INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Når børn forsker i matematik
Processer og betingelser i Math en Jeans

Simone Gravlund Nielsen
Kandidatspeciale

August 2013

IND's studenterserie nr. 31

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte – Om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2013)
29. Morten C. B. Persson: Kvantekemi i gymnasiet - Tilrettelæggelse, udførelse og evaluering af et undervisningsforløb (2013)
30. Sofie Birch Jensen: Køn, evaluering og The Force Concept Inventory (2013)
31. **Simone Gravlund Nielsen: Når børn forsker i matematik (2013)**

Resumé

Dette speciale undersøger den franske aktivitet ved navn 'Math en Jeans', der giver børn og unge mulighed for at prøve at forske i matematik med henblik på at øge deres interesse for faget.

I specialets første del analyseres en række tilfældigt udvalgte Math en Jeans opgaver. Det viser sig her, at en typisk Math en Jeans opgave er åben, ikke giver anledning til én løsningsmetode eller ét facit og kan betegnes som et matematisk problem. Hernæst belyses i specialets anden del arbejdsprocessen i Math en Jeans gennem analyse af fire konkrete situationer med *Teorien om didaktiske situationer* (TDS) som teoretisk referenceramme. Observationerne er foretaget på den franske skole i København, hvor elever, i hvad der svarer til 6. og 7. klasse, har arbejdet med Math en Jeans problemet *Matematisk solitaire*. Der rettes i analysen fokus på organisering af arbejdet, lærerens rolle, elevernes udbytte samt de udfordringer de møder i arbejdet med opgaven. Endelig belyses Math en Jeans fra et institutionelt perspektiv i specialets tredje del med *Den antropologiske teori om det didaktiske* (ATD) som analyseredskab. Analysen viser her markante forskelle på danske og franske betingelser, og det bliver klart, at der er en række udfordringer forbundet med at implementere en aktivitet som Math en Jeans i danske skolesammenhænge, som skal findes på de øverste niveauer af didaktisk bestemmelse.

***IND's studenterserie** består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

Indhold

1. Resumé

Dette speciale undersøger den franske aktivitet ved navn 'Math en Jeans', der giver børn og unge mulighed for at prøve at forske i matematik med henblik på at øge deres interesse for faget.

I specialets første del analyseres en række tilfældigt udvalgte Math en Jeans opgaver. Det viser sig her, at en typisk Math en Jeans opgave er åben, ikke giver anledning til én løsningsmetode eller ét facit og kan betegnes som et matematisk problem. Hernæst belyses i specialets anden del arbejdsprocessen i Math en Jeans gennem analyse af fire konkrete situationer med *Teorien om didaktiske situationer* (TDS) som teoretisk referenceramme. Observationerne er foretaget på den franske skole i København, hvor elever, i hvad der svarer til 6.- og 7. klasse, har arbejdet med Math en Jeans problemet *Matematisk solitaire*. Der rettes i analysen fokus på organisering af arbejdet, lærerens rolle, elevernes udbytte samt de udfordringer de møder i arbejdet med opgaven. Endelig belyses Math en Jeans fra et institutionelt perspektiv i specialets tredje del med *Den antropologiske teori om det didaktiske* (ATD) som analyseredskab. Analysen viser her markante forskelle på danske og franske betingelser, og det bliver klart, at der er en række udfordringer forbundet med at implementere en aktivitet som Math en Jeans i danske skolesammenhænge, som skal findes på de øverste niveauer af didaktisk bestemmelse.

Abstract

This thesis examines the French activity called 'Math en Jeans', which gives young people a chance to explore and research mathematical problems in order to increase their interest in mathematics.

In the first part of the thesis a number of Math en Jeans assignments have been analyzed. This analysis shows that a typical Math en Jeans assignment is open, does not require one method of solving or one correct answer and can be described as a mathematical problem. In the second part the work process in Math en Jeans is examined. Four concrete situations have been analyzed with *The theory of didactical situations* (TDS) as the theoretical framework. The observations were conducted at the French school in Copenhagen with pupils, corresponding to 6th and 7th grade, who have been working with the problem *Mathematical solitaire*. The analysis focus on the organization of the work, the role of the teacher, the pupil's learning outcomes and the challenges they meet while working with the assignment. Finally in the third part Math en Jeans have been analyzed from an institutional perspective with *The anthropological theory of the didactical* (ATD) as the analytical framework. When comparing Danish and French conditions, significant challenges occur when trying to implement an activity as Math en Jeans in a Danish school context, which have to be found at the highest level of didactical determination.

2. Introduktion

Det skal ikke være nogen hemmelighed, at flere elever, både i folkeskolen og gymnasiet, finder matematikfaget kedeligt og svært. Det er der ikke noget at sige til! Eleverne bliver i matematikundervisningen i høj grad stillet over for opgaver, der træner basale regneteknikker og oftest kan besvares ved at benytte en algoritme, der forinden er blevet præsenteret af læreren og illustreret med et eksempel. En opgave som 'find forskriften for den rette linje, der går gennem punkterne (3,5) og (5,10)' kræver blot, at eleverne kender løsningsformlen og kan sætte tal ind i denne og giver altså ikke megen plads til kreativitet og selvstændig tankevirksomhed.

Det er min opfattelse, at mange elever således oplever matematik som et fag med kun én rigtig fremgangsmetode og ét facit, som det i øvrigt er læreren, der lægger inde med. At være god til matematik bliver særligt et spørgsmål om at være god til at huske metoder udenad og forstå at anvende disse. Men matematik er meget andet end løsningsalgoritmer og formler. Matematik handler først og fremmest om at opstille og løse problemer, og det er derfor naturligt at overveje, om ikke også elever som forskeren bør stifte bekendtskab med denne essentielle del af matematikken. Netop denne ide finder vi realiseret i aktiviteten Math en Jeans.

Math en Jeans kan på dansk oversættes som 'matematik for sjov' og er opstået for at skabe en øget interesse for matematik blandt børn og unge i Frankrig. Det drejer sig om at få eleverne til at opleve matematikken som et levende og kreativt fag ved at inddrage dem i forskningslignende situationer, hvor de i mindre grupper fordyber sig i et matematisk problem, præsenteret for dem af en matematikprofessor fra et universitet. Aktiviteten er et frivilligt tilbud for elever på tværs af klasser og årgange, der foregår efter skoletid, hvor eleverne typisk mødes og udforsker problemstillingen i et såkaldt atelier (matematikværksted) en gang om ugen i løbet af skoleåret. Afslutningsvis samles alle deltagende skoler til den årlige Math en Jeans konference, hvor resultatet af deres arbejde præsenteres og diskuteres.

Men kan børn overhovedet forske i matematik? Hvilke matematiske problemer arbejder eleverne med i Math en Jeans? Hvordan organiserer de arbejdet? Hvilken rolle har læreren? Hvad får eleverne ud af arbejdet? Kan en aktivitet som Math en Jeans etableres i danske skolesammenhænge? Spørgsmålene er mange.

2.1 Specialets opbygning

Jeg vil i specialet undersøge fænomenet Math en Jeans med udgangspunkt i tre overordnede spørgsmål:

1) Hvilken type opgaver arbejder eleverne med i Math en Jeans?
2) Hvordan arbejder eleverne med opgaverne?
3) Hvilke muligheder er der for at etablere lignende tiltag i danske skolesammenhænge?

Math en Jeans vil således blive belyst fra tre forskellige perspektiver, hvorfor jeg i specialet vil benytte flere teorier. Disse vil blive præsenteret i **kapitel 3**, som falder i tre dele: i) Matematisk problemløsning, ii) *Teorien om didaktiske situationer* (TDS) samt iii) *Den antropologiske teori om det didaktiske* (ATD). Kapitlet tjener desuden til at klarlægge en række begreber, så en endelig problemformulering kan præciseres i **kapitel 4**.

Herefter følger tre afsnit, hvor jeg forsøger at besvare de tre overordnede spørgsmål.

I **kapitel 5** karakteriseres de opgaver, som eleverne arbejder med i Math en Jeans. Hvad er en typisk Math en Jeans opgave? Til det formål opstilles fem variable, som en given opgave kan vurderes ud fra. Mit datamateriale består af 48 tilfældigt udvalgte Math en Jeans opgaver, som vil blive analyseret på baggrund af disse variable. I **kapitel 6** vil fokus være på arbejdsprocessen. Hvad karakteriserer elevarbejdet i Math en Jeans? For at belyse dette spørgsmål har jeg observeret en række Math en Jeans atelierer på Prins Henriks Skole (den franske skole i København) skoleåret 12/13 og udvalgt fire situationer herfra. Situationerne analyseres her med *Teorien om didaktiske situationer* som teoretisk referenceramme. I **kapitel 7** undersøges, hvilke muligheder der er for at etablere en fritidsaktivitet som Math en Jeans i danske skolesammenhænge. Danske og franske betingelser vil her blive sammenlignet. *Den antropologiske teori om det didaktiske*, herunder niveauer af didaktisk bestemmelse, vil danne ramme for analyse og diskussion i dette kapitel.

Endelig afrundes specialet med en konklusion i **kapitel 8**.

3. Teori

3.1 Matematisk problemløsning

Intentionen i Math en Jeans er at lade eleverne arbejde med matematiske problemer i forskningslignende situationer som nævnt i introduktionen. Det er derfor først og fremmest nødvendigt at præcisere, hvad vi skal forstå ved et matematisk problem. Hvad er karakteristisk for et problem set i forhold til andre opgavetyper? Hvilke egenskaber kan en matematikopgave mere generelt have? Dette afsnit tager afsæt i disse spørgsmål, og fokus ligger således ikke på, hvordan man løser et problem, hvilket titlen 'matematisk problemløsning' måske kunne friste én til at tro, men derimod på hvad der karakteriserer et matematisk problem. Endvidere vil jeg undersøge, hvad der er et godt problem. Nogle problemer må nødvendigvis være et bedre udgangspunkt for elevernes arbejde i Math en Jeans end andre. Jeg vil her inddrage Godot og Greniers bud på, hvilke kriterier, der bør være opfyldt, hvis der skal skabes en god forskningslignende situation (Godot & Grenier, 2005).

3.1.1 Hvad er et problem?

Ordet 'problem' dukker ikke kun op i matematikkens verden, men også i daglig tale i alle livets sammenhænge, og vi har alle en forestilling om, hvornår vi står over for et problem - om det så er relateret til matematik, økonomi, parforhold eller noget helt andet. Det er dog langt fra sikkert, at vi kan blive enige om en klar definition af, hvilke typer udfordringer, der bør betegnes 'problemer'. Der er gennem tiden givet mange bud på, hvad vi skal forstå ved et problem.

Et af dem finder vi hos matematikeren Polya, der særligt er kendt for sin heuristik for problemløsning, publiceret i det berømte værk *How To Solve It* (1957). Polya angiver her en universel metode til problemløsning, der foregår i fire trin: 1) forstå problemet, 2) udtænk en plan for at løse det, 3) før planen ud i livet og 4) kontroller hvad du har gjort (Polya, 1957, pp.16-17). Fremgangsmåden er således ikke en konkret metode til løsning af matematiske problemer, ligesom Polya heller ikke definerer et matematisk problem, men et problem i almindelighed. Et ønske der hurtigt og uden besvær kan opfyldes, er ifølge Polya ikke et problem. Til gengæld kan et ønske hos en person føre til et problem, hvis personen ikke umiddelbart eller let kan komme i tanke om en handling, som kan opfylde ønsket.

> "At have et problem betyder altså: at lede bevidst efter en passende handling til at opnå et klart udtænkt, men ikke umiddelbart opnåeligt mål. At løse et problem betyder at finde en sådan handling." (Polya, 1962, p.117, l.11-13, egen oversættelse)

Flere har efterfølgende taget dette bud til sig. Eksempelvis ses hos Krulik og Rudnick (1987) en definition, der lægger sig tæt op af Polyas. Her understreges, at det essentielle træk ved et problem netop er, at individet ikke umiddelbart kender en metode til at nå en løsning.

> ”Et problem er en situation, kvantitativ eller andet, som konfronterer et individ eller en gruppe af individer, som kræver en løsning, og hvor individet ikke kan se en umiddelbar eller indlysende metode eller vej til at nå løsningen. Det vigtigste i denne definition er vendingen ”ingen umiddelbar eller indlysende…vej.” (Krulik & Rudnick, 1987, p.3, l.2-7, egen oversættelse)

Hvor Polya samt Krulik og Rudnick beskriver et problem helt generelt, finder vi hos Niss og Jensen (2002) en definition på et <u>matematisk</u> problem, der ikke er uforenelig med de forrige definitioner:

> ”Et matematisk problem er en særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen. Spørgsmål, som kan besvares alene ved hjælp af (få) specifikke rutinefærdigheder, henregnes således ikke som matematiske problemer.” (Niss & Jensen, 2002, p.201, l.1-4)

Det fremgår her ikke klart, hvad der menes med ’en matematisk undersøgelse’, hvilket må ses som en svaghed ved definitionen. Til gengæld pointerer Niss og Jensen, at et matematisk problem står i skarp kontrast til hvad vi kunne kalde rutineopgaver (såsom at løse en andengradsligning), der træner basale teknikker og blot kræver få rutinefærdigheder. Der findes ikke en algoritme til at løse et problem i modsætning til at løse en rutineopgave. Samme ide ser vi hos Schoenfeld (1985):

> “[…] hvis man har umiddelbar adgang til et løsningsskema til en matematisk opgave, da er denne opgave en øvelse og ikke et problem (Schoenfeld, 1985, p.74, l.17-19, egen oversættelse)

Schoenfeld påpeger samtidig, at problemløsning er relativ, hvilket også Krulik og Rudnick antyder, dog ikke så eksplicit. Formuleringen ’ingen umiddelbar eller indlysende vej’, som i øvrigt ikke præciseres yderligere, må nødvendigvis være relativt til individet. En opgave vil være et problem for én elev, men vil kunne løses med rutinefærdigheder af en anden:

> “At være “et problem” er altså ikke en iboende egenskab i en matematisk opgave. Det er snarere et særligt forhold mellem individet og opgaven, som gør opgaven til et problem for denne person. Ordet *problem* er her brugt i denne relative betydning, som en opgave, der er svær for det individ, som forsøger at løse den.” (Schoenfeld, 1985, p.74, l.9-13, egen oversættelse)

Det er klart, at der derfor må tænkes på elevernes forudsætninger og interesser, hvis man i undervisningen ønsker at lade dem arbejde med matematisk problemløsning. Det bliver lærerens opgave at udvælge og designe faglige problemstillinger, der faktisk kan udgøre problemer for eleverne og udfordre dem på et passende niveau. Der er ifølge Schoenfeld (1985, p.15) fire grundlæggende faktorer i problemløsningsprocessen, som man bør være opmærksom på:

- ***Resurser*:** Matematisk viden, som eleven har, der kan bringes i spil i forbindelse med det foreliggende problem. Fx facts, procedurer, færdigheder.
- ***Heuristik*:** Mere generelle og abstrakte strategier og teknikker, der kan anvendes i problemløsning og som tjener til at forbinde dele af problemet med elevens resurser. Fx at tegne figurer, indføre passende notation, omformulere problemet, teste og verificere procedurer.
- ***Kontrol*:** Beslutninger omkring udvælgelse og iværksættelse af resurser og strategier (kontrol med problemløsningsprocessen). Fx planlægning, vurdering, bevidste metakognitive handlinger.
- ***Forestillingssystemer*:** Elevens forestillinger om faget og den foreliggende problemtype og relationerne derimellem.

