, men hvis jeg har brug for at nå hurtigt frem, så gør jeg det alligevel. Altså på den måde kunne det jo være, der var nogen der også ville bruge matematikken. Fordi at de havde brug for det.
54. A: Men ville det så ikke være nok med bare formlerne?
55. C: Der er det min påstand er: Du glemmer formlerne når du er ude af uddannelsessystemet, hvis du ikke interesserer dig for det, men derimod, så tror jeg mere... Hvis du har fået redskaberne til at finde frem til ting, det vil sidde dybere i dig. Det vil du bedre kunne bruge til at finde frem til noget.

56. A: Så lidt mere problemløsning ind over det.
57. C: Ja, og mindre bare regning. Meget det der med, hvordan kommer vi egentlig frem til tingene. Ikke, sådan her gør vi det. Hvordan kommer vi frem til, hvad vi vil gøre?

- Hvor meget tid bruger I på Georg Mohr i hverdagen?

58. A: det kommer i perioder, synes jeg. Altså nogen gange, så sidder jeg en hel weekend og så resten af ugen i timerne og sådan noget. Så sidder jeg bare og laver matematik hele tiden. Og andre så er det sådan, nej... Det var ikke lige i dag.
59. C: Jeg bruger alt for lidt tid på det. Jeg synes ikke, at jeg har tiden og overskuddet i hverdagene. Der er specielt mange afleveringer lige pludselig, der bare trykker. Og der er selvfølgelig også andre ting man jo gerne vil. Altså og man kan jo heller ikke bruge alt sin tid på at uddanne sig.
60. B: Jeg synes også, det er svært at finde tiden, fordi at selvom jeg har tiden, så skal jeg også have det der overskud til at: Nå, så kunne jeg ikke lige finde ud af det. Jeg synes, det er rigtig hårdt, når man ikke kan noget og det er svært at lære det. Så skal der være lang tid til det og det er der ikke rigtig i her i slutningen af 3.g.

D Fokusgruppeinterview med gymnasieelever

- **Hvad skal der til for at I vil deltage i matematikevents i jeres fritid?**

1. D: Det er svært at skabe interesse.
2. B: Det skal være et fristed for de interesserede.
3. A og B: Tror ikke rigtig på det.
4. Alle: Der skal meget bedre reklame!

- **Hvor skulle det være?**

5. Alle: På skolen.

- **Hvornår skulle det være?**

6. B: Man skal kunne komme og gå. Så det er lovligt hvis man en dag ikke gider. Der er ikke tid hvis der kommer store opgaver oveni.
7. D: Men nogen gange er man også nødt til at blive presset.
8. A: Måske en gang om måneden. Og så lidt længere tid med én opgave hver gang. Så kan man selv bestemme hvor lang tid man vil bruge på det.
9. A: Meget svært at finde en dag hvor alle kan.
10. D: Måske ligesom et AT-forløb
11. C: Bedre med et sammenhængende forløb.
12. Alle: Måske ligesom fleksdage, så forsvinder planlægningen. Workshops med forskellige fag, som man vælger og så præsenterer dagen efter- Ikke en del af pensum, se faget på en anderledes måde - på tværs af klasserne. Tid til at gå i dybden - en hel dag.
13. B: Det er lysten der skal drive værket.
14. D: Men der må også gerne være pres.
15. D: IKKE kl. 15.30 - man er for træt.

- **Hvordan skulle det forløbe?**

16. C: Flere opgaver, så man selv kan vælge, hvor mange man vil løse. Mandag - lad det ligge - mandag.
17. B: Vil ikke kunne lade det ligge.
18. D: Vil ikke kunne lade det ligge. Bedre med 3 dage i træk. Intensivt.
19. A: Efter en hel uge, skal man til at sætte sig ind i det igen - tidskrævende.

20. C: Mister tråden hvis ikke på én gang.

- **Hvordan skulle det evalueres?** (Konference, konkurrence, foredrag, diplom, note på eksamensbevis, osv.)

21. D: Folk skal have noget ud af det. Men de ved ikke hvad man får ud af det fagligt. Man skal deltage for at få en bedre karakter.
22. C: Hvis der er kredit for det, så kommer alle dem der ikke rigtig er interesserede, men bare vil have ekstra kredit og så bliver det ikke sjovt for dem, der er interesserede.
23. A: Så man skal kun få kredit, hvis man har gennemført. Fed følelse af gennemførelse, som står for evigt på ens eksamensbevis.
24. C: Men så bliver det igen noget man SKAL komme til. Det er bedre hvis det er frivilligt.
25. D: Ok, hvis det kan få folk til komme.
26. Delte meninger om konkurrence eller ej.
27. B: Det er bedst med præsentationer - måske med præmie til den der har den bedste. Så er alle med, men det er ikke en intens konkurrence.
28. A: Der må gerne være diskussioner af resultater til sidst.

- **Hvem skulle deltage? Herunder hvilke lærere og elever.**

29. A: Det er nok svært at finde nogen der er rigtigt interesserede i det.
30. B: Man må sige til dem der ikke er interesserede, at de ikke skal komme igen.
31. C: En lille gruppe er godt.

- **Hvilke krav ville I stille til en underviser?**

31. D: Når man læser ting i lærerbøger er der sværere at forstå end når en lærer forklarer det.
32. B: Når man møder 'muren' skal man kunne sparre med gruppen og med læreren.
33. A: Gerne flere forskellige lærere i konsulentfunktion.

- **Hvad tiltrækker jer ved matematik?**

34. D: Der er kun et facit. (Alle)
35. C: Vil hellere tænke sig frem logisk i stedet for at lede på nettet efter svaret:
36. B: Det at lede på nettet efter redskaber, der kan bruges til at løse en given problemstilling er mere interessant. Du er nødt til at lære dig selv hvordan du løser et problem for at komme videre og man kan komme frem til det på mange måder:

37. D: Der er mange der ikke vil tage sig tid til [studie] og ikke forstår det de finder frem til. Dem der er gode vil nok synes det er sjovt.
38. D: Man ved det er rigtigt til sidst.
39. B: Argumentationen er mere ligetil.
40. D: Processen med at finde frem til et endeligt resultat.
41. B: Hvad ved vi og hvor skal vi ende. Hvordan kommer vi fra a til b.

- **Hvad skulle det handle om?**

42. A: Det skulle være sjovt. Der er ret mange der ser matematik som kedeligt - en fordom der eksisterer.
43. B: Hader at sidde og tegne trekanter, at regne på det - Det er noget andet. Som en del af et bevis: Ok. Og sidde at tegne for at prøve om det er rigtigt: ok.
44. D: Ja, tegne og forklare det gider jeg heller ikke.
45. A: Jeg kan godt lide at sidde og tegne vektorer og sådan noget - det synes jeg er hyggeligt.
46. C: Bedst med opgaver som man kan lave i hovedet.

- **Hvad skal sværhedsgraden være?**

47. D: Ligetil, folk giver hurtigt op i matematik.
48. B: Hvis man ikke kan komme videre, så må man vente til en anden gang.

- **Hvilken form skulle opgaverne have?**

49. Alle: Der skal helst være et facit.
50. D: Der skal være en endelig tilfredsstillelse
51. D: Gerne i grupper - så man er sammen om det
52. C og D: Med en rimelig tidsbegrænsning - en opgave pr uger.
53. D: opgaverne skal være til gå til med det samme.
54. B: Opgaven skal være nem at forstå - så man ikke først skal forstå hvad opgaven går ud på.

- **Hvilke krav skulle der stilles til jer?**

55. Alle: Ingen mødepligt - hvis frivilligt
56. D: Alle skal vælge sig ind på noget på fleksdagen - ingen får fri, ellers virker det ikke. (Semi-frihed: Eget valg af emne, men mødepligt til dagen. Et godt udvalg af fag så der er noget få alle.)

- **Hvad mener I om samarbejder/konkurrencer med andre skoler?**

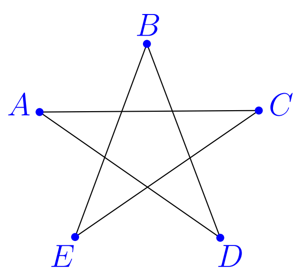
57. Alle: God ide - spændende.

- **Hvad ville I sige til konsulenter fra universitetet?**

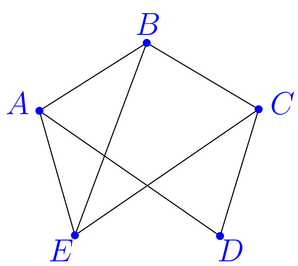
58. B: Når man har en løsning eller måske ikke kan komme videre, ville det være godt at se hvordan universitetsstuderende ville have løst den.
59. D: Måske workshops [på fleksdagen] med universitetsfolk som lærere.
60. B: Som inspirationskilde - fedt.

E Transkription af gruppens arbejde

1. A: Vi kom fra den der tricky en.
2. B: Det var det, de sagde sidst, at det altid bedst kunne betale sig at ramme den ind [følge ruten rundt til alle punkterne langs yderkanten]. Det havde de fundet på nettet. Men det havde vi fundet selv - Det synes jeg vi skal være stolte over.
3. C: Ja, men det er kun, hvis man skal hjem igen ik?
4. A: Men hvem var det, der havde den, vi arbejdede med sidst? [kigger i sine noter og finder papiret frem] Nåh ja, det var den der. [Ser på de to tegninger af stjernen og Sløjfen + BE]
5. B: Ja, altså jeg kunne ikke finde noget. [I forrige lektion fandt gruppen frem til spørgsmålet om at skulle finde kriterier for, hvornår en rute kunne findes, der brugte alle vejene nøjagtigt én gang.]
6. A: Ja, jeg havde også lidt svært ved det. Hvad med dig C, har du øh...?
7. C: Hvad har jeg, hvad?

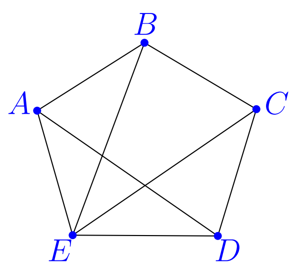


Figur E.1: Stjernen.



Figur E.2: Sløjfen + BE.

8. A: Denne her ting. Har svaret på den nu? [til interviewer (I)]
9. I: Nej, nu må I lige arbejdet med det.
10. A: Nå ja, men du har svaret? Det var det...
11. B: Hvad var det nu, det var spørgsmålet om?
12. A: Det var, om vi kunne krydse alle punkterne uden, nej om vi kunne bruge alle vejene.
13. B: Én gang. Det var, om vi kunne bruge alle vejene én gang. Var det ikke sådan, det var?
14. C: Er der nogen steder, du ikke må flyve mere? [Henviser til problemets oprindelige formulering og indførelsen af 'no fly' zones i forrige lektion.]
15. A: Nej, nej, du skal bare... Altså de der streger der, der skal du bare gå. Det har ikke så meget med det andet at gøre.
16. C: Okay.
17. A: Men hvis vi lavede den der [Tegningen af Sløjfen + BE]. Er det kun den her figur?
18. B: Eller er det alle figurer?
19. A: Eller var det bare: Sådan der og sådan der. [Prøver med blyanten at tegne en rute rundt. Han følger: AB, BC, CD, DA, AE, EC og tilsidst BE]
20. B: Jamen, der løftede du blyanten.
21. A: Nåh ja, men det er jo sådan, den ser ud.
22. B: Ja, men der er også en vej der [BE].
23. C: Men det er kun dem her, vi skal bruge ikke? [vejene]
24. A: Ja, det var kun dem der, der var mulige.
25. B: Nåh, på den måde.
26. A: Så var det så: Kunne man gøre det der [Tegne en rute i Sløjfen + BE og DE]? Men det kan du ikke rigtig.



27. B: Men blev vi ikke enige om, at du ender her? [C]

28. A: Nej, hvis du går ned her, her, her og går op her, her og her, så mangler du denne der vej [BA, AE, ED, DC, CB, BE og EC, så mangler AD].

29. C: Er det den samme eller hvad?

30. A: Jo, jo, men nu leger vi bare lige.

31. B: Det er jo ikke helt den samme.

32. A: Nej, men så er det jo fordi, vi har sat en ekstra streg [BE] ind her for at gøre det lettere, men det hjalp jo ikke [AD mangler].

33. C: Nej.

34. A: Det var fordi jeg sad og klagede mig over, at vi manglede flere streger, men det gør det ikke meget nemmere.

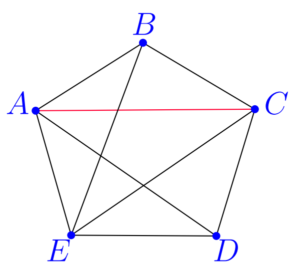
35. C: Altså, der er jo kun en streg, der er lidt for meget. Og man kan ramme alle? Kan man godt ramme alle?

36. A: Se hvis denne der nu havde været væk [BE i sløjfen + BE].

37. B: Ej det kan man heller ikke.

De prøver lidt forskelligt. B arbejder med sløjfen + BE

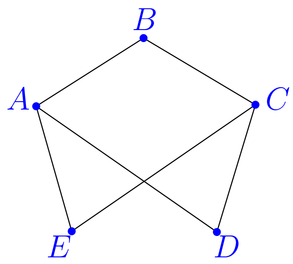
38. B: Jeg mangler en der [AC]. Skal vi ikke tegne den ind der?



39. A: Det kan vi godt.

40. B: Fordi så kan vi der, der, der og der [AC, CB, BE, EA], Jo!. Nej... Jeg havde faktisk en lige før.

41. A: Må jeg lige se den der? Så mangler du den der linje tilbage der [AB]. Nej, vent lig lidt, den er da der. Jo, jo, hvis vi fjerner den der igen [BE].



Prøv og se: Hvis du går ned her, op her, ned her, op her, op her og ned her og ned her. [AE, EC, CD, DA, AB og BC]

42. C: Så vi skal bare fjerne den der [BE].

43. B: Så vi skulle aldrig have bedt om den der ekstra.

44. A: Nej.

45. C: Nej, den var en dum streg.

46. B: Nice job, man!

47. I: Jamen, så starter du jo herovre [A] og endte derovre [C].

48. A: Jo, men er det ikke også det? Skal man ende det samme sted?

49. I: Jah.

50. A: Skulle man det?!

51. B: Nej, øv.

52. C: Det havde jeg ikke fået med.

53. A: Så bliver det umuligt.

54. B: Så starter man da bare sådan her.

55. A: Ja, men det kan du ikke, for så går du jo bare modsat. Så vil du jo stadigvæk ende derovre.

56. B: Ja. Så kommer man til at mangle den der [AC].

57. A: Ja, så mangler vi netop den der, som forbinder dem sammen igen.

58. B: Vi kan altid sige: Hvis vi havde den der...

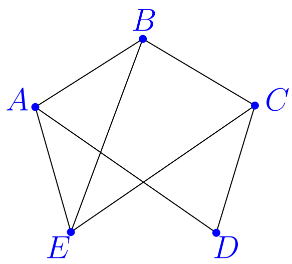
59. A: Ja, men nu bedte vi om en ekstra streg.

