INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet

Astrid Krogstrup Camilus
Specialerapport

August 2012

IND's studenterserie nr. 27

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte - om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. **Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)**

Abstract
Dette speciale forsøger at belyse karakteren af valideringssituationer i matematik- og fysikundervisningen i stx. Valideringssituationer er en særlig type didaktisk situation inden for teorien om didaktiske situationer (TDS). Validering spiller en særlig rolle i matematikken, og det er vigtigt, at den er rationelt funderet. For at belyse dette har jeg observeret undervisningsforløb i matematik og fysik i en 2. g klasse om differentialligninger og radioaktivitet. For at kunne identificere og karakterisere valideringen i klasserumsinteraktionerne har jeg brugt TDS som analyseværktøj. Mit hovedfokus har været på matematikken, hvor jeg har set nærmere på en grafisk tilgang til emnet og set på matematisk modellering. Fysikforløbet har jeg brugt til at se på, om validering af de bagvedliggende modeller indgår som en del af laboratorieforsøg. Observationerne viste, at valideringen af elevernes udsagn under tiden ikke foretages ud fra matematikkens logiske rationalitet, og at rationaliteten derfor mistes. Observationerne viste også, at lærers og elevers syn på eksperimentelt arbejde i fysik er i konflikt. Det er dog vanskeligt at konkludere noget entydigt fra forløbene, da jeg kun har haft mulighed for at gå i dybden med få lektioner og situationer samt kun en enkelt klasse.

***IND's studenterserie** består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

DET NATUR- OG BIOVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet

Astrid Krogstrup Camilus

Speciale for cand.scient graden i matematik.

Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Thesis for the Master degree in Mathematics.

Department of Science Education, University of Copenhagen

Vejleder: Carl Winsløw

Afleveringsdato: 11. juli 2012

Indholdsfortegnelse

1. Resumé

Resume

Dette speciale forsøger at belyse karakteren af valideringssituationer i matematik- og fysikundervisningen i stx. Valideringssituationer er en særlig type didaktisk situation inden for teorien om didaktiske situationer (TDS). Validering spiller en særlig rolle i matematikken, og det er vigtigt, at den er rationelt funderet. For at belyse dette har jeg observeret undervisningsforløb i matematik og fysik i en 2. g klasse om differentialligninger og radioaktivitet. For at kunne identificere og karakterisere valideringen i klasserumsinteraktionerne har jeg brugt TDS som analyseværktøj. Mit hovedfokus har været på matematikken, hvor jeg har set nærmere på en grafisk tilgang til emnet og set på matematisk modellering. Fysikforløbet har jeg brugt til at se på, om validering af de bagvedliggende modeller indgår som en del af laboratorieforsøg. Observationerne viste, at valideringen af elevernes udsagn under tiden ikke foretages ud fra matematikkens logiske rationalitet, og at rationaliteten derfor mistes. Observationerne viste også, at lærers og elevers syn på eksperimentelt arbejde i fysik er i konflikt. Det er dog vanskeligt at konkludere noget entydigt fra forløbene, da jeg kun har haft mulighed for at gå i dybden med få lektioner og situationer samt kun en enkelt klasse.

Abstract

This paper will try to clarify the character of validation situations in mathematics and physics teaching in stx. A validation situation is a special type of didactical situation in the theory of didactical situations (TDS). Validation plays a significant role in mathematics, and it is important that it is based on a rational foundation. To study this I have observed teaching sequences in mathematics and physics in a 2nd year class where the subject was differential equation and radioactivity. To identity and characterize the validation in the class room interaction, I have used TDS as a tool to analyze. My focus has been on the mathematics where I have studied a graphical approach to the subject and on mathematical modeling. I have used the teaching sequence in physics to clarify if validation of the models behind the experiment is a part of laboratory work or not. In some cases the observations showed that validation of the student's statements is not based on the logic and rationality from mathematics and hence the rationality is lost. The observations also showed that there is a conflict between the teacher's and the students' views of the experimental work in the physics class. It is difficult though to make any unambiguous conclusion from the teaching sequences since I only had opportunity to work in detail with few lessons and situations and only one class of students.

2. Introduktion

” I need the teacher to tell me if I’m right or wrong”. Sådan skriver Sierpinska (2007) som overskrift til sin artikel om, hvorfor elever har en tendens til kun at validere deres arbejde i matematik ud fra lærerens vurdering. I matematik spiller validering en helt særlig rolle. Alle vurderinger af hypoteser eller udsagn kan altid bygges på rationaliteten i matematikken. Derfor bør man i princippet altid selv kunne afgøre om et udsagn er sandt eller falsk. Det kan naturligvis være vanskeligt, når man har at gøre med viden, som er ny for én, og det er denne situation elever ofte møder i undervisningen. Når man skal foretage sådan en vurdering skal det dog altid ses i sammenhængen med de foregående aktiviteter. I undervisningssammenhæng vil der altid være et spænd. På den ene side bør eleverne i princippet selv kunne foretage en validering af et udsagn ud fra matematikkens rationalitet. På den anden side vil der altid være en implicit indforståethed mellem lærer og elever, som handler om hvordan og hvor omfangsrigt denne validering skal foretages. Vi kan aldrig slippe af med denne anden dimension og den hører med i undervisningssammenhæng. Ikke desto mindre peger citatet på en foruroligende tendens, nemlig at det rationelle perspektiv mangler i undervisningen. Hvis validering af elevers udsagn foretages ud fra rationelle regler fra matematikken, bliver eleverne i højere grad inddraget og det bliver mere gennemskueligt i undervisningen, hvad der foregår. Dette er også klart den mest tilfredsstillende måde at validere på, og det bør vi stræbe efter. Hvis validering i stedet kun foretages af læreren ud fra lærerens egne regler, mistes rationaliteten, og eleverne vil blot forsøge at sige det, som de tror, læreren ønsker. Således bliver matematikken reduceret til ”kontrakt-opgaver”, hvor eleverne mere eller mindre gætter det rigtige svar frem for at ræsonnere sig frem til det. Et af de overordnede formål fra læreplanen for matematik A i stx er, at eleverne skal have ”indsigt i matematisk ræsonnement". Derfor er det vigtigt at have så meget rationalitet i valideringssituationerne som muligt.

Jeg vil ud fra et undervisningsforløb om differentialligninger undersøge, om den ovenforstående tendens med manglende rationalitet i validering er herskende i matematikundervisningen i stx. Inden for de seneste år har CAS-værktøjet vundet stor fremgang i stx. De algebraiske løsningsmetoder, man traditionelt har fokuseret på i undervisningen af differentialligninger, har derfor mistet meget relevans. Derfor er det nu oplagt at fokusere på nogle af de mere kvalitative aspekter af differentialligninger. Jeg vil derfor undersøge hvordan man kan benytte en mere grafisk tilgang til differentialligninger i forbindelse med validering. Et andet aspekt jeg vil se på er matematisk modellering – særligt i forbindelse til fysik. Netop matematik og fysik er to fag, der ofte indgår sammen i tværfaglige projekter og studieretninger i stx. I læreplanen for matematik A ser vi også, at der generelt lægges stor vægt på matematisk anvendelse og modellering. I forbindelse med matematisk modellering er en meget vigtig del af modelleringsprocessen netop validering af modellerne. Ud fra undervisningsforløbet vil jeg derfor se på i hvor høj grad validering indgår i arbejdet med differentialligningsmodeller. Særligt vil jeg se på, hvordan fysiske eksperimenter kan indgå som en del af validering af matematiske modeller.

I afsnit 3 redegør jeg for den didaktiske teori, som danner ramme for specialet og analysen. Dette afsnit efterfølges med at præsentere den præcise beskrivelse af problematikken i specialet i afsnit 4. For at besvare noget af problemstillingen teoretisk samt for at klargøre problemstillingen yderligere indeholder afsnit 5 en grundig stofdidaktisk analyse af differentialligninger i gymnasiet. Afsnittet fungerer også som forberedelse til analysen af observationerne. Det er opdelt i to hovedafsnit. Den ene del handler om differentialligninger i forhold til forskellige arbejdsrammer, mens anden del handler om matematisk modellering. Inden for modelleringsdelen beskrives både klassiske problematikker med matematisk modellering i naturfagene, matematisk modellering med differentialligninger, forholdet mellem fysik og matematik i relation til modellering og til sidst laboratorieøvelser som led i validering af matematiske modeller. I afsnit 6 redegøres for, hvordan jeg vil benytte de indsamlede data til at besvare problemstillingen. I afsnit 7, 8 og 9 præsenteres så de udvalgte situationer fra de observerede forløb, som er valgt sådan, at de netop belyser forskellige vinkler af problemstillingen. For hver situation præsenteres både en a priori og en a posteriori analyse af situationen. Afsnit 10 runder af med en samlet diskussion af de fire situationer, og de vigtigste resultater opsummeres i konklusionen i afsnit 11.

Jeg vil gerne sige tak til de to faglærere og 2.x fra Christianshavn Gymnasium for at lade mig observere undervisningen og lade mig se elevrapporter.

Også tak til professor Carl Winsløw, Institut for Naturfagenes Didaktik på Københavns Universitet, for grundig vejledning i arbejdet med dette speciale.

3. Teori

3.1 Teorien om didaktiske situationer

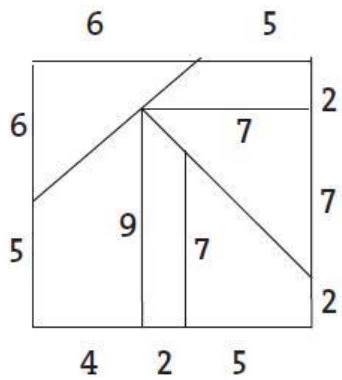
For at belyse problemstillingen vil jeg benytte Brousseau's teori om didaktiske situationer i matematik som analyseværktøj (Brousseau, 1997). Det er en omfattende teori, og jeg vil fremlægge de elementer i teorien, som er relevant i forhold til analysen. Teorien om didaktiske situationer vil blive forkortet TDS fremover. Styrken ved at anvende TDS som analyseværktøj er, at den indeholder modeller, som giver adgang til at analysere selve undervisningssituationerne i samspil mellem lærer, elev og det pågældende matematikindhold.

En af de grundlæggende idéer i TDS er, at det ofte ikke er tilstrækkeligt, at læreren blot meddeler eleverne matematisk viden. Det er nødvendigt at eleverne personliggør den officielle viden og derefter fællesgør den. Udgangspunktet er den epistemologiske hypotese, at viden kan og skal konstrueres i situationer. TDS handler grundlæggende om undervisningssituationer i matematik. I denne sammenhæng tales om et didaktisk miljø. Et didaktisk miljø udgør omgivelserne for elevers læring. Det er typisk etableret af læreren med henblik på elevernes personliggørelse af viden. Et didaktisk miljø kan fx bestå af en opgave, problemstilling, materielle genstande, instruktioner og matematiske repræsentationer. Såfremt læreren har en intention, om at eleverne skal lære en konkret *tilsigtet matematisk viden,* og eleverne har intention om at deltage i undervisningen, kaldes samspillet mellem lærer, elever og miljø for en *didaktisk situation*. Hvis eleverne arbejder på egen hånd med et didaktisk miljø uden lærerens indgriben, siges de at være i en *adidaktisk situation*. I TDS arbejdes med fem forskellige didaktiske situationer, også kaldet faser: Devolution, handlingssituation, formuleringssituation, valideringssituation og institutionalisering. Disse tjener til at identificere de vigtigste momenter i samspillet mellem lærer, elever og fag. Jeg vil kort beskrive hver af de fem faser:

- *Devolution:* Det er her et miljø etableres. Læreren introducerer og afklarer en opgave, og eleverne skal modtage og forstå opgaven. Dette er en didaktisk fase.
- *Handlingssituation*: Eleverne udforsker miljøet uden indgriben fra læreren. Dette er en adidaktisk situation.
- *Formuleringssituation*: Elever formulerer hypoteser om problemstillingen, eventuelt i samspil med læreren. Dette kan både være en didaktisk og en adidaktisk situation.
- *Valideringssituation*: Her foretages en rationel vurdering af elevernes hypoteser. Denne fase er som regel didaktisk, men kan også være adidaktisk.
- *Institutionalisering*: Her meddeler læreren blot den tilsigtede viden direkte til eleverne, og det er derfor den mest simple form for didaktisk situation.

For hver af faserne kan man uddybe lærer og elevers roller, men da dette projekt har fokus på valideringssituationer, vil jeg nøjes med at uddybe netop den fase. I valideringssituationer er elevernes rolle at argumentere og reflektere. Lærerens rolle er at lytte, stille uddybende spørgsmål og at evaluere. Valideringssituationer er som regel didaktiske og miljøet vil da være præget af en styret diskussion. Det er dog også muligt at have adidaktiske valideringssituationer. En væsentlig egenskab ved et didaktiske miljø er dets *adidaktiske potentiale*. Der er adidaktisk potentiale, hvis en situation indeholder et objektivt miljø, som kan give feedback til eleverne. Miljøet skal altså give mulighed for, at eleverne selvstændigt kan arbejde med den tilsigtede viden. Adidaktiske valideringssituationer er en helt særlig slags valideringssituation, og det er i mange sammenhænge vanskeligt at etablere et miljø, der giver en valideringssituation adidaktisk potentiale. Et klassisk eksempel på et miljø, der har adidaktisk potentiale, er Brousseau's puslespilssituation, som blandt andet beskrives af Winsløw (2006a). I valideringssituationer ønskes, at eleverne er inddraget så meget som muligt. Uanset om valideringen er didaktisk eller adidaktisk, er det derfor særdeles vigtigt at have et miljø, der i en vis udstrækning giver feedback til eleverne.

Som nævnt ovenfor udgøres et didaktisk miljø af mange forskellige elementer, heriblandt matematiske repræsentationer. Jeg vil her blot skelne mellem to slags repræsentationer, nemlig statiske og dynamiske. En *statisk repræsentation* er en matematisk repræsentation, som ikke ændres i løbet af de forskellige faser. Modsat er en *dynamisk repræsentation* en matematisk repræsentation, som kan ændres af lærer eller elever i løbet af undervisningssituationerne. I Brousseau's puslespilssituation er de fysiske puslespilsbrikker et eksempel på statiske repræsentationer af nogle geometriske former. Det ses skitseret i figur 3.1.



Figur 3.1 – Et puslespil (Winsløw, 2006b, s.52)

Samtidig er tabellen i figur 3.2 et eksempel på en dynamisk repræsentation af forstørrelses-funktionen. Den er dynamisk, idet kun det ene felt er udfyldt. Undervejs som tabellen fyldes ud ændres den og elevernes respons til den vil ligeledes ændres.

Små brikker	2 cm	4 cm	5 cm	6 cm	7 cm	8 cm	9 cm
Store brikker	?	7 cm	?	?	?	?	?

Figur 3.2 – En tabel over sidelængderne i puslespillene (Winsløw, 2006b, s.53)

I TDS anskuer man desuden undervisningssituationer som et didaktisk spil. Elevernes arbejde med det didaktiske miljø udgør spillet, og det er så lærerens opgave at udforme og tilpasse det didaktiske miljø og dets forhindringer, så eleverne vinder spillet. Det didaktiske spil vindes, når eleverne lærer. For at eleverne kan vinde spillet er det nødvendigt, at de deltager i spillet og følger visse regler, en slags spilleregler. Dette udformer sig i en slags uformel kontrakt mellem lærer og elever, som vi kalder *didaktisk kontrakt*.

3.2 Didaktiske kontrakter

Konceptet didaktisk kontrakt har sin oprindelse i eksperimentet om skoledrengen Gaël. Det beskrives af Brousseau og Warfield (1999) og er et vigtigt element i TDS. Didaktisk kontrakt er en beskrivelse af forholdet mellem lærer og elever med hensyn til gensidige forventninger, og kontrakten er som regel implicit. Gaël var en skoledreng, der udelukkende klarede sig dårligt i matematik. I studierne med Gaël kom det frem, at der er et fundamentalt paradoks i forbindelse med didaktiske kontrakter. For det første er kontrakten implicit, og den bliver først tydelig, idet den brydes. For det andet kan den ikke opfyldes, hvis den ikke forsvinder. Det kom frem i studiet af Gaël, idet hans reaktioner på de stillede opgaver var præget af en altoverskyggende vilje til at gøre det, der forventes – og dermed opfylde kontrakten. Der findes adskillige eksempler på, at elever tilegner sig den didaktiske kontrakt "så godt", at de nærmest vænner sig af med at reflektere over faglige opgaver.

Man kan beskrive didaktiske kontrakter på mange forskellige måder. Jeg vil bruge den struktur, som beskrives af Hersant og Perrin-Glorian (2005). Desuden vil jeg operere med følgende tidsenheder og indholdsopdeling: Undervisningsforløb, lektion, fase, episode. En fase er et en del af en lektion, som er defineret ved aktivitet eller didaktisk handling. En episode er en ganske lille interaktion mellem elever eller elev og lærer. Vi skelner mellem fire dimensioner af en didaktisk kontrakt og tre niveauer. De er opremset nedenfor:

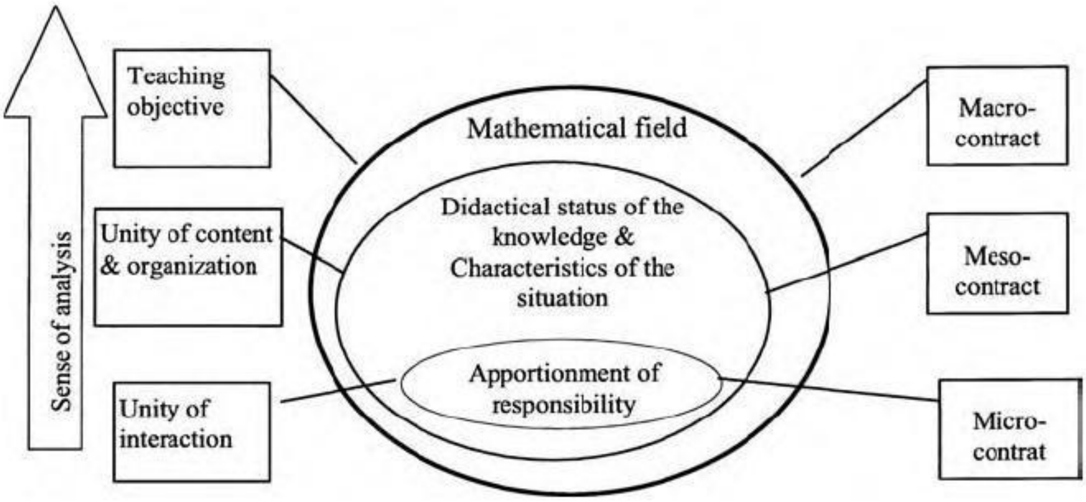
- Dimensioner: D1. Emne
  D2. Didaktisk status af viden (gammel/under udvikling/ny)
  D3. Karakter af aktuel fase
  D4. Fordeling af ansvar i situationen

- Niveauer: N1. Makrokontrakt (relateret til undervisningsforløb)
  N2. Mesokontrakt (relateret til fase og miljø)
  N3. Mikrokontrakt (relateret til episode)

Jeg vil kort uddybe de forskellige dimensioner og niveauer. Bemærk at de fire dimensioner er gensidigt afhængige af hinanden. Den første dimension, D1, er det matematiske emne eller område, der undervises i. Det er en dimension i kontrakten, fordi bestemte teknikker og metoder virker mere naturlige at benytte end andre inden for et bestemt matematisk område. Denne dimension foregår på et globalt plan og kan ifølge Hersant og Perrin-Glorian (2005) fx være en algebraisk eller geometrisk kontrakt. For at beskrive den anden dimension, didaktisk status af viden, skelner vi mellem tre slags viden. De to yderpunkter er *gammel viden* og helt *ny viden*. Gammel viden er ikke en del af den tilsigtede viden, men viden der allerede er etableret hos eleverne. Inde i mellem de to er der *viden i udvikling*. Hersant og Perrin-Glorian (2005) skelner igen mellem tre slags viden i udvikling: viden der lige er blevet introduceret, viden der er på vej til at blive institutionaliseret og viden der allerede er blevet institutionaliseret. Denne dimension hænger i høj grad sammen med fordelingen af ansvar mellem lærer og elever, altså den fjerde dimension. Fx giver lærere generelt mere ansvar til eleverne, når vi har at gøre med gammel viden. Hermed har vi også beskrevet den fjerde dimension. Den tredje dimension er karakteren af situationen. Dette er også en dimension i kontrakten, da elever kan genkende lærerens forventning til deres aktivitet ud fra typen af situation. Det kan fx være om der er adidaktisk validering eller ej. Da dimensionerne er gensidige afhængige kan de være vanskelige at beskrive, men den fjerde dimension kan beskrives helt lokalt.

De tre niveauer er relateret til forskellige tidsenheder og didaktiske mål. Makrokontrakten hænger hovedsageligt sammen med den tilsigtede viden og er relateret til tidsenhederne undervisnings-forløb og lektion. Mesokontrakten har at gøre med udførelsen af en aktivitet, fx løsningen af et problem. Den bestemmes ud fra to dimensioner, nemlig eksistensen af et miljø med potentielt feedback og didaktisk status af viden, altså den anden og tredje dimension. Mesokontrakten er derfor relateret til tidsenheden fase. Mikrokontrakter er relateret til en episode, hvor der fokuseres på en matematisk enhed, f.eks. et konkret spørgsmål i en opgave. Mikrokontrakter defineres hovedsageligt ud fra fordeling af ansvar mellem elever og lærer, altså den fjerde dimension.

For hvert niveau forbliver nogle dimensioner stabile, men samlet set er de kun stabile på mikrokontraktniveau. På makrokontraktniveau er kun få eller ingen dimensioner stabile. Af disse grunde er makrokontrakten bestemt ud fra mikro- og mesokontrakten. Når man i en analyse vil bestemme kontrakten i de forskellige niveauer er det derfor vigtigt, at man starter ”nedefra”, altså med at se på mikrokontrakten og på de helt lokale episoder. En vigtig ting er desuden, at kontrakten hele tiden er i udvikling i løbet af undervisningssituationen. Nedenfor ses figur 3.3, hvor strukturen af den didaktiske kontrakt er illustreret.



Figur 3.3 – Grafisk illustration af strukturen af den didaktiske kontrakt. (Hersant & Perrin Glorian, 2005, s.120)

Da analysen af mikrokontrakter er det grundlæggende i specialets analyseafsnit, vil jeg karakterisere to centrale typer af mikrokontrakter i didaktiske spil med kortvarige opgaver.

- *Individuel/Kollektiv produktion*: Miljøet giver feedback, så eleverne kan validere deres resultater med lidt hjælp fra læreren. Det er individuel produktion, når der kun er 1-2 elever i samspil med læreren, mens kollektiv produktion er når mange elever deltager i processen.
- *"Agreement" – en slags forhandlingskontrakt*: Eleverne kan ikke hente støtte fra miljøet til at finde den nye viden. Læreren hjælper derfor eleverne med at komme frem til det rigtige, selvom eleverne ikke kan se det ud fra deres viden eller fra miljøet. Læreren lægger sådan set mest ordene i elevernes mund, og det bliver dermed en slags "agreement".

3.2.1 Topaze- og Jourdain-effekten

Som beskrevet ovenfor er den didaktiske kontrakt et paradoks, og der kan være uheldige effekter heraf. Begge effekter opstår ved at læreren for enhver pris vil opfylde sin del af kontrakten. Jeg vil her nævne en effekt, der hyppigt opstår i undervisningssituationer, kaldet *Topaze-effekten*. Topaze-effekten opstår, når læreren mere eller mindre kommer til at forære svaret til eleven. Det kan fx være, at eleven skal løse en opgave og at læreren gradvist stiller stærkere og stærkere ledende spørgsmål, fordi det går op for læreren, at eleven ikke har de faglige ressourcer til selv at løse opgaven. En anden effekt er *Jourdain-effekten*, det vil sige at man giver en triviel aktivitet et videnskabeligt navn. Ofte vil det have at gøre med, at læreren mere eller mindre bevidst konstaterer en faglig indsigt hos en elev, som egentlig blot følger anvisningen fra læreren. Et eksempel er en laboratorieøvelse, hvor en elev nøjagtigt har fulgt en vejledning, og så konkluderes det, at eleven har vist eller fundet en naturlov.

3.3 Forhindringer i undervisningen

Når man skal foretage en a priori analyse af et forløb, situation eller episode er der forskellige ting, man skal tage højde for. For det første er det vigtigt altid at nævne eksplicit, hvad den tilsigtede viden er. Man må også gøre klart i en situation, hvad det objektive miljø er og hvad elevernes forudsætninger er. Det er også vigtigt at have gjort sig nogle tanker om, hvilke forhindringer eleverne kan støde på. Som forklaret ovenfor er didaktiske situationer et spil, hvor der er visse forhindringer, og eleverne skal så overvinde disse forhindringer for at vinde spillet. Jeg vil her skelne mellem tre slags forhindringer, som beskrives af Artigue (1994).

- Epistemologiske forhindringer
- Kognitive forhindringer
- Didaktiske forhindringer

Epistemologiske forhindringer er relateret til det matematikfaglige og erkendelse af viden. De epistemologiske forhindringer er altså bygget ind i et givet stykke viden og er derfor uafhængige af eleverne, læreren og undervisningssituationen. Ofte benytter man en matematikhistorisk tilgang for at identificere sådanne forhindringer. Hvis man historisk set har haft svært ved at acceptere en matematisk tankegang eller struktur kan det hænge sammen med, at der ligger en epistemologisk forhindring deri. Et klassisk eksempel er negative tal. Historisk set tog det mange hundrede år fra at nogen begyndte at tænke på dem som tal, indtil de var bredt accepteret blandt matematikere. Negative tal er en epistemologisk forhindring. Positive tal kan vi kæde sammen med mål som fx vægt, længde og pris, men der findes ikke en lignende analogi for de negative tal.

Kognitive forhindringer er relateret til tænkningens psykologi. De vedrører derfor den enkelte elevs kognitive kapacitet. Det kan for eksempel være forhindringer på grund af alder, udviklings-trin eller andet. Jeg vil ikke komme så meget ind på kognitive forhindringer her.

Didaktiske forhindringer er relateret til undervisningen. Disse forhindringer kan stamme fra lærebøger, undervisningsmetoder, læreren og andre elementer fra uddannelsesorganisationen. Til at forklare det vil jeg give et eksempel, som Sierpinska (1992) nævner. Det er et eksempel om funktioner, herunder særligt i forbindelse med kontinuitet og differentiabilitet.

> *De første eksempler på funktioner som en studerende normalt møder er kontinuerte overalt, ikke-differentiable i højst et endeligt antal punkter, bygget op af et stykke af en kurve i den grafiske repræsentation og givet i en enkelt formel. Sådanne sjældne funktioner udgør prototypen på en funktion i den studerendes tanker. (Sierpinska, 1992, s. 47, egen oversættelse).*

Forhindringen består altså i, at eleven får et forkert overordnet billede af funktioner skabt af undervisningen. Dette mentale billede af funktioner kan herefter følge eleven helt op på universitetsniveau. Sierpinska (1992) siger videre:

Overbevisningen om at alle funktioner er kontinuerte og differentiable næsten over alt nævnes ofte som en af de mest seriøse misforståelser… (Sierpinska, 1992, s. 47, egen oversættelse).

Når man analyserer undervisning, er det som sagt en god idé at kunne skelne mellem karakteren af de forskellige forhindringer. Det gælder særligt i en a priori analyse. Hvis man laver didaktisk ingeniørarbejde, som Artigue (1994) lægger op til, er det særlig vigtigt for at kunne tilrettelægge undervisningen, sådan at eleverne har mulighed for netop at overvinde disse forhindringer. I dette projekt er formålet dog mere at analysere et allerede givet undervisningsforløb. Også her er det vigtigt at have tænkt de mulige forhindringer igennem for at kunne identificere dem, når de opstår i situationerne.

3.4 Rammer og registre

Inden for matematikken har semiotiske repræsentationer en særlig status, idet vi ikke kan se og måle direkte på de matematiske objekter (Duval, 2006). Vi har derfor kun adgang til dem gennem tegn og semiotiske repræsentationer. Derudover er der inden for matematikken utroligt mange forskellige slags semiotiske repræsentationer. Duval (2006) definerer således et *register* som et system af semiotiske repræsentationer, hvor det er muligt at foretage en transformation af repræsentationerne. Det kaldes også i nogle sammenhænge for et *repræsentationsregister*. Nogle eksempler på registre er det naturlige sprog, grafisk register, geometrisk register og symbolsk register. Duval (2006) redegør for, at der findes to slags transformationer af semiotiske repræsentationer, nemlig operationer (treatments) og konversioner (conversions). Operationerne transformerer repræsentationerne inden for et register, mens konversionerne transformerer repræsentationerne mellem to forskellige registre. Duval (2006) understreger, at konversioner generelt er komplekse og antyder, at mange elever har svært ved at foretage konversioner i mange sammenhænge. Vi ser, at repræsentations registre altså er veldefinerede og afgrænsede. De er nyttige i mange sammenhænge, fx til at identificere hvilke specifikke konversioner elever ofte har problemer med. I praksis foregår arbejdet med et matematisk stofområde dog som regel ikke sådan, at man kun arbejder i et register af gangen. Ofte blandes forskellige semiotiske repræsentationer på tværs af registrene. Vi har derfor behov for en opdeling af arbejdet med et matematisk stofområde af en mere kompleks karakter.

Jeg vil derfor præsentere endnu et analyseværktøj, nemlig *settings*. Det beskrives af Artigue (1992). Det defineres oprindeligt på fransk, hvor ordet er ”cadre”. Jeg vælger at oversætte ordet til ”ramme” på dansk. Dette værktøj viser sig, at være meget nyttig i vores analyse af differential-ligninger, og er som ønsket en mere kompleks struktur end repræsentationsregistre. I en fodnote siger Artigue (1992) således om rammer:

En ramme er sammensat af objekter fra et matematisk område, relationer mellem disse objekter, udtryk og mentale billeder associeret med disse objekter og relationer. To rammer

> *kan indeholde de samme objekter men være adskilt af mentale billeder og problematikken (det er typerne af problemer og metoder), som er udviklet omkring disse. (Artigue, 1992, s.109, egen oversættelse).*

Jeg definerer derfor en *ramme* til at dække over: *En arbejdsform knyttet til formål og med et begrænset inventar af repræsentationer fra et matematisk område*. Vi ser, at ramme-begrebet minder om registrene, men det er langt mere kompleks. Først og fremmest er det vigtigt, at en ramme defineres ud fra et matematisk stofområde. Registre derimod har samme betydning uanset det matematiske område. Selvom der også arbejdes med et begrænset udvalg af repræsentationer, er det ikke dem, der udgør rammen. En ramme kan også bestå af repræsentationer fra flere forskellige registre. Afgrænsningen af en ramme bestemmes i højere grad af formålet og arbejdsformen. Med formål mener jeg, at man søger at besvare en bestemt slags spørgsmål. Med arbejdsform menes blandt andet metode, teknikker, måder at ræsonnere mellem repræsentationer og gyldige grunde til validering. På denne måde har repræsentationerne forskellig status alt efter, hvilken ramme man arbejder i. I sammenhængen med differential-ligninger vil jeg se på tre rammer, som er relevante, nemlig algebraisk, grafisk og numerisk ramme. For at illustrere rammebegrebet vil jeg præsentere et lille eksempel.

3.4.1 Eksempel: Løsning af ligninger

Man kan arbejde med løsning af ligninger i alle de tre rammer, som er nævnt ovenfor. Der findes utallige slags ligninger, men for simplicitetens skyld, vil vi i alle tre tilfælde nøjes med at se på ligninger af formen $p(x) = 0$, hvor $p(x)$ er et polynomium i variablen x. At løse en sådan ligning svarer altså til at finde rødderne til polynomiet $p(x)$.

Hvis man løser ligninger inden for den *algebraiske ramme*, vil formålet typisk være at finde samtlige eksakte rødder til en given ligning. En typisk arbejdsform er symbolmanipulation og brug af algebraiske formler. Nogle typiske teknikker og metoder er kvadratets fuldstændiggørelse og nulreglen. Nogle af de vigtigste repræsentationer inden for den algebraiske ramme er symboludtryk og ligninger. Hvis p har grad mindre end eller lig med to, kan vi uden de store problemer finde alle løsninger til ligningen. Fra disciplinen algebra ved vi, at man også kan løse 3. og 4. gradspolynomier algebraisk. Vi ved dog også, at man generelt ikke kan løse 5. gradsligninger algebraisk[1]. Vi ser altså, at alene inden for denne gren af ligninger er udvalget af ligninger, som man kan løses algebraisk meget begrænset. I gymnasiesammenhæng vil det sandsynligvis også kun være relevant, at man kan løse 1. og 2. gradsligninger algebraisk, da formlerne og metoderne til at løse 3. og 4. gradsligninger er så indviklede, at man som regel ville finde deres løsninger inden for en af de andre rammer. I forhold til 2. gradsligninger ved vi dog, at nogle af løsningerne kan være komplekse. Inden for den algebraiske ramme kan vi godt finde de komplekse rødder, men det er ikke så relevant i gymnasiesammenhæng.

[1] Umulighedsbeviset blev fuldført første gang af Abel i 1827 (Katz, 2009).

Inden for den *grafiske ramme* kan formålet være at finde samtlige rødder, finde nogle af rødderne eller finde antal reelle rødder. Den vigtigste repræsentation er grafer, men algebraiske lignings-udtryk kan også findes inden for denne ramme. I denne ramme vil arbejdsformen ofte hænge sammen med at finde skæringspunktet mellem en graf og x-aksen. Dette er ofte en legitim måde at løse en ligning på i gymnasiesammenhænge. Man kan også se ud fra en graf, hvor mange reelle og komplekse rødder polynomiet har, men man kan dog ikke finde de komplekse rødder. I mange sammenhænge vil man benytte CAS-værktøjer for at tegne fyldestgørende grafer og eventuelt også for at finde skæringspunkter. Inden for den grafiske ramme er vi nu ikke længere begrænset til at se på polynomier mindre end 5. grad, men kan betragte hvilken som helst grad af polynomiet p. Rammen åbner altså op for studiet af en mere fyldestgørelse mængde ligninger.

Ligningsløsning inden for den *numeriske ramme* har til formål at finde en eller flere approksimerede værdier af rødderne. Arbejdsformen inden for den numeriske ramme er præget af algoritmer. Det kan fx være ved hjælp af CAS-værktøjer, som benyttes i gymnasiet i dag i stor udstrækning. En vigtig repræsentation her er tabeller, men igen bemærkes at algebraiske lignings-udtryk ofte også indgår. CAS-værktøjerne spiller en ret stor rolle inden for denne ramme, og det medfører både fordele og ulemper. Fordelene består blandt andet i, at man kan løse mange komplicerede ligninger. En af ulemperne er, at CAS-værktøjets output afhænger af det input man giver den. Fx kan det være at man kun får oplyst en enkelt rod, selvom der kan være mange andre. Endvidere kan den tekniske syntaks være en kognitiv forhindring for eleverne.

3.5 Didaktisk transposition

En del af den eksterne didaktiske transposition er at konstituere et officielt undervisningsfag. Jeg vil her gøre opmærksom på, at vi skelner mellem videnskabsfaget og undervisningsfaget. Videnskabsfagene matematik og fysik er rimelig ensartede over hele verden. Anderledes er det med de to undervisningsfag. Selvom videnskabsfagene og undervisningsfagene deler navn, er undervisningfagene ikke nødvendigvis direkte afledt eller forbundet med videnskabsfagene. Et undervisningsfag konstitueres formelt gennem officielle beskrivelser af uddannelserne og deres bestanddele (Winsløw, 2006a, s. 73). Det har blandt andet at gøre med afgrænsning, identitet og forhold til andre fag, men også faglige delmål og fx emner. Det er i høj grad påvirket af politik, men også af institutioner og traditioner. Undervisningsfagene matematik og fysik er helt forskellige alt efter om man ser på folkeskolen, gymnasiet eller andre institutioner. Når jeg i denne opgave siger undervisningsfaget i enten matematik og fysik, mener jeg de gymnasielle undervisningsfag. Der er desuden også store nationale forskelle. Når jeg senere i den stofdidaktiske analyse taler om fagene fysik og matematik vil jeg forsøge at fremhæve, om der er tale om undervisningsfaget eller videnskabsfaget.

3.6 Valideringssituationer i fysik i forbindelse med laboratorieøvelser

TDS er en teori som er skabt særligt til matematikundervisning. Man kan dog godt bruge teorien i nogen udstrækning i forbindelse med fysikundervisning. Derfor vil vi se på, hvordan validerings-situationer kan se ud i fysik. I afsnit 3.1 har jeg forklaret, at valideringssituationer er situationer, hvor elevernes resultater og hypoteser valideres rationelt. Et eksempel på en valideringssituation, der kan opstå i begge fag er fx svaret på en konkret regneopgave, hvor svaret har en talværdi. Dette er en af de mest simple valideringssituationer og de minder meget om hinanden i både fysik og matematik. Man kan dog forestille sig, at der kunne opstå valideringssituationer i fysikundervisningen, som har en anden karakter, end hvad man kan forvente i matematikunder-visningen.

I de naturvidenskabelige undervisningsfag – herunder også fysik – har man en særlig arbejdsform, som ikke findes på samme måde i matematik, nemlig laboratoriearbejde. De typiske formål med laboratoriearbejde i undervisningen er at styrke elevernes opfattelse af fysiske begreber, udvikle elevernes praktiske evner, udvikle problem-orienteret aktivitet, øge eleverne interesse, styrke deres motivation samt at styrke elevernes opfattelse af fysikkens grundlæggende natur (Lunetta, 1998, s. 249). Laboratorieøvelser kan foregå på mange måder, fx i grupper eller som et demon-strationsforsøg på klassen. Lunetta (1998) skriver, at laboratoriearbejde overordnet set kan være karakteriseret på to måder:

- Verifikation af naturlove og relationer.
- Identifikation af mønstre og relationer ud fra induktive aktiviteter.

Vi ser altså, at eksperimenter er en del af en validering i fysikken. Det praktiske arbejde drejer sig om at verificere naturlove ved at gå de store videnskabsmænd i fodsporene. Det foregår ofte således, at man forsøger at gentage visse simple handlinger og observationer inden for en snæver og forud given videnskabelig begrebsramme.

Det kan være til hjælp i analysen at organisere elevernes arbejde omkring et eksperiment i fire faser (Lunetta, 1998):

1. *Planlægnings- og designfasen*, hvor spørgsmål formuleres, resultater forudsiges, hypoteser konstrueres og eksperimentet designes.
2. *Udførelsesfasen*, hvor fremgangsmåden og teknikkerne afgøres og gennemføres, der observeres og data indsamles.
3. *Analyse- og fortolkningsfasen*, hvor data behandles og organiseres, relationer identificeres, der formuleres foreløbige konklusioner, sikkerhed at data undersøges og nye spørgsmål formuleres på baggrund af data.
4. *Anvendelsesfasen*, hvor der diskuteres rækkevidde og bæredygtighed af konklusioner og teknikker samt nye hypoteser og forudsigelser om anvendelse formuleres.

Det bemærkes, at disse fire faser er gensidigt afhængige af hinanden og de forekommer ikke nødvendigvis lige efter hinanden.

3.7 Klasserumsdiskurs

Klasserumsdiskurs er den mundtlige og skriftlige kommunikation, som foregår i almindelig klasse-undervisning. Jeg vil her påpege et typisk mønster i naturfagene og matematik, som ofte opstår i interaktionen mellem lærer og elever, nemlig den såkaldte triadisk dialog. Den defineres af Lemke (1990) som et tre-trins-mønster bestående af spørgsmål – svar – evaluering. Spørgsmålet er fra læreren, derefter et svar fra en elev, som er udpeget af læreren, og til sidst en kort evaluering fra læreren med et eventuelt nyt spørgsmål. Ofte er der nogle forberedelser fra lærerens side inden spørgsmålet stilles. Det triadiske mønster giver læreren mange fordele, idet han sætter dagsordenen og styrer samtalen. Eleverne har derimod ikke så meget plads til initiativ eller for at styre samtalen. Formålet vil ofte være at nå frem til den tilsigtede viden beskrevet i fagsproglig kode, hvor formuleringen så vidt muligt kommer fra elverne. Derfor vil lærerens spørgsmål ofte have til hensigt, at præcisere elevernes formuleringer, og en del af evalueringen vil bestå i at rette og fremme det fagsproglige hos eleverne. Vi bemærker også, at den triadiske dialog består af ganske korte formulerings- og valideringssituationer. Det vil ofte være sådan, at kæder af sådanne triadiske dialoger former store dele af klasserumsdiskursen. Lærerens udfordring er at sørge for at eleverne reelt inddrages på en sådan måde, at de bidrager med faglig information. Hvis dette ikke er tilfældet bliver kæden af triadiske dialoger blot til en maskeret forelæsning, hvor spørgsmålene bliver mere eller mindre retoriske. I nogle tilfælde kan dette give anledning til Jourdain- og Topaze-effekter. Da dette mønster er hyppigt, og det samtidigt indeholder små valideringssituationer, er det vigtigt at have kendskab til, når man skal identificere forskellige slags valideringssituationer i studiet af disse. Der ligger i den triadiske dialog også en vis didaktisk kontrakt, idet eleverne er indforståede med, hvordan klasserumsdiskursen foregår.

