INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen

Niven Adel Atie:
Specialerapport

Januar 2013

IND's studenterserie nr. 28

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte - om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. **Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2012)**

Abstract

This Master's thesis enlightens, that the essence of the derivation of the general solution formula for the quadratic equation is based on completing the square. The proof in the standard course in stx is based on algebra and mathematical operations. The algebra is often the most difficult tool for students in stx to work with. Therefore the hypothesis about the completing the square, being a trick of mystery in the standard course for stx students, is tested. The hypothesis is confirmed as I observe a standard course in the subject quadratic equations. TDS, the theory of didactical situations is used as a tool of analysis. The result in the standard course is unsatisfying and I therefore chose to design a course using TDS which is based on the algebraic and geometric completing the square. I observed the completion of the designed course. It showed that the geometric tool is a support to the algebra. The geometry makes the algebra make *sense*, as one can visualize "the trick", completing the square.

***IND's studenterserie** består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

DET NATUR- OG BIOVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen

Niven Adel Atie

Speciale for cand.scient graden i matematik.

Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Thesis for the Master degree in Mathematics.

Department of Science Education, University of Copenhagen

Vejleder: Carl Winsløw

Afleveringsdato: 01. November 2012

Indholdsfortegnelse

1.a Resumé

Dette speciale belyser, at essensen i udledning af den generelle løsningsformel for andengradsligningen er baseret på fuldstændiggørelsen af kvadratet. Beviset i standardforløbet er baseret på algebraisk bogstaveregning og matematiske operationer. Algebraen er ofte det sværeste værktøj for eleverne i stx at arbejde med. Derfor testes hypotesen om, at fuldstændiggørelsen af kvadratet virker som et mystisk ”trick” i et standardforløb i stx. Hypotesen bliver bekræftet, idet jeg observerer et standardforløb i emnet andengradsligningen. TDS, teorien om didaktiske situationer, bruges som analyse-værktøj. Resultatet i standardforløbet er utilfredsstillende og derfor valgte jeg at designe et forløb vha. TDS, der bygger på den algebraiske og geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet. Jeg observerede gennemførelsen af det designet forløb. Det viste, at det geometriske værktøj er en støtte til algebraen. Geometrien får nemlig algebraen til at give *mening,* da man kan visualisere ”tricket” fuldstændiggørelsen af kvadratet.

1.b Abstract

This Master's thesis enlightens, that the essence of the derivation of the general solution formula for the quadratic equation is based on completing the square. The proof in the standard course in stx is based on algebra and mathematical operations. The algebra is often the most difficult tool for students in stx to work with. Therefore the hypothesis about the completing the square, being a trick of mystery in a standard course for stx students, is tested. The hypothesis is confirmed as I observe a standard course in the subject quadratic equations. TDS, the theory of didactical situations is used as a tool of analysis. The result in the standard course is unsatisfying and I therefore chose to design a course using TDS which is based on the algebraic and geometric completing the square. I observed the completion of the designed course. It showed that the geometric tool is a support to the algebra. The geometry makes the algebra make *sense*, as one can visualize “the trick”, completing the square.

2. Indledning

Den nye gymnasiereform som trådte i kraft i 2005 har været med til at ændre en del i forhold til elevens kompetencemålsætninger. Med reformen blev matematik blandt andet gjort til et obligatorisk fag for alle gymnasieelever. I faget matematik på gymnasiet er der visse emner, der er fredet. Et af disse er emnet andengradsligning, som har været kernestof i mindst 100 år[1]. Et standard forløb i andengradsligning bliver ofte præsenteret algebraisk og grafisk (vha. andengradspolynomier). Under sådan et forløb bliver den generelle andengradslignings løsningsformel bevist algebraisk. Når man som elev skal løse en andengradsligning benytter man sig konsekvent af formlen. Atiyah 2001, beskriver algebraen på følgende måde:

> ”Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: ‘I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine. [...] the danger to our soul is there, because when you pass over into algebraic calculation, essentially you stop thinking; you stop thinking geometrically, you stop thinking about the meaning. I am a bit hard on the algebraists here, but fundamentally the purpose of algebra always was to produce a formula that one could put into a machine, turn a handle and get the answer. You took something that had a meaning; you converted it into a formula; and you got out the answer.” (Bosch, 2012, s.9)

Her prøver Atiyah at indikere, at algebraen muligvis kan give svar på alle opgaver, men ikke nødvendigvis en *forståelse* og *mening* af det man egentlig finder frem til. Den algebraiske formel for andengradsligningen bliver brugt som en evig maskine, der giver løsningen på alle andengradsligninger. Det er en maskine, hvor man indsætter konkrette oplysninger om en andengradsligning og så serveres løsningen direkte.

Et algebraisk bevis kræver viden og håndtering af bogstaveregning og matematiske operationer. Dette felt er det mest besværlige for eleven at arbejde med og dermed svær at tilegne sig viden i.

I standardforløbet er beviset af andengradslignings løsningsformel baseret på en ren algebraisk fuldstændiggørelse af kvadratet. Det vil hypotetisk set opfattes af eleven som et ”mystisk trick” og dermed ikke falder eleven naturligt ind. Dette

[1] Den skriftlig studentereksamen i matematik de sidste 100 år viser at andengradsligninger har været pensum. (STU denter eksamens opgaver i matematik 1806-200)

var utilfredsstillende og fik mig til at søge andre metoder at formidle emnet på. En inspirationskilde er babyloniernes geometriske algoritme for løsningen af andengradsligningen ved hjælp af geometrisk fuldstændiggørelse af kvadratet. Tages der udgangspunkt i Atiyahs citat, så giver geometrien en *mening* til det man udregner.

Hypotesen om at eleven i standard forløbet har svært ved at forstå tricket i det algebraiske bevis af løsningsformlen for andengradsligningen vil blive testet.

Jeg har derfor valgt at observere et standard forløb i andengradsligning og derefter forsøge at designe et forløb, hvor der anvendes geometrisk fuldstændiggørelse af kvadratet som støtte til algebraen.

Specialets opbygning starter med teoriafsnittet, som omhandler TDS (teorien om didaktiske situationer), som jeg bruger til at analysere standard forløbet og designe et forløb i andengradsligninger. Det efterfølges af det stofdidaktiske afsnit, der belyser emnet andengradsligninger fra forskellige vinkler. Derefter er der en analyse af begge forløb, hvor der TDS kommer i brug. Specialet afsluttes med en sammenligning af de to forløb i diskussionsafsnittet og ender med en konklusion.

3. Teorien om didaktiske situationer (TDS)

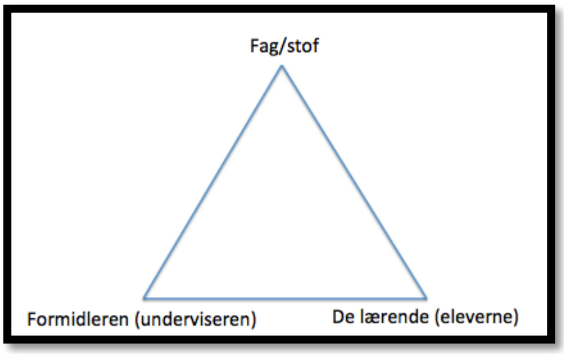
3.1 TDS

Det ses, at *teorien om didaktiske situationer* bygger på didaktik. Det er derfor nødvendigt at klardefinere ordet didaktik. Der findes følgende forskellige definitioner på ordet:

- *Den del af pædagogikken, der har til opgave at give en vejledning for undervisningen; undervisningslære.* [2]
- *Undervisningslære. Den side af pædagogikken der vedrører undervisningens indhold og formål.*[3]

Det tyder på, at definitionen af didaktik er en sammenhæng mellem undervisningen og læring. Der er altså tale om en formidlingsproces, hvor der skal eksistere noget viden (fag/stof), en eller flere formidlere (lærer(e)) og en eller flere modtagere (elev(er)).

Når disse tre elementer er tilstede kan man tale om *den didaktiske trekant*, hvilket er illustreret ved følgende figur:



Figur 3.1 Den didaktiske trekant

Linjerne i trekanten indikerer et samspil. Samspillet skal forstås således:

> *"Enhver af de tre relationer (mellem to "hjørner" i trekanten) henter sin mening fra det modstående hjørne."* (Winsløw 2009 s.18)

Mere specifikt så forholder relationen mellem læreren og faget sig omkring eleven og dermed er der tale om formidling. Mens relationen mellem læreren og

[2] http://ordnet.dk/
[3] http://ordbog.gyldendal.dk/

eleven forholder sig til faget, med andre ord siges der at være en *interaktion* mellem læreren og eleven omkring faget. Til sidst forholder relationen mellem eleven og faget sig til læreren på den måde at eleven bliver evalueret af læreren.

Det er vigtigt at pointere, at TDS ikke er en model for de perfekte undervisningssituationer. TDS er et redskab til at analysere og designe undervisningssituationer (Hersant og Perrin-Glorian 2005, s.116).

I den didaktiske trekant er faget et vigtigt element. Faget er et abstrakt begreb og kan indeholde emner på mange forskellige niveauer. Her tænkes der, at et emne i fx matematik kan uddybes afhængigt af hvilket uddybende trin man som elev er på (alder, institut, klasse, osv.). Disse forskellige uddybende trin (afgrænsninger) i et fag kan være bestemt af samfundet og uddannelsessystemer. Altså bliver disse afgrænsninger bestemt af det *makrodidaktiske* niveau (Winsløw 2009, s.18). Disse afgræsninger bestemmer formål og rammerne i et fag. Når dette er bestemt, så er lærerens opgave at formidle (den afgrænsede del af) faget, sådan at eleven opnår (den bestemte del af) kundskaben om faget.

Kigger vi på faget matematik i gymnasiet så er der nogle konkrete krav fra undervisningsministeriet om, hvilken kompetencer eleven skal opnå. Desuden er disse kompetencer delt op i faglige mål og fagligt indhold (uvm.dk). Vi vælger at gå i dybden med undervisningsministeriets krav om kernestoffet i matematik. Det ses, at emnet andengradsligning er kernestof, da det hører under polynomier. Man kan tilkoble emnet specifikke kompetencer, så som:

- Selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold
- Anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer
- Karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb
- Monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient. [4]

Der er mange kompetencer eleven skal opnå i et fag. Målet er, at når eleven afslutter faget skal læreren have sørget for at alle kompetencer[5] er blevet opfyldt. Derfor er lærerens opgave at udvælge kompetencer som eleven skal opnå i hvert emne.

---

[4] Hentet fra uvm.dk (undervisningsministeriets hjemside)
[5] som står i bekendtgørelsen fra undervisningsministeriet

For at man som lærer kan udvælge nogle specifikke kompetencer til hvert emne kræves der, at læreren har set emnet på mange forskellige perspektiver. Dermed kan læreren udpege bestemte kompetencer til et emne ved at bestemme gennemgangsmetoden. Med dette kan læreren skabe et *didaktisk miljø* (afsnit 3.3) som er dannet af formidlingsredskaber som har til formål at forme og skabe et bestemt undervisningsmiljø. Går man i dybden med en undervisningssituation og ser på interaktionen mellem læreren og eleven er der tale om det *mikrodidaktiske* niveau (Winsløw 2009, s.18).

Sammenspillet mellem læreren og eleven omkring et fag er desuden baseret på et sæt forventninger. Der er to grundlæggende forventninger, nemlig hvad læreren forventer af sin elev og hvad eleven forventer sig af læreren. Eleven forventer typisk, at læreren kan stoffet og er i stand til at *videreformidle* det på bedste vis. Læreren forventer typisk, at eleverne kommer til timerne med formålet *at lære*. Derudover er der andre uformelle forventninger, som tilsammen former *den didaktiske kontrakt* (afsnit 3.4).

Forventninger til et samspil mellem læreren og eleven, er desuden grundlæggende for eksistensen af en *didaktisk situation*.

3.1.1 Didaktisk situation

En *didaktisk situation* er en undervisningssituation, hvor læreren er involveret i elevens læringsproces. Med andre ord er den didaktiske situation de forløb i undervisningen, hvor læreren har en rolle som fx vejleder, coach, opgaveløser osv.

Vi tager udgangspunktet i emnet andengradsligning, for at illustrere konceptet om en *didaktisk situation* i en undervisningssituation.

En introduktion til andengradsligning $ax^2+bx+c=0$ *kunne være en forklaring af koefficienterne a, b og c, samt x som den variable størrelse. Dette kunne gøres ved, at læreren skriver en konkret opgave på en andengradsligning fx.* $x^2-3x-10=0$*, hvor eleverne får til opgave at bestemme a, b og c og hvor læreren fører kridtet.*

Når der bliver dannet en situation, hvor eleven og læreren er i interaktion omkring en opgave eller faglige klassediskussioner, er der tale om en didaktisk situation. I den udvalgte situation kan læreren have en vejledende rolle, hvor hun[6] retter og finpudser de forskellige upræcise formuleringer eleven kommer med.

Hvis det er tilfældet, at eleven bedes arbejde selv eller i grupper med et par faglige opgaver, så er der tale om en *adidaktisk situation*.

3.1.2 Adidaktisk situation

En *adidaktisk situation* er en undervisningssituation, hvor eleven håndterer en opgave på egen hånd uden nogle former for lærerhjælp. Eleven er dog i besiddelse af nogle redskaber som læreren har givet inden opgaven blev stillet. Disse redskaber kunne være i form af en introduktion til et nyt emne, en lignende opgave osv.

Eleven skal have mulighed for selv at kunne handle, formulere og validere (argumentere og kontrollere) sine løsninger på de stillede opgaver. Vi tager udgangspunkt i det forrige eksempel fra afsnittet om *didaktiske situationer* for at danne os et billede af optræden af en adidaktisk situation i en undervisningssammenhæng. Læreren beder eleven om at *løse* ligningen $x^2-3x-10=0$ og derefter *argumentere* for løsning. Hvis eleven løser ligningen $x^2-3x-10=0$ og derefter grafisk kigger efter polynomiets skæring med x-aksen, og ser, at x-værdierne er de samme, og hvis de derudover prøver at sætte værdierne ind i den oprindelige ligning og det viser sig, at ligningen giver noget sandt, så har eleven benyttet sig af alle de resurser, der ligger i en adidaktisk situation. Hvis eleven derimod på nogen måde søger kontakt til læreren angående løsning af opgaven, så vil den adidaktiske situation blive afbrudt og eleven vil havne i en *didaktisk situation*.
I en undervisningssammenhæng, kan eleven have en opfattelse som ikke stemmer overens med undervisningsfaget. Disse opfattelser kaldes misforståelser. Der er to typer misforståelser (Winsløw 2009, s.120-2):

- Epistemologiske forhindringer: en misforståelse der skyldes elevens hverdagserfaring. Fx ganger man et negativ tal x med et andet tal er resultatet mindre end x.
- Didaktiske forhindringer: En misforståelser der opstår i en undervisning sammenhæng. fx tallet $–b^2 = (-b)^2$ er et negativt tal.

[6] Læreren vil jeg betegne som hunkøn og eleven som hankøn i hele specialet.

Disse typer misforståelser kan optræde i både didaktiske situationer og adidaktiske situationer i en undervisningssammenhæng. Og hver undervisning bygger på nogle bestanddele.

3.2 Undervisningens bestanddele

Inden eleven dukker op til en undervisningslektion, så kan en elev have en forforståelse af emnet, der skal gennemgås. Med andre ord har eleven selvstændigt/individuelt dannet sig noget viden omkring emnet. Denne form for viden er implicit og kaldes *personlig viden.* Desuden er den viden, som eleven tilegner sig i undervisningen, objektiv viden og kaldes *den officielle viden*. Denne viden, som er baseret på noget videnskabeligt,[7] er eksplicit. Den officielle viden er den viden, som skal være fælles for alle[8]. Målet med undervisningen er at gendanne eller overbygge elevens personlige viden til den officielle viden. Altså er lærerens opgave at skabe noget fælles viden i klassen, som netop er den officielle viden. (Winsløw 2009, s.134)

Den personlige viden kan i nogle tilfælde være til elevens fordel, hvor eleven bygger videre på sin personlige viden for at opnå den officielle viden. I andre tilfælde kan den personlige viden komme i strid med den officielle viden og kan besværliggøre processen for at tilegne sig den officielle viden. Psykologen Piaget kalder overbygningsprocessen for *assimilation,* altså noget ny viden der stemmer overens med ens allerede eksisterende viden. Desuden kalder Piaget processen, hvor man skal gendanne sin eksisterende viden til den nye viden for *akkommodation*.

Tager vi udgangspunkt i andengradsligning, så kunne eleven have en idé om at det er noget med ligninger altså noget med at finde en ubekendt, ved at flytte *eksisterende* tal i ligningen på den ene side af lighedstegnet for at isolere den ubekendte. Der er to situationer som er værd at udpege her. Når elevens forforståelse er, at i *ligninger skal man isolere den ubekendte,* så overbygges der på personlig viden, dvs. assimilation. I tilfældet, hvor elevens forforståelse er at *for at*

[7] som forskningsprojekter, videnskabsartikler, osv.
[8] eksempelvis fakta og ikke noget en person alene har oplevet og dannet sig en idé om

isolere den ubekendte skal man flytte på eksisterende tal i ligningen, så skal elevens personlige viden gendannes, dvs. akkommodation.[9]

Formålet med en undervisningssituation er, at eleven tilegner sig den officielle viden og for at eleven skal opnå dette er der en række faser man skal igennem: *Devolution, handlingssituation, formuleringssituation, valideringssituation* og *institutionalisering* (Winsløw 2009, s.138-139). Disse faser er undervisningens bestanddele.

3.2.1 Devolution

Devolution er den fase hvor eleven bliver introduceret til det nye emne eller nye problemstilling. I denne fase er læreren og eleven i interaktion omkring noget fagligt (klassediskussion, dialog, forelæsere, forklare osv.). I denne fase befinder eleven sig i en didaktisk situation.

Vi bruger et eksempel med andengradsligning, for at illustrere denne fase:

Læreren står og introducerer andengradsligning og skriver den generelle andengradsligning op på tavlen. Hun forklarer efterfølgende at a, b og c er konstanter og kaldes koefficienter. Derefter skriver læreren et konkret eksempel x^2-3x-10=0 og beder eleverne udpeger a, b og c i dette tilfælde. Så rækker en elev fingeren op og giver svaret.

I dette tilfælde introducerer læreren det nye emne andengradsligning og inkluderer eleven ved at stille en opgave. Her findes et direkte samspil mellem læreren og eleven, så i denne devolutionssituation er der også tale om en didaktisk situation.

3.2.2 Handlingssituation

Handlingssituationen er den fase som typisk bliver efterfulgt af en devolutionssituation. I denne fase bliver eleven sat i gang med at løse problemstillinger. Her får eleven mulighed for at løse opgaver på egen hånd, uden nogen former for lærerens hjælp. Handlingssituation er dermed en adidaktisk situation.

[9] I løsning af andengradsligninger skal man fuldstændiggøre kvadratet (kommer i afsnittet stofdidaktik) og dermed tilføje et tal som ikke eksisterer i den oprindelige ligning.

Tager vi udgangspunktet i eksemplet før (afsnit 3.2.1) så ville læreren sætte eleven i gang med opgaver, der går ud på at finde de forskellige koefficienter i nogle konkrete andengradsligninger.

Her ses, at handlingssituationen er en adidaktisk situation, da læreren ikke har kontakt med eleven. I denne fase prøver eleven at opnå den officielle viden på egen hånd. Her forsøger eleven at tage det første skridt for at gå fra personlig viden til officiel viden.

Handlingssituationer kan også optræde i didaktiske situationer. Det sker, når en elev søger kontakt til læreren for at få noget hjælp. Læreren vil så være broen mellem den personlige viden og den officielle viden.

3.2.3 Formuleringssituation

I handlingssituationen prøver eleven at begribe en given problemstilling eller opgave. Så denne fase bliver efterfulgt af en *formuleringssituation*, hvor eleven prøver at formulere de hypoteser, som arbejdes med i handlingssituationen. Med andre ord får eleven nogle idéer til, hvordan han skal løse en opgave og denne idé skal formuleres matematisk.

Vi tager udgangspunktet i et eksempel med andengradsligning for at illustrere denne fases optræden:

Læreren har bedt eleven om at løse nogle konkrete andengradsligninger. En af de ligninger er x^2-3x-10=0. Eleven ved at man først skal finde d som er defineret som d=b^2-4ac, og derefter x som er defineret som $x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$*. Eleven sidder og overvejer om d er: d=-3^2-4·1· (-10) eller d=-3^2-4·0·(-10) eller d=$(-3)^2$-4·1·(-10) . Eleven beder om lærerens hjælp og får noget vejledning, sådan at han selv når frem til en overbevisning om, at den sidste mulighed altså d=$(-3)^2$-4·1·(-10) er den rigtige.*

Eleven har nogle hypoteser omkring løsningen og dermed præcise/upræcise formuleringer, som han er nået frem til på egen hånd. Denne fase kaldes en adidaktisk formuleringssituation. Men når eleven vælger at formulere de forskellige hypoteser for læreren og får en præcis matematisk formulering, kaldes fasen for en didaktisk formuleringssituation.

En formuleringssituation kan både være en didaktisk og en adidaktisk situation, hvor den personlige viden (hypoteser) bliver til officiel viden (præcise formuleringer). For at kunne vurdere formuleringernes gyldighed, skal man *argumentere* for problemløsningsmetoden og det gøres i *valideringssituation*.

3.2.4 Valideringssituation

Valideringssituationen er den fase hvori elevens viden bliver testet. I denne fase skal man kunne argumentere for gyldigheden af løsninger. Disse argumenter kunne være på form af et bevis, modeksempel eller gentagen af et forsøg (hvis det fx er en fysik-, kemi- eller biologiøvelse, osv.). Med andre ord skal man bruge fagets metoder, for at kunne argumentere på et niveau som er officielt viden.

Vi skitserer en situation, som kan illustrer en valideringssituation, ved at bygge videre på det forrige eksempel.

Eleven sidder og overvejer om d er: $d=-3^2-4\cdot 1\cdot(-10)$ *eller* $d=-3^2-4\cdot 0\cdot(-10)$ *eller* $d=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)$*. Eleven beder om lærerens hjælp og får noget vejledning, så han selv når frem til en overbevisning om, at den sidste mulighed altså* $d=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)$ *er den rigtige. Eleven løser opgaven og når frem til at* $x=5$ *eller* $x=-2$*. For at argumentere for løsningen, så indsætter han disse to x-værdier ind i den oprindelige ligning og får noget sandt.*

Efter at eleven har løst opgaven (formuleringssituationen) skal eleven kunne argumentere for gyldigheden af løsningerne, og det kan gøres ved at kontrollere svaret og dermed valideres resultaterne. I denne situation befinder eleven sig i en adidaktisk valideringssituation.

Hvis eleven validerer svaret med lærerens hjælp, så vil der være tale om en didaktisk valideringssituation.

3.2.5 Institutionalisering

Institutionaliseringen er den afsluttende fase, hvor læreren alene eller sammen med eleven opsamler, præsenterer og formulerer den officielle viden.

Her kan vi tage fat i samme eksempel som før men bygge videre på dette, for nærmere at illustrere institutionaliseringsfasen.

Efter at eleven har været i gang med at løse de forskellige konkrete opgaver beder læreren eleven om en gennemgang af opgaverne og en forklaring på, hvordan de enkelte opgaver er blevet løst.

I dette tilfælde sker der en opsamling af det eleven har arbejdet med. Altså er denne fase en konklusion på alle de forgangne faser (devolution, handlingssituation, formuleringssituation og valideringssituationen) eleven har været igennem for at opnå den officielle viden omkring et emne, underemne, eller kapitel.

Det er vigtigt at bemærke, at faserne ikke optræder i en bestemt rækkefølge. Desuden er det bemærkelsesværdigt at vide, at ikke alle faser optræder i en undervisningssituation.

3.3 Didaktisk miljø

Didaktisk miljø er et skabt miljø, hvor eleverne tilegner sig viden. Læreren designer et miljø for eleverne, for at give dem det bedste "klima" hvori deres viden kan "blomstre" bedst muligt. De didaktiske miljøer er de omgivelser eleverne placeres i, hvis formål er at tilegne sig viden på en bestemt måde (Winsløw 2009, s.135).

Man ved som lærer at man har skabt det bedste didaktiske miljø, når den *officielle viden* bliver omdannet til *personlig viden* for hver elev. Det er sådan, at lærerens opgave er at udforme det didaktiske miljø således, at der er plads til at eleven befinder sig i en *adidaktisk situation*. Med andre ord er det vigtigt at eleven får prøvet kræfter med et matematisk problem ved selv at regne opgaver, løse problemer, osv. Altså tilfælde, hvor eleven får tid til at befinde sig i adidaktiske handlingssituationer, formuleringssituationer og valideringssituationer. (Hersant og Perrin-Glorian 2005, s.115-116).

Der findes to dele af didaktiske miljøer: *objektivt miljø* og *subjektivt miljø*. Jeg starter med at beskrive det *objektive miljø.*

3.3.1 Det objektive miljø

Som det antydes i ordet *objektiv* er dette miljø uafhængigt af læreren og eleven. Læreren designer et *objektivt miljø* ved at designe problemformuleringer, der muliggøre elevernes selvstændige arbejde med matematik (Hersant og Perrin-Glorian 2005, s.115). Miljøet skal repræsentere matematiske objekter og problemer i det bestemte emne, der undervises i. Desuden indgår der symboler, formler, redskaber osv. der er relevante for det konkrete emne i et objektivt miljø.

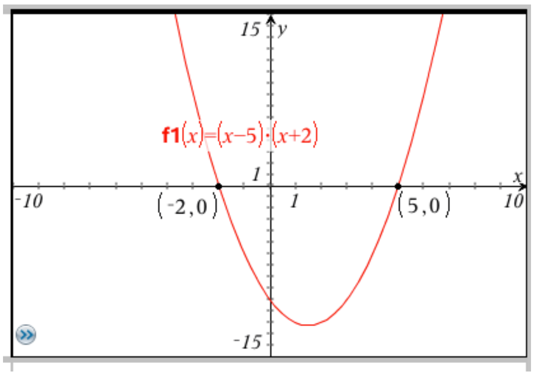
Formålet med det objektive miljø er, at opgaveformuleringen giver eleven mulighed for at befinde sig i en adidaktisk situation. I en almindelig undervisning er det sjældent man oplever rent adidaktiske situationer. Man kan finde miljøer som indeholder et *adidaktisk potentiale.*

3.3.2 Det adidaktiske potentiale i det objektive miljø

Et adidaktisk potentiale indebærer muligheden for, at eleven selv kan validere egne resultater i en opgave. Det er selve det *objektive miljø,* som giver eleven feedback på en løsnings gyldighed (Hersant og Perrin-Glorian 2005, s.117). Et højt adidaktisk potentiale i et objektivt miljø kræver, at eleven argumenterer og dermed validerer sine resultater. Desuden skal man være opmærksom på, at *adidaktisk potentiale* hentyder til en situation hvor eleven selvstændigt har potentiale til at nå frem til gyldig matematisk viden.

Vi skitserer en situation som kan illustrere et adidaktisk potentiale i et objektivt miljø.

En elev får stillet følgende problemformulering:
"løs følgende andengradsligning (x-5)(x+2)=0 og kontroller både grafisk og algebraisk om din løsning er korrekt."
Eleven kan ikke rigtig huske, hvad han skal gøre og begynder med at gange de to parenteser sammen. Han får nu x^2*-3x-10=0. Nu husker han, at man kan bruge formlen og løsningen af andengradsligningen, hvor han først finder d og derefter bestemmer x. Han prøver sig frem og når frem til* $x = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$*. Eleven prøver nu at kontrollere algebraisk om svaret er rigtigt ved at sætte x=2 ind i den oprindelige ligning og derefter x=-5 og ser at det giver noget der ikke er sandt. Men han bemærker, at tallene i løsningen ligner tallene i den oprindelige ligning. Han prøver nu igen og opdager fejlen ved at –b=-(-3)=3 og ikke -3 og når derefter frem til løsningerne x=-2 og x=5. Og denne gang opnås en korrekt algebraisk løsning, og igen ligner løsningerne tallene fra den oprindelige ligning, men med modsatte fortegn. Derefter tegner han grafen og ved, at hvis løsningerne skal være -2 og 5 så skal grafen skære x-aksen i -2 og 5 (som vist i figuren).*



figur 3.2

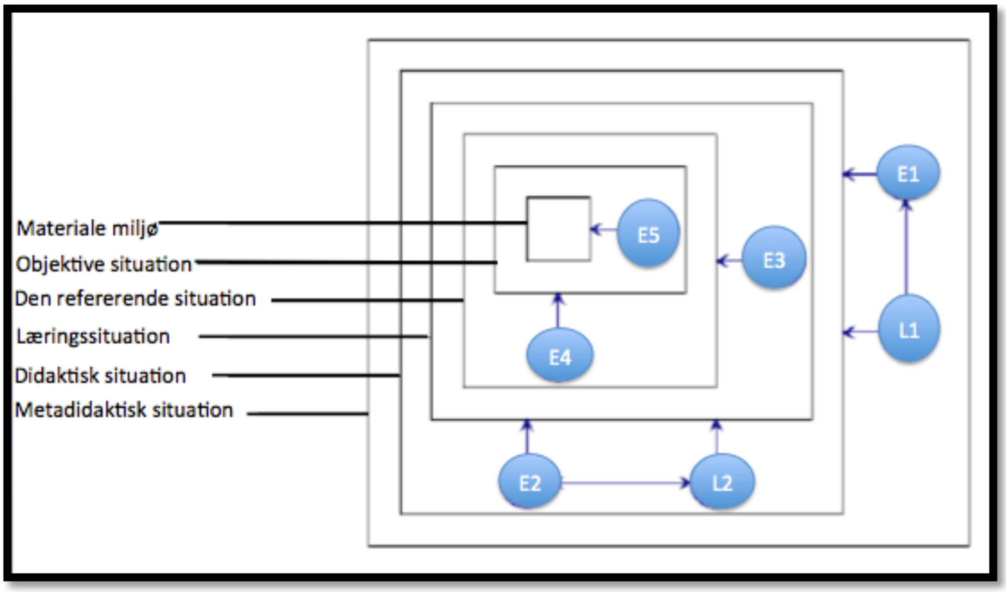
I dette tilfælde får eleven lov til at tænke en gang til, fordi opgaven giver eleven noget feedback på de resultater han er nået frem til. Her er der tale om et *adidaktisk potentiale* i det objektive miljø. Desuden blev eleven opmærksom på, at rødderne til den faktoriserede andengradspolynomiet kunne have en sammenhæng med tallene, der stod i den oprindelige ligning. Det kunne være muligt, at eleven på et senere tidspunkt, når han støder på en faktoriseret andengradsligning igen ville prøve hypotesen om, at det er de samme tal (med omvendt fortegn) som er løsningerne. På denne måde kunne eleven finde frem til en sammenhæng mellem løsningerne og den faktoriserede andengradsligning. Desuden kunne eleven forhåbentligt se sammenhængen og validere gyldigheden af argumentet ved hjælp af nulreglen.

Adidaktisk potentiale kan optræde i et objektivt miljø. Men når eleven og læreren kommer i kontakt med det objektive miljø med adidaktisk potentiale kan det adidaktiske potentiale blive mere eller mindre afhængig af det *subjektive miljø*.

3.3.3 Subjektivt miljø

Det *subjektive miljø* er de dele af et didaktisk miljø som er afhængige af eleven, læreren eller begge dele. *Det subjektive miljø* er omgivelserne, der skabes omkring det objektive miljø. Det kan eksempelvis være, hvordan eleven håndterer en matematisk problemformulering. For at kunne præcisere definitionen på det didaktiske miljøs optræden, og dermed det subjektive miljø, vil jeg benytte mig af en figur, som Brousseau mener, beskriver og illustrerer et undervisningsmiljø

(Brousseau 1997, s.248-9). Denne figur vil jeg benytte mig af for at bekrive både det objektive og subjektive miljø.



Figur 3.3 E står for elev hvor L står for læreren

Den inderste firkant illustrerer det *materiale miljø* og det kan være en form for matematisk problem (opgave, problemformulering, osv.). E5 står for en person, som muligvis nævnes i den givne opgave, som eleven kan relatere sig til. Der kunne stå i opgaveformuleringen ”Erik er 180 cm høj.... ”, så E5 er ikke en person i undervisningsrummet, men en person som er en del af det materiale miljø. Eleven og læreren i undervisningsrummet er ikke i samspil endnu. Derfor er der tale om en *objektiv situation* (eller miljø). E4 er så eleven som kommer i kontakt med opgaven og fx læser opgaven op (/refererer) opgaven. Denne situation kaldes for den *referende situation*. I denne ramme går man fra det objektive miljø til en del af det subjektive miljø, fordi eleven er i interaktion med opgaven. Når eleven begynder at arbejde på løsningen af opgaven, altså er i en handlings-, formulerings- og valideringssituation, er eleven i E3-positionen og dermed i en *læringssituation*. Men når eleven søger kontakt med læreren L2 for noget hjælp er der tale om, at eleven er i E2-positionen. Dette sammenspil mellem læreren og eleven omkring en opgave kalder man en *didaktisk situation*. Der er en sidste situation som eleven kan være sat i og det er refleksion over egen undervisning. Her er eleven i situation E1, hvor eleven ser sin undervisning udefra. Og læreren som forbereder undervisningen er i situation L1. I både E1 og L1 er der tale om en *metadidaktisk situation*.