60. I: I har ret i, at hvis I havde den lige over [AC], så gik det, men det var jo ikke den I fik.

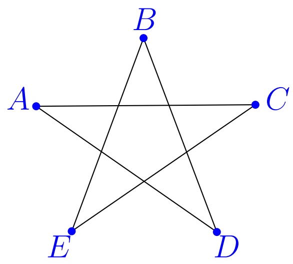
61. A: Den anden [BE] den kan vi ikke rigtig bruge til noget.

62. B: Ja, men kan man så sige noget, om hvor mange veje?
63. A: Er det samme koncept, hvis man lige drejer den lidt her? [Drejer papiret med Sløjfen + BE og ser på den fra en anden side.]
64. B: Man skal bare tænke på, at man skal ende i det samme punkt eller i det modsatte punkt.

De tænker længe over Sløjfen + BE igen. Og prøver forskellige muligheder.



65. A: Det kan man sku da ikke det der.
66. B: Ihh!
67. I: Så I kunne måske godt tænke jer at finde en eller anden form for betingelse på, hvornår det kan lade sig gøre?
68. C: Det er der ikke.
69. I: Så I med det samme kunne sige: Det må være umuligt det her.
70. C: Ja.
71. I: For eksempel den der [Sløjfen + BE]. Jeg kan godt fortælle jer, at det er umuligt. Der findes ikke nogen vej [rute der benytter alle veje én gang].
72. B: Så man kan ikke?
73. A: Er du helt sikker?
74. C: [Griner]
75. I: Det er jeg helt sikker på.
76. B: Skal der minimum være 7 veje?
77. I: Det er et godt spørgsmål.
78. B: Hvor mange er der her? Der er 7.
79. I: Ja, men prøv at se her. Det kunne jo lade sig gøre på stjernen ik? Og hvor mange veje er der der?



80. B: Der er kun 5.

81. I: Så du havde en hypotese, der hed: Der skal være minimum 7 veje og den har du lige modbevist.

82. B: Ja.

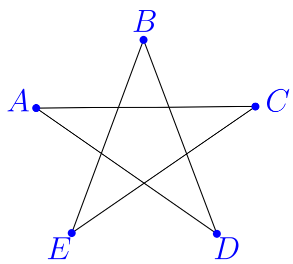
83. A: Ihh, hvor er det irriterende, at man ikke kan løse den! [Sløjfen + BE]

84. I: Hvad kunne I ellers finde på?

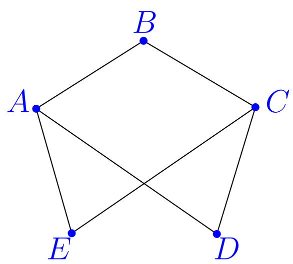
85. A: Hvad sagde du [B]? Der skulle minimum være 7 veje eller hvad?

86. B: Ja, men det modbeviste den der stjerne lissom.

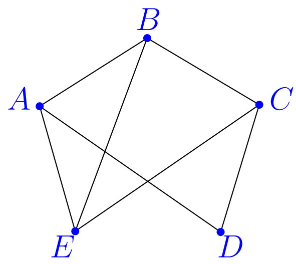
87. I: Så I havde stjernen, hvor det kunne lade sig gøre.



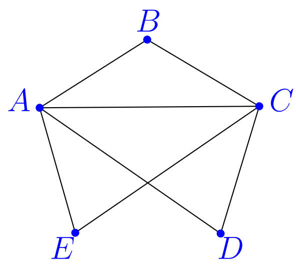
Så havde I den med sløjfen, hvor det også godt kunne lade sig gøre.



Men hvis man tilføjede en ekstra vej her på sløjfen [BE], så kunne det ikke lade sig gøre.



Hvis vi tilføjer en ekstra vej lige over på sløjfen [AC], så kunne det godt lade sig gøre.



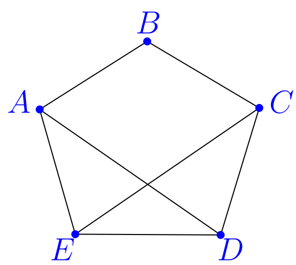
88. B: Ja.

89. I: Så ok, ok, ok, og den hernede [Sløjfen + BE] den virker ikke. Så det er klart, at den der er symmetrisk til den, den virker heller ikke.

90. A: Ja.

91. I: Ja, men hvad er der ellers af muligheder?

92. C: Så er der jo den, hvor stregen går lige over nede for neden ik?



93. B: Jo.

94. A: Det er jo noget med at den der, den er jo ikke opbygget...

95. I: Ok, så lad os prøve den. Kan det lade sig gøre på den?

96. B: [Tegner en hurtig rute men løfter blyanten] Jah...

97. A: Vi starter her, bom, bom, bom, bom, bom. [AB, BC, CD, DE, EA og AD]

98. B: Prøv at starte der i den, den anden der [B].

99. C: Du sagde, du ville starte her [A] ik?

100. A: Og jeg skal også lande der.

101. B: Nå.

102. A: Jeg tænker, man skal lande der, hvor man starter.

103. B: Hov, så kører den der, der,...

104. A: Nej, det hjælper jo ikke noget den nederste der [DE]. Den gør det bare mere besværligt, så skal man jo ned og runde den.

105. B: Hvad så hvis man starter der [E]?

106. A: Det er de der to. De er et problem.

107. B: Hvad nu hvis man starter der [C]? Men så er det også bare fucked up.

108. A: Hvad sagde du, hvis man starter her [C]? Også sagde du ned her, ned her... Det ved jeg sku ikke.

109. I: Hvad er det, der går galt?

110. C: Du kan ikke ende det samme sted, som du starter. Du kan godt løse den...

111. B: Der er en vej for meget.

112. C: Altså, hvis du kører der, der, ... [EA, AB, BC, CD, DE, EC], så har du været igennem alle punkter [veje]. Nej, der er også den der [AD], er der ikke?

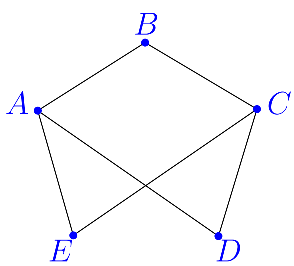
113. I: Jo, så mangler du så en streg.

114. C: Ja, men det er jo bare det der med, at du kan jo ikke komme tilbage til samme sted.

115. B: Der er en vej for meget!

116. C: Der er en vej for meget?

117. A: Det kan jeg slet ikke se, hvordan du ser denne her den kunne løses [Sløjfen]. Var det ikke den, vi blev enige om ikke kunne løses? Hvis du skal ende det samme sted?



118. I: Jo, I denne der kunne du ikke ende det samme sted.

119. A: Nej. Og det kan du så heller ikke i denne der [Sløjfen + DE], fordi den nederste kan du ikke...

120. I: Men altså i denne her [Sløjfen], der kunne du jo godt køre en runde uden at ende det samme sted ik?

121. C: Jo.

122. A: Ja.

123. B: Ja.

124. A: Men er det ikke bare at sige, at... Nej, det har ikke noget med denne her at gøre.

125. I: Og denne her [Sløjfen + DE] kunne det overhovedet ikke lade sig gøre i.

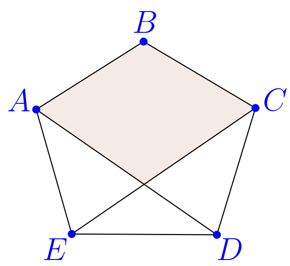
126. A: Nej, men det er bare, når den er sådan opbygget af trekanter, så virker det som om, det er nemmere. End når den ikke er.

127. B: Her der er de alle sammen trekanter [Sløjfen].

128. A: Ja, det er det jo.

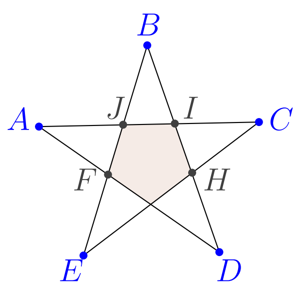
129. B: Det er det der også [Sløjfen + BE].

130. A: Nej, for den der, det er ikke en trekant.



131. B: Næh.

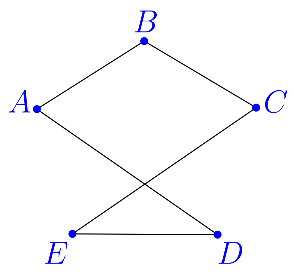
132. I: Men i denne her [Stjernen], den er jo heller ikke en trekant.



133. A: Nej, det var jo det jeg sagde. Det var så der, den gik galt.

134. I: Men meget god hypotese.

135. A: Ja, men det virker bare som om, at så snart det der kvadrat kommer med ind [sløjfen + DE], eller et eller andet. Altså, når der er et stort kvadrat, så bliver det bare svært at få den til at løbe rundt. På den anden side, hvis man så fjerner de der to [AE og CD], så er det også bare et kvadrat og en trekant. Så kunne man godt.



136. I: Ja, så der er tre tilfælde: Der er den, hvor det lykkedes. Så er der den, hvor vi ender forskellige steder, men vi godt kan gå en runde. Og så er der den, hvor det slet ikke lykkedes. Det er de tre muligheder vi har.

137. A: Ja.

138. I: Så kunne jeg jo godt tænke mig at høre, hvordan I tror... Hvordan vil I kunne afgøre det [hvilken type det er] bare ved at kigge på dem. Uden at prøve jer frem.
Nu er det blevet sagt, at der skulle være minimum 7 veje.

139. B: Men det modbeviste vi.

140. I: Så sagde I noget med, at der ikke måtte være de der firkanter.

141. A: Men det må der jo. Altså for eksempel hvis man laver denne her figur ik? [Sløjfen uden AE og CD] Der er en trekant og en firkant ik. Og den kan du jo bare køre over så er den der [Følge kanten rundt].

142. I: Så den hypotese duede heller ikke.

143. A: Så der skal stadig være x-antal punkter af de der veje. Jeg ved det ikke, jeg er ikke god til sådan noget tænke 'outside the box' noget.

144. C: Hvad er det egentlig, det her har med selve opgaven at gøre?

145. I: Altså det her [stjernen] kan du jo også forestille dig, at det her [knuder] er byer ik og det her [kanter] er flyveruter. Som er åbne for trafik. Jamen så vil han jo helst [sælgeren fra den oprindelige formulering] flyve til alle byer én gang.

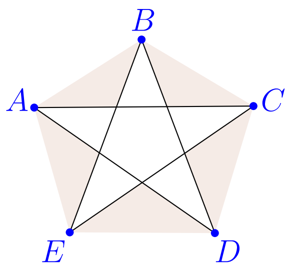
146. B: I stedet for at han skal til at flyve frem og tilbage.

147. C: Ja, okay.

148. I: Hvis det der er de åbne flyruter, der er, jamen så skal han bruge dem på en bestemt måde.

149. B: Så vi flyver ikke til Island for at flyve til københavn og til Århus.

150. A: Vi leger, der er lukket her ik?

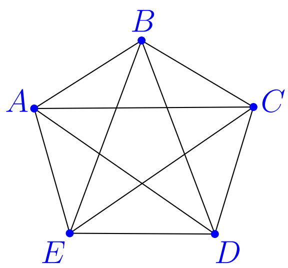


Ellers ville det bare være dumt ik? [Fordi man så kunne flyve AB, BC, CD, DE, AE]

151. I: Ja, det er rigtigt.

152. B: ja, det passer.

153. I: Men du har faktisk en pointe ik, når du tegner de her rundt om [kanterne AB, BC, CD, DE, AE], fordi hvis vi havde en figur, der så sådan ud, hvor det var stjernen, men den var rundt om her, så ville vi faktisk også godt kunne flyve en rute.



For det første ville vi kunne flyve med stjernen rundt og for det andet, ville vi kunne flyve uden om.

154. A: Jo, jo, men det er jo derfor, fordi det er jo bare dumt at flyve med stjernen, hvis du kan flyve rundt om.

155. I: Ja.

156. A: Fordi stjernen er meget længere end rundt om.

157. I: Ja, men hvis du nu siger... Hvis vi nu bare snakker om problemet igen, hvor han skal flyve på alle ruterne. Kan det så lade sig gøre her - Jamen det kan det godt, fordi først kører vi bare med stjernen og så ender vi det samme sted.

158. B: Ja, og så rundt.

159. A: Ja, men det ville da bare være mærkeligt.

160. I: Jah, hvis vi snakker om den rejsendes problem.

161. B: Ja, hvis vi skal tænke på det.

162. I: Men det er jo et helt generelt problem, det her grafiske problem. Så det kan også godt lade sig gøre i det her tilfælde, hvor vi har stjernen og rundt om. Så denne her er også ok ikke?

163. B: Ja.

164. I: Denne her [sløjfen + BE], nej ikke så meget vel.

165. B: Nej, den kan vi ikke li.

166. I: Så hvad er så forskellen?

167. B: At de ender samme sted.

168. I: Ja.

169. A: Men, men, der er jo...

170. I: Denne her [sløjfen] kunne vi godt, men så endte vi i en anden by.

171. A: Jeg ved sku ikke rigtig, jeg synes bare ikke, der er andre muligheder, hvor man sådan ender det samme sted. Så var der den der [trekant+firkant = sløjfen - AE og CD], der endte man jo også det samme sted. Men jeg kan bare ikke se hvorfor.

172. I: Ja, i din trekant og firkant.

173. A: Ja, der kan man godt ende det samme sted også, fordi...

174. B: Er der andre, man kan?

175. I: Hvis I nu kigger på de der figurer, hvad har de så tilfælles? Dem der står ok ved. Trekanten og firkanten var også ok.