4. Problemformulering

Hovedformålet er at studere valideringssituationer i matematik- og fysikundervisningen i stx. Jeg belyser dette ud fra observerede forløb i de to fag, hvor emnerne differentialligninger og radioaktivitet behandles.

Vi vil se i afsnit 5.2, at behandlingen af differentialligninger foregår indenfor tre rammer i matematikundervisningen: Algebraisk, grafisk og numerisk. De tre rammer minder om rammerne, som blev beskrevet i afsnit 3.4.1. Det jeg særligt vil undersøge her er:

1. Hvordan kan man benytte den grafiske ramme til at validere hypoteser i den algebraiske ramme?
2. Hvordan fordeles ansvaret mellem læreren og eleverne i valideringssituationer i klasserumsinteraktionerne?
3. Fortages valideringerne i klasserumsinteraktionerne hovedsageligt ud fra det objektive miljø eller ud fra spilleregler fra kontrakterne?
4. Hvilken rolle har valideringssituationer, specifikt
   a) i klasserumsinteraktionerne?
   b) i forbindelse med matematisk modellering?

I fysikundervisningen vil jeg særligt sætte fokus på laboratorieforsøget:

5. Hvilken epistemisk status har det eksperimentelle arbejde for elever og lærere – og indgår validering af de fysiske love i denne status?

Derudover vil jeg forsøge at sammenligne karakteren af valideringssituationer i de to fag.

5. A priori stofdidaktisk analyse af differentialligninger i gymnasiet

5.1 Præsentation af differentialligninger: Begreber og definitioner

Generelt kan man sige, at en ordinær *differentialligning* er en ligning på formen $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, hvor F er en funktion af $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Her angiver n differentialligningens *orden*. Vi vil i denne sammenhæng kun se på tilfældet, hvor F er en kontinuert funktion, på 1. ordens differentialligninger og på de tilfælde, hvor det er muligt at bestemme y' eksplicit, altså ligninger på formen $y' = F(x, y)$. Eksempler på sådanne differentialligninger er

$$y' = ky \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dx} = x + y.$$

Symbolerne y' og $\frac{dy}{dx}$ betegner begge differentialkvotienten. En funktion, der opfylder differentialligningen, kaldes en *løsning*. Grafen for en løsning kaldes en *løsningskurve*. Til en differentialligning kan man finde en *partikulær løsning*, der hører til en bestemt *initialbetingelse*, og så kan man finde den *fuldstændige løsning*, som udgør samtlige løsninger. Den fuldstændige løsning er ofte en familie af funktioner. Så ikke nok med at løsningen her er en funktion, den fuldstændige løsning er uendeligt mange funktioner. Jeg vil her gøre det klart, hvad jeg mener med en familie af funktioner.

Termen *en familie af funktioner* kan forstås på forskellige måder. Der er ikke en officiel definition, så jeg vil nævne to ting, det ofte betyder. En familie af funktioner kan betyde en mængde af funktioner defineret ud fra samme type funktionsforskrift. Med type mener jeg fx lineære funktioner, 2. gradspolynomier, sinusfunktioner… osv. Det jeg vil kalde en familie af funktioner er dog lidt andet. Vi definerer en familie af funktioner ud fra en funktionsforskrift, der inderholder sit argument og en yderligere parameter. For hver specifik værdi af parameteren, har vi et medlem af familien. Et eksempel er $f(x) = \frac{1}{3} \cdot k \cdot x^3 + c, c \in \mathbb{R}$. Her er argumentet eller variablen x, og den ekstra parameter udgøres af konstanten c. Man skriver i nogle tilfælde $f_c(x)$ for at fremhæve, at det er c, der udgør den ekstra parameter. Elever kan møde funktioner af familier i forskellige sammenhænge. Eksemplet her viser, at elever blandt andet møder familier af funktioner i forbindelse med bestemmelse af stamfunktioner. Vi ser nemlig, at $f(x) = \int k \cdot x^2 \, dx$. Fra dette eksempel ser vi desuden, at $f(x)$ udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) = k \cdot x^2$.

Jeg vil her præsentere forskellige grupper af differentialligninger inden for 1. ordens differentialligninger af formen $y' = F(x, y)$. Først og fremmest vil de fleste af de differentialligninger, som vi beskæftiger os med, være *lineære*. De lineære differentialligninger udgør en vigtig type. En generel ordinær lineær 1. ordens differentialligning er:

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Her er $a(x)$ og $b(x)$ to funktioner i x. Vi ser kun på tilfælde, hvor de er kontinuerte og opfører sig "pænt". Hvis $b(x)$ ikke er nulfunktionen, kaldes ovenforstående ligning for en *inhomogen* differentialligning. Den tilsvarende *homogene* ligning er

$$y' + a(x)y = 0.$$

I de to ligninger afhænger konstanten a af x, men vi kan også have lineære 1. ordens differentialligninger med konstante koefficienter, nemlig $y' + ay = b$, hvor a og b er konstanter.

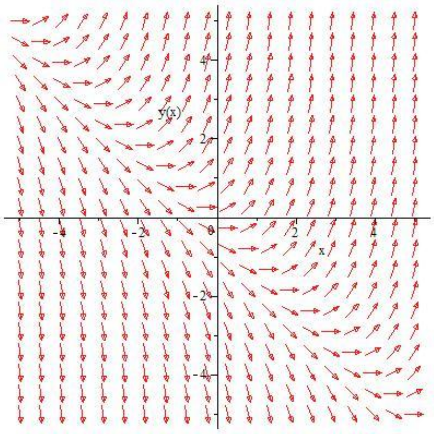
En differentialligning på formen

$$\frac{dy}{dx} = F(y)$$

kaldes *autonom*. Her er F en funktion, og vi ser igen kun på kontinuerte "pæne" funktioner. Denne gang vil vi dog tillade, at (y) er et ikke-lineært udtryk, fx et polynomium i y. Hvis $F(a) = 0$, er $y(x) = a$ for alle x, og $y = a$ er en løsning til differentialligningen. En sådan løsning kaldes *stationær* eller en *ligevægtstilstand*. En ligevægtstilstand $y = a$ kaldes *stabil*, hvis enhver løsning $y(x)$, som kommer tilstrækkelig tæt på a, vil konvergere mod a for x gående mod uendelig. I modsat fald kaldes ligevægtstilstanden *ustabil.* For en autonom ligning kaldes grafen for funktionen $y' = F(y)$ i en (y, y') – talplan for *fasediagrammet*.

En sidste gruppe differentialligninger, som jeg vil nævne er *separable* differentialligninger. At de variable i en differentialligning kan separeres vil sige, at det er muligt at samle alle udtryk i y på den ene side og alle udtryk i x på den anden. Differentialligninger, hvor de variable kan separeres, er derfor af formen $y' = F(x, y)$, hvor $F(x, y) = g(y) \cdot h(x)$.

Inden for emnet differentialligninger findes flere forskellige slags grafiske repræsentationer af løsninger. Jeg vil her kort introducere en af de vigtigste. Sættet bestående af $(x_0, y_0; a)$ kaldes et *linjeelement*, når det opfattes som et kort linjestykke gennem (x_0, y_0) med hældningen a. Grafen for en løsning $f(x)$ til en differentialligning siges at gå gennem linjeelementet $(x_0, y_0; a)$, hvis $f(x_0) = y_0$ og $f'(x_0) = a$. Hvis det er tilfældet tangerer linjeelementet altså kurven i det givne punkt. Ofte tegner man pile på de små linjestykker for at angive om hældningen er positiv eller negativ i det pågældende punkt. I figur 4.1 ses et eksempel på et diagram over linjeelementer. Et sådan diagramkaldes også for et *retningsdiagram*.



Figur 5.1 – Her ses linjeelementer for ligningen $y' = x + y$.

Til sidst vil jeg nævne et meget vigtigt resultat om differentialligninger, nemlig *eksistens- og entydighedssætningen*. Jeg vil blot præsentere den for ordinære 1. ordens differentialligninger på formen $y' = F(x, y)$.

Lad T betegne rektanglet $T = [-a, a] \times [-b, b]$, og lad punktet (x_0, y_0) være centrum. Lad endvidere funktionen F og $\frac{dF}{dy}$ være kontinuerte i hvert punkt i T. Så findes et interval, $|x - x_0| \leq h$, hvor $h \leq a$, og en funktion $\phi(x)$ med følgende egenskaber:

a) $y = \phi(x)$ er en løsning til ligningen $y' = F(x, y)$ i intervallet $|x - x_0| \leq h$.
b) I intervallet $|x - x_0| \leq h$ opfylder $\phi(x)$ uligheden $|\phi(x) - y_0| \leq b$.
c) $\phi(x_0) = y_0$.
d) $\phi(x)$ er entydig i intervallet $|x - x_0| \leq h$ på en sådan måde, at det er den eneste funktion, der opfylder alle egenskaberne fra a), b) og c).

Løst sagt siger sætningen altså, at hvis $F(x, y)$ opfører sig tilstrækkelig ”pænt” tæt ved punktet (x_0, y_0), så har differentialligningen $y' = F(x, y)$ en løsning, som passerer gennem punktet (x_0, y_0), og denne løsning er entydig tæt ved (x_0, y_0). Jeg vil udelade beviset her og henvise til bogen af Rainville, Bedient & Bedient (1997, s. 246ff).

Jeg vil nu fremlægge en stofdidaktisk analyse for differentialligninger i det omfang, der er relevant i denne sammenhæng. Til gennemgangen vil jeg bl.a. gøre brug af lærebogen *Integralregning og differentialligninger* (Clausen, Printz & Schomacker, 1993). Denne bog bliver brugt som udgangspunkt for undervisningen i det observerede forløb. Jeg vil præsentere to forskellige områder. Først vil jeg introducere rammebegrebet i forhold til differentialligninger, og derefter vil jeg se på forskellige områder af modellering, herunder vækstmodeller, opstilling af differentialligninger samt se på et eksempel fra fysik. I gennemgangen vil jeg blandt andet se på, hvilke epistemologiske, kognitive og didaktiske forhindringer, der ligger i stoffet.

5.2 Differentialligninger og rammer

Differentialligninger er radikalt anderledes end alle andre slags ligninger, gymnasieelever tidligere vil have stødt på. Løsningen er her en familie af funktioner og ikke et tal. En af de afgørende faktorer er her, at funktioner her skal tænkes på som matematiske genstande i sig selv. Derved er mange af de didaktiske udfordringer i forbindelse med differentialligninger forbundet med udfordringerne ved funktionsbegrebet. Vi ved fra litteraturen, at funktionsbegrebet som sådan er et område af matematikken, som mange elever har vanskeligheder med (Sierpinska, 1992; Sfard, 1992; Dubinsky & Harel, 1992). Sierpinska (1992) nævner at man overordnet kan have to slags opfattelser eller mentale billeder af funktionsbegrebet. Sierpinska (1992, s. 29) bruger udtrykket: ”*the images we have of functions…”* Når jeg skriver “billede af funktioner” mener jeg dermed vores opfattelse eller mentale billede, på samme måde som Sierpinska (1992). Den ene måde er ved at tænke på funktioner som *relationer*, hvilket fører til et *statisk* billede af funktionsbegrebet. Følgende eksempel forklarer fænomenet:

> *Nogle gange er relationen givet ved en ligning, som beskriver betingelserne for hvornår et punkt tilhører kurven. Hvis kurven allerede er der, så løfter ligningen sløret for den allerede eksisterende relation mellem koordinaterne. Det billede vi har af funktioner her er ”statisk” på en sådan måde, at disse ”love” ikke er defineret af os, vi laver dem ikke; de bliver i stedet opdaget af os. (Sierpinska, 1992, s.29, egen oversættelse)*

Det statiske billede af funktioner giver anledning til en opfattelse af funktioner som objekter og genstande i sig selv. Man kan dog også tale om funktioner som *processer* eller ”mappings”, hvilket fører til et mere *dynamisk* billede af funktionsbegrebet. Igen vil jeg illustrere det med et eksempel:

> *Vi spejler objekter i en eller flere spejle for at opnå harmoniske mønstre (symmetrier). Vi gør det: Vi foretager en proces på objekterne eller mængder af objekter for at opnå andre objekter. Dette giver et mere dynamisk billede af en funktion. (Sierpinska, 1992, s.30)*

Denne måde at skelne mellem de to opfattelser af funktioner understøttes af både Sfard (1992) og Dubinsky & Harel (1992), som også diskuterer betydningen af dette. Sierpinska (1992) nævner, at man i undervisningssammenhæng ofte har valgt at præsentere det dynamiske billede først. Elever lærer derfor, at funktioner er afbildninger og processer. At tænke på funktioner som matematiske genstande hører dog ind under det statiske billede af funktioner. Da en af forudsætningerne i at kunne læse og arbejde med en differentialligning er at tænke på funktioner som matematiske genstande, vil det dynamiske billede af funktionsbegrebet udgøre en didaktisk forhindring for eleverne. Overgangen fra at forstå tal som løsninger til en ligning til at forstå funktioner som løsninger til en ligning er derfor ikke triviel for eleverne, som Rasmussen (2001) også nævner.

Ikke nok med, at det i sig selv er en matematisk udfordring bare at læse en differentialligning og forstå, hvad den siger, men som beskrevet ovenfor i afsnit 5.1 er der mange begreber i forbindelse med differentialligninger, som elever skal forholde sig til. Her iblandt er differentialligningens fuldstændige løsning, nemlig at der er uendeligt mange løsninger. Termen en familie af funktioner kan være en didaktisk forhindring, idet eleverne ikke nødvendigvis er vant til at arbejde med mere end én funktion af gangen.

Når man vil sige noget om løsningen til en differentialligning, er der forskellige måder at gribe det an på. Jeg vil benytte ramme-begrebet, som blev introduceret i afsnit 3.4. De tre rammer, som er relevante for arbejdet med differentialligninger er ifølge Artigue (1992):

- Algebraisk ramme
- Grafisk ramme
- Numerisk ramme

Artigue (1992) identificerer dog den anden ramme som geometrisk ramme i stedet for grafisk ramme. Det fremgår desuden af Artigue (1992), at den grafiske og den geometriske ramme ikke er den samme, men to forskellige rammer. Hun skriver, at løsninger inden for den geometriske ramme er retningsdiagrammet for en ligning. Jeg vælger her at se på retningsdiagrammet som en grafisk repræsentation af løsningen. Endvidere vil jeg karakterisere hver af rammerne og for hver ramme udpege metoder, problemstillinger samt fordele og ulemper i forhold til løsning af differentialligninger. Vi vil kun se på det indhold, der er relevant for omfanget af observationerne. Til sidst vil jeg også komme ind på, hvordan man kan arbejde på tværs af rammerne, særligt mellem den grafiske og den algebraiske ramme.

5.2.1 Algebraiske ramme

Artigue (1992) karakteriserer den algebraiske ramme således:

> *… hvor løsninger er udtrykt ved hjælp af eksakte algebraiske formler, eksplicit eller implicit, rækkeudviklinger, integraludtryk,… (Artigur, 1992, s. 112, egen oversættelse)*

Formålet inden for denne ramme er, at man vil finde den eksakte løsning til en differentialligning og den fuldstændige løsning hvis muligt. De vigtigste repræsentationer man arbejder med her er selve den algebraiske differentialligning, funktionsforskriften for løsningerne og andre symbol-udtryk. Man ræsonnerer og arbejder inden for denne ramme ved at udføre algebraiske regne-operationer, fx differentiere og integrere. En af de vigtigste løsningsmetoder i gymnasiet er separation af de variable. Denne vender jeg tilbage til nedenfor. Idet man søger at finde den eksakte løsning – eksplicit eller implicit – bliver arbejdet inden for denne ramme af en formel karakter. Ofte kaldes løsningen inden for denne ramme for den formelle løsning.

Den algebraiske ramme har traditionelt været den, man i undervisningssammenhæng har fokuseret mest på. Artigue (1994) påpeger at dette er tilfældet i Frankrig. Vi ser, at det også er et gennemgående træk i de tre lærebøger. Selvom det er tilfredsstillende, at man i mange tilfælde kan løse en differentialligning eksplicit og være i stand til at gennemanalyse løsningen inden for denne ramme, er der dog nogle store ulemper ved at fokusere alt for meget på denne ramme. En af de store problemstillinger belyses af Artigue (1994):

> *Undervisning rettet imod franske bachelorstuderende var (og er hovedsageligt stadig) fokuseret på algebraisk løsning med en empirisk tilgang, der er karakteristisk for den begyndende udvikling af teorien. Dette er et stabilt objekt, der er levende og velfungerende i undervisningssystemet, men det leder studerende hen imod et snæversynet og i nogle tilfælde fejlagtigt billede af dette område. For eksempel er de fleste studerende overbevist om, at der eksisterer en opskrift, som tillader den eksakte algebraiske integration af enhver type differentialligning (siden de aldrig støder på andre), og at det eneste mål med forskning er at fuldende den eksisterende opskriftsbog. (Artigue, 1994, s.31, egen oversættelse).*

En af de helt store ulemper er altså, at kun ganske få slags differentialligninger kan løses helt eksakt og langt de fleste differentialligninger, som man møder i anvendt matematik, er ikke på en sådan form. Hvis man fokuserer alt for ensidigt på denne tilgang, vil man derfor få et for snævert billede af, hvad differentialligninger er. Elever vil derfor have tendens til at tro, at alle differentialligninger er på sådan en form, hvilket slet ikke er tilfældet. Der er også risiko for, at det algebraiske arbejde med differentialligningerne kommer til at drukne i symbolmanipulation, og at man dermed mister fokus fra de grundlæggende problemstillinger ved differentialligninger. Jeg vil præsentere en af de vigtigste standardmetoder for gymnasiematematik, som hører til i den algebraiske ramme.

5.2.1.1 Metode: Separation af de variable

Denne metode er omdrejningspunktet i de indledende afsnit om differentialligninger i lærebogen af Clausen et al. (1993). Sætningen, som den er formuleret i lærebogen lyder:

Sætning: Antag, at funktionen $g(y)$ er defineret i et interval J, hvor den er kontinuert og forskellig fra 0, samt at $h(x)$ er defineret i et interval I, hvor den er kontinuert. Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x)$$

er da implicit givet ved ligningen

$$G(y) = H(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

hvor $G(y)$ og $H(x)$ er stamfunktioner til henholdsvis $\frac{1}{g(y)}$ og $h(x)$.

Figur 5.2 – Sætning om separation af de variable fra lærebogen. (Clausen et al. (1993), side 67-68).

Når man skal benytte separation af de variable, bruger man som regel ikke sætningen direkte. Sætningen fungerer mest som et bevis for at metoden er gyldig og virker. Jeg vil derfor præsentere selve metoden til at løse en differentialligning på formen $\frac{dy}{dx} = g(y)h(x)$ med et eksempel.

EKSEMPEL 72: I ligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$$

kan de variable separeres. For $y > 0$ er $g(y) = y$ positiv og kontinuert, og for $x \in \mathbb{R}$ er $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ kontinuert. For $x \in \mathbb{R}$ og $y > 0$ finder vi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$ln(y) = ln(1+x^2) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{ln(1+x^2)+c_1}, \ \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = c \cdot (1+x^2), \quad c = e^{c_1} \in \mathbb{R}_+.$$

Figur 5.3 – Eksempel på hvordan metoden separation af de variable virker. (Clausen et al. (1993), s. 69).

I eksemplet lægger vi mærke til flere ting angående metoden. Vi ser, at det essentielle i metoden er at kunne bestemme stamfunktioner. Først findes den implicitte løsning ved hjælp af stamfunktionsbestemmelse, og derefter findes den eksplicitte funktion, hvilket foregår i større eller mindre grad ved symbolmanipulation. Som en del af metoden splitter man desuden differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$ op, som om det var en brøk med tæller og nævner. Det er ikke en gyldig matematisk tankegang, men det benyttes for bedre at kunne huske metoden og fordi sætningen siger, at ”det virker”. Dette kommenteres også af Clausen et al. (1993). Denne tvetydighed kan dog være med til at forvirre elevernes opfattelse af differentialkvotienter. For overhovedet at kunne benytte sætningen, skal man desuden tjekke om funktionerne $g(y)$ og $h(x)$ er kontinuerte på intervallerne I og J. I eksemplet ovenfor er $J =]0, \infty[$ og $I = \mathbb{R}$. Eleverne skal derfor også have kendskab til kontinuitetsbegrebet og være i stand til at afgøre om en funktion er kontinuert eller ej.

Metoden benyttes primært til at fuldføre beviserne for nogle typiske differentialligninger, som vi vil se i senere afsnit, og desuden fungerer den som metode til at løse andre differentialligninger, der kan separeres. Clausen et al. (1993) lægger op til at dette er en af de vigtigste metoder inden for løsning af differentialligninger i gymnasiesammenhæng. Det kan dog diskuteres, hvor vigtig den egentlig er overordnet set. Inden for den algebraiske ramme for 1. ordens differentialligninger har den en rimelig stor rolle, men går man til mere generelle differentialligninger er metoden ikke tilstrækkelig. De beviser metoden er med til fuldføre er dog meget centrale i forhold til de opgaver gymnasieelever møder. Som nævnt ovenfor, så kan en overfokusering på den algebraiske ramme og metoden separation af de variable føre til, at elevernes opfattelse af en differentialligning blive sådan, at den altid er på en form, som kan løses ved denne metode.

5.2.2 Grafisk ramme

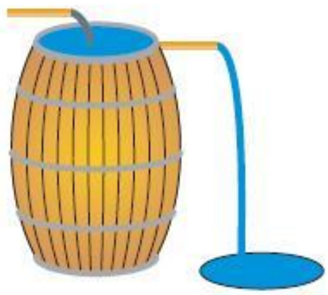
Som nævnt ovenfor har jeg valgt, at sige, at man kan se på en differentiallignings løsning inden for en grafisk ramme, hvorimod Artigue (1992) ser det som en geometrisk ramme. Artigue definerer den geometriske ramme således:

> *… hvor ambitionen er at karakterisere hele mængden af løsningskurver fra et topologisk synspunkt, det vil sige retningsdiagrammet for ligningen. Sådan en løsning bliver ofte kaldt en kvalitativ løsning. (Artigue, 1992, s.112, egen oversættelse).*

Artigue (1992) siger altså, at formålet er at finde en kvalitativ løsning i form af linjeelementerne, da de karakteriserer de samtlige løsningskurver. Linjeelementer er altså den centrale repræsentation her. I det jeg har kaldt den grafiske ramme, har linjeelementerne som repræsentation for løsningerne også en helt særlig rolle. Formålet er det samme, altså at finde en kvalitativ løsning. Jeg har blot valgt at kalde det for en grafisk ramme, da jeg ønsker at fremhæve, at det er de grafiske repræsentationsformer, der benyttes til at finde den kvalitative løsning. Ud over linjeelementer er grafer for en eller flere løsninger en repræsentation, som benyttes inden for denne ramme. Også fasediagrammet for en autonom differentialligning er et eksempel på en grafisk repræsentation af væksten for en løsning. Inden for emnet differentialligninger kan man finde utallige grafiske repræsentationsformer, og de har altså en særlig status i den grafiske ramme. Arbejdsformen indenfor denne ramme er at konstruere diverse grafiske repræsentationer og bruge dem til at foretage en kvalitativ analyse. Den store fordel ved at arbejde inden for den grafiske ramme er, at man kan få information om løsningerne til en differentialligning uden at have fundet den eksakte løsning. Alle typer differentialligninger på formen $y' = F(x, y)$ kan studeres grafisk, så man har mulighed for at arbejde med en langt større mængde differential-ligninger end i den algebraiske ramme.

Linjeelementer er en helt særlig størrelse, som kun eksisterer i forbindelse med differential-ligninger. Elever vil derfor ikke have mødt linjeelementer før i andre matematiske sammenhænge, og man må derfor forvente, at eleverne skal have en vis tilvænningsperiode med hensyn til linjeelementer. Man kan forestille sig mange forhindringer, som eleverne kunne have i forbindelse med brugen og betydningen af linjeelementer. De små linjestykker repræsenterer som tidligere forklaret tangenthældningen for en løsning gennem dette punkt. Givet et retningsdiagram kan man misforstå brugen af den på flere måder. Man kunne fx tro at en løsning skal følge de små linjestykker, og at man kan finde en løsning ved at lade linjestykkerne indgå som en del af en løsning. I lærebogen af Clausen et al. (1993) introduceres linjeelementer tidligt i forløbet som et redskab til at kunne danne sig et indtryk af løsningskurverne. Det illustreres med et ganske kort eksempel, og så nævnes et computerprogram ved navn MultiDiff, som kan tegne linjeelementer. Efter denne korte introduktion er det dog slående, at hverken linjeelementer eller programmet MultiDiff ikke nævnes i resten af lærebogen. I lærebogen MAT A3 af Carstensen, Frandsen & Studsgaard (2007) defineres linjeelementerne også. Her demonstreres et enkelt eksempel, men herefter bruges linjeelementer heller ikke i resten af denne lærebog. Den samme tendens ses også i lærebogen af Nielsen & Fogh (2011), hvor linjeelementer kun nævnes en enkelt gang i en lille note. Disse ting afspejler den traditionelle tendens i undervisningen, nemlig at den grafiske ramme ikke er særlig godt integreret. Den kvalitative løsning spiller tilsyneladende en meget lille rolle. Dette ses blandt andet også i de skriftlige eksamensopgaver. Jeg har set på fem tilfældige eksamenssæt for matematik A i stx, der stammer fra de sidste tre år. I to af sættene er der en opgave om differentialligninger i prøven uden hjælpemidler. I de fire sæt indgår en enkelt opgave om differentialligninger i prøven med hjælpemidler og i et enkelt eksamenssæt er der to opgaver. Overordnet set foregår næsten alle opgaverne inden for den algebraiske ramme. Ingen af opgaverne inddrager linjeelementer og kun 2 ud af 14 delspørgsmål beder om en skitse af grafen for en given løsning. Dette er de eneste spørgsmål, der inddrager en grafisk repræsentation af en løsning. Den ene af de eksamensopgaver ses i figuren nedenfor:

Opgave 11 Fra et rør løber forurenet vand ned i en tønde med vand. Med $C(t)$ betegnes koncentrationen (målt i ppm) af det forurenende stof i tønden til tidspunktet t (målt i minutter). I en model antages det, at $C(t)$ er en løsning til differentialligningen



$$\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C.$$

Det oplyses, at $C(0) = 0$.

a) Bestem en forskrift for $C(t)$.

b) Skitsér grafen for $C(t)$, og bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen af det forurenende stof i tønden er 10 ppm.

c) Bestem $C'(15)$, og giv en fortolkning af dette tal.

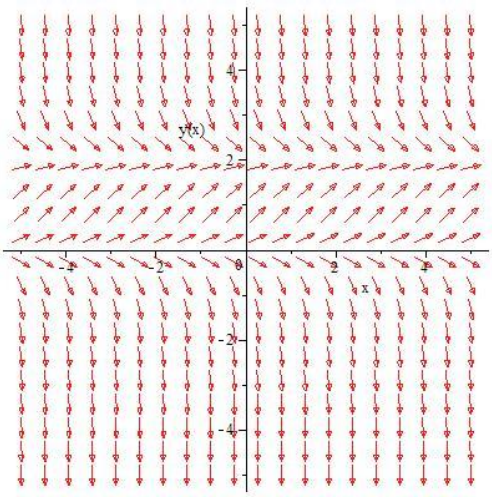
Figur 5.4 – Opgave fra eksamenssæt matematik A, stx, December 2011 (Eksamensæt, udateret).

I opgaven får vi givet en lineær autonom differentialligning. I delspørgsmål a skal man finde løsningen med en given initialbetingelse. Denne opgave foregår inden for den algebraiske ramme, da formålet er at bestemme den eksakte løsning. Dette er den opgavetype, der optræder hyppigst i de opgaver, jeg har set på. Den optræder i samtlige opgaver fra prøven med hjælpemidler. I delspørgsmål b) skal man blandt andet skitsere grafen for den løsning, man fandt i a). Selvom løsningskurver er en del af den grafiske ramme, er formålet med opgaven dog ikke at finde en kvalitativ løsning. Den grafiske rammes rolle i opgaven er således meget begrænset, og man kan diskutere om arbejdet med grafen overhovedet foregår inden for den grafiske ramme. Resten af spørgsmålene har heller ikke noget med den grafiske ramme at gøre. ¨

Inden for de sidste 20 år har der i litteraturen været stor fokus på, hvordan man integrerer den grafiske ramme af differentialligninger i større grad i undervisningen. Dette ses bl.a. hos Artigue (1992), Artigue (1994) og Rasmussen (2001). Begrundelserne for at det er vigtigt, at have den grafiske ramme med, er at eleverne kan få et mere nuanceret mentalt billede af differential-ligninger, så man undgår de uheldige konsekvenser, som nævnes i afsnittet ovenfor om den algebraiske ramme. Integreringen af den grafiske ramme er inden for de senere år dog blevet meget mere tilgængelig med udviklingen af de mange CAS -værktøjer i gymnasiesammenhæng. Jeg vil her fremhæve programmet MAPLE, som benyttes i undervisningen i den klasse, hvor mine observationer foregik. I programmet MAPLE kan man let og hurtigt lave overskuelige retnings-diagrammer. Udstyret med *with(DEtools)* får vi, at kommandoen

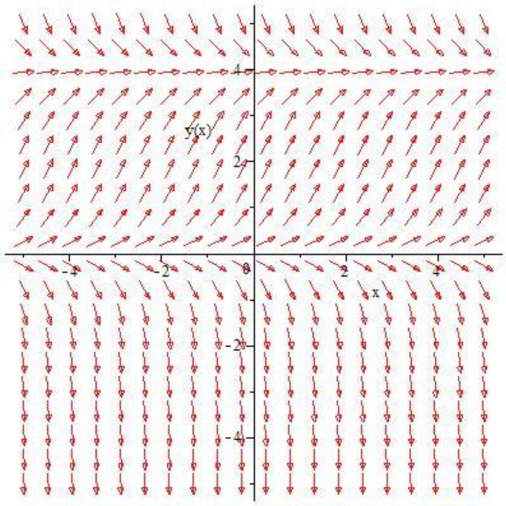
$$DEplot(y'(x) = \mathrm{y}(\mathrm{x}) \cdot (2 - 1 \cdot y(\mathrm{x})), y(x), x = -5\,..5, y = -5\,..5, arrows = medium)$$

producerer figur 5.5 til venstre. Før CAS-værktøjernes indtog var det en tidskrævende og besværlig proces, at tegne linjeelementer, da det foregik i hånden. Et sådant håndtegnet diagram er heller ikke nødvendigvis særligt overskueligt, og dermed ikke så brugbart til at se de store linjer i løsningerne. MAPLE har dog både fordele og ulemper. Som det ses i kommandolinjen indgår forskellige parametre i de input, man giver programmet. Fx skal man selv bestemme rammerne for vinduet. I eksemplet defineres både x-aksen og y-aksen til $[-5,5]$. Desuden kan man vælge, hvilken størrelse linjeelementer skal have med kommandoen *arrows = medium*. Der er også andre input, der definerer den pågældende differentialligning. Dette er alt sammen parametre i programmet, som kan varieres, og disse er altså tekniske eller grafiske parametre. På den ene side er det en fordel at kunne kontrollere alle de grafiske parametre, men på den anden side, bliver det mere og mere teknisk. Jo mere indviklet syntaksen bliver, og jo flere tekniske parametre i programmet man skal kontrollere, jo mindre tilgængeligt bliver programmet også for eleverne. Dette er et aspekt,



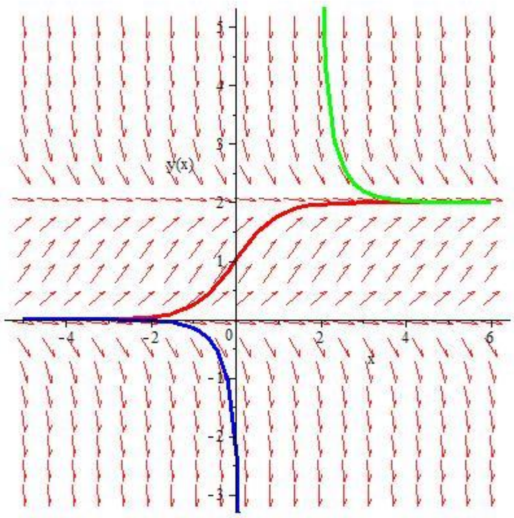
Figur 5.5 – Linjeelementerne til differentialligningen $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}(\mathbf{2} - \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{y})$, tegnet i MAPLE.

som man ikke må glemme, når man har at gøre med instrumenterede teknikker. Der er dog også nogle andre parametre i denne sammenhæng, nemlig i selve differentialligningen. I figur 5.5 har vi linjeelementerne for en logistisk ligning, $y' = y(b - ay)$, hvor $a = 1$ og $b = 2$. Her er a og b parametre, som kan varieres, hvis man ønsker at studere den logistiske ligning. I MAPLE kan man fx ændre værdierne af a og b og med det samme se, hvad forskellen er på linjeelementerne. Man kan altså spare en masse tid med CAS-værktøjerne. Hvis man for eksempel sætter $a = ½$ i stedet for 1, får man retningsdiagrammet, som ses i figur 5.6.



Figur 5.6 - Linjeelementerne til differentialligningen $y' = y(2 - ½ \cdot y)$, tegnet i MAPLE

Vi ser nu, at den øverste asymptote er flyttet til $y = 4$. Ved at fortsætte med at ændre på variablerne a og b, kan man komme frem til en hypotese om hvordan asymptoterne hænger sammen med parametrene a og b. På denne måde kan et sådant retningsdiagram bruges i undervisningen som en dynamisk repræsentation af linjeelementerne. Dynamiske repræsentationer er beskrevet i afsnit 3.1. I MAPLE er det også muligt at indtegne mulige løsningskurver, altså grafer for løsningsfunktioner med givne initialbetingelser. Dette er illustreret for retningsdiagrammet fra figur 5.5.

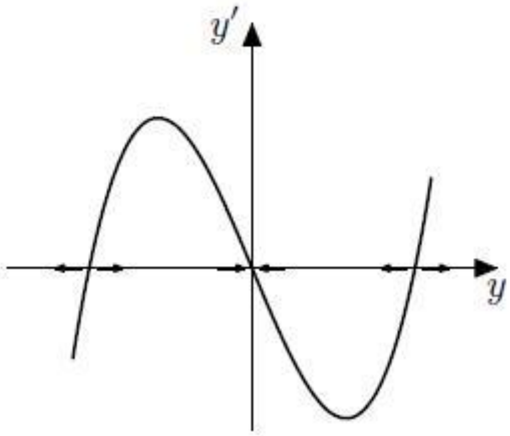


Figur 5.7 – Linjeelementer og løsningskurver med givne initialbetingelser for $y' = y(2 - y)$, tegnet i MAPLE.

5.2.2.1 Autonome differentialligninger: $\boldsymbol{y' = F(y)}$.

For autonome differentialligninger kan man benytte fasediagrammer til at identificere stabile og ustabile ligevægtstilstande. For en løsning $y(x)$ til det autonome system $\frac{dy}{dx} = F(y)$ vil punkterne $(y(x), y'(x))$ bevæge sig på fasediagrammet, når x ændrer sig. $F(y)$'s skæringer med y-aksen er ligevægtstilstande. For en ligevægt $y(x) = b; F(b) = 0$ ses af fasediagrammet, at (forudsat $F(y)$ er tilstrækkelig "pæn"):

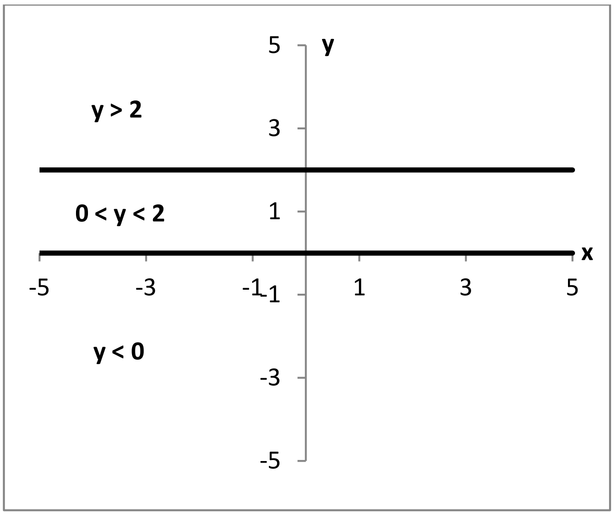
- $F'(b) < 0$: Stabil ligevægtstilstand.
- $F'(b) > 0$: Ustabil ligevægtstilstand.
- $F'(b) = 0$: Ingen konklusion.



Figur 5.8 - Eksempel på fasediagram for tilfældig autonom differentialligning. Pilene viser om væksten y' er stigende eller aftagende. (Nielsen & Salomonsen, 2006, s. 158).

I fasediagrammet ligger endnu en didaktisk forhindring. Eleverne har hidtil i deres undervisning stort set kun mødt grafer, hvor en funktion y afbildes som funktion af x. Man kan argumentere for, at vi blot har omdøbt variablerne, sådan at x er blevet til y og y er navngivet som $y' = F(y)$. Det springende punkt er fortolkningen af grafen, idet x stadig ikke er ude af billedet. y, som i fasediagrammet udgør den nye definitionsmængde, er ikke blot et interval af reelle tal, men hver y-værdi er en funktionsværdi, som afhænger af x. Man ser typisk på fasediagrammet sammen med grafen over løsningerne eller linjeelementerne og man ønsker at sige noget om løsningen $y(x)$ ud fra fasediagrammet. Dette kan altså være en yderligere didaktisk forhindring for eleverne.

Vi vil her definere, hvad et *løsningsområde* dækker over. Dette er ikke en alment defineret term, men den bruges i den observerede undervisning, så jeg vil derfor definere, hvad det dækker over. Først og fremmest kan man ikke definere løsningsområder for vilkårlige differentialligninger. Jeg vil her se på specialtilfældet, hvor vi har en autonom differentialligning på formen $\frac{dy}{dx} = F(y)$, hvor F er en kontinuert funktion. Lad N_F betegne alle F's nulpunkter, altså $N_F = \{y \in \mathbb{R} | F(y) = 0\}$. Ud fra nulpunkterne kan man opdele planen vertikalt i strimler. Vi definerer så løsningsområderne til at være strimlerne samt de forskellige nulpunkter. Til at illustrere det vil jeg bruge eksemplet fra figur 5.5. I eksemplet er differentialligningen $y' = y(2 - y)$. Her er $N_F = \{0,2\}$. Disse nulpunkter markerer skellet mellem strimlerne, så planen opdeles vertikalt i strimlerne $y < 0$, $0 < y < 2$ og $y > 2$. Løsningsområderne er derfor $y < 0$, $y = 0$, $0 < y < 2$, $y = 2$ og $y > 2$. Der er altså fem løsningsområder i dette tilfælde. Områderne er illustreret på figur 4.8. Man kunne også beskrive løsningsområder på andre måder. Vi ser for eksempel, at alle løsninger inden for et løsningsområde har samme fortegn på den afledte eller har en afledt, der er konstant lig med nul.



Figur 5.8 – Løsningsområderne for $y' = y(2 - y)$: De tre strimler samt $y = 0$ og $y = 2$. Tegnet i Excel.

For autonome differentialligninger ser vi, at den grafiske ramme teoretisk set også kan benyttes til at validere hypoteser. Fasediagrammet kan bruges til validere hypoteser om væksten af en løsning eller om stabile og ustabile ligevægtstilstande. Løsningskurver og linjeelementer kan benyttes til at validere hypoteser om løsningsområder og løsningers asymptotiske opførsel.

5.2.3 Numerisk ramme

Artigue beskriver den numeriske ramme således:

> *… hvor løsningerne er udtrykt ved hjælp af numerisk approksimerede værdier,…*
> *(Artigue,1992, s.112, egen oversættelse).*

Indenfor den numeriske ramme er formålet altså at finde løsninger, som er udtrykt ved numerisk approksimerede værdier. Arbejdsformen er typisk nogle algoritmer. Ved arbejdet med disse algoritmer benyttes repræsentationer fra mange registre heriblandt tabeller, algebraiske udtryk og grafer.