Når eleverne går i stå eller har vanskeligheder i problemløsningsprocessen, kan det skyldes alle fire faktorer, og den hjælp, der er brug for, afhænger naturligvis af, hvad de mangler. Fx vil urutinerede problemløsere ofte have brug for hjælp til at skabe sig større overblik over (og kontrol med) deres eget arbejde. Læreren kan her spørge, hvor langt de er nået, hvad de mangler at finde ud af osv. Det kan være sværere at hamle op med elevernes forestillingssystemer. Fx vil mange elever, der ikke er vant til at arbejde med mere udfordrende problemer, have en ide om, at opgaver, der ikke kan løses på fem minutter, slet ikke kan løses. (Winsløw, 2006a, p.128). De fire faktorer vil ikke blive uddybet yderligere, da dette afsnit som nævnt tidligere i højere grad fokuserer på, hvad der kendetegner et problem frem for selve problemløsningen. I stedet vender vi tilbage til spørgsmålet ’hvad er et matematisk problem?’.

Vi kan på baggrund af de forskellige bud på et svar til netop dette spørgsmål konkludere, at et problem først og fremmest er **udfordrende** - udfordrende i den forstand, at en løsning til problemet ikke umiddelbart eller med lethed kan findes. Dog er en opgave, hvor det at finde en løsning indebærer besværlige lange udregninger, ikke nødvendigvis et problem (fx at finde determinanten af en 20x20 matrix). At et problem er udfordrende knytter sig ikke til den tid eller det besvær, det kræver at løse det. At en opgave er udfordrende betyder derimod, som de forskellige definitioner påpeger, at der ikke umiddelbart findes en løsningsmetode. Et problem må således ikke forveksles med rutineopgaver, der giver eleven træning i en specifik matematisk teknik, der kan anvendes i en klasse af situationer og som garanterer succes, hvis eleven undgår mekaniske fejl (såsom udregninger). Når en elev skal løse en rutineopgave, er det ikke hendes opgave at finde en løsningsmetode. Denne er allerede præsenteret af læreren med flere standardeksempler på, hvordan teknikken kan benyttes i en opgave. Eleven skal dermed blot lære at identificere analoge opgaver og anvende løsningsalgoritmen på disse. Endelig er det, at et problem er udfordrende et relativt begreb. Hvad der for én elev er en udfordring, er måske bare en rutineopgave for en anden. Som Schoenfeld (1985) understreger, er det at være udfordrende ikke en iboende egenskab ved en opgave. Det er kun, hvis vi tager højde for eleven og hendes forudsætninger, at vi kan vurdere, hvorvidt den opgave, hun stilles overfor, er udfordrende eller ej.

En anden væsentlig egenskab ved en matematikopgave er, om den er åben eller lukket. I modsætning til at vurdere, hvorvidt en opgave er udfordrende, hvilket afhænger af problemløseren, kan åbenhed og lukkethed defineres mere entydigt ud fra selve opgaven. En opgave kan være åben i spørgsmålet og/eller i svaret. En opgave siges at være åben i spørgsmålet, hvis det hører med til opgaven at afklare og afgrænse dens indhold. Et eksempel er givet nedenfor[1].

> Hvordan skal man placere tre spots i et kubisk værelse for at få et så stort oplyst rumfang som muligt?
> a) Hvis man kun sætter spots i loftet?
> b) Hvis man tillader spots hvor som helst?

Det er her nødvendigt, at eleverne 'lægger mere til teksten' og overvejer spørgsmål som: hvilken geometrisk form har lyset fra et spot? hvor langt rækker lyset? hvad er et kubisk værelse? hvor stort er rummet? hvilke matematiske begreber kan vi få bragt i spil? osv. Åbenhed i spørgsmålet kræver, at eleverne selv er med til at udforme opgaven og foretage nogle valg for at fastlægge rammer og forudsætninger for at kunne løse den. Det er først hen ad vejen i takt med de valg, eleverne træffer, at spørgsmålet bliver mere lukket.

En opgave er åben i svaret, hvis svarets form ikke er givet på forhånd. Eleverne må her selv overveje, hvilke typer af svar, der kan dukke op i arbejdet med opgaven. Hvis svaret er åbent som i (1) - se næste side - findes der ikke ét facit i modsætning til opgaver, der er lukkede i svaret med et entydigt svar som i (2). Åbenhed i svaret indebærer ofte flere rigtige svar og flere typer af svar. Eksemplerne nedenfor illustrerer ligeledes,

[1] Opgaven findes i bilag 1 og er blandt de 48 Math en Jeans opgaver, der vil blive præsenteret og analyseret i kapitel 5.

hvordan en opgave med et lukket svar (2) kan åbnes op ved at 'vende opgaven' og i stedet give svaret (1).

> (1) Gennemsnittet af fem basketballspilleres højde er 200 cm. Hvilke højder kan de fem basketballspillere have?
>
> (2) Hvad er gennemsnittet af fem basketballspilleres højde, hvis de er henholdsvis 195, 196, 201, 202 og 206 cm høje?

Et matematisk problem er ikke kun udfordrende, men oftest også **åbent** (i spørgsmålet og/eller svaret). Hvis et problem er åbent og ikke blot udfordrende, vil elevernes udforskning af problemet blive af mere undersøgende karakter og vil i højere grad ligne de vilkår, som matematikforskeren arbejder under:

> "I en forskningssituation kan og skal forskeren, for at få udviklet sit spørgsmål, selv fastlægge løsningsrammen, modificere reglerne eller ændre dem, tillade sig selv at omdefinere objekterne eller modificere det spørgsmål, han har stillet." (Godot & Grenier, 2005, p.1, l.19-21, egen oversættelse)

Samtidig er åbenhed med til at gøre en opgave udfordrende, da åbenhed i en opgave indebærer, at der ikke findes én bestemt løsningsmetode. Ofte vil flere forskellige strategier være en mulighed.

Alt i alt kan vi konkludere, at et matematisk problem skal forstås som en **udfordrende** og **åben** matematikopgave.

3.1.2 Det gode forskningsspørgsmål

At en opgave er udfordrende og åben gør den ikke nødvendigvis til et godt problem. Eksempelvis kan et problem være for udfordrende, hvis eleven ikke kan forstå spørgsmålet eller ikke har forudsætninger til at komme i gang. Det er vigtigt, at det spørgsmål, der er udgangspunkt for elevernes arbejde i Math en Jeans, er af god kvalitet. Godot og Grenier (2005) peger her på en række betingelser, der bør være opfyldt, hvis der skal skabes en god forskningslignende situation (en såkaldt SRC[2]):

1) *En SRC er nært beslægtet med en professionel forskningsproblematik.* Situationen skal være tæt knyttet til uløste spørgsmål, da vi har den formodning, at dette tætte bånd til uløste spørgsmål - ikke kun for eleverne, men også for læreren, forskerne - er afgørende i forhold til at etablere elevernes position i situationen.
2) *Spørgsmålet er lettilgængeligt.* Specielt skal problemet, for at spørgsmålet er nemt for eleverne at forstå, ikke være formuleret strengt matematisk.

[2] ***S****ituation* ***r****echerche pour la* ***C****lasse* ('forskningssituation i klassen').

3) *Der findes strategier til at komme i gang med det samme,* som ikke kræver specifikke forudsætninger.
4) *Flere strategier* i forskningen og flere udfoldelser er mulige, både i forhold til matematisk aktivitet (konstruktion, bevis, beregning) og i forhold til matematiske begreber.
5) *Et løst spørgsmål kan føre til et nyt*: situationen har ikke en "slutning", der er ikke lokale kriterier for, hvornår arbejdet ender.
(Godot & Grenier, 2005, p.2, l.1-14, egen oversættelse)

Math en Jeans er primært tænkt som en aktivitet, hvor eleverne stilles over for problemer, de kan udforske på egen hånd uden særlige forudsætninger og uden at søge viden andre steder (Winsløw, 2012b, p.6), men det at opsøge, læse og forstå allerede eksisterende viden (studium) inden for et problemfelt er en hel essentiel del af forskerens arbejde:

> "80 procent af matematikerens forskning består i at reorganisere, reformulere og "problematisere" matematik, som allerede er blevet "lavet", af forskeren selv eller af andre (Brousseau, 1999)." (Winsløw, 2012a, p.2, l.13-15)

Studium hører med til det at beskæftige sig med matematik, om man så er professionel matematikforsker eller elev:

> "[…] studerende skal ikke bare lære at angribe et problem 'med de bare næver'; de skal også lære at søge efter eksisterende viden og benytte denne viden." (Winsløw et al., 2013, p.268, l.33-35, egen oversættelse)

Man kan altså diskutere, om eleverne i arbejdet med Math en Jeans opgaver også bør have mulighed for at foretage studium. Nogle vil sikkert mene, at der er mest værdi i selv at nå frem til et resultat udelukkende ved at 'vride hjernen' og vil måske ligefrem betragte det som snyd at finde inspiration på fx internettet. Andre vil derimod være af den opfattelse, at det at være i stand til at finde og forstå relevant viden om et givent problem også er en vigtig evne - også i matematik - særligt med en teknologi, der gennem de seneste årtier har åbnet op for nye muligheder, hvor computere, iPads mm. er blevet en integreret del af undervisningen. Spørger man matematikprofessor Nathalie Wahl[3], der hvert år udformer og præsenterer Math en Jeans opgaver for elever på den franske skole i København, er det kun fint, hvis de i arbejdet med opgaverne prøver at søge information på fx internettet, men det er ikke et krav. Som hun pointerer, vil det, de kan finde, ofte være avanceret matematik, som er svært for dem at forstå.

[3] Se transskription af interview i bilag 11. Hovedformålet med interviewet med Nathalie Wahl var at få belyst de institutionelle betingelser set i forhold til Math en Jeans, hvorfor interviewet først introduceres i kapitel 7.

3.2 Teorien om didaktiske situationer (TDS)

Teorien om didaktiske situationer (fra nu af forkortet TDS) af fransk oprindelse er grundlagt i starten af 1970'erne af Guy de Brousseau (Winsløw, 2006b, p.48) og fokuserer på det mikrodidaktiske niveau, da fokus ligger på selve undervisningen, herunder samspil mellem elever, lærer og den viden, der er i spil.

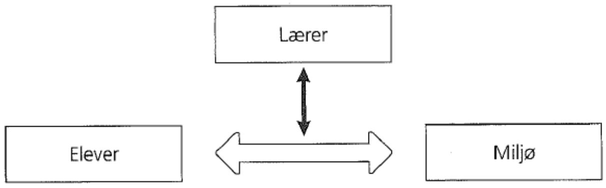
Jeg vil i dette afsnit ikke give en selvstændig fremstilling af TDS og dens nøglebegreber, men snarere inddrage elementer, som vil være brugbare i forhold til senere analyse af konkrete situationer af elevarbejde med Math en Jeans opgaver (kapitel 6). Desuden vil jeg i afsnittet forsøge at beskrive karakteren af elevernes forskningslignende arbejde i Math en Jeans med udgangspunkt i de introducerede begreber (udelukkende fra et teoretisk perspektiv).

3.2.1 Det didaktiske spil

I matematikundervisningen figurerer tre størrelser: lærer, elev og den officielle viden[4], som eleven skal opnå. Det vil ikke altid være tilstrækkeligt, at læreren blot overfører viden direkte til eleven. Eleven må i mange tilfælde først udvide sin personlige viden i samspil med en problemstilling og herefter formalisere til officiel viden. Der er således tale om to modsatrettede processer: Personliggørelse af officiel viden og fællesgørelse af personlig viden. Det epistemologiske udgangspunkt for TDS er, at viden indvindes i disse to trin (Winsløw, 2006a, pp.134-135).

De omgivelser for elevens læring, som læreren stiller til rådighed i en undervisningssammenhæng (problemstillinger, opgaver, hjælpemidler mv.) med henblik på elevens personliggørelse af den officielle viden, kaldes et **didaktisk miljø.** Elevens arbejde i det didaktiske miljø kan betragtes som en slags spil, hvor vinderstrategierne - hvis miljøet er rigtigt indrettet - er den tilsigtede personlige viden. Lærerens opgave er at få eleven til at vinde spillet ved at tilpasse miljøet. Til forskel fra forskerens arbejde med en åben problemstilling, er der her tale om et forud planlagt spil, hvor den tilsigtede viden er kendt af læreren. Også lærerens arbejde med at udforme og regulere det didaktiske miljø kan betragtes som et spil. Vi kan dermed anskue undervisningssituationen som en kombination af to 'spil' som illustreret i figur 3.1 på næste side. Figuren er en bearbejdet version af den didaktiske trekant (se figur 3.2, p.13), hvor den tilsigtede viden er til stede i form af det didaktiske miljø, som eleven arbejder med.

[4] *Officiel* viden er den, vi finder repræsenteret i lærebøger, videnskabelige artikler osv., som også kunne kaldes fælles viden. Som modpol hertil står *personlig* viden, som ofte er uformel, implicit og knyttet til konkrete situationer (Winsløw, 2006a, p.134).

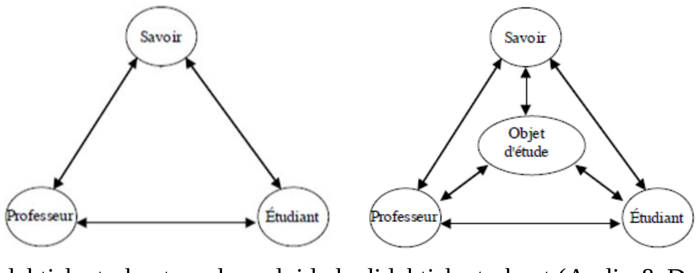


Figur 3.1 - Det didaktiske ”dobbeltspil” (Winsløw, 2006a, p.137)

Math en Jeans aktiviteten adskiller sig markant fra klassiske didaktiske situationer[5]. Læreren har i Math en Jeans ikke til opgave at gøre en specifik officiel matematisk viden tilgængelig for eleverne. Formatet søger i stedet at etablere et didaktisk miljø, der lægger sig tæt op af matematikforskerens. Eleverne arbejder med en bred problemstilling, som så vidt mulig er åben (se afsnit 3.1), ikke blot for dem selv og læreren, men i det hele taget, og har til opgave at producere noget ’nyt’ og skal ikke finde svar på spørgsmål, der på forhånd er velkendt af læreren. Fokus ligger ikke på tilegnelse af ny specifik matematisk viden inden for én gren af matematikken (fx beregning af sider og vinkler i en trekant), men derimod på viden, som er nyttig inden for flere matematiske områder:

> ”Den tilsigtede viden er frem for alt ”tværgående” viden, det vil sige den, som gør sig gældende inden for mange videnskabelige områder, så som at eksperimentere, opstille hypoteser, argumentere, modellere, definere, bevise, bruge implikationer, strukturere […].” (Godot & Grenier, 2005, p.1, l.3-6, egen oversættelse)

Det matematiske problem, der udforskes i Math en Jeans (*l’objet d’étude*), er udgangspunkt for arbejdet, og den klassiske didaktiske trekant med lærer (*professeur*), elev (*étudiant*) og den tilsigtede viden (*savoir*) kan udvides med denne ekstra dimension (se figur 3.2). Eleverne er i direkte konfrontation med det nye objekt, som de selvstændigt udforsker ved at trække på allerede eksisterende matematisk viden.



Figur 3.2 - Den didaktiske trekant og den udvidede didaktiske trekant (Audin & Duchet, 2005, p.1)

Det er klart, at læreren får en anden rolle end i en klassisk didaktisk situation, hvor opgaven er at gøre officiel viden - som han besidder - tilgængelig for elev. Læreren står her som eleverne over for et ukendt forskningsområde og ved som dem ikke, hvad

[5] Med klassisk didaktisk situation, menes en didaktisk situation, hvor der eksisterer en specifik tilsigtet viden, eleven skal opnå, og hvor lærerens opgave er at etablere et passende miljø, så denne hensigt kan indfris.

der kommer ud af forskningen. Til gengæld har han større matematisk viden, både specifik faglig viden og "tværgående" viden, fx kan han have en idé om, hvilke hypoteser, der er frugtbare. Lærerens opgave bliver dermed at guide eleverne. Han skal støtte - ikke overtage - elevernes problemløsning fx ved at hjælpe dem med at diskutere, hvad problemet går ud på. De to spil (elevens 'spil' med miljøet og lærerens 'spil' med at forme miljøet) eksisterer for så vidt stadig, men læreren lader i langt højere grad eleverne arbejde selvstændigt. Der er ikke samme behov for løbende at gribe ind og ændre miljøet, da han ikke skal have eleverne til at opnå en specifik tilsigtet viden. Læreren lægger de overordnede rammer, men det er op til eleverne, hvordan de vil gribe problemet an, hvilke hjælpemidler, de vil bruge osv.