176. A: Jamen, hvad har de tilfælles... Det ved jeg sku ikke.

177. B: De har alle sammen kun gået hen til to punkter, nej...

178. C: Nej, fordi der går den jo hen til flere. Fordi jeg tænkte også sådan et eller andet med, at de skulle have sådan lige mange sider, de kunne gå ud hver ik, fordi det kan den her jo [stjernen]. På hver side går den ud det samme sted ik. Så talte jeg op [på sløjfen + AC], her går den ud fra to og her går den ud til meget mere ik. Så det passer jo heller ikke.

179. B: Nåh, det skal være i alle.

180. C: Så modsagde jeg mig selv med det samme jo.

181. I: Så i den her [sløjfen + AC] der havde du 4, 2, 4, 2 og 2. Og heroppe med stjernen og rundt om, der havde du hvor mange?

182. B: 4, 4, 4...

183. C: Ja, 4 hele vejen rundt.

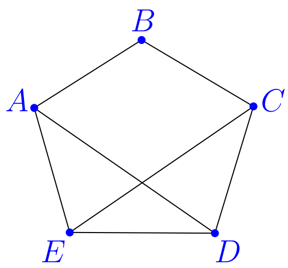
184. A: Ja, og i den her [stjernen] er der 2 hele vejen rundt.

185. B: Så det skal bare være et lige tal!

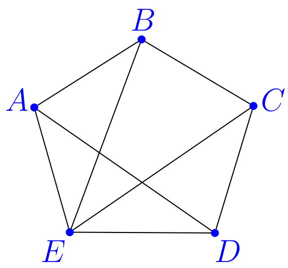
186. I: Ja, så det er en ny hypotese. Hvis det er et lige tal på alle, så går det.

187. A: Ja, men hvad med ulige tal: Kan man ikke lave 3 på alle?

188. I: Ja, men det kan vi da bare prøve af, fordi vi har faktisk en her der er 2 og 3 og 3 og 3 og 3. [sløjfe + DE]



189. A: Hvis denne her [B] så også havde været på 3, sådan der [BE].

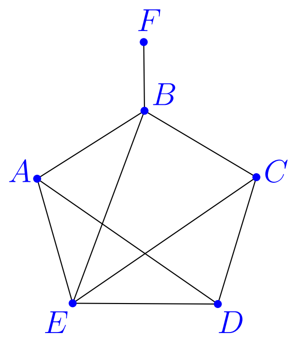


190. C: Nej, fordi så kommer der 4 der [E].

191. B: Jahh.

192. A: Det er derfor, du skal sætte en streg derud også.

193. B: Så hvis vi sætter en streg, så...



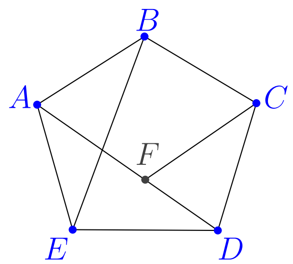
194. A: Så er den god.

195. B: Nej, så er der jo kun 1 der, til den herude [F].

196. A: Kan man ikke lave sådan en... En ting hvor den kører på 3.

197. B: Hvis man bare siger, man hele tiden laver til...

198. C: Du har jo også den her. Du kan bare bygge videre på den her ik. Du har 3 der, 3 der, 3 der og så hvis du laver en streg der, så får du også 3 der.



Så kan vi jo se om det kan lade sig gøre, hvis man har 3 på alle.

199. B: Så lad os prøve denne her.

De prøver forskellige ruter af hver for sig. Kører med blyanten på papiret. A prøver med en der har 4 på alle.

200. B: A Prøv og kig, denne her den har alle sammen 3.

201. C: Den har alle sammen 3.

202. A: Har den det?

203. C: Fordi vi lige har lavet en streg der [CF].

204. A: Ja her [CF].

205. C: Ja, der har vi lige lavet en ekstra streg.

206. A: Har I prøvet at køre den igennem? eller hvad?

207. B: Nej...

208. C: Ja, det kan vi ikke.

209. A: Er du sikker?

210. C: Ja, eller jeg kunne ikke.

211. A: Jeg kan ikke overskue den der, jeg hader den der. Den har ødelagt mit liv. [sløjfen + BE]

212. B: [Prøver igen] Hvis vi starter der [A] og så kører vi derned [AE], så kører vi der hen [ED]..., fuck det, det kan vi ikke. Hvis vi nu starter der [E]...

213. I: Så indtil videre så holder jeres hypotese. Eller din hypotese B, hvor du sagde at der var... At der skulle være lige på alle.

214. B: Ja.

215. I: Det kunne være I skulle skrive nogen af de hypoteser ned, så I har dem.

216. C: Ja, men jeg ved ikke, hvordan jeg skulle formulere det.

217. I: Den første hypotese som kom her ovre fra, der var ret god, den sagde... Hed minimum 7 veje.

218. C: Men den modbeviste vi med den der stjerne.

219. B: Hvad med det der med lige, det vidste vi da også, gjorde vi ikke?

220. A: Før man kan besøge alle ruterne én gang, kan vi ikke... Har vi ikke nogen papirer på det?

221. B: [Finder tegningerne frem igen] Du har masser, de er lige her.

222. C: Jeg har altså også forkert her, hvis det er [om sine noteark].

223. A: Jeg synes lidt den her, den begynder og...

224. B: Den driller dig.

225. A: Ja.

226. C: Hvordan?

227. A: Nu ville jeg bare prøve at lave sådan en med seks i hver, for at se om det galdt i alle mængder med lige. Så der skal være 6 punkter ik?

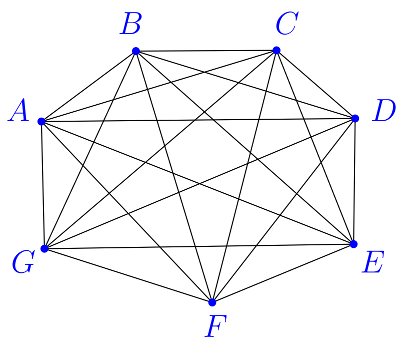
228. B: Jeg kan ikke huske, hvordan den der figur ser ud.

229. A: Ligesom den her [stjerne].
230. B: Nej, det der, det var spindet jo [stjerne med rundt om].
231. A: Nåh.
232. I: Hvorfor er det lige, at du siger, der skal være 6 punkter?
233. A: Jeg ville bare se, om det virkede.
234. C: Det er fordi, vi siger det der med lige tal ik. 3 virkede jo ikke, så hvis der var 6...
235. A: Ja, 6 i alt. 6 streger ud fra hver.
236. B: Men der er jo 6 punkter der.
237. A: Det burde der jo også være, det er jo bare sådan en stjerne ting.
238. I: Så der er en streg for hvert punkt?
239. A: Ja, så får man jo også 6.
240. I: Men hvor skal den sjette streg så gå hen?
241. A: Nåhh, der skal være 7 punkter.
242. B: [til C som skriver ned på hypotesearket] Så var vores hypotese jo også, at der skulle være en trekant. Den skulle bare være opbygget af andet end trekanter. Nej, hvordan fanden var det nu?
243. C: Ja, det var der.
244. B: Modbevist af stjernen. Så tegner du alle ruterne i den der [Til A som er ved at tegne]?
245. A: De skal bare alle sammen køre sådan [Tager systematisk et punkt ad gangen og tegner til alle de andre].
246. B: Du tegner alle sammen, det gør du nu.
247. A: Ja, ja, jeg er i gang.
248. B: Så vil de alle sammen have mange veje.
249. A: De vil alle sammen have lige mange. 6.
250. C: Og hvad mere? Vi havde en til.
251. B: Det var den sidste, vi havde, at det skal være et lige tal.
252. C: Nej, nej, vi havde et til eksempel hvor at, den der, ikke, den er jo ikke en trekant.

253. B: Men stjernen. [Kigger på A's figur] Shit, en, to tre, mange...

254. A: Dagens mønster.

255. C: Du elsker at tegne hvad, det... Hold da op!



256. B: Den må vi prøve og se, om vi kan komme igennem. [Griner] Det kan jeg ikke overskue at prøve.

257. A: Jeg prøver mig frem:

258. B: Det kan jeg ikke, jeg kan ikke overskue, om jeg har taget dem.

259. A: Det er derfor, du bliver nødt til at farve dem.

260. B: Nice. Hvad nu hvis jeg gør det forkert?

261. A: Så er du dum [griner].

262. B: Kan du gøre det forkert?

263. C: Ja. Good luck.

Undervejs diskuteres frem og tilbage om hvilken vej, der skal vælges. Man skal gå derover, hvor der er 4 tilbage og de sidste giver sig selv.

264. C: Altså lige nu laver I ikke sådan rimelig tilfældigt? Har I ikke flyttet blyanten?

265. B: Nej, nej.

266. C: Nårh ok, fint nok.

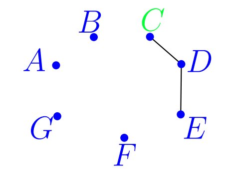
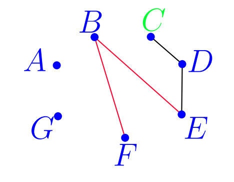
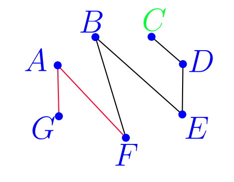
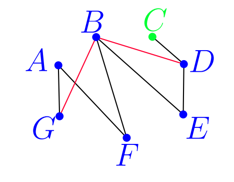
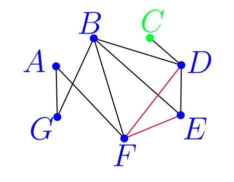
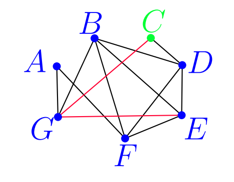
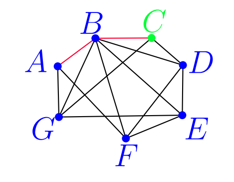
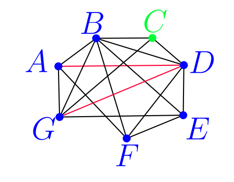
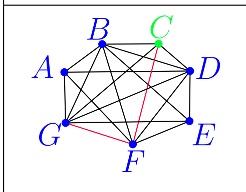
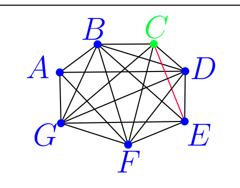
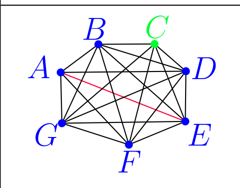
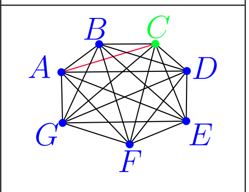
267. B: Ja! for helvede.

268. C: Skal du prøve med 7 A, om det kan?

269. A: Nej, fordi det er netop de lige tal.

270. C: Ja, ja.

271. B: Måske skulle du hellere prøve med 5.

1-2	3-4	5-6	7-8
			
9-10	11-12	13-14	15-16
			
17-18	19	20	21
			

272. C: Altså jeg tegner ikke den der [Med 6 fra hver] her! [På hypotesearket]

273. I: Men den der bekræfter jo også bare jeres hypotese ik.

274. C: Jo.

275. B: Hvad er vores hypotese?

276. C: Vores hypotese er, at der skal være... For hvert punkt skal der være et lige antal veje. Før det kan løses.

277. B: Det kan også bare være, at der skal være det samme antal?

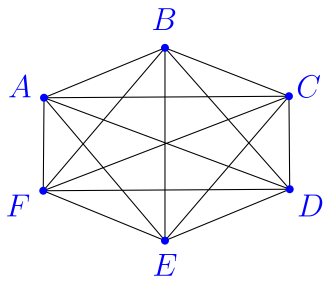
278. C: Ja, men vi har jo lige prøvet med den der, hvor der var 3, 3, 3... alle mulige steder.

279. I: Er du ved at konstruere en med 5 A?

280. A: Ja.

281. B: Hvordan fanden har du tænkt dig at gøre det?

282. A: Jeg bruger det samme princip, som det der [den med 6], det er bare uden den heroppe [den 7. knude i grafen med 6 veje fra hver].



283. B: Nej, det er ikke rigtigt, der er 6 veje til den.

284. A: Nej, der 1, 2, 3, 4, 5. Det er en 6-kant, men der er kun 5 i hver.

285. I: Hvor mange er der i alt?

286. B: Hva?

287. I: Hvor mange veje er der i alt?

288. B: 25. Næh... 30.

289. A: Eller er der ikke?

290. I: Hvorfor er der det?

291. B: Nej, ikke hvis de tæller dobbelt.

292. I: Nej, det er jo det.

293. B: Der er mange veje.

294. I: Hvordan i alverden skulle vi tælle de der sammen?

295. C: Jo, jo, men du bliver jo nødt til at se f.eks. hvis du tager... der er er 5 her ik. Nå, men så hvis du går ned til næste punkt. Nåh, okay, den der er allerede [kanten fra forrige], så er der 4. Her er der 3. Så er der 2 og så er der 1.

296. A: Nåh ja, så er det der...

297. I: Hvor mange er der så i alt?

298. C: Så er der 5 gange 4 gange 3 gange 2 gange 1.

299. I: Arh, det var mange.

300. C: Er det ikke det?

301. A: Nej, jeg tror, det er plus ik.

302. C: Er det plus? Ja, for du kan ikke gå tilbage. Hvis du kunne gå tilbage, så skulle du gange ik?

303. A: Jo.

304. C: Så er det 5 plus 4.
305. A: Det er 9 ik, 11, 13...
306. C: Nej ikke, jeg har bare 5 og så det der 5.
307. A: 5 plus 4.
308. C: Nej, 5 og så 5.
309. B: 9, 12.
310. C: Her er der 4 og det er her, der er 1.
311. I: 5, 4, 3, 2, 1 ik?
312. C: Nå, så vi siger 5, 10, 15 ik?
313. A: Var der 15? 7, 12, 15.
314. B: Ha, der er 0 veje fra den [den sidste].