Clausen et al. (1993) har et kapitel om numeriske løsninger, der hovedsageligt handler om Eulers metode og Runge-Kutta metoder. Disse metoder giver dog også anledning til nogle af de vigtigste algoritmer. Jeg vil dog ikke gå i detaljer med teorien om disse metoder her, da detaljerne i algoritmerne ikke er noget vi skal bruge i analysen i dette projekt. Nu om dage har CAS-værktøjerne dog gjort deres indtog i gymnasiematematikken, og mange af disse kan løse differentialligninger numerisk. Her er det blot CAS-værktøjerne, der udfører algoritmerne for os.

Lærebøgerne af Carstensen et al. (2007) og Nielsen & Fogh (2011) inddrager ingen numeriske metoder, men de inddrager dog en del brug af CAS-værktøj, som kan benyttes i numeriske løsninger. Dette lægges der dog ikke op til i de to lærebøger. Den numeriske ramme er vigtig fordi den sætter fokus på, at langt de fleste differentialligninger ikke kan løses eksakt. Dertil får man med de computerbaserede løsninger mulighed for at studere mere varierede typer af differentialligninger end blot de, der kan løses eksakt. Den numeriske ramme er derfor særlig vigtig i modellerings- og anvendelsessammenhænge.

5.2.4 Rammer i forhold til undervisningsfaget matematik

Vi har nu set på, hvordan man kan arbejde i tre forskellige rammer med differentialligninger alt efter, hvilket formål man har. I denne opgave vil jeg dog ikke fokusere så meget på den numeriske ramme, men mere på samspillet mellem den grafiske og den algebraiske ramme.

Som tidligere beskrevet i afsnit 5.2.2 har man traditionelt og historisk set fokuseret meget på den algebraiske ramme, og det gør man tilsyneladende stadig. Udviklingen med diverse CAS-værktøjer har dog gjort at mange af de metoder og teknikker, man benytter i den algebraiske ramme, bliver delvist meningsløse. Eleverne behøver ikke at mestre metoder til at finde den eksakte løsning, da fx MAPLE kan gøre det for dem. Dette er med at tillægge den kvalitative analyse af løsningen en endnu større betydning i undervisningssammenhæng. Derfor ville det være naturligt at inddrage den grafiske ramme i højere grad i undervisningen. I læreplanen for matematik A, står der endda, at kernestoffet skal indeholde: *kvalitativ analyse af givne differentialligninger*. Hvad der præcist menes med dette er dog svært at vide, men det er interessant, at man i læreplanen nu har formuleret, at man ønsker, at dette perspektiv skal med i undervisningen, og endda som en del af kernestoffet. I den grafiske ramme spiller CAS-værktøjerne også en rolle, idet de åbner op for nye muligheder, som ikke var tilgængelige for få år tilbage. Man må dog også huske, at CAS-værktøjerne ikke løser alle de didaktiske problemer, idet de skaber nogle nye udfordringer, hvoraf nogle er beskrevet i afsnit 5.2.2. Vi vil her særligt se på forbindelsen mellem den grafiske og den algebraiske ramme. Artigue (1992) ser også på forholdet mellem den de to rammer, og hun taler i den forbindelse om en kvalitativ løsning:

> *Givet en ligning (algebraisk objekt), så vil denne ligning korrespondere med et retningsdiagram med linjeelementer og en mængde af løsningskurver i den grafiske ramme. Den kvalitative løsning består da af en permanent udveksling mellem ligning og tegninger. (Artigue, 1992, s. 113, egen oversættelse).*

Det er altså i sammenspillet mellem de to rammer, at den kvalitative løsning opstår. Man kan beskrive et vigtigt skel mellem den grafiske og den algebraiske ramme på følgende måde. Inden for den algebraiske ramme ser man på løsningerne *lokalt*. Man kan her helt konkret sige, hvad der sker i et enkelt punkt, hvordan væksten er, og hvilken forskrift løsningen har for en bestemt initialbetingelse. I den grafiske ramme ser man derimod på løsningerne *globalt*. Man ser altså det store overblik og de store linjer, fx asymptoterne eller løsningsområderne for autonome differentialligninger. Det er muligt at finde partikulære løsninger ved at arbejde med formler og symbolmanipulation inden for den algebraiske ramme uden at man kommer særligt ind på, at løsningen er en funktion. For en elev kan dette arbejde føles som løsning af endnu en ligning ved hjælp af en formel, og eleven tvinges ikke til at tænke over løsningens natur. Inden for den grafiske ramme kan man ikke komme uden om det, og dermed tilføjer den grafiske ramme en god vinkel på arbejdet med differentialligninger. En af ulemperne ved at arbejde i den grafiske ramme er, at det kan være sværere at gøre validering præcis, da man jo kigger på en kvalitativ løsning i denne ramme. Validering opfattes ofte som noget eksakt, og vi tænker derfor ofte på at foretage validering i den algebraiske ramme. Man kan dog sagtens forestille sig at benytte fx et fasediagram for et autonom differentialligning til at validere, om en ligevægtstilstand er stabil eller ustabil.

5.3 Modeller med differentialligninger

5.3.1 Differentialligninger – et historisk perspektiv

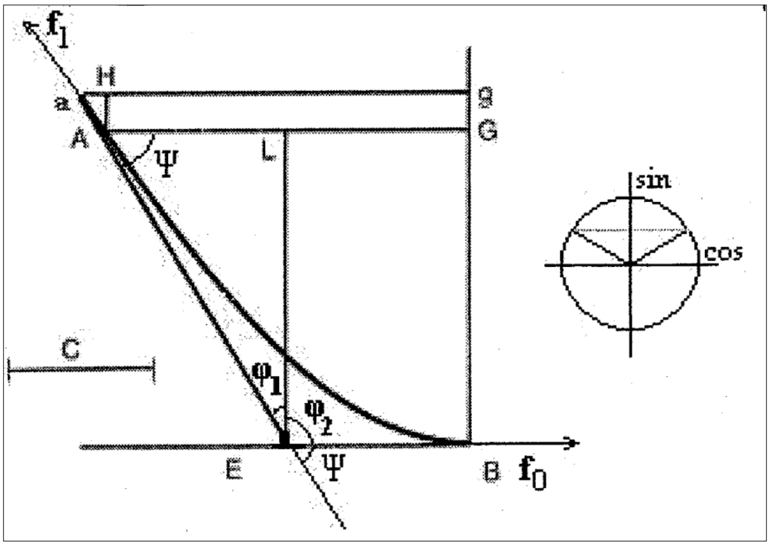
Jeg vil først kort beskrive, hvordan differentialligninger opstod historisk set (Katz, 2009). Descartes indførte den analytiske geometri med sit appendix *La Géométrie* til værket *Discours de la méthode pour bien conduire sa reaison et chercher la vérité dans les science*[2] fra 1637. Dette lagde grund til en række nye konstruktioner af kurver og solider og forskellige problemstillinger med disse. På dette tidspunkt arbejdede man endnu ikke med funktioner, men med kurver. Newton og Leibniz udviklede begge uafhængigt af hinanden de basale koncepter for analysen i den sidste halvdel af 1600-tallet. De havde dog hver deres tilgang. Leibniz lagde fx meget vægt på differentialer og integraler, mens Newton havde sit udgangspunkt i bevægelse. På hver deres måde begyndte de dog begge at arbejde med infinitesimale størrelser og differentialligninger. De begynder at benytte disse nye koncepter til at løse mange af datidens svære og hidtil uløste videnskabelige problemer. Disse indeholdt ofte emnerne mekanik og geometri. Et eksempel herpå er Newton, der løste astronomen Halley's spørgsmål, som lyder:

> *Hvilken kurve er beskrevet af planeterne, når det er antaget, at tiltrækningskraften i retning mod solen er reciprok til kvadratet på afstanden fra den? (Katz, 2009, s.556-557, egen oversættelse).*

Katz (2009) skriver, at Newton med det same svarede, at han allerede havde beregnet det, og at det var en ellipse. I resten af 1600-tallet og videre i 1700-tallet fortsatte denne udvikling. Drivkraften bag matematikerne og fysikerne var ønsket om at løse fysiske problemer. Desuden skete der et skift i denne periode fra at studere kurver til at begynde med at studere analytiske udtryk med en eller flere variable samt ubestemte konstanter. Funktionsbegrebet begyndte altså at komme ind i billedet.

[2] Titel på engelsk: *Discourse on the method for rightly directing one's reason and searching for the truth in the sciences*

Bernoulli-brødrene var nogle af de første til at videreudvikle Leibniz' nye teknikker og koncepter, og de brugte dem til at løse flere fysiske problemstillinger. Det var på dette tidspunkt almindeligt at offentliggøre interessante fysiske og matematiske problemstillinger, som datidens videnskabsmænd så søgte efter en løsning på. Fx offentliggjorde Jakob Bernoulli i 1690 "the catenary problem". Problemstillingen er at bestemme formen af en køreledning, dvs. formen af den kurve som dannes af en køreledning med uniform densitet, der antages at hænge frit mellem to fikserede punkter og at være fleksibel, men uelastisk. Jakob Bernoulli kunne ikke løse problemet selv, men i juni 1691 blev løsningsforslag publiceret af Leibniz, Huygens og Johann Bernoulli i tidsskriftet *Acta eruditorum*. Jeg vil kort gøre rede for Johanns løsning – dog mest med moderne termer. Til sin analyse af problemet brugte han denne skitse:



Figur 4.9 – Skitse af Johann Bernoulli til analyse af "the catenary problem" (Kjeldsen, 2010, s. 2744)

Bernoulli har nogle overordnede fysiske antagelser, som jeg ikke vil komme nærmere ind på. Jeg vil i stedet prøve at forklare, hvordan han opstillede den differentialligning for systemet, som gjorde det muligt for ham at løse problemet (Kjeldsen, 2010). Vi antager, at punktet B er det nederste punkt på kablet, og vi ser på kabelstykket aAB. Den vertikale linje gennem B er y-aksen. Linjen EB er tangentlinje til punktet B og er vandret. Punktet A er tilfældigt valgt på kabelstykket, og tangenten gennem A skærer linjen EB. Skæringspunktet kaldes E. Linjen AG udgør x-aksen. Vi betegner så BG = y, GA = x, Gg = dy og Ha = dx. Bernoulli siger nu, at da vægten er jævnt fordelt i kablet, kan vi sætte vægten af kablet AB lig med længden af AB, nemlig s. Dernæst siger han, at snorkraften i punktet B er f_0, og at størrelsen af denne kraft (vektor) er a. Denne illustreres på skitsen med linjestykket C. Bernoulli argumenterer så ud fra kræfterne og vinklerne i spil sammen med antagelserne og kommer frem til at forholdet mellem vægten, s, og snorkraften i punktet B, a, er lig med forholdet mellem linjerne EL og AL. Endvidere benytter han, at trekanterne ALE og AaH er ligedannede. Derfor konkluderes:

$$\frac{s}{a} = \frac{EL}{AL} = \frac{AH}{Ha} = \frac{dy}{dx}.$$

Her bemærkes, at AH = Gg, hvilket fremgår af skitsen. Denne differentialligning, $s/a = dy/dx$, er udgangspunktet for Johann Bernouillis løsning. I trekanten AaH benytter han endvidere Pythagoras sætning og får: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ved at kvadrere den oprindelige differentialligning fås:

$$ds^2 = \frac{s^2 dy^2 + a^2 dy^2}{s^2},$$

som fører til

$$ds = \frac{\sqrt{s^2 + a^2}\, dy}{s}$$

Og til sidst til

$$dy = \frac{s\, ds}{\sqrt{s^2 + a^2}}.$$

Ved integration får vi $y = \sqrt{s^2 + a^2}$ og $s = \sqrt{y^2 - a^2}$. Til sidst konkluderede Bernoulli, at

$$dx = \frac{a\, dy}{s} = \frac{s\, dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Det var ikke muligt for Bernoulli at udtrykke dette integral eksplicit, men det lykkedes ham at konstruere den ønskede kurve herudfra ved hjælp af bestemte keglesnit. Denne løsning var tilstrækkelig for Bernoulli og samtiden. I dag kan vi løse ligningen eksplicit, og løsningen er $y = a\, cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Dette er et eksempel på, hvordan differentialligninger opstod og blev brugt i 1600-tallet til at løse fysiske problemer.

Chaachoua & Saglam (2006) ser også på differentialligningernes opståen og udvikling og konkluderer:

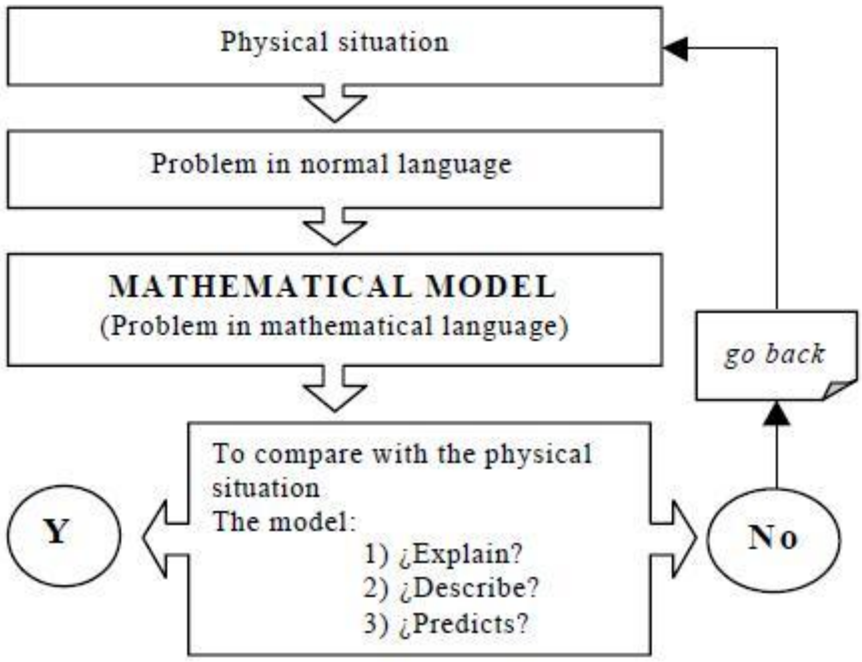
> *Således er udviklingen af dette begreb et resultat af en proces af modellering. Det bliver konstitueret som en model, der tillader én at forstå fysiske fænomener. Dette begreb er derefter udviklet som et matematisk begreb på en sådan måde, at det er dekontektualiseret fra situationerne, hvor det opstod fra. (Chaachoua & Saglam, 2006, s. 17, egen oversættelse).*

Vi ser altså, at differentialligninger opstår, idet man forsøgte at beskrive og besvare fysiske problemstillinger. Vi ser også, hvordan matematikken og fysikken spiller sammen og udvikler sig på en gensidig måde. Man kan sige, at samspillet er en form for modellering, idet matematikken indgår som et redskab til at besvare fysiske spørgsmål. Samtidig medfører samspillet mellem de to fag, at både matematikken og fysikken udvikles. Modellering er derfor med til at give mening og begrundelse til differentialligninger, og vi vil se, at det er vigtigt i undervisningssammenhænge. Jeg vil derfor præsentere forskellige synspunkter fra litteraturen angående den matematiske modelleringsproces.

5.3.2 Matematisk modellering

Matematisk modellering anskues på mange måder i litteraturen. Generelt kan man sige, at modellering har forskellig betydning afhængig af fagenes formål. Modellering har derfor ikke en entydig definition. Ofte tænker vi på modeller som matematiske symboludtryk, men vi må udvide modelbegrebet, da det er langt mere komplekst. I fysik benytter man mange matematiske modeller, men man har også mange diagrammer, som fungerer som modeller. Der kan fx nævnes kraftdiagrammer inden for den klassiske mekanik og henfaldsdiagrammer inden for radioaktivitet. Inden for matematikken kan man også tale om modeller. Man kan løst sige, at en model inden for matematikken er en repræsentation af noget abstrakt. Som eksempel kan jeg nævne den algebraiske struktur, grupper. En gruppe $(G,*)$ er en ikke-tom mængde G med en tilknyttet operation $*$, som skal opfylde nogle bestemte aksiomer, nemlig associativitet, neutralt element og invers element. Dette er en abstrakt struktur. Men så snart vi ser på noget konkret, fx $(\mathbb{Z},+)$, har vi en model af den abstrakte struktur.

Lad os går tilbage og se på matematisk modellering i de naturvidenskabelige fag. En meget udbredt måde at tænke om matematisk modellering og modelleringsprocessen er illustreret i diagrammet, som ses i figur 5.10.



Figur 5.10 – Grafisk model af den matematiske modelleringsproces. (Balderas, 2001, s.22)

Der findes utallige diagrammer som denne i forskellige udgaver i litteraturen. Balderas (2001) beskriver desuden hovedtrinene i modelleringsprocessen i forbindelse med diagrammet:

1. Beskrivelse af den fysiske situation
2. Konstruktion af problemet i naturligt sprog
3. Konstruktion af problemet i matematisk sprog – (konstruktion af den matematiske model).
4. Løsning af problemet inden for den matematiske model
5. Analyse og fortolkning af løsningen
6. Validering af modellen i forhold til den fysiske situation
7. Hvis nødvendigt: Justering af modellen og gentagelse af processen
8. Implementering af modellen

Jeg vil illustrere denne modelleringsproces med et eksempel med inspiration fra lærebogen af Nielsen & Fogh (2011, s.262). Eksemplet drejer sig om væksten af en bakteriekultur.

Trin 1: I en bakteriekultur vil bakterierne formere sig, så længe der er føde nok og bakterierne ikke forgifter sig selv.

Trin 2: Modellen i naturligt sprog lyder: Væksthastigheden er proportional med antallet af bakterier.

Trin 3: Lad $N(t)$ være antallet af bakterier til tiden t. Væksthastigheden vil være $\frac{dN}{dt}$. Den matematiske model må oversat fra trin 2 være:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N.$$

Trin 4: Man kan fx løse problemet ved hjælp af metoden separation af de variable, som blev beskrevet i afsnit 5.2.1.1. Den generelle løsning er så

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt},$$

hvor N_0 er antallet af bakterier til tiden $t = 0$.

Trin 5: Vi er nu kommet frem til, at inden for denne model med antagelsen om at væksthastigheden er proportional med antallet af bakterier udvikler bakterierne sig med eksponentiel vækst. Hvilke værdier konstanterne N_0 og k antager, kan vi dog kun fastlægge ud fra eksperimenter.

Trin 6: For at validere modellen, må man se på data fra et laboratorieforsøg. Vi har følgende data fra et forsøg med dyrkning af bakterier.

Tid (timer)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
Antal (mio.)	15	23	36	54	82	125	190	290

Tabel 5.1 – Udviklingen af en bakteriekultur (Nielsen & Fogh, 2011, s.263)

Eksponentiel regression bekræfter hypotesen om at væksten er eksponentiel, idet regressionen har en forklaringsgrad på $r = 0{,}9999$, og vi får forskriften $N(t) = 15{,}2 \cdot e^{0{,}422 \cdot t}$. I forhold til rækkevidden af resultatet kan vi dog ikke sige noget om, hvorvidt denne udvikling vil fortsætte på en længere tidsskala. Da, jeg ikke kender baggrunden for forsøget er det svært at nævne yderligere kommentarer om bæredygtighed og rækkevidde af modellen.

Trin 7: Der er ikke behov for justering i dette tilfælde

Trin 8: Her kan vi fx forudsige, hvor mange bakterier, der vil være efter 8 timer. Ifølge modellen vil der være $N(8) = 15{,}2 \cdot e^{0{,}422 \cdot 8} = 445$ bakterier.

Dette er et ud af mange forsøg på at beskrive modelleringsprocessen. Denne tankegang er meget udbredt inden for undervisningsfagene i gymnasiet, hvilket fremgår af lærebøgerne. Det er dog vigtigt at huske, at diagrammet og beskrivelsen af trinnene er en model for den matematiske modelleringsproces, og dette er blot én måde at se det på. En af de ting vi lægger mærke til i eksemplet er, at den fysiske og den matematiske del af modelleringsprocessen er meget adskilt. Ud over trin 1 indgår fysikken reelt kun i trin 6, hvor et eksperiment validerer modellen. Som vi så i afsnit 5.3.1, foregik udviklingen af differentialligninger med modellering som centrum på en lidt anden måde. Her var fysik og matematik i samspil. Den udbredte model, som er repræsenteret ved figur 5.10, er dog også blevet kritiseret i litteraturen, idet den er en meget grov forenkling af modelleringsprocessen. En af svaghederne er, at modellen er mere præskriptiv end deskriptiv. Modellen opsætter nærmest en standardprocedure for hvordan man foretager en matematisk modellering. Den bliver altså ikke bare en model for modelleringsprocessen, men mere en model af den. Fx dikterer den, at alle situationer fra det virkelige liv skal laves om til et problem formuleret i ord og derefter oversat til matematik. På denne måde, bliver alle matematiske modeller til "word-problems", altså opgaver formuleret i ord. Det forholder sig dog ofte sådan, at man slet ikke kan beskrive en situation fra virkeligheden uden at bruge matematik. Andre gange kan det være, at man opstiller modellen og hypoteserne ud fra eksperimenterne, altså hvor processen nærmest går den anden vej. Nogle af kritikpunkterne beskrives af Barquero, Bosch & Gascón (2011). Artiklen tager dog udgangspunkt i matematisk modellering på universitetsniveau, men jeg mener, at den belyser nogle problema-tiske træk, som man også ser i gymnasiet. Deres hypotese er, at den herskende ideologi i undervisningen om matematik i forhold til de andre naturvidenskabelige fag er 'applicationism'. En af de mest fremtrædende træk ved denne ideologi er, at faget matematik er uafhængigt af andre discipliner, og at anvendelse altid kommer bagefter den generelle matematiske træning i undervisningen. En af konsekvenserne af denne tankegang beskrives her:

> *I denne kontekst forstås matematisk modellering blot som en 'anvendelse' af tidligere konstrueret matematisk viden eller i det ekstreme tilfælde som en simpel 'eksemplificering' af matematiske redskaber i en ekstra-matematisk kontekst, der er kunstigt designet på forhånd til at passe til disse redskaber. (Barquero et al., 2011, s.1940, egen oversættelse).*

I lærebøgerne ser vi denne tendens, hvilken tyder på, at denne tankegang også eksisterer i gymnasiet. Denne markante opdeling af matematik og de øvrige naturvidenskabelige fag leder desuden til en reducering af de forskellige måder, man kan undervise i matematik som et modelleringsværktøj. Det fører også til, at fagene kun kan udvikles og konstitueres hver for sig og ikke i samspil. En af de meget uheldige konsekvenser er, at der ikke tillades nogen plads til en egentlig modelleringsproces. Barquero, Bosch & Gascón (2008, s. 2052) siger

> *Modelleringsaktiviteten degenererer derfor og er restringeret til brugen af algoritmer fra allerede eksisterende modeller. I forløbet bliver ethvert spørgsmål, der er relateret til oprindelse af modellen og tilstrækkelighed elimineret. (Barquero et al., 2008, s.2052, egen oversættelse).*

Barquero *et al*. (2008) fremstiller så en anden model til at gribe modelleringsprocessen an på i undervisningen, der bryder med tankegangen 'applicationism'. Modelleringsprocessen beskrives her ved hjælp af forsknings- og studieforløb, som er et værktøj fra den antropologiske teori om didaktik (ATD). Her tager modelleringsprocessen sit udgangspunkt i et bredt spørgsmål, som rummer potentiale til at generere mange flere spørgsmål. Spørgsmålet kan være rent matematisk eller have oprindelse i et andet fag. Modelleringen består i at finde de korrekte matematiske redskaber, analysere, studere og beskrive betingelser og begrænsninger. Man kunne fx studere et system X (population), hvor en given værdi x_t (størrelse af populationen) ændres over tid, t, (Barquero et al., 2008). Et eksempel på et genererende spørgsmål om studiet af en populations dynamik kunne være:

$\boldsymbol{S_0}$: Givet en population med størrelse X. Givet en tidsperiode, kan vi forudsige populationens størrelse efter *n* perioder? Er det altid muligt at forudsige opførslen af en populations størrelse på lang sigt? Hvilke antagelser om populationen og dets omgivelser bør tages? Hvordan kan man skabe prognoser og teste dem?

Figur 5.11 – Eksempel på et genererende spørgsmål, S_0, til modellering ved brug af studier og forskninsforløb. (Barquero et al., 2008, s.2053, egen oversættelse).

Dette spørgsmål giver anledning til flere modeller. Først og fremmest kan populationen og dens dynamik beskrives ud fra diskrete modeller eller kontinuerte modeller alt efter om tiden betragtes som en diskret eller kontinuert værdi. De diskrete modeller giver anledning til at studere rækker og lineær algebra, hvorimod den kontinuerte model giver anledning til differentialligninger. Barquero et al. (2008) beskriver et forløb, hvor en gruppe elever arbejde med dette spørgsmål. Jeg vil præsentere noget af processen her. Eleverne så på en diskret model, hvor x_t kun afhænger af x_{t-1}. De blev instrueret til, at det ville være en god idé at se på den relative vækstrate: $r_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$. Elverne kom frem til følgende første hypotese og videre spørgsmål:

$\boldsymbol{H_1}$: Den relative vækst er konstant, altså: $r_n = r$
$\boldsymbol{S_1}$: Hvilken dynamik har en population med en konstant vækstrate?

Figur 5.12 – Eksempel på hypotese og opfølgende spørgsmål ud fra S_0. (Barquero et al., 2008, s.2056).

Dette leder til den malthusianske model ($\boldsymbol{M_1}$): $x_n = (1+r)^n x_0$, hvor x_0 er populationens størrelse til tiden nul. Denne fremgangsmåde er blot et andet eksempel på, hvordan man kan anskue matematisk modellering, og det viser, at matematisk modellering er langt mere komplekst end blot et enkelt skema med bestemte trin, der kommer i en bestemt rækkefølge. Det er også et bud på, hvordan man kan arbejde med matematik og andre naturvidenskabelige fag side om side.

Før vi går videre er det oplag at se på læreplanen for matematik A i stx, og se hvor stor lægt der lægges på matematisk modellering. Som en del af de faglige mål nævnes, at eleverne skal kunne:

- anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger.
- demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling.

I beskrivelsen af kernestoffet nævnes blandt andet:

- Lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger, kvalitativ analyse af givne differentialligninger samt opstilling af simple differentialligninger
- Principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering.

Endvidere bemærkes, at for at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof blandt andet omfatte sammenhængende forløb:

- om differentialligningsmodeller

Ud fra disse uddrag fra læreplanen, ser vi, at der ønskes lagt stor vægt på modellering i matematikundervisningen. Læreplanen fortæller dog ikke noget om, hvad der menes med "modellering" eller "anvendelse".

5.3.3 Modellering med differentialligninger

Jeg vil nu i det følgende afsnit koncentrere mig mere entydigt på differentialligninger i forhold til modellering og se på hvilke problemstillinger, der kan opstå i undervisningen. Balderas (2001) sætter fokus på, hvad der sker, når man i undervisning om differentialligninger ikke har så meget fokus på modellering, og pointerer, at "traditionelle" introduktionskurser i differentialligninger ofte ikke har modellering som fokus.

Hvordan kan vi forestille os et kursus I differentialligninger uden at koble det til modellering af fysiske situationer? I det ekstreme tilfælde ville det blive til et kursus, hvor der udelukkende blev undervist i at løse ligninger uden at nævne hverken oprindelse af ligningerne eller nytten af at have opnået løsningen. I et kursus af denne type vil de studerende ikke være i stand til at give en fysisk fortolkning af en løsning. De vil højst sandsynligt fastholde et misforstået billede af sagen: En række metoder til at opnå løsninger af ligninger, som ikke har nogen relation med den virkelige verden. (Balderas, 2001, s.23, egen oversættelse)

Hvis undervisningen foregår som det ekstreme scenario fra citatet, så fører det på en måde eleverne væk fra essensen af differentialligninger, og eleverne vil få et fejlagtigt billede af differentialligninger. Man kan sige, at på denne måde kommer svarene før spørgsmålene eller måske helt uden dem, og differentialligningerne bliver dermed reduceret til en teoretisk struktur, hvor løsningerne ikke har nogen særlig betydning. Dette leder til endnu et problem, som belyses af følgende citat:

I traditionelle kurser ender problemet med differentialligninger generelt når man har opnået den eksakte løsning. […] … at studere løsninger er det grundlæggende problem i teorien og ikke et ubetydningsfuldt problem. Det er ikke muligt at "have set anvendelser" uden at have studeret løsningernes opførsel. (Balderas, 2001, s. 24, egen oversættelse).

Jeg vil her fortsat benytte ordet "traditionel" undervisning ligesom i citatet. Balderas (2001) pointerer her, at netop løsningerne er de interessante objekter i forbindelse med differential-ligninger. Det er også netop løsningerne, der beskriver de naturvidenskabelige processer og vækstmodeller, som vi skal se på senere. Der nævnes også i citatet, at den traditionelle undervisning ikke ser studiet af løsninger som det centrale, men i stedet det at finde løsningerne. Dette opstår, når indgangsvinklen til differentialligninger ikke er modellering. Hvordan undervisningen er bygget op, og hvordan stoffet præsenteres er et produkt af den didaktiske transposition. Den traditionelle tilgang af undervisningen, som Balderas (2001) beskriver, skaber nogle didaktiske forhindringer hos eleverne så de får svært ved at se differentialligninger som hovedsageligt værende et modelleringsværktøj. Balderas (2001) peger på flere ting, som er essentielle i modellering med differentialligninger. Lad os se lidt på de forskellige trin i modelleringsprocessen, som Balderas (2001) nævner, og som vi har listet ovenfor. Selvom det som sagt er en meget forenklet model for den samlede proces, kan vi stadig belyse nogle problemstillinger ved de enkelte trin. For at eleverne kan få den fulde forståelse, er det vigtigt, at alle trinene er repræsenteret og praktiseret i undervisningen. Her nævner han blandt andet validering af modellerne:

… hvis disse løsninger ikke engang bliver studeret, er det umuligt at udføre en valideringsproces. (Balderas, 2001, s.24, egen oversættelse).

Valideringen er en meget vigtig del af modelleringsprocessen. Dette er samtidig vigtigt, da vi i dette projekt netop ser på valideringssituationer. Dette er en type validering, som er særlig inden for matematisk modellering og i tværfaglige sammenhæng. Vi ser dog, at det er et problem, hvis løsningerne ikke studeres. Det er desuden en meget svær opgave, at validere differentiallignings-modeller. Nogle af de andre vigtige trin, som Balderas (2001) nævner er at justere modeller efter en validering og at bruge løsningerne til forudsigelser. Det illustreres blandt andet and eksemplet med bakteriekulturen ovenfor. Hvis startantagelsen havde været, at væksten var konstant kunne vi se fra valideringen, at der var noget galt. En justering kunne så være at antage, at væksten er proportional med antallet af bakterier i stedet for at være konstant. I trin 8 så vi et eksempel på en forudsigelse. Både justeringer og forudsigelser er vigtige led i en modelleringsproces. Der er selvfølgelig også processen at opstille differentialligninger, som generelt anses for at være meget vanskelig. Det trin vil jeg sige mere om senere, da det har en særlig status i mange lærebøger. Vi så også, at det er en disciplin, som nævnes i læreplanen under kernestoffet.

Flere steder i litteraturen, peges der på, at der i undervisningen ikke er særlig stor fokus på modellering i forbindelse med differentialligninger (Chaachoua & Saglam, 2006; Arslan & Arslan, 2010). I hvor høj grad modellering er integreret i undervisningen i forbindelse med differential-ligninger kan selvfølgelig variere i forskellige sammenhænge. Jeg vil derfor i det følgende undersøge om den tendens også er sådan i stx ud fra gymnasielle lærebøger. Jeg vil dog kort lige bemærke, at i de opgaver om differentialligninger i de seks eksamenssæt, jeg har set på, var der ingen af opgaverne, der egentlig beskæftigede sig med modellering. Der blev i næsten alle tilfælde givet en differentialligning, som var modelleret ud fra en fysisk situation eller fra nogle data, men opgaverne krævede ikke modellering af eleverne. Et eksempel herpå ses i figur 5.4.

5.3.4 Vækstmodeller

Jeg vil her præsentere tre vækstmodeller, som er centrale i gymnasiets pensum om differential-ligninger. Modellerne er kendetegnet ved, at de er modeller for væksten, y', og ikke for udviklingen selv. Udgangspunktet er altså differentialligningen og ikke løsningen. Selvom over-skriften i lærebogen af Clausen et al. (1993) er "vækstmodeller", tales der nærmest ikke om, at det er modeller. Det eneste der står i afsnittet, som berører modellering er sammenfattet i følgende linjer. Dette stykke er samtidig med til at argumentere for, at udgangspunktet er differential-ligningen og ikke løsningen.

> Når man skal beskrive vækst, er det oftest lettere at tage udgangspunkt i en hypotese vedrørende væksthastigheden end at tage udgangspunkt i en hypotese vedrørende y selv. […] Måske skyldes det, at væksthastigheden $y' = \frac{dy}{dt}$ er et begreb vedrørende væksten, som ligger på et andet niveau end den direkte beskrivelse. Men hvad grunden end er, så viser erfaringen, at det er frugtbart at tage udgangspunkt i formodninger angående væksthastigheden eller det endnu mere komplicerede begreb, den *relative væksthastighed* $\frac{y'}{y}$.

Figur 5.13 – Uddrag fra lærebog om vækstmodeller (Clausen et al., 1993, s.72)

Med denne bemærkning skøjter bogen henover modelleringsaspektet. Det dukker kun op igen i forbindelse med nogle opgaver og eksempler om opstilling af differentialligninger. Lærebøgerne af Carstensen et al. (2007) og Nielsen & Fogh (2011) inddrager dog modellering i lidt større grad, selvom det også er begrænset. Carstensen et al. (2007) har to forskellige kapitler om differentialligninger. Først et helt teoretisk afsnit og senere et kapitel om infinitesimale modeller med differentialligninger i centrum. Nielsen & Fogh (2011) starter også med en masse teori om differentialligninger, hvor modelleringsaspektet ikke inddrages. Til gengæld er der et afsnit om differentialligninger og modeller, hvor det forklares hvad en matematisk model er, og der gennemgås grundige eksempler af hele modelleringsprocessen. Vi ser altså, at de tre lærebøger alle tager udgangspunkt i den rent teoretiske struktur i differentialligninger og derefter senere inddrager modellering. Dette tyder på, at ideologien om 'applicationism' går igen i bøgerne, hvor fagene matematik og andre naturvidenskabelige fag tydeligt er delt op, og hvor modelleringen er en slags eksempel på anvendelse. Det er dog lidt varierende, hvor meget vægt bøgerne lægger på modellering. Jeg har dog lagt mære til, at det typisk er differentialligningen, der er vigtigst, og ikke løsningen. Jeg vil derfor være opmærksom på, at nogle af de forhindringer, som Balderas (2001) nævner muligvis er til stede i undervisningen.

De tre centrale modeller er

1. $y' = ay$ - giver anledning til eksponentiel vækst
2. $y' = ay + b$ - giver anledning til forskudt eksponentielvækst
3. $y' = y(b - ay)$ - giver anledning til logistisk vækst

Vi ser dog, at ligningen $y' = ay$ er et specialtilfælde af ligningen $y' = ay + b$ med $b = 0$, så jeg vil præsentere de to første på én gang. De er alle eksempler på autonome differentialligninger på formen $\frac{dy}{dx} = F(y)$, hvor F er en kontinuert funktion. Clausen et al. (1993) behandler alle tre tilfælde næsten ens, nemlig ved at bruge metoden separation af variable til at finde den fuldstændige løsning.

5.3.4.1 Ligningen $y' = ay + b$

I lærebogen af Clausen et al. (1993) angribes differentialligningen med metoden separation af de variable og den fuldstændige løsning fremstår som konklusion i en sætning, som ses nedenfor i figur 5.14:

Sætning: Den fuldstændige løsning til

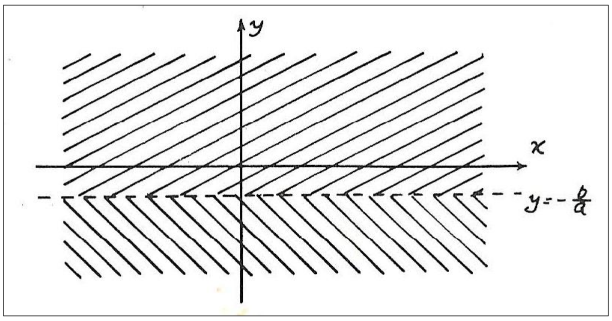
$$y' = ay + b$$

er

$$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Figur 5.14 – Sætning om den fuldstændige løsning til ligningen $\boldsymbol{y' = ay + b}$. (Clausen et al. (1993), side 76).

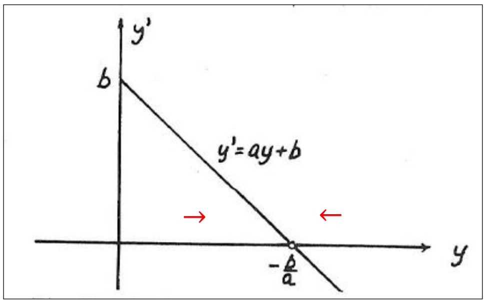
Vi ser her, at den fuldstændige løsning netop er en familie af funktioner som nævnt tidligere. I beviset benyttes regneregler for integration, og man skal evaluere et integral ved brug af substitution. Det er derfor en forudsætning, at eleverne har kendskab til disse regler og metoder for at kunne følge beviset. For at kunne bruge metoden separation af de variable, skal man arbejde i et interval, hvor $g(y) \neq 0$. Det vil sige, at man skal kigge på områderne $y > -\frac{b}{a}$ og $y < -\frac{b}{a}$ hver for sig. Clausen et al. (1993) har desuden et diagram, som tydeliggør disse strimler. Se figur 5.15.



Figur 5.15 - Strimler med tilhørende løsningsområderne for ligningen $y' = ay + b$. (Clausen et al. (1993), side75)

Slutteligt nævner Clausen et al. (1993) også, at $y = -\frac{b}{a}$ er en løsning, og at dette ses ved at gøre prøve. Dette er værd at bemærke, idet Rasmussen (2001) nævner, at mange elever ikke ser konstante funktioner som funktioner. Bogen fremstiller desuden et enkelt konkret eksempel, hvor grafen for løsningen afbildes. Jeg bemærker dog, at der på intet tidspunkt er tegnet et diagram over linjeelementerne af situationen, heller ikke i forbindelse med eksemplet. Det mest bemærkelsesværdige er, at bogen ikke siger det mindste om løsningen. Der nævnes ikke engang, at den er eksponentiel. Som vi påpegede tidligere, er studiet af selve løsningen essentiel og særligt i en modelleringssammenhæng. Vi ser altså tendensen, at det interessante er selve differential-ligningen for væksthastigheden og ikke selve funktionen for væksten.

I lærebogen af Clausen et al. (1993) arbejdes der hovedsageligt i den algebraiske ramme, og den grafiske ramme inddrages nærmest ikke. De eneste grafiske repræsentationer, der optræder i lærebogen af Clausen et al. (1993) er grafen for en løsning fra eksemplet, og der er en skitse af strimlerne af løsningsområderne fra figur 5.15. Man kan med fordel inddrage den grafiske ramme i større udstrækning. Fx er det oplagt at inddrage et retningsdiagram for at styrke elevernes opfattelse af den fuldstændige løsning. For at belyse problemstillingen, at løsningen til differentialligningen er en funktion, og at den fuldstændige løsning er en familie af funktioner, kunne man fx have et eksempel, hvor ikke blot en enkelt partikulær løsning er afbildet, men flere eksempler fra løsningsfamilien er afbildet. Man kunne også vælge at medtage et fasediagram, som ses på figur 5.16 nedenfor.

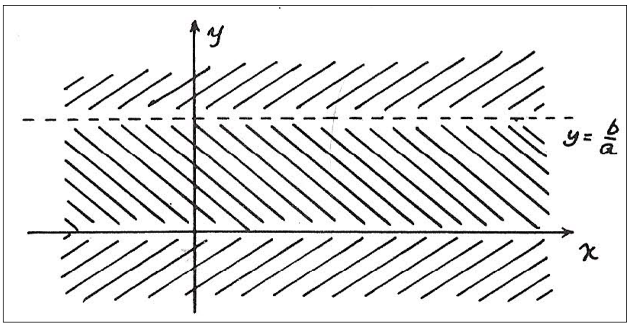


Figur 5.16 – Fasediagram for $\boldsymbol{y' = ay + b}$. (Clausen et al. (1993), side 72). Jeg har indtegnet pilene.