3.2.2 Faser i det didaktiske spil

Det didaktiske spil har en række hovedfaser (devolution, handling, formulering, validering og institutionalisering), der beskriver de mulige elementer i undervisningen. Faserne skitseres nedenfor i korte træk og gennemføres i en undervisningssituation ikke nødvendigvis i den givne rækkefølge. Under devolution og institutionalisering er læreren den primære aktør, hvorimod det er eleverne, der har hovedansvaret i handlings- og formuleringsfaser.

Fase	**Kort beskrivelse**	**Miljø**	**Situation**
Devolution	Lærer introducerer opgave og overgiver det didaktiske miljø til eleverne.	Etableres	Didaktisk
Handling	Lærer trækker sig tilbage og observerer elevernes udforskning af miljøet.	Problemfelt Udforskningsfelt	Adidaktisk
Formulering	Eleverne formulerer deres første hypoteser om problemstillingen.	Åben diskussion	Adidaktisk eller didaktisk
Validering	Hypoteser bekræftes (fx ved flere forsøg) eller afvises (fx ved modeksempler)	Styret diskussion, bedømmelse	Normalt didaktisk
Institutionalisering	Lærer præsenterer den officielle viden, fx ved at præcisere og etablere produktet af en valideringssituation.	Institutionel viden	Didaktisk

Tabel 3.1 - Faser i det didaktiske spil (klasseundervisning) (inspiration: Winsløw, 2006a, p.140)

Når eleverne arbejder i et didaktisk miljø uden lærerens indgriben, er eleverne i en *adidaktisk situation*. Når læreren griber ind, fx gennem devolution og institutionalisering, taler vi om en *didaktisk situation*. Det didaktiske spil illustreret i figur 3.2 består således af en vekselvirkning mellem didaktiske og adidaktiske situationer (Winsløw, 2006a, p.139).

En væsentlig egenskab ved et didaktisk miljø er dets *adidaktiske potentiale*. En situation har adidaktisk potentiale, hvis miljøet kan give feedback til eleverne, så de fx selv er i stand til at kontrollere deres svar.

> ”Vi bruger ordet ”potentiale”, da læreren kan ignorere dette potentiale og styre situationen uden at udnytte det, ved selv at evaluere elevernes svar i stedet for at vente på, at eleverne reagerer på den feedback, der kommer fra miljøet.” (Hersant & Glorian, 2005, p.117, l.19-22, egen oversættelse)

Adidaktisk potentiale er særlig relevant i forbindelse med valideringssituationer, som spiller en vigtig rolle i matematikken, hvor hypoteser må vurderes rationelt. Uanset om valideringen er didaktisk eller adidaktisk, er det vigtigt med et miljø, der i en vis udstrækning giver feedback til eleverne.

Det tidsmæssige perspektiv i Math en Jeans er et andet end i den sædvanlige matematikundervisning, da eleverne arbejder selvstændig med et matematisk problem over en lang periode, og vi vil i hvert atelier ikke kunne identificere alle fem faser. Devolution ses kun i starten af Math en Jeans forløbet, hvor lærer og professor overgiver årets Math en Jeans emner til eleverne. Eleverne bærer her en stor del af ansvaret, da de selv vælger sig ind på en opgave, de finder interessant, og selv bestemmer, hvordan de vil gribe den an. Endvidere skal læreren i hvert atelier ikke samle op på elevernes arbejde og fællesgøre personlig viden som i en klassisk didaktisk situation. Vi ser kun (en form for) institutionalisering i slutningen af forløbet, hvor eleverne præsenterer deres resultater ved Math en Jeans kongressen. Den personlige viden, de har opnået inden for forskningsområdet, skal videreformidles og fællesgøres - et arbejde der kan minde om forskerens. Tilbage står handling, formulering og validering, som er de faser, der primært vil kunne identificeres i det didaktiske miljø i Math en Jeans ateliererne.

3.2.3. Den didaktiske kontrakt

I det didaktiske spil vinder eleven (og læreren), når eleven opnår den tilsigtede viden. Men for overhovedet at kunne spille spillet og dermed have en chance for at vinde, er det nødvendigt at både elev og lærer følger visse (spille)regler. Dette udformer sig i en slags uformel kontrakt mellem lærer og elever, som vi kalder **didaktisk kontrakt**. En didaktisk kontrakt er som regel implicit og indeholder uskrevne regler hvad angår forholdet mellem lærer og elever med hensyn til gensidige forventninger og forpligtelser. Eleven må acceptere og engagere sig i det didaktiske miljø, som læreren devoluerer, og omvendt er læreren ansvarlig for elevens succes i arbejdet i miljøet.

Et grundlæggende paradoks i en klassisk didaktisk situation er det faktum, at læreren stiller eleven over for problemer, som han selv kender løsningen til. Eleven forpligter sig således i spillet til at søge svar på spørgsmål vel vidende, at afsender kender dem, hvilket må siges at være et usædvanligt krav set i forhold til andre sociale sammenhænge. Situationen er en anden i Math en Jeans. Hverken elever eller lærer ligger her inde med svarene på forhånd, hvorfor der fra elevernes side ikke på samme måde vil kunne opstå et ønske om at svare det, som læreren gerne vil have. Læreren har ikke rollen som ham, der stiller spørgsmål, men samtidig kender svarene, og eleverne vil derfor snarere opfatte ham som en støtte, de kan bruge, hvis de får behov for det.

3.3 Den antropologiske teori om det didaktiske (ATD)

TDS kan som beskrevet i afsnit 3.2 bruges som redskab til at analysere konkrete situationer i elevarbejdet i Math en Jeans, men at undersøge hvilke muligheder der er for at etablere en fritidsaktivitet som Math en Jeans i danske skolesammenhænge, kræver en teori, der ikke kun fokuserer på det, der foregår i klasserummet. Jeg vil her benytte *Den antropologiske teori om det didaktiske* (fra nu af forkortet ATD), som er et forholdsvis nyt forskningsprogram grundlag af Yves Chevallard. I modsætning til TDS' mikrodidaktiske interesse for matematikundervisningens finmekanik (samspil mellem elev, lærer og det, der skal læres), fokuserer ATD på institutionelle perspektiver på viden og matematikundervisning, som kunne kaldes makrodidaktiske (Winsløw, 2012c, p.9). I ATD opstilles blandt andet en model for, hvordan viden formes og organiseres, ikke kun hos individet, men også i samfundet. Det sker med udgangspunkt i et af teoriens centrale begreber, nemlig *prakseologi*. Endvidere fokuserer ATD på de ydre betingelser for undervisning (niveauer af didaktisk bestemmelse), som er afgørende for, hvad der finder sted i fx matematiktimerne i en folkeskole.

Jeg vil i de næste afsnit give en kort fremstilling af elementer fra ATD, som er relevante i forhold til at belyse fænomenet Math en Jeans fra et makrodidaktisk perspektiv (kapitel 7). Det drejer sig særligt om de forskellige niveauer af didaktisk bestemmelse.

3.3.1 Prakseologier og institutioner

I ATD identificeres to forskellige aspekter af en matematisk aktivitet: <u>Praksisblokken</u>, som består af en bestemt *type af opgaver* samt *teknik* til løsning og <u>teoriblokken</u>, som består af *teknologi*, der forklarer teknikkerne og *teori*, de dybereliggende begrundelser for praksis. En praksis (*praxis*) og den tilhørende teori (*logos*) kaldes i ATD for en *matematisk prakseologi*. Prakseologier optræder ofte i større samlinger, kaldet *matematiske organisationer* (forkortet MO), der kan være punktvise, lokale eller regionale afhængig af, om prakseologierne har teknik, teknologi eller teori til fælles (Barbé et al., 2005, pp.237-238).

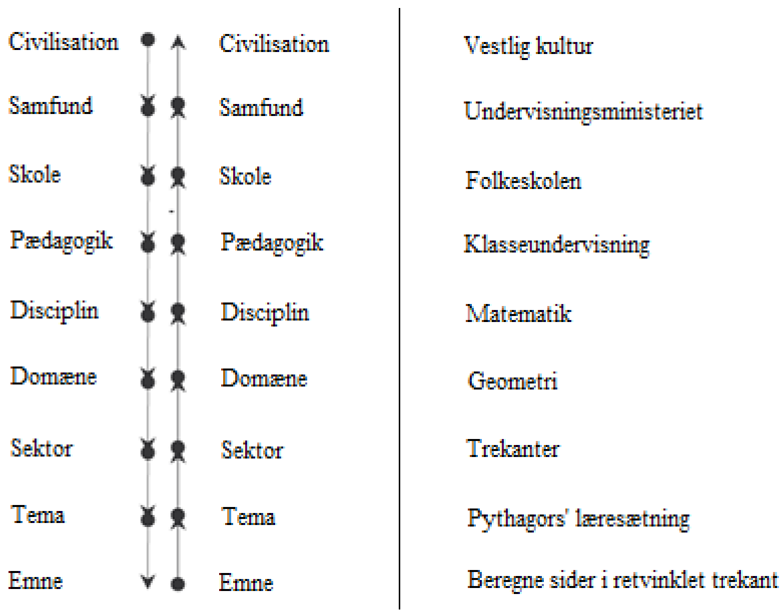
Matematiske prakseologier er ikke knyttet til individer, men derimod større eller mindre grupper af individer, der udøver praksis. En institution kan karakteriseres som "en samling af prakseologier kombineret med en samling af positioner i forhold til disse" (Winsløw, 2012c, p.10, l.28-29). Viden opstår, kommunikeres og praktiseres i institutionelle sammenhænge, der altså ikke er karakteriseret ved konkrete individer, men derimod ved de positioner, de kan indtage i forhold til hinanden (fx lærer og elev) og prakseologierne. Prakseologier videreføres ikke blot fra én institution til en anden, men udvikles og omformes. Fx vil en prakseologi for en bestemt opgave i et forskningsmiljø på et universitet ofte være anderledes end prakseologien for samme type opgave i en undervisningssammenhæng i gymnasiet.

3.3.2 Niveauer af didaktisk bestemmelse

De matematiske prakseologier, der undervises i (fx i folkeskolen eller gymnasiet) er betinget af faktorer, der skal findes uden for klasseværelset.

> ”Når læreren og eleverne samles omkring en viden, som skal læres, er det, der kan finde sted, hovedsageligt bestemt af betingelser og begrænsninger, som ikke kan reduceres til hvad der umiddelbart kan identificeres i klasserummet: lærer og elevers viden, didaktisk tilgængeligt materiale, software, tidsmæssig organisering osv.” (Bosch & Gascón, 2006, pp. 60-61, l.36-2, egen oversættelse).

ATD opererer her med en række niveauer af didaktisk bestemmelse, der er afgørende for, hvad der finder sted i undervisningen. Der er i alt ni niveauer som illustreret i figur 3.3, hvor der også gives et eksempel. De fire nederste *emne, tema, sektor* og *domæne* afhænger af niveauet *disciplin* og knytter sig til henholdsvis punktvise, lokale, regionale og globale MO’er (Bosch & Gascon 2006, p. 61). De fire øverste niveauer *pædagogik, skole, samfund* samt *civilisation* er derimod mere generelle betingelser, som er disciplinuafhængige.



Figur 3.3 - Niveauer af didaktisk bestemmelse (Chevallard, 2004, p.2, egen oversættelse)

Chevallard (2004) understreger i forbindelse med determinationsniveauerne en væsentlig pointe:

> ”Hvad der er muligt at gøre på hvert niveau - for eksempel i studiet af et givent matematisk tema - afhænger af *begrænsninger* og *betingelser* skabt af de øverste niveauer […].” (Chevallard, 2004, p.3, l.23-25, egen oversættelse)

Matematikundervisningen og den officielle viden, der skal læres, er altså i vidt omfang underlagt eksterne styringsmekanismer. De øverste disciplinuafhængige niveauer af didaktisk bestemmelse, som den enkelte lærer normalt ikke kan ændre eller påvirke, er dominerende, og en ændring på ét niveau vil påvirke de underliggende. Et tænkt eksempel kunne være, hvis Undervisningsministeriet ændrede bekendtgørelsen for faget matematik i gymnasiet, hvor mundtlig eksamen blev gjort obligatorisk frem for blot at kunne blive udtrukket. En sådan ændring på niveauet *samfund* ville uden tvivl have betydning for de underliggende niveauer, og fokus i undervisningen ville sandsynligvis blive et andet.

4. Problemformulering

Specialets hovedformål er at undersøge fænomenet Math en Jeans, der vil blive belyst fra tre forskellige perspektiver i henholdsvis kapitel 5, 6 og 7 som skitseret i afsnit 2.1.

Jeg ønsker at besvare følgende spørgsmål:

1) **Hvad karakteriserer Math en Jeans opgaver?**
   - Kan opgaverne betegnes som matematiske problemer (udfordrende og åbne)?
   - Opfylder opgaverne en eller flere af de kriterier, der ifølge Godot og Grenier skal til for at skabe en god forskningslignende situation?

2) **Hvad karakteriserer elevarbejde med Math en Jeans opgaver?**
   - Hvordan organiserer eleverne arbejdet?
   - Hvilke udfordringer kan opstå hos eleverne?
   - Hvad får eleverne ud af at arbejde med Math en Jeans opgaver?

   Endelig vil jeg her se nærmere på spilfordelingen i arbejdsprocessen:

   - Hvilke indbyrdes forventninger har elever og lærer til hinanden?
   - Hvilken rolle har læreren?

3) **Hvilke institutionelle betingelser er med til at afgøre, om en fritidsaktivitet som Math en Jeans kan realiseres i danske skolesammenhænge?**
   På hvilke niveauer af didaktisk bestemmelse kan der opstå forhindringer?

5. Hvad karakteriserer Math en Jeans opgaver?

Formålet med dette kapitel er at undersøge den type opgaver, som eleverne præsenteres for og arbejder med i Math en Jeans. Hvad kendetegner en typisk Math en Jeans opgave? Kan Math en Jeans opgaver betragtes som matematiske problemer, som er udfordrende og åbne jævnfør afsnit 3.1.1?

For at belyse disse spørgsmål har jeg udvalgt en række tilfældige Math en Jeans opgaver, som analyseres i afsnit 5.2. Opgaverne vil inden analysen kort blive introduceret (afsnit 5.1.1) og herefter opstilles en række variable, der kan bruges som analyseredskab til at vurdere kvaliteten af opgaverne (afsnit 5.1.2). Jeg vil i analysen ikke gå i dybden med hver enkel Math en Jeans opgave, men snarere forsøge at karakterisere opgaverne overordnet og identificere hvilke typer forskningsspørgsmål, der optræder i datamaterialet. Analysen afrundes med en diskussion.

5.1 Metodologi

5.1.1 Præsentation af opgaver

Datamaterialet består af 48 Math en Jeans opgaver. 20 af opgaverne stammer fra Math en Jeans kongressen i København april 2012, hvor 15 franske skoler fra forskellige europæiske byer deltog. Flere af skolerne havde forinden konferencen uploadet deres Math en Jeans spørgsmål på internettet, og det er blandt disse, at de 20 opgaver er udvalgt[6]. De resterende 28 opgaver er fundet på Math en Jeans' officielle hjemmeside[7]. De nyeste opgaver, hvor det er muligt at finde den fulde opgavetekst (*texte complet de sujets*), er fra kongressen i Pontoise 2007, hvor kun skoler fra Frankrig deltog. Det er blandt opgaver fra dette år, at de 28 er udvalgt. Opgavetyperne varierer garanteret ikke meget fra år til år, men jeg har valgt et udsnit af de nyeste for at danne mig et så nutidigt billede af fænomenet Math en Jeans som muligt.