3.3.4 Det adidaktiske potentiale i et subjektivt miljø

Der nævntes i afsnittet 3.3.2 , at det adidaktiske potentiale optræder i et objektivt miljø. Det skal forstås således, at læreren forbereder (designer) opgaver og problemformuleringer osv., hvor der optræder nogle situationer der tvinger eleven til at validere sine løsninger. Meningen er, at eleven skal have redskaber til selv at løse og validere den stillede opgave. Men det er desværre ikke altid, at lærerens ønske kan blive opfyldt. Grunden til det er, at det subjektive miljø også er afgørende, da det er interaktionen med det objektive miljø som afgør om et adidaktisk potentiale realiseres. Derfor er devolutionssituationen en central fase i det didaktiske spil. Da en del elever har svært ved at bryde den *didaktiske kontrakt* (nævnes i afsnit 3.4) og derfor bliver det besværligt for dem at udnytte miljøets adidaktiske potentiale. Kort sagt, er den didaktiske kontrakt, nogle uformelle forventninger der er hos både læreren og eleven i en undervisningssituation. Det kan hænger sammen på følgende måde: Eleven ved at han skal præstere og vise læreren, at han kan det der kræves af ham. Det han fx kan gøre er at spørge læreren undervejs i en opgave om det han gør er rigtigt for at bekræfte for læreren og sig selv at han kan sit stof. Læreren kan desuden *komme til at hjælpe for meget,* fordi hun mener, der findes et behov for at nogle elever opnår succes og dermed ikke opgiver (se afsnit 3.5). I denne situation bliver læreren overbeskyttende overfor eleven og vil prøve på at forhindre dem i at lave fejl. Den didaktiske kontrakt kan dermed være med til at ødelægge det adidaktiske potentiale, der ligger i det objektive miljø. Devolutionsfasen er derfor afgørende, da den giver eleverne en ramme for, hvad der forventes af dem i den designede opgave (som indeholder et adidaktisk potentiale). Desuden kan læreren i den indledende fase præsentere sin rolle klart, og hvad der kræves af eleven, for det kan gøre at den didaktiske kontrakt ikke træder så meget i forgrunden og dermed bliver mindre synlig i den realiserede situation.

I en undervisningssammenhæng kan man forestille sig, at læreren har designet et objektivt miljø, som indeholder et højt adidaktisk potentiale, men måden hvorpå dette potentiale bliver udnyttet i praksis bliver synlig i det subjektive miljø.

Det er mere eller mindre let at designe en opgave med et højt adidaktisk potentiale, men det er svært at få en hel klasse til at agere med opgaven og få realiseret miljøets adidaktiske potentiale. Grunden til at det er en svær opgave for læreren i det subjektive miljø kan være at den didaktiske kontrakt er i kraft så læreren fx påtager sig ansvaret for at eleven er i stand til at sætte sig ind i opgaven, bliver motiveret[10], opleve succes osv.

3.4 Didaktisk kontrakt

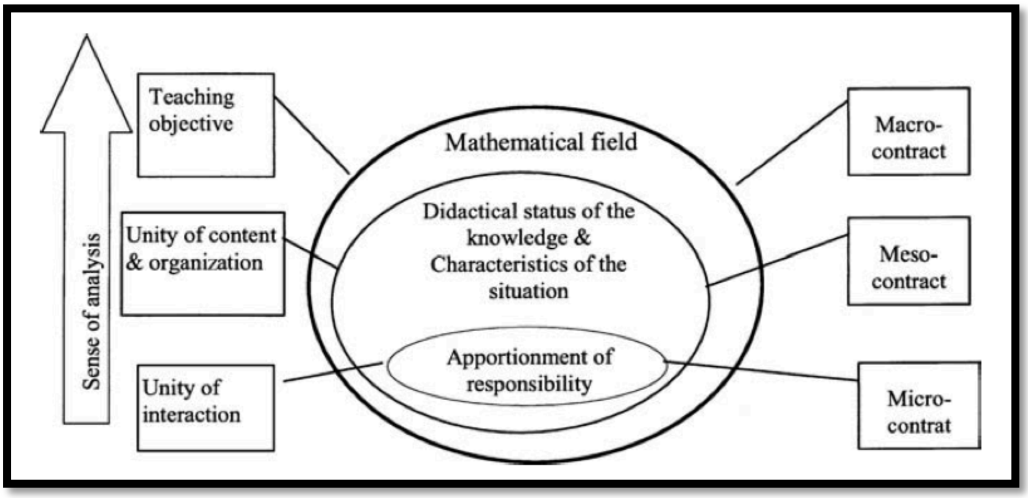
En lærer har som generisk at skabe det ”rigtige” miljø for sine elever, så de kan tilegne sig den tilsigtede viden. Selvom indretningen af det objektive miljø har et stort adidaktisk potientiale, så er det subjektive miljø afgørende for, hvorvidt formen af det adidaktiske potentiale finder sted. Derudover spiller de uformelle forventninger hos læreren og eleven en stor rolle i det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø. Disse forventninger former den *didaktiske kontrakt*. Den didaktiske kontrakt kan opfattes som et sæt regler, som både læreren og eleven overholder i det didaktiske spil. Disse regler er ikke eksplicitte, da de er uformelle, men de bliver sommetider tydelige, når kontakten brydes. (Winsløw 2006, s. 146+150).

Et eksempel kunne være at læreren stillede en opgave som var umulig for eleven at løse: *en bondemand har 15 høns og 17 grise. Hvor gammel er manden?* Eleven vil forsøge på alle mulige måder at løse opgaven og muligvis svare 32. Der ses tydeligt at være en uformel regel om, hvad læreren kan stille af opgaver. Med denne opgave bliver den didaktiske kontrakt brudt. Den uformelle regel er, at læreren stiller opgaver, så eleverne med deres tilstrækkelig viden (indenfor faget) har mulighed for at løse opgaven. Den didaktiske kontrakt kan variere fra fag til fag og situation til situation.

Der er tre niveauer på den didaktiske kontrakt: Makro-, meso- og mikro kontrakt. Man kan starte med at se på hvordan disse kontrakter er relateret til hinanden

[10] Dette begreb er meget abstrakt, men her bruges det i betydningen *at drive for at yde.*

ved hjælp af denne figur, hvor der efterfølger en beskrivelse (Hersant og Perrin-Glorian 2005 s.120-1).



Figur 3.4 Mikro-, Meso og Makro-kontrakt

Disse tre niveauer på den didaktiske kontrakt kan adskilles vha. tidsintervaller. Mikro-kontrakten kan beskrives som få uformelle regler der opstår under en kort *episode*. Det kan dreje sig om sekunder til minutter hvor eleven er i interaktion med delopgaver . I mikro-kontrakten dykkes der ned i konkrete elev/lærer formuleringer, der kan pege på uformelle forventninger og ansvarsfordelingen mellem eleven og læreren.

Meso-kontrakten kan beskrives som uformelle regler der opstår under en *fase* (en sammenhæng af flere episoder). En fase kan være en undervisningssituation som devolutionsfase , handlingsfase, formuleringsfase osv. I meso-kontrakten dannes der et indblik i flere uformelle forventninger og ansvarsfordeling mellem læreren og eleven over en fase. Meso-kontrakten dannes af flere mikro-kontrakter.

Makro-kontrakten kan beskrives som en ramme af uformelle regler der opstår under en *periode* (mange faser som dannes under et emne). I makro-kontrakten dannes et overblik over de uformelle forventninger og ansvarsfordeling over en periode. Man kan derfor beskrive makro-kontrakten som en samling af meso-kontrakter under en periode (et matematisk felt).

Den didaktiske kontrakt skal opfattes som uformelle regler som kan ændre sig fra et matematisk felt til et andet. Det vil sige at den didaktiske kontakt kan indeholde forskellige regler afhængig af det matematiske emne og præsentationen af emnet. I nogle tilfælde kan den didaktiske kontrakt være værdifuld, fordi forventningerne kan påkræve læreren og eleven bestemte adfærdsmønstre i en undervisningssituation. Mens den didaktiske kontrakt andre gange kan have forskellige *effekter*. Med andre ord kan nogle forventninger hos læreren og eleven føre til, at læreren påtager sig forskellige uheldige roller, som kan hindre eleven i at udnytte et højt adidaktisk potentiale i det objektivt miljø.

3.5. Effekter af den didaktiske kontrakt

Der er tale om forskellige roller og situationer den didaktiske kontrakt kan skabe: *Topaze-effekten ,Jourdain-effekten, misbrug af analoge miljøer, metakognitive skift, metamatematisk skift* og muligvis andre.

I det følgende gives der kun en definition og illustration af begreberne Topaze-effekten og Jourdain-effekten (Måsøval 2011, s.37-9), fordi jeg kommer til at benytte disse to effekter i mit analyseafsnit.

3.5.1 Topaze-effekten

Topaze-effekten handler om, at læreren i sin undervisning bliver fokuseret på at eleven ingen fejl laver. Det kan medføre at svaret på en opgave eller problemløsning bliver serveret af læreren med opgavestilingen.

Et helt konkret eksempel inden for emnet andengradsligning kunne være følgende:

En elev er i gang med at finde koefficienterne a, b og c i den konkrete andengradsligning $x^2-3x-10=0$ *og går i stå, når han skal finde b. Eleven beder, derfor læren om hjælp.*

I det tilfælde, hvor læreren nærmest peger på -3 i ligningen for at diktere svaret til eleven, er der netop tale om Topaze-effekten. Eller måske lidt mildere kunne læreren starte med at fortælle, at b er altid det tal der står foran x, og peger på x’et i ligningen. Men om det er på den ene eller anden måde, at læreren serverer svaret på, så kaldes denne form for kontrolleret og dikteret situation for *Topaze-effekten*.

3.5.2 Jourdain-effekten

Jourdain-effekten er en form for Topaze-effekten, men hvor læreren slavisk fører eleven hen til det svar, som læreren kan oppuste til at være en større videnskabelig teori. Med andre ord kan en elev være i gang med at løse en meget simpel opgave, hvor læreren har givet nogle hints og ved at eleven får løst den simple opgave kan læreren påstå at eleven har fundet frem til en meget vigtig formel.

Lad os tage udgangspunktet i et eksempel med andengradsligning.

En elev er i gang med at finde løsningerne til følgende konkrete andengradsligning x^2*-3x-10=0. Han har fået en manual på, hvordan man finder frem til løsningen. Deri bliver han bedt om først at finde koefficienterne i den konkrete andengradsligningen og derefter bestemme d=b*^{2}*-4ac, hvorefter løsningen er* $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$ *. Han udregner d=49 og når frem til at x=-2 eller x=5.*

I tilfældet, hvor læreren går hen til eleven og siger fx: ”som du har fundet ud af selv, så vil der altid være to løsninger til en andengradsligning hvis d>0”

Når læreren oppuster elevens simple ligningsløsning til en generel teori eller sætning som eleven muligvis har bemærket kaldes denne didaktiske kontrakts effekt for *Jourdain-effekten.*

Disse to effekter optræder hyppigst i en undervisningssammenhæng. Men lærerens hensigt kan muligvis være at give eleven noget motivation, succes oplevelse, drivekraft, anerkendelse, osv. som kan fører til større interesse og beherskelse i faget.

For at læreren skal kunne videreformidle et emne i sit fag skal hun beherske emne og det kræver at læreren har set emnet fra mange perspektiver (*afsnittet stofdidaktik*).

4. Stofdidaktik

Inden en matematikundervisningstime i andengradsligning kan påbegyndes, skal læreren have en del baggrundsviden omkring emnet. Andengradsligning er kernestof i gymnasiet. Historisk set kan teorien og metoden til løsning af andengradsligningen spores helt tilbage til babyloniernes matematik fra omkring 1800 f.Kr. Dette siger noget om, at emnet er ganske fundamentalt i anvendelsen og det ser fortsæt ud til at være det i gymnasiet. I den forbindelse stilles der krav til at læreren har set emnet fra mange vinkler for at kunne videreformidle det. Disse vinkler kan være bygget af forskellige elementer, såsom algebraisk og geometrisk fuldstændiggørelsen af kvadratet og grafisk betydning af andengradsligningen vha. andengradspolynomium (parabel). Disse indfaldsvinkler belyser emnet andengradsligningen.

4.1 Fuldstændiggørelse af kvadratet

Essensen i løsning og beviset af andengradsligningen er baseret på fuldstændiggørelsen af kvadratet. Der findes to forskellige tilgange til fuldstændiggørelsen af kvadratet, nemlig: den algebraiske metode og den geometriske metode. Jeg vil starte med at gennemgå den historiske kilde, som er min inspirationskilde.

4.1.1 Den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet

Matematikkens historie har længe fascineret mig. Alt hvad matematikerne er nået frem til i dag er baseret på gamle matematiske metoder, som med tiden har udviklet sig og generelt set gået fra konkret-praktisk matematik til abstrakt matematik. I denne forbindelse har andengradsligningsløsning været praktisk til at finde frem til længden (x) og bredden (y) i en rektangulær figur, hvor man fik opgivet arealet (xy) og summen af længden og bredden (x+y) (Katz 2009).

$$at\ løse \begin{cases} x+y=p \\ xy=q \end{cases} \Leftrightarrow at\ løse\ x^2+q=px$$

En udbydende forklaring fremvises i afsnit 4.2.1.

Babylonierne udviklede en algoritme ved hjælp af ”cut-and-past” geometri til at finde løsningen til en andengradsligning i omkring år 1800 f.kr.

I det følgende gennemgås den historiske inspirationskilde. Inspirationskilden er en konkret andengradsligning som løses vha. en algoritme med geometrisk støtte. Denne algoritme bliver kan generaliseres. I følgende afsnit vil jeg parallelt til løsning af det konkrette eksempel (kilden) generalisere algoritmen.

Kilden BM 13901 nr. 1

Da kilden blev skrevet, arbejdede man ikke med symbolske ligningsløsning, men med ligninger der var udformet i tekst. Desuden brugte babylonierne 60-talsystemet[11] fx skrev de 45’ som betød $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. Se kilden (Høyrup (1998), s. 41):

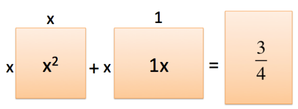
1. *Fladen og min modstilling har jeg lagt i bunke: 45’ er det. 1, fremspringet, sætter du.*
2. *Halvparten af 1 brækker du, 30’ og 30’ lader du holde.*
3. *15’ til 45’ tilføjer du: 1gør 1 ligesidet.*
4. *30’ som du har ladet holde fra det indvendige af 1 udriver du: 30’ er modstillingen.*

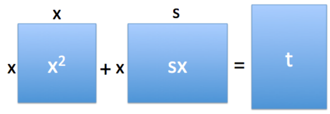
Denne løsningsmetode kan generaliseres til en algoritme. Men det man skal være særlig opmærksom på er, at man her arbejder med andengradsligningen på formen $x^2 + s \cdot x = t$, hvor koefficienten til højstegradsledet altid er lig 1. En geometrisk opstilling af andengradsligningen ses i følgende tabel.

[11] Babylonierne satte én lille streg ved tallet (a´) for at markere, at det var 60’enedele $\frac{a}{60}$ og satte to små streger (a´´) når det antydes $\frac{a}{(60)^2}$ osv.

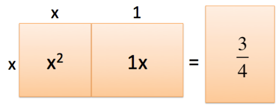
Babyloniernes konkrette ligning	Algoritmen til løsningen af
$x^2+1\cdot x=\dfrac{3}{4}$	$x^2+s\cdot x=t$

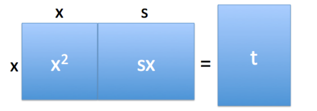
Trin 1*:* Med *Fladen* menes der her kvadratet med en ubekendt side, altså x. Derimod er *modstillingen* et rektangel, der har en side fælles med *fladen,* og hvor *fremspringet* er den anden side på *modstillingen.* Se følgende geometrisk opstilling.



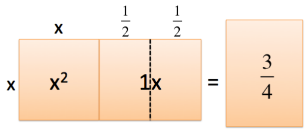


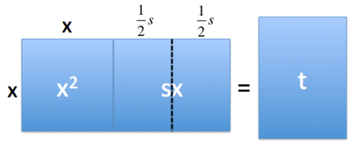
I kilden bliver ordet *bunke* anvendt. Det at ligge i *bunke* vil sige at addere to forskellige størrelser sammen og i dette tilfælde x^2 (todimensionel størrelse) med 1x (endimensional størrelse) (svare til sx i det generelle tilfælde). Se den geometriske opstilling:

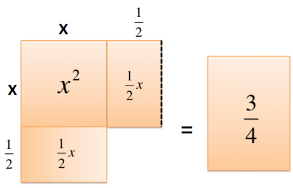


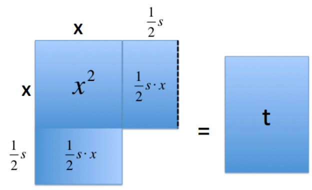


Trin 2*:* Nu skal man brække halvparten af 1 så man har ½ og ½ . Den ene ½ *holdes*, altså anvendes ikke endnu og derefter flyttes det, vha. cut-and-past metoden.
(I det generelle tilfælde halveres s til ½ s og ½ s). Det er nemmest at se det geometrisk, se følgende:

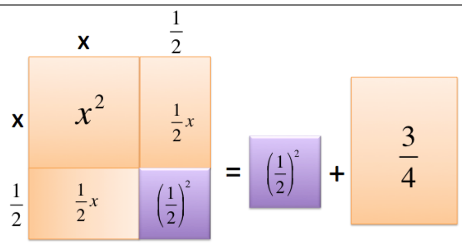


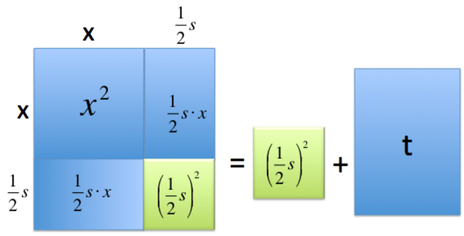




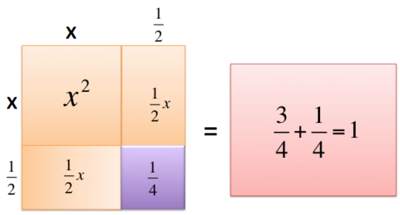


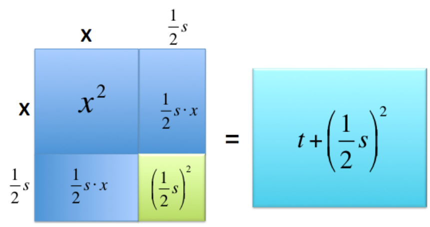
Trin 3*:* Der oplyses, at *15' til 45' tilføjer du*, dvs. at man tilføjer $\frac{1}{4}$ til for at fuldstændiggøre kvadratet på den ene side, der tilføjes også $\frac{1}{4}$ på den anden side af lighedstegnet altså får man $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ på højre side af lighedstegnet. (der tilføjes $\left(\frac{1}{2}s\right)^2$ i det generelle tilfælde). Se den geometriske opstilling.





Rektanglets areal skal er nu $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$. Da arealet af rektanglet er 1 så kan man danne et kvadrat med samme areal, hvor *1 gør 1 ligesidet*, altså med siden 1.
(rektanglet er $t+\left(\frac{1}{2}s\right)^2$ i det generelle tilfælde hvor siden på kvadratet skal svare til $x+\left(\frac{1}{2}s\right)^2$)





Trin 4: Nu ved man at $x+\frac{1}{2}$ skal svare til siden 1. For at bestemme x skal man altså *udrive* (trække fra) $\frac{1}{2}$ og så bliver *modstillingen* $x=\frac{1}{2}$.

(I det generelle tilfælde er rektanglets areal $\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2+t$ dvs. må siden være $x+\frac{s}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+t}$ så $x=\pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+c}-\frac{s}{2}$ $x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2+4t}}{2}$

For at den geometriske opstilling skal give mening kan arealerne på firkanterne kun være positive, det kræver at siderne er positive. Geometrisk kan man højst finde én løsning til en andengradsligning (men i få tilfælde finder man to løsninger, hvis begge x'er er positive). Babylonierne brugte metoden, for de var interesseret i at finde (eksistensen af) en løsning og det kunne man vha. denne algoritme.

Den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet er en metode, hvor man ved hjælp af kendeskabet til kvadratets egenskab om at alle sider er lige lange og arealet på et kvadrat, nemt kan bestemme dens side ved at tage kvadratroden af arealet.

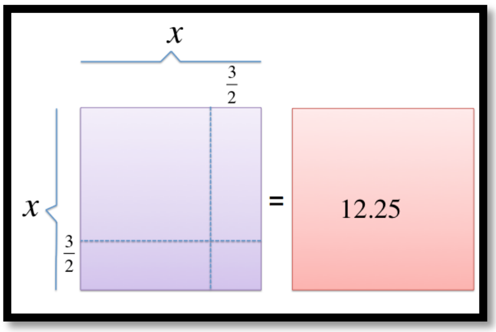
4.1.2 Den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet (vha. geometrien).

Den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet er et redskab, der muliggør visualiseringen af fuldstændiggørelse af kvadratet algebraisk. Tager vi eksempelvis udgangspunktet i andengradsligningen x^2-3x=10, da skulle x^2 stå for arealet af et kvadrat med siderne x, og -3x er arealet af et rektangel med den ene side 3 og den anden x og 10 er arealet af en firkant. Vi kan vha. algebraisk fuldstændiggørelse af kvadratet (uddybes i afsnittet efter) nemt se, at

$$
\begin{aligned}
&x^2-3x=10\\
&x^2-3x+1.5^2=10+1.5^2\\
&(x-1.5)^2=12.25\\
&x-1.5=\pm\sqrt{12.25}\\
&x=1.5\pm3.5\\
&x=5 \quad \textit{eller} \quad x=-2
\end{aligned}
$$

Vi har tilføjet $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, for at kunne danne et geometrisk kvadrat. Algebraen følger med det geometriske da man ved hjælp af kvadratsætningen kan reducere udtrykket så $x^2 - 3x + 1.5^2 = (x - 1.5)^2$.

Denne ligning kan forklares geometrisk som et kvadrat med siderne x-1.5, som har et areal på 12.25 . Dette kan illustreres geometrisk på følgende vis:



Andengradsligningen er blevet løst vha. den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet med en geometrisk støtte.

4.1.3 Fuldstændiggørelse af kvadratet algebraisk

I afsnittet 4.1.1 generaliseres algoritmen for løsningen af andengradsligning på formen $x^2 + sx = t$ vha. geometrisk fuldstændiggørelse af kvadratet. I dette afsnit tages udgangspunktet i samme andengradsligning men løses vha. en algebraisk fuldstændiggørelse af kvadratet. Ved omskrivning af $x^2 + sx = t$ fås $x^2 + sx - t = 0$. Grunden til omskrivningen skyldes et mål om at generalisere løsningen på andengradsligning til formen $ax^2 + bx + c = 0$.

Ved hjælp af substitution udtrykkes $x = z - \frac{s}{2}$ i ligningen $x^2 + sx - t = 0$. Denne substitution er til for at fuldstændiggøre kvadratet algebraisk.

(E & R Bremigan og J Lorch 2011, s.75).:

$$
\begin{aligned}
x^2+sx-t &= \left(z-\frac{s}{2}\right)^2+s\left(z-\frac{s}{2}\right)-t \\
&= \left(z^2+\frac{s^2}{4}-sz\right)+\left(sz-\frac{s^2}{2}\right)-t \\
&= z^2+\frac{s^2}{4}-sz+sz-\frac{s^2}{2}-t \\
&= z^2+\frac{s^2}{4}-\frac{2s^2}{4}-t \\
&= z^2-\frac{s^2}{4}-t
\end{aligned}
$$

z kan nu udtrykkes vha. x sådan, at $z=x+\frac{s}{2}$. Udtrykket indsættes i ligningen efterfulgt af isolering af x.

$$
\begin{aligned}
&\left(x+\frac{s}{2}\right)^2-\frac{s^2}{4}-t=0 \Leftrightarrow \\
&\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}+t \Leftrightarrow \\
&x+\frac{s}{2}=\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}+t} \Leftrightarrow \qquad \left(hvor \quad \frac{s^2}{4}+t\geq 0\right) \\
&x=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}+t} \Leftrightarrow \\
&x=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}+\frac{4t}{4}} \Leftrightarrow \\
&x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2+4t}}{2}
\end{aligned}
$$

Grunden til at der er tale om fuldstændiggørelse af kvadratet er fordi substitutionen medfører en tilføjelse af $\frac{s^2}{4}$ og dermed muliggøre brugen af kvadratsætningen.

Tilføjelsen ses lettest ved et konkret eksempel. Følgende andengradsligning $x^2-3x-10=0$ skal løses vha. den rene algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet. Ved substitution kunne ligningen udtrykkes således:

$x^2+sx-t=\left(x+\frac{s}{2}\right)^2-c-\frac{s^2}{4}$. Dermed kan den konkrette andengradsligning løses på følgende måde:

$$
\begin{aligned}
&x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow \\
&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10=0 \Leftrightarrow \\
&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+10 \Leftrightarrow \\
&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \Leftrightarrow \\
&x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Leftrightarrow \\
&x=\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2} \Leftrightarrow \\
&x=5 \quad eller \quad x=-2
\end{aligned}
$$

I dette tilfælde har vi brugt 2. kvadratsætning $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$. Kendskabet til dobbeltprodukt er afgørende for forståelsen af den tilføjede værdi. Hvis man kigger på eksemplet, så er det dobbelte produkt -3x. Altså -3x svare til -2ab i kvadratsætningen dvs.

$$
\begin{aligned}
&-2ab=-3x \quad hvor \quad a=x \\
&så \quad må \\
&-2b=-3 \\
&b=\frac{-3}{-2}=1.5
\end{aligned}
$$

I eksemplet ses, at $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ bliver tilføjet. Det svarer til, at man generelt tilføjer $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ for at fuldstændiggøre kvadratet, ved at benytte kvadratsætningen. I tilfældet hvor andengradsligning er $ax^2+bx+c=0$, hvor a≠0, så kan man igen ved substitution udtrykke $x=z-\frac{b}{2a} \Leftrightarrow z=x+\frac{b}{2a}$. Ved samme udledningsmetode som før nås frem til:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

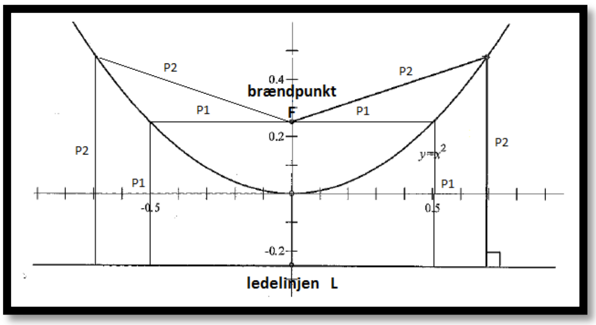
Det er den generelle løsningsformel for andengradsligningen. Her har vi ved hjælp af substitution fuldstædiggjord kvadratet algebraisk og dermed muliggjord løsningen af andengradsligningen. Tricket (substitutionen) er ikke noget man selv ville fundet på. Det vigtigste er ligningen bliver løst.

Andengradsligningen kan også optræde i andre sammenhænge som i skæringen mellem andengradspolynomier og x-aksen. Grafen på andengradsploynomiet kaldes en *parabel*.

4.2 Parabel

Det algebraiske emne andengradsligningen er ofte koblet til andengradspolynomiet, som er et redskab til at bestemme løsningerne på andengradsligningen. Egenskaber på andengradspolynomier er, at den grafisk er U-formet og kaldes for en parabel, som er symmetrisk omkring toppunktet. Man kan desuden definere en parabel geometrisk ved hjælp af distancen mellem en ret linje og et punkt. Hvis vi kalder punktet F for *brændpunktet* og den rette linje for *ledelinje* L (E & R Bremigan og J Lorch 2011, s.70-71).

En parabel kan altså beskrives vha. et brændpunkt F og en ledelinje L, hvor parablen er de punkter, som har lige store afstand imellem ledelinjen og brændpunktet. Hvis vi kigger på figuren så kan vi se, at linjen P1 fra brændpunktet F og til grafen er ligeså lang som fra grafen ned til ledelinjen L. Det samme gælder for linjen P2 fra F til grafen og derefter fra grafen til L.



Brændpunktet kan bestemmes ud fra den generelle andengradsligning $ax^2+bx+c=0$ således, at $\left(-\frac{b}{2a},\frac{1}{4a}+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\right)$. Samtidigt kan ledelinjen bestemmes ved $y=-\frac{1}{4a}+c-\frac{b^2}{4a}$. (E & R Bremigan og J Lorch 2011, s.79).

Andengradspolynomiet giver en visualiseret forklaring på, hvad det betyder at løse en andengradsligning. Man får et grafisk redskab til rådighed.

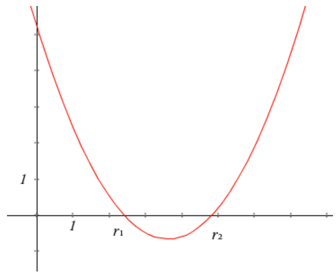
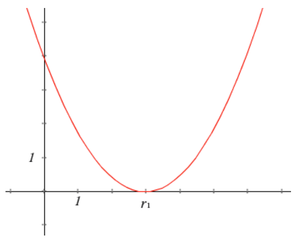
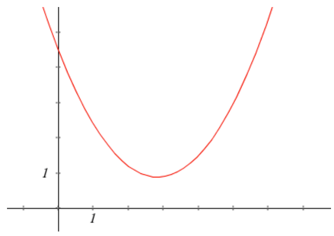
Løsninger i andengradsligningen kaldes for rødder i andengradspolynomiet.

4.2.1 Grafer, rødder og faktorisering for en andengradsligning

Det er relevant for en lærer at vide, at en hver andengradsligning kan faktoriseres således, at dens rødder direkte kan aflæses fra selve ligningen. Det kræver man ved, at rødderne r_1 og r_2 for en andengradsligning $ax^2+bx+c=0$ kan udtrykkes på følgende måde (E & R Bremigan og J Lorch 2011, s.79):

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \& \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \qquad hvor \quad d=b^2-4ac$$

Når rødderne er blevet udtrykt, så kan man omskrive den pågældende andengradsligning til $a(x-r_1)\cdot(x-r_2)=0$. Det vil være interessant at se på sammenhængen mellem andengradsligningens rødder og d. For overskuelighedens skyld, laves en tabel der viser sammenhængen mellem diskriminanten d, rødderne r_1 og r_2 og tilhørende grafer. Se nedenstående tabel:

Diskriminanten d	Rødderne r_1 og r_2	andengradsligningen med rødderne	Grafisk
d>0	r_1 & r_2 er *reale men du reelle*	$a(x-r_1)\cdot(x-r_2)=0$	
d=0	r_1 & r_2 er *reale* og *lig med hinanden*	$a(x-r_1)^2=0 \quad da$ $r_1=r_2$	
d<0	r_1 & r_2 er ikke reale men *konjugerede komplekse*	$a(x-z)\cdot(x-\bar{z})=0 \quad da$ $r_1=\overline{r_2}$ $r_1=z \quad og \quad r_2=\bar{z}$	

Det kan være nødvendigt at kende til de *elementær symmetriske funktioner* der generelt optræder i polynomier af højere grad. De elementære symmetriske funktioner bruges til er at vise en sammenhæng mellem koefficienterne i et polynomium og dens rødder. De elementære symmetriske funktioner optræder i den sammenhæng, hvor det oprindelige polynomium med n'te-grad (n>1) er et nomeret[12] polynomium. Et nomeret andengradspolynomium $P(x)=x^2+bx+c$ kan omskrives til $P(x)=(x-r_1)\cdot(x-r_2)$, hvor r_1 og r_2 er rødderne. Ved ophævelse af parentesen fås:

$$\begin{aligned}&(x-r_1)\cdot(x-r_2)=\\&x^2-r_2x-r_1x+r_1r_2=\\&x^2-x(r_2+r_1)+r_1r_2\end{aligned}$$

Vi kan nu sammenligne de to andengradspolynomier

[12] Når højstegradsledet er 1, altså når a=1. (monic).

$$x^2 + bx + c = x^2 - (r_2 + r_1)x + r_1 r_2 ,$$

og for at vise en sammenhæng mellem rødderne og koefficienterne a,b og c kan vi indsætte udtrykket for rødderne r_1 og r_2 og dermed se hvad summen og produktet giver:

$$\begin{aligned} r_2 + r_1 &= \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 \cdot r_1 &= \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - \left(\sqrt{d}\right)^2}{4a^2} \qquad brug\ 3.kvadratsætning \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Vi betragter et normeret andengradspolynomium, dvs. a=1 som medføre, at

$$\begin{aligned} b &= -(r_2 + r_1) \\ c &= r_1 \cdot r_2 \end{aligned}$$

Tager vi udgangspunktet i eksemplet $x^2 - 3x - 10 = 0$, så skal der gælde følgende:

$$\begin{aligned} -3 &= -(r_2 + r_1) \\ -10 &= r_1 \cdot r_2 \end{aligned}$$

Det er lettest at starte med produktet af de to rødder som skal give -10. Produktet må medfører følgende muligheder (såfremt rødderne er et helt tal) 1·(-10), -1·(10), (-2)·5 eller 2·(-5). Men samtidig skal man huske, at summen af rødderne skal give -3. Derfor må løsningen være r_1=5 og r_2=-2. Det ses, at det kan være nemt at gennemskue løsningerne, forudsat at løsningerne (rødderne) er hele tal. Det er selvfølgelig ikke altid tilfældet, at løsningerne er hele tal, men man kan altid bruge de elementære symmetriske funktioner, som en metode til at vise gyldigheden af løsningerne (rødderne).