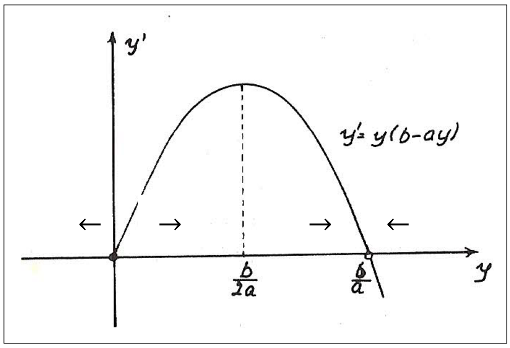
Fra fasediagrammet kan man se, at der er en ligevægtstilstand i $y = -\frac{b}{a}$, da det er skæringen med x-aksen. Vi ser, at alle løsninger, der befinder sig under $-\frac{b}{a}$ vil være monotont stigende, da y' er positiv. Ligeledes vil alle løsninger over $-\frac{b}{a}$ være aftagende, da y' er negativ. De røde pile i figur 5.16 skal illustrere det. Således ser vi, at ligevægtstilstanden $y = -\frac{b}{a}$ er stabil. Vi kunne også have konkluderet, at den er stabil, idet $F'\left(-\frac{b}{a}\right) = a < 0$. (Ud fra grafen ser vi, at hældningskoefficienten, a, må være negativ). Man kan altså bruge grafen til at identificere stabile og ustabile ligevægtstilstande, og dette bidrager til den kvalitative analyse af løsningerne inden for den grafiske ramme.

5.3.4.2 Den logistiske ligning $\boldsymbol{y' = y(b - ay)}$

Først og fremmest vil jeg bemærke, at den logistiske ligning også kan præsenteres på formen $y' = ay(M - y)$, hvor a og M er konstanter. Jeg vil først præsentere nogle forskellige repræsentationer, som kan bidrage til den kvalitative analyse.



Figur 5.17 – Strimler tilhørende løsningsområderne for den logistiske ligning, $\boldsymbol{y' = y(b - ay)}$. (Clausen et al., 1993, s. 77).



Figur 5.18 – Fasediagram for den logistiske ligning, $\boldsymbol{y' = y(b - ay)}$. (Clausen et al., 1993, s. 74). Jeg har indtegnet pilene.

På figur 5.17 ses et plot, som minder lidt om linjeelementer, men det viser blot strimlerne i løsningsområderne. På figur 5.18 ses et fasediagram. Dette kan som tidligere nævnt bruges til at finde stabile og ustabile ligevægtstilstande og til at finde løsningernes monotoniforhold i en løsningsstrimmel. Fra fasediagrammet ser vi, at der er to ligevægtstilstande, nemlig $y = 0$ og $y = \frac{b}{a}$. Vi ser også at $y = 0$ er en ustabil tilstand, mens $y = \frac{b}{a}$ er stabil. Vi kan endvidere konkludere, at løsninger, der ligger i løsningsområdet $y < 0$ må være aftagende, løsninger der ligger i løsningsområdet $0 < y < \frac{b}{a}$ er stigende og løsninger inden for løsningsområdet $y > \frac{b}{a}$ er også aftagende. Ud fra fasediagrammet kan vi også se, at væksten topper i $y = \frac{b}{2a}$ i løsningsområdet $0 < y < \frac{b}{a}$. Jeg bemærker, at selvom Clausen et al. (1993) præsenterer fasediagrammet i analysen af den logistiske ligning, forklares aldrig, hvad den skal bruges til. Der lægges i stedet vægt på at bevise og finde den fuldstændige løsning, altså løsningen i den algebraiske ramme. Sætningen om den fuldstændige løsning lyder således i lærebogen af Clausen et al. (1993):

Sætning: Den logistiske differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay), \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

har den fuldstændige løsning

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

samt $\quad y = 0.$

Figur 5.19 – Sætning for den fuldstændige løsning af den logistiske ligning. (Clausen et al., 1993, side 77).

Til at bevise sætningen bruges igen metoden separation af de variable. For at fuldføre beviset skal man bruge nogle regler undervejs. Den ene er ligheden

$$\frac{1}{y(b - ay)} = \frac{\frac{1}{b}}{y} + \frac{\frac{a}{b}}{b - ay}.$$

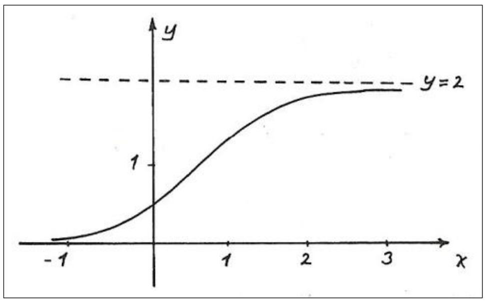
Denne opdeling i partialbrøker er en algebraisk opgave i sig selv og ikke helt triviel. I lærebogen af Clausen et al. (1993) kommer den fra en opgave i bogen. Nielsen & Fogh (2011) fremfører også beviset med separation af de variable, og de præsenterer ligheden mere eller mindre som et smart trick, der kommer ud af ingenting. Carstensen et al. (2007) udelader helt beviset. Det vigtige er altså her, at man tænker over, hvordan man vil præsentere denne lighed, som er uundgåelig for beviset. Man skal desuden bruge regneregler for integration, nemlig

$$\int \big(f(y) + g(y)\big)dy = \int f(y)dy + \int g(y)dy$$

$$\int c \cdot f(y)dy = c \cdot \int f(y)dy\,,$$

hvor f og g er kontinuerte funktioner og $c \in \mathbb{R}$. Igen skal man evaluere integralerne ved at benytte substitution, og der indgår også numerisk tegn her, som skal hæves med hensyn til intervallet. For at separere de variable må de tre områder $y > \frac{b}{a}$, $0 < y < \frac{b}{a}$ og $y < 0$ betragtes hver for sig. De tre områder fremgår af figur 5.17, og kan ellers findes ved at sætte $g(y) = 0$. Så fremkommer nulpunkterne $y = 0$ og $y = \frac{b}{a}$ ved brug af nul-reglen. Disse to konstante funktioner er også løsninger, hvilket ses ved at gøre prøve. Beviset er karakteriseret ved en del symbol-manipulation, integralregning og tricks ligesom ligheden ovenfor. Hvis der fokuseres udelukkende på beviset, kommer eleverne ikke i så stor grad til at arbejde med de grundlæggende problemstillinger ved differentialligninger. Det er derfor vigtigt, at man også foretager en mere kvalitativ analyse i sit arbejde med den logistiske ligning.

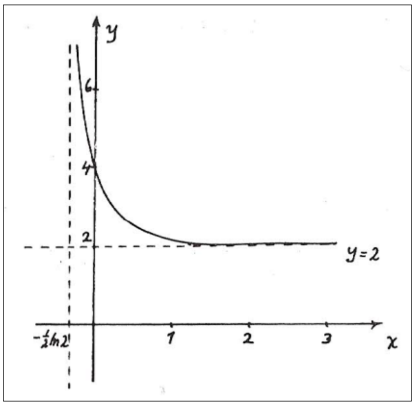
Desuden bruger Clausen et al. (1993, s. 77-78) et eksempel til at se på løsningers opførsel i de forskellige strimler. Jeg vil bruge dette eksempel til at vise, hvordan man kan gribe en analyse af en logistisk ligning an. Der ses på den logistiske ligning $y' = y(2 - y)$, som har den generelle løsning $y = \frac{2}{1+ce^{-2x}}$ samt $y = 0$, hvor $c \in \mathbb{R}$.



Figur 5.20 – Graf for løsningen $\boldsymbol{y = \frac{2}{1+3e^{-2x}}}$ til ligningen i eksemplet. (Clausen et al., 1993, side 78).

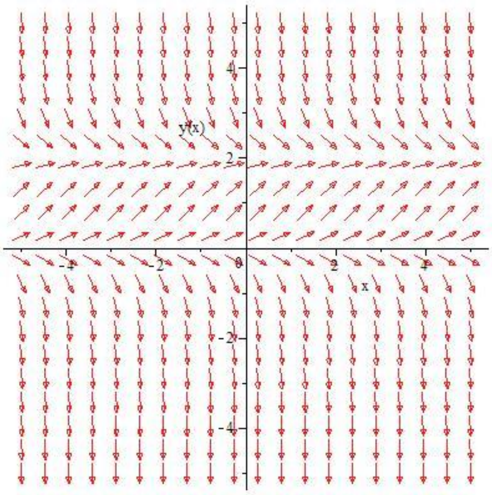
Først bestemmes løsningen, der går igennem $(0, ½)$. Denne løsning ligger altså i løsningsområdet $0 < y < 2$. Ud fra begyndelsesbetingelsen bestemmes den partikulære løsning til $y = \frac{2}{1+3e^{-2x}}$. På figur 5.20 ses grafen for denne løsning. Ud fra den partikulære løsning ser vi, at $y \to 2$ for $x \to \infty$. Samtidig har vi, at $y \to 0$ for $x \to -\infty$. Herudfra kan man slutte, at linjerne $y = 0$ og $y = 2$ er asymptoter for grafen.

Man kunne også se på en anden partikulær løsning i en af de andre strimler, fx en løsning der går gennem $(0{,}4)$. Denne løsning ligger i løsningsområdet $y > 2$. Her bestemmes den partikulære løsning til $y = \frac{2}{1-½e^{-2x}}$. Igen ser vi, at $y \to 2$ for $x \to \infty$. Desuden bemærker vi, at y ikke er defineret for alle x. Hvis $x = -½ln(2)$, så er nævneren nemlig nul. Vi ser desuden, at $y \to \infty$ for $x \to -½ln(2)$. Hermed har vi altså, at $y = 2$ er en vandret asymptote, mens $x = -½ln(2)$ er en lodret asymptote.



Figur 5.21 – Graf for løsningen $\boldsymbol{y = \frac{2}{1-½e^{-2x}}}$ til ligningen i eksemplet. (Clausen et al., 1993, side 78).

Grafen ses på figur 5.21.



Figur 5.22 – Linjeelementer for ligningen i eksemplet, $y' = y(2-y)$, tegnet i MAPLE.

Man kan også fortage en kvalitativ analyse af løsningerne inden for de forskellige strimler ved hjælp af linje-elementerne, som ses til venstre på figur 4.22. Her antydes det, at der er to vandrette asymptoter, nemlig $y = 0$ og $y = 2$. Ud fra linjeelementerne kan vi også se de tendenser, som vi har beskrevet ovenfor. Fra bemærkningerne ovenfor ved vi, at de to konstante funktioner også er løsninger. Fra diagrammet med linjeelementer fremgår det også, at løsningen $y = 0$ er en ustabil ligevægtstilstand og at funktionen $y = 2$ er en stabil ligevægtstilstand. Man kan på tilsvarende vis undersøge løsningerne i de forskellige løsningsområder endnu mere detaljeret. Eksemplet ovenfor giver indblik i, hvordan en sådan analyse kan gribes an. Clausen et al. (1993) har desuden en række eksempler fra det virkelige liv fx om en populations vækst. At have noget konkret at tale om, hjælper eleverne til at forstå modellen.

Vi har nu fået et indtryk af, hvordan lærebogen af Clausen et al. (1993) præsenterer disse centrale vækstmodeller. Dette viser os tydeligt, at det er den matematiske struktur i sig selv, der lægges vækst på og absolut ikke modellering. Dette er også tilfældet i lærebogen af Carstensen et al. (2007). Nielsen og Fogh (2011) præsenterer i første omgang også disse differentialligninger som en ren matematisk struktur, men vender dog senere tilbage til deres betydning i modellering. Den delvise mangel på inddragen af modellering kan være en didaktisk forhindring, når modellerne skal benyttes i andre undervisningsfag og i selve elevernes opfattelse af differentialligninger, som vi tidligere har påpeget.

5.3.5 Opstilling af differentialligninger

En af de vanskelige processer i modellering med differentialligninger er, når de skal opstilles. Vi så at læreplanen nævnte, at dette er en del af kernestoffet. Det spiller også en stor rolle i lærebogen af Clausen et al. (1993), og det udgør stort set det eneste trin af modelleringsprocessen, der behandles i bogen. Jeg bemærker desuden, at Carstensen et al. (2007) nærmest ikke taler om at opstille differentialligninger. Nielsen og Fogh (2011) har derimod adskillige eksempler og øvelser, der handler om at opstille differentialligninger. Vi kan dog se i de skriftlige eksamenssæt, som jeg tidligere har nævnt, at der ikke er en eneste opgave, hvor man skal opstille en differentialligning. Denne del af modellering med differentialligninger ser derfor ikke ud til at have så stor betydning i undervisningsfaget matematik i gymnasiet.

Med udgangspunkt i en opgave af Clausen et al. (1993) vil jeg illustrere og identificere problemstillinger og forhindringer ved opgaver om opstilling af differentialligninger.

Øvelse 127: Når et varmt metalstykke anbringes i koldere omgivelser, afkøles det. Under passende forudsætninger er den hastighed, hvormed metallets temperatur aftager, proportional med forskellen mellem metalstykkets temperatur og omgivelsernes temperatur (Newtons afkølingslov).

Opstil en differentialligning for metalstykkets temperatur T (kelvin) som funktion af tiden t (sekunder), når omgivelsernes temperatur konstant er T_{omg} under afkølingen.

Figur 5.23 – Typisk opgave om opstilling af differentialligninger. (Clausen et al, 1993, s. 94).

Der er mange forskellige udfordringer for elever i sådan en opgave. Først og fremmest er opgaven formuleret i naturligt sprog. En af elevernes store udfordringer er her at oversætte dette til symbolsprog. De to sprog er to forskellige repræsentationsregistre, så en sådan oversættelse imellem dem er en konversion, som beskrives i afsnit 3.4. En sådan oversættelse er vanskelig for mange elever. I teksten indgår der flere slags matematiske ord og udtryk som 'proportional med', 'forskellen mellem', 'differentialligning' og 'som funktion af'. Derudover indgår der også en del ord, som leder tankerne hen på fysik, fx 'temperatur' og 'hastighed'. Hermed får opgaven et træk af tværfaglighed, og det kan både være en fordel og ulempe for eleverne. Det kan være en fordel, fordi eleverne kan snakke konkret om opgaven, og at de ubekendte er bestemte størrelser. Det er også oplagt, idet modellering med differentialligninger ofte foregår i samspil med et natur-videnskabeligt fag som fx fysik. Det kan dog også være en ulempe, idet nogle elever har svært ved fysik. I opgaven er forståelsen af ordet hastighed central for at kunne løse opgaven. Mange elever tænker på hastighed som vejlængde per tidsenhed. I denne sammenhæng er hastigheden dog temperaturændring per tidsenhed. Dette kan være en didaktisk forhindring for de elever, der ikke er vant til at tænke bredt om ordet hastighed. Her er det også vigtigt, at hastighed er defineret som $\frac{dT}{dt}$, altså som en differentialkvotient, og ikke blot som $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, altså en differenskvotient. Hvis eleverne er vant til at tænke på hastighed som $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, kan det også være en didaktisk forhindring for eleverne. Hertil kommer at variablene som benyttes i denne sammenhæng er t for tiden og T for temperaturen. Det er altså ikke x og y, som eleverne er vant til. Dette lille skift i notation kan også være en didaktisk forhindring for eleverne. Opgavens karakter er også anderledes end de fleste opgaver. I denne opgave skal eleven være kreativ og selv opstille en model. For at finde frem til løsningen skal man finde frem til de væsentlige oplysninger i opgaveformuleringen. Nedenfor ses opgaveformuleringen én gang til, hvor jeg har fremhævet de centrale ord med rødt og blåt.

Øvelse 127: Når et varmt metalstykke anbringes i koldere omgivelser, afkøles det. Under passende forudsætninger er den hastighed, hvormed metallets temperatur aftager, proportional med forskellen mellem metalstykkets temperatur og omgivelsernes temperatur (Newtons afkølingslov).

Opstil en differentialligning for metalstykkets temperatur T (kelvin) som funktion af tiden t (sekunder), når omgivelsernes temperatur konstant er T_{omg} under afkølingen.

Figur 5.24 – Opgaven fra figur 5.23, hvor jeg har fremhævet dele af teksten.

I modellen er der to størrelser, der har en sammenhæng. Den ene er hastigheden, $\frac{dT}{dt}$, og den anden er forskellen mellem metalstykkets og omgivelsernes temperatur, nemlig $T - T_{omg}$. Disse størrelser er markeret med rødt i boksen ovenfor. Sammenhængen mellem de to størrelser er proportionalitet. Derfor er løsningen til opgaven differentialligningen $\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_{omg}\right)$, hvor k er proportionalitetskonstanten. Vi får altså en differentialligning på formen $y' = ay + b$, hvor y svarer til T, a svarer til k og b svarer til $-k \cdot T_{omg}$. Desuden svarer $y' = \frac{dy}{dx}$ til $\frac{dT}{dt}$, så temperaturen T er altså en funktion af tiden t, som det kræves i opgaveformuleringen. I lærebogen ser vi, at langt de fleste opgaver om opstilling af differentialligninger omhandler en sammenhæng som er proportional.

Opgaven fortsætter således:

Øvelse 128: Et metalstykke, hvis temperatur er 120°C, anbringes i omgivelser, der er 15°C. Efter 10 sekunder er metallets temperatur faldet til 110°C.

a) Bestem metallets temperatur som funktion af tiden.
b) Hvor lang tid tager det, før metallet har en temperatur, der kun er 2 grader højere end omgivelsernes?

Figur 5.25 – Typisk opgave i forbindelse med opstilling af differentialligninger. (Clausen et al., 1993, s. 94).

For at man kan løse disse opgaver må man starte med at finde den fuldstændige løsning til den opstillede differentialligning. Her er formålet med opgaven blandt andet, at man skal kunne genkende, at differentialligningen $\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_{omg}\right)$ har strukturen $y' = ay + b$. Ifølge sætningen i figur 5.14 er den fuldstændige løsning givet ved $y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$, hvilket her svarer til $T(t) = T_{omg} + c \cdot e^{k \cdot t}$. At kunne genkende strukturen er ikke nødvendigvis trivielt for eleverne. Selvom eleverne muligvis har set mange opgaver med differentialligninger med ovenstående struktur, er ligningen her pakket ind i nogle nye variable. Fx er parameteren her $b = -k \cdot T_{omg}$. Derfor er opgaven en øvelse i at genkende strukturer og identificere konstanterne a og b. Hvis dette ikke lykkes for eleverne vil de finde den fuldstændige løsning ved at gå tilbage til at bruge separation af de variable. Dette vil føre til den samme korrekte løsning, men gennem en masse unødvendigt arbejde. Når eleverne har fundet den fuldstændige løsning, skal konstanterne c og k bestemmes, for at løse opgave a. For at gøre det skal eleven gennemskue, at der i teksten ligger information til bestemmelse. For at bestemme c skal man bruge en initialbetingelse. Opgaven siger: " Et metalstykke, hvis temperatur er 120°C, anbringes i omgivelser, der er 15°C." Eleven skal så selv antage eller definere, at dette sker til tiden nul. Ligningen, der skal lede os til bestemmelse af c lyder så: $T(0) = 120$, og c findes til 105. For at finde konstanten k, skal man bruge den anden bid af information i opgaven: " Efter 10 sekunder er metallets temperatur faldet til 110°C." Ud fra ligningen $T(10) = 110$ findes k til $-0{,}010008$, og metallets temperatur som funktion af tiden er dermed $T(t) = T_{omg} + 105 \cdot e^{-0{,}010008 \cdot t}$. For at bestemme de to konstanter ligger udfordringen altså i at gennemskue, hvilken informationen i spørgsmålet der skal bruges og til at opstille ligningerne, som giver bestemmelse af konstanterne. For at løse opgave b skal man løse ligningen $T(t) = 17$. Udfordringen er her igen at opstille den korrekte ligning ud fra informationen: " Hvor lang tid tager det, før metallet har en temperatur, der kun er 2 grader højere end omgivelsernes?" Spørgsmål b er desuden et eksempel på, at man bruger differentialligningsmodellen til at forudsige noget.

Opgaverne er også interessante, da de er typiske lærebogsopgaver, der afspejler skolens og gymnasieinstitutionens opfattelse af modellering. Disse to opgaver tyder på, at modelleringsbegrebet i gymnasiematematik er præget af ideologien 'applicationism', som beskrives i afsnit 5.3.2. Først udvikles al den matematiske teori om differentialligninger for sig og så trækkes små eksempler og opgaver frem, hvor differentialligninger bruges som modeller. Dermed bliver anvendelsen reduceret til nogle få eksempler som i ovenforstående opgave. Undervisningsfagene matematik og fysik bliver hermed også meget adskilt. Vi ser i disse opgaver, at modelleringsprocessen kun er med i en ringe grad. Opgaven er konstrueret sådan, at den passer lige præcis til en bestemt type differentialligning, som er en af de få, som eleverne kender til. Informationen er serveret på et sølvfad og det tyder på, at der har været en modelleringsproces forud for opgaven. Når først konversionen mellem det naturlige sprog og det matematiske symbolsprog er fuldført, har vi differentialligningsmodellen, og eleven behøver ikke at medtage overvejelser om modelleringen. En mere realistisk tilgang kunne fx være at skulle opstille en differentialligning ud fra nogle givne data eller opstille rimelige antagelser som fx proportionalitet mellem to størrelser. Det er dog en ret vanskelig opgave og rækker muligvis ud over gymnasieelevers kapacitet.

5.3.6 Eksempel: Radioaktivitet

Jeg vil her præsentere et tværfagligt eksempel fra fysik, hvor matematisk modellering indgår, nemlig radioaktivitet i forbindelse med absorption af ioniserende stråling i et medium. Når man har at gøre med radioaktivitet er *aktivitet* en vigtig størrelse. Aktiviteten, A, er antallet af omdannelser pr. tidsenhed i en radioaktiv kilde. Idet vi betegner antal kerner med N er aktiviteten derfor det samlede antal af kerner, der henfalder pr. tidsenhed, det vil sige $\frac{dN}{dt}$. I denne sammenhæng opererer vi med intensitet, som vi betegner I. Intensiteten er defineret som den effekt strålingen transporterer gennem et areal på $1m^2$, dvs.

$$I = \frac{P}{A_m}.$$

Her er P effekten og A_m arealet af materialet. Hvis vi antager, at hvert henfald sker ved udsendelse af en partikel med en energi E, og at der i tidsrummet dt sker dN henfald, kan vi udtrykke intensiteten som

$$I = \frac{E \cdot A}{A_m},$$

hvor A er aktiviteten.[3] Når ioniserende stråling passerer gennem et lag stof med tykkelse dx, svækkes den. Modellen er her:

$$\frac{dI}{dx} = -\mu \cdot I.$$

Proportionalitetskonstanten μ afhænger af materialet. μ kaldes for den *lineære svækkelses-konstant*. Vi har her en differentialligning på formen $y' = ky$, og den fuldstæn-dige løsning er her:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}.$$

Her er I_0 intensiteten uden stof mellem kilde og detektor, og x er tykkelse af stoffet. Dette kaldes *svækkelsesloven*. Da sammenhængen $\frac{dI}{dx} = -\mu \cdot I$ gælder, kan vi opstille ligningen:

$$-\frac{\Delta I}{I} = \mu \cdot \Delta x,$$

som er et udtryk for hvor meget intensiteten aftager relativt set. Vi ser, at hvert stoflag med tykkelse Δx absorberer samme brøkdel af strålingen. Derfor benyttes størrelsen *halverings-tykkelse*, som et mål for stoffets absorptionsevne. Halveringstykkelsen er $x_{½} = \frac{ln(2)}{\mu}$. Endvidere kan svækkelsesloven fortolkes ved brug af sandsynlighed. Ligningen $-\frac{\Delta I}{I} = \mu \cdot \Delta x$ udtrykker, at sandsynligheden for at en partikel eller foton absorberes ved passage af et stoflag er proportional med stoflagets tykkelse. Vi ser dog også, at sandsynligheden er uafhængig af hvor tykt et lag stof, der allerede er passeret.

Overstående viser, at det er svært at formulere den fysiske situation med et naturligt sprog. I modellerings-processen hopper vi i stedet direkte til matematikken for at beskrive situationen. Dette er derfor et eksempel på, at trin 2 i Balderas (2001) model ikke rigtig er til stede og at det ikke nødvendigvis behøves i en modelleringsproces. Jeg går ud fra, at modellen er opstået ud fra eksperimentelle data. I et elevforsøg vil man have mulighed for at validere denne model, altså det eksperimentelle fald af intensiteten.

Jeg vil til sidst nævne nogle vigtige ting i forbindelse med udførelse af et eksperiment, hvis man vil eftervise svækkelsesloven og finde halveringstykkelsen for γ-stråling. På mange af landets gymnasier bruges Cæsium-137, som er en Risø-kilde til γ-stråling. Idet γ-strålingen udsendes i alle retninger, måler tælleren kun en vis brøkdel af aktiviteten. Dette kalder vi for tælletallet. Da tælletallet er proportional med aktiviteten, lader vi derfor tælletallet være et mål for aktiviteten i forsøget. Ligeledes er aktiviteten proportional med intensiteten, så vi kan også tænke på tælletallet som et mål for intensiteten. Samtidig gælder afstandskvadratloven, som siger, at tælletallet er omvendt proportional med kvadratet på afstanden til kilden. I et forsøg vil man

[3] Effekten er $P = E \cdot A$, da $\frac{dE_{samlet}}{dt} = \frac{E \cdot dN}{dt}$. Her er E_{samlet} den samlede energi for alle kernehenfald inden for et lille tidsrum dt. Inden for dette tidsrum sker dN henfald, hver med energien E.

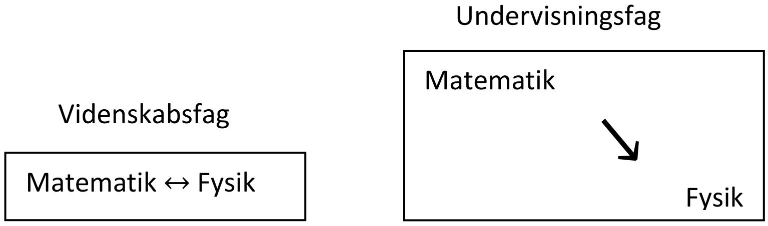
typisk antage, at aktiviteten fra kilden er konstant. Her er det vigtigt at gøre opmærksom på, at radioaktivt henfald er en stokastisk proces. Man kan derfor kun udtale sig om sandsynligheden for, hvornår en radioaktiv kerne henfalder, og dette kan faktisk spille ind i forsøget. Usikkerheden af et tælletal er kvadratroden af tælletallet[4]. Selvom aktiviteten af Cs-137 kilden er af størrelsesorden 300.000 henfald per sekund så vil tælletallet kun være en lille brøkdel afhængig af måletiden samt afstanden mellem tæller og kilde. Hvis vi har et tælletal på $N = 100$ henfald per sekund, vil usikkerheden fra kilden selv være på +/- $\sqrt{N} =$ +/- 10, hvilket svarer til 10 %. Den relative usikkerhed $\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ bliver derfor mindre jo større tælletallet bliver. Et tælletal på $N = 1000$ ville derfor give en relativ usikkerhed på kun 1%.

5.3.7 Forholdet mellem matematik og fysik

Jeg vil her til sidst sige ganske lidt om forholdet mellem fysik og matematik. Først vil vi se på forholdet mellem de to fag som videnskabsfag. Både Chaachoua & Saglam (2006) og Arslan & Arslan (2010) påpeger det komplekse forhold mellem de to fag. Mange siger, at matematik er fysikernes sprog og at fysikken blot er et af matematikanvendelsernes område. Dette er dog for simpel en beskrivelse (Arslan & Arslan, 2010).

> *Dette forhold kan karakteriseres på to måder: På den ene side bruger matematikere fysiske begreber og argumenter, og på den anden side bruger fysikere matematiske begreber og metoder. (Arslan & Arslan, 2010, s.636, egen oversættelse)*

For at forstå dybden af forholdet mellem de to fag, må man tage matematisk modellering med ind i billedet. I afsnit 5.3.1 så vi hvordan differentialligninger udvikledes i et samspil mellem fysik og matematik. Her ses, at fagene er med til at udvikle hinanden, og at man godt kan arbejde med begge fag på én gang. Fagene indgår altså med samme status i en fælles vekselvirkning. Som undervisningsfag ser vi en tendens til at adskille fagene meget – også i forbindelse med modellering. Tendensen i undervisningsfagene er derfor mere i retning af 'applicationism', hvor matematik og fysik er meget adskilt og ikke vekselvirker i udviklingen af fagene. Dette så vi blandt andet i lærebøgerne. I afsnit 5.3.4 og 5.3.5 så vi også, hvordan den matematiske struktur af differentialligningerne blev præsenteret først uden sammenhæng til modellering i samtlige af de tre lærebøger. Først senere præsenteres eksempler på anvendelse i blandt andet fysik. Her fungerer matematik som noget, der nærmest "drypper ned på fysikken" med forskellige modeller, som så bliver til eksempler på anvendelser. Jeg har forsøgt at lave en illustration af det, som ses nedenfor:



[4] Usikkerheden eller spredningen på tælletallet udledes ud fra Poissonfordelingen.

5.3.7.1 Laboratorieøvelser

I afsnit 3.6 beskrev jeg, at man i fysikken bruger eksperimenter til at validere fysiske love. Man kan sige, at eksperimenterne udgør en del af valideringen af de matematiske modeller for konkrete fysiske situationer. Siden 1970'erne har det dog været omdiskuteret, hvilken rolle laboratorium-undervisningen bør have, og der er blevet lavet mange undersøgelser, der viser flere problematiske områder i denne forbindelse (Lunetta, 1998). Det er altså vigtigt at se på, hvilken epistemisk status eksperimenter har og klargøre, hvad de bidrager med af viden. De fleste er enige om, at hovedformålet er at styrke elevernes opfattelse af fysiske begreber. Det er altså de fysiske begreber og idéer, der er de vigtigste elementer i en laboratorieøvelse. Det har dog vist sig, at eleverne ofte har en helt anden opfattelse af formålet end deres lærer (Lunetta, 1998). Typisk er elevernes hovedformål, at følge instruktionen og få det "rigtige resultat". Eleverne fokuserer ofte på udstyret og målingerne, men ikke så meget på de fysiske begreber og idéer. Desuden har elever ofte problemer med at gennemskue forholdet mellem formålet og designet af eksperimentet, og i mange tilfælde linker eleverne ikke eksperimentet med tidligere aktiviteter. Dette fører i mange tilfælde til uheldige tendenser, blandt andet taler man om "kogebogsøvelser", hvor eleverne blot følger nogle instruktioner, og det bliver ritual-agtigt. Dette fører til, at eleverne ikke diskuterer hypoteser eller betydning af data.

For at forstå hvorfor disse problemer ofte opstår, kan det være en hjælp at se det i lyset af de fire faser, som elevarbejdet består af i forbindelse med laboratoriearbejde (se afsnit 3.6). Lunetta (1998) pointerer, at en typisk laboratorieøvelse foregår i en lektion, der varer i 40 -110 min. Dette skaber en ramme, der gør, at eleverne umuligt kan nå at være engageret i alle faserne. I praksis sker det ofte, at eleverne kun udfører fase 2, hvor fokus er på apparaturet og andre tekniske detaljer. Denne ene fase er dog kun et lille udsnit af forsøget. Lunetta (1998) peger på princippet "less is more". Det er en strategi, der går ud på, at det er bedre at lave få grundige eksperimenter end overfladisk at gennemgå mange små eksperimenter. Der foreslås også, at man kan nøjes med at arbejde i dybden med blot en af faserne, fx planlægnings- og designfasen eller analyse- og fortolkningsfasen. I sidstnævnte tilfælde kan man fx bruge data fra andre elever eller eksterne kilder. Det er vigtigt at bemærke, at alle faserne er vigtige i forhold til validering. Hvis man ikke har i tankerne, hvilke hypoteser man vil teste, kan det være vanskeligt at være bevidst om, hvad det er, man vil teste og validere. Derfor er planlægnings- og designfasen vigtig i forhold til validering. At udførelsesfasen og analyse- og fortolkningsfasen er vigtig for validering siger næsten sig selv, da det er her data indsamles, konklusionerne formuleres… mm. Anvendelsesfasen er også særdeles vigtig for validering af modellen, da det netop er her, man validerer rækkevidden og bæredygtigheden af modellen. Hvis man ikke går igennem alle fire faser, er der derfor risiko for, at man mister fokus på validering i forsøget.

Til sidst vil jeg nævne, hvad læreplanen siger om modellering og laboratorieøvelser. I læreplanen for fysik B i stx, står der blandt andet om de faglige mål, at eleverne skal:

- ud fra en given problemstilling kunne tilrettelægge, beskrive og udføre fysiske eksperimenter med givet udstyr og præsentere resultaterne hensigtsmæssigt
- kunne behandle eksperimentelle data med henblik på at diskutere matematiske sammenhænge mellem fysiske størrelser

Desuden står der om samspil med andre fag:

- Indgår faget i en studieretning sammen med matematik, skal der specielt tilrettelægges forløb, hvor de to fag arbejder sammen om behandlingen af modeller for konkrete fysiske systemer med vægt på en diskussion af modellernes forudsætninger og pålideligheden af de resultater, som opnås gennem anvendelse af modellerne.

Vi bemærker, at den matematiske modelleringsproces er fremtrædende i læreplanen i forbindelse med eksperimentelt arbejde i fysik. Vi ser dog også, at der er andre formål med det eksperimentelle arbejde som at kunne beskrive og udføre eksperimenter med givent udstyr. Endvidere ser vi, at alle fire faser faktisk er repræsenteret i læreplanen. Der står dog ikke noget om, hvordan eller hvor stor vægt de forskellige faser har.

6. Metodologi

For at belyse problemstillingen fulgte og observerede jeg en tilfældig gymnasieklasse i ca. 3 uger i samtlige matematik- og fysiktimer.

6.1 Gymnasieklassen, faglærerne og undervisningsforløbene

Mine observationer er foretaget i alle matematik- og fysiktimer hos 2.x fra Christianshavns Gymnasium i februar 2012. Klassen fulgte en naturvidenskabelig studieretning og alle elever skulle have matematik på A-niveau og fysik på mindst B-niveau. Begge faglærere er erfarne og har haft forbindelse til didaktiske kurser, så de har formegentligt begge været bevidst om den måde de underviste på. Lærerne mente begge, at der var et stort fagligt spænd blandt eleverne i klassen.

Forløbene i matematik og fysik var sammensat af de to faglærere sådan, at de skulle række frem mod studieretningsopgaven i 2.g. Studieretningsopgaven er en individuel tværfaglig opgave i to fag inden for den enkelte elevs studieretning. I denne klasse optrådte fagkombinationerne matematik-fysik, matematik-kemi, fysik-kemi, matematik-bioteknologi og fysik-bioteknologi. I matematikundervisningen var emnet differentialligninger og i fysik var hovedemnet radioaktivitet. Faglærerne var bevidste om, at differentialligningsmodeller udgjorde en central rolle for den studieretningsopgave, som forløbene lagde grund for. Begge forløb var tilrettelagt af læreren alene uden min indblanding og arbejdsformerne i undervisningen blev også valgt suverænt af lærerne. Dette har været for at kunne danne et så objektivt billede som muligt i forhold til valideringssituationerne i undervisningen.

Matematikforløbet om differentialligninger strakte sig over ni moduler, hvoraf de fleste var dobbeltlektioner. Jeg observerede de fire sidste. Den første halvdel, som jeg ikke var med til at observere, omhandlede introduktion til differentialligninger, metoden til separation af de variable og studium af eksponentiel vækst i forbindelse med differentialligningen $y' = ay + b$. Den del jeg observerede omhandlede den logistiske ligning samt differentialligningsmodeller. Det meste af undervisningen var traditionel klasseundervisning og i nogle få lektioner var der elever ved tavlen. Under forløbet afleverede eleverne en større rapport i grupper om differentialligninger.

I fysikundervisningen havde klassen allerede beskæftiget sig med emnet radioaktivitet i 3 uger inden jeg foretog mine observationer. I denne periode havde de blandt andet set på henfaldsloven og svækkelsesloven, som begge er eksempler på differentialligningsmodeller. Fysikundervisningen, som jeg observerede, omhandlede i de fleste lektioner teorien om kernehenfald. Jeg observerede seks moduler, hvoraf alle var dobbeltlektioner. Heraf var en enkelt laboratorieøvelse, og resten var traditionel klasseundervisning med elevopgaver undervejs. Der var også nogle få elevforedrag i enkelte lektioner. Jeg har valgt kun at bruge data fra laboratorieøvelsen for at belyse min problemformulering, da indholdet i de øvrige timer omhandlede noget teori om kernehenfald, som ikke havde forbindelse til differentialligninger. Laboratorieøvelsen omhandlede to forsøg, hvor det ene omhandlede henfaldsloven og det andet svækkelsesloven (se afsnit 5.3.6). Efter laboratorieøvelsen afleverede alle elever en individuel rapport med behandling af data.

6.2 Dataindsamling

Min primære datakilde har bestået af lydoptagelser af alle lektioner samt grundige feltnoter. Lydoptagelserne har været særlig vigtige, da det bagefter har været muligt at høre præcist, hvad der blev sagt for at kunne identificere valideringssituationerne i undervisningen. Det har gjort det muligt at analysere helt specifikke situationer og episoder. Feltnoterne har også været vigtige, fx forbindelse med hvad der blev skrevet på tavlen, hvad stemningen i klassen var og hvor stor en del af klassen, der deltog aktivt i undervisningen. Jeg har også eksemplarer af alle slides, kopiark, lærebøger og andet materiale, der har været brugt i undervisningssituationerne. Derudover har jeg fået en nogle elevrapporter fra både fysikrapporten, matematikrapporten og studieretningsopgaven. Disse rapporter er stort set blevet udvalgt tilfældigt. I forbindelse med fysikrapporten har jeg blandt andet fået rapporterne fra de elever, der var i den gruppe, som jeg observerede.

6.2.1 Min rolle under dataindsamlingen

I starten af hver lektion lagde jeg en diktafon på katederet, så jeg let kunne høre, hvad læreren og eleverne sagde. I løbet af timerne observerede jeg undervisningen, mens jeg sad på en stol bagerst i lokalet uden at forstyrre eller afbryde undervisningen. Jeg havde også en diktafon med mig bagerst i klassen for at fange stemmerne fra de elever, der sad bagerst i lokalet. Mine observationer forløb sådan for at få et så objektivt indblik i undervisningen som muligt. I forbindelse med laboratorieøvelsen gik læreren rundt med den ene diktafon i lommen, mens han gik rundt og vejledte de forskellige grupper. Jeg fulgte en enkelt gruppe med en diktafon og skrev samtidigt feltnoter undervejs om gruppens arbejde. Kun ganske få gange har eleverne henvendt sig til mig. De fleste gange stillede de spørgsmål om mit projekt. En enkelt gang under laboratoriøvelsen spurgte de mig om, hvor farlige de radioaktive kilder var.

6.3 Metode til analyse af data

For at kunne studere valideringssituationer i undervisningen har jeg brugt begrebet didaktisk kontrakt. Det er et vigtigt redskab, der kan afsløre, hvilken karakter valideringen er af, fx i forhold til ansvarsfordeling mellem lærer og elever. Som beskrevet i afsnit 3.2 starter analysen af kontrakter med den mindste enhed – altså mikrokontrakter – og først herefter er man i stand til at kunne sige noget om mesokontrakter og evt. makrokontrakter. Derfor har det været vigtigt at dykke helt ned i detaljerne omkring nogle konkrete situationer på mikrokontraktniveau. Da datamaterialet var meget stort var det nødvendigt at transskribere samtlige lydoptagelser fra observationerne. Herfra kunne jeg danne mig et overblik over data og udvælge nogle situationer, der belyser min problemstilling. Jeg har i alt udvalgt fire situationer. De to første situationer hænger sammen og illustrerer, hvordan den grafiske ramme fungerer og kan bruges i forbindelse med differentialligninger og særligt validering. Her studeres hovedsageligt en kvalitativ løsning i den grafiske ramme. Situation 3 belyser matematisk modellering i matematikundervisningen, herunder opstilling af differentialligninger og validering af matematiske modeller. Til sidst har jeg en situation fra laboratorieøvelsen fra fysikforløbet, som særligt belyser hvordan fysiske eksperimenter indgår som validering af fysiske love som matematiske modeller. Desuden fremgår det, hvilken epistemisk status det eksperimentelle har for henholdsvis eleverne og faglæreren. For hver situation har jeg analyseret den tilsigtede viden, det objektive miljø og elevernes viden, hvor jeg har identificeret mulige forhindringer for eleverne samt forsøgt at forudse, om det objektive miljø er tilstrækkeligt til at give feedback for eleverne. Dernæst følger en gennemgang af transskriptionerne, hvor mikrokontrakterne identificeres, og der er gennemgående et fokus på validering i de konkrete situationer.