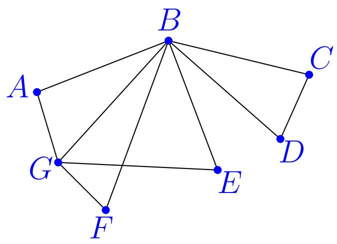
Efter første elevpræsentation

315. C: Vores hypotese er: Så længe det samlede antal veje er ulige, så kan det godt lykkes. Men så havde vi jo så en som var, sådan, der var 7 veje og det kunne ikke lykkes og en hvor der var 10 og hvor det lykkedes.
316. B: Ja, hvor det lykkedes. Så det var sådan lidt... Det så godt ud, da jeg lavede det. Indtil jeg kom til de to, så gav det ikke mening mere.
317. A: Men den der anden en du tegnede kunne ikke lade sig gøre eller hvad?
318. C: Hvad for en?
319. A: Den der med 5 på hver.
320. C: Nej, den er dum.
321. B: Den er meget dum.
322. A: Så indtil videre, så passer de jo meget godt, det der med at... Men kan man så ikke prøve at lave sådan en der hedder. Nu har vi jo alle sammen, det er de samme tal. F.eks. hvis der var 6 hele vejen rundt [valens 6 på alle 7 knuder]. Men kan man ikke lave en der hedder sådan 6, 4, 2, 2, 4 f.eks. Eller sådan et eller andet?
323. B: Så bliver det jo et lige tal.
324. A: Ja, ja, men det er bare det der med, at der skal være lige muligheder hver gang. Det er bare i stedet for at sige, at nu har vi det samme tal hele vejen rundt, altså 6.

325. B: Lige muligheder hver gang, lad os prøve at tegne en af dem. Hvor mange prikker kører vi med?

326. A: Stik mig lige den der blok igen. 6 og så måske 4 og 2 og 2 og så. Bare sådan.

327. C: Jeg forstår ikke, hvad er det lige I laver?



328. A: Så har den der 6, 2, 4, 2, 2, 2, og 2. Men lidt skør jo.

329. B: Så skal vi jo næsten starte der jo [B].

330. A: Vi skal ud og runde den der [BCD], det bliver vi nødt til.

331. B: Det kan sagtens lade sig gøre!

332. C: Ja.

333. B: Og så der [BE] og så der [EG] og så der [GB].

334. C: Hvor har du mange veje, du har fire, så skal du måske ud og runde 4 nu ikke?

335. B: Og hvis du går der [BA], og der [AG] og der [GF], der [FB]. Der var den! Jeg har lavet den!

336. A: Jeg vil bare gå ud og så op og så hele vejen rundt. [BAGB BFGEB BDCB]

337. B: Nårh ja, sådan kan man også gøre.

338. A: Det her er ned ikke? Vi havde begge to en løsning.

339. B: Vi havde begge to en løsning: High five!

340. C: Må jeg godt være med? [high five også til C]

341. A: Den her hypotese ser ud til at virke sådan forholdsvis helt sikker.

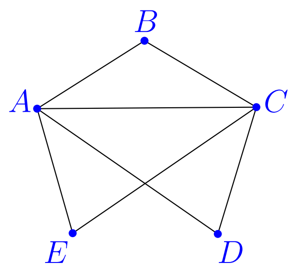
342. B: Min hypotese.

343. C: Hvilken hypotese?

344. A: Det er stadig den samme, vi beviser den bare ved og...

345. B: Det er stadig den her oppe ikke? [Hypotese: Hvis alle knuder har lige valens, findes en Euler-tur]

346. A: Jo. Jo, det er jo ligesom den der, den har jo også 2, 4, 4, 2, 2, ikke altså?



347. B: 2, 4, 4, 2..

348. A: Det behøves bare ikke at være det samme.

349. B: Aha.

350. C: 6 og den her den har jo, 2 og...

351. A: Fordi hvis det... Det passer også meget godt, hvis den der den så bare havde været 3, så kunne det ikke lade sig gøre. Hvis der bare er en ulige, så kan det ikke lade sig gøre.

352. B: Det er fandme en god hypotese. Og så kan vi bevise den ved og... Hvordan fanden beviser man sådan en hypotese? Bliver ved og bliver ved og prøve til...?

353. A: Nej, nej, hvis nu vi bare laver de der eksempler, vi har lavet her og så prøver at lave nogle eksempler, som ikke lykkes.

354. I: Hvad nu hvis der er to ulige?

355. A: Så kan vi jo... Det har vi jo slet ikke prøvet.

356. B: Kan vi ikke bare prøve at smide to ind.

357. A: Jeg må hellere tegne den der.

358. C: Kan du ikke tegne den der, vi lige har tegnet [på hypotesearket]?

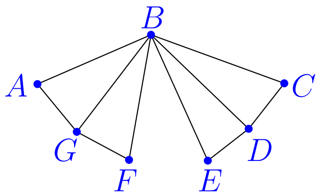
359. B: Nej, jeg kan ikke finde ud af det.

360. C: Tak.

361. B: Det bliver et helvede at skulle sidde og tegne det ind i paint, eller sådan et eller andet.

362. A: Måske i maple.

363. B: Nej, maple sucks. Så kan du bare tegne der [til A, som tegner følgende].



364. A: Så er der 6, og 2 og 3. Den der er også 3.

365. B: Så kan du jo bare køre her [prøver i grafen]. Næh...

366. A: Så kan du jo bare. Det er det der problem, med det der [3 ved D og G].

367. B: Det er igen det der med, hvis der er en der binder to ting sammen [starter i B]

368. A: Ja, så kan du ikke gøre det.

369. B: Fordi hvis du skal ramme alle punkter her [AB, AG, FG, BF og BG], så bliver du altid nødt til at ende i 3 [G].

370. C: Hvad nu hvis vi starter herovre [D]?

371. B: Så gør vi, ding [DE], ding [EB], nej

372. A: Jo, jo, for så kører du hele vejen rundt [DE, EB, BC, CD] og så op [DB] og så hele vejen rundt [BF, FG, GA, AB] og så ned [BG].

373. B: Du kommer bare aldrig tilbage igen. Det er vores hypotese, der skal...

374. C: Man kan ikke komme tilbage.

375. B: Nej, det den. Det var jo egentlig vores første hypotese.

376. A: Det er jo bare, at man skal kunne komme tilbage.

377. C: Vi startede her [D] og vi sluttede her [G].

378. B: Det er vores... Det er den der hypotese jo.

379. I: Men I har jo stadig ikke gået på nogen veje to gange?

380. A: Nej, nej, men du kan bare ikke komme tilbage.

381. B: Man skal jo hjem.

382. A: Det er jo det vi har kæmpet med.

383. I: Er det generelt for to ulige?

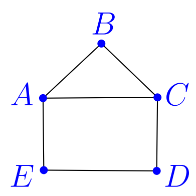
384. B: Det gælder altid.

385. A: Det kommer an på om du skal hjem eller ej stadig.

386. I: Men hvis ikke jeg skal hjem?

387. A: Så kan du jo godt. Det har vi jo lige bevist, at du godt kan. Måske skulle vi lave en ny figur, der er jo ikke andet for. Det er svært sådan bare og tage en og så kaste den ud i et helt system. Hvis vi nu tager det lidt mere abstrakt end det der.

388. B: [Tegner nedenstående] Det er faktisk meget godt lavet af mig.

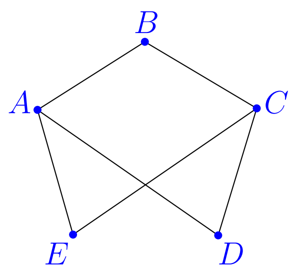


389. A: Der kan du jo også godt komme hele vejen rundt, men du vil stadig ikke lande i det samme punkt.

390. C: Så man starter i det ene punkt.

391. A: Ja, og så ned og bum og så kryds over og gå hele vejen rundt. [CD, DE, EA, AC, CB, BA]

392. C: I den med sløjfen, der kan man heller ikke ende det samme sted.



393. B: Du kan godt ende, men du kan ikke ende det samme sted. Det er stadig det.

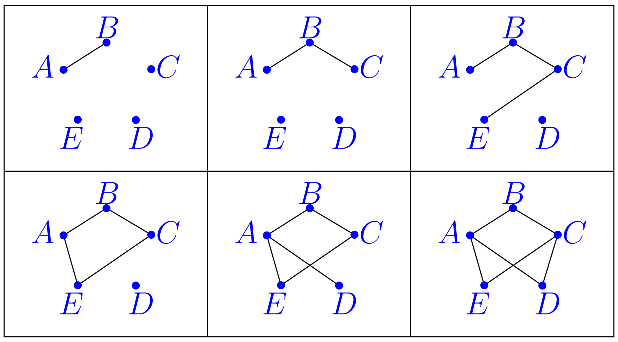
394. A: Prøv og se.

395. I: Hvordan kan I bruge det, I har fundet ud af, til at løse problemet med floden og øerne [Königsbergproblemet]?

396. B: Jamen, vi har jo ikke løst vores problem. Så kan vi jo ikke bare starte på noget nyt!

397. I: Ja, men I har nogen meget gode hypoteser ik?

398. B: Hvis der er to ulige, så...



399. I: Ja, hvis der kun er lige, så kan man gå en runde. Hvis der kun er to ulige, så kan man gå en runde, men man ender ikke samme sted.

400. B: Ja.

401. C: Okay. Ja.

402. A: Hvis der er to der...

403. B: Hvis der er to ulige, kan du komme hele vejen rundt, men ikke ende det samme sted. Det er sat'me en hypotese, der siger spar fem. Den der. Jeg synes altså stadig, vi skal have lov og tegne den der deroppe [refererer til tegningen med 6 til alle og at de gerne vil gennemgå den på tavlen].

404. A: Så kan I andre snakke, så kan jeg bare gå i gang med den der [tegningen], så kan jeg være færdig, når I...

405. B: Kan du se, vi lavede en fejl?

406. A: Så skal vi bare lige have den der oppe med, hvordan vi løste den.

407. B: Vi kan ikke bare stå ved tavlen og gætte lidt. Bare være heldige.

408. I: I kunne jo også tage den, hvor der var 4.

409. B: Det er lige meget nu.

410. A: Det er den der stjerne og rundt om.

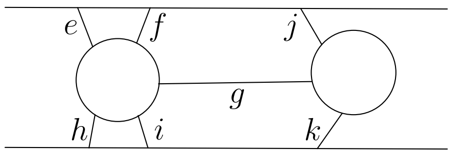
411. B: Nu har vi flodproblemet.

412. C: Fløde?

413. B: Ja, hvor meget fløde kan du drikke på et minut.

414. C: Ikke særlig meget.

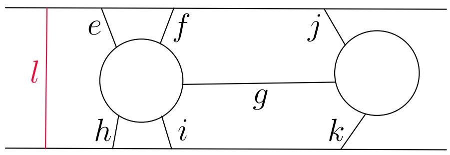
415. I: Flodproblemet, det er det der... [Königsbergproblemet]



416. A: Det er det samme, fordi det er igen hvis der er flere... Altså.

417. B: Fordi at det er det samme med, at du skal ud og gå en runde. Du må kun bruge én vej, eller du må kun bruge vejen en gang.

418. C: Jamen må man godt lige pludselig gå herfra og her til, altså ved at gå den der vej [fra land til land]?



419. I: Nej, floden fortsætter.

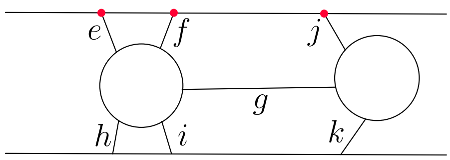
420. B: Ja, men så kan du jo også sagtens gå derfra og der til [g].

421. I: Kan I ikke prøve at tegne det, som vi har gjort her til?

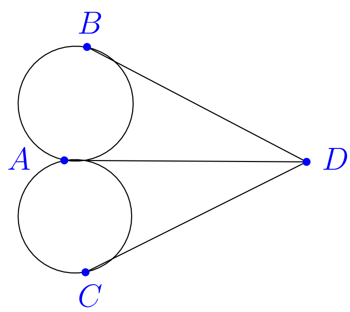
422. A: Altså den vil komme til at se sådan der ud.

423. B: Har vi ikke vist...

424. A: Det kan jo ikke lade sig gøre, fordi der er jo... Der er jo tre forskellige steder.



425. I: Man må gerne tænke på dem som én.



426. C: Nej, der er altså en ting, jeg ikke kan samle.

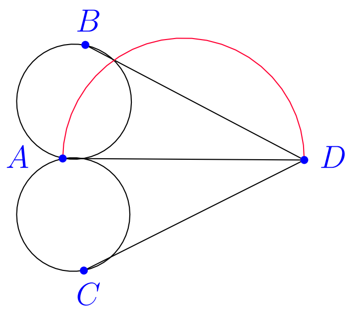
427. B: Jeg kan overhovedet ikke se det.

428. I: Nu kan I jo se, at der er 5, 3, 3 og 3.

429. B: Det kan ikke lykkes.

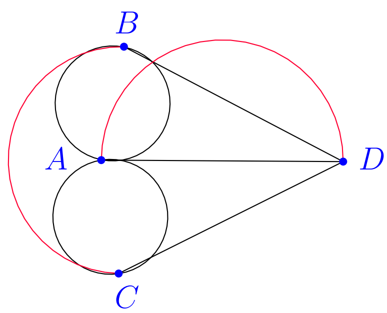
430. C: Der er ingen kant. Men hvad så, han [lærer] siger et eller andet med, at vi måtte lave en til bro ik?

431. B: Jo, hvad nu hvis vi laver en her?



432. C: Det ændrer den her til 6 [A] og den der til 4 [D]. Så kan det lykkes, du kan bare ikke ende samme sted, siger vores [hypotese] jo.

433. I: Hvad nu hvis jeg tager en ekstra bro her.



434. B: Den kan godt lade sig gøre nu.

435. C: Ja, fordi du har den der 1,2,3,4 [B], du har 4 [D], så har du 1,2,3,4,5,6 der [A] og hvor mange har du der [C]?

436. B: 4.

437. C: Ja, men så kan det godt lade sig gøre.

438. B: Det kan godt lade sig gøre.

439. C: Og du kan godt ende samme sted.

440. B: Fuldstændig.

441. C: Skal vi prøve?

442. B: Ja, men jeg kan overhovedet ikke se, hvordan dén der [grafen], den ligner det der [Königsbergproblemet].

443. A: Det vil jeg også gerne vide.

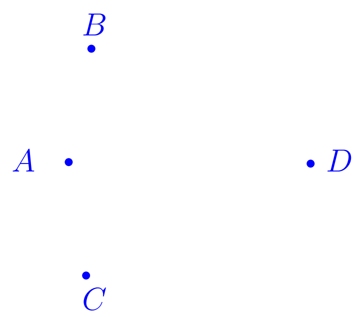
444. I: Hvis jeg nu tager denne her ik [den venstre ø] og så siger jeg, det her det er ét punkt.

445. B: Ja.

446. I: Og den her [den højre ø], det er et andet punkt. Og det her er et punkt [det øvre land] og det her er et punkt [det nedre land].