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$$

og der gælder at

$$r_1 + r_2 = -b \quad r_1 \cdot r_2 = c$$

så må

$$at\ løse \begin{cases} r_1 + r_2 = -b \\ r_1 \cdot r_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow at\ løse\ x^2 + bx + c = 0$$

Med denne metode kan eleven validere sine resultater. Med andre ord kan denne metode bruges til at skabe adidaktisk potentiale, for det er let at kontrollere om løsningerne er korrekte ved at se om konstantleddet svarer til røddernes produkt. Desuden kan man se om førstegradskoefficienten svarer til summen af rødderne med et minustegn foran.

En anden metode man ofte bruger til at kontrollere løsningerne til en andengradsligning er grafer. Grafer er et redskab som gør det muligt at visualisere arbejdet med andengradsligningen. Så grafer bruges ikke kun til at kontrollere andengradsligningen, men også til at løse den. Grafer har en egenskab der gør abstrakt matematik til mere konkret og illustrerebart model. Med andre ord kan det være nyttigt at flette det algebraiske og grafiske arbejde med andengradsligningen, da det kan give eleven to redskaber til at løse én ligning. Det algebraiske arbejde med andengradsligningen får en bestemt fortolkning i en graf.

Det kan derfor være relevant at se sammenhængen mellem andengradspolynomiets grafiske afbildning og dets koefficienter a,b og c. Sammenhængen gør det lettere at gennemskue den grafiske opførsel på andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$. Man ved, at koefficienten a bestemmer, hvorvidt grenene skal vende op ad eller ned ad, og hvor smal eller bred parablen skal være. Desuden ved man, at koefficienten c er skæringen på y-aksen. Men koefficienten b er svær at give en simpel og bestemt grafisk egenskab til. Sammenhængen er, at b påvirker toppunktsplaceringen.

Generelt set bestemmer a parablens udseende og b og c forskylder parablen i koordinatsystemet uden at ændre på udseendet.

Det ses, at emnet andengradsligninger kan repræsenteres på mange måder.

4.3 Repræsentationer af et matematisk emne

Det har vist sig, at emnet andengradsligningen kan repræsenteres med forskellige *rammer*. En ramme er en sammensætning af matematiske objekter, der danner en bestemt arbejdsform, som har til formålet at belyse et emne med en bestemt vinkel (Artigue, 1992, s.109).

Der er fem matematiske rammer der generelt kan arbejdes med, nemlig (Isabelle Bloch 2003, s.9-10):

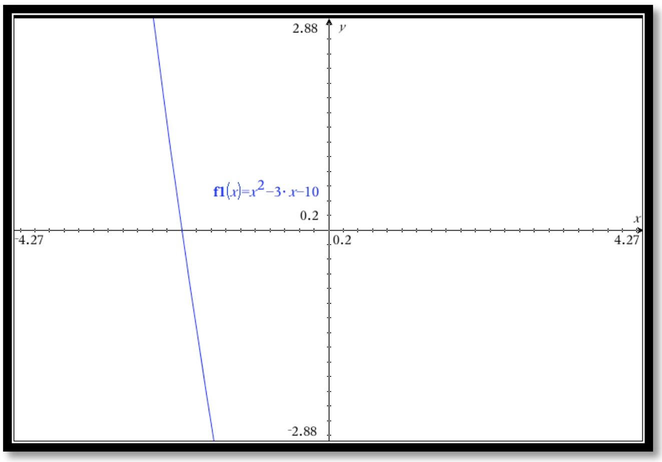
- Den grafiske ramme
- Den algebraiske ramme
- Den geometriske ramme
- Den numeriske ramme
- Den formelle ramme

Jeg vælger, at se på de forskellige rammer med udgangspunktet i emnet andengradsligninger.

4.3.1 Den grafiske ramme

Løsningerne til andengradsligningen synes at være grafiske som rødderne i et andengradspolynomium eller parablens skæring med x-aksen. Her kan en elev validere sine løsninger til en andengradsligning grafisk ved at finde rødderne i et andengradspolynomium. En parabel kan give eleven en visuel fortolkning på andengradsligningen. Det giver eleven større mulighed for at tilegne sig viden om andegradsligningen.

Det kan være vigtigt at overveje de tilfælde hvor rødderne ikke er hele tal, og hvor eleven finder frem til upræcise løsninger. Det bliver svært for eleven at validere sine løsninger, da indsættelsen af de upræcise værdier i den oprindelige ligning ikke vil give noget sandt. Det kan være en forhindring for, at eleven forstår vigtigheden af at finde de eksakte løsninger (rødder). Desuden kan det være tilfældet, at en elev bruger et CAS-apparat og indtaster en given andengradspolynomium ind og får et vindue, der ikke viser rødderne eller måske kun en af de to rødder (se figuren herunder).



I dette tilfælde vil eleven muligvis tro, at der kun eksistere én løsning til denne andengradsligning. Læreren kan informere, at der skal eksistere to rødder, men at dette vindue ikke viser begge. Problematikken ligger i, at eleven ikke ved hvornår han har fundet det rigtige vindue til et given andengradspolynomium. Desuden kan det være vigtigt, at læreren understreger, at når et andengradspolynomium skærer x-aksen et sted, så skal den også skærer x-aksen et andet sted. Det fremkommer af vores viden om komplekse tal, at de kun kan optræder i par. Med andre ord kan vi ikke have en reel rod og derefter en kompleks rod, da den oprindelige andengradsligning har reelle koefficienter og ikke komplekse. Desuden er det vigtigt at vide, at et polynomium med en rod er en multiplikativ rod. Det vil sige, at roden skal fremgå to gange i andengradsligningen $a(x-r_1)^2 = a(x-r_1)(x-r_1) = 0$ og ikke kun en gang. Det vil i et grafisk-vindue svarer til, at grafen tangerer x-aksen og ikke skærer x-aksen.

4.3.2 Den algebraiske ramme

En andengradsligning optræder altid på en algebraisk måde og kan løses algebraisk. Den kan løses ved en algebraisk fuldstændiggørelse af et kvadrat. Det er den bedste måde at kunne overføre en elevs gammel viden om ligningsløsning til den nye måde ved tilføjelsen af tal, der ikke er synlige i ligningen, men som kan gøre en andengradsligning løsebar. Desuden kan det sikre, at eleven kommer frem til de eksakte løsninger. Desuden bevises formlen for andengradsligningen algebraisk. Dette kræver også en større forståelse af algebraiske operationer og igen kommer fuldstændiggørelsen af kvadraten til at spille en stor rolle i beviset.

Brugen af den algebraiske metode kan generelt være problematisk for eleven, der ikke er sikker ved løsning af simple ligninger. Det skyldes at bogstaveregning er endnu sværere konkrette ligningsløsning. Desuden er algebraiske operationer svære at håndtere, når eleven er på sit første gymnasieår, da man kommer fra grundskolen, hvor der sjældent arbejdes med rene algebraiske løsningsmetoder.

4.3.3 Den geometriske ramme

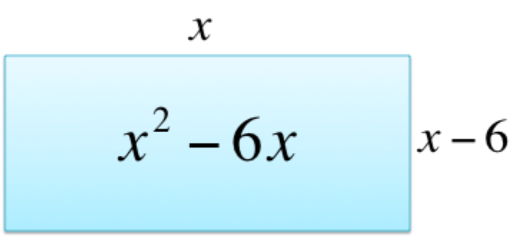
Geometriske kan andengradsligningen optræde i optimeringsopgaver. Optimering refererer til at man til en given funktion enten skal bestemme maksimum eller minimum, for at finde den optimale løsning. Det gøres matematisk ved brug af differentialregning.

Helt konkret optræder geometrien i form af et rektangel, hvor længden og bredden ikke er ens[13], og hvor den ene side afhænger af den anden. Ved at bestemme arealet af et givet rektangel så kan man nå frem til en funktion, hvor den uafhængige variabel er kvadreret.

Et eksempel på en optimeringsopgave kunne være:

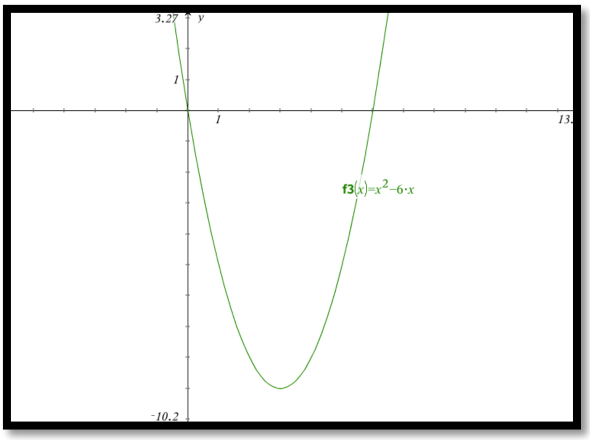
I et rektangel er den korte side 6 cm kortere end den lange.
Er det muligt at bestemme én værdi af x, så arealet af rektanglet bliver så lille som muligt? – og så stort som muligt? (svaret skal begrundes)

Der forventes, at eleven selv kan tegne følgende geometriske figur og bestemme arealet på rektanglet.



Desuden kræves der, at eleven kan bestemme definitionsmængden på arealet $Dm(A(x))$ hvor $A(x) = x^2 - 6x$ og muligvis tegne A(x) grafisk.

[13] de kan også godt være ens

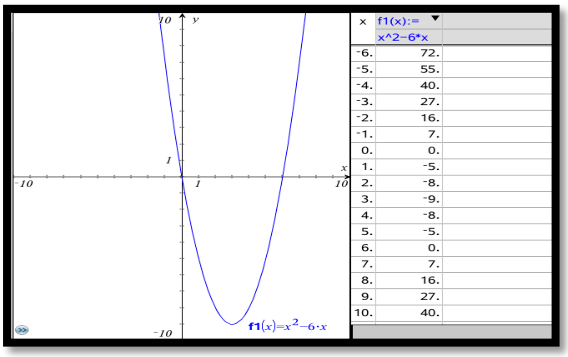


Man kan beregne sig frem til minimum ved at differentiere funktionen og sætte den lig nul, og derefter kontrollerer grafisk, at x-værdien på toppunktet er den sammen som den udregnede. Hvis man som elev kommer igennem alle skridt vil det være lige til at kunne argumentere for sine resultater.

Desuden optræder andengradsligningen geometrisk i fuldstændiggørelse af kvadratet (som er beskrevet detaljeret i starten af dette kapitel). Fordelen ved denne ramme er, at eleven visuelt ser betydningen af løsningen af andengradsligningen. Til gengæld bruges geometrien som et redskab til at forstå løsningen på andengradsligningen, og for nogle elever bliver det en nødvendighed for at løse andengradsligningen og dermed kommer til at ende med kun én løsning (for den negative løsning giver ikke nogen mening geometrisk set).

4.3.4 Den numeriske ramme

Den numeriske ramme optræder altid i forbindelsen med funktioner. Det bliver ofte illustreret vha. en tabel, der giver en oversigt over sammenhængen mellem den uafhængige variabel og den afhængige variabel (se følgende figur).



x	f1(x):= x^2−6*x
-6.	72.
-5.	55.
-4.	40.
-3.	27.
-2.	16.
-1.	7.
0.	0.
1.	-5.
2.	-8.
3.	-9.
4.	-8.
5.	-5.
6.	0.
7.	7.
8.	16.
9.	27.
10.	40.

I forbindelse med andengradsligningen kunne vi tage udgangspunktet i følgende funktion $f(x) = x^2 - 6x$, som er afhængig af variablen x, og det bliver illustreret i tabellen, hvor man fx kan se, at når x=1 så er f(1)=-5 osv. Denne ramme kan blive brugt af eleverne ved løsning af andengradsligning. Eleven får til opgave at løse andengradsligningen $x^2 - 6x = 0$, hvor han eksempelvis starter med at gætte på, at 0 er den ene løsning som viser sig at være sand. For at finde den anden løsning prøver eleven at sætte 1,2,3 ind på x´s plads og får et større og større negativt tal. Når eleven prøver at sætte 4 ind på x's plads viser det sig at værdien bliver mindre negativ og det får eleven til at fortsætte denne retning til han når at x=6 er en løsning. Denne metode, hvor eleven gætter sig frem til løsningen, kaldes i matematikken gætte og tjek[14]. Altså er det en metode, hvor man gradvis tilnærmer sig løsningerne. Fordelen kan være, at eleven har mulighed for at løse en andengradsligning ved så en simpel ting som at gætte. Den numeriske ramme kan til gengæld få en elev til at bruge lang tid på at gætte den rigtige løsning på en andengradsligning. Desuden kan det være svært for elever at finde eksakte ikkeheltal løsninger.

4.3.5 Den formelle ramme

Den formelle ramme indeholder alt fra definitioner, sætninger til beviser af sætninger. Når man tilkobler den formelle ramme med andengradsligningerne så er der tale om definitionen på en andengradsligning, beviset for løsningsformlen på andengradsligningen, toppunktsbevis osv. Den formelle ramme er med andre ord baseret på matematiske antagelser, som kan udledes nogle gange rent algebraiske og andre gange vha. algebraisk-geometrisk og algebraisk-grafisk støtte.

Den formelle ramme er den mest brugte ramme på universitetsniveau, hvor man ud fra definitioner udleder sætninger osv. Den ramme er en matematisk abstraktion, som alle matematikere ønsker at opnå. Samtidigt er det den sværeste ramme at opnå indsigt i matematik på, da det kan virke meget abstrakt. Dette medfører at det er et meget højt niveau at lære matematik på og kan derfor være meget svært for elever på gymnasieniveau. Den formelle ramme optræder på gymnasi-

[14] guess and check

eniveau, men opfattes af eleven som den sværeste del af matematikken. Der er mange beviser i forbindelse med andengradsligningen som gymnasieeleven kommer til at arbejde med. Eleven ser beviset for den generelle løsningsformel, toppunktet og faktoriseringen af andengrads-polynomiet.

Optimeringsopgaver kan også optræde i forbindelse med andengradsligningen. Det kræver differentiering, og i denne kobling får man lært den gennerelle metode man at differentiere polynomier af højere grad[15]. Der er altså mange elementer af den formelle ramme som fx definitioner, sætninger, formler og regnerregler, der hører til under emnet andengradsligninger. Men som tidligere nævnt, er det også den sværeste ramme for eleven at arbejde med.

[15] Generelt er der tale om denne regneregel
$P(x)=(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0)$
$P'(x)= n\, a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \dots + 2a_2 x + a$

5. Empirisk problemformulering

”Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet”

Mit overordnet mål er at undersøge didaktiske situationer for den algebraiske viden, der forudsættes for at løse andengradsligninger, specielt fuldstændiggørelse af kvadrater (som ofte fremstår som et ”trick” i et bevis, der i øvrigt hurtigt glemmes igen). Jeg vil først undersøge de adidaktiske potentialer i et almindeligt undervisningsforløb om andengradsligninger. Jeg har observeret et ”standardforløb” på B-niveau, som varede i 8 moduler á 90 minutter, og vil fokusere på objektive didaktiske miljøer, hvor der indgik et adidaktisk potentiale. Jeg vil derudover undersøge, hvorvidt det adidaktiske potentiale optræder i det subjektive miljø. Jeg vil dernæst undersøge en hypotese om, at eleven har nemmere ved at arbejde selvstændigt med algebraiske sammenhænge, hvis de er tilkoblet en geometrisk repræsentation. Jeg vil derfor designe og afprøve didaktiske situationer med en høj grad af adidaktiske potentiale knyttet til geometriske repræsentanter, og som omfatter processen fra eleven møder det matematiske problem ”andengradsligning” til de har fundet en algoritme (algebraisk løsningsmetode). Dernæst vil jeg sammenligne det standard forløb med mit designede afprøvede forløb med særlig fokus på betydningen af de geometriske repræsentationer.

6. Metodologi

For at kunne besvare min problemstilling har jeg fulgt en 1.g (standardforløb) og 2g (det designet forløb) klasse, som havde et undervisningsforløb om andengradsligning. Ud fra mine observationer vil jeg prøve at udplukke vigtige episoder, som kan give et indtryk af, hvordan den tilsigtede viden er blevet opnået. Hermed vil jeg undersøge om episoder med adidaktiske potentiale optræder, og se efter hvornår den didaktiske kontrakt er i kræft.

6.1 Standard forløbet

Jeg har fulgt undervisningsforløbet i 1.c fra Falkonergårdens gymnasium i uge 18, 19 og 20 i 2012, hvor jeg i alt observerede 8 moduler á 90 minutter. Klassen har en samfundsvidenskabelig studieretning, hvor de har samfundsfag på A-niveau, engelsk på A-niveau og matematik på B-niveau. Klassens matematiklærer er en 40-årig mand, der både underviser i matematik og fysik. Han har været lærer i 7-8 år. Matematiklæreren er desuden meget teknologisk bevidst, altså går op i CAS-værktøjet, bruger smartboard, bruger et program på hjemmesiden Mixedink.com[16] til at formidlere emnet andengradsligning.

I dette undervisningsforløb blev der gennemgået følgende:

- Grafisk betydningen af koefficienterne a, b og c i den generelle andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$.
- Grafisk betydningen af koefficienterne h og k i andengradsligningen $a(x-h)^2 + k = 0$.
- Bestemmelsen og betydningen af diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ både algebraisk og grafisk.
- Bestemmelsen af toppunktet både grafisk og algebraisk.
- Løsning af konkrette andengradsligninger der ser ud på følgende form: $x^2 = d$, $(x \pm a)^2 = d$, $x^2 + a^2 \pm 2ax = d$
  hvor man kan benytte sig af kvadratsætningerne i de sidste tilfælde.
- Algebraisk udledning og anvendelsen af den generelle løsningsformel for andengradsligningen.
- Grafisk ligningsløsning.
- Brug af CAS solve-funktion til løsningen af andengradsligninger.
- Faktorisering af andengradsligning på formen $a(x-r_1)(x-r_2) = 0$, hvor r_1 og r_2 er rødder.

[16] Det er et program der giver en mulighed for at hele klassen kan skrive noget på sammentiden og se hvad andre har skrevet hvor de desuden kan vurdere hinandens input.

Noget meget centralt for emnet er kvadratsætninger og disse blev gennemgået i starten af skoleåret, så dem skulle eleven kunne anvende i emnet andengradsligning. Dette grundredskab fik jeg desværre ikke mulighed for at observere elevens tilegnelse af.

I dette undervisningsforløb havde læreren planlagt en del gruppearbejde men hvor der var plads til både devoultionsfaser og institutionsfaser.

6.2 Det designet forløb

Jeg har fulgt undervisningsforløbet i 2.e fra Ørestad Gymnasium i uge 36, 37 og 38 i 2012, hvor jeg i alt observerede 3 moduler á 90 minutter. Klassen har en samfundsvidenskabelig studieretning, hvor de har samfundsfag på A-niveau, engelsk på både A- og B-niveau og matematik på B-niveau. Klassens matematiklærer er en 60-årig mand, der både underviser i matematik og fysik. Han har været lærer i mere end 15 år.

I dette undervisningsforløb blev der gennemgået følgende:

- Geometrisk illustration af operationerne: addition og subtraktion, multiplikation og division.
- Geometrisk opstilling af simple 1.gradsligninger
- Geometrisk illustration af kvadratsætning 1 og 2
- Geometrisk illustration af simple andengradsligninger. Både andengradsligninger hvor koefficienten b er nul ($ax^2 + c = 0$) og andengradsligninger der kan reduceres til en af de to første kvadratsætninger (ligninger på formen $(x \pm a)^2$).
- Gennemgang af et konkret eksempel på andengradsligningens løsningmetode vha. fuldstændiggørelse af kvadratet (cut-and-past).
- En algebraisk udledning af den generelle løsningsformel for andengradsligningen vha. geometrisk fuldstændiggørelse af kvadratet.

Det centrale i emnet er kvadratsætninger og disse blev også gennemgået i starten af sidste skoleåret (starten af 1g), dem skulle eleven kunne anvende i emnet andengradsligning. Dette grundredskab fik jeg desværre ikke mulighed for at observere elevens tilegnelse af.

I dette undervisningsforløbet var der planlagt en del gruppearbejde men hvor der var plads til både devoultionsfaser og institutionsfaser.

Da jeg skal analysere dele af undervisningsforløbet er det vigtigt, at jeg kan udvælge og gengive centrale episoder.

6.3 Indsamling af data

For at kunne gendanne dele af begge forløb har jeg lydoptaget hvert modulet både når læreren indleder og afslutter timen og når eleven sættes i grupper for at løse opgaver. Lydoptagelserne gør det muligt at gendanne og fremhæve episoder, hvor et objektivt miljø med adidaktiske potentiale bliver håndteret i et subjektivt miljø (af en gruppe). Desuden kan man bruge episoder til at høre de forskellige diskussioner omkring det faglige, som kan tydeliggøre nogle spilleregler fra den didaktiske kontrakt.

Begge lærere har været hjælpsomme og sende mig alle de noter de har fået skrevet eller vist i hvert modul. Dette inkluderer også alle opgaver der blev stillet og den del af matematikbogen[17], som eleven skulle beskæftige sig med i forløbet. Grunden til indsamling af elevnoter er muligheden for at understrege epistomologiske og didaktiske forhindringer eller løsningsmetoder ved opgaveløsning.

Jeg har samtidigt noteret mig i store træk forløbet af et modul. Det inkluderer tidsdeling af de forskellige hændelser i klasserummet, hvad læreren skriver på tavlen, specielle elevkommentarer osv. Noterne har været relevante, da de giver en tidsfornemmelse af modul forløbet og dermed antyder det, hvor lang tid der bliver brugt på enkelte didaktisk/adidaktisk situation.

6.4 Analyse metoden

Standard forløbet: Mit hovedfokus er at se på den grafiske rammes samspil med den algebraiske ramme. Herunder kan jeg ved hjælp af min dataindsamling udpege nogle problematikker ved de to rammers samspil, som kan gøre eleven

[17] Gælder kun for standardforløbet.

usikker på elementære logiske slutningsmetoder. Herudover vil jeg grave efter nogle episoder, som tydeliggør nogle spilleregler fra den didaktiske kontrakt, som også kan påvirke elevenes usikkerhed omkring elementære logiske slutningsmetoder.

Jeg vil efterfølgende udplukke nogle objektive didaktiske miljøer, som indeholder høj adidaktisk potentiale og transskriberer tilhørende episoder, hvor eleverne håndterer opgaven i det subjektive miljø. Herefter vil jeg undersøge, hvorvidt valideringsfaserne er didaktisk eller adidaktisk.

Disse fokuspunkter vil hjælpe mig med at besvare en del af problemstillingen og desuden til at kunne designe et forløb med geometrisk ramme, som indeholder en høj adidaktisk potentiale.

Det designet forløb: Her vil mit hovedfokus være en tydeliggørelse af "tricket" fuldstændiggørelsen af kvadratet i udledningen af løsningsformlen for andengradsligningen. Derfor vil designet blive baseret på sammenspillet mellem den algebraiske ramme og geometrisk ramme. Desuden vil konstruktionen af designet indeholde et stort adidaktisk potentiale da den geometriske ramme vil give beviset *mening*. Det vil blive understøt ved udvælgelse af relevante episoder som transskriberes.

Når det er gjort er det muligt at sammenligne den grafiske og den geometriske rammes sammenspil med den algebraiske ramme og dermed fuldstændiggøre besvarelsen af min problemformulering.

7. Analyse af standard forløb

I dette afsnit vil jeg bearbejde dataindsamlingen fra standard forløbet. Lydoptagelserne er blevet transskriberet for alle 8 moduler á 90 minutter. Dette er blevet benyttet til at udvælge de vigtigste episoder, som har til formål at kunne belyse en del af min problemstilling.

Jeg har udvalgt en episode, som har til formål at belyse den del af problemstillingen som omhandler hypotesen om elevens besværlighed ved bevisgennemgangen af den generelle løsningsformel for andengradsligningen i et standard forløb. Med andre ord er hypotesen, at fuldstændiggørelsen af kvadratet i den algebraiske ramme optræder som et mystisk trick.

Jeg vil starte med en fremstilling af forløbet i grove træk (Originale lærer noter og arbejdsark ses i bilag). Derefter vil jeg udvælge relevante episoder fra standard forløbet. Jeg vil så fremhæve det objektive miljø og derefter gå i dybden med den a priori analyse efterfulgt af en a posteriori analyse af episoden.

En anden del af min problemstillig er at designe et undervisningsforløb baseret på en geometrisk ramme med et højt adidaktisk potentiale. Jeg udvælger derfor to relevante og inspirerende slides fra standardforløbet, som indeholder et højt adidaktiske potentiale, og analyserer dem.

7.1 Fremstillingen af standard forløbet

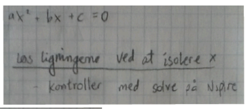
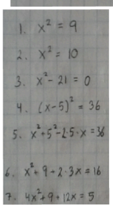
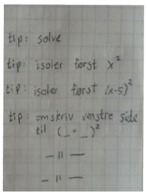
Modul 1

Lærerrolle	Elevaktivitet
Læreren starter med gammelt viden om eksponentiel funktionen, potensfunktionen og lineær funktionen (som enten kan være voksende eller aftagende funktioner) Definere andengradspolynomium som $f(x)=ax^2+bx+c$ hvor $a\neq0$	Elevkommentar: andengradspolynomiet er både voksende og aftagende.
Læreren udlevere et ark til eleverne. Arket indeholder opgaver om koefficienterne a,b, og c's grafiske betydning. (se bilag)	Eleverne er i gang med opgave løsning. Har lidt svært ved at lave nogle skydere for koefficienterne i andengradspolynomiet i Ti-Nspire. Selvom læreren har lavet en manuel.
Opsamling af opgave 1 (udpegning af a,b og c i konkrette andengradspolynomier)	Eleverne er aktive og mange deltager ved at svare på lærerens spørgsmål.
Resten af modulet bruges på at løser arket. Læreren hjælper	En høj elevaktivitet

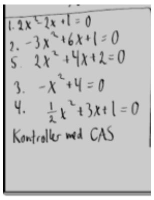
Modul 2

Lærerrolle	Elevaktivitet
Starter med en opsamling af opgave 2 i arbejdsarket	Elevkommentar: Hvis a er positiv så har vi en glad parabel og toppunktet er minimum. a bestemmer hvor bred andengradspolynimiet er. Høj elev aktivitet ved besvarelsen af opgaverne.
Læreren giver eleven nogle opgaver de skal arbejde med. Opg. 1 finde toppunkter på konkrette andengradspolynomier Opg. 2 Angive en rækkefølge på 2.gradspoly. hvor polynomiet der er stejlest og vender opad skal stå først (se bilag)	Eleverne bruger toppunktsformlen og bruger Ti-Nspire.
Arbejder med diskriminanten for andengradsligningen. Antal løsning afhængig af d>0, d<0 og d=0.	En elev laver en besvarelse i Excel hvor han skriver angiver koefficienterne a,b og c fra 2.gradspoly. skriver formlen for d så det selv bliver regnet ud (mekanisk). Ellers bruger klassen formlen for udregning

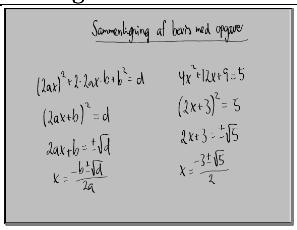
Modul 3

Lærerrolle	Elevaktivitet
Starter med en opsamling på opgaverne. Opg. 1. Bestemmelsen af toppunktet. Opg. 2 bestemmelsen af diskriminanten.	Elevdeltagelse ved at bidrage til svar på de forskellige opgaver.
En opsamling af hvad a, og c's grafiske betydning	De fleste elever har været igennem det første ark og har dannet sig et billede af sammenhængen mellem koefficienterne i et 2.gradspoly. og grafen.
Eleven får til opgave at løser andengradsligninger algebraisk. Starter med simple andengradsligninger og ender med andengradsligninger som reduceres vha. kvadratsætningerne. (en af de inspirerende opgaver)	En del elever har besværlighed med opgave 5,6 og 7 hvor man skal reducere en andengradsligning vha. kvadratsætningerne.

Modul 4

Lærerrolle	Elevaktivitet
En opsamling fra modulet før. Starter med at se på sammenhængen mellem diskriminanten og antal løsninger	Eleverne har tilegnet sig viden om sammenhængen mellem diskriminantens og antallet af løsninger i en andengradsligning og dermed har let ved at svare.
 Giver eleverne nogle opgaver. Hvor de skal bruge den grafiske løsning og kontrollere med CAS.	Eleverne løser opgaverne gruppevis og bruger CAS.
Bevise den generelle løsningsformel for andengradsligning. Læreren beder eleverne om at bruge mixedink.com (denne episode uddybes senere og ville blive kaldt for episode 1S)	Eleverne arbejder gruppevis omkring opgaven. En negativ stemning spreder sig omkring det mystiske trick ved at gange med 4a i starten af beviset.

Modul 5

Lærerrolle	Elevaktivitet
Opsamling af beviset. Viser den bedste udgave af trin beskrivelsen (Læreren har set på de bedte elevformuleringer til hver trin og har dannet den bedste trinvise forklaring på beviset) (se bilag)	Usikkerhed omkring kvadratsætningerne
Gennemgang af første kvadratsætning da der var usikkerhed omkring det i beviset.	
 maj 9-10:35 For at læreren skulle tydeliggøre tricket i beviset af løsningsformlen så gennemgås følgende slide ”Sammenligning af bevis med opgaver” (en af de inspirerede opgaver)	

Modul 6

Lærerrolle	Elevaktivitet
Starter med en gennemgang af beviset for den generelle løsningsformel for andengradsligninger.	Elevgennemgang af beviset (brugte sine noter) ellers en fin gennemgang.
Arbejder med parmeter opgaver. Opgavetyper hvor d=0, d>0 eller d<0 og så skal man finde frem til den manglede koefficient i andengradspolynomiet.	Elevgennemgang af en parmeteropgave (dygtig elev brugte ingen noter og svarede på spontane spørgsmål)

Modul 7

Lærerrolle	Elevaktivitet
Dagens tema er faktoropløsning af polynomier. Læreren har på forhånd opdelt klassen i grupper. Han har lavet et arbejdsark som er delt op i to spørgsmål. Halvdelen af klassen bedes arbejde med spørgsmål 1 og den anden halvdel af klassen bedes arbejde med spørgsmål 2 (se bilag).	Høj elev aktivitet
Efter et halvt modul skal halvdelen af hver gruppe som arbejdede med spørgsmål 1 danne par med halvdelen af en anden gruppe som arbejdede med spørgsmål 2. Her er målet at eleverne lærer at videreformidlere de resultater de er nået frem til.	Eleverne er meget aktive.

Modul 8

Lærerrolle	Elevaktivitet
Læreren giver eleverne et arbejdsark hvor de skal arbejde med polynomier af højere grad i forlængelsen af forløbet med andengradspolynomier. (Læreren skal tale individuelt med eleverne omkring karakter)	Eleverne er på egen hånd. Lidt uro. Men når de har brug for hjælp spørger de læreren før en ny elevsamtale starter.

7.1.1 Fremstillingen af episode 1S i kontekst

Episode 1S optræder i modul 4 som set i afsnit 7.1 (skrevet med pink). Eleven har på det tidspunkt fået arbejdet med emnet andengradsligning en del. Jeg vil derfor skitsere relevante viden eleven har med før dette modul. Eleverne har arbejdet med:

- Den grafiske betydning af koefficienterne a,b og c i den generelle andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$.
- Den grafiske betydning af koefficienterne h og k i andengradsligningen $a(x-h)^2 + k = 0$. Bestemmelsen og betydningen af diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ både algebraisk og grafisk.
- Bestemmelsen af toppunktet.
- Anvendelsen af den generelle løsningsformel for andengradsligningen til løsningen af en vilkårlig andengradsligning.
- Grafisk ligningsløsning.
- Brug af CAS solve-funktion til løsningen af andengradsligninger.
- Løsning af konkrette andengradsligninger der ser ud på følgende form: $x^2 = d$, $(x \pm a)^2 = d$, $x^2 + a^2 \pm 2ax = d$
  hvor man kan benytte sig af kvadratsætningerne i de to sidste tilfælde.