7. Analyse af situation 1 & 2

7.1 Kontekst

Vi skal se på en helt konkret situation fra matematikforløbet. Timens dagsorden er at introducere og løse den logistiske ligning. I skemaet nedenfor har jeg lavet en oversigt over timens indhold, så det bliver klart, hvad der foregår før og efter den konkrete situation, vi skal se nærmere på. Denne er markeret med gult i skemaet nedenfor:

Tid(min:sek)	Overordnet aktivitet	Aktivitet
10:30	Repetition af ligningerne $y' = ay$ og $y' = ay + b$.	
22:30	Den logistiske ligning med støtte fra MAPLE	MAPLE-ark om den logistiske ligning. Snak om løsningsområder – grafisk ramme. (Tid: 6:30)
		Se på differentialligningsudtrykket – kæde sammen med løsningsområderne. (Tid: 4:00)
		Se på løsningers opførsel i området $0 < y < b/a$
		Løse ligningen vha. MAPLE
		Formen $y' = ay(M - y)$ introduceres.
24:00	Tavleundervisning med input fra eleverne: Forberedelser til bevis for sætning om fuldstændig løsning til den logistiske ligning.	Diskussion af metoden 'separation af de variable' i forhold til form og identifikation
		Diskussion af betingelserne for at bruge metoden – Del 1
		Forberedelser til beviset – regneregler
		Diskussion af betingelserne for at bruge metoden – Del 2
15:00	FRIKVARTER	
50:00	Tavleundervisning med input fra eleverne: Udførsel af beviset	Variablerne separeres ud fra metoden
		Evaluering af integralerne – implicit løsning
		Reduktion – eksplicit løsning
		Opsamling – de andre løsningsområder
		Se på de tilfælde, hvor metoden ikke kan bruges

Tabel 7.1 – Oversigt over dobbellektionens forløb. Situation 1 & 2 er markeret med gult.

Jeg vil også ganske kort skitsere, hvad forløbet op til denne time har omhandlet. Klassen har inden denne time haft 4 dobbeltlektioner om differentialligninger. Eleverne er blevet indført i de grundlæggende begreber, herunder linjeelementer og metoden til separation af de variable. I de to timer umiddelbart før denne time, har eleverne nærstuderet differentialligningerne af typen $y' = ay$ og $y' = ay + b$. De har fundet den fuldstændige løsning, studeret partikulære løsninger og har set på ligningerne overordnet set ud fra linjeelementer. Denne lektion starter med repetition om den forrige times indhold. Den situation vi ser på kommer kronologisk set umiddelbart efter repetitionen og det er første gang eleverne støder på den logistiske ligning i undervisningen.

7.2 A priori analyse af situation 1 og 2

Vi skal gøre os klart hvad den tilsigtede viden med situationerne er, samt præcisere hvad det objektive miljø og elevernes viden er i situationerne. Begge situationer er bygget op om det MAPLE-ark, som ses nedenfor i figur 7.1. Det projekteres på en skærm i klasselokalet.

Den logistiske ligning y'=y(b-ay)

Linjeelementer og løsningskurver

restart

with(*DEtools*) :

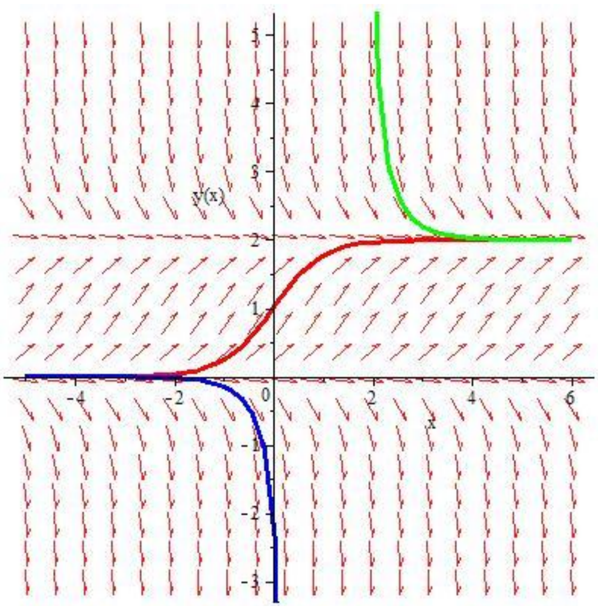
$$lig := \frac{dy}{dx} = y \cdot (b - a \cdot y)$$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = y(x)\,(b - a\, y(x))$$

ivs := [$y(0) = 1, y(0) = -2, y(2) = 6$] :

$a := 1 : b := 2 :$

\> *DEplot*(*lig*, $y(x)$, $x = -5..6$, $y = -3..5$, *ivs*, *linecolor* = [*red*, *blue*, *green*])



Figur 7.1 – MAPLE-ark, der projekteres på skærm i klassen i situation 1 og 2, (fra læreren).

Den sekvens vi skal se på, har jeg delt op i to dele, som her er kaldt situation 1 og situation 2. I situation 1 fokuseres udelukkende på retningsdiagrammet og løsningsområderne identificeres. I situation 2 fokuseres på selve differentialligningsudtrykket, altså $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$, og dette kædes sammen med diagrammet med linjeelementerne.

7.2.1 Den tilsigtede viden

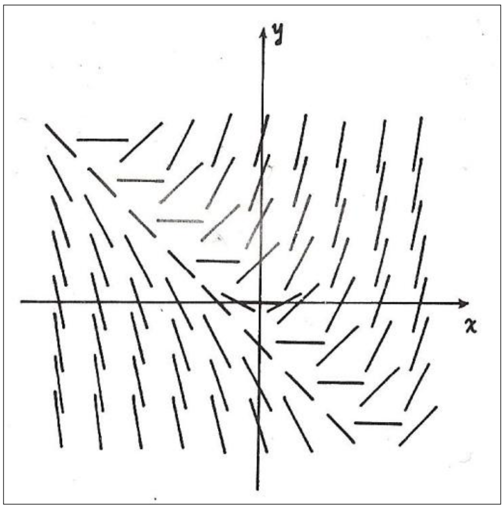
Den tilsigtede viden i situation 1 er, at eleverne skal kunne læse et diagram med linjeelementer og derudfra kunne konkludere, hvor mange løsningsområder differentialligningen har. Ordet løsningsområde blev defineret i afsnit 5.2.2.1. Derudover skal eleverne kunne karakterisere løsningsområdernes strimler og løsningernes overordnede opførsel indenfor en strimmel ud fra retningsdiagrammet. Dette foregår altså kun inden for den grafiske ramme, og man ser derfor kun på den kvalitative løsning (se afsnit 5.2.2). I situation 2 er den tilsigtede viden, at eleverne skal kunne forbinde symboludtrykket for den logistiske ligning med væksten af løsningen y. Eleverne skal endvidere kunne karakterisere væksten og kunne forbinde det med diagrammet med linjeelementerne. Specielt skal eleverne ud fra retningsdiagrammet kunne afgøre hvor og for hvilke funktionsværdier væksten er størst indenfor et løsningsområde. Dette foregår fortsat i den grafiske ramme, og fokus er derfor på den kvalitative løsning.

7.2.2 Det objektive miljø

I begge situationer udgøres det objektive miljø af det MAPLE-ark, som ses i figur 7.1. Hele arket, som ses i figuren, er projekteret på en skærm i klasselokalet. Jeg vil kort forklare de forskellige linjer og kommandoer i MAPLE-arket. Først defineres differentialligningen $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$. Dernæst fastlægges nogle initialbetingelser, som navngives *ivs*. Så bestemmes konstanterne a og b til henholdsvis 1 og 2. Med kommandoen *DEplot* laves retningsdiagrammet for differential-ligningen, vinduet for diagrammet fastlægges og tre løsningskurver indtegnes ud fra initial-betingelserne fra *ivs*.

I den første situation fokuseres udelukkende på retningsdiagrammet. Dette diagram er en repræsentation af den fuldstændige løsning i form af linjeelementer samt grafen af tre partikulære løsninger. Retningsdiagrammet fungerer som en statisk repræsentation for den kvalitative løsning, da der fx ikke ændres i parametrene a og b undervejs. Valget af denne repræsentation er et didaktisk valg, der har konsekvenser for, hvordan eleverne reagerer på de spørgsmål, som læreren stiller. I dette tilfælde har læreren valgt et retningsdiagram i et vindue, der viser de vigtige løsningsområder. Derudover har læreren indtegnet tre løsningskurver, der svarer til tre forskellige begyndelsesbetingelser. Disse tre begyndelsesbetingelser er valgt sådan, at de tre løsningskurver ligger i hver deres løsningsområde.

Det er vigtigt at slå fast her, at udformningen af retningsdiagrammet er afgørende for undervisningssituationen. Idet læreren vælger at indtegne de tre løsningskurver oven i linje-elementerne, ændres diagrammet markant i forhold til hvis linjeelementerne havde stået alene. En anden vigtig ting at slå fast er, at udformningen af det objektive miljø skal ses i lyset af de spørgsmål, som læreren stiller. Det fremgår fra lærerens spørgsmål, at fokus er antal løsnings-områder, og at spørgsmålet har sit udgangspunkt i linjeelementerne. Det at læreren har indtegnet løsningskurverne i sit retningsdiagram har nogle mulige konsekvenser for situationen, som jeg vil fremstille her. En mulig konsekvens af valget af denne repræsentation er, at eleverne måske kommer til at fokusere på de indtegnede kurver frem for at fokusere på linjeelementerne eller de kommer til at forveksle linjeelementer og løsningskurver i diskussionen på klassen. En anden mulig konsekvens er, at den fuldstændige løsning, som består af en uendelig familie af funktioner også kommer lidt i baggrunden, da der er allerede er indtegnet nogle helt specifikke løsningskurver. Endnu en mulig konsekvens er, at eleverne kan komme til at forveksle strimlerne med løsningskurverne. Det kan dog også være en fordel at indtegne nogle løsningskurver, idet eleverne kanse, at linjeelementerne er tangenter til kurverne. I en samling MAPLE-ark lavet af læreren, som han bruger som udgangspunkt for undervisningen i klassen ser jeg, at alle de steder, hvor der optræder et diagram med linjeelementer, er der i alle tilfælde tegnet en eller flere løsningskurver oveni. I de elev-rapporter, jeg har haft adgang til, ses det samme. Det skyldes måske, at eleverne ikke ved hvordan man producerer et diagram med linjeelementer uden indtegning af løsningskurver i MAPLE, da læreren tilsyneladende ikke har demonstreret det for dem. Samtidigt er det sandsynligt, at eleverne slet ikke har overvejet at tegne et diagram af linjeelementer uden også at indtegne løsningskurver, da de aldrig er blevet præsenteret for det på klassen. Der er dog et enkelt eksempel på det i lærebogen, se figur 7.2. Eleverne har adgang til lærebogen af Clausen et al. (1993), men den benyttes ikke i denne lektion.



Figur7.2 – Linjeelementer for differentialligningen $y' = x + y$. (Fra Clausen et al., 1993, s.63)

Ud over MAPLE-arket som ses på figur 7.1, indgår endnu et MAPLE ark som en del af det objektive miljø i situation 1. Det ses på figur 7.3. Dette MAPLE-ark stammer fra den forrige time og omhandler differentialligningen $y = ky$. Indholdet er helt tilsvarende til MAPLE-arket om den logistiske ligning. I situationen bruges kun retningsdiagrammet fra MAPLE-arket fra figur 7.3.

Ligningen y'=ky

Linjeelementer og løsningskurver

restart

with(*DEtools*) :

Vi ser her på en af de simplere vækster, hvor det antages at den relative væksthastigheden er konstant y'/y=k og som giver y'=k·y.

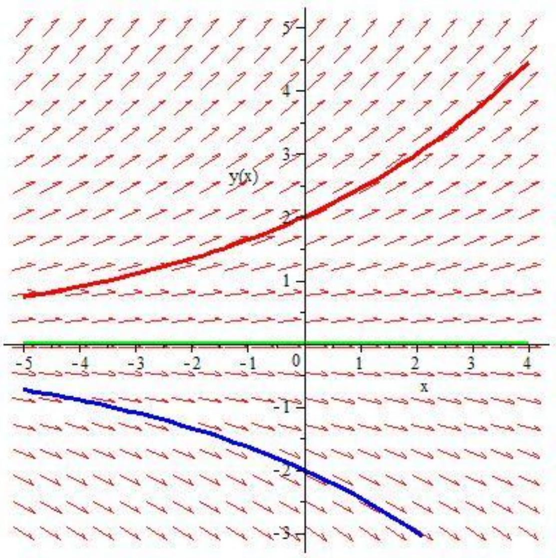
$lig := \frac{dy}{dx} = k \cdot y$

$$\frac{d}{dx} y(x) = k\, y(x)$$

$ivs := [y(0) = 2, y(0) = -2, y(0) = 0] :$

$k := 0.2 :$

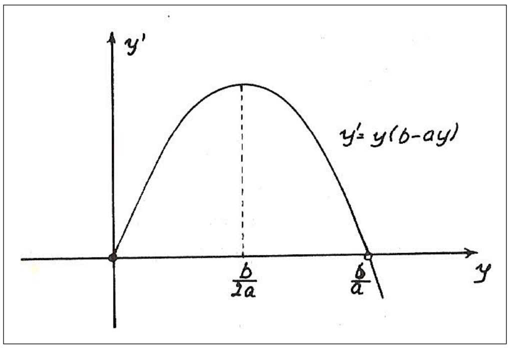
> $DEplot(lig, y(x), x = -5 ..4, y = -3 ..5, ivs, linecolor = [red, blue, green])$



Vi ser ovenfor, at der er plottet løsningskurver svarende til forskellige løsningsområder; y>0, y=0 og y<0 - i det tilfælde, hvor k=0.2.

Figur 7.3 – MAPLE-ark, der projekteres på skærm i klassen i situation 1.

I situation 2 sættes der mere fokus på differentialligningen på symbolsk form, altså på $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$. Denne ligning udgør dermed det objektive miljø i situation 2 sammen med retningsdiagrammet og de tre indtegnede løsningskurver fra figur 7.1. For at finde sammenhængen mellem symboludtrykket for differentialligningen og retningsdiagrammet ville det være oplagt at inkludere fasediagrammet for den logistiske ligning som en del af det objektive miljø. Fasediagrammet kan findes i lærebogen og ses neden for i figur 7.4 At have fasedigrammet med i det objektive miljø ville give eleverne flere muligheder for at få feedback fra miljøet og styrke studiet af den kvalitative løsning, som det beskrives i afsnit 5.2.2.1. Ud fra fasediagrammet ses det tydeligt, at væksten har nulpunkterne 0 og b/a. Desuden viser det, hvordan væksten opfører sig indenfor intervallet $0 < y < b/a$, blandt andet ser vi tydeligt, at væksten topper i $b/2a$. Fasediagrammet indgår dog ikke i denne lektion.



Figur 7.4 – Fasediagram for den logistiske ligning (Clausen et al., 1993, s. 74)

Selvom fasediagrammet ikke indgår i det objektive miljø har situationen stadig et adidaktisk potentiale, idet eleverne har mulighed for at interagere med retningsdiagrammerne og løsningskurverne.

7.2.3 Elevernes viden

Som beskrevet i afsnit 5.2.2 er linjeelementer en matematisk repræsentation af den fuldstændige løsning, som eleverne ikke kender fra andre sammenhænge end i forbindelse med differentialligninger. Det er derfor er repræsentationsform, som eleverne har stiftet bekendtskab med kort tid forinden denne time. Jeg vurderer derfor, at betydningen og brugen af denne repræsentationsform hører ind under viden i udvikling og er endnu ikke etableret viden i klassen på dette tidspunkt. Nogle af de udfordringer der er i forbindelse med at læse et diagram over linjeelementer, som nævnes i 5.2.2, dukker derfor måske også op her. I lektionen lige inden denne lektion har klassen set på linjeelementerne for differentialligningerne $y' = ay$ og $y' = ay + b$.

Eleverne har inden forløbet om differentialligninger haft et langt forløb om differentialregning, herunder begrebet differentialkvotient i forbindelse med tangenthældning og vækst. Selvom eleverne i klassen har arbejdet i stor udstrækning med funktioner, så er termen familier af funktioner en anden størrelse, (se definition i afsnit 5.1). Et af de steder elever kan have mødt uendelige funktionsfamilier er i forbindelse med stamfunktionsbestemmelse, som det også blev påpeget i afsnit 5.1. Klassen har dog kun haft en enkelt lektion om stamfunktioner inden dette forløb, så termen en familie af funktioner vurderes ikke at være etableret viden i klassen. Det betyder, at eleverne ikke har forudsætningerne for at følge med i studiet af den kvalitative løsning og generelt den fuldstændige løsning til en differentialligning, som er en uendelig funktionsfamilie.

I den første situation er termen løsningsområde central for diskussionen. Denne term er ikke defineret i lærebogen (Clausen et al., 1993) og læreren har ikke givet en definition af den. Lærebogen taler dog om, at en løsning kan ligge inden for et område. Dette fremhæves i bogen både i forbindelse med ligningen $y' = ay + b$ g den logistiske ligning. På figur 5.15 fra afsnit 5.3.4.1 er strimlerne $y < 0$ og $y > 0$ skraveret. Bogen omtaler disse som områder, hvor løsninger fra differentialligningen $y' = ay + b$ kan ligge. Dette minder om termen løsningsområde, som læreren benytter, men det er dog ikke helt det samme, idet bogen ikke omtaler $y = 0$ som et område i den forbindelse. I MAPLE-arket på figur 7.3 skriver læreren netop om samme situation, hvor $b = 0$:

> *Vi ser ovenfor, at der er plottet løsningskurver svarende til forskellige løsningsområder; y>0, y=0 og y<0 - i det tilfælde, hvor k=0.2.*

Ud fra dette citat ser vi, at læreren betragter ordet løsningsområde en anelse anderledes end det, bogen kalder område. Læreren anser nemlig også $y = 0$ som et løsningsområde. Jeg har defineret termen løsningsområde i afsnit 5.2.2.1. Fraværet af en fastlagt definition af denne term udgør en forhindring for eleverne, da den skal defineres løbende i situationen.

7.3 A posteriori analyse af situation 1 & 2

I de nedenstående transskriptioner benævnes læreren med "L" og eleverne med et anonymt navn. Bemærk at læreren har for vane ofte at slutte en sætning af med ordet *ikke*. Dette betyder ikke at sætningen er et spørgsmål, det er blot en del af lærerens talemåde. En anden vane er vendingen *så at sige.*

7.3.1 Situation 1

Jeg vil nu præsentere situationen, hvor jeg fremhæver valideringssituationerne ved hjælp af mikrokontrakterne. Længere nede ses et skema, tabel 7.2, som opsamler situationen organiseret i episoder. Situationen starter med, at læreren projekterer MAPLE-arket fra figur 7.1 på skærmen i klassen. Læreren peger på retningsdiagrammet og siger følgende:

1. L: Allerførst, kan I se ud af de her linjeelementer, der bliver tegnet, hvor mange løsningsområder, der er?
2. Else: Hvad mener du med det?
3. L: Altså, hvor sker der noget forskelligt? Altså, der er en helt masse løsninger, der minder meget om hinanden, men så er der også nogen der afviger fra den og det ser meget forskelligt ud, gør det ikke? Eller ser det meget ens ud synes I?

Situationen starter altså med, at læreren stiller et spørgsmål, om eleverne kan se, hvor mange løsningsområder, der er. Som bemærket ovenfor er spørgsmålet egentligt: Hvor mange strimler er planen opdelt i? Allerede her ser vi, at fraværet af definition af termen løsningsområde er en forhindring for eleverne. Det ses i tur 2. Læreren forsøger at oprette en mikrokontrakt i klassen, hvor eleverne tager ansvar for formuleringssituationerne. Eleverne markerer dog kun i lille udstrækning her, så det lykkes ikke for læreren. Det skyldes i høj grad fraværet af definition af løsningsområder, som gør, at spillereglerne for situationen mangler. Som tidligere nævnt er brugen af linjeelementer en viden, der er under udvikling for eleverne og endda noget, der er blevet institutionaliseret på klassen inden for kort tid.

Tilsyneladende ønsker læreren at have flere elever med, så han vender tilbage til indholdet fra den forrige time om $y' = ay$. Derfor projekterer han MAPLE-arket fra figur 7.3 på skærmen. Teoretisk set burde viden om differentialligningen $y' = ay$ have status som viden i udvikling, da det er gennemgået i tidligere lektioner. Dog fremgår det, at termen løsningsområde ikke er defineret endnu. Læreren fokuserer nu igen på retningsdiagrammet, og brugen af denne er stadig ikke etableret i klassen. Situationen fortsætter:

3. L: Lad os gå tilbage til denne her. Hvor mange løsningsområder havde vi der?
4. Lea: Tæller den der $y = 0$ med?
5. L: Det kan I jo… Gør den det? Hvad siger Sanne? (Mange elever markerer i denne episode).
6. Sanne: Er der ikke tre?
7. L: Jo, nemlig hvilke?
8. Sanne: Dem der går opad, og så der hvor de er lige, og der hvor de falder… Det var der hvor de positive, og de…
9. L: Ja, og hvordan vil du karakterisere det område der? (Læreren peger på den positive del, altså på området $y > 0$).
10. Sanne: De er voksende.
11. L: Ja det er rigtigt nok, at alle løsningskurverne de er sådan set voksende, men hvis du skal angive det om, hvilken del af så at sige planen er det? Hvordan vil du karakterisere den her del af planen?
12. Sanne: Den er positiv.
13. L: Ja, hvad er det der er positivt?
14. Sanne: Øh, det ved jeg faktisk ikke.
15. L: Hvad er det der er positivt her? Line, eller sludder og vrøvl, Nadja.
16. Nadja: y større end nul.
17. L: Ja, det er y større end nul. Ja, så det var y større end nul.

Igen er lærerens spørgsmål det samme. Eleverne skal finde antallet af løsningsområder. I denne episode markerer mange elever. Vi bemærker dog i tur 4, at en elev stadig ikke forstår, hvad læreren mener med termen løsningsområde. Fraværet af en formel definition udgør altså stadig en forhindring for eleverne. I stedet for at afklare, hvad definitionen er, forsøger læreren i tur 5 at etablere en mikrokontrakt, hvor han lægger op til, at definitionen er til forhandling. Men allerede i tur 7, bryder han kontrakten ved at afsløre svaret, idet han siger: *Jo, nemlig hvilke?* Dette er en valideringssituation, idet læreren validerer elevens svar. Ansvaret for denne validering er helt på lærerens side, men eleven får bagefter lejlighed til at forklare sig i tur 8. Forklaringen læner sig op af miljøet, som her er diagrammet over linjeelementer fra figur 7.3. Her beskriver hun områderne ud fra *dem der går opad… … de er lige… … hvor de falder*. Spørgsmålet er så, hvad *dem* og *de* refererer til. Jeg har to bud på, hvad hun kan referere til. Hun blev bedt om at beskrive de tre løsningsområder, men det er muligt, at hun i stedet beskriver, hvordan løsningskurverne ser ud i de forskellige strimler. Hvis eleven forveksler strimlerne med løsningskurverne har de indtegnede kurver altså en uheldig påvirkning på episoden i forhold til lærerens spørgsmål. Idet hun omtaler dem i flertal, tyder det på, at hun tænker på en familie af funktioner frem for blot den ene indtegnede løsningskurve i hvert område. Det kan også være, at hun refererer til linjeelementernes hældning, idet hun siger *dem* og *de*. Under alle omstændigheder svarer hun ikke på læreren spørgsmål, som jo går ud på at identificere de tre strimler $y < 0$, $y = 0$ og $y > 0$. Alligevel kan hun godt se, at der er tre områder, hvor enten linjeelementerne eller løsningskurverne opfører sig forskelligt. Jeg bemærker desuden her, at den omtalte validerings-situation er meget kortvarig. Læreren styrer diskussionen efter sin egen dagsorden og prøver at få eleverne til at indse, hvordan områderne er delt op. Han peger på området $y > 0$ og spørger i tur 9, hvordan Sanne vil karakterisere den del af planen. Sanne fortsætter i sit spor, læreren omformulerer sig og til sidst konkluderer eleven, at hun er usikker på, hvad der egentligt er positivt. En anden elev, Nadja, svarer i tur 16 så det, som læreren fisker efter. Læreren responderer igen med en kortvarig validering, idet han siger i tur 17: *Ja, det er y større end nul*.

Vi ser i denne episode, at læreren forsøger at inddrage eleverne så meget som muligt og forsøger at etablere en mikrokontrakt for at lave en kvalitativ analyse af strimlerne. Han ønsker, at eleverne selv tænker over problemstillingen og formulerer sig. Problemet er her, at definitionen af termen løsningsområde bliver benyttet undervejs uden at have en formel definition. Samtidigt defineres termen løbende, men ud fra eksemplet. Dette er problematisk, da definitionen hermed får en, operationel status. Den knyttes til den konkrete situation, og læreren kan derfor ikke definere spillereglerne generelt. Vi ser også, at episoden reelt ender med noget der ligner en Topazeeffekt, idet læreren giver tydeligere og tydeligere hints og pensler spørgsmålet meget ud. Den mikrokontrakt, som reelt finder sted i episoden har karakter af en forhandlingskontrakt, hvor eleverne forsøger at sige det, som læreren er ude efter. I begge de kortvarige validerings-situationer der opstår, er det derfor udelukkende læreren, der har ansvaret, og miljøet inddrages kun i nogen grad. Vi vil videre se, at denne form for validering er hyppigt brugt af den pågældende lærer. Situationen udvikler sig forsat:

18. L: Og hvad er det andet interessante område? Felix.
19. Felix: y mindre end nul.
20. L: Ja, når y er mindre end nul. Og der kan man se, hvordan ser alle løsninger ud der? Ja, Felix.
21. Felix: De er magen til de positive rødder, bare afspejlet i nul.
22. L: Ja, man kan sikkert godt finde nogle spejle, det er rigtigt. Men nu sagde vi at alle de her var voksende, så de her de er?
23. Felix: Faldende
24. L: Ja, eller aftagende. Og så har vi en til. Det var den du var inde på Lea.
25. Lea: y lig med nul.
26. L: Ja, det er y lig med nul. Det er ikke så interessant, men den skal jo så at sige med. Det var så og sige den vi undersøgte, da vi løste differentialligningen. Det var den vi undersøgte for sig, fordi vi kunne kun bruge separation af de variable på det område og på det område, ikke? (L peger på strimlerne y > 0 og y < 0 på lærredet). Og så kunne vi se, at det her faktisk også var en løsning ved at sætte ind, og så sammenstykkede vi til den samlede løsning. Så det var det.

Denne gang bringer eleven Felix med det samme det svar, som læreren var ude efter, og læreren lader så Filip beskrive, hvordan løsningskurverne ser ud i løsningsområdet $y < 0$. I tur 21 bruger Felix ordet *rødder* om løsningerne. Ordet rødder er dog normalt et ord, man bruger om nulpunkter i polynomier. Det er derfor uklart, hvad Felix tænker på. Det er muligt, at Felix tænker på rødderne som funktioner, da det jo netop er funktioner, der er løsninger til differentialligningen. En anden mulighed er, at Felix rent faktisk tænker på rødderne som tal. Det kunne i denne sammenhæng fx være punkter i planen, da det ville give mening sammen med hans forklaring om, at rødderne er afspejlet i nul. Her mener han nok $y = 0$. Det kunne dog også være, at han tænker på linjeelementer, som også ser ud til at være afspejlet i linjen $y = 0$. Desuden ser det ud til, at Felix har gjort en fin observation ud fra miljøet, nemlig at de løsningskurver (eller rødder), der dukker op i området $y < 0$ er direkte spejlinger af løsningskurverne fra området $y > 0$. Løsningskurverne fra figur 7.3 er nemlig på formen $y = \pm ce^{kx}$, hvor $c \in \mathbb{R}_+$. På figuren er begyndelsesbetingelserne netop valgt sådan, at de to løsningskurver bliver symmetriske om y-aksen. Her er de henholdsvis $y(0) = 2$ og $y(0) = -2$. Dertil er der også den konstant løsning. Det ser altså her ud som om eleven interagerer med miljøet og formulerer sin hypotese ud herfra. Dog virker det ikke som om læreren er synderligt interesseret i denne observation, selvom hans spørgsmål gik ud på at beskrive hvordan løsningerne ser ud. Læreren bemærker blot i tur 22: *Ja, man kan sikkert godt finde nogle spejle, det er rigtigt.* Om det er en positiv validering eller ej er ikke klart. Læreren fortsætter med, at få Felix til at sige det han ønsker og lægger op til, hvilket svar, han gerne vil have ved at sige: *Men nu sagde vi, at alle de her var voksende, så her er de…?* I tur 24 validerer og retter læreren med et kortvarigt: *Ja, eller aftagende*. Til sidst får han Lea til at give det sidste område, og han samler op på situationen. Episoden er et klassisk eksempel på triadisk dialog og vi ser i tur 24, at læreren benytter sin rolle, som den der validerer og samtidigt retter elevens fagsprog, så det bliver mere præcist (se afsnit 3.7). Mikrokontrakten i episoden kan kaldes kollektiv produktion, da to elever begge bidrager til den faglige diskussion. På den anden side følger læreren kun sin egen dagsorden og kommenterer kun overfladisk Felix' observation om spejling. Mikrokontrakten bliver derfor lidt forhandlingsagtig. Al validering i episoden foretages af læreren, og han har alene ansvaret. Dette er typisk, når klasserumsdiskursen er triadisk dialog. Læreren har nu defineret termen løsningsområde ud fra tilfældet $y' = ky$ ved at identificere de tre løsningsområder. Definitionen er derfor situeret og det er problematisk. Vi vil se i de følgende episoder, at det fortsat skaber forhindringer for eleverne og mangel på spilleregler.

Læreren vender nu tilbage til den oprindelige situation, nemlig diagrammet over linjeelementer for den logistiske ligning, som ses i figur 7.1.

27. Har I så et bud på hvor mange områder der er her?
(Pause) – Mange elever markerer.
28. Solveig: Jeg har ikke forstået spørgsmålet.
29. L: Hvor mange, altså hvor mange områder sker der noget så at sige forskelligt? Radikalt forskelligt kunne man sige. Altså, det er kun et gæt ud fra de linjeelementer vi har, ikke? Arvid.

30. Arvid: Jeg ville sige, at der var 3.
31. L: Ja, hvad er det for nogen?
32. Arvid: Der er to, der er aftagende, og der er en, der er voksende.
33. L: Ja, det er jo de tre, der er interessante, men i lighed med før er der vel også to, der er rimelig uinteressante, ikke? De kan jo måske også være lige så interessante, der sker ikke så meget.

I Tur 27 stiller læreren det oprindelige spørgsmål igen, men benytter nu ordet *områder* i stedet for løsningsområder. Han er altså ikke helt konsekvent med ordvalget. Mange elever markerer, så de foregående episoder har tilsyneladende været med til at understøtte og opklare spillereglerne for eleverne. Ud fra de forslag og kommentarer, som eleverne kommer med, er det dog ikke helt tilfældet. Det første vi lægger mærke til er, at der stadig er en elev, der ikke har forstået spørgsmålet og siger det. Igen er spillereglerne ikke defineret og det lykkes kun læreren i nogen grad at etablere en mikrokontrakt om at identificere løsningsområderne for den logistiske ligning. Læreren forsøger derfor i tur 29 at formulere sig i et sprog, der minder om hverdagssprog, eksempelvis siger han: *radikalt forskelligt*. Når læreren siger, at *det kun er et gæt*, så viser det, at læreren ønsker, at flere elever skal deltage og han siger hermed, at det er helt i orden at komme med sin hypotese, selvom man ikke er sikker på den. Arvid svarer, at der er tre løsningsområder og læreren responderer i tur 31 med: *Ja, hvad er det for nogen*? Det lyder som en positiv validering, men når det rigtigt svar er 5, må lærerens kommentar være af en anden karakter end egentlig validering. Det ser ud til, at den egentlige validering først kommer i tur 33, hvor læreren konkluderer, at der er tre områder, men også at der er yderligere to løsningsområder. Den tilsyneladende validering i tur 31 fungerer mere som en slags foreløbig validering af, at eleven måske har ret, eller at eleven har delvist ret. Det er som om, læreren antager, at eleven har ret, og at eleven så skal forklare hvorfor. Dermed ser det ud som om valideringen delvist ligger hos eleven. Det, der reelt foregår, er, at definitionen af termen løsningsområde igen er under forhandling og afklaring. Elevens forklaring er her: *Der er to, der er aftagende, og der er en, der er voksende*. Vi ser, at dette ikke er en validering, men mest bare en formuleringssituation. Læreren godtager dette svar og afslører, at der er yderligere to områder. Denne mikrokontrakt har altså en lidt speciel karakter, idet læreren lader som om han validerer uden egentlig at gøre det. Atter ser vi, at årsagen er den uklare definition af termen løsnings-område. Det er desuden værd at se nærmere på Arvids svar. Han svarer, at der er *to*, der er aftagende og *en*, der er voksende. Hvad er denne ene og disse to, han henviser til? Det kan være områderne, løsningskurverne eller måske linjeelementerne. Siden han beskriver dem som voksende og aftagende tyder det på, at han taler om løsningskurverne eller linjeelementerne. Igen ser vi, at valget om at indtegne løsningskurverne gør situationerne mere komplekse og det er uklart, hvad der tales om. Idet Arvid i tur 32 svarer, at der netop er to, der er aftagende, tyder det på, at han tænker på løsningskurverne. Der er jo mange flere linjeelementer. Ligeledes med den ene, der er voksende. Det at han omtaler dem enkeltvis tyder på, at han ikke nødvendigvis er klar over, at her er tale om en familie af løsninger. Dette kommenteres eller valideres ikke på fra lærerens side. Endvidere udvikler situationen sig:

34. L: Lars.
35. Lars: De to, der er vandrette.
36. L: Ja. Den her den er nemlig karakteriseret ... (L peger på linjen $y = 0$ på lærredet).
37. Lars: y lig med nul.
38. L: Det er y lig med nul.
39. Lars: Den anden må så være y lig med 2.
40. L: Ja, det er y lig med 2. Og det viser sig, at det er forholdet mellem b og a. Men det skal vi se, når vi løser den.
41. Hans: Er det y lig med 2 vi får for oven?
42. L: Ja, den værdi vi får her…

Endnu en elev inddrages og han identificerer de to sidste løsningsområder, nemlig $y = 0$ og $y = 2$. Igen ser vi, at lærerens validering optræder på kort form, idet han i tur 38 siger bekræftende: *Det er y lig med nul*, og i tur 40: *Ja, det er y lig med to*. Til sidst ender situationen med, at en elev konkluderer:

43. L: Så… Alma.
44. Alma: Kan man godt sige, at der er et område, hvor y er større end to? Og så i virkeligheden er der vel 5.
45. L: Ja, ja. Der er nemlig 5 områder. Så nu er vi tilbage til mit første spørgsmål. Hvor mange områder er der. Der er fem, ikke? 1,2,3, hvor der sker sådan mere eller mindre interessant. (L peger på lærredet på de tre ”interessante” løsningsområder). Og så er der sådan to, som er sådan nogle, øh, lidt uinteressante områder. Og den af de tre, der er mest anvendelig, altså det man bruger mest i praksis, det er den midterste her. Fordi den karakteriserer en vækst, og hvis vi nu går op og ser på differentialligningen. Det skal I også gøre i rapporten. I skal gå ind og se så at sige…

Alma formulerer sin hypotese her i tur 44. Læreren validerer den med det samme, og han bruger miljøet i nogen udstrækning, mens han tæller løsningsområderne og peger på diagrammet med linjeelementerne. Igen ser vi, at læreren har ansvaret i valideringsprocessen. Denne sidste episode har desuden karakter af institutionalisering, da læreren her slår svaret fast. Diskussionen er hermed lukket, og læreren slutter af med nogle bemærkninger om en elevrapport, som eleverne skal aflevere kort tid efter denne lektion.

7.3.2 Generelle overvejelser om situation 1

Nedenfor ses en oversigt over hele situationen opdelt på mikrokontraktniveau. I kolonnen *status af viden* står N for ny viden, U for viden i udvikling og G for gammel viden (se afsnit 3.2).

Episode	Tur	Titel	Fordeling af ansvar	Status af viden	Mikrokontrakt
1a	1-3	Lærer spørger om løsningsområder	Lærer	N	
1b	4-17	Antal løsningsområder for y’=ky – karakterisering af området y>0	Lærer, Lea, Sanne og Nadja	N	Forhandling

1c	18-26	Karakterisering af de resterende løsningsområder	Lærer, Felix og Lea	N	Kollektiv produktion
1d	27-33	Antal løsningsområder for den logistiske ligning – de tre interessante områder	Lærer, Arvid og Solveig	N	Individuel produktion
1e	34-42	De resterende to løsningsområder	Lærer, Lars og Hans	N	Individuel produktion
1f	43-45	Konklusion	Lærer og Alma	N	Individuel produktion

Tabel 7.2 – Situation 1 opdelt i episoder

Generelt ser vi, at mønsteret i klasserumsdiskursen er triadisk dialog. Det er læreren, der styrer samtalen og dagsordnen. Vi ser også, at læreren er meget ivrig efter at inddrage eleverne så meget som muligt i formuleringssituationerne, og han vil gerne have, at eleverne selv skal producere deres viden. Jeg observerede, at læreren som regel holdt pause efter at have stillet et spørgsmål, indtil mange elever markerede. Hvis det ikke skete, vendte læreren i nogle tilfælde tilbage til en tilsvarende problemstilling, som eleverne havde set før. Det ses blandt andet i skiftet mellem episode 1a og 1b. I andre tilfælde omformulerede og præciserede læreren sit spørgsmål. Da lærerens undervisningsform er triadisk dialog, ser vi, at ansvaret i valideringssituationerne oftest ligger hos læreren. I langt de fleste tilfælde blev valideringssituationerne meget små og kortvarige. Ofte validerede læreren elevernes hypoteser med det samme, med et *ja* eller *nej*. I nogle tilfælde kommer der slet ikke en forklaring, men i mange tilfælde spørger han den elev, som har formuleret hypotesen. Eksempler på dette findes gentagende gange i episode 1b.

Vi så også et par tilfælde, hvor en elev fremsagde sin hypotese, og hvor læreren stor set ikke kommenterede det. Det ses fx i episode 1c tur 20-21. Læreren validerer lidt tvivlsomt Felix' hypotese og går straks videre. Dette viser, at læreren er mest fokuseret på sin egen dagsorden frem for at diskutere de faglige overvejelser, som eleverne ind i mellem udtrykker. Der kan være flere grunde til det. En af grundene kan være for at holde en rød tråd og ikke forvirre de andre elever. En anden grund kan være af praktiske årsager. Efter denne lektion kommenterede læreren i en uformel samtale, at han var tidspresset i denne lektion på grund af en kommende rapport, og at det var vigtigt, at de nåede at gennemgå dagens program. Han udtalte også, at dagens gennemgang blev lidt hurtig, og at han synes, det var utilfredsstillende.

Det springende punkt i denne situation er problemstillingen omkring definitionen af termen løsningsområde. Igen og igen ser vi, at eleverne er i tvivl om lærerens hensigt med spørgsmålet og det afslører, at spillereglerne er fraværende i de mikrokontrakter, læreren forsøger at etablere. Termen løsningsområder er kun defineret operationelt set ud fra en konkret situation. Det er altså ikke mulig at komme frem til en generel definition i situationen. Dette gør, at mesokontrakten, altså den overordnede didaktiske kontrakt gennem hele situationen, er en forhandlingskontrakt. Selvom jeg har karakteriseret de fleste mikrokontrakter i de enkelte episoder som individuel eller kollektiv produktion, så vi også i analysen undervejs, at tendensen i mange tilfælde var, at kontrakten var på grænsen til en forhandlingskontrakt. Eleverne har ikke de faglige forudsætninger for at interagere med miljøet og svare på lærerens spørgsmål. Dermed har læreren reelt al ansvaret i de små episoder og dette har konsekvenser for rationaliteten i situationen. Læreren kan ikke henvise til den formelle definition, og derfor mister valideringen rationalitet, idet læreren validerer ud fra egne definitioner og spillerregler.

7.3.2 Situation 2

Denne situation foregår som nævnt tidligere i umiddelbar forlængelse af situation 1. Situationen starter med, at læreren sætter fokus på udtrykket $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$, som står i MAPLE-arket på figur 7.1. Selvom det ikke er en repræsentation, som oplagt hører ind under den grafiske ramme, ser vi i situationen, at vi fortsat bliver i den grafiske ramme. Som beskrevet i afsnit 3.4 kan man godt have repræsentationer fra det algebraiske symbolregister i den grafiske ramme, så længe formålet er at studere den kvalitative løsning, og det er de grafiske repræsentationer, som er i fokus og benyttes til argumentation. I situation 1 studeres ligningen $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)$ ud fra MAPLE-arket fra figur 7.1. Det er altså en konkret logistisk ligning, hvor $a = 1$ og $b = 2$. Det er denne ligning, der fortsat studeres i situation 2. Her fokuseres på løsningsområdet $0 < y < 2$.