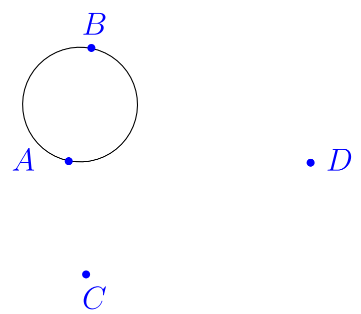
447. A: Ja.

448. I: Så skal jeg altså have 4 punkter.



449. B: Nåhhh ja, nu forstår jeg det!

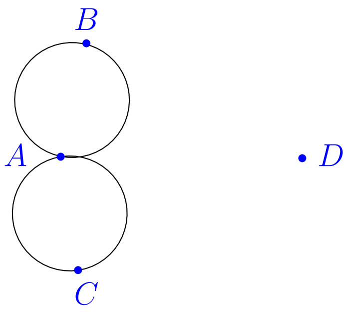
450. I: Og så går der to broer fra det her punkt [A] til det der punkt [B].



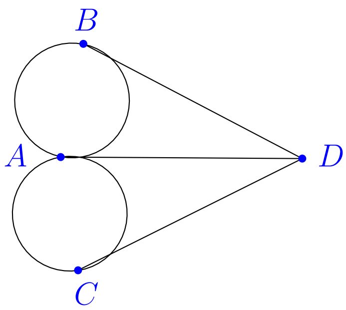
451. B: Ja.

452. A: Nåh ja, okay!

453. I: Så er der to broer til den anden side også.



454. I: Og en bro lige over [AD] og en til hver side



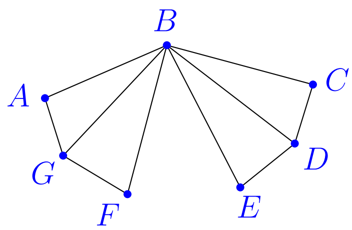
455. B: Og så laver vi en bro til fra den der til den der [fra A til C]. Ja, præcis, jeg forstår det!
456. A: Hvis vi tager en ekstra lige over [fra B til C], det er pænere.
457. B: Det er jo lige meget, det er same, same.
458. A: Hvis vi tager en lige over?
459. B: Så kan det stadig ikke lade sig gøre, for så er der kun 3 til den der [D].
460. A: Det er korrekt.
461. C: Ja, og 5 til den der [A].
462. I: Hvad sker der så?
463. B: Så kan den ikke lade sig gøre.
464. C: Jo, jo, vi har to ulige, så du kan godt komme rundt, men du kan ikke slutte samme sted.
465. B: Nåh ja, så kan du komme rundt, men du kan ikke ende her.
466. A: Yeah!
467. B: Vi har fundet ud af noget!
468. C: Ja!

469. A: Som vi rent faktisk kan bruge!

470. I: Prøv og overvej, hvordan I vil præsentere det, hvis I lige skulle fortælle de andre om det.

471. B: Vi skal bruge den helt store [tegningen med 6 kanter fra hver knude] synes jeg stadig!

472. A: Blev vi ikke enige om den her.

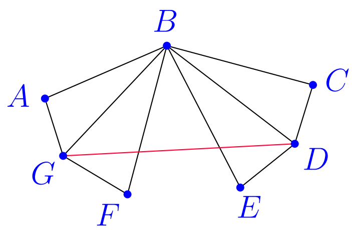


473. B: Okay, den der tegner vi og beviser at... Eller ikke beviser, siger at...

474. A: Det kan faktisk godt være, fordi den er sådan mere abstrakt i det, så man tænker, argh, det kan ikke lade sig gøre det der.

475. B: Mere street. Perfekt.

476. A: Og så kan man bare tegne én ekstra streg og så sige: Nu kan det lade sig gøre. Den er faktisk meget nem og vise det på, den der.



477. B: Så kunne vi komme rundt...

478. C: Men ikke ende samme sted.

479. A: Ja, så den her, den er faktisk meget god. Der kan vi vise begge to.

480. B: Og så viser vi også huset? Nej, den skrev vi jo deroppe [Ved den samme hypote om to ulige].

481. I: Så nu hvis jeg giver jer en fuldstændig sindsyg grat, så kan I faktisk fortælle mig om det kan lade sig gøre eller ej.

482. B: Ja, vi skal bare tælle os frem.

483. A: Ja, det er da bare luksus!

484. I: Hvad så med det modsatte problem?

485. B: Åh nej.

486. I: Nu må I gå på alle vejene, ligeså mange gange I vil,...

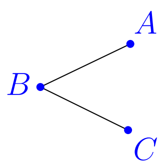
487. B: Men kun i et punkt?

488. I: Men kun i et punkt.

489. C: Hvad for noget? Det forstod jeg ikke.

490. B: Nej, du må gå på alle de veje du vil, men du må kun ramme punkterne én gang.

491. A: Du må kun krydse det samme punkt én gang. Så du kan godt gå ud og så tilbage igen. [starter i B]



492. B: Nej.

493. C: Jo, jo, men så rammer du det punkt igen [B]. Hvis du skal ud og tilbage igen.

494. B: Så det er lidt det samme.

495. A: Lige præcis. Hvis vi skal afsted her og her og her og skal ramme dem alle sammen ikke? Så du går ud og så tilbage. Nårh, så rammer du det der igen [B].

496. B: Ja, Så gør du sku da bare sådan her. [starter i A i stedet for B]

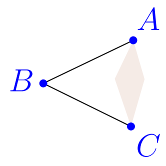
497. A: Hvis du ikke må ramme det samme to gange.

498. B: Så er det jo det samme.

499. A: Men godt må gå samme vej.

500. C: Ja, ja, men vejene fører jo hen til at punkt.

501. A: Hvis du siger... Du har to punkter ikke? og du skal derhen og tilbage igen. Så ender du jo med og... Og så skal du også her ud ikke. Og du siger, de der må ikke, der er no fly zone [mellem A og C].



Så kan du ikke gå ud og tilbage igen uden at ramme det her punkt herinde [B] to gange.

502. C: Det er rigtigt.

503. A: Hvad, hvordan, så er det jo lige meget om man kan...

504. I: Hvad nu hvis du startede her [A]?

505. A: Så er det jo bare en trekant. Men så er vi jo tilbage til det gode gamle.

506. B: Så er det sku da et nej.

507. C: Så tager vi bare her hen [A og C].

508. B: Man skal jo starte det samme sted og slutte det samme sted, som man starter.

509. I: Det er jo et spørgsmål om, hvad man snakker om.

510. B: Nå, det troede jeg.

511. I: Det er rigtigt, at hvis du skal ende samme sted, så kan den ikke.

512. A: Ja.

513. I: Men hvis du må ende forskellige steder, så må det være et ja, ikke? Hvis I arbejder lidt med den, tror I så i kan finde frem til noget ligeså generelt som den forrige.

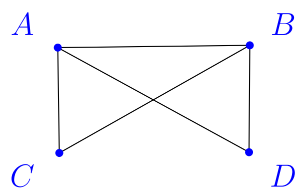
514. B: Jo. Det tror jeg. Vi har tyve minutter lige hurtigt.

515. C: [til lærer] Vi har fundet ud af sådan en generel hypotese om det med broen.

516. L: Det lyder godt. Er I klar til at sige noget?

517. C: Ja. [gruppen bruger 2 minutter på at planlægge fremlæggelsen] Okay, men hvad var det, du gav os [I]? Et eller andet problem vi også skulle prøve og løse her.

518. I: Nu giver jeg jer en eller anden mærkelig graf.



519. B: Nej.

520. I: Nej, siger du direkte?

521. C: Jo, den kan godt lykkes, du kan bare ikke slutte samme sted.

522. A: Men det har vi jo tjek på, det der.

523. I: Ja, men nu er det byerne.

524. B: Hvis den der, der, der...

525. C: Du må godt bruge vejene flere gange.

526. B: Der, den rammer sku da.

527. A: Men hvad skulle det hjælpe os?

528. B: Men hvis du starter der [A], der, så har du jo ramt.

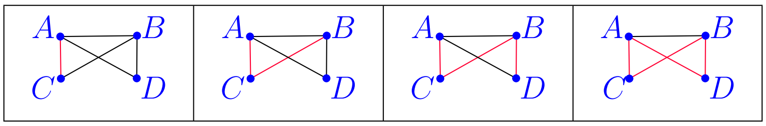
529. A: Du kan jo ikke udnytte, at du har brug for de veje.

530. I: Så vi er faktisk ude i, at den der [AB] er fuldstændig unødvendig.

531. B: Ja, men den der er også [AD] hvis du ikke skal tilbage.

532. I: Ja, og hvis du skulle tilbage.

533. B: Så tager du bare der, der, der, der.



534. A: Nåh, okay. Så vi skal ikke bruge alle veje.

535. B: Det er jo svært, når vi lige har tænkt på, at vi skulle bruge alle.

536. I: Ja, det er sådan lige og vende tingene lidt på hovedet.

537. C: Jeg forstår ikke rigtig det der med, okay, du må godt bruge vejen flere gange, men hvis du bruger vejen flere gange, så rammer jeg jo byen flere gange.

538. B: Så er det jo lige det med et modeksempel.

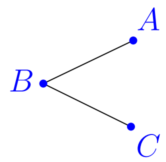
539. I: Hvis du nu bare har det helt simple tilfælde, hvor du har to punkter med en lige vej imellem, og jeg siger til dig, at du skal gå til begge byer og du skal ende det samme sted igen. Så skal du jo tilbage igen.

540. C: Ja, men så rammer jeg også den by to gange [startbyen].

541. A: Men så er det jo det der, vi snakkede om...

542. B: Du skal jo også tilbage.

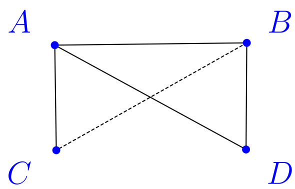
543. A: Du starter her ikke [B].



Du skal starte her ikke, så går du ud [til A] tilbage ikke, men så fordi du også skal herhen [C], så krydser du jo det her punkt [B].

544. B: Men det er først, når vi laver et punkt der [C].

545. A: Hvis vi nu bare streger den her ikke [BC og starter i A].



Og så siger, så skal du gå her [AB], her [BD] og herover [DA]. Så krydser du igen det der punkt [A]. Så du kan ikke rigtig udnytte det der dobbeltvejs system. [Herefter bliver gruppen kaldt til tavlen]

546. C: Jeg tænkte, det var godt.

547. B: Hvorfor blev han [lærer] slet ikke glad for det?

548. C: Det er som om, han ikke værdsætter vores arbejde.

549. I: Kunne I måske prøve at lave et bevis?

550. A: Dem er jeg ikke god til.

551. B: Det er jeg heller ikke.

552. C: Hvis jeg nu skulle bevise, at hver gang alle var lige...

553. A: Skal vi bevise det sådan formelagtigt?

554. I: Ellers kan I arbejde med den omvendte: Hvis der flere en to ulige, så kan det ikke lade sig gøre.

555. B: Så vil det sige, to ulige...

556. A: Hvis der er én ulige, var det ikke der, vi burde starte?

557. C: Kan det lade sig gøre kun at have én ulige?

558. A: Nej, det kunne det jo heller ikke. Vi kunne jo ikke komme hjem igen, hvis der bare var én ulige. Var det ikke det vi blev enige om?

559. C: Jo, der skulle være to ikke?

560. I: Kan man lave en tegning, hvor der kun er én der er ulige?

561. B: Nej.

562. A: Næh, det kan man da ikke.

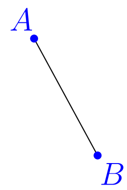
563. B: Det kan ikke lade sig gøre... Jo, det kan det faktisk...

564. A: Fordi hver gang du bare sætter en til...

565. B: Jo, det kan du faktisk godt.

566. A: Hvordan?

567. B: [tegner og peger på A]



568. A: Ja, okay.

569. I: Men der er da to, der er ulige. Den anden [B] er da også. Der er to endepunkter.

570. B: Pis. Det var tæt på!

571. A: Men kan du jo ikke nej, fordi at den der... Hver gang du sætter en streg, så vil den anden også reagere på den streg.

572. C: Så er det slet ikke relevant at diskutere, hvis der kun er en ulige.

573. A: Nej. Det kan ikke lade sig gøre, nej.

574. B: Vi kan også lave en hypotese, der siger, at man ikke kan lave en, hvor der to ulige.

575. A: Én ulige.

576. C: Ja.

577. B: Nåh ja, én ulige.

578. C: Ja.

579. A: Det vil være sådan en lettere ligegyldig hypotese.

580. B: Ja...

581. A: Det vil være et argument for, hvorfor vi tager udgangspunkt i to og ikke i én.

582. B: Ja. Skriv lige hurtigt [til C].

583. C: Hvad skal jeg skrive?

584. A: Bare skriv: Der vil aldrig kun kunne være ét ulige... Et punkt med kun én ulige eller et eller andet. Jeg ved det ikke.

585. C: Altså: Vil figuren ikke kunne laves? Eller vil det bare ikke kunne hvad?

586. B: Den vil ikke kunne laves.

587. C: Altså en figur kan ikke laves.

588. A: Ja, der findes ikke en figur, hvor der kun er et ulige punkt.

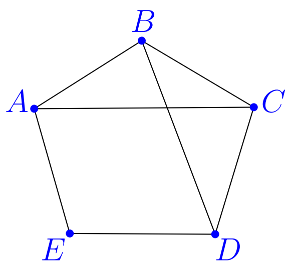
589. B: Tag min her [tegningen af to forbundne punkter]. Der er ikke noget punkt der.

590. I: Så er spørgsmålet: Kan man lave et ulige antal ulige?

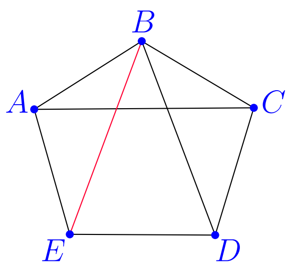
591. B: Det kan man vel heller ikke.

592. C: Hvad for noget?

593. A: Det ved jeg sku ikke. 3, 3, 3, 3 og 2



594. B: Og så en hele vejen hen.



595. A: Nej, nej, for så skal den her [E] også lige have en til.

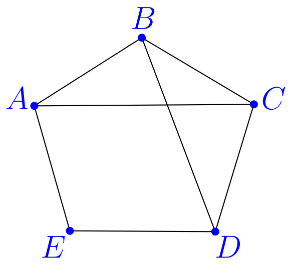
596. B: Ja, ja, så er der 3 ulige. Nej, hvad laver du [A: har skrevet 2/3 ved E og 3/4 ved B]?