En oversigt over de 48 opgaver ses i tabel 5.1 på næste side. Alle opgaverne kan findes i mine bilag - både de franske originaltekster (bilag 1) og en oversat udgave (bilag 2) - og er her listet i alfabetisk orden efter dansk titel.

[6] Se http://www.mejlfph.sitew.com/#PARTICIPANTS_ET_SUJETS.B
[7] Se http://mathenjeans.free.fr/amej/evenements/cong_07/partsuj_07/partic_suj.html

Kongres ’12 København		**Kongres ’07 Pontoise**	
By	***Opgavetitler***	***By***	***Opgavetitler***
Beograd	Radioaktivitet	**Antony**	Et solitaire spil?
Bukarest	Periodiske ord		Fordelingen mellem pira-terne
	Tetraeder		Fransk billard
Budapest	Grafteori	**Bordeaux&Le Taillan Médoc**	Håndtrykkene
	Perspektiv m. to forsvin-dingspunkter		Punkter og halvplaner
	Talsystemer		Udskæring af rektangel i kvadrater
Culham	Konstruktion med farver	**Bordeaux&Talence**	Stern Brocots træ
	Matematik og spil	**Bordeaux**	Den rejsendes problem
	Solitaire		Lys!
København	Kubens geometri		n! (n fakultet)
	Magiske rektangler		Pengesedlerne
Luxembourg	Labyrinter	**Briançon**	Afslutningsproblem
Paris	Engel og djævel		Farvelægning af polyeder
			Perspektiv
	Tæpperne	**Cestas&Mérignac**	Det følsomme skakbræt
Stockholm	Kaptain Kids skat		Opsplitning i enhedsbrøker
	På jagt efter skatten	**Gradignan&Lormont**	Grafer
	Skift plads		Pandekageudskæring
	Spiren		Rum med fælder
Warszawa	Farve	**Joinville&Pontault-Combault**	Skubbespillet
	Haj		Springerens tur
		Louvres	Alle veje fører til Rom
			Kvadrater i rektangler
			Møntsystem
			Tetrisbrikker
		Vienne	Fodboldodds
			Frimærkeproblemet
			Punkter på et kvadrat

Tabel 5.1 - Oversigt over de 48 Math en Jeans opgaver

Opgaverne er tilfældigt udvalgt, forstået på den måde, at jeg ikke har brugt tid på at reflektere over en given opgave, men blot læst den hurtigt igennem og herefter medtaget den i datamaterialet. Hvad angår datamaterialets størrelse, kunne man have set på flere opgaver (fx 100 i stedet for 48), men jeg mener, at 48 opgaver er tilstrækkeligt til at kunne give et godt billede af, hvad der kendetegner Math en Jeans opgaver. Desuden begrænser det tidsmæssige aspekt, hvor mange opgaver det i specialet har været muligt at nå at analysere. Ligeledes er det begrænset, hvor længe jeg har kunnet bruge på hver enkel opgave. Der er blevet afsat omkring 20 minutter til hver, hvor jeg har vurderet hver enkel opgave i forhold til de fem variable, som præsenteres i afsnit 5.1.2.

Det er klart, at det i forbindelse med analysen er nødvendigt at lægge sig fast på, hvilket klassetrin, man forestiller sig skal udforske de spørgsmål, som stilles i opgaverne. Jeg har for at belyse karakteren af elevarbejdet i Math en Jeans (kapitel 6) observeret atelierer med 6.- og 7. klasses elever, og fokus vil i specialet rettes mod netop denne aldersgruppes arbejde i Math en Jeans, hvorfor jeg i analysen af de 48 opgaver finder det nærliggende at antage, at opgaverne er tiltænkt elever i folkeskolens ældste klasser og ikke fx gymnasieelever i 3.g.

5.1.2 Variable i forskningsspørgsmålet

Som analyseredskab til at karakterisere de 48 Math en Jeans opgaver præsenteret i forrige afsnit, vil jeg i det følgende opstille en række variable i forskningsspørgsmålet, som hver enkel opgave kan vurderes ud fra. Det er afgørende, at opgaverne analyseres ud fra så objektive og klart definerede variable som muligt. Det vil for fx være en mere subjektiv vurdering at afgøre, om en given opgave er udfordrende (jf. afsnit 3.1.1), hvorfor dette ikke vil være en variabel, jeg vil bedømme opgaverne ud fra. Intentionen er, at det i opstillingen klart skal fremgå, hvordan en given opgave objektivt og operationelt kan vurderes inden for hver variabel. Jeg har i opstillingen særligt ladet mig inspirere af Godot og Greniers kriterier for et godt forskningsspørgsmål (afsnit 3.1.2).

5.1.2.1 Matematisk indholdsområde

Det er først og fremmest interessant at undersøge, hvilken matematik eleverne arbejder med i Math en Jeans. En opgaves matematiske indholdsområde må nødvendigvis have betydning for en eller flere andre variable i forskningsspørgsmålet. Fx kunne man forestille sig, at en kombinatorikopgave vil lægge op til andre løsningsstrategier og repræsentationsformer[8] end en geometriopgave. Hvordan eleverne kan gribe en opgave an, afhænger af det matematiske indholdsområde. Det er derfor oplagt at kommentere opgaverne på dette punkt.

Ved en hurtig gennemlæsning af de 48 opgaver, vil man opdage, at opgaverne i høj grad er kombinatoriske, geometriske og talteoretiske. Men hvordan er fordelingen mellem disse tre typer, og er der opgaver med andet matematikfagligt indhold? Det er her på sin plads at definere, hvad jeg mener med henholdsvis kombinatoriske, geometriske og talteoretiske opgaver, da dette er en forudsætning for at forstå min opdeling i analyseafsnittet. En **kombinatorikopgave** skal i specialet forstås som en opgave, hvor elevens arbejde med denne indebærer, at hun opdager, undersøger og eventuelt optæller forskellige kombinationsmuligheder. Kombinatorik handler kort sagt om at tælle samlinger af objekter, altså at bestemme antallet af objekter i forelagte objektsamlinger

[8] Eksempler på matematiske repræsentationer kunne være algebraiske udtryk, grafer og geometriske figurer.

(Frost, 2006, p.7). En **geometriopgave** inddrager oftest geometriske figurer og begreber i opgaveformuleringen, men det essentielle er her, at eleven i forsøget på at finde løsninger må overveje og forholde sig til geometriske begreber samt figurer og deres egenskaber. Endelig skal en **talteoretisk opgave** forstås som en opgave, hvor eleven undersøger tal og deres egenskaber.

5.1.2.2 Findes der lettilgængelige resurser?

Som beskrevet i afsnit 3.1.2 består matematikforskerens arbejde i høj grad i at opsøge eksisterende viden, hvorfor det kan diskuteres, om ikke også eleverne i Math en Jeans bør arbejde med problemer, der giver mulighed for studium. Det er af denne grund interessant at undersøge, om der til de 48 Math en Jeans opgaver findes lettilgængelige resurser. Jeg vil i det følgende beskrive, hvordan dette i analysen vil blive afgjort for en given opgave.

Hvis eleverne skal søge efter eksisterende viden i arbejdet med en Math en Jeans opgave, vil de som det første med stor sandsynlighed benytte sig af søgemaskinen Google. Jeg har ved hver enkel af de 48 Math en Jeans opgaver derfor afsat omkring fem minutter til at søge på Google på ord, som jeg forestiller mig, at eleverne ville forsøge sig med. Det vil udelukkende blive på ord, der optræder i opgaveteksten, såsom opgavens titel eller matematiske begreber, som bliver nævnt. Hvis en opgave fx handler om koncentriske cirkler, men det ikke eksplicit fremgår af opgaveteksten (se fx opgaven *Afslutningsproblem* i bilag 1), vil der ikke blive søgt på 'concentric circles', da eleverne nok ikke selv ville komme på dette søgeord. Jeg har valgt at søge på engelsk, som er almindelig brugt på internettet. Man kunne forestille sig, at franske elever også ville forsøge sig med dette, hvis de er ivrige efter at få ideer til et problem. Diverse oversættelsesmuligheder, som findes på internettet, gør det muligt for eleverne at søge på et sprog, de måske ikke behersker til fulde.

Hvis der ved denne fremgangsmåde dukker internetsider op blandt de tre første links[9], som omhandler problemet i en given opgave, findes der lettilgængelige resurser. Math en Jeans opgaverne vil på denne måde blive opdelt i to grupper:

1) Opgaver, hvor der findes lettilgængelige resurser.
2) Opgaver, hvor der ikke findes lettilgængelige resurser.

Opgaver i første gruppe giver mulighed for studium. Det interessante bliver her at undersøge, om opgaverne er tæt knyttet til uløste spørgsmål (Godot og Greniers første kriterium), eller om eleverne mere eller mindre vil kunne finde komplette besvarelser på problemerne på internettet.

[9] Det er klart, at jeg må begrænse mig og ikke kan se alle resultater igennem. Desuden må man forvente, at de mest relevante links ligger øverst.

5.1.2.3 Er opgaven åben?

Et matematisk problem er oftest åbent jf. afsnit 3.1.1, om det så er i spørgsmål og/eller svar. Om en opgave er åben eller lukket hænger i høj grad sammen med, om den forskningslignende situation har en 'slutning' (Godot og Greniers femte kriterium). Åbne opgaver har ikke en naturlig afslutning som lukkede, hvor det at have fundet facit ofte sætter punktum for arbejdet, men lægger i højere grad op til udforskning af problemfeltet. Eleverne vil i arbejdet med åbne opgaver ikke skulle finde ét facit, men vil kunne opnå delresultater, der alle belyser og løser dele af problemet. Der vil i arbejdet hele tiden dukke nye spørgsmål op som 'hvad sker der, hvis vi ændrer forudsætningerne her?', 'hvad hvis vi kigger på et andet tilfælde?' osv.

Det er altså værd at undersøge, om de 48 Math en Jeans opgaver er åbne, da specielt denne egenskab er med til at gøre forskningsspørgsmålet til ét af god kvalitet. Dette vil i analysen blive gjort med udgangspunkt i definitionen i afsnit 3.1.1. Jeg vil ved hver opgave ikke præcisere, om der er tale om åbenhed (eller lukkethed) i spørgsmål og/eller svar, da det i praksis i nogle tilfælde kan være vanskeligt at skelne. Begge former for åbenhed vil øge spørgsmålets kvalitet, og det er derfor ikke altafgørende med et klart skel i analysen.

5.1.2.4 Er opgaven lettilgængelig?

For at eleverne overhovedet kan komme i gang med arbejdet i Math en Jeans er det en forudsætning, at de forstår det spørgsmål, de bliver præsenteret for. Opgaven bør ikke være formuleret strengt matematisk, hvis den skal fange elevernes interesse (Godot og Greniers andet kriterium). Eleverne skal ikke nødvendigvis være fuldstændig klar over, hvad en opgave går ud på efter at have læst opgaveformuleringen igennem en enkelt gang. Opgaven må gerne diskuteres og overvejes med andre elever samt lærer og professor, der kan give eksempler og uddybende forklaringer. Men den skal være formuleret i et sprog, som eleverne har en umiddelbar chance for at forstå. Den skal være lettilgængelig, hvilket hurtigt kan blive en subjektiv vurdering, hvis der ikke opstilles objektive kriterier at bedømme ud fra.

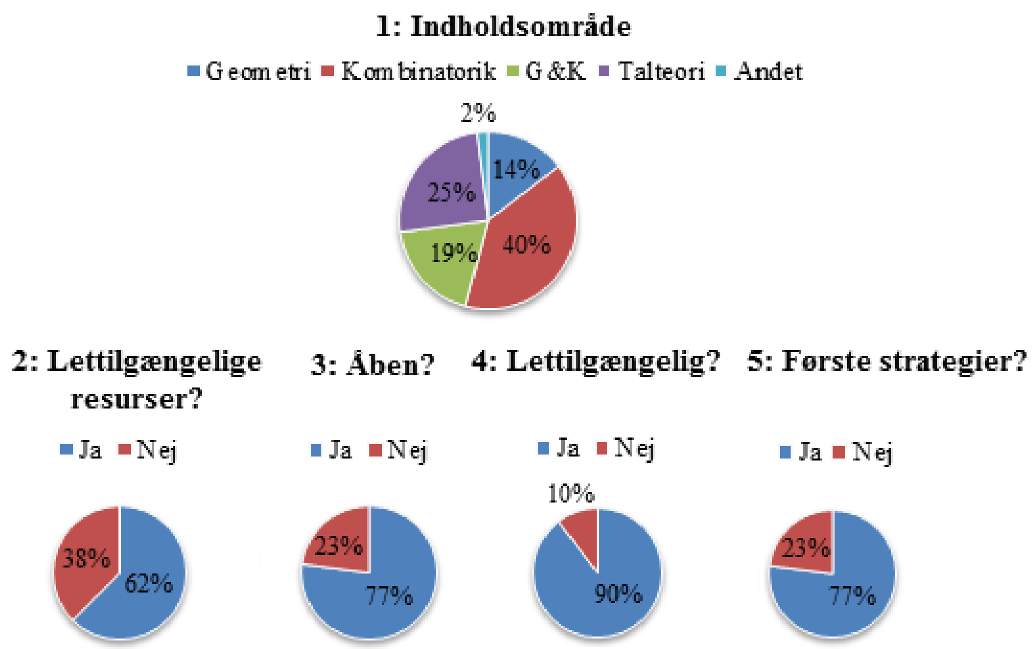
Jeg vil betragte en Math en Jeans opgave, der ikke gør brug af matematiske begreber, men er formuleret uden for matematikkens verden, som lettilgængelig for eleverne. Ligeledes vil opgaver, hvor kun få velkendte matematiske begreber er i spil (såsom cirkler, rette linjer, kvadrater) falde ind under denne kategori. Derimod vil jeg ikke anse en given opgave som lettilgængelig for eleverne, hvis der i opgaveformuleringen introduceres flere ukendte matematiske begreber, som eleverne først må lære for overhovedet at have forudsætninger for at forstå problemstillingen. Som beskrevet i afsnit 5.1.1 antager jeg, at opgaverne er tiltænkt folkeskolens ældste klasser (6. klasse og opefter), og det er med udgangspunkt i denne målgruppe, at jeg vil forsøge at afgøre om et matematisk begreb er velkendt, ukendt, svært osv. Det er klart, at det i flere tilfælde bliver en vurderingssag. Kender eleverne fx til begrebet ’tangent’? ’Polyeder’?

5.1.2.5 Opstår de første strategier hurtigt og naturligt?

Hvis der skal skabes en god forskningslignende situation, skal eleverne kunne komme i gang med det samme uden specifikke forudsætninger (Godot og Greniers tredje kriterium), og det skal være forholdsvis nemt for eleverne at nå de første delresultater, så de kan se, at der sker en vis progression i arbejdet. Når jeg i analysen vurderer, om eleverne i en given opgave hurtigt og naturligt vil få ideer til, hvordan de kan gribe denne an, forudsættes, at de kan forstå spørgsmålet. Uden denne antagelse vil der i elevernes arbejde med opgaver, der ikke er lettilgængelige, automatisk ikke opstå første strategier. Jeg har brugt omkring fem minutter på at arbejde med hver enkel Math en Jeans opgave. Hvis jeg inden for denne tidsramme ikke når et delresultat, vurderer jeg, at der (heller) ikke hurtigt og naturligt vil opstå første strategier hos eleverne.

5.2 Analyse

Resultatet af analysen inden for hver af de fem variable præsenteret i forrige afsnit ses nedenfor i figur 5.1. Jeg vil i de næste afsnit uddybe og kommentere opgaverne inden for hver enkel variabel, og der vil løbende blive inddraget eksempler. For resultatet af hver enkel Math en Jeans opgave henvises til bilag 3.