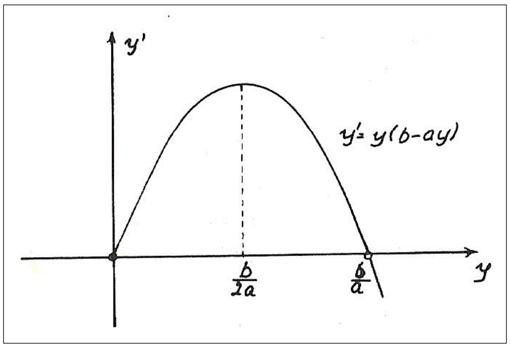
1. L: Det der udtryk her, det… (L peger på symboludtrykket for differentialligningen på lærredet). Hvilket slags udtryk er det? Kan I gennemskue det? Det er sådan lidt sværere at se. Men kan I gennemskue, hvad højresiden er for en slags udtryk? Søren.
2. Søren: Det er lineært.
3. L: Nej
4. Søren: Altså a gange y minus…
5. L: Ja, det der, det er lineært. (L peger på faktoren (b-ay)). Og så ganger du med y…
6. Søren: Hvis du ganger med y bagefter, så er det jo y^2.
7. L: Ja. Så hvilket slags udtryk er det?
8. Søren: Det er et potens af eksponentiel… Nej, potens eller polynomium.
9. L: Ja, og du har jo ikke et rent y^2, du har jo… Du får også et led, der hedder…
10. Søren: Nå, ja. Y gange b.
11. L: Så hvad er din konklusion?
12. Søren: Polynomium.
13. L: Ja, og hvilket grad har det polynomium?
14. Søren: 2. grads.
15. L: Ja… og hvilken vej vender grenene på det? Mia.
16. Mia: Jeg tænker, at de vender nedad.
17. L: Grenene vender nedad, ja…

I denne første episode har vi en dialog, hvor læreren hjælper Søren med at formulere og afgøre, hvilket slags udtryk $y(b - ay)$ er. Dette er gammel viden, som er etableret hos eleverne og når man kun ser på denne lille episode, ser det ud som om, det udelukkende foregår inden for den algebraiske ramme. Vi vil se, at denne viden fra episode skal benyttes i de følgende episoder til arbejdet i den grafiske ramme. En enkelt elev, Mia, inddrages også til at konkludere, hvilken vej grenene vender. Dette afhænger af fortegnet på konstanten a, da 2. gradspolynomiet er $-ay^2 + by$. I MAPLE- arket ser vi, at $a = 1$. Her er det tydeligt, at læreren ønsker, at det skal være eleverne, der producerer viden med vejledning fra læreren. Klasserumsdiskursen er fortsat triadisk dialog med spørgsmål – svar – evaluering. Hermed opstår mange helt små valideringssituationer, hvor ansvaret ligger hos læreren. Selvom det suverænt er læreren der styrer dialogen, bidrager eleverne rent faktisk med det faglige ud fra miljøet, som i dette tilfælde udgøres af ligningen $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$. Vi kan derfor kalde mikrokontrakten i denne episode for individuel produktion. Efter denne episode drejer læreren samtalen over på at koble dette sammen med diskussionen i situation 1.

18. L: … Og det vil så sige, den har et toppunkt ikke også? Og… Det vil så sige, at det der står på venstresiden, det er jo væksten på y, ikke? Så hvad kan vi sige om væksten på y? Væksten på y, det følger hvad? Niels.
19. Niels: Væksthastigheden afhænger af… Altså hvis vi snakker om antallet i en population, så afhænger hastigheden af antallet i populationen.
20. L: Ja, præcis. Og i starten, fordi… Højresiden, det bliver jo som Mia siger, det bliver så at sige toppen, grafisk kan vi tegne det som et andetgradspolynomium, ikke? Og det vil så sige, at væksten topper på et eller andet tidspunkt. Men den må jo stige i starten ikke? Altså… Væksten må blive større og større, fordi sådan et andetgradspolynomium med grenene nedad, det må, mellem rødderne, der må det jo stige ikke? Og så må den jo toppe. Og hvor topper den så at sige? Hvor er væksten størst på den røde her? (Læreren henviser til diagrammet med linjeelementer). Albert.
21. Albert: 2
22. L: Nej. Oppe i 2, det var jo der hvor den var helt vandret jo. Altså, der var…
23. Noah: I 1
24. L: Ja, det må være 1, lige i midten. Så lige her midt i mellem, ikke? (L peger på lærredet ved den røde kurve omkring $y = 1$).

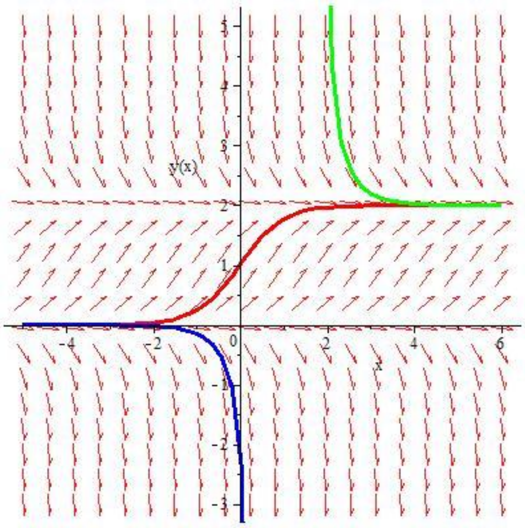
Læreren anslår nu, at $\frac{dy}{dx}$ og dermed $y(b - ay)$ betegner væksten for en funktion y. Han forsøger i tur 18 at få eleverne til at formulere noget om, hvordan væksten udvikler sig. Dette er formuleret som et meget åbent spørgsmål: *Hvad kan vi sige om væksten på y?* Niels formulerer en korrekt hypotese i tur 19, nemlig at væksthastigheden af y afhænger af y selv. Han formulerer det ud fra et eksempel, der omhandler population. Klassen har på dette tidspunkt ikke beskæftiget sig med modellering af differentialligninger endnu, men i afsnittet om den logistiske ligning i lærebogen er der et eksempel om en populations vækst. Læreren reagerer i tur 20 med: *Ja, præcis*. Ud over dette kommenterer han overhovedet ikke Niels' hypotese. Niels' beskrivelse af væksthastigheden er rigtig og af betydning, men læreren fortsætter i stedet med at snakke videre om sin egen dagsorden. Derfor bliver valideringssituationen reduceret til denne ene lille kommentar, og igen har læreren hele ansvaret. Det tyder altså på, at læreren forventede et andet specifikt svar på sit åbne spørgsmål, og at læreren ikke tager sig tid til at tage de alternative hypoteser op, som han ikke havde planlagt.

Læreren fortsætter med at stille spørgsmål om væksten, men præciserer nu sit spørgsmål, formentlig for at få drejet samtalen ind på sin dagsorden igen. Læreren snakker nu om parablen som ses på figur 7.4, men denne figur bliver ikke tegnet eller refereret til i undervisnings-situationen.



Figur 7.4 – Fasediagram for den logistiske ligning (Clausen et al., 1993, s.74)

Det er altså op til eleverne at forestille sig den, mens læreren taler. Som vi nævnte i afsnit 7.2.2 ville dette fasediagram have understøttet denne diskussion gevaldigt. Det nye spørgsmål formuleres således: *Og hvor topper den så at sige? Hvor er væksten størst på den røde her?* Ordet *den* henviser til væksthastigheden for y. Spørgsmålet formuleres med et *hvor*. Med det mener læreren formegentlig: For hvilke funktionsværdier er væksthastigheden størst? Det er derfor ikke sikkert, at spørgsmålet er klart for eleverne. Endvidere sætter læreren spørgsmålet om vækst-hastigheden i forbindelse med løsningskurven i diagrammet med linjeelementer. *Den røde her* henviser nemlig til den midterste løsningskurve på figur 7.5.



Figur 7.5 – Linjeelementer og mulige løsningskurver for ligningen $y' = y(2-y)$, (fra læreren).

Det er også lidt besynderligt, at læreren kæder den generelle væksthastighed sammen med en partikulær løsningskurve. Dermed bliver svaret så også kun gældende for en partikulær løsning, og eleverne finder ikke ud af, hvor væksthastigheden er størst generelt, men hvor den specifikke løsning har størst vækst. Derfor går eleverne glip af at se sammenhængen mellem differentialligningen og den maksimale vækst. Spørgsmålet fra læreren er også ret indviklet, idet det inddrager mange forskellige termer og repræsentationsformer. Her indgår termen vækst, 2. gradspolynomiet $y(b-ay)$, fasediagrammet som ikke tegnes, linjeelementerne og den røde løsningskurve fra figur 7.5. At have så mange termer og repræsentationer i spil på én gang, kan være en udfordring for eleverne. I første omgang svarer en elev, at væksten topper i 2. På figur 7.5 ser det ud til, at den røde kurve har $y=2$ som asymptote. Eleven svarer højst sandsynligt 2, fordi det ser ud som om det er den højeste funktionsværdi for kurven. Dette tyder på, at eleven muligvis har misforstået lærerens spørgsmål. Læreren validerer hurtigt, at det er forkert i tur 22: *…det var jo der hvor den var helt vandret jo*. Igen bliver der ikke præciseret, hvad *den* refererer til. Spørgsmålet omhandler væksten, så det må være væksten, de omtaler. På den anden side, så lyder det mærkeligt, at læreren siger, at væksten er vandret. Det tyder på, at det er tangenthældningen eller linjeelementerne, der hentydes til. Som vi ser fra samtalen på klassen finder en elev frem til, at svaret er 1 i tur 24, men de har ikke præciseret, at det er funktionsværdien y, der er 1. Læreren validerer i tur 25, at dette er korrekt. Idet han siger: *Lige her midt i mellem*, mener han midt i mellem de to asymptoter eller løsningsområder $y=0$ og $y=2$. Linjen $y=1$ ligger rigtig nok lige midt i mellem.

Den viden om vækst, der er i spil her, sammen med brugen af linjeelementer i denne episode er ny viden, og der er mange ting, der fremstår uklart. En af de væsentligste årsager er, at læreren taler om 2. gradspolynomiet på figur 7.4, som eleverne selv skal forestille sig. Miljøet er i dette tilfælde ikke tilstrækkeligt til at give dem feedback. Derfor har mikrokontrakten karakter af forhandling. Eleverne prøver at svare så godt de kan på lærerens spørgsmål, men læreren er først tilfreds, når eleverne har sagt det han ønsker. I denne episode har Noah formuleret hypotesen, at væksthastigheden er størst i 1, hvilket svarer til b/a, da $b=2$ og $a=1$ ifølge MAPLE-arket figur 7.1. Denne kobling til konstanterne a og b laves dog ikke i undervisningen. Hypotesen ønskes nu valideret her inden for den grafiske ramme. Læreren har allerede afsløret, at hypotesen er rigtig, men eleverne skal forklare, hvordan de kan se det ud fra diagrammet:

25. L: Så hvordan viser det sig, at væksten er størst der, på den her? (Peger igen på den røde løsningskurve ved $y=1$). Noah.
26. Noah: Den er mest stejl.
27. L: Hvad er mest stejl?
28. Noah: Linjen, den røde linje.
29. L: Jar… men hvordan angiver stejlheden på sådan en? Lea
30. Lea: Ved linjeelementerne.
31. L: Ja, man kunne også sige, at linjeelementet her, at det er stejlest der, ikke? Eller?
32. Lea: Det er der, hvor hældningskoefficienten er størst.
33. L: Ja, på hvad?
34. Lea: På tangenten.
35. L: Ja, på tangenten ikke? Men altså tangenthældning, det er jo en del af linjeelementet. Altså, præcis, altså… Det er jo den tredje koordinat i linjeelementet, så altså, det er bare to måder at sige det samme på. Så, her er den rimelig flad, og så bliver den så og sige stejlere

> og stejlere linjeelementerne, ikke også? Og så bliver linjeelementerne fladere og fladere igen, ikke? Og det svarer jo fuldstændig til, når vi betragter på højresiden der, ikke?

I denne sidste episode ser vi, at linjeelementerne og diskussionen om væksten kædes sammen. Her bliver linjeelementerne sammen med den røde kurves hældning brugt til at validere hypotesen om, at den røde kurve har størst vækst i $y = 0$. Jeg mener dog, at det er meget svært – hvis ikke umuligt – at kunne konkludere ud fra linjeelementerne, at de skulle være stejlest i $y = 1$ (se figur 7.5 ovenfor). I første omgang ser vi, at Noah får lov til fortsætte og forsøge sig med en validering i tur 26 og 27. Han formulerer sig dog upræcist. Læreren forsøger at få ham til at omformulere sig, men ender med at henvende sig til en anden elev, Lea. Hun nævner i tur 30, at man skal se på linjeelementerne for at finde stejlheden af løsningskurven, og kæder det bagefter sammen med hældningskoefficienten på tangenten. Ved at se på linjeelementerne får man et indtryk af, at løsningskurver i det midterste område generelt er stejlest for funktionsværdien $y = 1$. Det er dog lidt svært at se ud fra retningsdiagrammet, hvordan linjeelementerne er forbundet med den indtegnede kurve, da løsningskurven ikke går igennem nogen bestemte linjeelementer. Dette kommenteres ikke rigtigt. Dog kæder læreren linjeelementer og tangenthældingen sammen til sidst, idet han minder eleverne om, at den tredje koordinat i linjeelementet er tangenthældningen. Vi husker, at linjeelementet er defineret ved koordinatsættet $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, hvor $\frac{dy}{dx}$ afsættes som hældningen af det lille linjestykke gennem punktet (x, y), (se afsnit 5.1). Læreren udpensler så forklaringen i tur 35. Sammenkædningen tilbage til differentialligningens symboludtryk er dog ikke så klar: *Og det svarer jo fuldstændig til, når vi betragter på højresiden der, ikke?* Her henviser *højresiden* til udtrykket $y(b - ay)$. Den tilsigtede viden om at finde funktionsværdien for, hvor væksten er størst, ville nok komme bedre frem, hvis fasediagrammet fra figur 7.4 var tegnet eksplicit i undervisningssituationen. Som nævnt i afsnit 7.2.2 kan vi tydeligt se ud fra toppunktet på parablen, hvor væksten er størst. Vi ser, at tur 30-35 dermed er en slags fælles validering foretaget af læreren og Lea. Hovedansvaret ligger stadig hos læreren, idet det er ham, der styrer samtalen og kæder det hele sammen til sidst i tur 35. Vi kan derfor kalde denne mikrokontrakt for individuel produktion.

7.4.3 Generelle overvejelser om situation 2

Som for den første situation har jeg lavet et skema, hvor man kan overskue situationen opdelt på mikrokontraktniveau. Status af viden er forkortet som ovenfor i Tabel 7.2.

Episode	Tur	Titel	Fordeling af ansvar	Status af viden	Mikrokontrakt
2a	1-17	Identifikation af differentialligningens type	Lærer, Søren og Mia	U	Individuel produktion
2b	18-24	Snak om væksten	Lærer, Niels, Albert og Noah	N	Forhandling

2c	25-35	Diskussion af hvilke funktionsværdier, der giver maksimalvæksten	Lærer, Noah og Lea	N	Individuel produktion

Tabel 7.3 – Situation 2 opdelt i episoder.

Ligesom i situation 1 ser vi igen, at klasserumsdiskursen er triadisk dialog og at validerings-situationerne i mikrokontrakterne undervejs hovedsageligt er meget små og kortvarige. Ansvaret ligger reelt på læreren igennem hele situationen, selvom læreren fortsat forsøger at inddrage eleverne så meget som muligt i formuleringssituationerne og i nogle valideringssituationer. I episode 2c, tur 30-35, lykkes det læreren i nogen grad at inddrage Lea i valideringen om, at væksten topper i $y = 1$. Her finder de i fællesskab frem til, at det er fordi linjeelementernes hældning er et udtryk for tangenthældningen af kurven.

I denne situation forsøger læreren at anvende den grafiske ramme til at opstille en hypotese og derefter validere den. Som vi har set går problemstillingen ud på at finde funktionsværdien, hvor væksten er størst for differentialligningen $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)$ i løsningsområdet $0 < y < 2$. I episode 2b, tur 23, foreslår en elev, at væksten er størst for $y = 1$. Det er denne hypotese, som valideres i episode 2c. Således ser vi, at både formuleringen og valideringen af hypotesen foregår i den grafiske ramme. Denne validering lykkes i nogen grad, men vi ser også i episode 2c, at det er vanskeligt at foretage en præcis validering ud fra det grafiske ramme. En af grundene til at det ikke går helt godt er, at det objektive miljø ikke er tilstrækkeligt. Som tidligere nævnt vurderer jeg, at det i denne sammenhæng ville være nødvendigt at inddrage fasediagrammet fra figur 7.1. En anden grund til forvirring kan som tidligere nævnt være, at læreren allerede på forhånd har indtegnet en løsningskurve oven i linjeelementerne i retningsdiagrammet. I episode 2c ser vi, at de diskuterer hypotesen ud fra både løsningskurven og linjeelementerne, og det er ikke helt klart, hvornår de taler om hvad. En mere overordnet årsag er, at når man arbejder i den grafiske ramme, finder man en kvalitativ løsning (se afsnit 5.2.2). I episode 2c, tur 25-28 ser vi, at det er svært at give helt præcise svar – særligt i forbindelse med validering. Situationen kan derfor tyde på, at der ikke er stærke valideringsmuligheder i den grafiske ramme. Vi kan også se på situationen på mesokontraktniveau. Alle tre episoder er formuleringssituaitoner og episode 2c er til dels også en valideringssituation. Mesokontrakten starter fint med at elever og lærer sammen finder ud af, at væksten svarer til en parabel med grene, der vender nedad. Derefter er det dog som om kontrakten divergerer. Det objektive miljø er ikke tilstrækkeligt for eleverne til at give feedback til lærerens spørgsmål, så det bliver til en forhandlingskontrakt langt hen af vejen. Det lykkes dog læreren at inddrage eleven Lea en smule til sidst, men det tyder ikke på, at resten af klassen er med.

8. Analyse af Situation 3

8.1 Kontekst

Denne situation foregår i 2. time af en dobbeltlektion. Lektionen har ”Opstilling af differentialligninger” som overskrift. Klassen har ikke beskæftiget sig med denne problemstilling i tidligere lektioner. I afsnit 5.3.5 beskrives typiske problemforestillinger i forbindelse med dette emne. Desuden er det et led i matematisk modellering, som vi blandt andet har diskuteret i afsnit 5.3.3. Dobbeltlektionen er opdelt på følgende måde: I den første time gennemgår læreren et eksempel på opstilling af differentialligning, hvor input fra eleverne fylder en del. Denne differentialligning er af typen $y' = ay + b$. Læreren bruger en del tid på, at overbevise eleverne om, at den opstillede differentialligning virkelig har den form og på at identificere konstanterne a og b. Elverne arbejder så individuelt på at løse differentialligningen, og langt de flest benytter MAPLE eller metoden separation af de variable til at løse den. Læreren kræver derfor, at løsningen skal findes ved hjælp af sætningen om den fuldstændige løsning af $y' = ay + b$. (Sætningen ses i afsnit 5.3.4.1) Det volder eleverne en del problemer at indse, at man kan bruge denne sætning til at løse differentialligningen. Den anden lektion starter med, at en elev præsenterer sin løsning. Derefter går læreren videre med den situation, som vi skal se nærmere på nu. Den er en gentagelse af proceduren fra første time, blot med udgangspunkt i et andet eksempel.

8.2 A priori analyse af situation 3

8.2.1 Den tilsigtede viden

Den tilsigtede viden er at lære eleverne nogle basale teknikker til, hvordan man opstiller en differentialligning som model for en situation ud fra nogle informationer formuleret i naturligt sprog. Den tilsigtede viden indeholder også at eleverne skal kunne finde den fuldstændige løsning til den opstillede differentialligning samt en partikulær løsning ud fra givne initialbetingelser. Metoden til at finde løsningen skal være ved at identificere differentialligningens type, identificere konstanter og så benytte en formel. Til sidst skal eleverne kunne studere den partikulære løsning og betragte den i forhold til modellen.

8.2.2 Det objektive miljø

Det objektive miljø udgøres i denne situation af et eksempel og en øvelse fra lærebogen (Clausen et al., 1993). Eksemplet ses nedenfor:

EKSEMPEL 88: Når et bildæk påfyldes luft, forbindes dækkets ventil med en beholder, der indeholder komprimeret luft. Under påfyldningen er den hastighed, hvormed dæktrykket vokser, proportional med trykforskellen mellem dæk og beholder.

Vi vil opstille en differentialligning for dæktrykket p (kPa) som funktion af tiden (sek), idet vi går ud fra, at trykket i beholderen konstant er p_∞ under påfyldningen. Da hastigheden, hvormed dæktrykket vokser, er lig med $\frac{dp}{dt}$, slutter vi af oplysningerne ovenfor, at

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot (p_\infty - p) \,,$$

hvor k er en positiv konstant.

Øvelse 126: Bestem dæktrykket som funktion af t, når $k = 0{,}03$, $p_\infty = 900$ kPa og $p(0) = 101$ kPa.

Figur 8.1 – Eksempel på opstilling af en differentialligning (Clausen et al., 1993, s.93-94)

I undervisningssituationen benyttes bogen ikke direkte. Læreren formulerer selv opgaven og skriver den på tavlen, men indholdet er præcist det samme. Kun nogle af eleverne har bogen med til lektionen, men det vides ikke om de benytter den i denne lektion. Selve eksemplet, hvor differentialligningen opstilles minder meget om øvelse 127 fra figur 5.24, (afsnit 5.3.5). Vi skal se, at når vi betragter eksempel 88 som en opgave har de begge flere af de samme forhindringer. Den første sætning er en beskrivelse af situationen. Problemstillingen i eksemplet er at finde en model for, hvordan trykket inde i bildækket udvikler sig med tiden. I den anden sætning får vi serveret modelleringsantagelserne i naturligt sprog: ”Under påfyldningen er den hastighed, hvormed dæktrykket vokser, proportional med trykforskellen mellem dæk og beholder”. Eksemplet demonstrerer så, hvordan man kommer fra denne modelleringsantagelse til differentialligningen, hvilket er elevernes opgave i den situation, vi nu skal kigge på. I eksemplet ser vi, at dæktrykket benævnes p og tiden t. Herefter antages, at trykket i beholderen er konstant under påfyldningen, og dette tryk benævnes p_∞. Eksemplet påstår så, $\frac{dp}{dt}$ er dæktrykkets hastighed, og differentialligningen opstilles derefter. Der er flere forhindringer i denne opgave. For det først, skal man oversætte de forskellige elementer i modelleringsantagelsen fra naturligt sprog til symboludtryk ligesom i opgaven fra afsnit 5.3.5. ”Hastigheden” skal oversættes til $\frac{dp}{dt}$ og trykforskellen til $p_\infty - p(t)$. Denne konversion er en forhindring for eleverne. Særligt giver hastigheden anledning til en afgørende forhindring, ligesom i opgaven fra afsnit 5.3.5. I elevernes fysikundervisning har de fået defineret hastighedsbegrebet som tilbagelagt strækning per tidsenhed eller som $\frac{ds}{dt}$, hvor s er stedfunktionen. I dette eksempel tænkes hastighed som en øjeblikkelig ændring af en funktion eller størrelse, altså en differentialkvotient. Ændringen kan være i forhold til tid, areal, afstand eller andre størrelser. I dette tilfælde tænkes hastighed som dæktrykkets øjeblikkelige ændring i forhold til tiden, altså $\frac{dp}{dt}$. Det er dog meget sandsynligt, at eleverne aldrig har været i en situation, hvor de skulle tænke på en sådan måde om hastigheden, så dette er en didaktisk forhindring. En anden forhindring er ganske som i afsnit 5.3.5, at de variable i situationen ikke er x og y, men t og p. Dette notationsskift er også en forhindring for eleverne, når de skal genkende, at de har opstillet en differentialligning og identificere strukturen af den type differentialligning, som opstilles. Når differentialligningen er opstillet, skal eleverne finde den generelle løsning og derefter en partikulær løsning ud fra informationen i øvelse 126. Først må eleverne genkende strukturen af differentialligningen, som er $y' = ay + b$ i dette tilfælde. Eleverne skal derefter identificere konstanterne a og b og kan derefter benytte løsningsformlen til at finde den fuldstændige løsning. Vi ser, at a svarer til $-k$ og b til kp_∞. Da den generelle løsning til en sådan differentialligning er $y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$, er den fuldstændige løsning $p(t) = p_\infty - c \cdot e^{-k \cdot t}$. Med de givne betingelser i øvelse 126, findes den partikulære løsning til $p(t) = 900 - 799 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$.

I situationen benyttes tavlen en del, så det skrevne på tavlen indgår også som en del af det objektive miljø. Dette ændres dog løbende gennem undervisningssituationen. Ligesom opgaven fra afsnit 5.3.5 lægger vi mærke til, at eksemplet og øvelsen leder os gennem nogle led i en modelleringsproces, som minder meget om trinene 1-4 i Balderas model af modelleringsprocessen fra afsnit 5.3.2.

8.2.3 Elevernes viden

For at kunne følge med og løse de respektive opgaver, skal eleverne blandt andet have styr på forholdet proportionalitet, og være i stand til at opstille ligningen $y = k \cdot x$ ved information om, at x og y er proportionale. Dette anses for at være gammel viden og veletableret hos eleverne. Som beskrevet skal eleverne kunne genkende strukturen af den opstillede differentialligning. De typer differentialligninger, som klassen særligt har studeret er de tre vækstmodeller fra afsnit 5.3.4, nemlig $y' = ay$, $y' = ay + b$ og $y' = y(b - ay)$. Givet en differentialligning på formen $y' = ay + b$, skal eleverne kunne anvende formlen for den fuldstændige løsning til at opskrive den fuldstændige løsning af den givne ligning samt kunne finde en partikulær løsning ud fra givne oplysninger. Løsningsformlen til denne type differentialligning er blevet institutionaliseret i klassen få lektioner før denne. Da det er sket kort tid forinden denne lektion, har brugen af formlen status som viden under udvikling i klassen. Forinden denne time har eleverne også afleveret en større rapport i grupper, hvor der indgik forskellige differentialligningsopgaver, herunder løsning af en sådan ligning. I dette tilfælde drejer det sig om differentialligningen $\frac{dp}{dt} = k \cdot (p_\infty - p(t))$. Som bemærket er arbejdet med eksemplet og øvelsen en del af en modelleringsproces, og i dette tilfælde har vi at gøre med en differentialligningsmodel. Selvom eleverne er stødt på modellering før, er det en klasse af modeller, som indeholder differentialkvotienter, og dette er nyt for eleverne. Til sidst skal eleverne kunne studere den funktion, som beskriver modellen, altså $p(t) = 900 - 799 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$. Et typisk studie af en sådan funktion kunne være at se på dens asymptotiske opførsel, da dette spiller en stor rolle i forbindelse med den kvalitative løsning. For at kunne det, skal elverne kunne arbejde med grænseværdier. Ifølge læreren har klassen kun arbejdet ganske lidt med grænseværdier og kun på et intuitivt niveau. Dette kan derfor være en stor forhindring i studiet af funktionen $p(t)$. Det fremgår desuden i den forrige lektion, at definitionen og arbejdet med asymptoter ikke er etableret viden i klassen, og det udgør endnu en forhindring i studiet af løsningen. Elverne skal også have kendskab til eksponentialfunktionen. Viden om denne funktion har status som gammel viden og er etableret i klassen.

8.3 A posteriori analyse af situation 3

Situationen strækker sig over 42 minutter. Man kan opdele situationen i fem faser:

Fase	Varighed (min:sek)	Aktivitet
A	9:00	Problemstilling introduceres i naturligt sprog. De forskellige elementer ”oversættes” til matematiske symboludtryk og sættes sammen til en differentialligning
B	2:00	Typen af differentialligningen identificeres
C	17:30	Eleverne arbejder individuelt eller to og to på at finde den fuldstændige løsning til den opstillede differentialligning og en partikulær løsning til samme ligning ud fra nogle givne initialbetingelser
D	6:30	En elev præsenterer sin løsning på tavlen
E	3:30	Den fundne løsning diskuteres på klassen

Jeg vil se på hele forløbet og dykke ned i episoder fra de fleste faser. I transskriptionen er læreren forkortet til ”L”. Alle elevernes navne er igen anonyme. Først vil jeg starte med at præsentere problemstillingen, som introduceres af læreren i starten af situationen.

1. L: Nu har vi en lidt anden situation i eksempel 88. (Skriver på tavlen og retter på en urolig elev). Her har vi et bildæk og det påfyldes luft. Så forbindes ventilen med en beholder, der indeholder komprimeret luft. Og så under påfyldningen, så er den hastighed hvormed dæktrykket vokser proportionalt med trykforskellen. Så… (L skriver på tavlen og retter eleverne, da de er ukoncentrerede). ”Hastigheden hvormed dæktrykket vokser, det er proportionalt med trykforskellen mellem dæk og beholder”. (L læser op fra tavlen). Shhh. (L retter atter eleverne). Dæktrykket, det kalder vi så p(t).

Tavlen ser således ud:

OPSTILLING AF DIFFERENTIALLIGNINGER

EKS. 88: Beholdertryk: p_∞ Dæktryk: $p(t)$

Hastighed hvormed dæktryk vokser er

proportionalt

med trykforskel mellem dæk og beholder

Figur 8.2 – Tavlens indhold i fase A. Eksemplet er fra Clausen et al. (1993, s.93-94)

Dette er en opgave, der er formuleret i naturligt sprog, som blev klargjort oven for i afsnit 8.2.2. For at opstille en differentialligning er den første udfordring derfor at oversætte indholdet til matematisk symbolsprog. Med andre ord skal der udføres en konversion fra registret naturligt sprog til symbolsprog. Dette er også det første som læreren tager fat på.

2. L: Og så står der: Hastigheden hvormed dæktrykket vokser. Hvad er det det samme som? Hvis vi skal oversætte det til noget matematik. En hastighed. Hvad er det? Lea
3. Lea: En stigning… Ja…
4. L: Ja, kan du opstille et udtryk for det? Et udtryk for hastigheden. Maren
5. Henriette: v
6. Maren: Distance
7. L: Øh, nej. Det skal være mere generelt. Det skal knytte an til nogle af de betegnelser vi har her.
8. Karsten: Nå, men altså vil du have det i bogstaver eller hvad?
9. L: Ja, hvordan kan vi betegne hastigheden?
10. Karsten: Nåh, er det ikke strækning og tid?
11. L: Nej, altså fordi vi har ikke noget med strækning, vi har ikke noget med tid. Vi har… Vi ved, at dæktrykket har vi kaldt p(t). Bo.
12. Bo: Er det ikke p(t) differentieret?
13. L: Jo. Det er p(t) differentieret, ikke?

I tur 2 stiller læreren spørgsmålet: Hvad er en hastighed? Kontrakten som læreren prøver at etablere er, at eleverne skal påtage sig ansvaret for at oversætte ”hastigheden af dæktrykkets påfyldning” fra naturligt sprog til matematisk symboludtryk. Som forudset i afsnit 8.2.2 er det en stor forhindring for eleverne at beskrive denne hastighed, som i dette tilfælde er $\frac{dp}{dt}$. De tænker på hastighed, som man kunne forvente, nemlig som strækning per tid. I tur 11 ser vi dog en overraskende udtalelse fra læreren. Han siger rigtigt nok, at de ikke ser på noget med strækning, men han siger også, at de ikke ser på noget med tid. Dette er dog ikke korrekt, da tiden netop er en afgørende faktor her. Hvorfor han siger dette, er svært at sige.

Episoden er et klassisk eksempel på en triadisk dialog. Læreren har hovedansvaret, selvom han prøver at skabe nogle situationer med individuel og kollektiv produktion. Reelt ser vi den typiske tendens fra triadisk dialog, at spørgsmålene er som små isolerede øer. Dette betyder, at episoden består af mange meget små mikrokontrakter. Det didaktiske spil er altså bestående af mange små spil, der ikke hænger så godt sammen. Dette betyder, at spillereglerne heller ikke er de samme fra mikrokontrakt til mikrokontrakt. Da spillereglerne er uklare for eleverne, bliver det nærmest som en gætteleg for eleverne. Det mislykkes altså for læreren at etablere flere af mikrokontrakterne. Dette ser vi i episoden, hvor de første mange ture handler om, at eleverne prøver på at finde ud af, hvad det er for et slags svar læreren gerne vil have, altså et symboludtryk.

Lena starter med at foreslå en stigning. Læreren afviser ikke Leas svar i tur 4 og undlader at validere det. Han siger i stedet, at hun skal opstille et udtryk. I tur 7 validerer læreren Marens forslag om, at distance er indblandet med sit *Øh, nej*. Det tyder så på, at læreren begynder at indse, at de spilleregler, som lærerens spørgsmål implicit medfører, ikke er etableret i mikro-kontrakterne. Læreren forsøger derfor i tur 7 at præcisere spillereglerne ved sit spørgsmål ved at sige, at det skal beskrives ud fra betegnelserne i opgaven. Vi ser i tur 8, at det stadig ikke er lykkes for læreren at etablere en mikrokontrakt, idet Karsten spørger, om læreren vil have svaret i bogstaver. Tilsyneladende forstod eleverne ikke helt, hvad læreren mente med, at hastigheden skal udtrykkes ved betegnelserne fra opgaven. Læreren bekræfter så i tur 9, at det er sådan et svar han søger, og først her begynder spillereglerne at være tydelige for eleverne. Fortsat ser vi dog, at der igen foreslås noget med strækning i tur 10. Dette viser, at det er meget svært for eleverne at tænke på hastighed som en term, der betegner øjeblikkelig forandring og ikke blot som en term, der er forbundet med strækning per tidsenhed. Muligvis er eleverne slet ikke klar over, at man kan bruge termen hastighed på en sådan måde. Arbejdet med hastighed på denne måde har derfor status som ny viden. Dermed ser vi, at den mikrokontrakt læreren prøver at etablere alligevel ikke har helt tydelige spilleregler. Læreren er derfor i tur 11 nødt til at pege på, at det netop er dæktrykket $p(t)$ de kigger på. Til sidst foreslår Bo i tur 12, at hastigheden er dæktrykket differentieret, altså $p'(t)$. Han formulerer det på en usikker og gættende måde, hvilket kan skyldes flere ting. Som vi har beskrevet er episodens spilleregler ikke tydelige og mikrokontrakten er derfor ikke etableret. Det kan derfor være, at eleven ikke kun er usikker på svaret, men oven i købet også er usikker på reglerne, som opstilles af læreren. Han uddyber ikke hvordan han er kommet frem til det, så det kan vi ikke vide. En væsentlig hypotese er, at han muligvis sidder med lærebogen og har plukket svarer ud fra eksemplet. Desuden kender eleverne formentlig til, at hastighed er defineret som differentialkvotienten af stedfunktionen. Idet læreren lige inden understreger, at hastigheden skal have noget at gøre med $p(t)$, er det også en mulighed, at læreren nærmest har puttet svaret i munden på Bo, og at vi har at gøre med en Topaze-effekt. Læreren validerer Bos svar med det samme uden yderligere kommentarer eller forklaringer. Det virker en smule uheldigt, da hastighedsbegrebet netop er en central og problematisk term i denne opgave. Eleverne er ikke vant til at bruge termen hastighed om andet end strækning per tid, og den nye brug bliver ikke eksplicit. Det følger heraf, at al validering foretages af læreren. En afklaring af brugen af hastighed som term for øjeblikkelig ændring kunne være med til at etablere væsentlige dele af mikrokontrakterne i episoden. Selvom læreren har hovedansvaret i episoden ser vi dog, at læreren er bevidst om, at han gerne vil inddrage eleverne så meget som muligt – særligt i formulerings-situationerne. Han prøver derfor hele tiden at fastholde en mikrokontrakt, hvor det er eleverne, der har ansvaret. Da spillereglerne aldrig blive klare for eleverne forsvinder rationaliteten i samtalen dog, og det munder ud i noget, der ligner en Topaze-effekt, hvor det er uklart om eleverne kan følge konklusionen. De mikrokontrakter, der dog opstår, har karakter af forhandlings-kontrakter, da eleverne prøver at gætte sig frem til, hvad det er læreren gerne vil høre.

Endvidere indgår en episode, hvor trykforskellen oversættes til udtrykket $p_\infty - p(t)$, altså beholderens tryk fratrukket bildækkets tryk. Denne størrelse er positiv og vil blive mindre og mindre som funktion af tiden. Derefter diskuteres hvad det vil sige, at der er proportionalitet mellem to størrelser og til sidst sættes det sammen. Det er her differentialligningen bliver opstillet.

14. L: Så, hvordan kan vi så modellere den her situation nu? Ud fra det vi har sagt. Nu skal vi kæde… Nu har vi hastigheden oversat til p', det var rigtigt, hvad Bo sagde, og havde Ninna den her med, at trykforskellen mellem dæk og beholder det var p_∞ minus $p(t)$. Og hvordan kan vi så modellere den her situation, konkluderende? Vi ved også hvad proportionalitet betyder. Tine
15. Tine: Altså øh, er det bare sådan lig med hinanden bare?
16. L: Hvad er lig med hinanden?
17. Tine: p differentieret eller hvad?…
18. L: Hvar? (Læreren kan ikke høre, da hun snakker lavt).
19. Tine: … lig med $p_\infty - p(t)$
20. L: Hvad for noget? (skriver op på tavlen samtidigt med).
21. Tine: p' lig med $p_\infty - p(t)$.
22. L: Jamen, hvis vi har en proportionalitet mellem x og y, så behøver de ikke være lig med hinanden vel?
23. Tine: Nej, gange a.
24. L: Ja. Eller vi kan kalde den k her, ikke? Som en konstant. Vi kan også godt kalde den a, det kan vi sagtens. Skal vi gøre det? … Ej, jeg vil hellere kalde den k, fordi a, det får en anden betydning om lidt.

Læreren starter episoden med en opsummering af, hvordan de forskellige dele i teksten er blevet oversat og siger, at elverne nu skal modellere situationen. Ifølge Balderas model af modellerings-processen svarer til det, at eleverne skal opstille en matematisk model for situationen udtrykt i symbolsprog (afsnit 5.3.2). Ud fra episoden er eleverne tilsyneladende med på, hvad det er for nogle spilleregler læreren implicit hentyder til med sit spørgsmål. Det lykkes derfor i højere grad for læreren i denne episode at etablere en mikrokontrakt. Tine forsøger sig og foreslår $p'(t) = p_\infty - p(t)$. Læreren validerer det i tur 22. Han siger ikke direkte, at det er forkert, men minder hende om, hvordan proportionalitet er. Tine retter derefter sig selv, og modellen er færdig, hvilket bekræftes af læreren, som skriver det endelige resultat på tavlen. Det virker ikke som om Tine benytter sig af lærebogen, da hun i første omgang svarer forkert. I tur 24 bemærker vi en pudsig detalje. Læreren insisterer på, at proportionalitetskonstanten skal benævnes k, selvom Tine foreslår a. Senere i lektionen ser vi, at lærerens hensigt er, at proportionalitetskonstanten ikke forveksles med konstanterne i løsningsformlen for differentialligningen af typen $y' = ay + b$. Hver gang klassen har set på denne differentialligning, har de brugt a og b på denne måde. Læreren ønsker derfor at benytte en anden konstant og vælger derfor k, som også bruges i eksemplet i bogen. Dette valg foretages derfor udelukkende af pædagogiske årsager. Lærerens validering er altså ikke foretaget ud fra matematisk rationalitet, men ud fra lærerens egne spilleregler. Dette kan virke utilfredsstillende for eleverne. Idet han netop insisterer på brugen af k, kan hans udtalelse i tur 24 påvirke eleverne til at tro, at proportionalitetskonstanter altid skal betegnes med k. Med sin validering af notation skaber han altså en ny mikrokontrakt, hvor han har al ansvaret alene og validerer ud fra sine egne spilleregler.

I denne situation er ansvaret både på læreren og eleven, og vi kan kalde det individuel produktion med undtagelse af lærerens sidste kommentar om notationen. Denne mikrokontrakt er derfor udviklet i forhold til de små mikrokontrakter vi så i den første episode. Selvom læreren stadig foretager valideringen, formuleres det mere som et spørgsmål, der lægger op til, at eleven også skal tænke med selv. Reelt er det dog stadig læreren, der har al ansvaret i forhold til valideringen. Det er stadig ny viden, da alt det der indgår behandles på en ny måde. Da det er ny viden, der behandles, er det ikke så overraskende, at det er individuel produktion frem for kollektiv produktion. Det blev forklaret i afsnit 3.2, at når en bestemt viden i klassen har status som ny holder læreren sig som regel til en eller ganske få elever.