597. A: Jo. Godt, så er der 4 [B].

598. B: Men du skulle jo ikke lave den der [BE]. 1, 2, 3...

599. A: Men der skal jo stadig være 4 punkter...

600. B: Men den der funkeor sku da.



601. A: Der er også et lige antal. Der er 4 punkter her [A, B, C, D]. Du kan jo ikke lave 3 punkter, når der skal være minimum 4.

602. B: Nej.

603. A: Hvis der skal være 4 [veje], bliver vi nødt til at have 5 punkter. Der skal være et punkt mere end der skal være veje.

604. B: Nej, fordi da du havde 6 punkter, der kunne du godt lave 6 veje fra hver.

605. I: Hvis vi nu bare har 5 punkter. Kan vi så forbinde dem sådan at der bliver et ulige antal ulige?

606. A: Alle sammen?

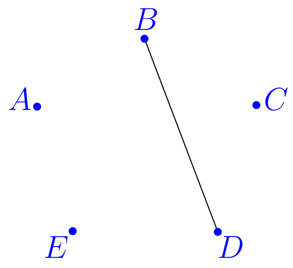
607. I: Bare 3 af dem.

608. B: Nej, det kan vi ikke.

609. C: Det er rigtigt, hvis der er... Altså skal vi bare begynde og forbinde eller hvad?

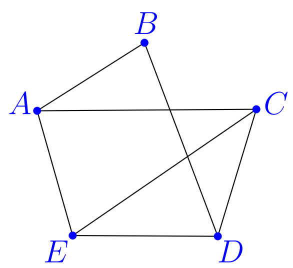
610. I: Ja, prøv bare.

611. C: Okay, så kan vi bare lave en her ikke?



612. I: Ja.

613. C: Og så der og så siger vi, de her to, den har 1,2, nu har den 3, en to tre. Den har 3.
Okay, hvor mange har den her? Den har 3, den har 3, den har 3, den har 3 og den har 2.

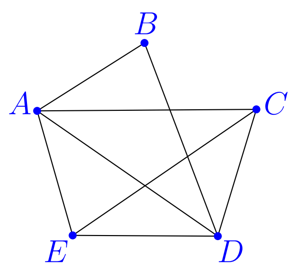


614. A: Og 3 her.

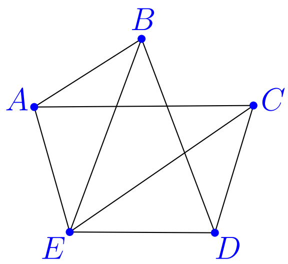
615. C: Ja, så er der også 4, der har 3 jo.

616. I: Så det var igen et lige antal.

617. C: Ja, og hvis du forbinder der, så får den der 4 og den der får 4 og så er der kun to.



Og hvad hvis du forbinder der?



Så får den 3... Okay nu tager jeg lige og forbinder der. Den har 4 nu og den har 3 og den har 3 og den har 3 og den har 3. Så hvor mange har 3 nu?

618. I: 4. Så det kan ikke lade sig gøre?

619. C: Nej.

620. A: Nej.

621. I: Så hvis vi nu skulle vise, at det kun virker for lige, så ville det også være ok at sige, at hvis vi nu har et lige antal ulige.

622. C: Fordi det er det eneste, vi kan.

623. A: Så der skulle være minimum 2.

624. B: Der skal være minimum to ulige.

625. A: Og der skal være et lige antal ulige.

626. I: Ja, der må maks være 2.

627. A: Maks være 2?

628. I: Ja, for at det kan lade sig gøre, at lave en rute. Hvis der er to, så starter og ender vi hver for sig og hvis der ikke er nogen, så kan vi ende samme sted.

629. A: Hvis der er 3 ulige, det kan der så ikke. Hvis der er 4 ulige, så kan man ikke komme rundt og ende et andet sted eller hvad? Så kan du ikke ramme alle vejene?

630. I: Ja, det var jo det, I påstod på tavlen.

631. A: Så kan man ikke komme rundt eller hvad?

632. C: Nej.

633. I: Så I har 3 påstande:

- Der er kun en rute, når der kun er lige.
- Der er en rute uden at ende det samme sted, når der er to ulige.
- Hvis der er mere end to ulige, så kan det ikke lade sig gøre.

Og den med én ulige den har vi udelukket, fordi det ikke kan lade sig gøre, vejen vil altid stoppe i et andet punkt.

634. A: Ja. Vi prøvede jo at bevise den der lige ting.

635. Det må være lettest at bevise den, hvor at man siger, at man ikke kan ikke lave en, hvor der er et ulige antal ulige.

636. I: I prøvede jo bare at tegne.

637. A: Skal vi lave sådan et bevis med at flade + punkter-kanter er lig med agtigt? Er det sådan noget du vil have os ud i?

638. I: Jeg undrer mig bare, jeg har ikke nogen plan for, hvor I skal hen overhovedet.

639. B: Ja men, hvis du ikke har, så har vi heller ikke.

640. I: Man må jo gerne undre sig alligevel og prøve at tænke over, hvordan kunne vi... Hvad ville være nemmest at bevise og i så fald, hvad ville man gøre?

641. B: Hvordan laver man et bevis overhovedet?

642. I: Hvordan man laver et bevis?

643. B: Ligesom Pythagoras beviset eller sådan noget.

644. A: Stadig altså, det er jo det samme princip.

645. B: Ja, ja, men har han lavet det i sin tid?

646. A: Ja men det er jo så det der med, at han tegnede og tegnede og tegnede og...

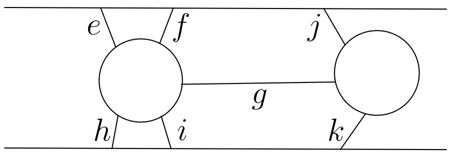
647. B: Og han brugte rimelig lang tid.

648. A: Sikkert. Jeg synes altså stadig, at den der [tegningen med 6 veje fra hvert punkt], den er nice! Jeg synes, vi skal klippe den ud og hænge den op. [Her stopper timen]

F Transkription af elevpræsentationer ved tavlen

1. elevpræsentation

1. E1: Det her det er øer, det er vand og så det der, det er broer.



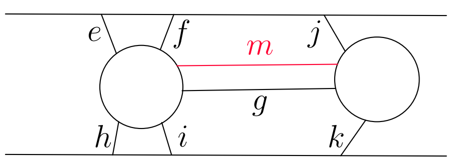
2. L: Det er broer og hvor er vandet?
3. E1: Det er der.
4. E2: Der laver vi lige bølger.
5. E1: Ja, pænt vand.
6. L: Ja, okay, fint.
7. E2: Det der, det er broer ikke.
8. L: Ja.
9. E2: Og så handler det om, at man er sådan nogen turister, som skal se de her broer. Alle sammen.
10. L: Ja, gå over dem.
11. E2: Jo, altså, ja, man skal gå over broerne, men man må ikke gå over samme bro to gange.
12. L: Ja, for det gider man ikke.
13. E1: Man skal stoppe det samme sted, som man starter.
14. E2: Så hvis man starter der [peger på venstre ø], så skal man slutte der igen og man må ikke gå over samme bro og man skal se dem alle sammen.
15. E1: På én tur.
16. L: Ja og hvad har I så tænkt, eller hvad har I arbejdet med?

17. E2: Altså, vi har ikke løst den selv vel, men vi har f.eks. prøvet sådan noget... Altså f.eks. så går man måske denne der vej og krydser over og rundt. [j, f, g, k, i , h] Men så kan man f.eks. ikke starte herovre igen, vel [mangler e]. Så der er hele tiden en eller anden bro, man mangler.
18. L: Så indtil videre har I i hvert fald ikke løst problemet.
19. E2: Nej, vi mangler altid en bro.
20. L: Tror I, at det kan løses?
21. E2: Altså du lød ret overbevisende om, at det kunne man godt, men vi tror det ikke rigtigt.
22. L: Okay, fint. Giv dem en stor hånd.

2. elevpræsentation

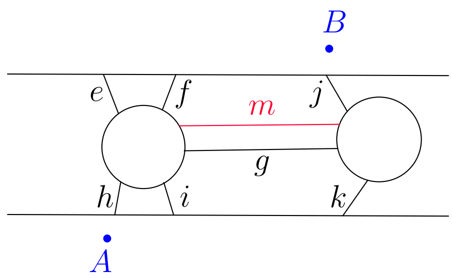
Stadig om Königsbergproblemet. Elev 3 og 4 fremlægger. Elev 5 og B sidder i klassen.

23. E3: Vi har tænkt, at det ikke kan lykkes, hvis det er, at der er det antal broer. Og ingen mellem. Men hvis det er, at du sætter en til bro ind, så tror vi på, at det kan lade sig løse. Uanset hvor du sætter broen.
24. L: Så det er jeres hypotese.
25. E3: Ja, det må man sige. Vi har ikke løst det endnu, men vi går ud fra, at man godt kan, hvis man skal.
26. L: Kan du ikke komme op og tegne en bro til og så vise, at det kan lade sig gøre?
27. E4: Jo, men vi kan ikke komme tilbage.
28. E3: Vi har også snakket om, at vi ikke kan komme tilbage til der, hvor vi startede.
29. E4: Vi har fundet ud af, at vi godt kan komme over alle broerne.
30. L: Ja, prøv og kom en gang. Hvis du får lov at bygge en bro. Nu får E3 lov til at bygge en bro og så påstår hun, at man godt kan.
31. E3: Vi har bygget en bro her. Lige indtil videre.



32. Okay, så prøv... Prøv at vise en rute så. Hvordan man kan.

33. E3: Jeg skal lige tænke ikke også. Okay. Men så starter vi her, ik [A]?



Og så går vi denne her vej [h, e, f, i, k, g, m, j] og så ender vi bare her [B].

34. B: Ja, men du startede jo...

35. E3: Ja, det er jo det, jeg siger, vi har ikke løst den jo!

36. L: Okay, så nu kan du komme rundt i hvert fald og se alle broerne, men du startede et andet sted.

37. E3: Ja og vi bliver nødt til at flyve tilbage.

38. L: Du bliver nødt til at flyve tilbage, men vi har også et lille fly allerede.

39. E5: Jeg ved det ikke vel, men hvis vi nu sætter den sådan ud til, sådan ud til, kan man så ikke?

40. E3: Ja, men det var jo det, vi var gået i gang med, men der er vi bare ikke nået til endnu.

41. L: I kan prøve at kigge på og se, om det kan lade sig gøre. Men altså I gætter på, at hvis man bygger én bro til, så kan I prøve og se om man kan komme tilbage igen. Men godt, giv dem en stor hånd.

3. elevpræsentation

Elev 6 og 7 præsenterer.

42. L: Nå, lad os høre en gang, hvad de har arbejdet med her.

43. E6: Ja, men vi fik til opgave at prøve og finde ud af, om vi kunne modbevise, at hvis nu at der var sådan en gruppe, der skulle give håndtryk til hinanden, at der er et lige antal personer, der har givet et ulige antal håndtryk. Og det skulle vi modbevise.

44. E7: Kan du ikke lige skrive det ned, så er det lidt nemmere at forholde sig til.

45. L: Ja, det er lidt svært sådan og holde helt styr på, hvad problemet er her. Der er en påstand, det er noget, som jeg har sagt. Og det skal I bare modbevise.

46. E6: [Skriver på tavlen: Der er et lige antal personer, der har givet et ulige antal håndtryk.]

47. L: Så tanken er, at der i hvilket som helst selskab her. Når man går rundt, så giver man altid hånd til nogen ikke, når man kommer til en eller fest, så giver man hånd til nogen og siger goddag. Men man gør det ikke til alle, fordi nogen sidder ovre i hjørnet og et eller andet, eller de er ude på toiletttet, så nogen har man ikke sagt hej til, men alle siger hej til nogen. Så er påstanden, at der er et lige antal personer, der har givet et ulige antal håndtryk. Og så om det altid passer, så I skulle bare lave et selskab, hvor nogen har givet hånd, hvor det ikke passer ikke.

48. E7: Jo. Hvilket faktisk er vanskeligt.

49. E6: [Bliver færdig med at skrive op] Og det skulle vi så modbevise.

50. L: Prøv og lav et eksempel, med nogle punkter og nogen, der siger hej.

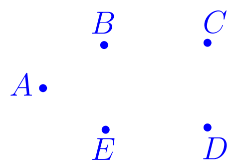
51. E6: Ja, men altså vi prøvede ret mange forskellige.

52. E7: Ingen af dem virkede.

53. E6: Ja, det virkede ikke rigtigt.

54. L: Prøv bare at vise et eksempel til klassen, hvordan man kunne lave 6 mennesker og der er nogen, der siger hej til hinanden og sådan noget.

55. E6: Okay, altså vi prøvede en, som altså, som vi synes virkede rimelig god, men det gik så ikke. Vi prøvede aller først med sådan en

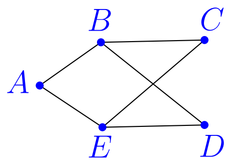


56. L: Hvor der er 5 mennesker.

57. E6: Der er 5 mennesker, så det er altså et ulige antal.

58. L: Nåh nej, det behøver der jo ikke at være. Det er lige meget hvor mange der er i selskabet.

59. E6: Nå okay. Det er stadig et ulige antal og så tænkte vi, at hvis de her to sagde hej til hinanden og de her to sagde hej til hinanden og de her. Sådan her ikke.



60. Okay.

61. E7: Det holder heller ikke.

62. L: Der er noget med, hvordan det er stillet op der, men prøv bare at fortsætte.

63. E6: Ja, det gik ikke. Der er et ulige her ikke [B].

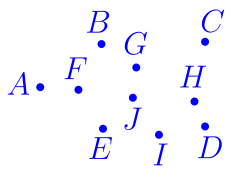
64. L: Ja, der er 3.

65. E6: Og der er et ulige her [E].

66. L: Ja, det vil sige, at der er et lige antal, der har givet et ulige antal håndtryk ikke.

67. E6: Ja, og det har vi så ikke modbevist.

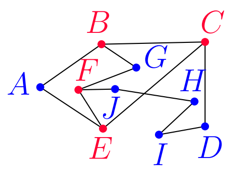
68. L: Nej, men altså man kan jo stille det op sådan her og sige, det er jo lige meget hvor mange der er. Det er lige meget hvor mange mennesker, der er i selskabet, man kan bare begynde og kigge

    De siger hej og de siger hej... osv.