Figur 5.1 - Analyseresultater, de fem variable

5.2.1 Matematisk indholdsområde

Jeg har i analysen under denne variabel placeret hver enkel opgave inden for én af følgende fem kategorier:

- *Geometri*: 7 opgaver
- *Kombinatorik*: 19 opgaver
- *Geometri & kombinatorik*[10]: 9 opgaver
- *Talteori*: 12 opgaver
- *Andet*[11]: 1 opgave

Flere af de talteoretiske opgaver kræver i besvarelsen et vist kombinatorisk overblik, men jeg har ikke medtaget en kategori med titlen *Talteori og kombinatorik*, da jeg vurderer, at det i disse opgaver er talteori, som er det primære matematiske indholdsområde.

Som det fremgår af figur 5.1 er hovedparten af de 48 opgaver kombinatoriske, enten ren kombinatorik (40 %) eller en kombination af kombinatorik og geometri (19 %). Kombinatorikopgaver er særligt velegnede Math en Jeans opgaver, dels fordi de kan formuleres i et sprog, som eleverne kan forstå uden brug af svære matematiske begreber, dels fordi de ikke kræver særlige matematikfaglige forudsætninger at arbejde med. Det samme gør sig gældende for mange talteoretiske problemstillinger, der også vil kunne formuleres og udforskes allerede i folkeskolens ældste klasser. Hvordan det matematiske indholdsområde spiller ind i forhold andre variable i forskningsspørgsmålet, vil ikke blive uddybet her, men undervejs i de næste afsnit.

5.2.2 Findes der lettilgængelige resurser?

Ved at gå frem som beskrevet i metodeafsnit 5.1.2 er jeg nået frem til, at der til 62 % af opgaverne findes lettilgængelige resurser. Jeg har i bilag 4 angivet det søgeord, som gav resultater på Google, der omhandler problemet i en given opgave samt de relevante links. Ofte er det at søge på opgavetitlen tilstrækkeligt. Fx giver søgningen 'angel and devil mathematics' flere relevante links til opgaven *Engel og djævel*, der viser sig at være et matematisk problem formuleret af matematikeren John Conway (1996). Også andre af Math en Jeans opgaverne omhandler problemer pakket ind i en kontekst, som andre matematikere før har formuleret og udforsket. Det gælder blandt andet *Den rejsendes problem* og *Springerens tur*.

I knap to ud af tre opgaver er det således nemt for eleverne at finde materiale på internettet, som kan belyse problemet og give dem delresultater. Fx vil de i opgaven *Magi-*

[10] Forkortet *G&K* i bilag 3.
[11] Kun en enkelt opgave falder ind under denne kategori. Det drejer sig om opgaven *Radioaktivitet*, hvis matematiske indholdsområde er eksponentiel udvikling, herunder halveringstid.

ske rektangler kunne finde adskillige eksempler og eksisterende viden om magiske kvadrater ved blot at søge på 'magic square', såsom at der kun eksisterer ét magisk normaliseret 3x3 kvadrat (et 3x3 kvadrat med tallene 1-9, hvor summen af tallene i hver række, kolonne og diagonal er den samme):

Det magiske 3x3 kvadrat
Vi har 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. I et magisk kvadrat skal du lægge 3 tal sammen igen og igen. Summen af tre tal må være 45:3=15. Tallet **15** kaldes det magiske tal i et 3x3 kvadrat.
Vi kan også få 15, hvis vi lægger tallet 5 sammen tre gange.
Vi kan skrive 15 som en sum af tre tal på otte måder:

15=1+5+9	15=2+4+9	15=2+6+7	15=3+5+7
15=1+6+8	15=2+5+8	15=3+4+8	15=4+5+6

De ulige tal 1,3,7 og 9 optræder to gange i udtrykkene, de lige tal 2,4,6 og 8 tre gange og tallet 5 fire gange. Derfor skal vi placere tallet 5 i midten af det magiske 3x3 kvadrat. De resterende ulige tal skal placeres i midten af en side og de lige tal i hjørnerne. Under disse betingelser er der otte måder at konstruere kvadratet:

```
816  438  294  672  618  834  492  276
357  951  753  159  753  159  357  951
492  276  618  834  294  672  816  438
```

Alle de otte kvadrater ligner hinanden, hvis du spejler dem i symmetriakserne. Vi tæller kun symmetriske kvadrater som ét. Derfor er der kun ét magisk 3x3 kvadrat.

Figur 5.2 - *Magiske rektangler* (http://www.mathematische-basteleien.de/magsquare.htm, egen oversættelse)

En god forskningslignende situation kræver ifølge Godot og Grenier, at eleverne arbejder med uløste spørgsmål (første kriterium), hvorfor det i forbindelse med opgaver med lettilgængelige resurser som *Magiske rektangler* er vigtigt at overveje, om eleverne kan finde fuldstændige løsninger på internettet eller i en matematikbog. Faktum er her, at studieelementet ikke er tilstrækkeligt og ikke kan stå alene i arbejdet med Math en Jeans opgaverne. Dette hænger i høj grad sammen med, at Math en Jeans opgaverne i langt de fleste tilfælde er åbne (se mere under variabel 3 i afsnit 5.2.3). Arbejdet med åbne opgaver har som beskrevet tidligere ikke en naturlig afslutning, og der findes ikke ét facit, hvorfor eleverne ved at foretage studium kun kan løse dele af et givent problem. I *Magiske rektangler* kan eleverne fx finde en løsning til spørgsmålet 'hvor mange magiske normaliserede 3x3 kvadrater findes der?', men der er mange andre spørgsmål at overveje: Hvad med 2x2 kvadrater? 4x4? nxn? Ikke normaliserede kvadrater? Rektangler? Antimagiske rektangler? Hvordan konstruerer man egentlig magiske rektangler? Osv. Der vil hele tiden opstå nye spørgsmål, som eleverne kan arbejde med.

At foretage studium er i mange af opgaverne en mulighed, men det kan, som Wahl også pointerer (se transskription af interview i bilag 11), ofte være vanskeligt for eleverne at gennemskue den matematik, de finder på internettet, da niveauet oftest er for højt for elever i folkeskolens ældste klasser (se links i bilag 4). Én ting er, om der findes lettilgængelige resurser til en opgave, en anden er, om eleverne rent faktisk kan bruge det, de finder, hvilket først og fremmest kræver, at de forstår det. Til gengæld vil eleverne tit kunne komme langt med ”de bare næver” uden særlige forudsætninger og uden at opsøge allerede eksisterende viden. Der vil i mange tilfælde hurtigt og naturligt opstå strategier hos eleverne, som giver dem deres første delresultater (se mere under variabel 5 i afsnit 5.2.5).

5.2.3 Er opgaven åben?

77 % af opgaverne er åbne - enten i spørgsmål, svar eller begge dele. Specielt hører det med til mange af opgaverne at afklare og afgrænse deres indhold. Jeg vil nedenfor give en række eksempler på spørgsmål, der kan opstå hos eleverne i forskellige opgaver, der illustrerer, at de undervejs i arbejdet selv må udforme opgaven og foretage en række valg for at fastlægge rammerne for arbejdet.

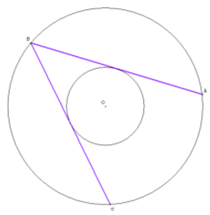
- *Alle veje fører til Rom*: Hvad skal vi forstå ved ”forhindringer”?
- *Engel og djævel*: Hvilken strategi benytter engel og djævel sig af, når de flytter sig? Hvad gør englen fx i forsøget på at undslippe djævelen?
- *Fransk billard*: Hvordan vil kuglen bevæge sig? Hvor placerer vi den til at starte med?
- *Fordelingen mellem piraterne*: Hvornår ”koster det ikke noget” for piraterne at smide en kammerat i vandet?
- *Håndtrykkene*: Hvor mange kender henholdsvis Hr. og Fru Rocco? Hvad med de andre mennesker i selskabet? Hvor mange kender de?
- *Pandekageudskæring*: Skal vi skære i rette linjer? Skal vi skære hele vejen igennem pandekagen? Eller må vi skære i den præcist, som vi vil?
- *Perspektiv*: Hvor kraftigt lyser projektøren? Hvor placerer vi den i forhold til kubussen?
- *Punkter på et kvadrat*: Hvad skal vi forstå ved, at punkterne skal placeres ”så langt fra hinanden som muligt?”
- *Rum i fælder*: Lægger vi os fast på alle robotters rute til at starte med? Eller sender vi én ind af gangen og fastsætter næste rute ud fra forrige resultater?

Har eleverne først lagt sig fast på én beslutning, fx at pandekagen skal skæres i rette linjer i opgaven *Pandekageudskæring*, er der intet til hinder for, at de senere kan gå tilbage og ændre forudsætningerne og undersøge, hvad der i givet fald så vil ske.

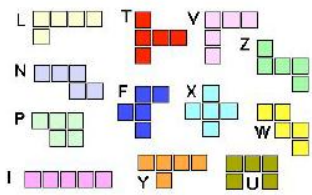
Flere af de åbne opgaver kan umiddelbart virke lukkede, da opgaveteksten formulerer et ja/nej-spørgsmål, men faktum er, at eleverne også her selv må ’lægge mere til teksten’. Et eksempel er opgaven *Afslutningsproblem*:

Afslutningsproblem
Vi tager to cirkler *C* og *C'* med radius *R* og *R'*, de har samme centrum og $R > R'$. Vi tager udgangspunkt i et punkt *A* på *C*'s cirkelperiferi, vi tegner en af tangenterne til *C'*, som går gennem *A*, den skærer igen *C* i et punkt *B*, vi gentager fremgangsmåden med udgangspunkt i *B* osv.

Vi får en række af linjestykker, vil der på et tidspunkt være et af disse linjestykker, der går gennem *A* igen?

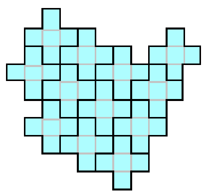


Spørgsmålet kan i *Afslutningsproblem* ikke bare besvares med enten et 'ja' eller et 'nej', da svaret afhænger af cirklernes radier, hvilket eleverne selv må præcisere. Der er flere deltilfælde at undersøge. Generelt vil svarene i de åbne opgaver ofte afhænge af, hvilke tilfælde, eleverne kigger på, og der vil således ikke kunne gives ét entydigt svar til en given opgave. Et eksempel er opgaven *Tetrisbrikker*, hvor et af spørgsmålene lyder: Hvordan dækker man et rektangel kun ved hjælp af én type brikker? Svaret afhænger her naturligvis både af brikkens og rektanglets størrelse og form. Eleverne må derfor undersøge forskellige deltilfælde, fx kan de betragte pentamino-brikker, der er sat sammen af fem små kvadrater. Der findes her 12 forskellige:



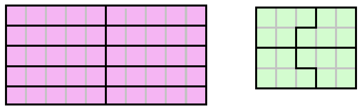
Figur 5.3 - *Pentamino-brikker* (bilag 1)

I mange tilfælde vil det ikke kunne lade sig gøre at dække et rektangel, uanset dets størrelse og form, med én slags pentamino-brikker. Fx er det ikke muligt med brikken mærket 'X', hvilket ikke er svært at indse:



Figur 5.4 - Eksempel hvor det *ikke* kan lade sig gøre

Med andre pentamino-brikker kan det derimod godt lade sig gøre:

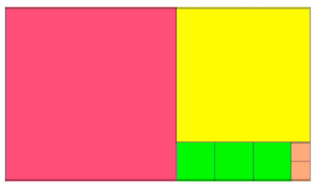


Figur 5.5 - Eksempel hvor det kan lade sig gøre

Her kan overvejes for hvilke størrelse rektangler, det er muligt. Kan brikkerne fx lægge anderledes?

Flere af de åbne opgaver indledes med hvad man kunne kalde ’opvarmingsspørgsmål’, der som regel er lukkede. Fx bliver eleverne som det første i opgaven *Tetrisbrikker* spurgt om antallet af forskellige hexamino-, heptamino- og octamino-brikker (brikker sat sammen af henholdsvis seks, syv og otte små kvadrater), hvor der kan gives et entydigt svar. Først herefter følger de åbne spørgsmål, hvor det er op til eleverne at vælge, hvilke veje, de vil gå.

Der er i de åbne opgaver hele tiden nye muligheder at undersøge, forskningsområdet er bredt og arbejdet har ikke en naturlig slutning i modsætning til arbejdet med lukkede opgaver. 23 % af Math en Jeans opgaverne er lukkede, hvilket svarer til 11 ud af de 48. Heraf er 9 talteoretiske. De lukkede Math en Jeans opgaver er blot avancerede matematikopgaver, som eleverne godt nok ikke vil kunne løse på fem minutter, men pointen er, at der her kan gives en fuldstændig løsning. Et eksempel er opgaven *Kvadrater i rektangler*. Her beskrives, hvordan et rektangel på 16x9 opdeles i kvadrater. Vi får først **ét** kvadrat på 9x9, herefter fås **ét** på 7x7, **tre** på 2x2 og endelig **to** på 1x1, hvilket giver koden **1-1-3-2**. Se figur 5.6.



Figur 5.6 - Opdeling af rektangel i kvadrater (bilag 1)

Herefter lyder første spørgsmål: Hvordan finder man koden, når man har den brøk, man starter med? Der kan her ved hjælp af division med rest gives et entydigt svar. De andre spørgsmål i *Kvadrater i rektangler* har samme karakter, hvorfor opgaven samlet set er lukket.

Lige så vel som en åben Math en Jeans opgave ved første øjekast kan synes lukket (fx *Afslutningsproblem*), kan en lukket opgave umiddelbart virke åben. I flere af de lukkede opgaver optræder en eller flere variable størrelser (fx et *n*), hvilket giver flere tilfælde at undersøge. Men faktum er her, at der, hvis denne/disse størrelse(r) sættes fast, kun er én måde at tolke opgaven (lukkethed i spørgsmål) og kun ét facit (lukkethed i svar). Det drejer sig blandt andet om opgaven *n! ('n fakultet')* og *Frimærkeproblemet*. I førstnævnte skal eleverne blandt andet undersøge antallet af cifre i n!. Når først n er sat fast, er der kun ét facit:

n	**n!**	**Antal cifre**
0	1	1
1	1	1
2	2	1
3	6	1
4	24	2
5	120	3
6	720	3
7	5040	4
8	40320	5
9	362880	6
10	3628800	7

Tabel 5.2 - antal cifre i n! (de første 10 værdier)

Det samme gør sig gældende i *Frimærkeproblemet* med følgende opgavetekst:

> **Frimærkeproblemet**
> En kuvert har plads til h frimærker, og frimærkerne kan have k forskellige værdier, hvor k er et naturligt tal. Hvis h og k er givet, hvad er så det maksimale beløb $n(h,k)$ sådan at man kan frankere brevet med en hvilken som helst værdi mellem 1 og $n(h,k)$? Hvad bliver da frimærkernes værdi? For eksempel, hvis $h = 2$, $k = 3$, har vi $n(2,3) = 8$, og de eneste mulige værdier er $\{1,3,4\}$.

Hvis vi lægger os fast på værdierne $h = 2$ og $k = 3$ findes kun ét facit, nemlig $n(2,3) = 8$ med 1, 3 og 4 som de eneste mulige værdier som nævnt i opgaveteksten. Opgaven vil blive mere avanceret med større værdier af *h* og *k*, men vil ligeledes give anledning til entydige svar.

5.2.4 Er opgaven lettilgængelig?

43 af Math en Jeans opgaverne (90 %) viser sig at være lettilgængelige for eleverne. Langt de fleste opgaver refererer til genstande og fænomener uden for matematikkens verden, som eleverne før er stødt på, men nok aldrig har overvejet matematisk. Det gælder både de geometriske, kombinatoriske og talteoretiske opgaver. Netop denne egenskab er med til at gøre Math en Jeans opgaverne lettilgængelige, da eleverne præsenteres for et matematisk problem 'pakket ind' i en kontekst, de allerede kender og derfor nemt kan forholde sig til, såsom billard (*Fransk billard*), legoklodser (*Konstruktion med farver*), mønter (*Møntsystem*), skak (*Springerens tur*) og tetrisbrikker (*Tetrisbrikker*).