Differentialligningen er nu opstillet, men det overraskende er, at eleverne i klassen ikke rigtig er klar over det. De kan ikke genkende $p'(t) = k(p_\infty - p(t))$ som en differentialligning. Læreren rammer ligningen ind og spørger, hvad det er. En elev forslår, at det er en ”black box”, og en anden elev spørger:

25. E: Hvad er det, du spørger om?

Klassen er helt stille i et stykke tid, indtil eleven Noah foreslår:

26. Noah: En differentialligning.
27. L: Det er en differentialligning! Okay.
28. En elev siger stille: Er det det?

Igen ser vi en episode, hvor mikrokontrakten ikke etableres og spillereglerne ikke klargøres. Både eleven, der foreslår, at det er en black box, og eleven, der eksplicit udtrykker, at han ikke er med på lærerens intension med spørgsmålet, viser dette. Læreren går straks videre uden at kommentere eller afklare dette, selvom eleverne virker meget overraskede over, at det er en differentialligning. En af grundene til deres forvirring kan være, at variablerne ikke er x og y, men p og t. I afsnit 8.2.2 blev det beskrevet, at et sådant notationsskift kan være en forhindring for eleverne. Eleverne har kun mødt differentialligninger udtrykt ved x og y, og det tyder på, at det udgør en didaktisk forhindring her. Læreren validerer Noahs forslag ved at gentage hans udsagn bekræftende. Der følger dog ingen forklaring herpå. Hermed ender fase A.

Situationen fortsætter med, at elever og lærer identificerer, hvilken type differentialligning, de har med at gøre. De når i fællesskab frem til typen $y' = ay + b$, selvom de ikke eksplicit identificerer, hvad konstanterne a og b svarer til. Tavlen i klassen ser nu således ud:

OPSTILLING AF DIFFERENTIALLIGNINGER

EKS. 88: Beholdertryk: p_∞ Dæktryk: $p(t)$

Hastighed hvormed dæktryk vokser er $p'(t)$

proportionalt

med trykforskel mellem dæk og beholder $p_\infty - p(t)$

x og y proportionale

$y = ax$

$$\boxed{p'(t) = k(p_\infty - p(t))}$$
$$= kp_\infty - kp(t)$$

$$y' = b + ay$$

Figur 8.3 – Tavlens indhold ved slutningen af fase B.

Herefter devoluerer læreren en ny fase, hvor eleverne skal finde den generelle løsning til differentialligningen og derefter finde en partikulær løsning ud fra initialbetingelserne, som fremgår i øvelse 126 (se figur 8.1, afsnit 8.2.2). Eleverne arbejder individuelt eller to og to på deres plads, mens læreren går rundt og hjælper. Undervejs skriver læreren følgende formel på tavlen:

$$y' = ay + b$$

$$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$$

Figur 8.4 – Formler, som læreren skriver på tavlen i løbet af fase C

Efter knap 20 minutter beder læreren om, at en frivillig elev vil præsentere sin løsning på tavlen. Eleven Lea melder sig. Læreren lægger ud med følgende:

29. L: Ja, men prøv lige at skrive op, hvad løsningen bliver først. p(t) bliver lig med… i det generelle tilfælde. Hvad skriver du op? Hvordan løser du den der differentialligning med de betegnelser der?

Lea starter altså med at skrive den generelle løsning op. Det er tydeligt, at hun benytter formlen fra figur 8.4, men hun nævner det ikke. Hun nævner heller ikke, hvad konstanterne a og b svarer til. Dette er kun blevet diskuteret indirekte tidligere på klassen. Hun skriver løsningen på tavlen uden at sige noget samtidig. Da differentialligningen er $p'(t) = k(p_\infty - p(t))$, må $a = -k$ og $b = kp_\infty$. Lea starter med at skrive følgende på tavlen:

$$p(t) = -\frac{k \cdot p_\infty}{-k} + c \cdot e^{kt}.$$

En elev fra klassen opdager, at der mangler et minustegn i eksponenten. I første omgang henviser både lærer og Lena til løsningsformlen fra figur 8.4, hvor der ikke er nogen negativ eksponent. Men så siger læreren:

30. L: Så det var rigtigt. Med mindre… Nej… Jo… Jo, der må være minus, fordi der skal… Hvad er a? a er minus k. Det har du også fået her, ikke? (Peger på nævneren). Det er jo dit a, ikke?

Her ser vi igen, at det er læreren, der validerer situationen. Lea retter hurtigt fejlen og fortsætter. Hun forklarer, at k'erne går ud med hinanden og når frem til det færdige resultat. Hun kommer dog til at lave en masse små fejl, imens hun skriver op, men ved lærerens og nogle elevers hjælp når hun frem til, at den fuldstændige løsning er

$$p(t) = p_\infty + c \cdot e^{-kt}.$$

Lea går nu videre med øvelse 126, som ses i figur 8.1. Læreren giver hende hele tiden ledetråde til hvad hun skal sige. Fx siger han

31. L: Så ved du nogle ting i øvelse 126, ikke?

Læreren læser værdierne fra øvelsen op, og Lea skriver dem op på tavlen. Lea fortsætter selv.

32. Lea: Okay… Og så sætter jeg det ind i min ligning herovre.
33. L: Ja
34. Lea: Og så siger jeg… Grunden til at jeg skriver p(t), så satte vi tiden til at være nul.
35. L: Ja.
36. Lea: Øh… Så kommer der til at stå 101 (skriver på tavlen)
37. L: Ja
38. Lea: Og nu har vi sat t til at være nul, så den…
39. L: Ja
40. Lea: Yes. Og så er den eneste vi mangler at vide, det er c. Og det er også den eneste ubekendte, så vi kan ”solve” for den.
41. L: Ja

42. Lea: Og det har vi så gjort, og så har vi fundet frem til, at c er… øh… minus 799.

I tur 40 benytter Lea ordet ”solve”. Det fremgår af sammenhængen, at hun her mener, at hun har benyttet MAPLE til at løse ligningen og finde c. Vi læger dog mærke til, at den ligning, der skal løses er en 1. grads ligning, nemlig $101 = 900 + c$, idet $e^0 = 1$. Læreren pointerer derfor også umiddelbart efter tur 42, at man nemt kan regne værdien c ud uden at ”solve” i MAPLE. Til sidst slutter Lea af med at skrive forskriften på den partikulære løsning på tavlen. På dette tidspunkt ser tavlen således ud:

$$p(t) = -\frac{k \cdot p_\infty}{-k} + c \cdot e^{-kt} = p_\infty + c \cdot e^{-kt}$$

$$p_\infty = 900\ kPa$$

$$p(0) = 101\ kPa$$

$$k = 0{,}03$$

$$101\ kPa = 900\ kPa + c \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0}$$

$$c = -799$$

$$p(t) = 900\ kPa - 799 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$$

Figur 8.5 – Tavlen efter Lenas fremlæggelse i fase D.

Mikrokontrakten i denne episode, hvor Lea er ved tavlen, er et eksempel på individuel produktion. Hovedansvaret for formulering er på eleven Lea, men læreren har også ansvar. Elevens rolle er at fremlægge hendes arbejde fra fase C. Lærerens rolle er todelt. På den ene side skal han validere Leas arbejde, og på den anden side har han en pædagogisk dagsorden. Det er lærerens ansvar, at resten af klassen får noget ud af Lenas fremlæggelse. Læreren har derfor en dagsorden for, hvilke ting Lea skal have med i sin præsentation og til dels også, hvordan og i hvilken rækkefølge hun fremlægger det på. Dette er et klassisk problem for lærerens rolle ved elevfremlæggelser. I episoden kommer læreren derfor med små input, der leder Lea videre sådan at fremlæggelsen bliver efter lærerens dagsorden. Det er dog mest hende selv, der styrer det. Ind i mellem indblandes andre elever fra klassen også. Et eksempel på lærerens input ses i tur 31. Den viden, der behandles er viden i udvikling, da det handler om at løse en differentialligning. Eleverne har lidt erfaring med dette i de forrige lektioner og i forbindelse med den større rapport, som beskrevet i afsnit 8.2.3. I episoden ser vi, at læreren validerer Leas udsagn og det hun skriver op på tavlen undervejs. I nogle tilfælde starter valideringen med, at en elev fra klassen gør opmærksom på en fejl som i tilfældet, hvor Lea har indsat k i stedet for $-k$. Ellers er tur 32-42 et godt eksempel på, at Lena forklarer hvad hun gør, og at læreren validerer med sine bekræftende ”ja” ind i mellem. Gennemgående ser vi, at det hele tiden er læreren, der har ansvaret for valideringen, fx i tur 30. Det er et eksempel på en situation, hvor Lea har lavet en fejl.

Efter fremlæggelsen går Lea ned til sin plads og den sidste episode i denne situation er, at læreren lægger op til at se nærmere på den fundne løsning. Løsningen er en model for, hvordan trykket vil udvikle sig inden i dækket. Som vi har diskuteret i afsnit 5.3.3 er det meget vigtigt at studere den fundne løsning. Det blev beskrevet, at det er lige så væsentligt som selve processen i at finde løsningen. En af grundende til at det er vigtigt er, at det er en forudsætning for at kunne validere den opstillede model.

43. L: Lad os lige prøve at se på hvad det er for en funktion vi har at gøre med her. Hvad sker der, når t bliver større og større? Altså når tiden ruller så at sige. Hvad sker der så? Hvad sker der med det her udtryk, når t bliver større og større? Ja, hvad sker der med eksponenten? Hvad går det imod, når t går mod uendelig? Albert
44. Albert: Det bliver vel større og større. Minusset deroppe er ligegyldigt.
45. L: Neeej, er det det? Er det det?
46. Albert: Ikke med det tonefald der. Så er det nok ikke.
47. L: Neej
(Klassen smågriner).
48. L: Prøv at sætte nogle store værdier ind. Hvis nu jeg sætter tusind… en million… hundred millioner eller sådan noget.
(En elev afbryder med nogle ikke relevante spørgsmål, som er udeladt her).
49. Så hvad nærmer det sig? Hele eksponenten her. Randi
50. Randi: Den nærmer sig vel de 900. Nej, ikke den der, men det…
51. L: Nej kun lige eksponenten.
52. Randi: Nåh.
53. L: Kun lige eksponenten. Niels.
54. Niels: minus uendelig.
55. L: Ja. Det nærmer sig minus uendelig, ikke? Det er jo rigtigt nok at de 0,03 de spiller ikke nogen stor rolle, men minusset – det hænger sig på, ikke? Det bliver ved med at være der. Så det er altså minus uendelig. Hvad går så hele det her mod, når eksponenten går mod minus uendelig? Hvad sker der med e? Hvad går det imod?
56. Lars: Mod nul
57. L: Det går mod nul. Det er godt Lars. Og det vil så sige, at hele det her det går mod…? Søren.
58. Søren: Nul
59. L: Det går også mod nul. Og så har Randi ret, at så går hele dynen mod 900. Og det er jo derfor det hed p_∞. Det er en eller anden stabilitet tilstand vi har så at sige ude i det fjerne, ikke? Der sker gradvist en slags trykudligning, ikke? Og øh det vil så sige, at den trykudligning, den ligger netop på de der 900, ikke? Som er det tryk, der er i en vis forstand.

I denne episode studeres den partikulære løsning ved at se på grænseværdien, når tiden t går mod uendelig. I episoden ses først på eksponenten for t gående mod uendelig, derefter eksponentialfunktionen og til sidst hele leddet. På tavlen blev der tegnet ringe om det undervejs.

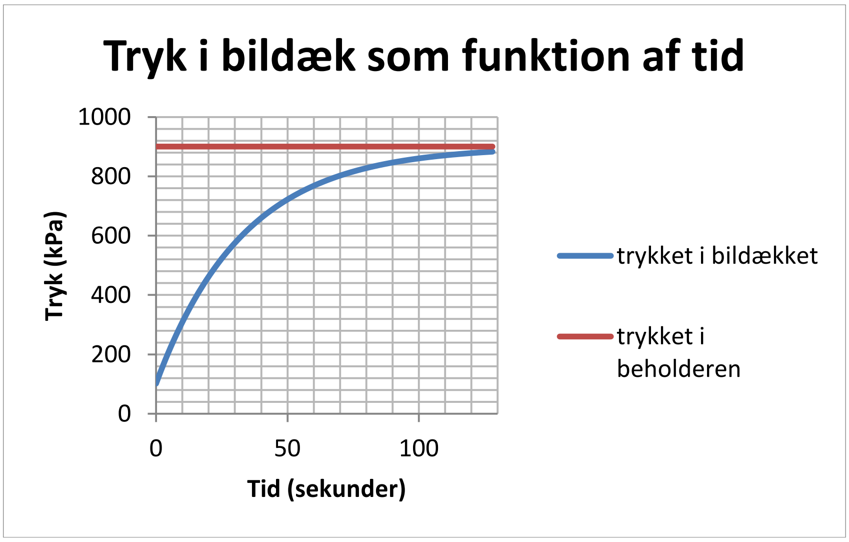
$$p(t) = 900\ kPa - 799 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$$

Figur 8.6 – Tavlens indhold i fase E

Først diskuteres eksponenten. Eleven Albert siger i tur 44, at eksponenten vil blive større og større for t gående mod uendelig og udtrykker eksplicit, at minustegnet ikke har indflydelse her. Læreren kommer derefter i tur 45 med en tvivlende kommentar. Selvom han blot spørger om det nu også er rigtigt, så har han på en måde allerede valideret Alberts svar, idet hans respons er negativ. Albert konkluderer også ud fra lærerens tonefald, at det var et forkert svar, selvom han ikke ved hvorfor. For at overbevise eleverne om at minustegnet rent faktisk har en betydning, foreslår han, at de sætter nogle store værdier ind på t's plads og ser, hvad de får. Dette bliver dog aldrig gennemført, fordi en anden elev stiller opklarende spørgsmål. Læreren svarer blot hurtigt og overfladisk på spørgsmålene og vender med det samme tilbage til spørgsmålet om, hvad eksponenten går mod. En anden elev svarer, at det hele går mod 900. Dette er dog også rigtigt, men læreren er kun interesseret i eksponenten i første omgang. Endelig svarer Niels, at eksponenten går mod minus uendelig. Læreren validerer det med det samme i tur 55 med sit ”ja”. Her forsøger læreren desuden at give en forklaring på, hvordan det hænger sådan sammen. De næste to trin går noget mere glat for lærerens dagsorden. I tur 56 formulerer en elev korrekt, at e^x vil gå mod nul for eksponenten gående mod minus uendelig, og en anden elev konkluderer i tur 58, at hele leddet derfor også vil går mod nul. Læreren samler nu op på diskussionen og konkluderer i 59, at hele udtrykket går mod 900, når t går mod uendelig. I forhold til den fysiske situation er det trykket i beholderen, der går mod de $900\ kPa$, når t går mod uendelig. Han sætter det sammen med værdien p_∞, som han kalder en stabilitetskonstant. p_∞ står altså for trykket til tiden uendelig, men læreren formulerer ikke disse ting eksplicit i forhold til den fysiske situation omkring bildækket. Denne kommentar i tur 59 er den eneste kommentar, der minder om en validering eller fortolkning af modellen. Læreren gør det dog ikke eksplicit, at dette skulle være en del af validering af modellen. Faktisk taler han næsten ikke om, at det er en model i løbet af lektionen og slet ikke her til sidst.

Vi ser, at læreren her er meget fokuseret på sin egen dagsorden og besluttet på, at foretage analysen ad tre skridt svarende til de cirkler, der ses på figur 8.6. Dette giver også grundlag for en strategi, som eleverne kan bruge i fremtiden ved undersøgelse af andre funktioner. Som nævnt i afsnit 8.2.3 har eleverne dog ikke de grundlæggende forudsætninger med hensyn til at arbejde med grænseværdier, da de kun har arbejdet ganske lidt med grænseværdier og kun på et meget intuitivt niveau. Dette påvirker i høj grad episoden. Vi ser også, at episoden er endnu et eksempel på triadisk dialog, hvor det reelt er læreren, der har ansvaret. Det er læreren, der stiller spørgsmålene, eleverne svarer og læreren validerer kort og stiller yderligere spørgsmål. Han forsøger dog igen at inddrage eleverne formelt i formuleringssituationerne. Vi kan kalde episoden for kollektiv produktion, selvom elevernes ansvar ikke er så stort. Ligesom i den første episode, som vi så på i fase A, ser vi, at der ikke er klare spilleregler i episoden, da eleverne misforstår lærerens spørgsmål i flere af turene. Derfor mislykkes det i flere tilfælde for læreren at etablere en mikrokontrakt for hele episoden og det bliver i stedet til brudstykker med meget små mikrokontrakter. Derfor kommer der også mange små validerings-situationer. I fraværet af spilleregler bliver lærerens rolle til "dommer", hvor han alene validerer gyldigheden af elevernes udsagn. Til lærerens forsvar kan vi sige, at idet eleverne ikke har de nødvendige forudsætninger, har læreren heller ikke noget reelt valg andet end at benytte triadisk dialog på denne måde.

Selvom funktionens opførsel bliver studeret i denne episode, kan man sagtens udvide dette studium. Man kan fx se på andre grænsetilfælde eller blot det, at løsningen er eksponentiel. En helt oplagt del af studiet af løsningen ville være at afbilde løsningskurven og se den som en grafisk repræsentation. En sådan kan i høj grad hjælpe eleverne med at se sammenhængen mellem trykfunktionen og den fysiske situation. Jeg har afbildet løsningskurven i Excel for at fremhæve dette.



Figur 8.7 – Afbilding af løsningskurven, altså trykket i bildækket som funktion af tid, samt grafen for det konstante tryk i beholderen. Lavet i Excel.

På grafen svarer den røde vandrette linje til p_∞, altså beholderens konstante tryk på $900\ kPa$. Det er den, læreren kalder for en stabilitetskonstant. Den blå graf er løsningskurven for den partikulære løsning, som findes på klassen, altså $p(t) = 900 - 799 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$. Forskellen mellem de to grafer svarer til trykforskellen, altså $p_\infty - p(t)$. Ved at se grafen får man en intuitiv opfattelse af, hvordan trykket i bildækket udvikler sig og hvordan trykforskellen udlignes. Desuden får man et visuelt billede af funktionen $p(t)$'s asymptotiske opførsel.

8.4 Generelle overvejelser om situation 3

Den generelle tendens igennem hele situationen er, at det altid er læreren, der har ansvaret i valideringen både i forbindelse med klassisk tavleundervisning og i tilfældet, hvor en elev er til tavlen. I langt de fleste tilfælde, forklarer han også selv, hvorfor en elevs udsagn er rigtigt eller forkert. I løbet af lektionen ser vi, at læreren er meget bevidst om at inddrage eleverne mest muligt i formuleringssituationerne. Han anstrenger sig for at få eleverne til at svare. De mikro-kontrakter læreren prøver at etablere i klassen er altså, at give eleverne så meget ansvar som muligt, mens han stadig selv vejleder, styrer og validerer. Det meste af klasserumsdiskursen er præget af triadisk dialog, men kun i nogle tilfælde ser vi, at eleverne kommer med faglige bidrag. Et eksempel på det ses i fase B, tur 14-24, hvor differentialligningen opstilles. I flere episoder ser vi dog, at spillereglerne mangler, og at det derfor ikke lykkes læreren at etablere nogle mikro-kontrakter. Den triadiske dialog bliver derfor præget af mange bitte små mikrokontrakter med tilhørende små valideringssituationer, hvor der i flere tilfælde valideres ud fra lærerens egne spilleregler. Det ses blandt andet i fase A tur 1-13. Der kan være mange forklaringer på dette. I tur 1-13 er en af grundene de forhindringer jeg nævnte omkring definitionen af hastighed. I fase E spiller grænseværdier en vigtig rolle og også her har mange af eleverne ikke de faglige færdigheder til at bidrage fagligt og følge konklusionen. En tredje grund er, at meget af den viden der arbejdes med er ny eller under udvikling. På mesokontraktniveau foregår en udvikling i løbet af lektionen. I starten er kontrakten svag og eleverne er usikre på, hvad opgaven går ud på og hvad spillereglerne er. Undervejs bliver flere og flere elever inddraget i undervisningen og kontrakten træder mere i baggrunden. Lærerens rolle er dog meget fremtrædende i hele processen, og i flere tilfælde virker kontrakten stadig svag. Det skyldes blandt andet elevernes manglende forudsætning for opgaven. De fleste faser er formuleringssituationer. Dog er fase C udelukkende en handlingssituation. Set i lyset af modellering med differentialligninger, kan hele forløbet ses som en gennemgang eller et eksempel på dele af en modelleringsproces. Det vil vi se nærmere på nu.

Processen som eleverne går igennem i løbet af de 42 minutter minder meget om trinene 3 – 6, som Balderas (2001) nævner. De starter med at få udleveret en formulering af situationen i naturligt sprog. Dernæst oversætter de det til matematisk symbolsprog og løser problemet inden for den matematiske model. Den eneste del af analyse og fortolkning, der foretages her, er essentielt det fra fase E, som vi lige har set på. Reelt set er det kun lærerens kommentar i tur 59, der direkte har noget med dette at gøre. Vi ser altså, at læreren ikke lægger hovedvægten på modelleringsaspektet i denne undervisningstime. Hans formål er at lære dem metoden at opstille en differentialligning som en model for et fysisk system ud fra en modelleringsantagelse i naturligt sprog. Dernæst vil han lære dem at kunne genkende en struktur eller type hos en differential-ligning, og så benytter han timen til at træne deres brug af formler til at løse differentialligningen. I det store hele afspejler opgaven ideologien 'applicationism', som er beskrevet i afsnit 5.3.2. De fysiske dele i opgaven er skilt helt fra de matematiske dele, og de indgår ikke i samspil. Faktisk virker det som om, at den fysiske situation er uden betydning for forløbet. Den omtales stort set ikke. Selvom det er en del af en modelleringsproces at opstille differentialligninger, fylder modelleringsaspektet utrolig lidt, og der fokuseres udelukkende på den matematiske del. De vender ikke engang tilbage til den fysiske situation til sidst. Vi så i afsnit 5.3.3, at hvis modelleringsaspektet ikke er med i matematikundervisningen af differentialligninger, bliver fokus som regel på selve det at løse differentialligningen frem for at studere selve løsningen. Dette er da også tilfældet her. Det nævnes også i afsnit 5.3.3, at når løsningen ikke studeres, vil det være meget vanskeligt at validere løsningen som model for den oprindelige situation. Vi ser netop også i denne situation, at validiteten af funktionen $p(t)$ som model for udviklingen af bildækkets tryk slet ikke diskuteres. Funktionen $p(t)$ studeres også ganske overfladisk med hensyn til dens asymptotiske opførsel for t gående mod ∞, som nævnt ovenfor. For at foretage en validering af modellen ville det også være nødvendigt at vende tilbage til den fysiske situation, men denne tillægges som tidligere nævnt ingen betydning i undervisningssituationen.

9. Analyse af situation 4: Laboratorieøvelse i fysik

9.1 Kontekst

De observerede forløb i matematik og fysik var tilrettelagt sådan af de to faglærere, at de skulle støtte hinanden med emnerne radioaktivitet og differentialligninger. Således skulle forløbet lede frem til studieretningsopgaven, som er obligatorisk for gymnasieelever i 2. g. Ikke alle, men mange elever i klassen valgte at lave et projekt med netop fagene matematik og fysik. Dette eksperiment handler om svækkelsesloven i forbindelse med absorption af γ-stråling. Teorien bag dette forsøg er præsenteret i afsnit 5.3.6. Eksperimentet udgør et led i dette undervisningsforløb, og mange elever valgte at benytte det som udgangspunkt i deres projekt. Øvelsen var dog obligatorisk for alle elever i klassen.

I afsnit 3.6 beskrev vi, at eksperimenter i undervisningen ofte benyttes til at validere relationer og principper. Vi vil her særlig se i hvilken grad eksperimentet indgår som en del af en validering af svækkelsesloven. I afsnit 5.3.7.1 så vi, at læreplanen nævner, at når fysik og matematik indgår i en studieretning skal man særligt se på matematiske modeller i fysik, herunder på pålideligheden af modellerne. Det er netop ved hjælp af elevforsøg, at man kan undersøge en models pålidelighed. I afsnit 5.3.7.1 så vi videre på den epistemiske status af eksperimenter i undervisningen. Vi pegede på, at målet er, at forsøgene bidrager til at styrke elevernes opfattelse af fysiske begreber samt deres opfattelse af fysikkens grundlæggende natur. Vi pegede også på, at det i praksis ikke altid er tilfældet. Jeg ønsker også at belyse denne problemstilling her.

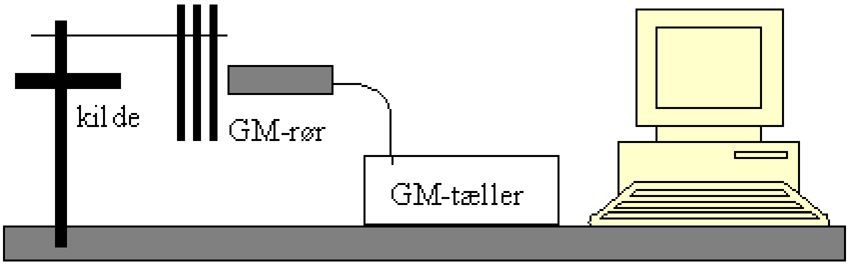
9.2 A priori analyse af laboratorieøvelsen

9.2.1 Den tilsigtede viden

I øvelsesvejledningen fra læreren står formålet med øvelsen ikke eksplicit beskrevet. (Øvelsesvejledningen kan findes på bilag 1). Den indeholder en kort beskrivelse af teorien om svækkelsesloven, en udførlig beskrivelse af udførelsen, en skitse af opstillingen og et lille afsnit om, hvad rapporten skal indeholde. Det er her vi skal finde formålet med øvelsen. Der står, at rapporten skal indeholde grafer af intensiteten I som funktion af blypladernes tykkelse x i både et normalt koordinatsystem og i et semilogaritmisk koordinatsystem. Dernæst står der, at halverings-tykkelsen skal bestemmes og sammenlignes med tabelværdien. Et helt oplagt formål med øvelsen ville være at lade eksperimentet være en validering af svækkelsesloven og i højere eller mindre grad foretage en analyse og diskussion af svækkelsesloven som en model, ligesom der nævnes i læreplanen (se afsnit 5.3.7.1). Da læreren ikke skriver, hvad formålet er, er det derfor uklart, hvad han egentlig har tænkt med formålet af forsøget. Det eneste klare formål er altså at bestemme halveringskonstanten. Selvom det ikke står eksplicit i øvelsesvejledningen, vil jeg dog også gå ud fra, at valideringen af modellen også hører med til den tilsigtede viden. De to formål med forsøget, nemlig at bestemme halveringskonstanten og at validere svækkelsesloven, er af meget forskellig karakter. Som udgangspunkt virker modelleringsdelen ikke ret vigtig, da læreren ikke omtaler det i sin øvelsesvejledning, så det er muligt, at eleverne aldrig opdager denne del af formålet. Endeligt er der også det formål at gøre eleverne fortrolige med at udføre fysiske forsøg med et givent udstyr. Jeg vil her fokusere på validerings- og modelleringsdelen og se i hvor høj grad det er inddraget i forsøget.

9.2.2 Det objektive miljø

Det objektive miljø udgøres af mange ting i denne lektion. Først og fremmest er der alt det praktiske udstyr: Den radioaktive kilde, Geiger-Müller røret og tælleren, blypladerne og computer-programmet. Dernæst har eleverne en øvelsesvejledning, lavet af læreren, som indeholder en meget kort præsentation af svækkelsesloven, en skitse af opstillingen og en udførlig beskrivelse af udførslen og brugen af computerprogrammet. Øvelsesvejledningen ses på bilag 1. Skitsen af opstillingen ser således ud:



Figur 9.1 – Skitse af opstillingen til forsøget. (Fra øvelsesvejledningen bilag 1)

9.2.3 Elevernes viden

Eleverne er blevet undervist i teorien bag svækkelsesloven og absorption forinden dette eksperiment. En vigtig forudsætning for eleverne i forbindelse med forsøget er, at radioaktive henfald er en stokastisk proces. Omstændighederne er nævnt og forklaret i afsnit 5.3.6. Særligt er det vigtigt, at eleverne kender til usikkerheden af tælletallet, altså kvadratroden af tælletallet, da det er en vigtig faktor for at kunne forstå, hvad der sker i forsøget. At radioaktivt henfald er en stokastisk proces er ikke gammel og etableret viden hos eleverne endnu, men har status som viden i udvikling. Det virker dog ikke til, at eleverne nogen sinde er blevet præsenteret for usikkerheden af et tælletal og det nævnes ikke i øvelsesvejledningen. Det udgør derfor en forhindring for eleverne.

9.3 A posteriori analyse af laboratorieøvelsen

Der var i alt fire grupper, der lavede forsøget på en gang i laboratoriet. Læreren var til stede og gik fra gruppe til gruppe for at hjælpe. I transskriptionerne nedenfor betegnes læreren med ”L”. Alle elevnavne er anonyme. Jeg observerede en enkelt gruppe, der bestod af tre piger og en dreng. Der var stort set kun to af gruppens medlemmer, der var aktive, nemlig Rosa og Bo. Det var også tydeligt, at Rosa styrede gruppen fuldstændigt. Forløbet varede samlet set 51 minutter. Jeg har lavet en lille oversigt for lektionens forløb med hensyn til gruppens aktiviteter:

Fase	Varighed (min:sek)	Aktivitet
A	9:00	Afklare i praksis hvordan forsøget udføres
B	9:30	Der foretages målinger
C	7:30	Forsøget bryder sammen, og noget er galt med data
D	11:00	Forsøget skal laves forfra og der er stadig problemer med udstyret og udførslen
E	14:00	Fuldføre målinger og diskussion om forventede data

Tabel 9.1 – Oversigt over gruppens aktivitet

Vi ser fra oversigten, at en meget stor del drejer sig om selve udførslen. Det handler i de fleste tilfælde om små tekniske detaljer med apparaturet og det tilhørende computerprogram. Hele fase A, C og store dele af fase D handler udelukkende om udførelsen. Det svarer til ca. 22 min, altså knap halvdelen af den samlede tid. Selve målingen foregår i fase B og i dele af D og E. Det varer i ca. 21 min. De sidste 8 minutter bruges til diskussion af data. Det foregår primært i fase E men der er også lidt småsnak om det i de fleste andre faser. Der bruges ingen tid på databehandling. Det tyder ikke på, at eleverne i gruppen har sat sig godt ind i eksperimentet eller de tekniske detaljer inden lektionen går i gang. De spørger nemlig læreren i starten af lektionen, hvor de kan finde øvelsesvejledningen. Det forklarer en smule af elevernes tidsspild omkring udførelsen. Desuden afspejler tidsforbruget af de forskellige aktiviteter diskussionen fra afsnit 3.6, hvor vi netop nævnte, at fokus i elevforsøg i mange tilfælde ender på de tekniske detaljer omkring udførelsen.

Jeg vil i analysen fokusere på de passager, hvor data diskuteres med særlig henblik på validering. Til at beskrive udviklingen af gruppens arbejde vil jeg igen benytte didaktiske kontrakter som analyseværktøj. Det er tydeligt, at de to aktive elever i gruppen er enige om, at jo flere blyplader de sætter mellem kilden og Geiger Müller tælleren, jo mindre tælletal forventes såfremt, de måler over det samme tidsinterval. (Ordet tælletal defineres i afsnit 5.3.6). Dette er også helt korrekt i forhold til teorien. Det kan også forstås intuitivt, da tykkere blyplader må absorbere mere af strålingen. Vi ser hurtigt i dialogerne, at dette bliver afgørende for diskussionen. Første gang diskussionen dukker op er i fase B, hvor gruppen er midt en måleserie.

Rosa kommenterer nu en måling:

1. Rosa: Hvorfor gik den op der?
2. Bo: Hvar?
3. Rosa: Nej, du må ikke røre den der.
4. Bo: Hun har sikkert skubbet til den.
5. Rosa: Skal vi tage en ny? Vi tager en ny.
6. Bo: Vi tager en ny.
7. Rosa: Kan vi bare det?

8. Bo: Øh… Vi tager bare en 5’er mere.

Eleverne virker meget overraskede over at en af tælletallene ikke er faldende, som forventet. De er så overbevist om, at de kun bør måle det forventede, så de gætter på, at de må have lavet en fejl, altså skubbet til tælleren. Det er så vigtigt for eleverne at få det forventede, at de beslutter sig for at gentage målingen. I tur 7 overvejer Rosa, om det er tilladt bare at gøre sådan, men det diskuteres ikke videre. Rosas kommentar tyder på, at hun er seriøs omkring eksperimentet, og at hun har en vis kritisk sans. Hendes intention er på dette tidspunkt at gøre det så godt fagligt som overhovedet muligt. Gruppen ender her med at gentage målingen hele tre gange, og de når ikke et tilfredsstillende resultat, før tælleren holder op med at virke. Dette er en adidaktisk situation, idet eleverne arbejder uden lærerens indgriben. De to elever har derfor al ansvaret. Deres viden om teorien bag forsøget er under udvikling.

I løbet af fase C og D er der småsnak engang imellem om data, men de mest centrale dialoger er dog fra fase E. Her starter leverne med at tage diskussionen op med læreren. Det ser vi i samtalen nedenfor:

9. Rosa: Se nu blev den højere L.
10. Bo: Argh…
11. Pia: Ej
12. Rosa: Men L, prøv at se nu blev den 127, før var 120.
13. L: Det kunne der være god grund til lige at tjekke igen, ikke? Og vi har ikke puttet noget på? Den hedder stadig…
14. Rosa: Den hedder stadig 6.
15. L: Prøv at gå tilbage der… Men det er jo ikke umuligt.
16. Pia: Er det ikke det?
17. L: Det er jo ikke umuligt. Grunden til at jeg siger, at det ikke er umuligt, det er, at det er et statistisk forsøg. Og det er ikke sådan at man kan sige med sikkerhed – ligesom med terninger eller et eller andet – man kan ikke sige med sikkerhed, at det passer. Men det er selvfølgeligt ret tidligt, at det… altså… Det skulle helst ned på … omkring 30-40 før det begynder at være sådan… Så I kan godt lige måle den en gang til.

Eleverne virker meget bestyrtede over ikke at få det forventede og tager derfor fat i læreren, da de tror, at noget må være helt galt. Læreren udtrykker også en vis skepsis for deres måling. Selvom han ikke vil afvise, at målingen er god nok, vurderer han dog, at dette ikke burde opstå før tælletallet er på ca. 40. Hvordan han er nået frem til denne vurdering vides ikke. Som beskrevet i afsnittet 5.3.6 er usikkerheden på tælletallet 127, $\sqrt{127} \approx 11$. Denne usikkerhedsmargen gælder dog kun målinger med samme antal blyplader, og det er derfor også et lidt overraskende resultat. En af ting vi særligt bemærker her er i tur 15-17, hvor læreren pointerer, at det ikke er umuligt at få et tælletal, der er højere. Såfremt der ikke er noget i vejen med måleudstyret er det klart, at det ikke er umuligt, for gruppen har lige observeret det. Når læreren siger, at det ikke er umuligt, mener han nok, at det ikke er teoretisk umuligt. Pia lyder meget overrasket. Læreren siger, at det er et ”statistisk forsøg”. Med det mener han formegentligt, at fysikken her bygger på sandsynligheder, hvilket underbygges af hans metafor med terningkast, selvom det ikke umiddelbart kan overføres direkte til radioaktivt henfald. Eleverne spørger dog ikke mere ind til det. Det ville være helt oplagt at tage en diskussion om tælletallenes usikkerhed op her, da eleverne tydeligvis ikke kender til den samt vi også ser, at den udgør en klar forhindring for at eleverne kan forstå forsøget. Denne forklaring udebliver dog. Endvidere er det også en oplagt mulighed for at diskutere den matematiske model med eleverne, men det udnyttes heller ikke. Ansvaret i denne episode ligger reelt hos læreren, selvom eleverne også er inddraget.

Læreren forlader gruppen, som fortsætter med at foretage målingerne. Følgende diskussion dukker op:

Gruppen har lige foretaget en måling:

18. Rosa: Nej, vi er nødt til at lave en ny her.
19. Pia: Hvorfor?
20. Rosa: Fordi den går over de andre. Vi laver en ny Benjamin.
21. Bo: Er den på 96?
22. Rosa: Ja, det er den eneste der stiger. Det gider jeg ikke.
23. Bo: Det går ikke at vores sidste måling er lort.
(De venter igen. Målingerne foregår over 60 sekunder).
24. Rosa: Nej, hvorfor bliver den højere nu?
25. Bo: Stop, stop, stop, stop, stop, stop.
26. Rosa: Den med 10 plader vil bare være højere.

Dette er igen en adidaktisk situation, og eleverne har alene ansvaret. Den viden, der arbejdes med er stadig under udvikling. I tur 22 lægger vi mærke til, at Rosa siger: ”Det gider jeg ikke”. Denne kommentar tyder på, at hendes holdning til forsøget har ændret sig siden begyndelsen af forsøget. I fase A så vi, at hun var seriøs omkring eksperimentet, men på dette tidspunkt er hun og gruppen blevet ugidelige, og det ser ud til, at hun har mistet kritisk sans. Der er altså sket en dårlig udvikling. Desuden ser vi her, at eleverne betragter en måling, der ikke følger det forventede som direkte ubrugelig. I episoden ser eleverne teorien og modellen som ”det rigtige”, og for at opfylde den didaktiske kontrakt er det deres opgave at få data fra målingerne til at passe ind i modellen. Det burde ellers være omvendt. Vi konkluderer derfor, at eleverne har tilegnet sig en didaktisk kontrakt på en sådan måde, at de helt har glemt den faglige refleksion, som det kommenteres i afsnit 3.2. Ud fra denne episode kan vi også se, hvad eleverne opfatter som ”gode” målinger i forbindelse med fysikeksperimenter. I afsnit 5.3.7.1 beskrev vi netop nogle spændinger og problemer i forhold til lærer og elevers syn på elevforsøg. I tur 23 siger Bo direkte, at den måling, der ikke passede ind i det forventede er *lort*. Kun de målinger, der passer rimelig nøjagtigt ind i modellen er altså ”gode”, hvorimod resten af målingerne nærmest er ubrugelige og smides væk. Denne opfattelse underbygger diskussionen fra afsnit 5.3.7.1, at tendensen blandt eleverne er, at formålet med elevforsøg er at følge instruktionerne og få de ”rigtige” resultater – altså dem der passer godt ind i modellen. Vi ser også, at hele udførelsen af eksperimentet bliver en slags ritual, som vi også pointerede i afsnit 5.3.7.1. Disse ting er med til at vise os, hvordan opfattelsen er af fysik som undervisningsfag og til at indikere, hvilken epistemisk status elevforsøg ofte har.

Til slut i fase E oplever eleverne atter, at en måling bliver højere end den forrige. De ender med at gentage målingen tre gange, før de får et ønsket tælletal. I følgende lille episode ser vi, at læreren faktisk anfægter elevernes holdning.

27. L: Tænk nu hvis I var i et laboratorium, hvor man skulle opdage noget nyt. Så vil man sige, så er det jo uheldigt, at man smider alle de målinger væk, der virkelig giver et overraskende resultat.
28. Rosa: Jamen dem gider vi ikke. Vi vil gerne have noget, der sådan følger sig til planen.
29. L griner: Jeg kan godt forstå. Det er nemmere at kommentere, hvis det holder sig til teorien.
30. Rosa: Ja, præcis. Så skal man sidde og forklare alt…
31. L: Men sådan er det jo ikke i virkeligheden.

I tur 28 ser vi, at Rosas ugidelighed i forhold til forsøget forsætter. Hun siger: *… noget, der følger sig til planen*. Med det tror jeg hun mener, at hun ser den matematiske model, som en slags plan for, hvordan målingerne bør være. Vi ser, at læreren atter prøver at provokere eleverne til at indse, at det ikke handler om at få virkeligheden til at passe med modellen. Eleverne er nærmest ikke til at rokke i deres overbevisning om, at et vellykket eksperiment er et, hvor målingerne stemmer så godt over ens med modellen som overhovedet muligt. Dette viser, at der ikke gives noget plads til at lade eksperimentet validere modellen. Det tyder heller ikke på, at eleven tænker på teorien som en matematisk model. På den anden side, kan man også forsvare eleverne, idet vi må gå ud fra, at svækkelsesloven er veldokumenteret. Samtidigt skal vi huske på, at det slet ikke var eksplicit i øvelsesvejledningen, at modellen skulle valideres. Eleverne ved, at de skal finde halveringstykkelsen, og de er overbeviste om, at den skal findes ud fra nogle målinger, som passer godt ind i modellen.