Det sidste punkt er relevant for beviset, da eleven får arbejdet med kvadratsætningerne, som muliggør tilegnelsen af viden om den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet. Det er meget centralt, da essensen i beviset bygger på fuldstændiggørelsen af kvadrattet.

Jeg vil nu gå mere i dybden med episode 1S' kontekst. Det gøres ved en udfoldelse af modul 4.

Tid (min)	**Overordnet aktivitet**	**Aktivitet**
5	Diskussion omkring afleveringen	
8	Læreren beder eleverne løse de opgaver, som de ikke nåede fra modulet før.	Da ikke alle elever har fået løst opgaverne fra sidste modul sætter læreren 10 min af til det. Han starter med at skrive den generelle andengradsligning og dens løsning . Derefter skriver han 5 opgaver eleverne skal arbejde med.
24	Gruppe arbejde	Klassen har delt sig op i grupper og sidder og løser de opgaver de ikke nåede i modulet før. De får tid til at løse de 5 opgaver og kontrollere med CAS.
		Læreren runder op. Han vælger ikke at gennemgå opgaverne, men siger at man kan kontrollere efter med både CAS eller ved at indsætte den fundne løsning ind på x's plads i ligningen.
17	Intro til at bevise løsningsformel for andengradsligningen vha. Mixedink.com	Her introducerer læreren til hjemmesiden Mixedink.com, som giver eleverne mulighed for at kunne skrive samtidigt, men hver for sig, og "låne" (bruge) og vurdere formuleringer andre elever har indsat. Det skal bruges til, at eleverne forklarer, hvad der sker i beviset for andengradsligningens løsningsformel.
		Eleverne registrerer sig på hjemsiden
7	Pause	
30	Arbejde med at bevise løsningsformel for andengradsligningen	Læreren introducerer opgaven om at man skal formulere sig skriftligt i hvert skridt i beviset
		Gruppearbejde: Bevise løsningsformlen for andengradsligningen
		Læreren runder af: vil vide om programmet var brugbart og om de skal fortsætte med det de slap til næste gang.

Tabel 7.1 Oversigt over modul 4

Episode 1S ligger i det markerede felt (skrevet med pink) hvor eleven arbejder for første gang med beviset for den generelle løsningsformel af andengradsligningen. I denne sektion bliver eleven bedt om at forklare skriftligt, hvad der sker trinvist i beviset. Den præcise opgaveformulering kommer til syne i afsnittet *det objektive miljø (afsnit 7.1.2)*. I episode 1S vil jeg fremhæve elevens besværlighed ved tilegnelsen af "tricket" for fuldstændiggørelse af kvadratet.

7.1.2 Det objektive miljø i episode 1S

Matematiklæreren giver klassen beviset for løsningsformlen til andengradsligningen. Elevens opgave er at forklare gruppevis (formulere skriftligt), hvad der trinvis sker i beviset. Han bruger et program ved navn Mixedink, som gør det muligt for klassen at skrive samtidigt. Desuden kan eleverne vurdere og bruge hinandens input. Lærerens idé er, at eleverne bruger og vurderer de forskellige input til beviset. Det kan netop bruges til at forme den bedste udgave af formuleringer til bevistrinene. Mere konkret kan eleverne give 1-5 stjerner for hver formulering og de formuleringer med flest stjerner bliver vurderet, som den bedste udgave. Her er lærerens opgaveformulering:

I skal forklare beviset for løsninger til andengradsligninger $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a \neq 0$:

For d>0 er der to løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$ hvor $d = b^2 - 4ac$

For d=0 er der én løsning $x = -\frac{b}{2a}$

For d<0 er der ingen løsninger

A. d>0

Forklar nedenstående omskrivninger:

1. $ax^2 + bx + c = 0$
2. $4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$
3. $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
4. $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
5. $(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$
6. $(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$
7. $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
8. $(2ax + b)^2 = d$
9. $2ax + b = \pm\sqrt{d}$
10. $2ax = -b \pm \sqrt{d}$
11. $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

B. d=0

Hvad skal justeres i de 11 punkter?

C. d<0

Hvorfor er der ingen løsninger her?

(Hvor i de 11 punkter kan man se, at der ingen løsninger er?)

Billede 7.1 Opgaven i episode 1S

Her er der en tilsigtet viden eleven skal opnå ved løsning af opgaven. Desuden kan det adidaktiske potentiale i opgaven spille en stor rolle i løsning af opgaven. Så disse to elementer vil jeg kigge nærmere på i følgende afsnit.

7.1.3 Den tilsigtet viden og det adidaktiske potentiale i det objektive miljø

Der kan undersøges hvor stort et adididaktisk potentiale det objektive miljø indeholder. Starter man med at kigge på begyndelsen af opgaveformuleringen som ser ud på følgende:

I skal forklare beviset for løsninger til andengradsligninger $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a \neq 0$:

For d>0 er der to løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$ hvor $d = b^2 - 4ac$

For d=0 er der én løsning $x = -\frac{b}{2a}$

For d<0 er der ingen løsninger

billede 7.1.1 (udsnit af billede 7.1)

Så kan vi se, at der står ordet *forklare* som henviser til, at eleverne skal kunne *argumentere* og dermed har læreren et ønske om, at eleven *validere* sine egne resultater. Det sker ved, at eleven viser gyldigheden i biimplikationstegnet. Så primært er den tilsigtet viden at validere trinene i beviset. Det vil sige der er en form for adidaktisk potentiale i opgaven. Første omskrivning i beviset ser således ud:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$$

Der ganges med 4a, som ikke oprindelig står nogen steder i den generelle andengradsligning. Den tilsigtet viden her er, at eleven får overbygget sin viden om ligningsoperationer. Eleven har før arbejdet med forskellige typer ligninger, hvor de har fået at vide, at i ligninger skal man isolere den ubekendte ved at "flytte" alle tal i ligningen på den anden side af lighedstegnet. Det eleven har arbejdet med er eksistere tal i den oprindelige ligning som flyttes for at isolere den ubekendte. Denne opgave giver eleverne en ny forståelse af ligningsoperationer. Det ses når man ganger med 4a som ikke er et eksisterende tal i den oprindelige ligning. Den tilsigtet viden i denne opgave overbygger elevens værende viden om ligninger. Det ses tydeligt, at beviset forgår i den rene algebraiske ramme, som er meget svær for eleven at håndtere. Denne ramme kræver, at eleven kender til logiske slutningsregler, hvor man som elev skal være bevidst om hvilken antagelser der er og hvad der skal bevises. Elevens forståelse af bevisteknik er ikke fuldstændig i 1g. Det fører til en mindre adidaktisk potentiale i opgaven, fordi eleven ikke ved hvordan man validere beviser.

Den valgte ramme i beviset spiller en stor rolle i størrelsen af det adidaktiske potentiale. Det er relevant at kigge nærmere på rammen i beviset.

7.1.4 Den formelle og algebraiske ramme optræder i det objektive miljø

I det objektive miljø ses det, at både den algebraiske og formelle ramme er på spil. Klassen har i forbindelse med emnet andengradsligningen arbejdet med den grafiske ramme som støtte til den algebraiske ramme. Det er en almindelig kombination i emnet, da den grafiske ramme giver eleverne et ekstra værktøj at arbejde med. Eleven har før episode 1S brugt den grafiske ramme til at kontrollere og validere løsninger. Men i episoden 1S bedes eleven om at arbejde i den rene algebraiske ramme. Dette gør opgaven svær for eleven. Den formelle ramme gør det ikke lettere, da eleven skal sætte sig ind i definitioner, antagelser og sætninger. At eleven ikke kan benytte sig af den grafiske ramme gør det besværligt. Det er som at give eleverne et redskab til et emne og så tage redskabet fra dem i midten af emnet.

Opgaven skal løses på en bestemt måde og dette vil blive skitseret i følgende afsnit.

7.2 A priori analyse af opgaverne i episode 1S

Læreren har stillet en opgave, som kan løses ved kendskab til ligningsoperationer. Så her er et udkast til en fuldstændig besvarelse af opgaven.

Besvarelse af opgave A.

Trin	***Beviset for løsningsformlen på 2.gradsligningen i trin***	***Forklaring på hvert trin og validering***
1.	$ax^2 + bx + c = 0 \ hvor\ a \neq 0$	
2.	$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$	1-2. Man ganger med 4a på begge sider af lighedstegnet. 2-1. Man dividerer med 4a på begge sider af lighedstegnet $(a \neq 0)$
3.	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	2-3. Man ganger 4a ind i parentesen 3-2. Fælles faktoren i alle led er 4a. Derfor sættes den ude foran en parentes.
4.	$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$	3-4. Man trækker 4ac fra på begge sider af lighedstegnet. 4-3. Man adderer 4ac til på begge sider af lighedstegnet

5.	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$	4-5. Man reducerer udtrykket $4a^2x^2$ og ved at faktorisere 4abx, så det tydeligt kan ses, at der er "dobbelt produkt" (jf. Kvadratsætning) 5-4. Ophæver parentesen og reducerer "dobbelt produktet"
6.	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$	5-6. Man adderer b^2 til på begge sider af lighedstegnet 6-5. Man trækker b^2 fra på begge sider af lighedstegnet
7.	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$	6-7. Man bruger første kvadratsætning til at reducere venstre side. 7-6. Man ophæver parentesen.
8.	$(2ax + b)^2 = d$	7-8. b^2-4ac defineres til at være d 8-7. d er defineret som b^2-4ac
9.	$2ax + b = \pm\sqrt{d}$	8-9. Man tager ±√ på begge sider af lighedstegnet og det kan man netop, fordi vi har antaget, at d>0 (og det er underforstået, at både konstanterne og den ubekendte er reelle tal) 9-8. d isoleres og derfor kvadreres venstre siden.
10.	$2ax = -b \pm \sqrt{d}$	9-10. Man trækker b fra på begge sider af lighedstegnet 10-9. Man adderer b til på begge sider af lighedstegnet
11.	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$	10-11. Man dividerer med 2a på begge sider af lighedstegnet. Så er x blevet isoleret som ønsket. 11-10. Man ganger med 2a på begge sider af lighedstegnet

Tabel 7.2 løsning til opgave A (fra episode 1)

Besvarelse af opgave B.

Nu antages det, at d=0, så skal man justere fra punkt 8-11, da d kan erstattes med nul. Dermed vil trinene se ud på følgende måde:

$$(2ax + b)^2 = 0$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{0}$$
$$2ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

Så man kan konkludere, at når d=0, så er der én løsning netop $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Besvarelse af opgave C.

Nu skal man antage d<0, så der skal man kigge på trin 8.

$$(2ax+b)^2 = d$$

For at kunne isolere x dvs. den næste operation der skal ske er at tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet og det kan vi ikke, da d er negativ. Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal. Derfor har ligningen ingen løsninger i dette tilfælde.

Et andet argument er, at venstre side af ligningen (i trin 8) vil altid være positiv, da udtrykket er et kvadrat, og d har vi antaget at være negativ, så dette giver en modstrid og dermed er der ingen løsninger på ligningen.

Det er nu interessent, at se hvordan klassen har forsøgt at løse opgaven.

7.3 A posteriori analyse af episode 1S

Jeg har fulgt en gruppe, (GS:gruppen i standard forløbet) vha. lydoptagelse i episode 1S, som viser, hvordan eleverne tacklede opgaven. I denne episode har jeg udvalgt den relevante del af transskriptionen, som kan gøre det muligt for mig at belyse en del af min problemstilling. Jeg havde nemlig en hypotese om, at en elev vil have svært ved beviset af den generelle løsningsformel i andengradsligningen i den rene algebraiske ramme. Helt konkret så vil eleven have svært ved den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadrattet.

7.3.1 Episode 1S didaktiske/adidaktiske situation og faser i kontekst

Før jeg viser, hvordan den fulgte gruppe konkret har håndteret og løst opgaven, vil jeg starte med at tage udgangspunktet i episode 1S's fase og undersøge, hvorvidt eleverne har befundet sig i en didaktisk eller adidaktisk situation i kontekst til den del af modulet episode 1S ligger i.

Tid (min)	Overordnet aktivitet	Aktivitet	Fase	Didaktisk/ Adidaktisk situation
30	Arbejde med at bevise løsningsformel for andengradsligningen	Læreren introducerer opgaven om at man skal formulere skrift-ligt hvert skridt i beviset	Devolution	Didaktisk
		Gruppearbejde: Bevise løsnings-formlen for andengradsligningen	Handling formulering og validering	Didaktisk og adidaktisk
		Læren runder af: vil vide om programmet var brugbart og om de skal fortsætte med det de slap til næste gang.	Institutionali-sering	Didaktisk

Tabel 7.3 Episode 1's faser og didaktiske/adidaktiske situation

Hvis vi ser på hvilke faser eleven befinder sig i når de er i episode 1S, så er det en veksling mellem handling-, formulering- og valideringsfasen, samt skiftevis mellem at være i en didaktisk og adidaktisk situation. I disse faser arbejder eleven selv med opgaven (adidaktisk situation) i perioder og andre gange beder de læreren om hjælp (didaktisk situation).

Kigge man på opgaveformuleringen i episode 1S kræves det, at eleven overbeviser sig selv ved at *argumentere* for de formuleringer, der nås frem til.

Der eksisterer noget adidaktisk potentiale i det objektive miljø, men hvordan mon dette potentiale bliver håndteret i det subjektive miljø?

7.3.2 A posteriori analyse af episode 1S og det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø

Jeg har udvalgt dialoger mellem læreren og gruppen, gruppen imellem, og gruppen med andre grupper, der viser hvordan eleverne i den fulgte gruppe har tacklet opgaven.

Læreren introducerer opgaven og beder grupperne om at starte. Den udvalgte gruppe GS, som er dannet af to elever E1 og E2, beder læreren L om hjælp. De skal til at forklare omskrivningen af ligningerne fra trin 1 til 2.

1. *E1:" Jeg forstår ikke hvor du tager de 4a fra? det er noget du har fået et andet sted fra?"*
2. *L: "Nææ det er ikke nødvendigvis! …. Du skal sådan set bare forklare, hvad sker der for at kommer fra første ligning til anden ligning. Hvad har man gjort for at komme fra første ligning til anden ligning?"*

E1 har noget viden om, hvordan man arbejder med ligninger, men forstår ikke hvorfor man ganger 4a på begge sider af lighedstegnet. Det tyder på, at E1's viden om ligningsoperationer ikke er præcist. E1 går nemlig i stå mht. at man ganger 4a på ligningen, da der ikke eksisterer sådant et tal i den oprindelige ligning. E1's gamle ufuldstændige viden om ligningsoperationer, dvs. personlige viden, skal nu overbygges med den officielle viden. Her er den officielle viden, at man kan fortage sig hvilken som helst operation (ikke dividere med nul) med hvilket som helst tal (også ikke eksisterende tal i den oprindelige ligning), så længe det hjælper på at løse ligningen.

Læreren understeger, at eleven skal *bare forklare hvad der sker fra første ligning til anden ligning* (tur 2). Her er der tale om en mikro-didaktisk kontrakt. Desuden er det ikke rigtig *bare det* der skal forklares. Sandheden i trin 1 til 2 skal medføre sandheden fra trin 2 til 1 (biimplikationstegnet). I det læreren prøver at simplificere opgaven, så nedsættes det adidaktiske potentiale i opgaven. Diskussion fortsætter:

3. *E1:" Jeg ved ikke helt… Jeg kan sige, at du har sat det der i parentes og indsat 4a, eller hvad?"*
4. *L: "Lyder det som de der regler for ligninger man må gøre. At indsætte parenteser og så indsætte 4a?"*
5. *E1:"Nej".*
6. *L:" Så må du huske, hvordan man gør med ligninger for at omforme".*
7. *E1: "Gange på begge sider af lighedstegnet og sådan noget".*

I tur 3 er eleven stadig usikker over, hvorfor de 4a er der og ikke kan koble det til nogle regler og operationer for ligninger. Læreren prøver at føre eleven til at trinet bygger på nogle regneoperationer eleven allerede kender til og det er dem han skal anvende for at komme frem til forklaringen. Det ses tydeligt i tur 4, at den mikro-didaktiske kontrakt er i spil, for læreren har nogle forventninger til eleven om, at han kender til regneoperationer for ligninger. Så eleven er tvunget til at præstere det ses i tur 6, hvor læreren siger *så må du huske* som indikere en forventning hos læreren og dermed er mikro kontrakten er i spil. Her kan man tænke sig at elevens fokus er splittet mellem to: præstere foran læreren og gennemskue omskrivningerne. I tur 7 præsterer eleven ved at siger *gange på begge sider af lighedstegnet*.

8. *L: "Hvad er der sket med..? Vi kan sige… Venstre side af øverste ligning for at komme til venstre side af nederste ligning".*
9. *E1:"Der er bare … Altså alt det der, er der stadigvæk* $ax^2 + bx + c$*. Det er der stadigvæk, det står bare i parentes i nederste linje og så er der 4a gange parentesen".*
10. *L: "Ja, men du svarer ikke rigtigt på spørgsmålet. Hvad sker der? Hvad har man gjort? Du forholder dig kun til den anden ligning. Du snakker ikke rigtigt om den første, synes jeg. Hvad gør du for at komme fra den første til den anden?"*
11. *E1:" Det ved jeg egentlig ikke. Jeg kan ikke se sammenhængen mellem det der og det der* (peger på første omskrivning af ligningen)*. Nu når der står 4a".*

I tur 8 forsøger læreren at vende tilbage til den første omskrivning og ville have, at eleven nu kan sammenkoble regneoperationer og logikken i omskrivningen af første ligning til anden ligning. I tur 9 kigger eleven kun på den omskrevet ligning og siger, hvad der står. Læreren er ikke tilfreds og vil føre eleven til, at en omskrivning er en sammenhæng mellem to ligninger se tur 10. Desuden er mikro kontrakten i kræft, idet læreren siger *Du snakker ikke rigtigt om den første* ligning som indikerer en implicit regel eller forventning. Eleven bliver usikker igen i tur 11 og starter med at sige *det ved jeg egentlig ikke,* men bliver bange for at skuffe læreren, så han retter det til *jeg kan ikke se sammenhængen…* for at vise læreren, at han ikke har givet op. Det ses, at den mikro didaktiske kontrakt er på spil igen for eleven er splittet mellem præstation (tilfredsstillelse af lærerens behov) og at gennemskue omskrivningen af ligningerne. Her ses det tydeligt, at den didaktiske kontrakt kan være med til at ødelægge både elevens fokus på at tilegne sig ny viden og det adidaktiske potentiale, som ligger i opgaven. Læreren prøver igen.

12. *L: "Du sagde ellers selv lige før, at der stod stadig* $ax^2 + bx + c$*".*
13. *E1:"Ja ja".*
14. *L:" Hvad gør vi så med* $ax^2 + bx + c$ *for at komme til den anden".*
15. *E2:"Du ganger det med 4a".*
16. *L: "Ja, andet er der ikke ved det.. man ganger det med 4a".*

Den mikro didaktiske kontrakt er synlig her, da læreren i tur 12 siger *Du sagde ellers selv lige før..* der er en implicit forventning. Den didaktiske kontrakt efterfølges med en effekt, nemlig *Jourdain-effekten.* I det læreren næsten fører ordene i munden på eleven. Da eleven så siger det læreren vil høre siger læreren i tur 16 *ja, andet er der ikke ved det.* Det er som før ikke korrekt, da alle trin i et bevis er dannet af biimplikationstegn, derfor skal en ligningomskrivning kunne valideres ved gyldigheden af den omvendte implikation (derfor må $a \neq 0$). Jourdain-effekten og den ukorrekte simplificering af opgaven har nu ført til at der intet adidaktisk potentiale findes i opgaven. Eleven er utilfreds med lærerens kommentarer og siger:

17. *E1:"Men hvorfor? Det skal man også kunne forklare".*
18. *L: "Ja, men det kan du ikke, før du er færdig med beviset. Forklaringen er nu, at så får du bevist det. Det viser sig at man skal have nogle ideer for at komme til vejs ende".*
19. *E1:"Men hvorfor ville jeg nogensinde kunne bevise noget, selv hvis ikke jeg vidste, at man lige pludselig uden at vide hvorfor, skulle indsætte 4a. Altså, det er der jo ikke nogen, der vil gøre, hvis ikke jeg ved hvorfor. Man kan ikke sådan bare sætte 4a.".*
20. *E2:"bare indsæt 4a så er det fint nok.. haha!*
21. *E1: "så kommer den!"*

I tur 17 ses utilfredsheden hos E1. Han kan ikke acceptere tricket og mener, at det ikke kan være nok at redgøre for det der står, men vil have en forklaring på, hvorfor der ganges med 4a. Læreren siger *men det kan du ikke, før du er færdig med beviset* i tur 18, men det er da ikke helt sandt for grunden til, at der først ganges med 4a er, fordi vi algebraisk skal fuldstændiggøre kvadartet. Desuden bruges tricket før slutningen nemlig der, hvor man reducere et udtryk vha. kvadratsætningen. I tur 19, 20 og 21 viser E1 og E2 utilfredshed med lærerens argument. Her er den mikro didaktiske kontrakt i forhandling. E1 og E2 viser, at de føler, at tricket med at gange 4a på ligningen er mystisk.

I min problemformulering havde jeg en hypotese om, at fuldstændiggørelsen af kvadratet vil virke som et mystisk trick i beviset. Tur 17,19,20 og 21 bekræfter min hypotese. Læreren og E1 og E2 fortsætter med forhandling af mikro kontrakten:

22. *L: "Det er noget, der kræver erfaringer med 2. gradsligninger. Og hvis vi havde brugt et par moduler mere ved at løse opgaver, som vi løste sidst, så kunne du måske selv have fået den ide. Men jeg synes, at det er ikke nødvendigvis er så godt givet lige nu at bruge så mange moduler på det. Altså, det kan godt lade sig gøre, men det kræver bare at man bruger rigtig meget tid på det. Men ok. Det var venstre side. Men der er ikke nogen regel, der hedder at man må gange venstre side med et tal".*
23. *E1:"man skal også gange…"*
24. *L: "så skal man også??*
25. *E1:"gange det på højre side!"*
26. *E2:"Så skal man også gøre det på højre side, men det har du da ikke gjort her… har du? Eller er det bare mig?…*
27. *E1:"men 4a gange 0 er det ikke bare 0?".*
28. *L: "Jo! Det vil sige jeg har gjort det, men jeg har bare ikke skrevet det.*
29. *E2:"Det er vel bare irrelevant. Det er underforstået"*
30. *L: "Det er det, der er ideen og så kan det være, at nogen af omformninger er lidt anderledes. "*

I tur 22 giver læreren ikke en forklaring på, hvorfor man skal gange med 4a, men giver en forklaring på, hvorfor de ikke på nuværende tidpunkt ville kunne komme med ideen selv. Han fortsætter med at påstå at for at finde frem til tricket kræves der mere erfaring med andengradsligningen. I slutningen af tur 22 lukker læreren diskussionen og vender tilbage til omskrivningen af ligning 1 til 2. I tur 23 svarer E1 på, hvordan man omskriver første ligning. Dvs. er der ingen videre diskussion omkring det mystiske trick. Med det har læreren vundet ved forhandlingen af mikro kontrakten. Den nysgerrighed E1 og E2 har omkring tricket (fuldstændiggørelse af kvadrattet) bliver ignoreret og undertrykt af mikro kontrakten. Det er ikke, fordi læreren gør det med dårlig hensigt, men sandsynligvis for at holde sig til opgaven og tidsrammen, der er lagt af til opgaven.

31. *E2: "Det er et bevis ikke?"*
32. *E1:"Jo".*

(Der går en lang pause, hvor hver elev arbejder selv)

33. *E2: "så går det galt efter det".*
34. *E1:" 4a gange a, det er $4a^2$… $4a^2$. Og så er det bare x^2 som før også, plus 4a gange bx, det er jo 4abx".*
35. *E2:"Jeg forstår ikke, hvordan du får $4a^2$, der er jo kun en gange $4a^2$".*
36. *E1:"det er fordi man siger.. jaja.. men det er fordi, det er bare a det er bare 4 gange a..."*
37. *E2: "nååh ja. Det er underforstået at der er et gangetegn mellem 4 og a"*
38. *E1:"Det er bare 4 gange a og gange a igen. Det giver $4a^2$.*
39. *E2: "$4a^2$ og så gange med x^2 det har det hele tiden været…."*
40. *E1:"Og så siger du 4a gange bx, det er 4abx, det kan du se ik?".*
41. *E2"Jo jo.. derefter reduceres… er det ikke reduktion?"*

42. E1:"Det ved jeg ikke om det er det".

I tur 34-40 er der en diskussion om, hvad $4a^2$ egentlig betyder. Det er noget eleverne arbejder med fra starten af året. Eleverne brude vide, at $4a \cdot a = 4a^2$. Det er elementær matematik, som læreren forventer, at eleverne kan. Desuden ved eleverne, at de skal kunne det. Det er nemlig en del af mikro kontrakten, da eleverne forventer, at læreren stiller et matematisk problem som de har redskaber til at løse, og læreren forventer, at de kan basale algebraiske reducering som er redskabet. I tur 41 spørger E2 om det ikke er reduktion der er tale om og her henvises der til *var det ikke det læreren har sagt det kaldes* og igen er der fokus på præstation og dermed er mikro kontrakten på spil.

Efterfølgende bliver der ikke diskuteret så meget i gruppen om trinene, men midt i gruppens tavshed bliver der sagt følgende:

43. E1:"Der er bare nogle ting, der ikke giver fucking mening…nååh"

Eleven er blevet sur midt i bevisgennemførsel. I tur 43 ses det, at E1 er kontraktbundet. E1 synes beviset ikke giver mening, og det gør det ikke lettere at skrive *hvilken* omskrivning der sker i beviset, for E1 søger en forklaring på *hvorfor* omskrivningen foregår. Mikro kontrakten gør, at eleven bliver bundet til kontrakten og har svært ved at løsrive sig.

En elev E3 fra en anden gruppe spørger gruppen, E1 og E2, om hvorfor man ganger med de 4a.

44. E3: "ved I hvorfor det er man sætter det der 4a ind?"
45. E1: "Vi kan ikke forklare hvorfor?"
46. E2: "Han sagde at det er lige meget for det er noget højere matematik så det skulle vi bare skrive at man gør!"

Dette viser, at det ikke bare er E1 og E2, der har et problem med beviset, men andre elever søger hjælp til at få en forklaring på det mystiske trick ved at gange med 4a. I tur 45 og 46 viser eleverne, at de er bundet til mikro kontrakten. I tur 46 henviser E2 sig til, at læreren ikke kræver en besvarelse for hvorfor fordi der er for svært at forklare og det skal vi ikke tænke på (kontraktbundet).

Jeg går hen til gruppen for at indsamle det de har fået formuleret.

47. Niven: Har I skrevet noget ned?
48. E2:"Ja ja det er fint nok! Det fungerer nemt nok. Men det er svært at forklare det. Men vi kan godt finde ud at bruge det".

Det ses tydeligt, at E2 er ivrig efter at vide, hvad forklaringen er bag ved tricket (fuldstændiggørelsen af kvadratet) og derfor siger, at det er svært. Det ses tydeligt, at eleven er kontraktbundet . Så her er den mikro didaktiske kontrakt en forhindring for, at eleven kan tilegne sig nyt viden, som eleven selv eftersøger.

E4 fra en anden gruppe spørger

> 49. *E4:"Har I ikke forklaret i den første?"*
> 50. *E1:"Ja, det er fordi man ikke skal spørge hvorfor. Man skal bare spørge hvad… Mikkel han siger at der er lige meget med hvorfor"*

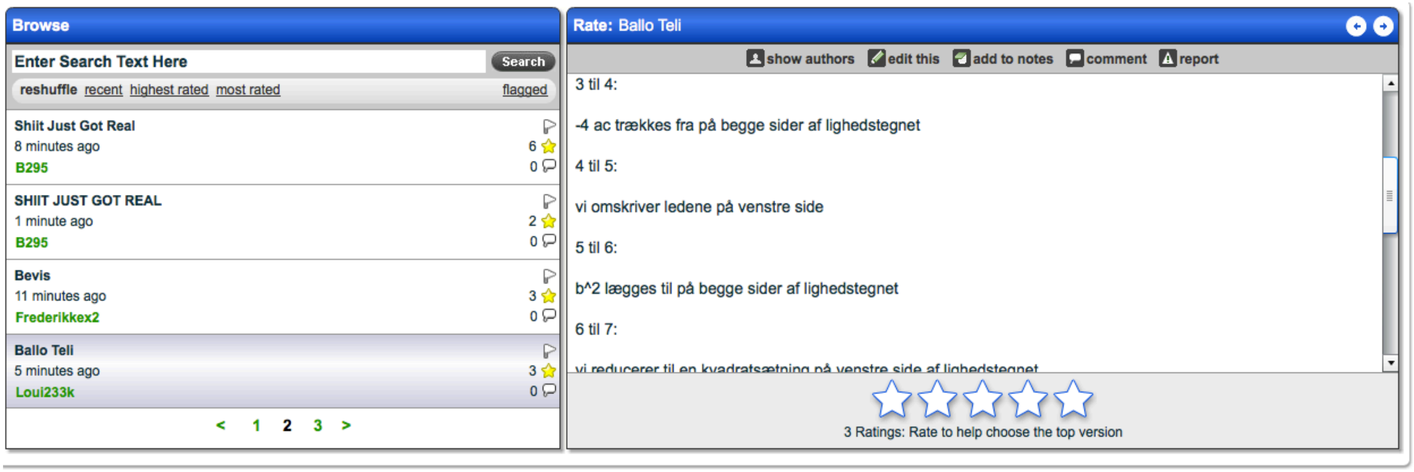
Som i tur 44, 45 og 46 så er E1 kontraktbundet og har svært ved at finde balancen mellem hans behov for at vide hvorfor man fortager sig tricket og mikro kontrakten. Men man ser, at E1 er utilfreds med at tabe forhandlingen af mikro kontrakten.

Jeg har ved siden af optagelsen taget billeder af, hvad gruppen er kommet frem til i deres formuleringer.

Gruppens præcise skriftlige formuleret besvarelse på beviset.

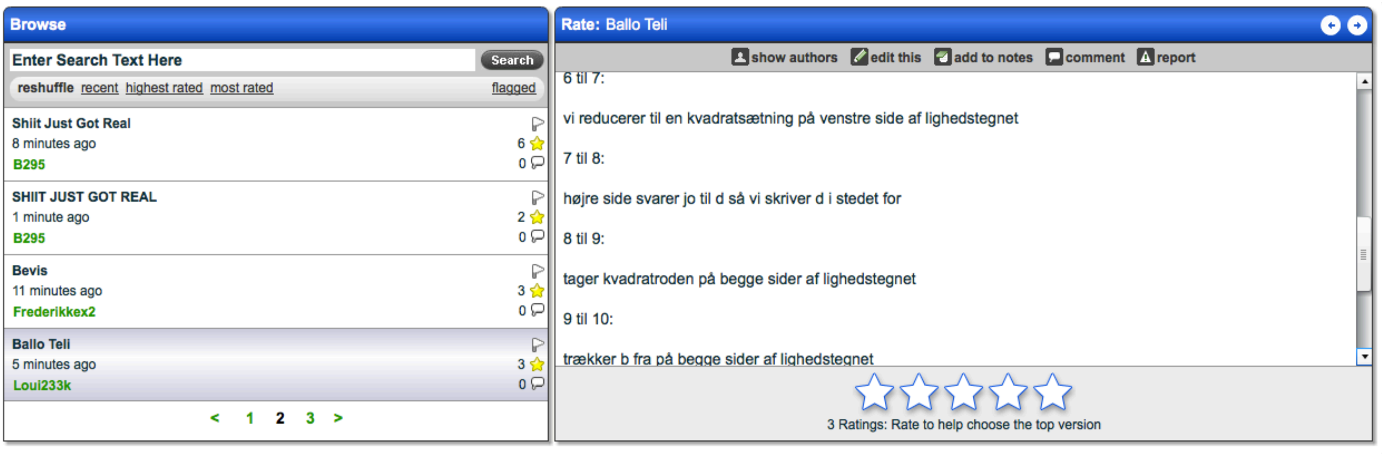
Billede 7.2

Bemærk at gruppen skriver i første trin (fra 1 til 2) *jeg ganger med 4a .. fordi jeg kan* ingen rigtig henvisning til at man bruger ligningsoperationer, som siger, at man må gange med hvad som helst, så længe det bliver gjort på begge sider af lighedstegnet. Desuden er det en skriftlig dokumentation på, at E1 er bundet til den mikro didaktiske kontrakt.