69. E6: Men det gik ikke.

70. L: Og så kan man begynde og tælle og så kan man se hvor mange, der har givet et ulige antal håndtryk her.

    Der er et lige antal, der har givet et ulige antal håndtryk. I får lov til at arbejde lidt videre og se om I kan løse problemet. Giv dem en stor hånd.

4. elevpræsentation

Elev 8 og 9 præsenterer.

71. E8: Okay, vi fik en opgave. Du var så irriterende, at give os sådan en irriterende opgave, hvor at vi skulle lave... Eller vi sådan en ligning som...

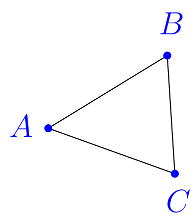
72. E9: Hvordan var det en påstand eller var det en...

73. L: Det er vel bare en påstand eller en hypotese.

74. E8: Som så sådan ud, at hvis vi havde flader + punkter - kanter, så giver det 1.

75. L: Kan I ikke prøve at lave en simpel graf. En meget simpel figur bare med en firkant eller sådan noget.

76. E8: Ja, okay.



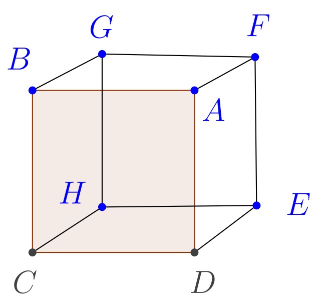
77. E9: Og så flader: Der er én flade, ik?

78. L: Så en flade, det er sådan det der areal ikke?

79. E9: Ja, og der er 3 punkter og kanter, det er stregerne. Så det bliver

$$1 + 3 - 1 = 1$$

Og det bliver så 1. Og det skal vi så prøve at modbevise. Og det tog os rimelig lang tid, men så tænkte vi 3-dimensionelt.



Og så fladerne der er en, og så en bag ved og 4 rundt om, så det er 6.

80. L: Ja, det er en terning ikke.

81. E9: Og punkterne der er så 4 der og så 4 i den anden ende, så det vil sige 8. Og kanter er 4 der og 4 der og så 4 rundt om.

82. E8: Og det bliver så
$$6 + 8 - 12 = 2$$

83. E9: To.

84. L: Okay. Det var jo meget kvikt og jeg tror også, at denne her gruppe fandt ud af det samme her, er vi enige? [Elever i gruppen, der sidder ned, siger ja.]

85. L: Så I kigger på to dimensioner, så gælder ikke, der gav den 1. Når I gik op til 3 dimensioner, så gav den 2. Jamen, så påstår jeg da bare noget andet: Hvis det er i 3 dimensioner, så...

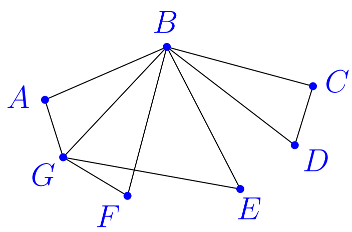
86. E8 og E9: Så giver det 2.

87. L: Så giver den vel bare 2. Det må I modbevise. Det må I gå ned og arbejde lidt med.

5. elevpræsentation

Gruppen præsenterer.

88. L: Ja, vi kigger en gang.
89. A: C, vil du starte.
90. C: Ja, vi har en hypotese, der siger, at fra hvert punkt skal der være et lige antal veje ud, før du kan ende samme sted. Men hvis der er to punkter, der har et ulige antal, f.eks. to af dem har 3, så kan det godt lykkes, du kan bare ikke ende samme sted, som du startede. Og det samme gælder egentlig også, med det der, altså det vil vi så bevise via vores tegning, at det samme gælder så også, når du har det der med de der broer. Hvis du laver en ekstra bro så vil det svare til, at du har et lige antal på de fleste af dem og så to af dem, er der et ulige antal veje. Det vil sige det der med, at man kunne godt komme rundt, men du kan ikke ende samme sted, som du sluttede. Hvis du tilføjer to broer, så kan du ende med at have et lige antal hele vejen og så kan det godt lykkes.
91. L: Godt, lad os lige hurtigt få styr på, hvad der bliver sagt. Allerførst så arbejdede de med: Kan man gå rundt og ramme alle punkterne uden og ramme den samme to gange. Den anden er: Kan de gå rundt, ramme alle punkter, og komme hjem igen.
92. A: Altså alle vejene.
93. L: Og bruge alle vejene.
94. A: Det er det væsentlige.
95. B: Du må bruge vejene én gang. Du må ramme punkterne ligeså mange gange, du vil.
96. L: Okay, så der forskel på om vi skal ramme punkterne eller benytter alle vejene ik?
97. A: Men nu benytter vi alle vejene, men vi må kun bruge dem én gang og vi skal ende det samme sted.
98. L: Godt. Kan I ikke lige fortælle den der figur, den nederste, det ser mærkeligt ud, med det nederste 2-tal der [Gruppen har skrevet 2 ud for F].



99. A: Men det er igen, det er, hvor mange veje der er ud fra hver punkt, hver by. Altså hvor mange muligheder, der er.

100. L: Er der et punkt der også [krydset mellem GE og BF]?

101. C: Nej, der er bare...

102. B: Nej, det er bare det her punkt [F].

103. C: Der fordi, at hvis du ikke havde det punkt. Det er bare fordi, at der skal være et lige antal veje ud fra hver.

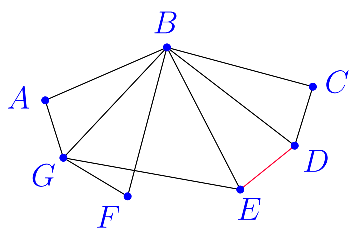
104. L: Og så siger I, nu er der lige på hver og så påstår I at...

105. C: Ja, at man godt kan komme rundt og ende samme sted.

106. A: [Fører kridtet rundt startende i B, BC, CD, DB, BA, AG, GB, BF, FG, GE, EB] sådan.

107. C: Fordi du har benyttet alle veje og så er det lige meget, at du egentlig rammer det her punkt [G] to gange. Du har bare benyttet alle veje og du ender samme sted.

108. A: Men hvis vi så, prøv at lave en streg der [ED].



Så bliver der lige pludselig 3 der [D] og det vil sige, det laver... Ja, to gange 3 [også E].

109. C: Og det vil sige, at vi kan stadig godt komme rundt, men nu kan du så ikke komme rundt og, altså, ende samme sted.

110. A: Som man startede.

111. L: Så det er jo meget interessant. Så hvis der er 2 veje, 4 veje, 6 veje ud af en by, så kan man godt komme rundt og komme hjem igen.

112. C: Ja, og vi har ikke kunnet modbevise den, fordi vi lavede også en, hvor der var 6 veje fra hvert punkt og der kom vi også rundt.

113. L: Men altså lige nu, altså det som I gør lige nu, det er jo interessant, fordi allerførst så siger I jo: Det passer for den der, men passer det altid?

114. A: Det er det, vi har prøvet på at vise.

115. C: Altså vi har lavet virkelig mange, hvor vi har, vi har ikke kunnet finde en, hvor det ikke passede.

116. L: Men hvordan fungerer det i matematikken? Bare fordi vi har lavet mange, kan vi så regne med, at det altid gælder?

117. C: Nej, det passer vel indtil, det er modbevist bare.

118. L: Det er den ene måde at gøre det på ikke. Det er, at vi kan prøve at komme med et modbevis. Jeg kan bare lave én figur eller en graf, hvor det ikke passer ikke.

119. A: Vi vil gerne have en.

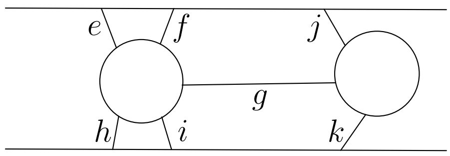
120. L: Ellers bliver vi nødt til at prøve at lave et eller andet generelt bevis for, om det virkelig er sandt ikke.

121. C: Ja.

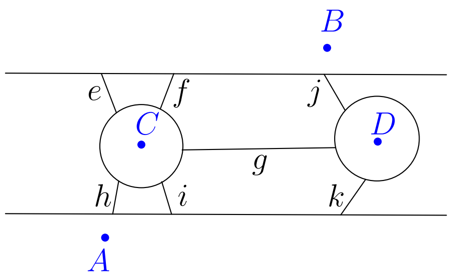
122. L: Yes.

123. A: Men så var der den med broerne, som vi så kan bruge det der til at, ikke at løse, men i hvert fald give et bedre overblik over.

124. L: Ja, skal vi prøve at kigge på den.



125. C: Ja, du havde en ø her og en ø her ikke. Og så havde du vand. Og så havde du broerne. Og så så vi jo så, at her har du så, hvis vi tager det her som et punkt [A]



126. L: Så hvert landområde er et punkt her.

127. C: Og hvis vi så siger, at hvis du skal ud til det her punkt [D], men her har du så to veje og her har du en vej.

128. L: Så du kan bare skrive et stort 3-tal ud fra den nok [D].

129. C: Og her har du har du 3 veje [A], nu bliver jeg forvirret...

130. A: Du har også 3 på den der ovre [B] og 5 ud fra det der [C].

131. L: Ja, sådan. Og hvad så?

132. C: Og vores hypotese, at du må kun have maks. to punkter, hvor der er ulige, før det kan lykkes. Det vil sige vi har 4 punkter der ulige, så det kan ikke lykkes. Så du kan ikke komme rundt.

133. L: Alle sammen er ulige her ikke?

134. C: Ja.

135. L: Og vi kan godt lide lige tal, når vi arbejder med det her ikke.

136. C: Så det var det der med, at så tænkte vi okay, hvis du så bare tager og laver en bro, og det er lige meget, hvor det er, så vil i hvert fald to af punkterne blive lige.

137. L: Og det viste E3 før.

138. C: Det viste E3 også og så kan du lykkes, men du kan ende samme sted. Og det var også det vores hypotese sagde før.

139. A: Men så hvis...

140. B: Hvis du sætter to broer.

141. C: Hvis du sætter to broer, jamen så bliver de alle sammen lige og så kan du godt.

142. L: Lad os lige prøve og holde fast først. Fordi E3 byggede én bro og så viste hun, at så kunne man godt komme hele vejen rundt.

143. C: Bare ikke ende samme sted.

144. B: Men ikke komme hjem igen.

145. L: Men I siger det er lige meget, hvor man bygger broen, så kan man altid komme rundt. Er det rigtigt?

146. A: Jahh...

147. L: Ja, men prøv og kig en gang på jeres figur. Lige meget hvor jeg bygger en bro, så påstår jeg, så kan jeg altid komme rundt og se alle broer.

148. C: Det var fordi, vi tænkte, når vi lavede vores punkter ikke...

149. A: Jo, jo, det passer meget godt.

150. B: Jo, jo, det gør det.

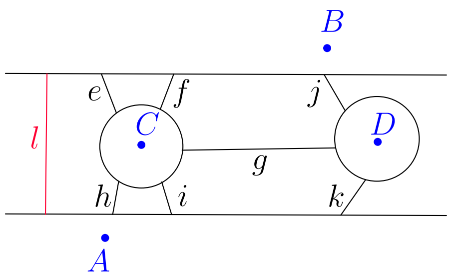
151. L: A, hvorfor tænker du sådan?

152. A: Jo, fordi det er jo... Det er jo altså, ja...

153. B: Lige meget hvor du sætter den, så får du to lige.

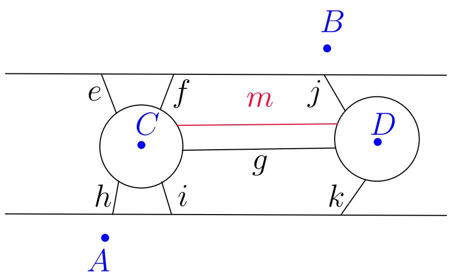
154. L: Ja, hvorfor?

155. B: Fordi hvis du sætter en her, så kommer der både en her og så bliver det til 4 [A] og det til 4 [B].



156. L: Ja og prøv at lave de andre eksempler. Og hvor kunne du ellers finde på at lave en bro?

157. B: Der



Og her, så er der 6 og 4.
Og der og der [mellem B og D], så er der 4 og 4.
Og der og der [mellem C og A], så er der 4 og 6.

158. A: Og så videre.

159. L: Lige præcis ikke.

160. A: Men så vil man igen, kun kunne komme rundt, men ikke komme hjem.

161. L: Ja.

162. A: Det er derfor vi skal bruge to broer, før det kan lade sig gøre.

163. L: Okay, ja. Rigtig god hypotese, om det er sandt det...

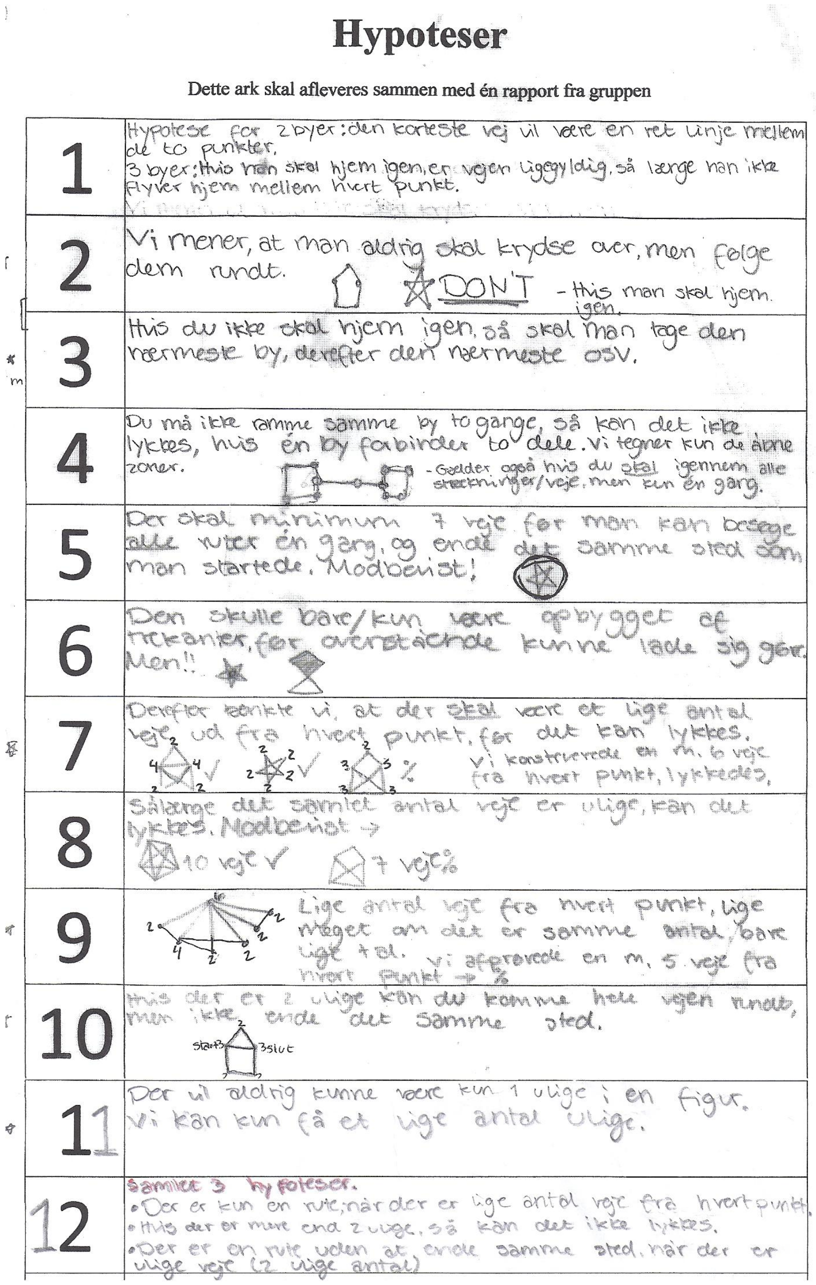
164. B: Finder vi aldrig ud af.