9.4 Generelle overvejelser om laboratorieøvelsen

På mesokontraktniveau kan vi se, at der er en del handlingssituationer, især i starten af lektionen. Som tidligere nævnt vil vi se på hvorvidt forsøget indgår som en del af validering**.** Det ville være idealet, hvis mesokontrakten havde udviklet sig fra overvejende at bestå af handlingssituationer, til at være mere valideringsorienteret. Desværre ser vi, at det ikke rigtigt er tilfældet. Den didaktiske kontrakt udvikler sig i en negativ retning i løbet af lektionen, hvilket fremgår af de valgte episoder. Det tyder på at lederen af gruppen, Rosa, har en seriøs tilgang til eksperimentet i starten, men i løbet af lektionen ser vi, at hun bliver mere og mere ugidelig og stopper med de faglige refleksioner. Gruppen prøver så at opfylde en didaktisk kontrakt, der siger, at de skal foretage nogle målinger, der passer så godt som muligt til modellen. Læreren prøver løbende at udfordre eleverne til at reflektere over situationen og dermed ændre den didaktiske kontrakt, men det lykkes ikke rigtigt. Der kan være mange årsager til dette, men de er kun spekulative. En af årsagerne kan være rent praktisk. Gruppen bruger meget lang tid på at finde ud af udførelsen, og deres udstyr driller flere gange. Halvvejs henne i forsøget finder de ud af, at noget er galt, og de skal derfor udføre hele forsøget forfra. Disse hændelser kan have en medvirkende effekt til at gøre eleverne ugidelige, og de sætter et ekstra tidspres på eleverne. Det påvirker også forsøget i høj grad, at eleverne ikke kender til usikkerheden af tælletallet, som netop kunne hjælpe eleverne med at forklare noget af, hvorfor tælletallet svinger. For at undgå så stor relativ usikkerhed, kunne forsøget designes sådan, at eleverne fik meget højere tælletal ved enten at forkorte afstanden mellem kilde og tæller eller ved at måle over længere tid. Det kunne dog også tyde på, at der er nogle mere grundlæggende forhindring, der gør, at det ikke lykkes for læreren at ændre den didaktiske kontrakt. Her tænker jeg på forsøgets epistemiske status, som jeg har været inde på tidligere. Som forklaret i afsnit 5.3.7.1 er lærerens intension som regel, at elevforsøg skal styrke elevernes opfattelse af fysiske begreber og fysikkens natur. I denne situation er det om emnet radioaktivitet. I situationen ser vi klart den omtalte spænding, som opstår ved, at eleverne i høj grad opfatter forsøget som en "kogebogsøvelse" (afsnit 5.3.7.1). En anden ting jeg vil pege på er at eleverne kun gennemgår udførelsesfasen i lektionen, som beskrives i afsnit 3.6. I afsnit 5.3.7.1 påpeges det, at alle faser er meget vigtige – også i forbindelse til validering. I lektionen fremgår det, at eleverne er meget dårligt forberedt på forsøget, idet de ikke engang har læst øvelsesvejledningen inden timen begynder. Det er desuden flere uger siden, at eleverne gennemgik teorien på klassen. Dertil kommer at formålet med forsøget ikke er helt klart. Disse faktorer er medvirkende til, at eleverne ikke kan se forbindelsen mellem formålet og designet af eksperimentet, som netop også kan være et problem for mange elever (afsnit 5.3.7.1). De andre to faser er også meget underrepræsenteret. Den eneste form for fortolkning af data, som indgår, er de små diskussioner som er præsenteret ovenfor, hvor der diskuteres om det teoretisk er muligt at få et højere tælletal end det forrige, når man har sat en ekstra blyplade på. At det kun er udførelsesfasen, der arbejdes med påvirker også fokus i forsøget. Til lærerens forsvar vil jeg gøre opmærksom på, at lektionen jo netop er begrænset til 50 minutter, så det sætter nogle begrænsninger for, hvor meget de kan nå.

En del af databehandlingen af et sådant fysikeksperiment skal indeholde en diskussion af data. Hvis der er grund til at nogle af målingerne er meget afvigende, er det standardprocedure at lade dem indgå i rapporten, men at kommentere, hvorfor disse ikke er taget i betragtning. Det er interessant at bemærke, at hverken Rosa eller Bo præsenterer eller kommenterer de målinger, som blev kasseret undervejs, i deres rapport. De præsenterer kun de tal, som får slutresultatet til at give det resultat, der ligger tættest op af modellen. Dette viser, at eksperimentet kun indgår i meget ringe grad som validering. Vi må dog huske, at øvelsesvejledningen kun nævner eksplicit, at det er halveringskonstanten, der skal bestemmes. Der står altså ikke noget om, at de skal kommentere modellen, og derfor er det måske heller ikke så mærkeligt, at eleverne ikke tænker på at have det med i deres rapport.

10. Diskussion

10.1 Validering i forbindelse med differentialligninger

Situation 1 og 2 illustrerer, hvordan man kan arbejde i den grafiske ramme og herunder foretage validering. Situationerne fungerer som en introduktion til den logistiske ligning. En af de problemstillinger jeg gerne vil belyse er, hvordan man kan benytte den grafiske ramme til at validere hypoteser i den algebraiske ramme (spørgsmål 1 fra problemformuleringen). I situation 1 og 2 finder flere valideringssituationer sted, men der valideres, som vi har set, kun hypoteser foretaget i den grafiske ramme. I de to situationer så vi, at validering inden for den grafiske ramme kan være meget vanskelig og svær at gøre præcis. Grafisk validering opstår heller ikke i situation 3. Jeg har kigget alle matematiktimer igennem for at se, om grafisk validering opstår i andre situationer i undervisningsforløbet. I en af de følgende lektioner opstår en situation, hvor klassen repeterer forskellige resultater om den logistiske ligning. I den forbindelse ser de på fasediagrammet, og diskussionen foregår i den grafiske ramme på en lignende måde med situation 1 og 2. I denne situation bruges den grafiske ramme både til formulering af hypotese og validering. Ud over denne ene situation inddrages den grafiske ramme slet ikke i resten af forløbet på klassen. Ikke engang i forbindelse med modellering afbildes løsningskurver. Så reelt er der kun tre situationer i den del af forløbet, som jeg har observeret, der foregår i den grafiske ramme. Dette er måske lidt overraskende. Vi ser altså, at den grafiske ramme bliver brugt som en måde, hvorpå emnet introduceres, men den har kun en marginal betydning. I resten af den første lektion, hvor situation 1 og 2 opstår, følger arbejde i den algebraiske ramme, og her bliver fokus i stort set resten af forløbet. Jeg har derfor ikke har mulighed for at besvare spørgsmål 1 fra problemstilling ud fra mine observationer. I afsnit 5.2.2.1 beskrives dog, at det er teoretisk muligt at validere en hypotese fra den algebraiske ramme i den grafiske ramme. Vi så blandt andet, at fasediagrammet for autonome differentialligninger kan bruges til at validere hypoteser om væksten eller stabile og ustabile ligevægtstilstande. Vi så også, at løsningskurver og linjeelementer kan bruges til at validere resultater om asymptotisk opførsel og løsningsområder. Vi så endda, at validering i den grafiske ramme endda kan være mere overskueligt og give et mere intuitivt billede, da det grafiske miljø er mere visuelt og derfor mere tilgængeligt for nogle elever. Hvis vi vender tilbage til observationerne kan man selvfølgelig sige, at fraværet af at den grafiske ramme bruges til validering af hypoteser i undervisningen også er et resultat. En af grundene til at det ikke sker i undervisningen kan være, at det netop kan være svært at formulere og validere præcist ud fra den grafiske ramme. Ofte anses den eksakte løsning fra den algebraiske ramme for at være ”den rigtige løsning” frem for en kvalitativ løsning. Jeg vil dog påstå, at de er lige ”rigtige”, men de belyser løsningen eller den fuldstændige løsning forskelligt. At den grafiske ramme ikke inddrages så meget kan også skylles eksamensopgaverne. Vi så tidligere at den grafiske ramme næsten ikke eksisterede i eksamensopgaverne, så derfor prioriterer læreren måske ikke studiet af den kvalitative løsning så højt.

Da validering inden for den grafiske ramme af hypoteser fra den algebraiske ramme er fraværende i situationerne fra undervisningsforløbene, har jeg kigget på elevrapporterne, og der viste det sig, at der faktisk er to eksempler på, at den grafiske ramme benyttes til at validere bestemte udsagn om en differentialligning. Begge gange er i en opgave om den logistiske ligning, hvor eleverne skal forklare, i hvilket punkt væksten er maksimal og hvordan vi kan kende de vandrette asymptoter. Grupperne benyttede fasediagrammet til at argumentere ud fra, så dette er faktisk en validering i den grafiske ramme. Dette bekræfter den teoretiske forklaring af spørgsmål 1 og vi ser, at det er muligt at inddrage den grafiske ramme til at valide hypoteser fra den algebraiske ramme. I dette tilfælde er det fasediagrammet, der benyttes. Overordnet kan vi sige, at det bestemt er muligt at benytte den grafiske ramme til at validere hypoteser fra den algebraiske ramme. Det er dog vanskeligt i mange tilfælde og det kommer også i høj grad an på problemstillingen og hypotesen. Særligt har vi set, at fasediagrammet for autonome differentialligninger kan være nyttige til validering.

For at svare på spørgsmål 2 og 3 fra problemformuleringen vil jeg bruge både situation 1, 2 og 3. I analysen af disse situationer så vi, at mønsteret i klasserumsdiskursen overvejende var triadisk dialog. Læreren prøvede ihærdigt i alle situationer at inddrage eleverne så meget som muligt, særligt i formuleringssituationerne. Som det typisk er i forbindelse med triadisk dialog, er det læreren, der har styringen og det overordnede ansvar, og netop det observerede jeg også i de tre situationer. I situation 1 så vi blandt andet, at læreren var meget fokuseret på sin egen dagsorden, selvom eleverne bidrog med noget fagligt, som læreren ikke havde tænkt sig at diskutere på klassen. Set fra TDS er det ønskværdigt at få involveret eleverne så meget som muligt, men spørgsmålet er så om eleverne faktisk bidrager med faglig viden, og om de har ansvar i validerings-situationerne. Vi så eksempler i situationerne på, at det delvist lykkes læreren at få etableret en mikrokontrakter, hvor eleverne bidrager med noget fagligt. Der var dog også mange eksempler på, at det reelt kun var læreren, der bidrog med det faglige. I valideringssituationerne var det næsten udelukkende læreren, der havde ansvaret. Vi så, at læreren gentagende gange blot validerede med et j*a* eller et *nej*, og i mange tilfælde gik læreren videre med det samme uden at sørge for, at der blev givet en forklaring på valideringen. Vi så dog også at læreren i nogle situationer vælger at forklare det selv, og i andre situationer spørger han eleverne om en forklaring. Dog så vi, at hvis der kom en forklaring var det læreren, der havde ansvaret for at forklare valideringen. Kun i et enkelt tilfælde så vi, at en elev delvist blev indblandet i valideringen af en hypotese. Vi kan altså besvare spørgsmål 2 med, at det stort set altid er læreren, der har al ansvaret i validerings-situationerne. På en måde er det overraskende, da eleverne jo netop er involveret meget i diskussionerne på klassen. Vi kan dog finde årsagen til det ved at kigge på spørgsmål 3.

I situation 1 så vi, at hovedproblemet var, at definitionen af termen ”løsningsområde” blev defineret operationelt set. I situation 2 så vi, at det objektive miljø ikke var tilstrækkeligt, idet det ville være en stor hjælp at inddrage fasediagrammet. Videre i situation 3 så vi, at definitionen af ”hastighed” udgjorde en stor forhindring for eleverne samt at de ikke havde de faglige forudsætninger for at arbejde med grænseværdier. Vi så, at disse uklare definitioner, manglende faglige forudsætninger og utilstrækkeligt objektivt miljø påvirker situationerne sådan, at spillereglerne i de mikrokontrakter, som læreren forsøger at etablere er fraværende. Derfor så vi, at den overordnede mesokontrakt for alle situationerne har været en forhandlingskontrakt. Vi så i alle situationerne, at læreren mere eller mindre validerer ud fra sine egne spilleregler og at valideringen derfor mistede rationalitet. Som svar på spørgsmål 3 kan vi hermed konkludere, at valideringerne i klasserumsinteraktionerne hovedsageligt foretages ud fra spilleregler fra kontrakterne frem for ud fra det objektive miljø. For at undgå denne tendens kan vi ud fra disse observationer derfor bekræfte vigtigheden af, at sørge for at det objektive miljø er tilstrækkeligt samt at eleverne har de nødvendige faglige forudsætninger. Endvidere har vi fået bekræftet, hvor vigtigt det er for rationaliteten, at definitioner på termer er klare for eleverne. Ellers ender det typisk med, at definitionen er til forhandling, som vi blandt andet så i situation 1.

Fordi der netop var disse forhindringer i situationerne blev læreren netop nødt til at tage ansvaret, og særligt i valideringssituationerne. I alle tre situationer observerede vi, at validerings-situationerne var meget små og kortvarige. Dette hænger sammen med, at mønsteret i klasserumsdiskursen er triadisk dialog. Lærerens spørgsmål var i flere tilfælde som isolerede øer, og derfor opstod mange små kortvarige og ikke-sammenhængende valideringssituationer. Dette var den hyppigste form for valideringssituation. I andre sammenhænge som fx i situation 2 så vi, at klassen først opstillede en hypotese, som så blev valideret bagefter. Vi kan nu svare på spørgsmål 4a. Oftest så vi, at valideringssituationernes rolle bestod at læreren evaluerede de helt små mikrokontrakter i den triadiske dialog. Valideringens karakter er i denne sammenhæng ofte ikke særlig rationel, og læreren benytter her valideringen som et middel til at styre dialogen og sin dagsorden. Vi så også, at valideringens rolle i enkelte tilfælde var en fælles aktivitet for hele klassen, hvor formålet var at validere en hypotese foretaget på klassen. Når valideringssituationer har denne rolle, er der bedre mulighed for at valideringen bliver rationel, hvilket vi til dels observerede i situation 2.

10.2 Matematisk modellering

Både situation 3 og 4 belyser validering af matematiske modeller, men fra to vinkler. Situation 3 omhandler matematisk modellering i en matematiktime, hvor fokus er at opstille den pågældende differentialligning og løse den. I situation 4 udføres en laboratorieøvelse. Denne har potentiale til at validere den matematiske model, som ligger bag ved den fysiske teori om fysikken i forsøget.

Situation 3 indeholder dele af en modelleringsproces af en fysisk situation. Dog ser vi, at modelleringsaspektet ikke fylder ret meget. Vi ser, at opgaven og arbejdet med opgaven i løbet af situationen afspejler ideologien 'applicationism', som beskrives i afsnit 5.3.2. De arbejder i situationen hovedsageligt med to ting inden for modelleringsprocessen. Den første er at opstille en matematisk model ud fra en formulering af situationen i naturligt sprog, det vil sige at opstille differentialligningen. Den anden ting er at løse problemet inden for den matematiske model med nogle betingelser, altså finde den partikulære løsning til differentialligningen. Vi ser, at mange dele af modelleringsaspektet mangler, idet løsningen stort set ikke studeres, den fysiske situation tages ikke i betragtning og modellens rækkevidde og antagelser diskuteres eller nævnes ikke. Som eneste analyse studeres løsningens asymptotiske opførsel ganske kort, men eleverne har ikke forudsætningerne til at gøre det. Helt konkret ser vi, at den matematiske model slet ikke valideres. Som svar på spørgsmål 4b fra problemformuleringen kan vi derfor sige, at validering ikke spiller nogen rolle i forbindelse med matematisk modellering i dette tilfælde. Om dette er en generel tendens i stx kan jeg ikke udtale mig om, da jeg kun har set på denne ene situation, men det er slående at validering af modellen slet ikke inddrages i situationen. En af grundende kan være, at læreren ikke tænker på lektionen som modellering men mere på, at det er en slags anvendelse. Situationen bekræfter nemlig tendensen fra ideologien ’applicationism’, hvor matematik og fysik bliver helt skilt ad og ikke indgår i samspil. Endvidere bliver modelleringen nærmest præsenteret som en anvendelse eller et eksempel, som er designet på forhånd, så der ikke overlades nogen refleksioner til eleverne. Det kan muligvis tyde på, at ideologien ’applicationism’ er herskende inden for gymnasiet i de naturvidenskabelige fag, herunder særligt matematik som værende adskilt fra de andre. Det er også muligt, at læreren blot fokuserer på at undervise eleverne i de færdigheder og teknikker, som forventes til den skriftlige eksamen. Som tidligere nævnt indgår modellering kun i meget ringe grad i opgaverne og kun i stil med den opgave som studeres i situation 3.

Da situation 4 kun er et enkelt eksempel på et elevforsøg, har vi ikke evidens til at kunne konkludere, hvilken epistemisk status laboratorieøvelser generelt har i stx. Situationen bekræfter dog flere uhensigtsmæssige tendenser. I situationen er formålet med øvelsen ikke klart og eleverne er ikke ordentligt forberedt. Dette medvirker til en af de typiske problemstillinger ved elevforsøg, nemlig at eleverne har svært ved at se forbindelsen mellem formål og design. I afsnit 5.3.7.1 så vi, at det netop er et gennemgående problem ved elevforsøg. I situationen er eleverne kun involveret i udførelsesfasen, hvilket også kan være en medvirkende faktor til den manglende forbindelse. Den anden store tendens er, at eleverne ser det eksperimentelle arbejde som et ritual eller en ”kogebogsøvelse”. Eleverne fokuseres i stor grad på tekniske detaljer om apparaturet og deres formål med eksperimentet er at indsamle målinger, der passer så godt ind i modellen som muligt. Dette afslører den reelle epistemiske status af eksperimentelt arbejde for eleverne i denne situation. For eleverne er det eksperimentelle arbejde i høj grad et ritual, hvor det gælder om at opfylde en didaktisk kontrakt, hvor man skal opsamle målinger, der passer så godt til teorien som muligt. Vi ser, at lærerens syn på den epistemiske status af det eksperimentelle arbejdes er mere nuanceret. Læreren slår gentagende gange fast over for eleverne, at det er målingerne, der repræsenterer virkeligheden, selv om han også håber, at deres målinger vil stemme godt over ens med de matematiske modeller, som repræsenterer de fysiske love. Dette viser, at lærerens syn grundlæggende er, at målingerne skal understøtte og validere de fysiske love. Vi så altså i den observerede situation, at lærer og elevers syn på det eksperimentelle arbejde er i konflikt.

Vi kan nu svare på spørgsmål 5 fra problemformuleringen. Da jeg kun har fulgt en enkelt gruppe fra en enkel skole, er det naturligvis svært at sige, om denne konflikt om synet på eksperimentelt arbejde er udbredt i stx. Vi så som forventet, at validering indgår som en del af lærerens syn på den epistemiske status af det eksperimentelle arbejde. Det fører derfor til en spekulativ hypotese om, at det er en udbredt holdning blandt fysiklærere i stx. Elevernes syn på det eksperimentelle arbejde bekræfter også i høj grad de mange typiske tendenser, der er i konflikt med lærerens syn, og vi så, at validering af de bagvedliggende matematiske modeller stort set ikke indgik i det eksperimentelle arbejde. Dette giver os derfor en idé om, at det kan være et problem i stx, at fysiske forsøg ikke indgår som en del i validering. Hvor udbredt problemet egentlig er, kan jeg dog ikke sige noget om ud fra disse observationer. Ud fra situationen kan vi dog sige lidt om, hvad man kan være opmærksom på, for at undgå denne tendens og for at udvide elevers syn på det eksperimentelle arbejde. For at eksperimentelt arbejde kan indgå som en del af validering er det vigtigt at fokusere mere på de andre tre faser end blot udførelsesfasen. Særligt er det vigtigt at eleverne inddrages i planlægnings- og designfasen for at eleverne bedre kan se sammenhængen mellem designet af eksperimentet og formålet med forsøget. Det er også vigtigt, at formålet med forsøget er helt klart defineret, og at eleverne er sat godt ind i det på forhånd. I den konkrete situation er det også en stor forhindring for eleverne, at de ikke kende usikkerheden på tælletallet.

10.3 Sammenligning af valideringssituationer i matematik og fysik

Til sidst vil jeg som beskrevet i problemformuleringen forsøge at sammenligne karakteren af valideringssituationer i matematik og fysik. Som eksempel på valideringssituation i fysik har jeg dog kun materialet fra situation 4 at gå ud fra. I situation 4 omhandler diskussion hypotesen om, at man ikke kan få højere tælletal, når strålingen passerer flere blyplader. Læreren validerer, at det er meget usandsynligt, men ikke umuligt på grund af måleudstyrets usikkerhed, variation i kildens aktivitet samt sandsynlighedsparametre i teorien. I dette tilfælde ser vi, at eleverne her ikke er overbevist om, at læreren har ret. I stedet fastholder de deres hypotese og ser alt andet som direkte forkert. Læreren nærmest diskuterer med eleverne og prøver at overbevise dem gentagende gange om, at hypotesen ikke er direkte forkert, men blot usandsynlig. Elevernes modstand opstår på grund af en intuitiv forestilling om den fysiske verden. De kan se blypladerne og den radioaktive kilde, altså sansede forskellige fysiske genstande og fænomener. I dette tilfælde kan de dog ikke se strålingen, og det kan komplicere situationen yderligere. Karakteren af denne validering er særlig for fysik, og det ville være svært at forestille sig, at tilsvarende valideringssituation skulle opstå i matematik. Her virker det mere som om, at eleverne altid anerkender lærerens ord som værende den endegyldige validering. Eleverne har heller ikke samme mulighed for at se og røre ved de matematiske objekter, som de har i fysik. Derfor har de måske heller ikke samme intuitive fornemmelse for, hvad der er rigtigt og forkert i matematikken. Dette er blot et eksempel på, hvordan valideringssituationer i de to fag kan have forskellig karakter. Der kan uden tvivl nævnes mange flere forskelle og ligheder, men jeg vil nøjes med den ene her, da jeg ikke har medtaget flere fysiksituationer.

11. Konklusion

I denne opgave har jeg studeret valideringssituationer i undervisningsforløb om differential-ligninger på flere forskellige måder. I flere af de situationer jeg studerede så vi, at det næsten altid kun er læreren, der har ansvaret i valideringssituationerne i klasserumsinteraktionerne. Vi så også, at valideringen i mange tilfælde ikke blev foretaget ud fra matematikkens logiske rationalitet. Valideringssituationerne blev derfor i de fleste tilfælde reduceret til et mål, som læreren brugte til at styre en triadisk dialog, som er det dominerende mønster i klasserumsdiskursen. Vi ser i observationerne, at læreren stræber ihærdigt efter at inddrage eleverne så meget som muligt i diskussionerne, både i forbindelse med formulering af hypoteser og validering, men vi ser, at det er meget vanskeligt, at få eleverne inddraget, så de reelt bidrager med noget fagligt. I de fleste situationer var der udformet et objektivt miljø med et vist adidaktisk potentiale. Det tyder på, at dette adidaktiske potentiale ikke udnyttes i situationerne. Det samme problem opstod også ved brugen af den grafiske ramme. Selvom vi så, at det var vanskeligt at formulere og validere hypoteser præcist i den grafiske ramme, så vi dog også, at det er muligt. Observationerne peger også på, at den grafiske ramme fortsat ikke er så godt integreret i undervisningen som andet end en måde at introducere delemner på. Det er dog også vigtigt at huske på, at netop emnet differentialligninger er et af de mest avancerede og krævende emner i gymnasiesammenhænge, og som vi har set, er der belæg for, at elever har problemer med stoffet helt oppe på universitets-niveau (Artigue, 1994; Barquero et al., 2008; Rasmussen, 2001). Derfor er det heller ingen overraskelse, at eleverne i observationerne har svært ved stoffet. Det gør også, at det bliver mere vanskeligt, at inddrage eleverne i undervisningssituationerne, så de har medansvar. Som nævnt har lærerne faktisk udformet relevante objektive miljøer med et adidaktisk potentiale i situationerne. Generelt så jeg også i observationerne, at lærerne er erfarne, initiativrige og gør en bemærkelsesværdig indsats for at designe god undervisning samtidig med, at de virkelig forsøger at inddrage eleverne så meget som muligt. Specialets resultater viser derfor også noget om, hvor svært det egentlig er at gennemføre en undervisning, hvor eleverne inddrages på en måde, så de bliver medansvarlige.

I arbejdet med matematisk modellering i matematikundervisningen så vi, at valideringen af de matematiske modeller var helt fraværende. Generelt blev hele arbejdet med matematisk model-lering behandlet, som om det ikke havde noget med modellering at gøre. Dette tyder på, at ideologien 'applicationism' muligvis er dominerende i gymnasiet. Dette giver udslag i, at matematisk modellering i matematikundervisningen bliver til en form for simpel anvendelse af noget matematisk teori, og at den fysiske situation for modelleringen træder i baggrunden. I fysikundervisningen så vi at validering af de matematiske modeller ikke indgik som en del af elevernes syn på den epistemiske status for det eksperimentelle arbejde. Det gjorde den dog for læreren. Elevernes fokus var derimod på, at manipulere forsøget for at opnå målinger, som passede så godt som muligt ind i den matematiske model. Igen kan vi bemærke, at samspillet mellem matematik og fysik i dette tilfælde omhandler differentialligningsmodeller, og igen ved vi, at dette er et af de mest avancerede samspil mellem de to fag i gymnasiet. Dette kan derfor forklare noget af resultaterne, fx at validering af modellerne ikke har så stor fokus, og at ideologien 'applicationism' er fremtrædende.

Da resultaterne bygger på meget få observationer er det svært at konkludere, om de generelt gælder i stx. Om ikke andet danner resultaterne dog et indtryk af, hvilke problemstillinger der er aktuelle i gymnasiet, og de rejser nogle nye spørgsmål. Vi har netop set på situationer i den grafiske ramme, hvor der var et adidaktisk potentiale, men hvor det objektive miljø reelt ikke blev inddraget i de konkrete valideringssituationer. Dette viser, at bare fordi man har et stærkt objektivt miljø med adidaktisk potentiale, er det ikke sikkert, at det bliver udnyttet. Iscenesættelsen af situationen er derfor afgørende. I arbejdet med differentialligninger kunne det derfor være interessant at se på, hvordan man iscenesætter situationer i den grafiske ramme, så man udnytter et objektivt miljø og dets adidaktiske potentiale på en sådan måde, at hypoteser formuleres og valideres i den grafiske ramme, og hvor valideringssituationerne er baseret på det objektive miljø. Den anden problematik som vi har belyst er, at i arbejdet med matematiske modeller viser det sig, at valideringen af modellerne i de fleste tilfælde ikke indgår. Dette gælder både i fysik- og matematikundervisningen. Da der i fysikundervisningen er en tendens til at fokusere det eksperimentelle arbejde omkring udførelsesfasen, kunne man derfor undersøge om elevernes syn på den epistemiske status af eksperimentelt arbejde vil ændre sig til også at inkludere validering af de matematiske modeller, hvis man inddrager flere af de andre faser i det eksperimentelle arbejde, herunder særligt planlægnings- og designfasen.

Som vi har set er der generelt mange udfordringer forbundet med valideringssituationer – særligt når eleverne skal have medansvar. At kunne bruge matematisk materiale til at argumentere for om et udsagn er sandt eller falsk er en kompetence, som gymnasieelever skal lære og udvikle i løbet af de tre år. Særligt ser vi, at iscenesættelsen af en situation er afgørende. Dette er en særdeles udfordrende opgave for læreren, men den er vigtigt at være opmærksom på.

12. Litteraturliste

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as the framework for the conception of teaching products. I: R. Biehler et al. (red.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. (s. 27-39). Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. I: G. Harel,& E. Dubensky (red.), *The concept of functions: Aspect of epistemology and pedagody* (pp. 109-132). Washington, DC: The Mathematical Assosiation of America.

Balderes, A. (2001). Integration of CAS in the didactics of differential equations. *Proceedings of the International Conference on New Ideas in Mathematics Education, Palm Cove, Australia, August 19-24, 2001*, (s. 22-29). http://math.unipa.it/~grim/ABalderas25-33.PDF

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2008). Using Research and Study Courses for Teaching Mathematical Modelling at University Level. In D. Pitta-Pantazi, & G. Pilippou (Ed.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2050-2059). Larnaca: University of Cyprus.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). 'Applicationism' as the dominant epistemology at university level. I: Pytlak, M., Swoboda, E., & Rowland, T. (red.), *CERME 7, Proceedings of the seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1938-1948). Rzeszów: University of Rzeszów.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52**:** 3-28, 2003. doi: 10.1023/A:1023696731950

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*: *Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. & Warfield, V. (1999). The case of Gäel. *Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 18 (1), s. 7-52. doi : 10.1016/S0732-3123(99)00020-6

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard, J. (2007). *MAT A3 stx*. Viborg: Systime.

Chaachoua, H. & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching mathematics and its applications*, Volume 25(1), s. 15-21. doi: 10.1093/teamat/hri024

Clausen, F., Printz, P. & Schomaker, G. (1993). *Integralregning og differentialligninger*. København: Munksgaard.

Claussen, C., Both, E. & Hartling, N. (2004). *Spektrum – Fysik II*. København: Nordisk forlag A/S.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. I: G. Harel & E. Dubensky (red.), *The concept of functions: Aspect of epistemology and pedagody* (s. 85-107). Washington, DC: The Mathematical Assosiation of America.

Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics, Volume 61 (1-2), s. 103-131.* DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z

Eksamenssæt for matematik A, stx, d. 9. december 2011:
http://uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Skriftlige-opgavesaet/~/media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF11/111209%20stx113%20MAT%20A.ashx

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59: 113-151. doi: 10.1007/s10649-005-2183-z
Katz, V. (2009). *A History of mathematics*. Boston: Pearson Education Inc.
Kjeldsen, T. H. (2010). Using History as a Means for the Learning of Mathematics without Losing Sight of History: The Case of Differential Equations. I: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S., & Arzarello, F. (red.), *CERME 6, Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2742-2751). Lyon: Université de Lyon.
Lemke, J. (1990). *Talking science. Language, learning and values*. London: Ablex.
Lunetta, V. (1998). The School Science Laboratory: Historical Perspectives and Contexts for Contemporary Teaching. I: B. Fraser & K. Tobin (red.), *International handbook of science education*, Part 1, s. 249-262. Dordrecht: Kluwer.
Læreplaner fra Undervisningsministeriet: http://uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Studieretninger-og-fag/Studentereksamen-%28stx%29/Laereplaner-paa-stx
Nielsen, K. E., & Fogh, E. (2011). *Vejen til matematik A2*. Silkeborg: HAX.
Nielsen, H. & Salomonsen H. A. (2006). *Lineær Algebra. Differentialligninger. Noter til Calculus 2006*. Fra Århus Universitet, Institut for matematiske fag. Web site: http://home.imf.au.dk/holger/cs06/noter/noter.pdf
Rainville, E., Bedient, P. & Bedient, R. (1997). *Elementary Differential Equations* (8^{th} udgave). Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc.
Rasmussen, C. (2001) New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, s. 55-87. DOI: 10.1016/S0732-3123(01)00062-1.
Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function. I: G. Harel & E. Dubensky (red.), *The concept of functions: Aspect of epistemology and pedagody* (s. 59-84). Washington, DC: The Mathematical Assosiation of America.
Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. I: G. Harel & E. Dubensky (red.), *The concept of functions: Aspect of epistemology and pedagody* (s. 25-58). Washington, DC: The Mathematical Assosiation of America.
Sierpinska, A. (2007). I need the teacher to tell me if I'm right or wrong. *Proceedings of the 31stConferene of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, South Korea, July 8-13, 2007.* Vol. 1, s. 45-64.
Winsløw, C. (2006a). Didaktiske elementer – en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik. Frederiksberg: Biofolia.
Winsløw, C. (2006b). Didaktiske miljøer for ligedannethed. *Mona*, 2006-2, s. 47-62

Bilag 1 – Øvelsesvejledning til elevforsøg

Gammastrålers absorption i bly

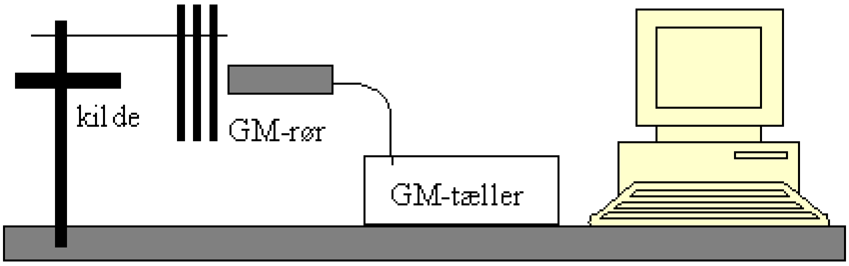
Teori

Når γ-stråler passerer et stof, svækkes strålingen pga. fotoelektrisk effekt, comptoneffekt og måske pardannelse. For at halvere strålingens intensitet skal den passere gennem adskillige cm aluminium eller flere mm bly. Ved gennemgangen svækkes strålingens intensitet eksponentielt med tykkelsen x af det passerede stof:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

hvor I_0 er den usvækkede strålings intensitet og hvor størrelsen af μ afhænger af stoffet og af γ-strålingens bølgelængde (energi).

Forsøgsopstilling

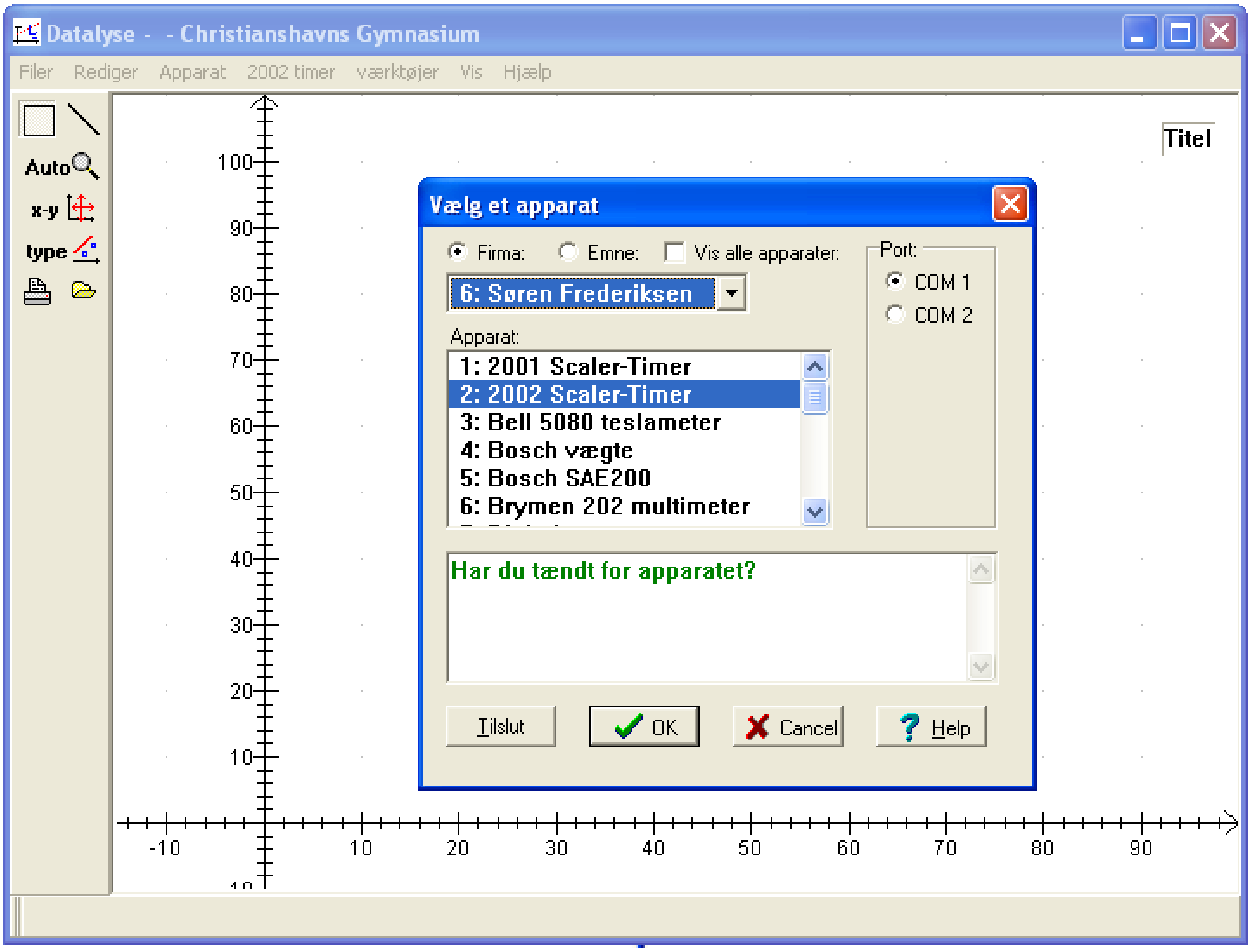


Forsøgsudførelse

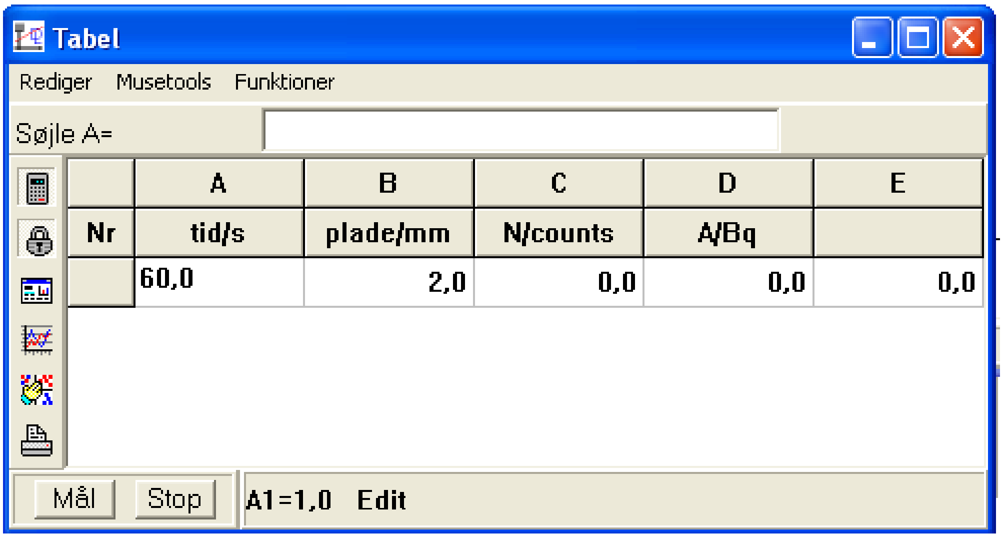
Opspænd GM-røret og γ-kilden, således at afstanden fra kilde til rør er ca. 10 cm. Denne afstand skal holdes konstant under hele forsøget. Mellem røret og kilden anbringes de 2 mm tykke Pb-plader lige foran GM-røret. Der startes med at måle baggrundsstrålingen i 60 sek (vælges på tælleren). Noter værdien her:____________

Tælleren forbindes til en computer. Målingerne foretages vha. programmet Datalyse. Programmet åbnes. I menuen apparat vælges 2002 Scaler-timer jf. nedenstående skærmbillede.. Der trykkes ok hvis der lyses grønt i dialogboksen.

Når det er gjort vælges menuen ”2000 timer” og her vælges $X_{½}$.



Der fremkommer nu nedenstående billede på skærmen:



Du skal starte med at sætte tælletiden til 60 sek (søjle A). Du starter uden plader og vælger derfor B=0,0 mm. Du klikker nu på ”mål” nederst i højre hjørne og målingerne starter. Når målingen er færdig hænger du en blyplade på og skriver 2 mm i B søjlen. Så trykker du igen på ”mål”. Du fortsætter til du har lavet 8-10 målinger. Når det er gjort kan du fratrække baggrundsstrålingen som en søjleoperation. Dernæst vælger du Funktioner, Graf i tabellen og tegner en graf over korrigerede tælletal som funktion af tykkelsen.

Husk at gemme eller printe både graf og tabelværdier.

Rapporten skal indeholde:

Grafer hvor I_{korr} vises som funktion af *x* på både i normalt koordinatsystem og i semilogaritmisk. Bestem både udfra grafen og udfra regression halveringstykkelsen$_{½}$. Der gælder jf bogen s. 212:

$$x_{½} = \frac{ln2}{\mu}$$

γ -strålingens energi er E = 0,66 MeV. Og for denne stråling i bly er tabelværdien for halveringstykkelsen ca. 0,7 cm, vurder om det virker rimeligt i forhold til dine resultater.

Til diskussionen kan du evt. inddrage de forskellige absorptionsformer for γ-strålingen