Billede 7.3

Bemærk her, at gruppen i trin ”5 til 6” skriver *b^2 lægges til på begge sider af lighedstegnet*. Her er b^2 også et tal, som ikke står i den oprindelige ligning, men her kan man se, at gruppen ikke skriver *jeg ligger b^2 til fordi jeg kan*. Her kan man se, at gruppen har tabt forhandlingen af mikro kontrakten til læreren og nøjes med at opfylde den. Læreren bad dem netop om at skrive *hvad* der sker i hver trin, så det er hvad der forventes af eleverne og derfor prøver gruppen at opfylde det. Som vi kan se optræder den didaktiske konkrakt som en forhindring for gruppens nysgerrighed og længslen om at vide *hvorfor* man egentlig tilføjer b^2.



Billede 7.4

Vi kan se i trin ”6 til 7” at gruppen skriver *vi reducerer til en kvadratsætning på venstre side af lighedstegnet.* Her kan man blive lidt usikker på om eleverne forstår at man bruger en af kvadratsætningerne til at reducere. Matematisk set er der ikke helt korrekt at sige *vi reducerer til en kvadratsætning.*

Kigger vi nu på trin ”7 til 8” ses det, at gruppen har skrevet at *højre side svarer til d så vi skriver d i stedet for.* Man kan se, at eleverne blander mellem, at de har set udtrykket for d før og at vi i beviset vælger at udtrykke $b^2 - 4ac$ som d. Denne type forståelse kommer fra at klassen har beskæftiget sig med d og har fået defineret den som $d = b^2 - 4ac$, men baggrundet for det udtryk kommer til at synes i beviset og ikke omvendt.

Billede 7.5

Det ses at gruppen ikke når at lave opgave B og C.

7.4 Adidaktisk potentiale der i relevante opgaver i standard forløbet

I dette afsnit vil jeg fokusere på det objektive miljø med højt adidaktisk potentiale og understege formuleringer, der giver opgaven et højt adidaktisk potentiale.

Jeg vil udvælge nogle opgaver med høj adidaktisk potentiale, som inspirerede mig til mit designet forløb.

Der er centrale elementer, der kan påvirke indholdet af adidaktisk potentiale i en opgave. Et af de centrale elementer til at kunne konstatere, hvorvidt opgavens indeholder adidaktisk potentiale, er elevens redskaber (viden) inden opgaven bliver stillet. Det begrundes ud fra definitionen på adidaktisk potentiale, da kernen er, at eleven tilegner sig ny viden på basis af opgaven med høj adidaktisk potentiale. Med andre ord skal eleven blive udfordret i opgaven desuden er det væsentligt at opgaven (det objektive miljø) kan give feedback på elevbesvarelsen.

Jeg har valgt at kigge nærmere på to inspirerende smartboard noter. Den ene er en opgave, der optræder i 3. modul (opgave I), og den anden er en parallelisering mellem beviset og en konkret opgave, der optræder i 5. modul (opgave II).

7.4.1.1 Opgave I's kontekst

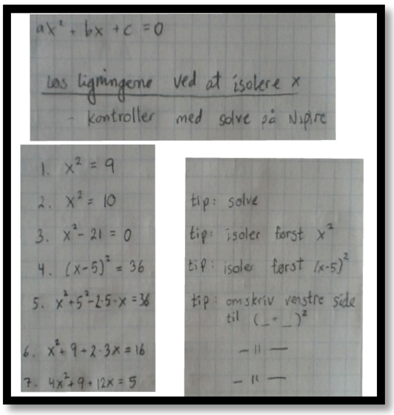
Opgave I er udvalgt fra modul 3 (se afsnit 7.1 det skrevet med grønt). Eleverne har fået arbejdet med emnet inden dette modul, så jeg vil overordnet skitsere, hvad de har været igennem. Eleverne har arbejdet med:

- Den grafiske betydning af koefficienterne a,b og c i den generelle andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$.
- Den grafiske betydning af koefficienterne h og k i andengradsligningen $a(x-h)^2 + k = 0$. Bestemmelsen og betydningen af diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ både algebraisk og i forhold til et andengradspolynomium.
- Bestemmelsen af toppunktet.
- Grafisk ligningsløsning.
- Brugen af CAS' solve-funktion til løsningen af andengradsligninger.

Men eleverne har endnu ikke gennemført et bevis for den generelle løsningsformel for andengradsligningen.

7.4.1.2 Det objektive miljø og det adidaktiske potentiale i opgave I

I opgave I ses at arbejdet med andengradsligninger går fra ren grafiskløsning, og brugen af solve-funktionen i CAS til en algebraisk løsningsmetode.



Billede 7.6 af opgave I

Jeg har udvalgt denne opgave, fordi den indeholder et højt adidaktisk potentiale. Eleven starter nemlig med løsning af simple andengradsligninger, som kræver gammelt viden om ligningsløsning til at arbejde med kvadratsætningerne, som er kernen i løsning af andengradsligninger. Der eksistere en udvikling i opgaverne, der viser en stigning på udfordringsniveauet. Det der savnes er en andengradsligningsopgave, som viser elevens krav på tricket ved fuldstændiggørelse af kvadratet. Med andre ord skal eleven have mulighed for at arbejde med en andengradsligning, som han ikke kan løse med gammelt viden. Dette er vigtigt, da eleven selv indser, at der er et behov for en ny metode og dermed søger efter en løsningsmetode (Hersant og Perrin-Glorian 2005).

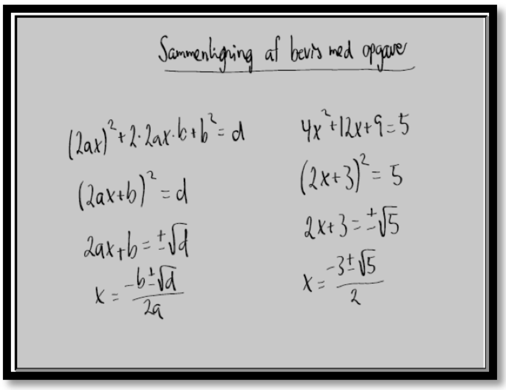
Læreren har givet eleven nogle tips til løsning af ligningen. Desuden har læreren givet dem validerings muligheden i brugen af solve-funktionen og den grafisk-løsning (det siges mundtligt).

7.4.1.3 Den tilsigtede viden

Den tilsigtet viden i denne opgave er, at eleven får et indsigt i at andengradsligninger kan løses vha. brugen af kvadratsætningerne. Dette medfører, at andengradsligningen kan løses ved at reducere et kvadreret udtryk vha. kvadratsætningerne. Men som sagt savnes en opgave der illustrerer, at andengradsligninger løses ved tricket fuldstændiggørelsen af kvadartet.

7.4.2 Inspiration fra standard forløbet

Under mit observerede forløb blev jeg inspireret af mange forskellige metoder som læreren brugte undervejs. Men en af de noter, på smartboarden, som fangede min opmærksomhed allermest, var følgende:



Billede 7.7 lærens noter fra modul 5

Denne slides optræder efter gennemførelsen af beviset for den generelle løsningsformel for andengradsligningen (i modul 4). I starten af modul 5 var der et bevis gennemgang af løsningsformlen. Præcis efter gennemgangen skriver læreren noterne på billede 7.7. Det, der er specielt ved billede 7.7, er at læreren drager noget parallelitet mellem beviset og et konkret eksempel på en andengradsligning. Det giver eleven et visuelt billede af sammenhængen mellem teori og praksis. Læreren vælger at bruge et eksempel som direkte kan reduceres vha. kvadratsætningen. Det, der savnes i denne slides, er et mere generelt eksempel som kan vise fuldstændiggørelsen af kvadratet. Desuden vil det være godt, hvis læreren startede med beviset fra starten, så eleven havde mulighed for at koble teorien direkte til løsningsmetode. Det vil føre eleven til at tænke på teorien som en algoritme til løsning af konkrette opgaver.

Et forslag kunne være (bruger samme eksempel som i teori afsnittet)

Trin	***Beviset for løsningsformlen på 2.gradsligningen i trin***	***Et konkret eksempel***
1.	$ax^2+bx+c=0$	$x^2-3x-10=0$
2.	$4a\cdot(ax^2+bx+c)=0$	$4\cdot1\cdot(x^2-3x-10)=0$
3.	$4a^2x^2+4abx+4ac=0$	$4x^2-12x-40=0$
4.	$4a^2x^2+4abx=-4ac$	$4x^2-12x=40$
5.	$(2ax)^2+2\cdot2ax\cdot b=-4ac$	$(2x)^2-2\cdot2x\cdot3=40$
6.	$(2ax)^2+2\cdot2ax\cdot b+b^2=b^2-4ac$	$(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2=40+3^2$
7.	$(2ax+b)^2=b^2-4ac$	$(2x-3)^2=9+40$
8.	$(2ax+b)^2=d$	$(2x-3)^2=49$
9.	$2ax+b=\pm\sqrt{d}$	$2x-3=\pm\sqrt{49}$
10.	$2ax=-b\pm\sqrt{d}$	$2x=3\pm\sqrt{49}$
11.	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$	$x=\dfrac{3\pm\sqrt{49}}{2}$

7.5 Opsamling

I dette afsnit har jeg bearbejdet dataindsamlingen af standard forløbet. Formålet med dette var at belyse en del af min problemstilling. Jeg har nemlig en hypotese om at elever har besværligheder ved bevisgennemgang af den generelle løsningsformel for andengradsligningen i standard forløbet, hvor fuldstændiggørelsen af kvadratet virker som et mystisk trick. I dette afsnit fik jeg bekræftet min hypotese. I afsnit 7.3.2 var der en diskussion mellem læreren og GS omkring hvorfor man skal gange med 4a i beviset. GS's stræbende efter forklaringen blev forhindret af mikro kontrakterne. GS endte med at tabe forhandlingerne af de forskellige mikro didaktiske kontrakterne. Det ses tydeligt, at GS har været kontraktbundet af under diskussionen.

Jeg har i afsnittet 7.4 ladet mig inspirerer af to forskellige slides, som læreren i standard forløbet delte med klassen. Disse to slides vil jeg benytte som inspiration til opbygning af min designet forløb. Det designede forløb skal iflg. min problemformulering være baseret på en geometrisk ramme med et højt adidaktisk potentiale.

8. Analyse af det designet forløb

Under observering af et standard forløb i andengradsligningen oplevede jeg nogle hindringer i den tilsigtede viden. Det primært problem omfattede beviset af den generelle løsningsformel for andengradsligningen. Det ses i episode 1S at GS[18] siger til læreren at den første omskrivning i beviset (hvor man ganger 4a på den generelle andengradsligning) *ikke rigtig giver mening* og spurgte indtil *forklaringen bag ved tricket*. Det lykkes ikke gruppen at nå frem til forklaringen og accepterede det fordi læreren påpegede at det var *et nødvendig trick for beviset*. Problematikken ligger i at beviset bliver udledt i den ren algebraiske ramme.

På dette grundlag har jeg designet et forløb der har til formål at give eleven en lettere tilgang til beviset af den generelle løsningsformel for andengradsligningen. Designet er baseret på den geometriske ramme som skal være en støtte til den algebraiske ramme. Med disse to rammer på spil i emnet andengradsligningen bliver det muligt at konstruere opgaver med et højt adidaktisk potentiale.

Der er sket en udvikling i mit design som bliver beskrevet i dette afsnit. Jeg har designet et forløb (afsnit 8.1), som efterfølgende er blevet justeret af læreren som udførte forløbet (afsnit 8.4). Efter justeringen og planlægningen af læreren blev forløbet i realiteten tilpasset efter elevens interaktion med undervisningsplanen (afsnit 8.5).

I Udviklingen af designet udvælges relevante opgaver som skal belyse det adidaktiske potentiale i det objektive miljø. Det gøres ved en apriori analyse af opgaverne og kendskabet til den tilsigtet viden. Disse elementer gør det muligt at belyse den aposteriori analyse af episode 1D (D=design) som indeholder disse omtalte opgaver. Desuden muliggøres analysen af det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø.

Jeg vil starte med at fremstille mit designet forløb understøttet af begrundelser for valg af bestemte elementer.

[18] Den observerede gruppe i standardforløbet

8.1 Det designet forløb

Designet udgøre 3 moduler hvor målet for eleven er at udlede en algoritme til løsning af andengradsligningen. Første modul bygger på at eleven bliver fortrolig med geometri. Eleven bliver præsenteret for operationer som kan udtrykkes geometrisk. Summen og differensen på to tal kan illustreres som linjestykker derudover multiplikation og division kan illustreres som arealer. Gradvis begynder eleven at arbejde med geometriskopstilling af ligninger der starter med førstegradsligninger og ender med andengradsligninger. Jeg har fået designet fire arbejdsark[19] (se bilag). Jeg har udvalgt opgaver fra ark 4 som illustrere brugen af den geometriske ramme i udledningen af løsningsformlen for andengradsligningen. Se følgende detaljerede modulplan over de tre moduler.

[19] Arkene er placere som bilag

Modul 1

Tid	Lærerens rolle	Elev aktivitet	Særlig opmærksom
8 min	Præsentation af det geometriske værktøj i forhold til repræsentationen af operationer som adderes, subtraheres, multipliceret og divideret	Kan deltage ved at give forslag på hvordan summen, differensen, multiplikationen og divisionen af to tal ser ud geometrisk, når de ser læreren illustrerer tal som linjestykker.	Nogen elever vil undre sig over meningen med at opfatte tal som geometriske størrelser.
20 min	Sætter dem i gang med at arbejde gruppevis med ark 1.	- Arbejder med ark 1 - Løser opgaverne og bruger geometrien	I opgaver 5,6,7 kan eleverne have en tendens til at gætte svaret. Men I opgave 7 skal eleverne vide at algebraisk er der to løsninger.
7 min	Præsenter førstegradsligninger og simple andengradsligninger geometrisk. (Geometrien begrænser den negative løsning) - Giv to eksempler	Kan deltage ved at prøve at løse lærerens eksempel	Da eleverne allerede kan løse 1.gardsligninger er det vigtigt at gør opmærksom på at geometrien kan give et billede af betydningen af løsningerne.
5 min	**Pause**		
50 min	Sætter dem i gang med at arbejde gruppevis med ark 2.	- Arbejder med ark 2 - en geometrisk opstilling af førstegradsligninger	Der vil muligvis blive spurgt ind til den geometriske opstilling af ligningen især i opgave 1.4, fordi man skal arbejde med negative tal. I opgave 1.5 vil det muligvis gå helt i stå da eleverne vil have svært ved at illustrere at resultatet skal give 0. I opgave 2 vil eleverne muligvis have lidt svært ved at afkode både geometrisk og algebraiskes da det er en tekst opgave. I opgave 3 vil nogle eleverne delvis gå i stå i 3.3 når de skal tegne den geometrisk repræsentant for ligningen. De vil muligvis illustrere $4x^2 = 4x \cdot 4x$. I opgave 3.4 vil eleverne lige tænke sig en gang før de tegner ligningen geometrisk og når de løser den algebraisk vil nogen muligvis glemme ± og dermed kun finde en løsning eller finde en og sætte et minus på det tal de har fundet og sige at det er den anden løsning.

Modul 2

Tid	Lærerens rolle	Elev aktivitet	Særlig opmærksom
10 min	Læreren præsenter 1. kvadratsætning geometrisk. - Understreger betydningen af det dobbelte produkt geometrisk - Inddrager ideer fra elever	Eleverne kan følge med ved at muligvis fuldende lærerens forklaring på geometrien.	Eleven kan fristes til at sige at $(a+b)^2=a^2+b^2$
20 min	Giver eleverne opgaven at konstruere en geometrisk forklaring til 2. kvadratsætning	Arbejder med opgaven om at konstruere 2.kvadratsætning geometrisk	Eleverne vil muligvis have svært ved at konstruere den geometriske side a-b. Desuden muligvis have svært ved at udtrykke $(a-b)^2$ algebraisk ud fra geometrien.
5 min	Udvælger en elev som gennemgår den geometriske konstruktion af 2. kvadratsætning.	En elev ved tavlen.	
10 min	Udleverer ark 3 (hvor der er andengradsligningen der kan løses vha. 1.+2. kvadratsætning)	Arbejder med opgaverne fra ark 3	Sidste opgave i arket er svær at løse ved direkte brug af kvadratsætningerne som eleverne muligvis ikke kan løse ved de metoder de har fået indtil nu.
5 min	**Pause**		
50 min	Lader eleverne fortsætte med ark 3	Arbejder videre med opgaverne fra ark 3	Hvis eleverne spørg ind til den sidste opgave (3.13) skal metoden ikke afsløres men kan give et hint på at de må klippe og klister i de geometriske figur. Og kan muligvis give et hint om at kigge på den geometriske opstilling af kvadratsætningerne. Med håb om at eleven finder en sammenhæng mellem de geometriske opstillinger af kvadratsætninger og fuldstændiggørelsen af kvadartet.

I dette modul skal eleverne arbejde med kvadratsætningerne og målet er at de kan se at en hver andengradsligning som er på formen $(x+a)^2$ kan løses let (geometrisk og algebraisk). Derudover er det primært mål elevens erkendelse af at enhver andengradsligning kan udtrykket på denne form ved fuldstændiggørelsen af kvadratet.

Den tilsigtede viden er at enhver andengradsligning på formen x^2+a^2+2ax kan reduceres til $(x+a)^2$. Desuden skal eleven kunne omskrive en andengradsligning på formen $x^2+bx=c$ til $(x+b)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ved tilføjelsen af $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ for at fuldstændiggøre kvadratet.

Modul 3

Tid	Lærerens rolle	Elev aktivitet	Særlig opmærksom
15 min	Forhåbentlig er alle eleverne næsten blevet færdige med ark 3. men har muligvis haft svært ved sidste opgave som ikke direkte kan løses vha. kvadratsætningerne - læreren udlevere Ark 4 til eleverne - Gennemgang af det babyloniske eksempel $x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4}$	Eleverne kan følge med ved at muligvis fuldende lærerens forklaring på geometrien.	Eleverne vil have nemt ved at acceptere at man geometrisk kan cut-and-past. (de vil muligvis ikke protestere). Men eleverne kunne muligvis have problemer med brøkregningen (at $(½)^2=¼$)
30 min	Udlevere ark 4 (som gradvis bliver sværere til eleverne selv skal bevise formlen for andengradsligningen i et specielt tilfælde)	Arbejder med opgaverne som skal fører dem til en algoritme.	I 1.3 kan det være svært for eleverne at se at man skal tilføje $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ fordi man trækker denne værdi fra to gange når man trækker det dobbelte produkt fra. Desuden er højre siden er negativ. Hvad betyder det egentlig geometrisk. I 1.4 kunne eleverne have svært ved brøkregning. I 1.5 kommer det bag på eleverne at der ingen løsning er til ligningen. I 1.6 kan det være svært for nogen at arbejde med bogstaver og derudover brøker. Opgave 2 kan være svær da den stiller kræv om at regne algebraisk og se hvilken antagelser der gælder for et bestemt bogstav udtryk.
5 min	**Pause**		
40 min	Giver eleverne lov til at fortsætte med at arbejde med ark 4.	Arbejder med opgaverne som skal fører dem til en algoritme.	I opgave 3 kan det være svært at starte med at tilføje de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, men når det er gjort så vil det være nemt at se "tricket" i de resterende opgaver. I opgave 4.6 kan det være svært for eleverne at vide at man skal udtrykke koefficienterne for den ene andengradsligning vha. de andre koefficienter i den anden andengradsligning. I opgave 5 kan det være svært for eleven at arbejde med algebraiske operationer og reducering af brøker.
10 min	Læreren udvælger en elev til at gennemgå algoritmen for løsningen af andengradsligningen vha. geometrien.		

I tredje modul er der fokus på den algebraiske, understøttet af den geometriske, fuldstændiggørelse af kvadratet. Her er den tilsigtede viden at eleven virtuelt ser fuldstændiggørelsen af kvadratet geometrisk og dermed finder algoritmen til løsning af andengradsligningen. Algoritmen bliver generaliseret induktivt. Eleven arbejder med konkrette eksempler men finder én metode der bruges gentagende gange og dermed finder frem til den generelle algoritme til løsning af andengradsligninger på formen $x^2 + sx = t$

I disse moduler er geometrien et værktøj der bliver brugt til løsning af andengradsligninger vha. den geometriske fuldstændiggørelsen af kvadratet som langsomt bevæger sig til at fuldstændiggøre kvadratet ret algebraisk.

Hovedmålet med designet er udledningen af den generaliseret løsningsformlen for andengradsligningen på formen $ax^2 + bx + c = 0$, som skal opnås induktivt.

Eleven blev induktivt bedt om at finde en generelle algoritme til løsning af $x^2 + sx = t$. Og for at komme tættere på den generelle løsningsformel bliver eleven bedt om at forklare omskrivningen af følgende ligning:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + sx = t$$

hvor s og t blev udtrykt vha. a,b og c. Hermed kan eleven selv udlede den generelle løsningsformel for andengradsligningen ved substitution af s og t i den fundende formel til løsning af $x^2 + sx = t$.

Jeg har udvalgt en episode i modul 3 (skrevet med pink) som jeg vil gå i dybden med. Denne episode vil jeg kalde for episode 1D.

8.1.1 Fremstilling af episode 1D i kontekst

Episode 1D indgår i modul 3. Forudsætningerne for at kunne løse opgaverne i episode 1D er at eleven har arbejdet med:

- Geometrisk illustration af kvadratsætning 1 og 2
- Geometrisk illustration af simple andengradsligninger. Både andengradsligninger hvor koefficienten b er nul ($ax^2 + c = 0$) og andengradsligninger der kan reduceres til en af de to første kvadratsætninger (ligninger på formen $(x \pm a)^2$).
- Geometrisk gennemgang af et konkret eksempel på andengradsligningens løsningmetode vha. fuldstændiggørelse af kvadratet (cut-and-past).

Det centrale i episode 1D er at eleven for første gang arbejder med andengradsligninger hvor alle koefficienter $a, b, c \neq 0$. Desuden kræver løsningerne i episode 1D fuldstændiggørelsen af kvadratet både algebraisk og geometrisk.

Begrundelsen for valget af episode 1D er muligheden for at sammenligne de didaktiske forhindringer der opstod i episode 1S (i standard forløb).

Opgaverne som eleven skal arbejde med i episode 1D er fra ark 4 (se bilag). Jeg udvælger relevante opgaver som bliver fremhævet og indrammet i følgende afsnit *det objektive miljø i episode 1D*.

8.1.2 Det objektive miljø i episode 1D og den tilsigtede viden

Jeg har udvalgt 3 opgaver fra ark 4. Opgave 1 er en af de udvalgte fordi eleven skal løse andengradsligninger vha. fuldstændiggørelsen af kvadratet for første gang. I opgaveformuleringen ses at man kan benytte sig af geometriske opstilling af ligningerne som kan støtte den algebraiske løsningsmetode. Kigger vi på opgaverne fra 1.1- 1.5 ses en stigende sværhedsgrad i løsningen af andengradsligningen. Dette skal få eleven til at finde en algoritme som opgave 1.6 fører frem til.

Ark 4

Opgave 1

Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk (så vidt muligt på samme måde som læreren har gjort). Argumenter for din besvarelse i opgave 1.3 og 1.5

1.1 $x^2 + 2 \cdot x = 8$

1.2 $x^2 + 6 \cdot x = 7$

1.3 $x^2 - 6 \cdot x = -5$

1.4 $x^2 + 3 \cdot x = 4$

1.5 $x^2 + 2 \cdot x = -5$

1.6 $x^2 + s \cdot x = t$

Billede 8.1 opgave 1 i episode 1

Løsningen af opgave 1.6 fører til en generaliset algoritme til den specielle form for andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, hvor $a=1$. Men dette skal generaliseres ydereligere så man kan bestemme den generelle løsningsformlen for andengradsligninger på formen $ax^2+bx+c=0$. Det bygges op vha. opgave 4 og 5.

I opgave 4 arbejder eleven på omskrivninger fra en ligning der indeholder et a som er større eller mindre end 1 til ligninger med a=1. Induktivt skal det fører eleven til at omskrive $ax^2+bx+c=0$ til $x^2+sx=t$, hvor man udtrykker s og t vha. a,b og c.

Opgave 4

Hvordan bliver følgende ligninger omskrevet

4.6 $ax^2+bx=c \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2+sx=t$

4.8 $ax^2+bx+c=0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2+sx=t$

Billede 8.2 opgave 1 i episode 1

Det sidste skridt til at generalisere løsningsformlen for andengradsligningen som er på formen $ax^2+bx+c=0$ er at få erstattet s og t i løsningsformlen fra opgave 1.6 med de nye udtryk som man er nået frem til i opgave 4.8. problemformuleringen ses i opgave 5 (billede 8.3).

Opgave 5

I har i opgave 1.6 fundet frem til den generelle løsning på $x^2+s\cdot x=t$. Hvad er den generelle løsningsformel på $ax^2+bx+c=0$ (Vink: indsæt det nye udtryk fra opgave 4.8 i trinene fra opgave 1.6)

Billede 8.3 opgave 5 i episode 1

Der er en gradvis udvikling fra opgave 1-5 (billede 8.1, 8.2 og 8.3) der går fra at være afhængig af det geometriske værktøj for løsning af andengradsligninger til at være en ren algebraisk generalisering af løsningsmetode.

8.1.3 Den geometriske og algebraiske ramme i det objektive miljø

Det ses i modulplanlægningen at forløbet starter med at eleven bliver frotrolige med geometrien som støtter algebraen. Dette bygges op til og med opgave 1 i ark 4 (billede 8.1), hvor man ender med at finde en algoritme for løsningen af andengradsligningen på formen $x^2+sx=t$ ved hjælp af den geometriske ramme. Efter opgaver 1 bevæger opgaverne sig mod den rene algebraiske ramme.

Den geometriske ramme er et værktøj for tilegnelsen af viden om den algebraisk fuldstændiggørelse af kvadratet. Og dermed benyttes til at finde en algoritme for løsning af andengradsligningen.

Opgaveformuleringen og løsningen dertil er uadskillelige. Derfor kan det være meget berigende at kigge på en opgaveformuleringer inden man ser på løsningerne til. Derudover er opgaveformuleringer med til at vurdere indholdet af det adidaktiske potentiale.

8.2 Det adidaktiske potentiale i det objektive miljø

Det adidaktiske potentiale er højt i opgave 1 fordi eleven har mulighed for at validere løsningerne både geometrisk og algebraisk. Den geometriske opstilling af de enkelte andengradsligninger er en støtte til den algebraiske løsning. Eleven kan validere sin løsning på to måder (uddybes ydereligere afsnit 8.3):

- Algebraisk kan eleven sætte x-værdien ind i den oprindelige ligning og se om det giver noget sandt.
- Geometrisk kan eleven sætte x-værdien ind på x's plads i udtrykket for kvadratets side og se om hele siden kvadreret giver det rigtige areal.

Derudover ligges der op til at eleven induktivt når frem til en algoritme, som opbygges ved løsning af konkrette tilfælde af andengradsligningen. De fleste elever har langt lettere ved at arbejde med konkrette opgaver end med beviser. Det induktive element i opgaverne giver eleven en chance for selv at finde en algoritme. Dette gør at beviset for specielt tilfældet (opgave 1.6) falder naturligt ind for eleven, da det er den samme algoritme som bruges i alle forrige konkrette tilfælde.

I opgave 4 er formålet at omskrive andengradsligningen med $a>1$ eller $a<1$ til en andengradsligning hvor $a=1$. Det adidaktiske potentiale ligger i at eleven får mulighed for at omskrive ved at dividere med $a\neq0$ i alle led og validere ved at gange a i alle led og se om det giver den oprindelige ligning (der er et biimplikationstegn mellem de omskrevet ligninger).

I opgave 5 bliver eleven bedt om at generalisere løsningsformlen for det specielle tilfælde af andegradsligningen $x^2 + sx = t$ til løsningsformlen til den generelle andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$, hvor man skal erstatte s og t med a,b og c. Det adidaktiske potentiale ligger igen i at der findes et biimlikationstegn dvs. at eleven kan validere sin formel ved at erstatte udtrykkene a,b og c med s og t.

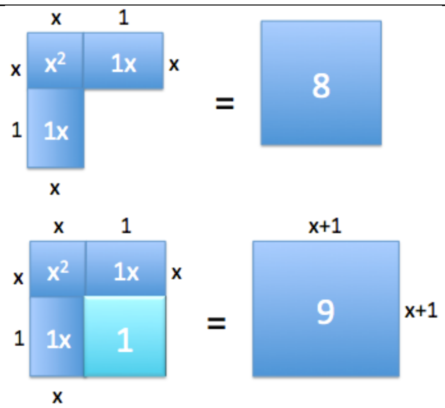
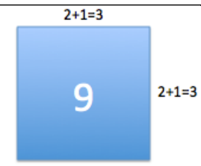
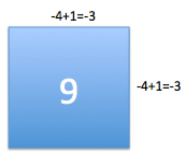
8.3 Apriori analyse af opgaverne i episode 1D

Matematisk kan man løse de udvalgte opgaver ved kendskab til den geometrisk og algebraisk fuldstændiggørelse af kvadratet. Her er et udkast til en fuldstændig besvarelse af opgaven og validering af løsningerne. Jeg vælger at besvare opgave 1.1 og 1.6, fordi 1.2 - 1.4 ligger meget op af opgave 1.1 desuden når GD[20] kun at beskæftige sig med opgave 1.1.

Opgave 1

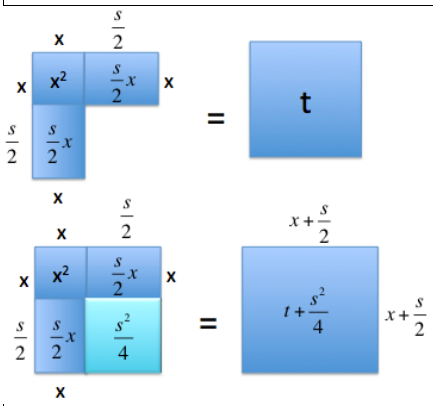
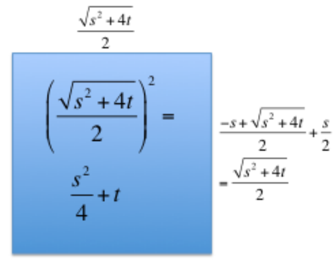
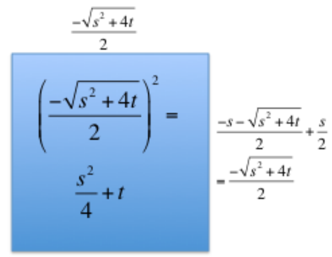
Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk (så vidt muligt på samme måde som læreren har gjort).

1.1 $x^2 + 2 \cdot x = 8$

Geometrisk opstilling af problemet	Den algebraiske ligningsløsning	Validering algebraisk	Validering geometrisk
	$x^2 + 2x = 8$ $x^2 + 2x + 1^2 = 8 + 1^2$ $x^2 + 2x + 1^2 = 9$ $(x+1)^2 = 9$ $x + 1 = \pm\sqrt{9}$ $x = \pm 3 - 1$ $x = 2 \quad \vee \quad x = -4$	*Indsæt* $x = 2$ $2^2 + 2 \cdot 2 = 8$ *som er sandt* *Indsæt* $x = -4$ $(-4)^2 + 2 \cdot (-4) =$ $16 - 8 = 8$ *som er sandt*	 *som er sandt*  *som er sandt*

[20] GD står for den observerede gruppe i det designet forløb (dem fra lydoptagelsen)

1.6 $x^2+s\cdot x=t$

Geometrisk opstilling af problemet	Den algebraiske ligningsløsning	Validering algebraisk	Validering geometrisk
	$x^2+sx=t \Leftrightarrow$ $x^2+sx+\left(\frac{s}{2}\right)^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2+t \Leftrightarrow$ $x^2+sx+\frac{s^2}{4}=\frac{s^2}{4}+\frac{t}{4}$ $\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2+4t}{4} \Leftrightarrow$ $x+\frac{s}{2}=\pm\sqrt{\frac{s^2+4t}{4}} \Leftrightarrow$ $x+\frac{s}{2}=\frac{\pm\sqrt{s^2+4t}}{2} \Leftrightarrow$ $x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2+4t}}{2}$	$x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2+4t}}{2} \Leftrightarrow$ $x+\frac{s}{2}=\frac{\pm\sqrt{s^2+4t}}{2} \Leftrightarrow$ $x+\frac{s}{2}=\pm\sqrt{\frac{s^2+4t}{4}} \Leftrightarrow$ $\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2+4t}{4} \Leftrightarrow$ $x^2+\frac{s^2}{4}+2\cdot x\cdot\frac{s}{2}=\frac{s^2}{4}+\frac{4t}{4} \Leftrightarrow$ $x^2+sx=t$	*Indsæt* $x=\frac{-s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$  *Indsæt* $x=\frac{-s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ 

I opgave 4 vælger jeg at lave en fuldstændigbesvarelse af opgave 4.8 da Det fører læseren trinvis til den generelle løsningsformlen for andengradsligningen. Jeg vil ikke løse opgaverne fra 4.1-4.8 da det er konkrette opgaver som skal føjer eleven til 4.9 og fordi ingen grupper i det realiseret forløb nået så langt.