Mange af opgaverne er desuden skrevet i et naturligt sprog uden brug af matematiske symboler og begreber, hvilket ligeledes er med til at gøre en opgave lettilgængelig for eleverne. Et eksempel er opgaven *Labyrinter*:

> **Labyrinter**
> Hvordan finder man vej ud af en labyrint? Kommer man ud, hvis man udforsker labyrinten på må og få? Hvor lang tid tager det? Vil strategier, hvor man ikke går tilfældigt rundt, være bedre?

Opgaverne formuleret i et naturligt sprog er stort set alle kombinatorikopgaver, der som antydet i afsnit 5.2.1 netop har den egenskab, at de kan formuleres helt uden for matematikkens verden. Det viser sig, at alle geometri- og kombinatorikopgaverne er lettilgængelige på nær en enkel (*Tetraeder*). De geometriske Math en Jeans opgaver benytter flere matematiske begreber i opgaveteksten end de kombinatoriske, men er ligeledes nemme at gå til for eleverne. Der er her kun få begreber i spil, og det er udelukkende begreber, som eleverne kender til: cirkel, radius, rette linjer, parallelle linjer, punkter, kvadrater, rektangler, kubus, tetraeder. Måske vil de ikke være helt fortrolige med dem alle, men læreren vil hurtigt kunne give en kort forklaring, hvis der er behov for det, lige så vel som han kan hjælpe eleverne med at diskutere problemet. Generelt kræver Math en Jeans opgaverne (også de lettilgængelige), at eleverne bruger tid på at sætte sig ind i det givne problem.

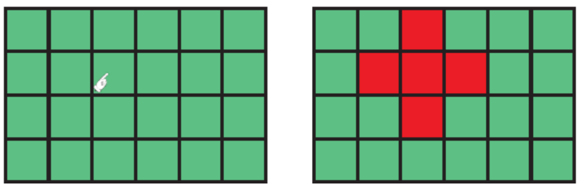
Der findes blandt de 48 Math en Jeans opgaver fem, som er svære for eleverne at forstå, selv hvis de virkelig anstrenger sig og fx læser opgaven igennem mange gange. Det drejer sig om *Kaptain Kids Skat*, *Opsplitning i enhedsbrøker*, *Stern-Brocots træ*, *Talsystemer* samt *Tetraeder*. De fire første er talteoretiske og den sidste en kombination af geometri og kombinatorik. For eksempel er det nødvendigt, at eleverne i opgaven *Tetrader* kender summationstegnet samt begreber som lukket kugleoverflade, storcirkel og halvkugleflade, hvilket jeg vurderer ikke er tilfældet i folkeskolens ældste klasser. Opgaven er måske oprindeligt tiltænkt gymnasieelever, men også her vil det være en udfordring overhovedet at forstå problemet. Fælles for de resterende fire opgaver, der som *Tetraeder* ikke er lettilgængelige er, at eleverne introduceres for flere nye matematiske begreber i en forholdsvis lang opgavetekst. I fx *Kaptain Kids skat* defineres addition og multiplikation for punkter i et koordinatsystem (som for de komplekse tal, hvilket ikke eksplicit fremgår af opgaveteksten), men eleverne vil ikke have nogen chance for at forstå, hvordan denne definition og de spørgsmål, der bliver stillet i anden del af opgaven, hænger sammen med det oprindelige spørgsmål i første del, der går ud på at finde Kaptain Kids skat. Et andet eksempel er opgaven *Stern-Brocots træ*, hvor eleverne først vil have mulighed for at komme i gang med opgaven, når de har forstået konstruktionen af det såkaldte Stern-Brocots træ, hvilket vil være en udfordring for dem. Der bliver her taget udgangspunkt i brøkerne $\frac{0}{1}$ og $\frac{1}{0}$, som 'vi lader repræsentere henholdsvis 0 og uendelig' (allerede her vil eleverne nemt kunne sættes af) og herefter beskrives, hvordan træet bygges op i trin, der i øvrigt ender med alle de positive rationale tal.

Math en Jeans opgaver skal være lettilgængelige, hvis de skal fange elevernes interesse, hvilket bestemt ikke er tilfældet for de fem nævnt ovenfor.

5.2.5 Opstår de første strategier hurtigt og naturligt?

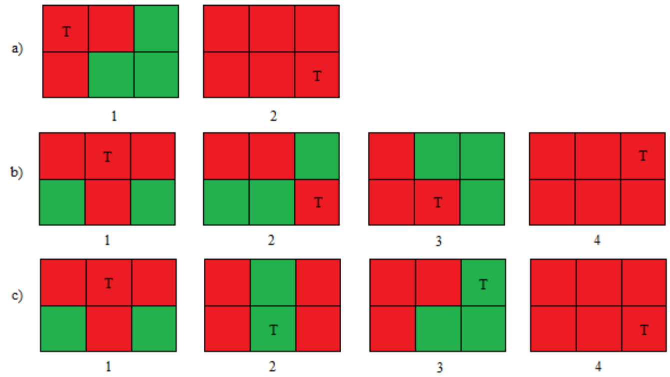
Strategier, der giver de første delresultater, opstår hurtigt og naturligt i arbejdet med 37 af de 48 Math en Jeans opgaver (77 %). Eleverne vil her kunne komme i gang med det samme uden særlige forudsætninger. Specielt kombinatorikopgaverne har denne egenskab. Kun i én af de 19 opgaver i denne kategori opstår første strategier ikke med det samme (*Labyrinter*). Ligeledes er kun én af de 9 opgaver, der er en kombination af geometri og kombinatorik, vanskelig at komme i gang med (*Tetraeder*).

Fælles for de 37 opgaver er, at der her er mange tilfælde, der kan undersøges, som alle belyser problemet. Der optræder ofte en variabel størrelse (fx n), hvor eleverne kan starte med at prøve sig frem med små værdier og få de første delresultater hurtigt. Fx kan de i *Kubens geometri* og *Punkter på et kvadrat*, der begge går ud på at placere et antal punkter på henholdsvis en kubus og et enhedskvadrat, så afstanden mellem punkterne bliver størst mulig, starte med at overveje tilfældet med to punkter og herefter betragte andre tilfælde. Et andet eksempel er opgaven *Det følsomme dambræt*, hvor eleverne skal undersøge, hvilke værdier af p og q, der kan ændre et grønt dambræt med pxq felter til et rødt dambræt. Rører man et felt, ændres farven på dette felt samt på de omkringliggende, der har en side fælles med det felt, man rører:



Figur 5.7 - *Det følsomme dambræt* (bilag 1)

Eleverne kan fx betragte et 2x3 bræt som det første. De kan her afprøve forskellige muligheder og vil hurtigt nå frem til, at det her kan lade sig gøre at få et rødt bræt, endda på flere måder. Se tre eksempler i figur 5.8 næste side, hvor T'et angiver det felt, der trykkes på for at få farvelægningen i et givent trin.



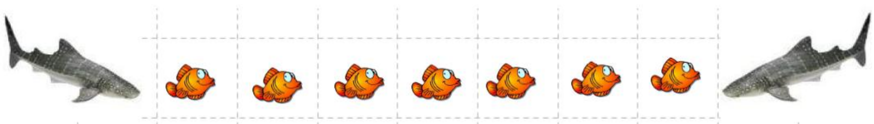
Figur 5.8 - *2x3 dambræt, fra grøn til rød*

Herefter kan overvejes, om det er muligt at opnå et rødt dambræt med andre værdier af *p* og *q*. Som i mange andre Math en Jeans opgaver kan eleverne efter at have set på en række tilfælde overveje, om der dukker særlige mønstre op, og om de kan formulere noget mere generelt.

Flere af opgaverne er formuleret som et spil med to deltagere (fx *Engel og djævel*, *Et solitaire spil?*, *Hajens spilstrategi*, *Matematik og spil* samt *Spiren*), og også her vil strategier hurtigt og naturligt opstå hos eleverne. Når først de har forstået reglerne, kan de to og to spille spillet og vil hurtigt få en fornemmelse af, hvordan man kan vinde. Et eksempel er *Hajens spilstrategi*, hvor det er oplagt at lade én elev vælge haj nr.1's træk og en anden elev haj nr. 2's træk. Opgaveformuleringen med 'spillereglerne' ses nedenfor.

Hajens spilstrategi
Lad *k* og *m* være hele tal. To hajer er adskilt af *m* portioner mad opstillet på en række. På skift spiser hver haj et antal madportioner, der varierer mellem 1 og *k*. Den haj, som spiser den sidste portion, bliver spist af den anden haj. Hver haj kender det antal portioner, som den anden haj har spist.

Findes der en overlevelsesstrategi for hajen som starter eller for den anden haj?



Hvis eleverne fx har lagt sig fast på, at hajerne må spise én eller to fisk af gangen, vil de efter en række spil sandsynligvis opdage, at man kan vinde, hvis det er modstanderens tur, når der er fire fisk tilbage. Her vil modstanderen enten kunne spise én fisk eller to fisk. I første tilfælde vælger man herefter at spise to, i andet tilfælde én, og modstanderen vil dermed blive nødt til at tage den sidste fisk i begge tilfælde.

11 af Math en Jeans opgaverne er sværere at komme i gang med. Fordelingen i forhold til matematisk indholdsområde er som følger:

- 1 ud af 19 opgaver i kombinatorik.
- 3 ud af 7 opgaver i geometri.
- 1 ud af 9 opgaver i geometri og kombinatorik.
- 5 ud af 11 opgaver i talteori.
- 1 ud af 1 opgave i kategorien 'andet'.

Fælles for disse opgaver er, at man ikke kan betragte simple eksempler som det første og herefter undersøge flere tilfælde. Et eksempel er opgaven *Perspektiv m. to forsvindingspunkter*, der kræver, at eleverne fra start søger efter eksisterende viden (viden om perspektivtegning). Der er her ikke en oplagt måde at starte med at gribe opgaven an på, i hvert fald ikke "med de bare næver". Enkelte opgaver er så åbne, at eleverne vil have svært ved at se, hvordan de overhovedet kan komme i gang. Fx vil det i opgaven *Radioaktivitet* være vanskeligt for dem at gennemskue, hvilken matematisk viden, de kan trække på. Det samme gælder opgaven *Lys!*, hvor eleverne sikkert ikke vil være i tvivl om, at opgaven er geometrisk, men ikke umiddelbart vil være klar over, at det er geometriske begreber som kegle og ellipse, der skal i spil.

5.3 Diskussion

Vi kan på baggrund af analysen konkludere, at Math en Jeans opgaver kan betegnes som *matematiske problemer* for elever i folkeskolens ældste klasser. For det **første** vurderer jeg, at opgaverne vil kunne udfordre eleverne. At en opgave er udfordrende er som beskrevet i afsnit 3.1.1 et relativt begreb, men jeg mener ikke, at eleverne vil have en løsningsalgoritme til nogen af opgaverne. Math en Jeans opgaver er langt fra at være rutineopgaver, som elever i folkeskolen ofte stilles over for i den almindelige matematikundervisning, såsom 'en cirkel har radius 5, find arealet' og 'hvad er 20 % af 550' osv. For det **andet** er langt de fleste Math en Jeans opgaver åbne, hvilket er en vigtig egenskab ved et matematisk problem. At opgaverne er åbne giver grupper, der arbejder med samme problem, mulighed for forskellige tilgange og måder at gribe opgaven an på, hvilket kan give en vis form for ejerskab. Eleverne kan dele viden med hinanden og vil opdage, at matematik kan være mere end bare at finde et entydigt facit.

Udover en egenskab som åbenhed (variabel 3) vil også det, at en opgave er lettilgængelig for eleverne (variabel 4) øge en Math en Jeans opgaves kvalitet. Ligeledes skal de første strategier helst opstå hurtigt og naturligt (variabel 5). Opgaverne opnår en samlet score på henholdsvis 77 %, 90 % og 77 % i forhold til disse tre variable. Men hvordan ser en typisk Math en Jeans opgave ud i forhold til de tre kriterier? Jeg har i tabel 5.3 på næste side angivet antallet af opgaver, der opfylder henholdsvis alle tre kriterier (dvs. som både er åbne, lettilgængelige og med første strategier), to kriterier, ét kriterium og ingen af kriterierne.

Antal kriterier	3	2	1	0
Antal opgaver med dette antal kriterier opfyldt	30	11	5	2

Tabel 5.3 - Kvaliteten af Math en Jeans opgaverne

En typisk Math en Jeans opgave har altså mindst to af kriterierne opfyldt (41 opgaver svarende til 85 %), og vi kan konstatere, at langt de fleste problemer i Math en Jeans opgaverne vil være et godt udgangspunkt for en forskningslignende situation, særligt dem i kombinatorikopgaverne.

De resterende 7 opgaver (15 %) er ikke af lige så høj kvalitet. Her opstår ikke første strategier hurtigt og naturligt, såsom først at undersøge simple tilfælde, og opgaverne kan ligeledes være vanskelige for eleverne at forstå, hvorfor det kan være svært at komme i gang. 5 ud af disse 7 opgaver er talteoretiske. Dette faktum virker i mine øjne umiddelbart mere eller mindre tilfældigt, da gode Math en Jeans opgaver, hvor eleverne ikke skal trække på avanceret matematisk viden, kan formuleres inden for alle matematiske indholdsområder, hvilket analysen bekræfter. Fx opfylder den talteoretiske opgave *Magiske rektangler* alle tre ovenstående kriterier. Egenskaber ved en Math en Jeans opgave afhænger af måden, hvorpå spørgsmålene stilles, og relativt fine justeringer vil ofte kunne ændre opgavens karakter markant (fx fra at være lukket til at blive åben). Et matematisk problem kan altså 'pakkes ind' og formuleres på mange måder uanset matematisk indholdsområde.

I modsætning til variabel 3, 4 og 5 ('er opgaven åben?, 'er opgaven lettilgængelig?' samt 'opstår de første strategier hurtigt og naturligt?'), hvor det, at der kan svares ja til disse spørgsmål, vil øge en given opgaves kvalitet, kan det jf. overvejelser i afsnit 3.1.2 diskuteres, hvorvidt der til Math en Jeans opgaverne skal findes lettilgængelige resurser (variabel 2). Faktum er, at eleverne i 62 % af Math en Jeans opgaverne rent faktisk hurtigt vil kunne finde resurser på internettet, der kan give ideer og delresultater, men ikke komplette løsninger. Meget af den matematik, de finder, vil dog højst sandsynlig være vanskelig for dem at forstå. Der er altså potentiale for at foretage studium i godt to ud af tre af Math en Jeans opgaverne. Om et sådant potentiale ville blive udnyttet, ja det er så lige spørgsmålet…

6. Hvad karakteriserer elevarbejde med Math en Jeans opgaver?

For at belyse karakteren af elevernes arbejde i Math en Jeans har jeg observeret en række Math en Jeans atelierer på Prins Henriks Skole i København, skoleåret 12/13. Jeg vil i metodeafsnit **6.1** beskrive overordnede rammer for forløbet, dataindsamling samt metode til analyse af data. Endvidere vil jeg præsentere og analysere de opgaver, som eleverne har arbejdet med i forløbet. Er opgaverne typiske Math en Jeans opgaver jf. diskussionen i afsnit 5.3? Jeg vil her særligt gå i dybden med *Matematisk solitaire*, da det er denne opgave, som eleverne arbejder med i de fire situationer jeg har udvalgt for at belyse min problemstilling. Situationerne præsenteres og analyseres i afsnit **6.2** med TDS som teoretisk referenceramme. Herefter afrundes med en diskussion i afsnit **6.3**.