165. L: Det finder vi måske ud af på et tidspunkt, vi ved det ikke.

166. C: Ja.

G Eksempler på udfyldte hypoteseark

Gruppens hypoteseark



Hypoteser

Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	Hypotese for 2 byer: den korteste vej vil være en ret linje mellem de to punkter. 3 byer: Hvis han skal hjem igen, er vejen ligegyldig, så længe han ikke flyver hjem mellem hvert punkt.
2	Vi mener, at man aldrig skal krydse over, men følge dem rundt. DON'T - Hvis man skal hjem igen.
3	Hvis du ikke skal hjem igen, så skal man tage den nærmeste by, derefter den nærmeste osv.
4	Du må ikke ramme samme by to gange, så kan det ikke lykkes, hvis én by forbinder to dele. Vi tegner kun de åbne zoner. - Gælder også hvis du skal igennem alle strækninger/veje, men kun én gang.
5	Der skal minimum 7 veje før man kan besøge alle ruter én gang, og ende det samme sted som man startede. Modbevist!
6	Den skulle bare/kun være opbygget af trekanter, før overstående kunne lade sig gøre. Men!!
7	Derefter tænkte vi, at der skal være et lige antal veje ud fra hvert punkt, før det kan lykkes. 2 4 4 2 2 ✓ 2 2 2 2 2 ✓ 2 3 3 3 3 % Vi konstruerede en m. 6 veje fra hvert punkt, lykkedes.
8	Sålænge det samlet antal veje er ulige, kan det lykkes. Modbevist → 10 veje ✓ 7 veje %
9	6 2 2 2 4 2 2 Lige antal veje fra hvert punkt, lige meget om det er samme antal, bare lige tal. Vi afprøvede en m. 5 veje fra hvert punkt → %
10	Hvis der er 2 ulige kan du komme hele vejen rundt, men ikke ende det samme sted. 2 Start 3 3 slut
11	Der vil aldrig kunne være kun 1 ulige i en figur. Vi kan kun få et lige antal ulige.
12	Samlet 3 hypoteser. • Der er kun en rute; når der er lige antal veje fra hvert punkt. • Hvis der er mere end 2 ulige, så kan det ikke lykkes. • Der er en rute uden at ende samme sted, når der er ulige veje (2 ulige antal)

Figur G.1: Gruppens hypoteseark.

2. gruppes hypoteseark

Hypoteser

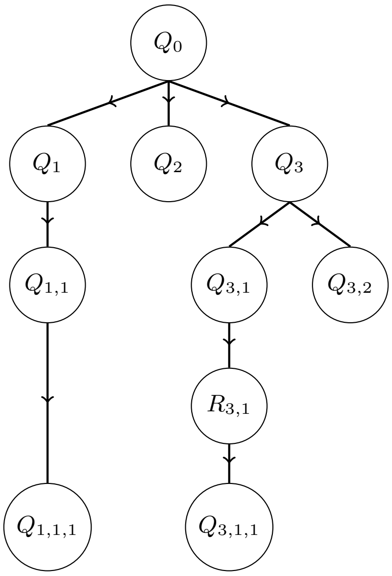
Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	Måle korteste afstand, fordi det er mest logisk, men dette vil vi selvfølgelig lade komme an på en prøve.	UDDYB
2	Tage en "centrumprik". Ved at tage en centrumprik ligger byerne tæt på, og der er derfor kortest afstand hvis man også skal hjem igen.	H byer
3	Efter han har været i alle byer, behøver han ikke komme hjem igen. Hans arbejde er slut når han har været i alle byer. Derfor behøver vi ikke inddrage hjemturen	
4	Vi måler afstanden fra hvert eneste punkt, til hvert eneste punkt. Derefter laver vi et "træ", hvor vi lægger tallene sammen, så vi finder den korteste rute. Start = KBH.	UDDYB
5	Efter vi har lavet et træ med 4 byer og fundet den korteste afstand, tegner vi to ekstra byer og måler igen alle veje. Vi laver et træ med alle ~~7~~ byer. Denne gang laver vi flest mulige flyveforbud for lave forhindringer og gøre opgaven svære.	
6	Vi prøvede at modbevise påstanden $F+p-k=1$. Her modbeviste vi den med at rykke en dimension op (3D), hvilket gav 2, men vi måtte ikke rykke en dimension op, så det vil vi prøve at modbevise igen	
7	Nu startede vi med at lave en formel, som gav 2 i facit, så skulle vi efter udarbejde figuren ud fra formlen. Fra før kan vi konkludere, at når man sætter en kant mere, så kommer der en ekstra flade, og de går derfor ud med hinanden.	
8	Vi mente at ved at bare lave et punkt uden at lave nogle kanter, som hænger fast i punktet kunne vi nemt modbevise det. Det gjorde vi så.	
9		
10		

Har I flere hypoteser, så skriv på bagsiden.

Figur G.2: 2. gruppes hypoteseark.

S&F-model for 2. gruppe



Figur G.3: S&F-model baseret på hypotesearket for 2. gruppe.

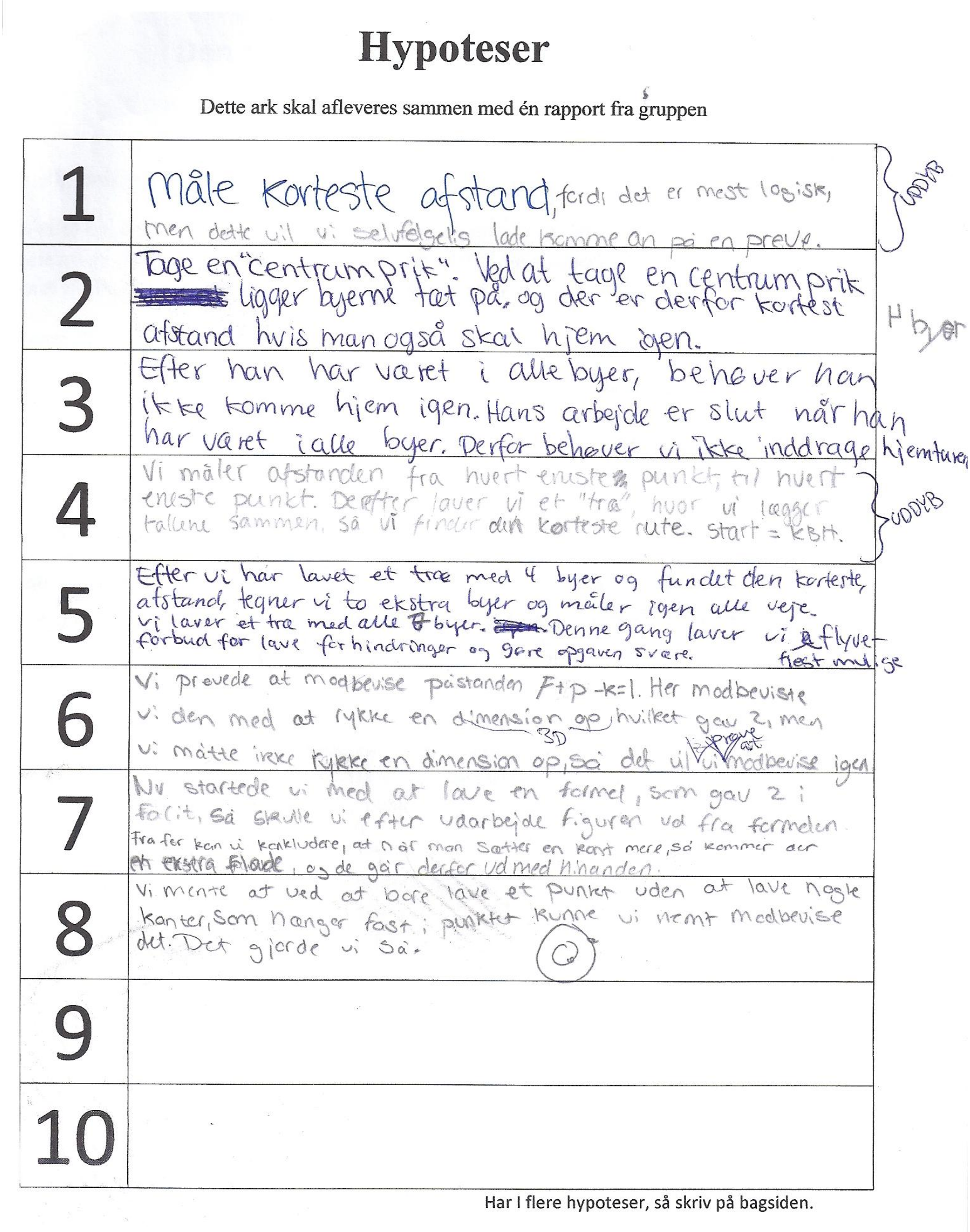
Q_0: Den Rejsendes problem.

Q_1: Hyp. 1: Kan man måle sig frem?
$Q_{1,1}$: Hyp. 4: Hvordan laver man en afstandstabel?
$Q_{1,1,1}$: Hyp. 5: Hvad sker der, hvis man ikke kan flyve mellem to byer?

Q_2: Hyp. 2+3: Skal den rejsendes vende hjem eller ej?

Q_3: Hyp. 6: Er det rigtigt, at Flader + punkter - kanter = 1?
$Q_{3,1}$: Hyp 6: Hvad sker der, hvis figuren er i 3D? F.eks. en terning, som har 6 flader, 8 punkter og 12 kanter.
$R_{3,1}$: Hyp. 7: I 3D er F + P - K = 2.
$Q_{3,1,1}$: Hyp 8: Passer det altid for 3D figurer?

3. gruppes hypoteseark



Hypoteser

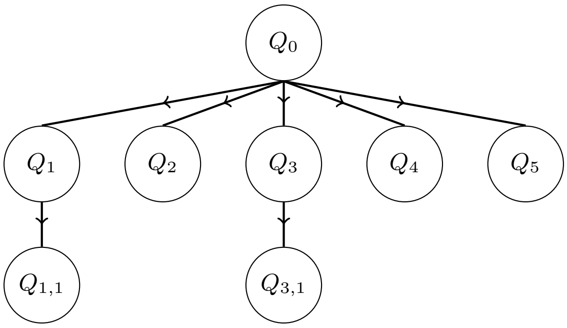
Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	Måle korteste afstand, fordi det er mest logisk, men dette vil vi selvfølgelig lade komme an på en prøve.	UDDYB
2	Tage en "centrum prik". Ved at tage en centrum prik ~~[illegible]~~ ligger byerne tæt på, og der er derfor kortest afstand hvis man også skal hjem igen.	H byer
3	Efter han har været i alle byer, behøver han ikke komme hjem igen. Hans arbejde er slut når han har været i alle byer. Derfor behøver vi ikke inddrage hjemturen	
4	Vi måler afstanden fra hvert eneste punkt, til hvert eneste punkt. Derefter laver vi et "træ", hvor vi lægger tallene sammen, så vi finder den korteste rute. Start = KBH.	UDDYB
5	Efter vi har lavet et træ med 4 byer og fundet den korteste, afstand, tegner vi to ekstra byer og måler igen alle veje. Vi laver et træ med alle ~~7~~ byer. ~~[illegible]~~ Denne gang laver vi flest mulige flyveforbud for lave forhindringer og gøre opgaven svære.	
6	Vi prøvede at modbevise påstanden F+p−k=1. Her modbeviste vi den med at rykke en dimension op (3D) hvilket gav 2, men vi måtte ikke rykke en dimension op, så det vil vi prøve at modbevise igen	
7	Nu startede vi med at lave en formel, som gav 2 i facit, så skulle vi efter udarbejde figuren ud fra formelen. Fra før kan vi konkludere, at når man sætter en kant mere, så kommer der en ekstra flade, og de går derfor ud med hinanden.	
8	Vi mente at ved at bare lave et punkt uden at lave nogle kanter, som hænger fast i punktet kunne vi nemt modbevise det. Det gjorde vi så.	
9		
10		

Har I flere hypoteser, så skriv på bagsiden.

Figur G.4: 3. gruppes hypoteseark.

S&F-model for 3. gruppe



Figur G.5: S&F-model baseret på hypotesearket for 3. gruppe.

Q_0: Den Rejsendes problem.

Q_1: Hyp. 1: Skal den rejsendes vende hjem eller ej?
$Q_{1,1}$: Hyp. 1: Hvad ændres i så fald?

Q_2: Hyp. 2: Skal man altid undgå de lange kanter?

Q_3: Hyp. 3: Hvilke mulige ruter er der?
$Q_{3,1}$: Hyp 5: På hvor mange måder kan man udvælge 2 ud af 5?

Q_4: Hyp. 4: Hvordan undgår man at bruge den samme vej eller by to gange?

Q_5: Hyp. 6: Passer det, at et lige antal mennesker har givet et ulige antal håndtryk i en forsamling?