Opgave 4

Hvordan bliver følgende ligninger omskrevet (forklar alle skridt)

4.8 $ax^2 + bx + c = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + sx = t$

Omskrivningen	Validering
$ax^2 + bx + c = 0$ $dividere\ ligningen\ med\ a$ $\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $dvs.\ \frac{b}{a} = s\ og\ -\frac{c}{a} = t$ $x^2 + sx = t$	$x^2 + sx = t$ $erstat\ s,t\ med\ a,b\ og\ c$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $gang\ med\ a$ $ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

Med disse trin kan eleven føres til opgave 5 hvor eleven får til opgave at udlede den generelle løsningsformel.

Opgave 5

I har i opgave 1.6 fundet frem til den generelle løsning på $x^2 + s \cdot x = t$. Hvad er den generelle løsningsformel på $ax^2 + bx + c = 0$ (Vink: kopier det lavede i opgave 1.6 og indsæt nu det nye udtryk fra opgave 4.8)

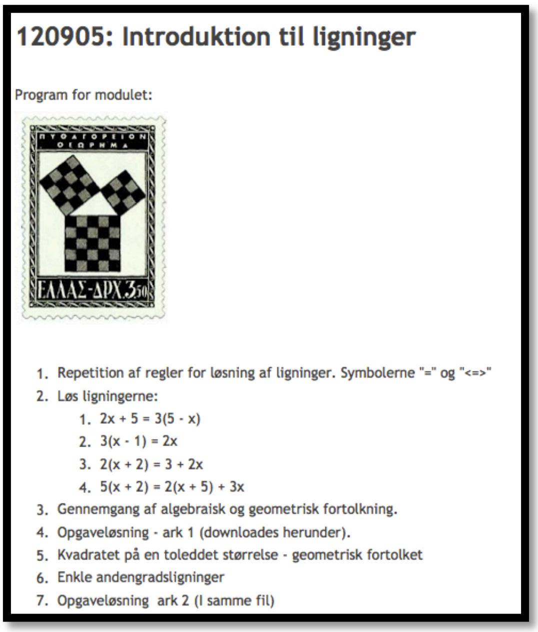
Omskrivningen	Validering
$x^2 + sx = t \Leftrightarrow$ $x = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 + 4t}}{2}$ $ax^2 + bx + c = 0$ $erstatte\ s = \frac{b}{a}\quad og\quad t = -\frac{c}{a}$ $x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{2} \Leftrightarrow$ $x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}}{2} \Leftrightarrow$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$ $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$ $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

8.4 Den erfarende lærers justering af designet

Jeg vil starte med at nævne nogle faktorer der spiller en vigtig rolle for lærerens undervisningsplanlægning. Det er tre centrale faktorer for undervisningsplanlægning. En lærer skal fokusere på hvilken kompetencer eleven skal opnå med hvert emne, antal af moduler til rådighed for emnet og gå i dybden med emnet. Den uafhængig faktorer som man må tilpasse sig efter er tiden (modul antallet) som medfører at de andre to faktorer, uddybning og kompetencer, må justeres efter antallet af moduler til rådighed. Med andre ord vil man som lærer idealt uddybe sig meget i hver emne men tidsfaktoren begrænser dette. Derfor har læreren som udførte designet justeret på mit design primært udefra tidsfaktoren.

Læreren der udført designet er en 60-årig inspirerende og erfaren lærer. Med mit accept og tillid til lærerens erfaring blev designet justeret. I modul 1 vælger læreren at indlede med lidt repetition af ligningsløsning og noget historisk matematik med fokus på geometrien. Derudover fulgte han mit design og havde planlægt at få eleverne igennem ark 1 og ark 2. (se 1. modul lærerens originale planlægning)

Modul 1



120905: Introduktion til ligninger

Program for modulet:

1. Repetition af regler for løsning af ligninger. Symbolerne "=" og "<=>"
2. Løs ligningerne:
    1. 2x + 5 = 3(5 - x)
    2. 3(x - 1) = 2x
    3. 2(x + 2) = 3 + 2x
    4. 5(x + 2) = 2(x + 5) + 3x
3. Gennemgang af algebraisk og geometrisk fortolkning.
4. Opgaveløsning - ark 1 (downloades herunder).
5. Kvadratet på en toleddet størrelse - geometrisk fortolket
6. Enkle andengradsligninger
7. Opgaveløsning ark 2 (I samme fil)

I anden modul har læreren planlagt nogenlunde at følge designet, men han vælger at starte lidt med ark 4 som egentligt hører til i 3.modul iflg. designet. Det er tidspresset som spiller ind her. Desuden har læreren fravalgt nogle opgaver. Disse opgaver er fra ark 3 og grunden til at han nedstemmer dem er at opgaverne indeholder negative værdier som geometrisk ingen mening giver. Læreren argumentation var at eleven som har dannet tillid til geometrien og kommer til at føle at geometrien ikke kan bruges, mister al tro på værktøjet og bliver desuden usikker på brugen af geometrien. Se lærerens undervisningsplanlægning af modul 2.

Modul 2

120912 Andengradsligninger

Lektie til onsdag d. 12.sep.:

1. Illustrer formlen $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$ ved arealbetragtning. Særligt skal du forklare, hvordan leddet $2 \cdot a \cdot b$ kommer ind.
2. Hvordan ser den tilsvarende formel for $(a - b)^2$ ud?
3. Illustrerer ligningen: $(x + 2)^2 = 16$ ved et areal - og løs ligningen geometrisk og algebraisk
4. Illustrerer ligningen: $(x - 8)^2 = 100$ ved et areal - og løs ligningen geometrisk og algebraisk
5. Illustrerer ligningen: $x^2 + 2 \cdot x + 1 = 9$ ved et areal - og løs ligningen geometrisk og algebraisk
6. Illustrerer ligningen: $x^2 + 10 \cdot x + 25 = 9$ ved et areal - og løs ligningen geometrisk og algebraisk

Program

1. Gennemgang af lektien til modulet (opgaverne herover)
2. Løs i grupper opgaverne 3.7; 3.9; 3.10; 3.12; 3.13 fra ark 3
3. Lærergennemgang af et eksempel på andengradsligninger af typen: $x^2 + sx = t$
4. Løs i grupper opgave 1 på ark 4 - de er vedhæftet dette site.
5. I sidste halvdel af modulet vil vi starte på den skriftlige aflevering, der er til søndag.

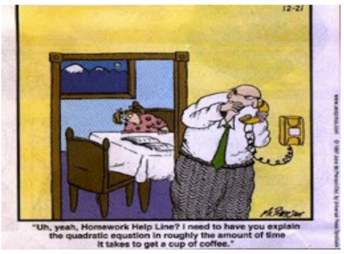
I tredje modul vælger læreren at følge designet, hvor den eneste justering er at han vælger en lærergennemgang af algoritmen til løsning af andengradsligningen på formen $x^2+sx=t$. Det vælger læreren at gøre for at sikre at alle elever er kommet igennem algoritmen. Det er bemærkelsesværdigt at se lærerens fokus er elevens udenadslæren af formlen på andengradsligningen. Målet er at *man skal kunne formlen udenad ellers få tatoveret den (for sjovt)* læreren udtalelse i klassen. Se lærerens undervisningsplanlægning af modul 3.

Modul 3

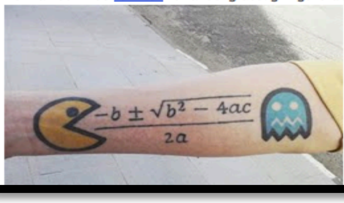
120919: Formel for løsning af andengradsligning

I dette modul skal vi udlede formlen for løsning af andengradsligningen.

1. Lærergennemgang af ligninger af typen: $x^2 + sx = t$
2. Eksempler (vi bruger de vedhæftede opgaveark)
3. Den generelle andengradsligning: $ax^2 + bx + c = 0$
4. Flere eksempler



Her kan du finde formlen for andengradsligningens løsning.



Ved at trykke på formlen så går man ind i følgende side:

Løsning af andengradsligninger.

En *andengradsligning* ser sådan ud:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor tallet *a* ikke må være 0.

Løsningsprocedure:

Først udregner du *diskriminanten* og ser for dens fortegn:

$$d = b^2 - 4ac$$

Hvis diskriminanten er *negativ* ($d < 0$), er der ingen løsninger.

Hvis diskriminanten er *nul* ($d = 0$), er der én løsning.

Hvis diskriminanten er *positiv* ($d > 0$), er der to løsninger.

Hvis der er løsninger, udregner du dem med denne formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

eller

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

8.5 Realiteten af designet

Jeg vil starte med at fortælle lidt om klassen og interessen i matematik. Klassen har matematik på B-niveau og har en samfundsvidenskabelig studieretning. Det er et 2g hold fra Ørestad Gymnasium. Under min observation i klasserummet bemærkede jeg en stor differentiering på niveauet i klassen. Der er elever der sidder og har svært ved simple matematiske metoder, som at løse simple ligninger, hvor andre er super kvikke og nåede langt med opgavebesvarelsen på kort tid. Desuden er klassen lidt urolige og det kan skyldes interessen og evnen er på forskellig niveau.

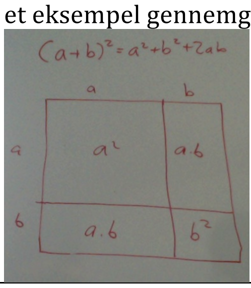
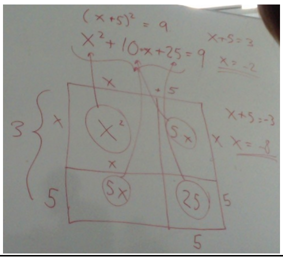
Derudover lykkes det læreren at komme igennem hans undervisningsplan af modul 1. Gruppen som jeg fulgte med diktatoren, (GD: gruppen fra det designet forløb), nåede helt frem til ark 3.

Modul 1

Kl.	Lærerrolle	Elevaktivitet
9.54	Repetition af enkelte førstegradsligninger Løser ligningen 3(x+1)=7(2-x)+5	
10.03	Eleverne sættes i gang med at løse simple ligninger (de får 10 min)	Eleverne er i gang med at løse giver følgende ligninger 1. 2x + 5 = 3(5 - x) 2. 3(x - 1) = 2x 3. 2(x + 2) = 3 + 2x 4. 5(x + 2) = 2(x + 5) + 3x
	Opsamling på løsningerne af de 4 ligninger. (beder om hvad x er). Lærer gennemgang af ligning 3 og 4	Eleverne giver de rigtige svar for ligning 1 og 2 men ikke for ligning 3 og 4
10.16	 Læreren viser modulplanen og tager udgangspunktet i figuren (Pytagoras' sætning). Historisk gennemgang af geometrisk brug i matematikken.	
10.28	Læreren sætter eleverne til at arbejde med ark 1. Går rundt i klassen og hjælper eleverne	Er i gang med løsning af ark 1
10.47	Pause	
10.57	Starter med at se på $x^2=9$ løses algebraisk og geometrisk. Og derefter spørger læreren hvad $(a+b)^2$ er? Og giver en geometrisk forklaring på svaret.	En elev siger at $(a+b)^2=a^2+b^2$. Men efter den geometriske forklaring siger eleven så mangles der kun 2ab.
11.07	Eleverne sættes i gang med at arbejde videre på arkene. Læreren går rundt og hjælper.	GD var i gang med ark 3.

I anden modul var læreren tidspresset da havde planlagt at den halve del af modulet skulle bruges på en aflevering som eleverne skulle aflevere et par dage efter. Læreren havde planlagt at eleven får tid til at illustrere $(a-b)^2$ geometrisk. Det valgte han at springe over. Desuden havde læreren et håb om at kunne illustrerer andengradsligningens løsningsmetoden vha. den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet. Men det lykkes ikke da læreren vurderede i timen at eleverne ikke var nået så langt som han havde håbet. Men ellers nåede han det resterende i hans undervisningsplan.

Modul 2

Tid	Lærerrolle	Elevaktivitet
12.16	Læreren skriver $(a+b)^2= a^2+b^2 +2ab$ og tegner det geometrisk og forklare at man kigger på arealerne. Dette bruges til at regne følgende eksempel $(x+2)^2=16$ Hvor man tager udgangspunktet i kvadratet $(a+b)^2$ og vurdere hvad tallene i eksemplet svare til. Ydereligere et eksempel gennemgås af læreren $X^2+10x+25=9$  	Eleverne deltager ved at svare på lærerens spørgsmål under gennemgangen af de kvadratsætningen og de forskellige eksempler. Læreren stiller spørgsmål som ”hvad svare de 25 til i $a^2+b^2 +2ab$?”
12.30	Klassen er i gang med at løse ark 3	
13.00 Pause	Læreren taler med interesseret elever omkring opgaver	Nogle af de interesserede elever henvender sig til læreren for at få uddybede sig i nogle opgaver fra ark 3.
13.10	Eleverne får resten af modulet til at arbejde med afleveringsopgaver.	

I tredje modul er læreren tidspresset fordi at der skal være tid til en test og fordi ark 4 indeholder mange opgaver. I dette modul var det meningen af eleverne kom igennem hele ark 4. Men da eleverne fik 23 min til ark 4 var der ingen elever der kom igennem hele arket.

Modul 3

Tid	Lærerrolle	Elevaktivitet
9.55	Læreren starter med at tegne et kvadrat som er inddelt i 4 firkanter (to kvadrater og to rektangler) og skriver inde i første kvadrat a^2 og i det andet b^2 og vil have eleverne til at udfylde resten. Derefter skriver han ( )^2 hvor han beder eleverne om at sige hvad der skal stå i parentesen. Læreren bruger nu konkrette eksempler såsom ( )^2= x^2 +12x som forventes at udfyldes af eleverne.	Her prøver eleverne at besvare lærerens spørgsmål om hvad der skal stå i parentesen og nogle svare korrekt at det skal være a+b. I det eksemplet hvor læreren skriver ( )^2= x^2 +12x gætter eleverne sig frem og når læreren skriver og forklare hvad der skal stå i parentesen så er der mange elever der sige "nååååh ja".
10.03	Læreren viser eleverne hvordan man løser følgende ligning $x^2+4x=5$ vha. geometrisk fuldstændiggørelsen af kvadratet (cut-and-past- metoden). Derefter løser læreren ligningen $x^2+1x=\frac{3}{4}$ (babylonisk eksempel)	Elever siger ikke så meget under løsningen af ligningen $x^2+4x=5$. Men når læreren løser $x^2+1x=\frac{3}{4}$ stillers der spørgsmål til tilføjelsen af $\frac{1}{4}$. (en usikkerhed omkring brøkregneregler: $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$)
10.23	Læreren sætter eleverne i gang med at løse ark 4.	Den observeret gruppe begynder først med ark 4, 7 min efter at være sat i gang. Gruppen kommer kun igennem opgave 1.1 og 1.2. Igen elever kommer igennem hele arket.
10.46	Pause	
10.55	Læreren viser den generelle algoritmen til løsning af andengradsligninger på formen $x^2+sx=t$. Læreren gør eleverne opmærksom på s^2+4t (som skal svare til d hvor a=1 s=b og t=-c) hvad der sker når udtrykket er større, mindre eller lig nul.	
11.06	Giver et eksempel på hvordan man løser $x^2+3x=4$ vha. løsningsformlen. Læreren giver et eksempel: $2x^2+10x-12=0$ men beder eleverne om at sige hvad s og t er i denne ligning. Læreren omskriver ligningen til $x^2+5x-6=0$ Så $x^2+5x=6$	Eleverne svarer på lærerens spørgsmål om hvad de forskellige koefficienter i $x^2+3x=4$ svare til i ligningen $x^2+sx=t$. Det virker ikke som et problem. Men med ligningen $2x^2+10x-12=0$ så er eleverne ikke sikker på hvad er s og hvad er t. Indtil læreren siger at koefficienten foran x^2 skal være 1 og tallet skal på den anden side.
11.13	Læreren sætter eleverne i gang med prøven. (NB. Der er ikke blevet sat fokus på hvordan man løser andengradsligninger uden formlen.. altså uden figur og uden formel men kun algebraisk vedhjælp af fuldstændiggørelse af kvadratet)..	Eleverne prøver at besvare de forskellige opgaver i testen vha. geometrien for det fik de at vide af læreren de skulle bruge.

8.5.1 Episode 1D´s didaktiske/adidaktiske situation og faser

Episode 1D er den episode i modul 3 hvor eleven arbejder med ark 4 (se det markeret felt med blåt på forrige side).

Jeg vil starte med at vise den didaktiske/adidaktiske situation og de faser eleven befandt sig i under introduktionen og brugen af metoden ”fuldstændiggørelsen af kvadratet” til løsning af andengradsligninger for første gang.

Derefter vil jeg gå i dybden med episode 1D ved at bruge transskriberingen, hvor GD løser opgave 1.1 fra ark 4. .

Tid (min)	Overordnet aktivitet	Aktivitet	Fase	Didaktisk/ Adidaktisk situation
41	Geometrisk fuldstændiggørelse af kvadratet	Læreren gennemgang af et konkret eksempel på en andengradsligning $x^2+3x=4$ og $x^2+1x=\frac{3}{4}$	Devolution	Didaktisk
		Gruppearbejde: løsning af ark 1 (den observeret gruppe løser opgave 1.1 og opgave 1.2)	Handling formulering og validering	Adidaktisk
		Læreren afslutter med at vise algoritmen til løsning af andengradsligninger på formen $x^2+sx=t$	Institutionalisering	Didaktisk

Både i introduktionen (devolutionsfasen) af den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet og ved generaliseringen af algoritmen (institutionaliseringsfasen) havner eleven i en didaktisk situation. Når eleven er i gang med at løse ark 4 (episode 1D) er eleven i en adidaktisk situation. I episode 1D befinder eleven sig i handling-, formulering- og valideringsfasen.

Eleven har i episode 1D fået en opgaveformulering som kræver at *handle* (prøve at redgøre for problemet) og derefter prøve at finde en løsning i form af *formulering* af en metode til sidst skal eleven overbevise sig selv ved at *argumentere* og dermed *validere* for de formuleringer han når frem til.

8.5.2 Aposteriori analyse af episode 1

Jeg har udvalgt en dialog mellem to elever i en gruppen, der viser hvordan de tacklede opgave 1.1 fra ark 4, da de ikke nåede mere. Målet var at kunne analysere en gruppedialog hvor den generaliseret algoritme for løsning af andengradsligningen på formen $x^2+sx=t$ bliver udledt (løsning af opgave 1.6). Men pga. tidpres vælger læreren selv at gennemgå algoritmen. Derfor nøjes jeg med at følge en gruppedialog omkring brugen af fuldstændiggørelsen af kvadratet ved løsning af andengradsligninger.

Læreren introducer opgaven ved at løse et eksempel på andengradsligning vha. fuldstændiggørelse af kvadratet og beder derefter klassen om at løse ark 4. Den udvalgte gruppe GD, er dannet af to elever E1 og E2. Bemærk at E1 bruger udtrykket "ik?" ofte og det er ikke fordi han er usikker men for at sikre sig at E2 er med. E1 fører dialogen og dermed også opgaveløsningen. Gruppen starter på følgende måde:

1. *E1:"Vi tager opgave 1.1.* $x^2+2\cdot x=8$. *Ok så vi kan lige starte med at tegne første kvadrat, det er den der* $x\cdot x=x^2$, *ik? Og så når du har lavet den, så laver du en ny en, hvor den ene side er 2 og den side er x, ikke?"*
2. *E2: "Den er x, det vil sige* $2\cdot x$*?"*
3. *E1: "Ja… og den sidste. Det vil sige der står lig med efter den og så laver du endnu en kvadrat, hvor det er, du skriver ind i midten 8. Og lad være med at skrive længerne, for det kender vi ikke endnu… Ok, det vi så gør, det er så hugger vi den der* $x\cdot 2$ *over, ikke?"*

Gruppen starter med at løse opgave 1.1 ved at bruge samme metode som læreren. De tegner kvadarterne og ved at x^2,2x og 8 udgør arealerne på kvadraterne. Det kan understreges i tur 3 hvor E1 siger at E2 skal tegne et kvadrat hvor der står 8 i midten efterfulgt af *Og lad være med at skrive længerne, for det kender vi ikke endnu*. Desuden kan man se at E1 er fortrolig med metoden "cut-and-past" og dermed den geometriske fuldstændiggørelsen af kvadratet som ses igen i tur 3 "så hugger vi den der $x\cdot 2$ over".

4. *E2:"Jeg tegner lige den oprindelige".*
5. *E1: "Og så får vi den smidt over på den der kvadrat…* x^2, *ikke? Sådan så, at der på den ene side lige bliver tilføjet x+1 og på den anden side vender vi den lige om og så tilføjer vi også den, sådan så der står x+1 på dem begge."*

Det ses at E1 er sikker på metoden og prøver at overbevise E2. Det er tydeligt at E1 styre opgaveløsning. En uddybende metode forklaring fortsætter i tur 5. Her forklares hvad at *hugge x·2 over* vil sige. Der bliver netop forklaret at man deler x·2 til to x·1 og det medfører at de to sider på det et ufuldstændig kvadrat er nu blevet x+1. Eleverne fortsætter med dialogen:

6. *E2:"Så flytter vi den over og hvad har vi så?"*
7. *E1:"Så har vi jo x her på langs, ikke? Fordi det jo det samme som her."*
8. *E2:"Ja. Og så har vi hugget den over?"*
9. *E1:"Så har vi x·x, så det 1 her. Og herovre, der har vi også x og…"*
10. *E2:"yes. x og 1, ikke?"*
11. *E1:"Så er vi nødt til at lægge….Og 1·1, det er 1".*

E2 er lidt usikker på metoden. Derfor prøver E2 at forklare metoden efterfulgt af et spørgsmål. E2 forventer at E1 bekræfter hans forståelse af metoden, som desværre ikke sker. Desuden ses i tur 11 at fuldstændiggørelsen af kvadratet bliver til. Her tilføjes $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$. E1 er ikke i tvivl om fuldstændiggørelsen af kvadratet og fortsætter med at operere med ligningen.

12. *E2:"ja,ok".*
13. *E1:"Så vi har også 1 hernede som vi så tilføjer her, men i og med vi tilføjer 1, så skal der også tilføjes 1 ekstra på den færdige her".*
14. *E2:"aha".*
15. *E1:"Sådan så det her det bliver faktisk 9".*

Det ses at E1 holder overblikket og kan udover at fuldstændiggøre kvadratet se hvad der er blevet tilføjet og dermed husker at tilføje den samme tal på den anden side af lighedstegnet (se tur 13). Det ses at E1 er nået frem til at $(x+1)^2 = 9$ geometrisk. Dialogen fortsætter mellem eleverne

16. *E2:"Så bliver det jo 10".*
17. *E1:"Og det gør det i og med at $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot1\cdot x$".*
18. *E2:"Mhmhm, den vil jeg gerne lige have defineret lidt".*
19. *E1:"Nå, men det er den der formel".*
20. *E2:"Nå ok, det er hele skidtet du har fået tegnet ind der".*

E2 er lidt usikker omkring tilføjelsen af 1 på begge sider og tror man tilføjer 1+1 på højre side, dvs. tilføjer 2 til arealet er 8 (se tur 16). E1 er i sin egen verden og kommenter ikke E2's input men fortsætter med at forklare at kvadratet svare til $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot1\cdot x$ som er forkert. Men da E2 tøver så siger E1 i tur 19 "men det er den der formel" og henviser til algoritmen som læreren har skrevet på tavlen.

I tur 17 siger E1 noget der er forkert, men da han ikke kan argumenter så bruger han den didaktiske kontrakt hvor han henviser til at *det er det læreren har sagt* (tur 19). Det vinder han diskussionen på (se tur 20) og E2 overgiver sig.

21. *E1:"Ja ja, det er, det er den færdige. Og nu skal vi bare lige ud fra det udlede, hvad x er".*
22. *E2:"to sekunder .. Det er det vi har her, ikke?"*
23. *E1:"ØØØh eller jeg tror faktisk, der skal stå 9, der jeg tror det er mig, der har skrevet forkert. Jeg tror faktisk, der skal stå 1"*
    (E1 retter $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot 1\cdot x$ til $(x+1)^2 = x^2+1+2\cdot 1\cdot x$ da han ser på den geometriske figur).

Det ses at E1 er enten lidt usikker eller lidt for hurtig, omkring påstanden om $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot 1\cdot x$ og derfor siger i tur 21 "ja ja … og nu skal vi bare ud fra det udlede, hvad x er?". E1 vil videre for at bestemme x. Bemærk at E1 bruger et matematisk begreb "udlede" forkert, han mener sikkert *finde, udtrykke* eller *bestemme x*. Igen tøver E2. E1 tøver lidt og retter fejlen fra før til det korrekte at $(x+1)^2 = x^2+1+2\cdot 1\cdot x$. Det skyldes at der findes et højt adidaktisk potentiale i den geometriske fremstilling af opgave. Eleven får feedback på gyldigheden af $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot 1\cdot x$ ved at se at der ikke findes en overensstemmelse mellem den algebraiske og geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet. Her får eleven mulighed for at validere egen resultat.

24. *E2:"Hvorfor det?"*
25. *E1:"For så skal vi, se vi her at, hvis vi kigger op på den der, ikke? Hvis vi nu skulle finde ud af, hvad x er og x+1 her, ikke? Det giver angivne 9, så x er lig med 8. Og det er den løsning, vi kan tage ud fra tegningen. Det skal give 9, fordi vi tilføjer den der x som en kvadrat ikke?"*

E1 ignorerer E2's spørgsmål om hvorfor $(x+1)^2 = x^2+1+2\cdot 1\cdot x$. E1 prøver at bestemme x, så han siger at $(x+1) = 9$. Bemærk at det er forkert da han har glemt at kvadrare parentesen. Med denne ligning kommer E1 frem til at $x=8$. Det ses fra tur 3 at E1 ved at der er tale om arealer af kvadrater, og ifølge E1 så skal kvadrets med arealet 9 have siden 3. Men han er lidt for hurtig og dermed begår den fejl at siden x+1 svare til arealet 9.

26. *E2:"Nå, ok på den måde…"*
27. *E1:"Og x kommer jo ikke til at være 8, hvis det skal give et…Er du med?"*
28. *E2:"ja ja, jeg forstår godt, hvorfor det giver sådan".*

Lige fra starten af gruppedialogen ses at E1 styre opgaveløsningen og E2 prøver at følge med. Man kan se at der er et niveau forskel på disse to elever i matematik. Dette medfører at E1's input er mere værd end E2's input. Det medfører at E2 er tilbøjelig til at opgive tøven over for E1 for ikke at føle sig mindre klog. Men ligningsløsning er stadig i gang:

29. *E1: "…Så ved vi samme resultat skal give 9. Så x+1, fordi det er kvadratet som vi skal til giver så 9, så vi kan formulere at x = 8… Men så siger vi x plus… Plus hvad det nu det hedder…hvis det nu skal give -9, ikke? Og så skal… Så skal x være -10, fordi det er så det negative resultat".*
30. *E2:"ja…"*

Det ses i tur 29 at E1 tøver en del og prøver at huske hvordan man algebraisk når frem til den anden løsning. Da E1 begik fejlen om at x+1=9 så fortsætter han og mener at så må den anden løsning komme fra x+1=-9. Det virker til at E1 ved at hvis man havde taget kvadratroden af et tal så vil man ende med en plus og minus værdien. Men da E1 havde glemt at tage roden løser han ligningen x+1=-9 og siger at x=-10. Bemærk at E1 mener at man skal finde den anden løsning som er negativ. Det er ikke sandt da man sagtens kan finde to positive eller to negative løsninger på en andengradsligning. Jeg antager det E1 har forvekslet med er at geometrisk kan man finde en løsning hvis en side er positiv, og derfor må den anden løsning være negativ, da den muligvis ikke kan illustreres geometrisk.

31. *E1:"det har vi så udregnet med algebra, hvor vi har udregnet det andet med geometri".*
32. *E2:"Ok, lad os komme videre".*

Til sidst pointere E1 at opgaven er løst da de geometrisk har fundet den ene løsning og algebraisk den anden. Det er ikke helt rigtigt da de har fundet frem til begge løsninger algebraisk og en af løsninger geometrisk.

Hvis gruppen havde prøvet at validere deres løsninger vil miljøet havde givet dem feedback på opgaveløsningen (se afsnittet *Apriori analyse af opgaverne i episode 1D*). Da valideringen af løsningen ikke stod klart i opgave formuleringen blev det ikke gjort.

8.5.3 Det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø

Det adidaktiske potentiale i et subjektivt miljø er afhængig af det adidaktiske potentiale i det objektive miljø. I afsnit 8.3 står der hvor højt et adidaktisk potentiale der ligger i opgave 1 og dermed opgave 1.1. Der er et højt adidaktisk potentiale i opgave 1, fordi man som elev kan validere løsningerne algebraisk og geometrisk. Desuden indgår der et centralt element at eleverne induktivt kan komme frem til en algoritme for at løse andengradsligningen på formen $x^2+sx=t$.

Det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø har til formål at afspejle det adidaktiske potentiale i det objektive miljø.

Gruppedialogen i forrige afsnit viser at løsningen af andengradsligningen vha. fuldstændiggørelsen af kvadartet geometrisk efterfulgt af algebraisk løsning kan lade sig gøre. Desuden er overblikket ved brugen af fuldstændiggørelsen af kvadartet i ligningen løsning meget centralt. Tilføjelsen af en værdi på den ene side (for at fuldstændiggøre et kvadart) kan være overskuelig men at man husker at der arbejdes med en ligning og at den samme værdi også skal tilføjes på den anden side er meget afgørende for løsningen af andengradsligninger. Det virker til at være succesfuldt for gruppen. Det der er problematisk i elevernes E1 og E2's løsningsmetode er at de glemmer at kvadratets areal er $(x+1)^2 = 9$ og skriver i stedet $x+1=9$. Disse elever når frem til to forkerte løsninger. E1 og E2 kunne selv have valideret deres løsninger, men har ikke gjort det fordi de muligvis ikke er blevet bedt om det i problemformuleringen. Derfor er det adidaktiske potentiale i det subjektive miljø ikke så optimalt som det er i det objektive miljø.

Validering i matematik er en proces som eleven skal lære fra første dag. Valideringsprocessen skal opfattes som en opdagelsesmetode der giver eleven mulighed for altid at kunne kontrollere løsningerne og dermed bekræfter eleven gyldigheden af sine løsninger.

8.6 Opsamling

Målet med designet er at give eleven en lettere tilgang til løsning og bevise den generelle formel for andengradsligningen (uden mystiske tricks som først giver mening i slutningen af et bevis). Desuden var målet at eleven induktivt selv nåede frem til en algoritme for løsning af andengradsligningen på formen $x^2+sx=t$ og efterfulgt af den induktivt metode igen for at nå frem til den generelle løsningsformel for andengradsligningen. En af satsningerne i designet var at skabe nogle opgaver med højt adidaktisk potentiale som kunne skabe et miljø med feedback på elevens løsninger.

Det lykkes ikke at skabe opgaver med højt adidaktisk potentiale. Det der kræves var en udvidelse af opgaveformuleringerne med eksempelvis ”kontrollere din løsningerne ved at .. ”. Et kontrol spørgsmål savnes og kan ses tydeligt i episode 1D da GD når frem til forkerte løsninger og ikke validere dem.

Derimod lykkes det at flette den geometriske brug af fuldstændiggørelsen af kvadartet i emnet andengradsligninger som har gjort bevisprocessen trinvis logisk for eleven. Desuden ses i analysen af gruppedialogen i episode 1D at algebraens fuldstændiggørelse af kvadratet følger automatisk med den geometriske fuldstændiggørelsen af kvadratet.

9. Diskussion

I dette afsnit vil resultaterne fra analyseafsnittene om de to forløb, nemlig standard forløbet og det designet forløb, blive diskuteret. Til dette formål vil jeg starte med at sammenligne de to forløb, hvor både ligheder og forskelle fremhæves. Derefter vil der komme en uddybning med det forløb, som udledte den generelle løsningsformel for andengradsligningen på let tilegnelige måde for eleven. Med andre ord vil der blive udpeget, hvilket forløb der illustrerede tricket i løsning af andengradsligning, så fuldstændiggørelsen af kvadratet faldt eleven naturligt ind. Desuden vil jeg sammenligne det adidaktiske potentiale der lå i de to forløbs bevisførelse. Det adidaktiske potentiale er et centralt element i matematik som kan give eleven valideringsmulighed. Men praktisk vil der altid være besværligheder i ethvert udformet undervisningsforløb, hvilket kan føre til nogle type fejl. Under observation af de to forskellige forløb i samme emne bemærkede jeg forskellige besværligheder som førte til, at eleven begik forskellige type fejl. Jeg har derfor forsøgt at skematisere fordele og besværligheder for eleven i disse to forskellige forløb. Jeg vil ende diskussionen med en overvejelse om mulig udformning af et forløb om andengradsligninger med udgangspunktet i de to forløb og CAS-værktøjets betydning i dagens matematik.