6.1Metodologi

6.1.1 Elever, lærer og Math en Jeans forløbet

Både elever i hvad der svarer til folkeskolen og gymnasiet på den franske skole har i skoleåret 12/13 deltaget i Math en Jeans. Ateliererne har fundet sted ugentligt à en times varighed:

- Onsdag fra 16-17 (elever i 6.-9. klasse)
- Mandag fra 10-11 (elever i 1.g)
- Torsdag fra 9-10 (elever i 2.g)

Da gymnasieeleverne har nok at se til med lektier, afleveringer og lange skoledage, valgte lærerne som noget nyt i dette års Math Jeans at integrere aktiviteten i selve undervisningen for 1.- og 2.g'erne. Jeg har valgt udelukkende at observere Math en Jeans ateliererne om onsdagen, da eleverne her selv har meldt sig og møder frivilligt op efter skoletid. Det særlige ved fænomenet Math en Jeans er netop, at det er tænkt som og praktiseres som en fritidsaktivitet både i Frankrig og på franske skoler rundt omkring i Europa. Eleverne har her arbejdet med Math en Jeans opgaverne hver onsdag fra slut september til slut februar med afsluttende kongres i Prag 11-12. april 2013. Enkelte gange i løbet af skoleåret er blevet aflyst pga. skitur, juleferie og lignende, og eleverne har sammenlagt brugt 17 timer (dvs. 17 onsdage) på arbejdet med opgaverne. Ved hvert atelier har der været én lærer til stede (samme lærer hver gang). Jeg har ikke haft mulighed for at observere de fire første gange, men jeg har forhørt mig hos læreren, der påpegede, at tiden her i høj grad gik med, at eleverne fandt ud af, hvilken opgave, de helst ville arbejde med og i hvilke grupper. Eleverne er først for alvor kommet i

gang efter denne indledende fase, hvilket gruppernes mapper med ideer, overvejelser, kladder og resultater fra hvert enkelt atelier, ligeledes vidner om.
Grupperne ses nedenfor i tabel 6.1, som de så ud i starten af forløbet[12].

Gruppe	Medlemmer	Opgavetitel
1	2 piger	*Approksimere π i hånden*
2	4 drenge	*Approksimere π i hånden*
3	4 piger	*Matematisk solitaire*
4	5 drenge	*Matematisk solitaire*
5	1 dreng + 1 pige	*Frimærkerne*

Tabel 6.1 - Math en Jeans grupper '12-13 (6.- og 7.klasse)

Alle klassetrin (både folkeskole- og gymnasieelever) er blevet præsenteret for fire opgaver: *Frimærkerne*, *Approksimere π i hånden*, *Matematisk solitaire* og *I fugleflugtslinje / fly over jorden som drejer*. Som det fremgår af tabel 6.1 har ingen af folkeskoleeleverne valgt sidstnævnte opgave. Årsagen var ifølge læreren, at opgaven var for kompliceret for dem, hvilket analysen af de fire opgaver i afsnit 6.1.4 ligeledes bekræfter.

6.1.2 Dataindsamling

Ved første observationsbesøg stod det hurtigt klart, at eleverne snakkede meget og diskuterede livligt i gruppe 2, 3 og 4. Både eleverne i gruppe 1 og 5 var mere stille og sad mest hver for sig og arbejdede. Af denne grund valgte jeg ret tidligt i forløbet hovedsagligt at koncentrere mig om gruppe 2, 3 og 4. Det er klart, at det giver et større datamateriale og hermed et større udvalg af situationer at vælge mellem til videre analyse, hvis man observerer de grupper, hvor eleverne snakker meget med hinanden og ikke bliver tilbageholdende, når man sætter sig ved dem for at se, hvad de laver. At fokusere på gruppe 2, 3 og 4 frem for alle fem gav endvidere en bedre mulighed for at følge enkelte grupper og deres arbejde fra gang til gang.

Jeg har primært observeret én af de omtalte grupper i hvert atelier dels for at få indblik i, hvordan en gruppe arbejder i løbet af en hel time og ikke bare fem minutter, men særligt for at få sammenhængende situationer at analysere efterfølgende. Hvis der opstår en interessant situation, hvor to elever fx er uenige om en udregning, er det væsentligt at kunne placere denne i en kontekst. Hvad gik forud for den pågældende situation? Hvordan opstod den? Osv. Hvilken gruppe der fra gang til gang er blevet valgt, er mere eller mindre tilfældigt, da det ikke på forhånd har været til at sige i hvilken gruppe, der den opgældende dag ville opstå flest interessante episoder at se nærmere på i analysen. Jeg har dog forsøgt at observere de tre grupper det samme antal gange. Un-

[12] Omkring halvvejs i Math en Jeans forløbet sprang én elev i gruppe 1 fra og én i gruppe 5, og de to tilbageværende elever gik sammen i en ny gruppe, hvor de arbejdede med opgaven *Approksimere π i hånden*.

der hvert atelier har jeg placeret en diktafon på bordet i den gruppe, jeg valgte at sætte mig ved.

Min primære datakilde består af lydoptagelser, som gør det muligt bagefter at høre præcist, hvad eleverne i gruppen og læreren har sagt. Jeg har herefter kunnet analyse helt specifikke situationer og episoder. Lydoptagelserne står ikke alene, men suppleres med feltnoter, der også har været et vigtigt element i dataindsamlingen. Jeg har undervejs noteret, hvad den pågældende gruppe er i gang med, hvad de skriver på deres papir, hvornår læreren kommer hen til gruppen, hvornår gruppen snakker om andet end matematik osv. Feltnoterne har været særdeles brugbare, når jeg efterfølgende har lyttet optagelserne igennem. Ved hvert atelier har jeg endvidere taget billeder af elevernes kladder samt de resultater, gruppen skriver ind i deres mappe.

Dataindsamlingen er foregået som beskrevet ovenfor i de første ni Math en Jeans atelierer, som jeg har observeret. Hvor eleverne her har udforsket Math en Jeans spørgsmålene, er de sidste fire gange blevet brugt på forberedelse til kongressen i Prag. Eleverne har i disse atelierer lavet plancher samt PowerPoint-præsentationer og fremlagt resultater for hinanden og for Nathalie Wahl, som var på besøg den sidste gang. Arbejdet har således haft en anden karakter i slutfasen, hvorfor jeg i stedet for at sidde og observere én gruppe, valgte at cirkulere mere rundt mellem grupperne for at få et helhedsindtryk af denne del af processen.

Jeg har alle gange lagt vægt på at forholde mig så passivt som muligt og blot observere elevernes arbejde. Jeg har undervejs haft brug for at henvende mig til grupperne for at spørge ind til, hvor langt de var nået, om jeg måtte se deres mappe, tage et par billeder og lignende, men derudover har jeg ikke blandet mig i deres arbejde. Jeg har kunnet fornemme på eleverne, at det har været spændende for dem at få besøg 'udefra', og de har flere gange henvendt sig til mig oftest for at spørge ind til mit projekt, men også for at snakke om Rasmus Seebach, snevejr og alverdens andre ting. Ligeledes har diktafonen til tider været et forstyrrende element, da de ikke altid har kunnet lade den være. Når det så er sagt, så har eleverne langt det meste af tiden formået at glemme både mig og diktafon og været fuldt optaget af deres arbejde, som hvis jeg ikke havde været til stede.

6.1.3 Metode til analyse af data

For at kunne undersøge hvad der karakteriserer elevarbejdet i Math en Jeans, herunder hvordan eleverne organiserer arbejdet, hvilke udfordringer, der kan opstå hos dem, hvad de får ud af arbejdet samt ansvarsfordeling mellem lærer og elever, vil jeg som nævnt allerede i afsnit 2.1 bruge TDS som analyseredskab, herunder centrale begreber som didaktisk miljø, faser og didaktisk kontrakt.

For at danne mig et overblik over datamaterialet har jeg transskriberet alle lydoptagelser fra observationerne. Det skal her siges, at eleverne i Math en Jeans ateliererne har været optaget af opgaverne det meste af tiden, men der er også blevet brugt en del tid på at snakke om andre ting, pjatte, spørge til mit projekt, spørge lærer om Math en Jeans kongres i Prag osv. som antydet i afsnit 6.1.2. Eleverne møder frivilligt op efter skole, og det er kun forventeligt, at de ikke er koncentrerede hele tiden, måske særligt i kraft af deres alder (6.- og 7.klasse). Jeg har for hver lydoptagelse noteret, hvor mange minutter, der sammenlagt bliver brugt på andet end arbejdet med Math en Jeans opgaverne. Disse minutter udgør i gennemsnit omkring 28 % af det samlede antal. Denne del af lydoptagelserne er af gode grunde ikke blevet transskriberet.

Det er særligt på baggrund af transskriptionerne, at jeg har kunnet danne mig et overordnet billede af observationerne og identificere generelle tendenser, som er interessante i forhold til de spørgsmål, jeg ønsker at besvare. Jeg har udvalgt fire situationer - både situationer hvor eleverne arbejder selvstændigt og situationer med interaktion mellem elever og lærer - der alle belyser min problemstilling (se kapitel 5) og illustrerer mine pointer. Eleverne arbejder i de fire situationer med opgaven *Matematisk solitaire*, som vil blive præsenteret og analyseret i næste afsnit.

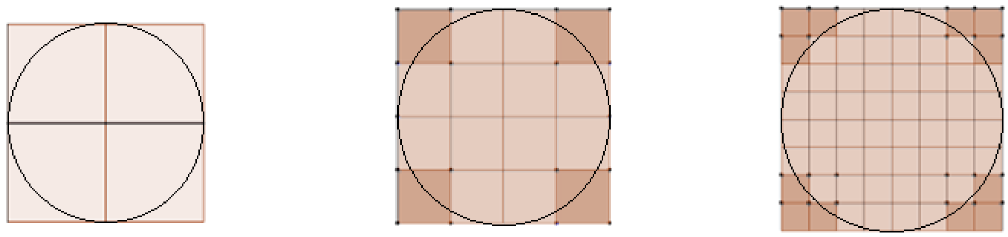
6.1.4 A priori analyse af Math en Jeans opgaver '12-13

De fire Math en Jeans opgaver, som eleverne på den franske skole har arbejdet med i skoleåret 12/13, er blevet udarbejdet og præsenteret for eleverne af Nathalie Wahl, lektor ved Institut for Matematiske fag på Københavns Universitet. Opgaverne kan ses i bilag 5 og 6 (fransk original samt en oversat version). Jeg har vurderet hver enkel opgave ud fra de fem forskningsvariable opstillet i afsnit 5.1.2 på samme måde som i analysen af de 48 Math en Jeans opgaver. Analyseresultatet fremgår af tabel 6.2 nedenfor.

Opgavetitel	**1 Indholdsområde**	**2 Resurser?**	**3 Åben?**	**4 Lettilgængelig?**	**5 Første strategier?**
Problem 1: *Frimærkerne*	Talteori	Ja	Ja	Ja	Ja
Problem 2: *Approksimere π i hånden*	Andet	Ja	Ja	Ja	Ja
Problem 3: *Matematisk solitaire*	Talteori	Ja	Ja	Ja	Ja
Problem 4: *I fugleflugtslinje / fly over jorden som drejer*	Geometri	Nej	Ja	Nej	Nej

Tabel 6.2 - Analyseresultater, Math en Jeans opgaver '12-13

Som nævnt i afsnit 5.3 kan Math en Jeans opgaver formuleres inden for flere **matematiske indholdsområder**. Det ser vi også her. Dog er ingen af de fire opgaver rene kombinatorikopgaver, som det viste sig at være tilfældet med 40 % af de 48 Math en Jeans opgaver analyseret i afsnit 5.2. Til tre af opgaverne findes **lettilgængelige resurser**, særligt til *Approksimere π i hånden*. Eleverne skal her give en approksimation af π ved hjælp af en følge af rationale tal, som nærmer sig π. Ideen er at betragte en indskrevet cirkel i et 2x2 kvadrat. Jo finere opdeling af kvadratet i mindre kvadrater, jo bedre tilnærmelse af cirklens areal (der netop er π, da radius er 1). Se figur 6.1 nedenfor.



Areal = 4 | Areal = $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ | Areal = $52 \cdot \frac{1}{16} = 3{,}25$

Figur 6.1 - Approksimation af π (bilag 5)

Eleverne vil måske ikke kunne finde netop denne approksimationsmetode på internettet, men en søgning på ordet ’pi’ vil give en lang række links[13], der kan inspirere og give ideer.

Alle fire opgaver er **åbne**. I *Frimærkerne* bliver eleverne fx nødt til at præcisere spørgsmålet ’hvad er det bedste valg af frimærker, der gør det muligt at få tallene fra 1 til 100 med 5 frimærker?’ Det må her overvejes, hvad man skal forstå ved ’det bedste valg’. *Frimærkerne*, *Approksimere π i hånden* og *Matematisk solitaire* er foruden åbne også **lettilgængelige**, og der vil hurtigt opstå **første strategier** hos eleverne. Opgaven *I fugleflugtslinje / fly over jorden som drejer* har derimod kun ét af de tre kriterier opfyldt (åbenhed) og er sværere for eleverne at gå til. Opgaven indledes som følger:

> Hvordan vælger man hvilken retning, man skal flyve, hvis man skal fra København til New York, Cape Town eller Sydney?
>
> For at gøre tingene mere simple:
> vi ignorerer ethvert spørgsmål om vind!
> vi antager, at jorden er flad til at starte med… og at den drejer meget hurtigt rundt!

Opgaveteksten indeholder ingen matematiske begreber, som eleverne ikke kender til, men er alligevel ikke lettilgængelig eller nem at komme i gang med. Hvad vil det fx sige, at ’jorden er flad til at starte med’? At den ’drejer meget hurtigt rundt’? Antagel-

[13] Se fx http://en.wikipedia.org/wiki/Pi, som er blandt de første links.

serne skulle simplificere situationen, men gør snarere opgaven sværere at forstå. Hvorfor ikke bare betragte jorden som en kugleoverflade?

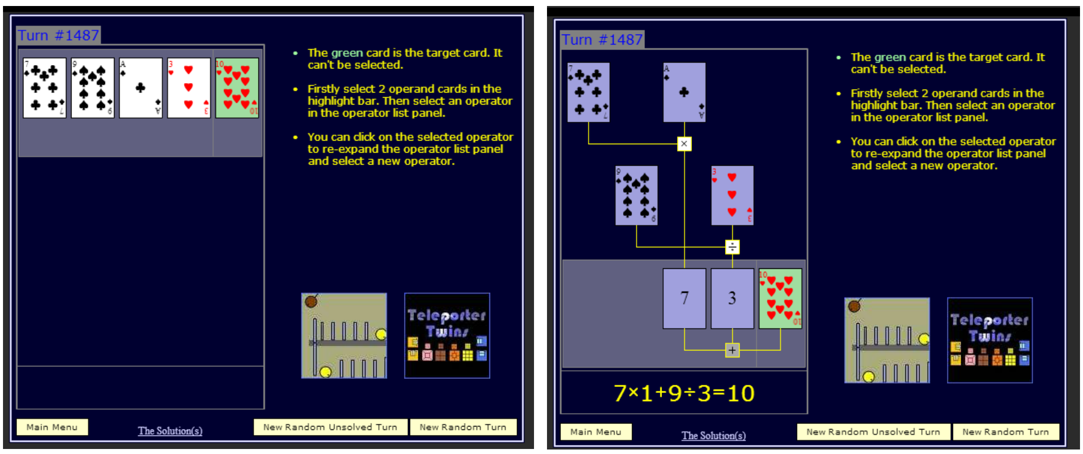
Alt i alt kan konkluderes, at tre af de fire opgaver er typiske Math en Jeans opgaver jf. diskussionen i afsnit 5.3, der kan skabe en god forskningslignende situation for elever i folkeskolens ældste klasser. Jeg vil i næste afsnit gå mere i dybden med opgaven *Matematisk solitaire* og se på forskellige løsningsmuligheder, da det som sagt er denne opgave, som eleverne arbejder med i de udvalgte situationer, der analyseres i afsnit 6.2. Det er klart, at det er vigtigt at undersøge, *hvad* eleverne arbejder for at kunne forstå og analysere, *hvordan* eleverne arbejder. Opgavens karakter har betydning for, hvad der kan komme ud af arbejdet.