9.1 Sammenligning af de to forløb

Analysen af både standard forløbet og det designet forløb har gjort det muligt at sammenligne forløbene. I de to forløb kan man se mange ligheder og forskelle. De ligheder som forløbene bygger på er, at eleverne er fra samme årgang, begge har matematik på B-niveau, har en samfundsvidenskabelig studieretning og begge er kommunale gymnasier. Man kan dermed forudsige at de to klassers matematiklærer har samme kompetencemålsætninger[21] for eleverne.

Til gengæld er forskellen på de to klasser stor. En relevant forskel som jeg bemærkede i standard forløbet var at elevernes (matematiske) niveau var langt mindre differentieret end i klassen fra det designet forløb. Og jo større differen-

[21] Ifølge undervisningsministeriet

tiering på niveauet der findes i en klasse desto sværere er det som lærer at planlægge undervisningen, så alle elever opnår det maksimale udbytte og interesse.

Kigger vi på problemformulering er fokuspunktet udledningsmetoden af den generelle løsningsformel for andengradsligningen og det adidaktiske potentiale, der ligger i beviset. Jeg vil benytte mig af mine observationer og analysen af begge forløb til at belyse problemformuleringen.

9.1.1 Beviset for den generelle løsningsformel af andengradsligning

Udledningsmetoden for den generelle løsningsformel af andengradsligningen i de to observerede forløb som nu sammenlignes. I analysen af standard forløbet (afsnit 7) havde GS[22] meget svært ved at følge logikken i bevis trinene. Det fremhæves i (episode 1S) den første omskrivningen af andengradsligningen, hvor der ganges med 4a på begge sider af lighedstegnet. GS stopper op og har en diskussion med læreren om hvor de 4a kommer fra. Men gruppen får et utilfredsende svar, nemlig:

> *"Du skal sådan set bare forklare, hvad sker der for at kommer fra første ligning til anden ligning. Hvad har man gjort for at komme fra første ligning til anden ligning?"* (afsnit 7.3.2 tur 2)

Læreren beder GS om at holde sig indenfor spørgsmålsrammen, altså at forklare omskrivningen på trinene og dermed behøver de ikke at vide begrundelsen bag tricket ved at gange med 4a. Desuden er det relevante i beviset, at der findes biimplikationstegnene som indikerer at ligningens omskrivning fra trin 1 til 2 skal også være gyldig fra trin 2 til 1. Det er ikke noget som klassen arbejder med. Diskussionen mellem GS og læreren fortsætter omkring tricket indtil gruppen ender med at acceptere, at svaret og begrundelsen er på et *højere matematik*-niveau (afsnit 7.3.2 Tur 46) og dermed svært at forstå på nuværende tidspunkt. Det får GS til at tabe forhandlinger af de mikro didaktiske kontrakter. Desuden skulle læreren begrunde tricket med fuldstændiggørelse af kvadrattet.

Til gengæld lykkedes det eleven i det designet forløb at tilegne sig viden om at beviset er baseret på fuldstændiggørelsen af kvadratet. Den visuelle illustration af beviset kommer til syne ved hjælp af den geometriske ramme, som støtter den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadartet. Jeg har desværre ikke mulighed for

[22] GS står for gruppen i standard forløbet, som blev fulgt vha. lydoptagelse.

at citere fra en elevgennemgang af algoritmen for den generelle løsningsformel af andengradsligningen (da det blev til en lærergennemgang). Men til gengæld er bevisets algoritme og konkret opgaveløsnings algoritme den samme. Derfor kan der citeres for brugen af fuldstændiggørelse af kvadratet i et konkret eksempel som viser tilegnelsen af algoritmen hos eleven. Her tages der udgangspunkt i GD[23] (afsnit 8.5.2). Her er et citat, som fremhæver tilegnelsen af fuldstændiggørelsen af kvadrattet både geometrisk og algebraisk. GD er i gang med at løse $x^2+2\cdot x=8$. Gruppen tegner ligningen geometrisk og derefter siger den ene elev (afsnit 8.5.2).

> *"..det vi så gør, det er så hugger vi den der x·2 over, ikke? (tur 3)…. Og så får vi den* (1x) *smidt over på den der kvadrat… x², ikke? Sådan så, at der på den ene side lige bliver tilføjet x+1 og på den anden side vender vi den lige om og så tilføjer vi også den, sådan så der står x+1 på dem begge. (tur 5) …* Så har vi x·x, så det 1 her (tur 9)… *Så er vi nødt til at lægge 1·1, det er 1* (tur 11) *…. men i og med vi tilføjer 1, så skal der også tilføjes 1 ekstra på den færdige her* (tilføje 1 til højre siden altså tilføjes til 8) *(tur 13) "*

Dette viser, at GD ikke synes det er mystisk at tilføje en værdi for at fuldstændiggøre kvadratet. Den geometriske ramme har gjort det muligt at forstå tricket i løsning af andengradsligninger. Den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet nævnes også af GD, hvor de ud fra den geometriske konstruktion kommer frem til $(x+1)^2 = x^2+1+2\cdot1\cdot x$. Der findes ikke et direkte citat på dette, da det er en proces hvor der laves en fejl undervejs. (se afsnit 8.5.2).

Fremstillingen af disse to forløbs arbejde med løsningen af andengradsligninger muliggør sammenligningen af tilegnelsen af løsningsmetode. Det ses tydeligt, at i standard forløbet virker tricket med at gange med 4a og derefter addere b^2, mystiske, da eleven ikke ved, at det er til for at fuldstændiggøre kvadratet. Sammenlignet med det designet forløb, så har eleverne fået en forklaring på at andengradsligninger kræver et særligt trick, som visuelt vha. den geometriske ramme, gør det langt lettere at tilegne sig. Med andre ord er fuldstændiggørelsen af kvadartet håndterbart, når den geometriske ramme bruges som værktøj for at nå frem til den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet. Bevisets kerne i den generelle løsningsformel for andengradsligningen ligger i at fuldstændiggøre

[23] GD står for gruppen fra det designet forløb.

kvadartet. Derfor har en elev tilegnet sig viden om løsning af andengradsligningen, hvis han har tilegnet sig viden om fuldstændiggørelsen af kvadratet i andengradsligningsløsning.

Under beviset er det relevant at kigge på opgaveformulerings form og se hvor højt et adidaktisk potentiale der ligger i beviset. Har eleven mulighed for at validere under bevis processen?

9.1.2 Det adidaktiske potentiale i beviset

Et adidaktisk potentiale er en potentiale i en opgave, der giver eleven mulighed for at validere løsninger. Det adidaktiske potentiale giver altså eleven feedback på løsningsmetode, resultater og gyldigheden af disse. Et element som er med til at forme det adidaktiske potentiale er den matematiske ramme, som læreren har valgt at tilknytte et emne. I de to observerede forløb blev der brugt to forskellige rammer for udledning af den generelle løsningsformel for andengradsligningen. I standard forløbet bliver den algebraiske ramme brugt. I den algebraiske ramme kan man validere ved at bevise eller modbevise gyldigheden af løsninger ved algebraen. Her er fokus på antagelser, omskrivninger, reduceringer, opfyldelse af biimplikationstegn. Alt i alt er der tale om bogstaveregning og matematiske operationer. Denne ramme er en af de svære rammer for elever at arbejde med. Kigger man på beviset af den generaliseret løsningsformel for andengradsligningen i denne ramme så er essensen den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet. Dermed er fokus omskrivningen af andengradsligningen trin for trin og gyldigheden af biimplikationstegnet. Dermed kan gyldigheden af beviset valideres ved at vise at implikationen fra højre til venstre er sand hvis og kun hvis implikationen fra venstre til højre også er sand (se hvordan det matematisk udtrykkes). Desuden kan gyldigheden valideres ved at indsætte det fundet udtryk af x i den oprindelige andengradsligning og vise at det må give nul (se følgende).

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{hvis og kun hvis} \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow ax^2+bx+c=0$$

kan også valideres på følgende

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ hvis og kun hvis $$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=0$$ $$a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=0$$

I standard forløbet bliver eleven bedt om at vise gyldigheden af beviset, hvor GS i praktisk får at vide at de skal forklare den trinvise omskrivning. Dvs. kun den ene implikation og ikke den anden. Derfor er der ingen adidaktisk potentiale i opgaven og dermed har eleven i dette miljø ingen mulighed for at validere trinenes gyldighed.

I det designet forløb bruges den geometriske ramme til at bevise den generelle løsningsformel for andengradsligningen. I denne ramme er der et sammenspil mellem algebraen og geometrien. Essensen i beviset er stadig fuldstændiggørelsen af kvadratet. Men nu kan man visualisere den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet vha. den geometriske fuldstændiggørelse af kvadartet. Dette giver flere validerings muligheder. Da algebraen er inkluderet i den geometriske ramme så vil valideringen fra før også gælde. Men derudover er det geometriske værktøj en støtte til det algebraiske bevis. Med andre ord er beviset en geometrisk konstruktion som kan beskrives algebraisk. Så valideringen i beviset kan ses ved overensstemmelse mellem algebraen og geometrien.

I det designet forløb nåede GD ikke at bevise den generelle algoritme for løsningsformlen af andengradsligningen. Til gengæld benyttede GD sig af algoritmen for at løse en konkret andengradsligning, som kan bruges til at fremhæve det adidaktiske potentiale, der kunne ligge i beviset. Det skyldes, at den samme algoritme bliver brugt i både beviset og i løsningen af konkrette andengradsligninger. Tager vi udgangspunktet i GD's brug af algoritmen for at løse en konkret andengradsligning, så kan det bemærkes (i afsnit 9.1.1), at fuldstændiggørelsen af kvadartet bliver fuldført både algebraisk og geometrisk. Men under løsningen af ligningen begår GD en fejl i antagelsen om, at $(x+1)^2 = x^2+9+2\cdot1\cdot x$ (afsnit 8.6.2 tur 17). Det bliver rettet (afsnit 8.6.2 tur 23) i og med GD ser på den geometriske konstruktion og ikke ser en overensstemmelse mellem den geometriske og algebraiske fuldstændiggørelse af kvadartet. Dette viser, at opgaven indeholder et højt adidaktisk potentiale, der giver eleven feedback og dermed muligheden for at validere gyldigheden af resultater.

Denne sammenligning af de to observerede forløb viser, at beviset af løsningsformlen for andengradsligningen i den geometriske ramme giver eleven større mulighed for validering. Det vil sige, at beviset i den geometriske ramme indeholder et højt adidaktisk potentiale.

I matematik er det altid muligt at validere løsninger. Og ønsket om at eleven altid selv skal validere løsningerne bliver ikke altid opfyldt. Grunden er, at eleven fra første matematiktime ikke bliver opdraget med, at den adidaktiske valideringsfase er en enestående egenskab ved faget matematik. Derfor må det være lærerens opgave at understrege denne egenskab og systematisk fremhæve det i forskellige undervisningsforløb.

Det adidaktiske potentiale som fører eleven til en adidaktisk valideringsfase er et vigtigt element for eleven og læreren. Læreren får mulighed for at se selvstændighed i elevens tilegnelse af viden i matematik. Og eleven har mulighed for at være uafhængig af læreren og dermed får mulighed for at tjekke opgaver igennem inden han afleverer og dermed sikrer sig gyldigheden i løsningerne.

Selvom det adidaktiske potentiale er meget højt i opgaver vil der altid være besværligheder indenfor et bestemt emne. I andengradslignings forløb kan man finde nogle fordele og besværligheder, der opstod for nogle elever i de to observeret forløb.

9.1.3 Tabel over fordele og besværligheder i de to forløb

Under observationerne af de to forløb har jeg set fordele og besværligheder i de to forskellige metoder der bliver brugt i de to forløb.

<table>
<tr>
<td>

Standard forløb

"Formlen"

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow 4a\cdot(ax^2+bx+c)=0 \Leftrightarrow$

$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac \Leftrightarrow$

$(2ax)^2+4abx+b=b-4ac \Leftrightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac \Leftrightarrow$

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} \quad hvor\ d=b^2-4ac$

</td>
<td>

Designet forløb

"Algoritmen"

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Leftrightarrow$

$x^2+sx=t \Leftrightarrow x^2+sx+\left(\frac{s}{2}\right)^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2+t \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2+4t}{4} \Leftrightarrow x+\frac{s}{2}=\pm\sqrt{\frac{s^2+4t}{4}} \Leftrightarrow$

$x+\frac{s}{2}=\frac{\pm\sqrt{s^2+4t}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2+4t}}{2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Fordele

- Løsning af parameter opgaver
- At kunne formlen udenad sikrer at man altid kan løse enhver andengradsligning.

</td>
<td>

Fordele

- Andengradsligning er en ligning som løses som en ligning
- Man skal altid tilføje et positivt tal (om det dobbelte produkt er negativt eller positivt)
- Algoritmen bruges i beviset og til løsning af konkrette opgaver

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Besværligheder (type fejl)

○ I brugen af formlen kan et negativt b føre til:

- b^2 kan være et problem i d (glemmer parentesen om b)
- -b kan være et problem i selve formlen (glemmer at - · - = +)

○ a=1 i en andengradsligning og elever tror a=0

○ At glemme at det man finder i formlen er x i den oprindelige andengradsligning

○ At glemme når a eller/og c er negative medføres at (-4ac) i d bliver positiv (da - · - = +)/(da - · - · - = -)

○at Huske formlen udenad

○ Elever kan have svært ved at opfatte $\pm\sqrt{d}$ som to adskilte løsninger

○ at bruge formlen til simple andengradsligninger

- Når b=0 (almindelig lignings operationer)
- Når c=0 (brug nulreglen)

○ Ingen sammenhæng mellem beviset og løsning af konkrette opgaver

</td>
<td>

Besværligheder (type fejl)

○ I brugen af algoritmen kan brøkregning være besværlig

- når $\frac{b}{a}$ *eller* $\frac{c}{a}$ er brøker ikke hele tal
- når s ikke er et lige tal for så bliver $\frac{s}{2}$ en brøk

○ at huske at tilføje $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ på den anden side af lighedstegnet (og ikke kun $\frac{s}{2}$)

○ at huske algoritmen

○ Elever kan have svært ved at opfatte $\pm\sqrt{s^2+4t}$ som to adskilte løsninger

○ Geometrisk betydning af koefficienterne a,b og c.

○ d's funktion som viser antallet af løsninger

○ at løse parameter opgaver

○ Løse $x+\frac{s}{2}=\frac{s^2+4t}{4}$ i stedet for $\left(x+\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2+4t}{4}$

</td>
</tr>
</table>

9.2 Idé til udførelse af et forløb i andengradsligninger

De to forskellige forløb, som jeg har observeret har jeg selv forsøg at udføre. Det har ikke været muligt at observere alt, når man underviser på samme tid. Ud fra de observerede forløb, min egen udførsel af forløbene og de type fejl elever kan begå i hver af de to forløb, har jeg overvejet, hvordan en elev kan tilegne sig viden om andengradsligninger på simpelvis. Kigger vi på afsnit 9.1.3 i tabellen bemærkes, at fordelene i begge forløb vægter lige meget og det samme gælder besværlighederne. Et overvejet forløb vil konstrueres ved kombination af elementer fra standard forløbet og det designet forløb. Det centrale trick i andengradsligningers løsning er fuldstændiggørelsen af kvadartet. Det indgår tydeligt i det designet forløb, derfor vil jeg bevare dette element som fører til en trinvis logisk omskrivning i udledningen af beviset. Desuden kan man vha. den geometriske ramme have et højt adidaktisk potentiale i beviset. Derudover er den generelle løsningsformel for andengradsligningens fordele at man har mulighed for at løse andre type opgaver, såsom bestemmelsen af parametrene i andengradsligningen. Dette element indgår i standard forløbet, som jeg vil også vil bevare. Men elevens problematik i brugen af formlen er, at den bliver mekanisk brugt og nogle gange glemmes det, hvad man egentlig udregner vha. formlen. Derfor vil jeg opstille en tabel med tre forskellige tilfælde af andengradsligningen og dens tilsvarende letteste løsningsmetode.

Tilfælde	$ax^2+bx+c=0 \quad hvor\ a\neq 0$ $antag\ b=0$	$ax^2+bx+c=0 \quad hvor\ a\neq 0$ $antag\ c=0$	$ax^2+bx+c=0 \quad hvor\ a\neq 0$
Løses Nemmest ved	$ax^2+0x+c=0$ $ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=\frac{-c}{a}$ $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$ax^2+bx+0=0$ $ax^2+bx=0 \quad faktoriser$ $x(ax+b)=0 \quad brug\ nulreglen$ $x=0 \quad eller \quad ax+b=0$ $x=0 \quad eller \quad x=\frac{-b}{a}$	$ax^2+bx+c=0$ $brug \quad formlen$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Denne tabel viser, at det ikke altid er nødvendigt at benytte formlen til at løse andengradsligninger. Desuden bliver eleven mere bevidst om at målet med formlen er at bestemme x. Derefter vil jeg tilkoble den grafiske ramme til bestemmelse af koefficienterne a,b,c og d's grafiske betydning.

Et forløb i et emne kan blive formet på mange måder. Derfor er det lærerens opgave at lære af de forløb der udføres og udvikle sit eget ved justeringer efter elevernes behov. Lærerens mål skal altid være at tilrettelægge undervisningen, så eleven på simplest vis kan tilegne sig et emne og derudover skal der være elementer, som gør det muligt at fordybe sig i det pågældende emne. Dette gør, at læreren altid er under faglig og formidlings udvikling.

9.3 Overvejelser omkring matematikundervisningen i dag

Der er mange elementer, der begrænser et emnes uddybelse. En af de betydningsfulde elementer er tiden. Man har som lærer begrænset tid til at få eleverne at tilegne sig kernestoffet og noget supplerende stof for at få eleven til at opnå de afsatte[24] kompetencemål. Desuden skal man som lærer ruste eleven til både at klare sig til en mundtlig og skriftlig eksamen. Så derfor har begge forløb lidt af tidsmangel. I standard forløbet ser eleven beviset for den generaliserede løsningsformel for andengradsligningen antagelsesvis meget få gange. Derefter håber man som lærer, at eleven kan huske det til den mundtlige prøve for ellers skal beviset ikke bruges. Andengradslignings løsningsformel bliver næsten det eneste redskab eleven kan bruge til løsning af andengradsligninger. Læreren sørger for at elever behersker formlen ved udregning af mængder af andengradsligninger. Det er synd, at eleven i sådan et forløb vil opfatte teorien og praktisk opgaveløsning i andengradsligningen som to uafhængige verdner og ikke som en samlet enhed. I det designet forløb var der til gengæld et tydeligt sammenspil mellem teorien og praktisk opgaveløsning i andengradsligning. Det ses at den samme algoritme bruges til både beviset og løsningen af konkrette opgaver. Her opfatter eleven teorien og praktisk opgaveløsning som en samlet enhed, som understøtter hinanden. Det må være kernen i matematik, at der er en overensstemmelse mellem teori og praksis. Dvs. i forlængelse med det designet forløb skulle eleven løse enhver andengradsligning vha. algoritmen og ikke formlen.

[24] Fra undervisningsministeriet

Jeg vil ønske at kunne evaluere, hvad det har betydet for eleven at gennemføre emnet andengradsligninger i hvert forløb. Det kunne have været en form for et interview eller en test. Det har jeg desværre ikke haft nok tid til, men det kunne være værd at undersøge. Sammenhængen mellem teori og praksis giver eleven mulighed for at få en bredere forståelse af et konkret emne.

Det kunne desuden være værd at undersøge om algoritmen eller formlen egentlig har en betydning for eleven, når der i dag bruges CAS-værktøjet til alt opgaveløsning. Eleven kan bare bruge solve-funktionen og så er andengradsligningen løst. CAS-værktøjet har ændret opgaveformuleringen i den skriftlige eksamensform og dermed matematikundervisningens opgavetyper. Det er ikke længere det vigtigste at kunne løse en andengradsligning, men nærmere at forstå sammenhængen mellem koefficienterne i andengradsligningen og muligvis toppunktet, diskriminanten (parmeter opgaver), skæringen på y-aksen eller x-aksen . Det vil sige målet er blevet en dybere forståelse af sammenhænge. Den skriftlige matematik eksamen har også ændret form, idet der efterhånden næsten kun er tekstopgaver. Desuden har bedømmelsen af besvarelser også ændret sig (se følgende citat fra uvm-hjemmeside).

> ”**Helhedsindtrykket og pointtallet**
> Hidtil har der været reserveret 5 eller 10 point til helhedsindtrykket. Fra og med sommereksamen 2010 vil helhedsindtrykket indgå i vurderingen af de enkelte spørgsmål på følgende måde:
> - Hvis besvarelsen er matematisk korrekt og samtidig er tilfredsstillende, eller kun indeholder mindre væsentlige mangler i forhold til beskrivelsen i de 5 punkter kan der gives 10 point.
> - Hvis besvarelsen er matematisk korrekt, men indeholder en del væsentlige mangler i forhold til de 5 punkter, kan der gives 9 point.
> - Hvis besvarelsen er matematisk korrekt, men kun i minimal grad lever op til kravene i de 5 punkter, kan der gives 8 point.”(uvm.dk)

Det ses, at en fuldstændig korrekt matematisk besvarelse uden en forklarende tekst kun kan give 80 % pointscoring.

I denne sammenhæng er det værd at undersøge, hvordan emnet andengradsligninger forholder sig til CAS-værktøjet og de nye kompetencemål.

CAS-værktøjet kan både validere gyldigheden af algebraiske udtryk og konkrette opgaver. Se den generelle løsningsformel for andengradsligningen og validering af andengradsligningens løsningsformel.

$$\text{solve}\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}-b}{2\cdot a} \text{ or } x=\frac{-\left(\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}+b\right)}{2\cdot a}$$

$$a\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right)^2+b\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}+c=0 \blacktriangleright \text{true}$$

$$a\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right)^2+b\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}+c=0 \blacktriangleright \text{true}$$

Det er derfor værd at tænke på, hvad hovedformålet egentlig er med, at eleven skal kunne bevise eller løse opgaver selv. Desuden burde man overveje spørgsmålet om, hvor relevant er det egentligt at sammensætte teori og praksis, når man alligevel bruger CAS-værktøjet.

10. Konklusion

I specialet var formål at belyse fuldstændiggørelsen af kvadratets centrale betydning i andengradsligningen. I et standardforløb i stx bliver andengradsligningen præsenteret udefra to rammer: algebraiske og grafiske ramme. Men når beviset af den generelle løsningsformel skal udledes begrænses redskaberne til kun den algebraiske ramme. Det rene algebraiske ramme er besværlig for eleven at håndtere. Derfor er der en hypotese om at eleven i et standardforløb vil have svært ved de trin i beviset hvor ”tricket” fuldstændiggørelsen af kvadratet dukker up. Denne hypotese blev testet i og med jeg observerede et standardforløb hvor emnet andengradsligningen blev gennemgået. Under beviset blev usikkerheden omkring ”tricket” fuldstændiggørelsen af kvadratet spredt i klasselokalet. En gruppe elever søgte læreren for at tilegne sig viden omkring begrundelsen for trickets eksistens i beviset. Læreren gav ikke en overbevisende forklaring andet end at det algebraisk er meningsfuld for det gør det muligt at isolere x.

Der kan dermed konkluderes at eleven i standard forløbet ikke er i stand til at tilegne sig viden om essensen i beviset, som er fuldstændiggørelsen af kvadratet. Det virker for eleven som et mystisk trick. Desuden var der ingen adidaktisk potentiale som gav eleven mulighed for validering af beviset.

Beviset af den generelle løsningsformel i andengradsligning bygger på fuldstændiggørelsen af kvadratet. Det er utilfredsstillende, at eleven opfatter det som et mystisk trick i standard forløbet. På dette grundlag valgte jeg at designe et forløb som fremhævede tricket ved hjælp af den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet.

Den geometriske ramme inkludere både algebraen og geometrien. Den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet giver den algebraiske fuldstændiggørelse af kvadratet *mening*. Forklaringen på det er at tricket bliver illustreret visuelt. Desuden er der et højt adidaktisk potentiale i beviset da valideringen er dannet af en overensstemmelsen mellem algebraen og geometrien. Eleven havde derfor mulighed for at validere gyldigheden af beviset.

Der kan konkluderes at den geometriske fuldstændiggørelse af kvadratet giver eleven et ekstra redskab at underbygge forklaringer på algebraiske operationer.

Jeg kan selvfølgelig ikke generalisere og påstå, at et standard forløb i andengradsligningen altid vil indeholde vil det mystiske trick ved fuldstændiggørelsen af kvadratet. Men det designet forløb viser, at tricket lettere kan visualiseres vha. den geometriske ramme. Geometrien giver andengradsligningsløsningen *mening*.

Der er nogle fordele og ulemper ved brugen af den geometriske ramme (se afsnit 9.1.3). Men essensen er at eleven tilegner sig viden om at andengradsligningen kræver et speciel trick som den geometriske rammer let kan illustrere.

Dermed kan der konkluderes at den geometriske ramme er et basal værktøj som skal være til rådighed for eleven ved gennemgang af beviset af den generelle løsningsformel for andengradsligningen. Desuden kan opnås et højt adidaktisk potentiale i de didaktiske miljøer.

Valideringsfasen i matematik er et enestående egenskab i faget. Eleven får nemlig mulighed for selv at validere og kontrollere egne løsninger og resultater. Det er derfor et vigtigt redskab at give eleven.

Et tak

Jeg vil takke læreren og 1.c klassen fra Falkonergårdens Gymnasium, der har beriget mig med datamateriale. Og et tak til læreren og 2.e klassen fra Ørestad Gymnasium.

Jeg vil dermed takke min vejleder professor Carl Winsløw, Institut for Naturfagenes Didaktik på Københavns Universitet, for særdels god og grundig vejledning i arbejdet med mit speciale.

Litteraturliste

Andersen A. (2006). *Undervisningsfaglighed- hvad en underviser bør vide*. Mona, 2006-2, s. 70-75

Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. I: G. Harel,& E. Dubensky (red.), *The concept of functions: Aspect of epistemology and pedagody* (pp. 109-132). Washington, DC: The Mathematical Assosiation of America.

Artigue, M. (2008). *Didactical design in mathematics Education*. I: C. Winsløw (ed.), Nordic Research in mathematics Education: Proceedings from NORMA08. Copenhagen. Sense publishers.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52**:** 3-28, 2003. doi: 10.1023/A:1023696731950

Bremigan E., Bremigan J. & Lorch J. (2011). *Mathematics for secondary school teachers* (pp. 69-101). The Mathematical Assosiation of America.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*: *Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Clement J. (1982). Algebra word problem solution: *Thought processes underlying a common misconception*. Journal for reseach in mathematics education, Volume 13 (1) pp. 16-30

Høyrup J (1998). *Algebra på lertavler,* Jysk Centraltrykkeri A/S

Martinez M. (2008). *Integrating algebra and proof in high school: students' work with algebraic expressions involving variables when proving*. Tufts University

Monaghan J. *Using a computer algebra system to teach quadratic functions*. Centre for studies in science and Mathematics education. The university, Leeds

Katz, V. (2009). *A History of mathematics (-3rd ed)*. Boston: Pearson Education Inc.

Lannin J. (2005). Mathematical thinking and learning: Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. Lawrence Erlbaum associates, Inc.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59: 113-151. doi: 10.1007/s10649-005-2183-z. Springer

Radford, Luis & Guérette. *Second degree equations in the classroom: A Babylonian Approach* (pp. 69-75) Canada, Université Laurentienne & conseil de l'éducation de Sudbury.

Xuhui Li (2011), *Mathematical knowledge for teaching algebraic routines: A case study of solving Quadratic Equations* (pp. 1-16) Journal of Mathematics Education, Volume 4(2)

Winsløw, C. (2004). Quadratics in Japanese. Nordic studies of mathematics education 9 (1) (pp. 51-74).

Winsløw, C. (2006). Didaktiske miljøer for ligedannethed. *Mona*, 2006-2, s. 47-62

Winsløw, C. (2009). Didaktiske elementer – en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik. Frederiksberg: Biofolia.

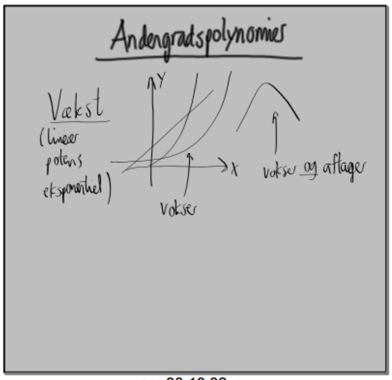
Website

- http://www.ordbogen.com/
- http://ordnet.dk/
- http://ordbog.gyldendal.dk/
- http://www.uvm.dk
- Matematik skriftlig eksamen bedømmelse: http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCEQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.uvm.dk%2FUddannelser-og-dagtilbud%2FGymnasiale-uddannelser%2FStudieretninger-og-fag%2FStudentereksamen-%28stx%29%2FFag-paa-stx%2F~%2Fmedia%2FUVM%2FFiler%2FUdd%2FGym%2FPDF09%2FFagene%2F090918_standardomregningsskaler_helhedsintryk_hf_hfe_stx.ashx&ei=vVaIUMmfDPH44QTX9IGADg&usg=AFQjCNED7yGbaarPczaFX-ngDMqXfOVFUQ

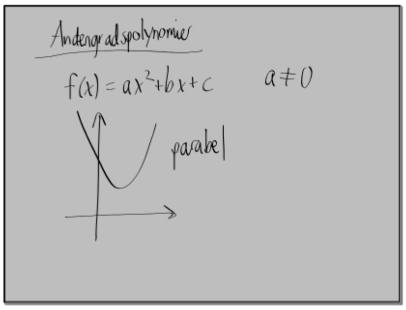
Bilag (Arbejdsark i standardforløb)

Modul 1

3004 2012.notebook April 30, 2012



apr 30-10:02



apr 30-10:11

Andengradspolynomier

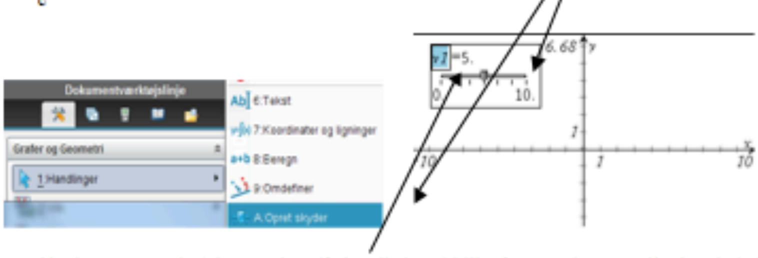
Andengradspolynomier har altid formen $f(x) = ax^2 + bx + c$,
hvor a, b og c er konstanter og a er forskellig fra nul.

Opgave 1 (opvarmning):
Udfyld a-, b- og c- kolonnerne ved at identificere konstanterne for hvert andengradspolynomium.
(De sidste to kolonner skal vi bruge senere). Af hensyn til de kommende opgaver, kan man med fordel udfylde skemaet i et regnearkvindue i Nspire.

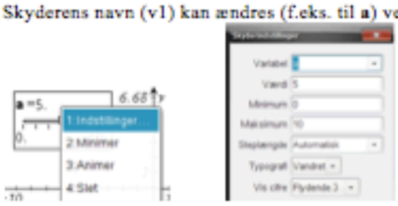
	Andengradspolynomium	a	b	c	d	
1.	$f(x) = x^2 - 3x + 2$					
2.	$f(x) = x^2 + 6x + 9$					
3.	$f(x) = 3x^2 + 4x + 2$					
4.	$f(x) = -4x^2 + x + 1$					
5.	$f(x) = x^2 - 3x$					
6.	$f(x) = x^2$					
7.	$f(x) = x^2 - 9$					

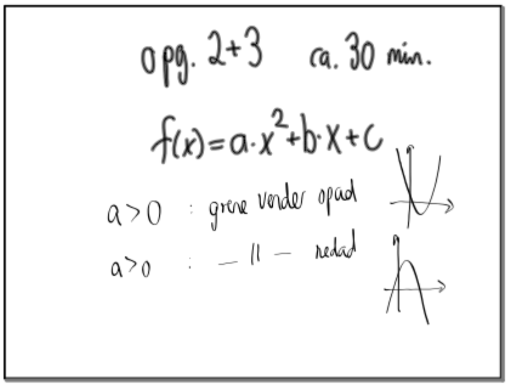
Opgave 2
Tegn grafen for forskellige andengradspolynomier vha. grafvinduet på dit CAS-værktøj.
Formålet er at finde ud af, hvilken betydning værdierne af konstanterne a, b og c har for grafens udseende.

Man kan med fordel (men det er ikke nødvendigt) oprette tre skydere i grafvinduet for let at justere på a, b og c

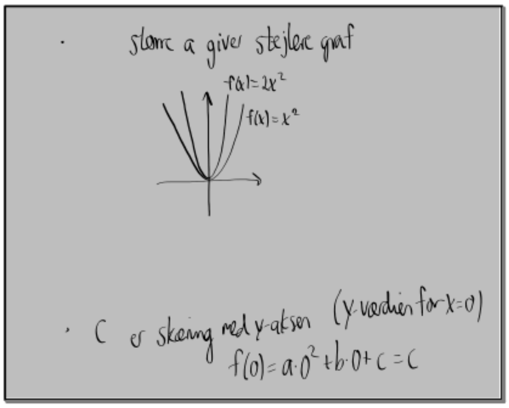


Skyderens navn (v1) kan ændres (f.eks. til **a**) ved klik på v1 og dens værdier kan indstilles med højreklik





apr 30-10:28



apr 30-11:16

a) Start med $f(x) = ax^2$

- Hvordan ser grafen ud, når a er positiv? (Vælg en positiv talværdi for a)
- Hvordan ser grafen ud, når a er negativ? (Vælg en negativ talværdi for a)
- Hvad sker der med grafens udseende, hvis a gøres større?

b) Hvad sker der med grafens udseende, hvis vi lægger c til i ligningen (så forskriften får formen $f(x) = ax^2 + c$)? Prøv med forskellige værdier for c.

Betydningen af b er ikke helt så klar. Det vender vi tilbage til.

Opgave 3

a) I et nyt grafvindue skal I oprette tre skydere, der kaldes for **a**, **h** og **k**
Indtegn grafen for funktionen med forskriften

$$f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$$

b) Hvilken betydning har a for grafens udseende (dvs. hvad sker der med grafen, når a ændres)?
c) Hvilken betydning har h for grafens udseende (dvs. hvad sker der med grafen, når h ændres)?
d) Hvilken betydning har k for grafens udseende (dvs. hvad sker der med grafen, når k ændres)?
e) Bestem minimum eller maksimum for grafen (med "undersøg graf").
Hvilken betydning har h og k for grafens minimum/maksimum?

Opgave 4

Tallene h og k i $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ kan beregnes fra a,b og c i $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$ med en formel.
For andengradspolynomierne i opgave 1 skal I gøre følgende:

a) Beregn størrelsen der kaldes diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ (kan med fordel gøres med formler i regnearkvinduet)

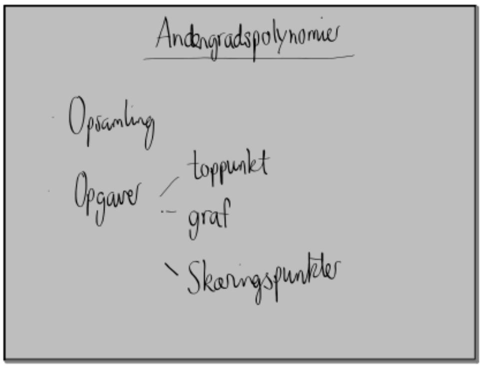
b) Beregn $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$, tegn grafen med Nspire og kontroller ved at finde minimum/maksimum for grafen.

c) Tallet d har også en anden betydning for andengradspolynomier. Noter antal skæringspunkter med x-aksen i den sidste kolonne i opgave 1
Er der en sammenhæng mellem antal skæringspunkter med x-aksen og diskriminantens fortegn?

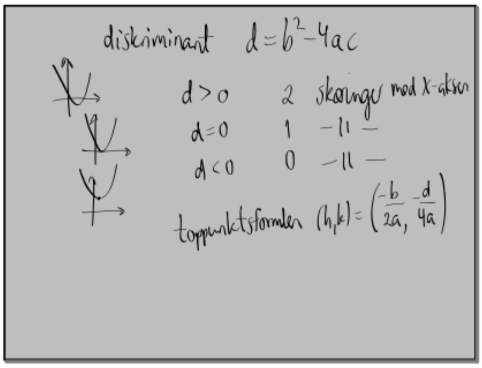
d) Bestem skæring med y-aksen for alle funktionerne. Sammenlign med tallet c

Modul 2

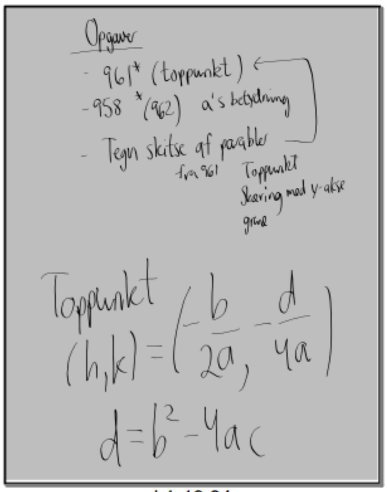
0105 2012.notebook May 01, 2012



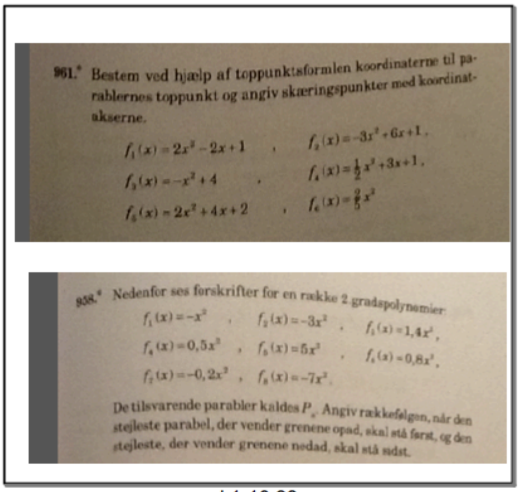
maj 1-09:57



maj 1-10:30



maj 1-10:34



961.* Bestem ved hjælp af toppunktsformlen koordinaterne til parablernes toppunkt og angiv skæringspunkter med koordinatakserne.

$f_1(x)=2x^2-2x+1$, $f_2(x)=-3x^2+6x+1$,
$f_3(x)=-x^2+4$, $f_4(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+1$,
$f_5(x)=2x^2+4x+2$, $f_6(x)=\frac{2}{5}x^2$

958.* Nedenfor ses forskrifter for en række 2.gradspolynomier:

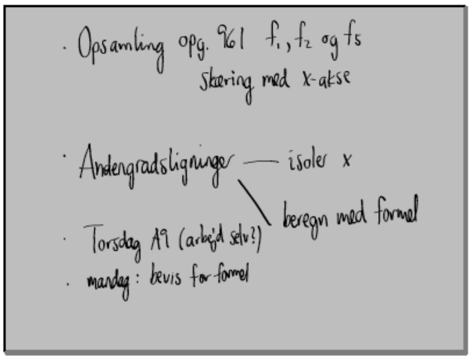
$f_1(x)=-x^2$, $f_2(x)=-3x^2$, $f_3(x)=1{,}4x^2$,
$f_4(x)=0{,}5x^2$, $f_5(x)=5x^2$, $f_6(x)=0{,}8x^2$,
$f_7(x)=-0{,}2x^2$, $f_8(x)=-7x^2$.

De tilsvarende parabler kaldes P_x. Angiv rækkefølgen, når den stejleste parabel, der vender grenene opad, skal stå først, og den stejleste, der vender grenene nedad, skal stå sidst.

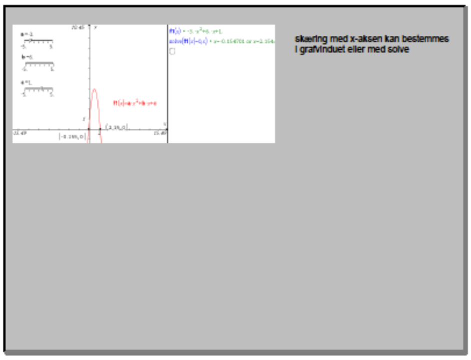
maj 1-10:38

Modul 3

0205 2012.notebook May 02, 2012



maj 2-10:00



maj 2-11:45

$ax^2 + bx + c = 0$

Løs ligningerne ved at isolere x

- kontroller med solve på Nspire

1. $x^2 = 9$	
2. $x^2 = 10$	tip: solve
3. $x^2 - 21 = 0$	tip: isoler først x^2
4. $(x-5)^2 = 36$	tip: isoler først $(x-5)^2$
5. $x^2+5^2-2\cdot5\cdot x = 36$	tip: omskriv venstre side til $(\_+\_)^2$
6. $x^2+9+2\cdot3x = 16$	— " —
7. $4x^2+9+12x = 5$	— " —

a: grene op/ned

c: skæring med y-akse

toppunkt $(h,k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$

$d = b^2 - 4ac$

d>0 2 skæringer

d=0 1 —"—

d<0 0 —"—

maj 2-10:23

1. $x^2 = 9$ $x=\sqrt{9} \vee x=-\sqrt{9} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$
2. $x^2 = 10$ $x=\sqrt{10} \vee x=-\sqrt{10}$ $x\approx 3{,}16 \vee x\approx -3{,}16$
3. $x^2-21=0 \Leftrightarrow x^2=21 \Leftrightarrow x=\sqrt{21} \vee x=-\sqrt{21} \Leftrightarrow x\approx 4{,}58 \vee x\approx -4{,}58$
4. $(x-5)^2=36 \Leftrightarrow x-5=6 \vee x-5=-6 \Leftrightarrow x=11 \vee x=-1$

maj 2-11:09

$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

5. $x^2+5^2-2\cdot5x=36$ $(x-5)^2=36$
6. $x^2+9+2\cdot3x=16$ $(x+3)^2=16$

$\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$

$\Updownarrow$ $x+3=4$ $\vee$ $x+3=-4$ $\Updownarrow$ $x=-7 \vee x=1$

7. $\Updownarrow$ $4x^2+9+12x=5$

$\Updownarrow$ $(2x+3)^2=5$

$\Updownarrow$ $2x+3=\sqrt{5} \vee 2x+3=-\sqrt{5}$

$2x=-3+\sqrt{5} \vee 2x=-3-\sqrt{5}$

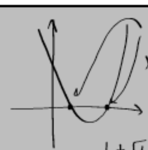
$\Updownarrow$ $x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

maj 2-11:10

Andengradsligninger

$f(x)=ax^2+bx+c$

$0=ax^2+bx+c$



Rødder:

x er en rod:

$f(x)=0$

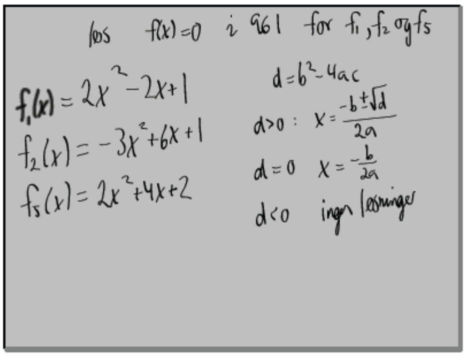
Løsningsformel

d>0 2 løsninger $x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

d=0 1 løsning $x=-\frac{b}{2a}$

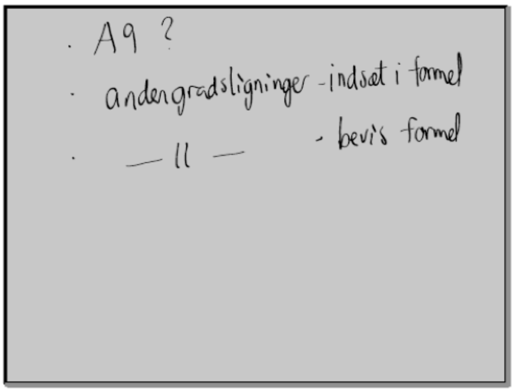
d<0 ingen løsninger

maj 2-11:12

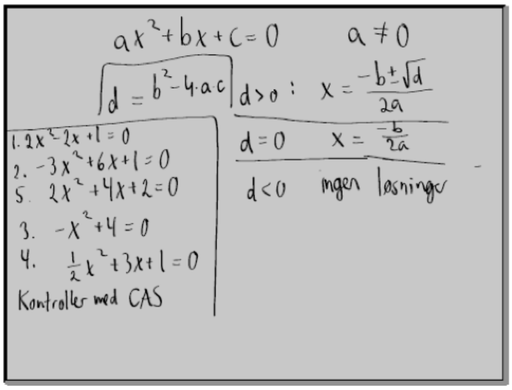


maj 2-11:32

Modul 4



maj 7-09:59



maj 7-10:01

maj 7-11:00

I skal forklare beviset for løsninger til andengradsligninger $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a \neq 0$:

For d>0 er der to løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$ hvor $d = b^2 - 4ac$

For d=0 er der én løsning $x = -\frac{b}{2a}$

For d<0 er der ingen løsninger

A. d>0

Forklar nedenstående omskrivninger:

1. $ax^2 + bx + c = 0$
2. $4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$
3. $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
4. $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
5. $(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$
6. $(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$
7. $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
8. $(2ax + b)^2 = d$
9. $2ax + b = \pm\sqrt{d}$
10. $2ax = -b \pm \sqrt{d}$
11. $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

B. d=0

Hvad skal justeres i de 11 punkter?

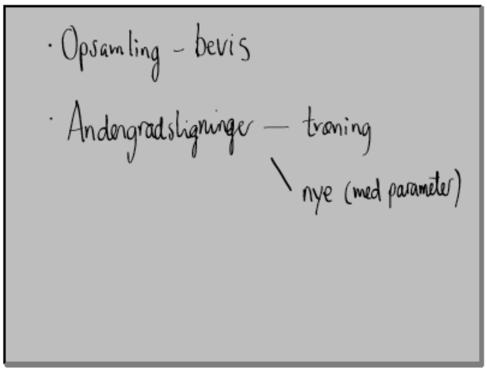
C. d<0

Hvorfor er der ingen løsninger her?

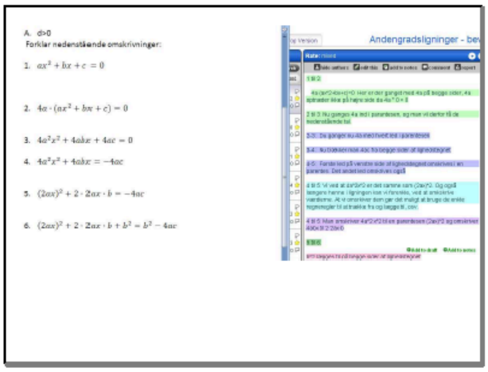
(Hvor i de 11 punkter kan man se, at der ingen løsninger er?)

Modul 5

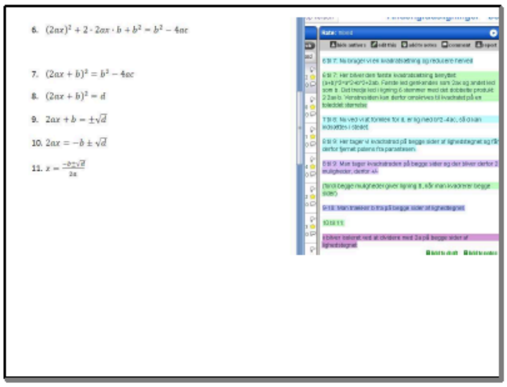
0905 2012.notebook May 09, 2012



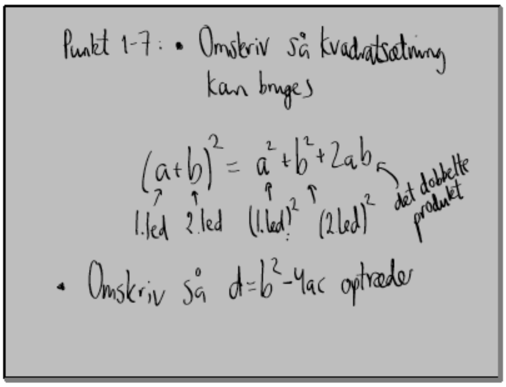
maj 9-10:03



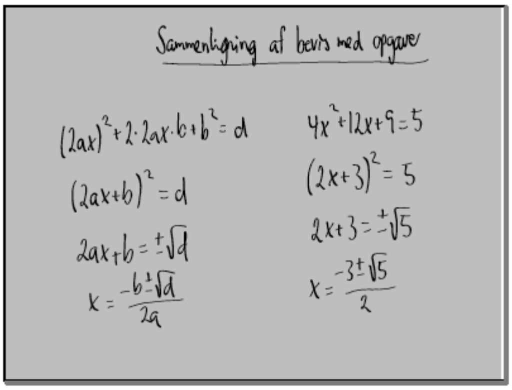
maj 9-10:23



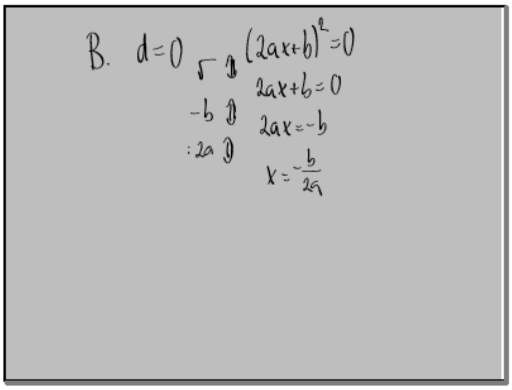
maj 9-10:31



maj 9-10:32

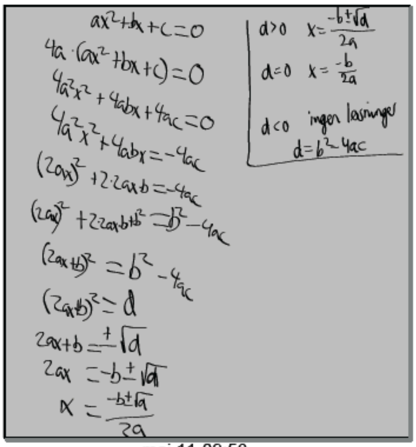


maj 9-10:35

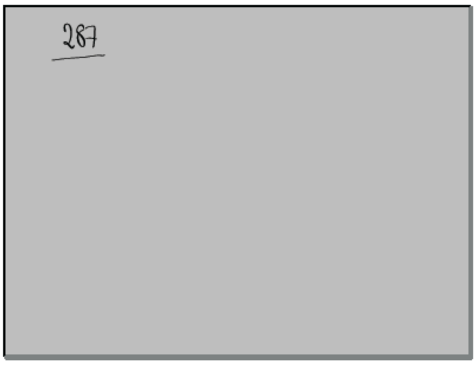


maj 9-10:36

Modul 6



maj 11-09:56



maj 11-10:29

287

$(k+1)x^2 + 2kx + k + 2 = 0$

· $k=-2$ $\qquad b^2-4ac$

$(-2+1)x^2+2\cdot -2x-2+2=0$

$-x^2-4x=0 \qquad (-4)^2-4\cdot -1\cdot 0$

$-x\cdot(x+4)=0 \qquad d=16$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

$x=\frac{4+\sqrt{16}}{-2}=-4$

$x=-4 \lor x=0$

$\frac{4-\sqrt{16}}{-2}=0$

maj 11-10:30

$(k+1)x^2 + 2kx + k + 2 = 0$

$d=0$: 1 løsning

$a = k+1$

$b = 2k$

$c = k+2$

$d=b^2-4ac=(2k)^2-4\cdot(k+1)\cdot(k+2)$

$=4k^2-4(k^2+3k+2)$

$=\cancel{4k^2}-\cancel{4k^2}-12k-8$

$=-12k-8$

$0=-12k-8$

$k=\frac{8}{-12}=-\frac{2}{3}$

$k>-\frac{2}{3}$: $d<0$ ingen løsninger

$k<-\frac{2}{3}$; $d>0$ 2 løsninger

maj 11-10:41

272.* Angiv koefficienterne a, b og c, udregn d og løs derefter ligningerne:

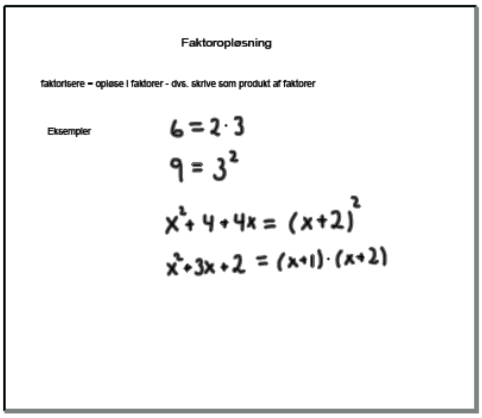
1) $2x^2 + 4x - 16 = 0$ $\qquad$ 2) $-x^2 - 2x + 3 = 0$

3) $2x^2 - 4x + 6 = 0$

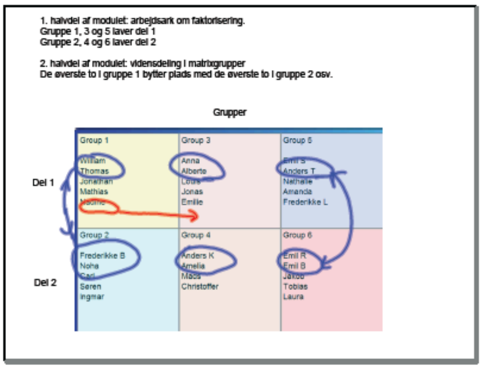
287. Idet k er et tal, betragtes ligningen $(k+1)x^2 + 2kx + k + 2 = 0$.
Løs ligningen for $k = -2$.
For hvilke værdier af k har ligningen ingen løsninger?
– netop én løsning? – 2 løsninger?
(Husk tilfældet $k = -1$.)

288.* Bestem værdien af k, så ligningen $x^2 + 4x + k = 0$ får præcis én løsning. Bestem derefter løsningen.

289. Bestem tallet k, således at ligningen $x^2 - (2k-3)x + 2k = 0$ har netop en rod.
Bestem for de fundne værdier af k denne rod.



maj 14-11:58



maj 14-11:57

Faktoropløsning

Af andengradspolynomier

<u>Del 1 (den ene halvdel af klassen)</u>

Bevis for sætning 4 i Mat B1 s. 191:

For andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ gælder:

- Hvis d>0 og de to rødder kaldes for r_1 og r_2, er faktoropløsningen:

$$f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

- Hvis d=0 og roden kaldes for r, er faktoropløsningen:

$$f(x) = a \cdot (x - r)^2$$

Tip d>0: Indsæt rødderne $r_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ i det faktoriserede udtryk $a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$, gang parenteserne sammen og reducer. Kontroller at man får $ax^2 + bx + c$.

Tip d=0: Indsæt roden $r = -\frac{b}{2a}$ i det faktoriserede udtryk $a \cdot (x - r)^2$, gang parenteserne sammen og reducer. Kontroller at man får $ax^2 + bx + c$ (for konstantleddet c skal I også benytte at d er 0).

Del 2 (den anden halvdel af klassen)

Bestemmelse af rødder (nulpunkter) for faktoriserede andengradspolynomier.

I nogle af disse opgaver skal nulreglen benyttes: Produktet af to eller flere faktorer er nul netop hvis mindst en af faktorerne er nul, dvs. $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \ x = 0 \ \vee y = 0$

a) Bestem rødderne for andengradspolynomiet $f(x) = 3 \cdot (x-2) \cdot (x+5)$
b) Bestem rødderne for andengradspolynomiet $f(x) = -3 \cdot (x-4)^2$
c) Omskriv ovenstående to andengradspolynomier på standardformen $f(x) = ax^2 + bx + c$ ved at bruge Nspire-kommandoen Expand().
d) Benyt Nspire-kommandoen Factor til at afgøre om nogle af nedenstående andengradspolynomier kan faktoriseres
$f_1(x) = x^2 - 5x + 6, \quad f_2(x) = 9x^2 - 12x + 4, f_3(x) = 9x^2 - 12x + 6$
e) Prøv selv at konstruere et andengradspolynomium uden rødder (kan f.eks. gøres med brug af $f(x) = a \cdot (x-h)^2 + k$)
f) I kan kontrollere opgave a, b og e med Nspire.

modul 8

Polynomier

Et polynomium består af flere led og hvert led svarer til en potensfunktion, hvor eksponenten er et helt positivt tal. Den største eksponent blandt alle leddene kaldes polynomiets grad.

Her ses et andengradspolynomium:	$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$
og et tredjegradspolynomium:	$f(x) = x^3 + 7x$
og et 6. gradspolynomium:	$f(x) = -4x^6 + 3x^5 - 8x + 2$

Polynomier har en række egenskaber som I skal undersøge med Nspire

Opgave – Polynomier
Man kan med fordel benytte TINspire-filen "polynomiers egenskaber.tns" – her er grafen for polynomiet $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$ indtegnet samt to grafen for to faktoriserede polynomier.
Værdierne for de seks koefficienter $a_0, a_1, \ldots, a_5$ kan justeres ved at flytte en af de seks vandrette skydere.
Ønsker man et polynomium med lavere grad, kan man sætte værdien af den højeste koefficient til 0.
I skal finde svar på følgende:

a) Hvilken betydning har a_0 for grafens udseende?
b) Hvor mange rødder kan et polynomium have?
c) Hvad bestemmer hvordan grafens grene vender?
d) Hvilke polynomier har en største eller mindste y-værdi (dvs. et maksimum eller et minimum)?

e) Prøv at forklare egenskaben i a) vha. forskriften.
f) Prøv at forklare egenskaben i b) vha. faktorisering.
g) Prøv at forklare egenskaben i c) vha. forskriften.

Bilag (Arbejdsark i designet)

Modul 1

Ark 1

Tegn følgende tal/udtryk geometrisk som arealer (rektangler). Og prøv at løse ligninger.

1. $4 \cdot 5$
2. $3 \cdot 3$
3. $6 \cdot 3$
4. $1 \cdot 13$
5. $3 \cdot x = 24$
6. $5 \cdot x = 25$
7. $x^2 = 9$

Ark 2

Opgave 1

Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk.

1.1 $5 \cdot x = 20$
1.2 $3 \cdot x + 5 = 20$
1.3 $2 \cdot x - 4 = 8$
1.4 $4 \cdot x - 12 = 12$
1.5 $5 \cdot x - 20 = 0$

Opgave 2

Søren har købt en rektangulær mark, hvor afgrænsningen på den ene side bliver begrænset af en 60 meter lang mur. Søren ved at arealet på marken er 600 m^2 hvor lang er så de andre sider.
(tegn problemet geometrisk og løs ligningen algebraisk)

Søren skal nu bruge 40 m^2 til at bygge et glashus. Hvor stort et areal af marken kan han bruge til andet?
(tegn problemet geometrisk og løs ligningen algebraisk)

Opgave 3

Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk.

3.1 $x^2 = 36$

3.2 $x^2 - 49 = 0$

3.3 $4x^2 = 100$

3.4 $(x+1)^2 = 16$

Modul 2

Ark 3

Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk.

3.1 $(x+3)^2 = 16$

3.2 $(4+x)^2 = 36$

3.3 $(x-2)^2 = 25$

3.4 $(10-x)^2 = 81$

3.5 $(x+5)^2 = 30$

3.6 $(9-x)^2 = 49$

3.7 $x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 9$

3.8 $x^2 + 8x + 4^2 = 50$

3.9 $x^2 + 25 + 10x = 4$

3.10 $x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = 36$

3.11 $x^2 - 18x + 9^2 = 28$

3.12 $x^2 + 36 - 12x = 64$

3.13 $x^2 + 14x = 15$

Modul 3

Ark 4

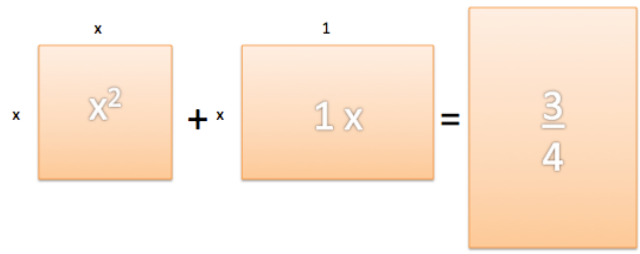
Den generelle andengradsligning ser ud på følgende form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

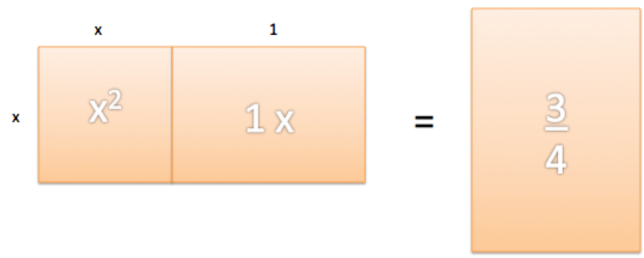
Læreren gennemgår en konkret andengradsligning netop $x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4}$.

(husk at lave noter når læreren gennemgår eksemplet, benyt notarerne herunder til uddybende forklaringer).

$$x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4}$$

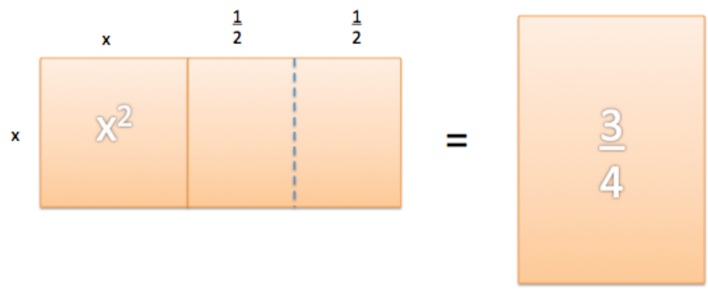


$$x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4}$$

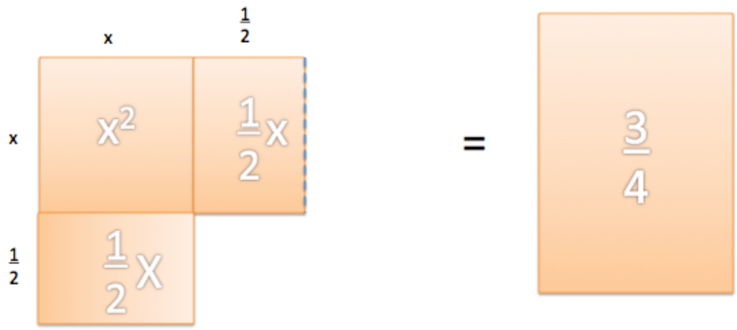


vha. cut-and-past ser nu ligningen ud på følgende

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$$

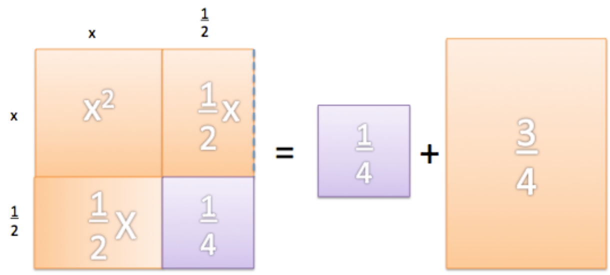


$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$$

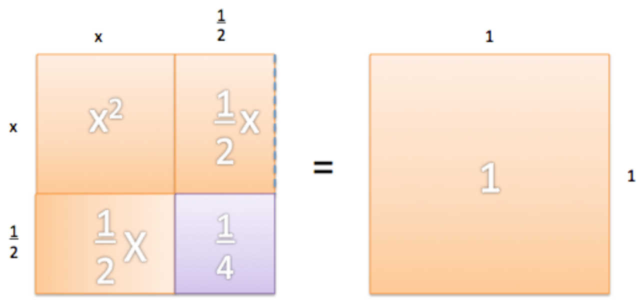


$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$



$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = 1$$



$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = 1$$

$$x + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Opgave 1

Tegn ligningen geometrisk og derefter løs ligningen algebraisk (så vidt muligt på samme måde som læreren har gjort). Argumenter for din besvarelse i opgave 1.3 og 1.5

1.1 $x^2 + 2 \cdot x = 8$

1.2 $x^2 + 6 \cdot x = 7$

1.3 $x^2 - 6 \cdot x = -5$

1.4 $x^2 + 3 \cdot x = 4$

1.5 $x^2 + 2 \cdot x = -5$

1.6 $x^2 + s \cdot x = t$

Opgave 2

I opgave 1.6 har du tegnet ligningen geometrisk og derefter løst ligningen algebraisk. Skriv nu kun den algebraiske løsningsmetode ned.

Der skal gælde noget bestemt for $t + \frac{s^2}{4}$ se dit forrige argument i denne opgave (Vink: se dit argument fra opgave 1.5+1.6)

Opgave 3

Løs følgende andengradsligninger algebraisk som før og kontrollere dit svar (vha. at indsætte løsningerne i den oprindelige ligning)

3.1 $x^2 + 4x = 12$

3.2 $x^2 - 8x = 9$

3.3 $x^2 + 10x = -21$

3.4 $x^2 - 6x = -5$

3.5 $x^2 + 4x = -6$

Opgave 4

Hvordan bliver følgende ligninger omskrevet (forklar alle skridt)

4.1 $2x^2 + 4x = 16 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x = 8$

4.2 $5x^2 + 30x = 35 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + 6x = 7$

4.3 $4x^2 + 12x = 20 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + 3x = 5$

4.4 $-3x^2 - 9x = -15 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + 3x = 5$

4.5 $4x^2 + 22x = 14 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{11}{2}x = \frac{7}{2}$

4.6 $ax^2 + bx = c \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + sx = t$

4.7 $6x^2 + 15x + 27 = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{9}{2} = 0$

4.8 $ax^2 + bx + c = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x^2 + sx = t$

Opgave 5

I har i opgave 1.6 fundet frem til den generelle løsning på $x^2 + s \cdot x = t$. Hvad er den generelle løsningsformel på $ax^2 + bx + c = 0$ (Vink: indsæt det nye udtryk fra opgave 4.8 i trinene fra opgave 1.6)