6.1.4.1 Opgaven Matematisk solitaire

Opgaven *Matematisk solitaire* introducerer følgende spil (se bilag 5):

> Spilleren får 5 kort, hvorpå der er skrevet tal fra 1 til 10. Målet med spillet er at finde en kombination af de 4 første kort med operationerne +, -, x, / som giver tallet, der står skrevet på det sidste kort.
>
> Eksempel:
> man får kort med værdierne 1; 2; 3; 4; 5.
> Så har man: (((3-2)x1)+4 = 5
> (((3x4) / 2)-1) = 5

Søger man på 'math solitaire' på Google, vil man opdage, at spillet findes flere steder, fx på www.freearcade.com. Her spilles dog med et kortspil og ikke værdierne 1-10, men derudover er ideen den samme. Nedenfor i figur 6.2 ses et eksempel samt en løsning, hvor målet er at få resultatet 10 med kortene es, 3,7 og 9.



Figur 6.2 - Eksempel på opgave og mulig løsning
(http://www.freearcade.com/MathSolitaire.flash/MathSolitaire.html)

Ved et tryk på ”The Solution(s)” på skærmbilledet (se figur 6.2) vil man få forskellige løsningsmuligheder:

Solution(s) for (7, 9, 1, 3) => 10:

- $7 \times 1 + 9 \div 3 = 10$
- $7 \div 1 + 9 \div 3 = 10$
- $(9 \times 1) \div 3 + 7 = 10$
- $(9 \div 1) \div 3 + 7 = 10$
- $(9 \div 3 + 7) \times 1 = 10$
- $(9 \div 3 + 7) \div 1 = 10$
- $(9 \div 3) \times 1 + 7 = 10$
- $(9 \div 3) \div 1 + 7 = 10$
- $9 \div (1 \times 3) + 7 = 10$
- $9 \div (3 \div 1) + 7 = 10$

Figur 6.3 - Løsningmuligheder til opgave (www.freearcade.com)

Eleverne har således mulighed for at spille spillet *Matematisk solitaire* på internettet (dog med værdier fra 1-13 og ikke 1-10) og kan ikke mindst se løsninger på forskellige tilfælde. Men de vil ikke kunne finde komplette løsninger til de spørgsmål, som herefter bliver stillet i opgaven:

- Givet 4 kort, hvad er det største tal N, som man kan skrive? Det mindste? (NB: helt og positivt).
- Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få? (Det afhænger (muligvis) af de 4 givne kort).
- Findes der 4 kort, som tillader 3 forskellige kombinationer, der alle giver det samme N? 4 forskellige kombinationer?
- Hvilke kombinationer af kort kan bruges, hvis man skal have N=0? N=1? N=2? Er der nogle N, der er nemmere at få (dvs. med flere muligheder) end andre?
- Samme spørgsmål, men hvor man kun kan bruge en af de fire operationer +, -, x, / én og kun én gang.

Spørgsmålene vil uden tvivl være svære at besvare helt generelt, men eleverne kan undersøge forskellige deltilfælde og opnå delresultater. De har mulighed for selv at vælge, hvilke spørgsmål, de vil koncentrere sig om og gå særligt i dybden med, og man kunne forestille sig, at to grupper ville gribe opgaven an på vidt forskellige måder. Endvidere må eleverne undervejs selv præcisere de åbne spørgsmål. Må der sættes parenteser? Er det kun i spørgsmål 1, at negative tal ikke er tilladt? Hvilke kombinationer kan betragtes som ens, er fx $3 \cdot 7 + 5 + 2$ og $2 + 5 + 7 \cdot 3$ forskellige? Osv.

Jeg vil i de næste afsnit se på, hvad der kan komme ud af arbejdet med opgaven ved selv at undersøge og forsøge at løse forskellige deltilfælde. Af hensyn til specialets omfang vil jeg ikke gå i dybden med alle fem spørgsmål. Der vil uden tvivl være forskel på de svar, som jeg vil kunne give, og de svar, eleverne vil kunne nå frem til. Fx kunne man forestille sig, at de vil have sværere ved at opstille og overveje mere generelle tilfælde. At besvare spørgsmålene generelt kræver, som vi skal se, systematiske tilgange, bogstavregning samt elementer af kombinatorik og talteori, der er uden for elevernes rækkevidde, og de vil i arbejdet højst sandsynligt vælge at se på fire konkrete tal. En interessant pointe i denne forbindelse er det faktum, at der kan arbejdes med opgaven på flere niveauer. *Matematisk solitaire* viser sig at være et "rigtigt" matematisk problem, som er åbent og udfordrende, ikke kun for elever i 6- og 7.klasse, men også for en "voksen" matematiker. Der vil ikke kunne gives fuldstændige løsninger til samtlige spørgsmål, hvilket netop er med til at gøre opgaven til en Math en Jeans opgave af god kvalitet. Arbejdet har ikke en naturlig slutning, og man får i arbejdsprocessen hurtigt en fornemmelse af, at der konstant vil opstå nye spørgsmål, som kan overvejes og undersøges.

6.1.4.1.1 Spørgsmål 1

Givet 4 kort, hvad er det største tal N, som man kan skrive? Det mindste?(NB: helt og positivt)

Lad fire kort været givet med værdier $\{a, b, c, d\} \in \{1, \ldots, 10\}$. Det største tal man kan få afhænger af de fire korts værdier. Der er her fem tilfælde:

Kortværdier	**Største resultat**
Alle kort har værdi forskellig fra 1	$a \cdot b \cdot c \cdot d = abcd$
Der er ét kort med værdien 1 (fx a)	$b \cdot c \cdot (d+1) = bcd + bc$ (hvor d er mindst)
Der er to kort med værdien 1 (fx a og b)	$(c \cdot d) \cdot (1+1) = 2cd$
Der er tre kort med værdien 1 (fx a,b og c)	$d \cdot (1+1+1) = 3d$
Alle kort har værdien 1	$1+1+1+1 = 4$ eller $(1+1) \cdot (1+1) = 4$.

Tabel 6.3 - Det største tal

Det mindste tal man kan få er 0 (hvis vi antager, at negative resultater ikke er tilladt), og man kan overveje, hvordan dette resultat kan opnås. Hvis bare én af nedenstående tre betingelser er opfyldt, kan det lade sig gøre at skrive 0.

1) **Mindst to tal er éns** (fx $a - b = 0$): $(a-b) \cdot c \cdot d = 0 \cdot c \cdot d = 0$

   Eksempler: $(3-3) \cdot 2 \cdot 8 = 0$
   $(7-7) \cdot 7 \cdot 9 = 0$

2) **To tal kan give ét af de andre** (fx $a \square b = c$[14]): $(a \square b - c) \cdot d = 0 \cdot d = 0$

   Eksempler: $(3 \cdot 2 - 6) \cdot 9 = 0$
   $(10 - 3 - 7) \cdot 8 = 0$

3) **Tre tal kan give det sidste** (fx $a \square b \square c = d$): $a \square b \square c - d = 0$

[14] " $\square$ " angiver, at der her skal placeres en af de fire regneoperationer $+, -, \cdot, /$.

Eksempler: $3 \cdot 2 + 4 - 10 = 0$

$2 - 5 - 6 + 9 = 0$

Men kan man altid skrive 0 uanset de fire korts værdier? Vi kan her gå systematisk til værks og i princippet gennemgå alle mulige korthænder. Det er klart, at man altid kan få 0, hvis kortene har værdierne $1,1, c, d$ (hvor $c, d \in \{1, \dots, 10\}$), da der her er mindst to ens tal, men det viser sig, at det også altid kan lade sig gøre, hvis de fire kort har værdierne $1,2, c, d$. Se tabel 6.4 nedenfor. Antallet af stjerner * angiver her, hvilken af de tre betingelser, der i hvert fald er opfyldt og dermed gør det muligt at skrive 0.

Kortværdier			**Hvordan får vi 0?**	
1,2,c,d	1,2,2,d		2-2=0	*
	1,2,3,d		1+2=3	**
	1,2,4,d	1,2,4,4	4-4=0	*
		1,2,4,5	1+4=5	**
		1,2,4,6	2+4=6	**
		1,2,4,7	1+2+4=7	***
		1,2,4,8	8/4=2	**
		1,2,4,9	2·4+1=9	***
		1,2,4,10	10/2-4=1	***
	1,2,5,d	1,2,5,5	5-5=0	*
		1,2,5,6	1+5=6	**
		1,2,5,7	2+5=7	**
		1,2,5,8	1+2+5=8	***
		1,2,5,9	2·5-1=9	***
		1,2,5,10	2·5=10	**
	1,2,6,d	1,2,6,6	6-6=0	*
		1,2,6,7	1+6=7	**
		1,2,6,8	2+6=8	**
		1,2,6,9	1+2+6=9	***
		1,2,6,10	10/2+1=6	***
	1,2,7,d	1,2,7,7	7-7=0	*
		1,2,7,8	1+7=8	**
		1,2,7,9	2+7=9	**
		1,2,7,10	1+2+7=10	***
	1,2,8,d	1,2,8,8	8-8=0	*
		1,2,8,9	1+8=9	**
		1,2,8,10	2+8=10	**
	1,2,9,d	1,2,9,9	9-9=0	*
		1,2,9,10	1+9=10	**
	1,2,10,10		10-10=0	*

Tabel 6.4 - Hvordan får vi 0 med kortene 1,2,c,d?

Vi kan fortsætte på samme måde og undersøge kortværdierne $1,3, c, d$; $1,4, c, d$; … ; $1,9, c, d$; 1,10,10,10. Gør man det, vil man opdage, at det også altid er muligt at skrive 0, hvis vi har et kort med værdien 1 og desuden en af følgende værdier: 3, 7, 8, 9 og 10. Betragter man derimod korthænder med værdierne $1,4, c,$; $1,5, c, d$ eller $1,6, c, d$, er der her enkelte tilfælde, hvor det ikke er lykkedes mig at få 0:

- 1,4,6,8
- 1,4,7,9
- 1,5,7,9
- 1,5,7,10
- 1,5,8,10
- 1,6,8,10

De seks tilfælde opfylder umiddelbart ingen af de tre betingelser opstillet tidligere, og noget kunne tyde på, at man kan skrive 0 hvis og kun hvis mindst en af betingelserne er opfyldt.

Man kan herefter fortsætte med 2 som mindste kort, 3 som mindste kort osv. op til 10 som mindste (og eneste) kort og undersøge, om man her kan skrive 0.

6.1.4.1.2 Spørgsmål 2

Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få?

Det vil uden tvivl være meget vanskeligt at besvare dette spørgsmål helt generelt. Et-hvert regnestykke kan skrives på formen $a\square b\square c\square d$, hvor $\{a,b,c,d\} \in \{1,\dots,10\}$, og hvor der i hver af de tre bokse kan placeres enten $+, -, \cdot$ eller $/$. De fire kort a,b,c,d kan vælges på $10^4 = 10.000$ måder og de tre operationer på $4^3 = 64$ måder, hvilket giver $10.000 \cdot 64 = 640.000$ udregninger. Dertil kommer, at der kan sættes parenteser, som i princippet vil kunne give nye resultater. Det er klart, at mange af stykkerne vil give samme resultat uanset valg af a, b, c og d (fx er $a+b+c-d = a+b-d+c = b+c+a-d$), men det kræver et vist overblik at gennemskue, hvilke det drejer sig om. Hvilke stykker der giver samme resultat, vil endvidere afhænge af værdierne af a,b,c og d. Ligeledes vil de fire værdier have betydning for, hvilke kombinationer, der må sorteres fra, hvis man kun tillader ikke-negative hele tal som resultat. Vi kan dog hurtigt give en øvre grænse for antallet af forskellige resultater (kald dette tal |R|). Hvis x er det største tal, man kan skrive, da må vi have $|R| \leq x+1$. Hvis vi fx har givet tallene 1,2,3 og 4, da er det største tal $x = (1+2)\cdot 3\cdot 4 = 36$ jf. overvejelser i afsnit 6.1.4.1.1. Hvis y er et resultat, må vi derfor have $y \in \{0,1,2,\dots,36\}$ så $|R| \leq 37$.

En måde at gribe opgaven an på ville være at udarbejde et program i fx *Maple*, der som input tager fire tal og som output giver antal resultater, man kan få med disse tal, når der må bruges operationerne addition, subtraktion, mulitiplikation og division samt sættes parenteser. Det vil ikke nødvendigvis være en nem programmeringsopgave og ligger ligeledes lidt uden for specialets rammer, idet jeg ønsker at analysere den fakti-ske Math en Jeans aktivitet, hvor eleverne arbejder med *Matematisk solitaire*. Det at udforme et sådant program er uden tvivl uden for elevernes rækkevidde.

Man kan i stedet undersøge særlige tilfælde. Vi kan fx betragte tilfældet, hvor de fire kort er ens (a, a, a, a) og i første omgang vente med også at sætte parenteser i regneudtrykkene. Der vil for hvert valg af a her være 64 forskellige udregninger, idet rækkefølgen af tallene naturligvis er underordnet. Det er kun operationerne, vi kan variere. De 64 regnestykker er listet nedenfor. Jeg tillader udelukkende ikke-negative hele tal som resultat og har markeret de negative med rød.

Kombinationer med tre ens operationer:

$a + a + a + a = \mathbf{4a}$
$a - a - a - a = \mathbf{-2a}$
$a \cdot a \cdot a \cdot a = \mathbf{a^4}$
$a/a/a/a = \mathbf{1/a^2}$ (kun muligt hvis $a = 1$, da resultatet skal være et ikke-negativt helt tal)

Kombinationer med to ens operationer:

Addition

$a - a + a + a = a + a - a + a = a + a + a - a = \mathbf{2a}$
$a \cdot a + a + a = a + a \cdot a + a = a + a + a \cdot a = \mathbf{a^2 + 2a}$
$a/a + a + a = a + a/a + a = a + a + a/a = \mathbf{2a + 1}$

Subtraktion

$a + a - a - a = a - a + a - a = a - a - a + a = \mathbf{0}$
$a \cdot a - a - a = \mathbf{a^2 - 2a}$ (kun muligt hvis $a \neq 1$)
$a - a \cdot a - a = a - a - a \cdot a = \mathbf{-a^2}$
$a/a - a - a = \mathbf{1 - 2a}$
$a - a/a - a = a - a - a/a = \mathbf{-1}$

Multiplikation

$a + a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a + a = \mathbf{a^3 + a}$
$a \cdot a + a \cdot a = \mathbf{2a^2}$
$a - a \cdot a \cdot a = \mathbf{a - a^3}$ (kun muligt hvis $a = 1$)
$a \cdot a - a \cdot a = \mathbf{0}$
$a \cdot a \cdot a - a = \mathbf{a^3 - a}$
$a/a \cdot a \cdot a = a \cdot a/a \cdot a = a \cdot a \cdot a/a = \mathbf{a^2}$

Division

$a + a/a/a = a/a/a + a = \mathbf{a + 1/a}$ (kun muligt hvis a=1)
$a/a + a/a = \mathbf{2}$
$a - a/a/a = \mathbf{a - 1/a}$ (kun muligt hvis a=1)
$a/a - a/a = \mathbf{0}$
$a/a/a - a = \mathbf{1/a - a}$ (kun muligt hvis a=1)
$a \cdot a/a/a = a/a \cdot a/a = a/a/a \cdot a = \mathbf{1}$

Kombinationer med tre forskellige operationer:

Tre af fire operationer kan vælges på $\binom{4}{3} = 4$ måder:

1) +, -, ·
2) +, -, /
3) +, ·, /
4) -, ·, /

De tre tegn kan kombineres på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ måder. Vi har dermed følgende 24 kombinationer:

$a + a - a \cdot a = a - a \cdot a + a = \boldsymbol{2a - a^2}$ (kun muligt hvis a=1 eller a=2)
$a + a \cdot a - a = a - a + a \cdot a = a \cdot a + a - a = a \cdot a - a + a = \boldsymbol{a^2}$

$a + a - a/a = a - a/a + a = \boldsymbol{2a - 1}$
$a + a/a - a = a - a + a/a = a/a + a - a = a/a - a + a = \boldsymbol{1}$

$a + a \cdot a/a = a + a/a \cdot a = a \cdot a/a + a = a/a \cdot a + a = \boldsymbol{2a}$
$a \cdot a + a/a = a/a + a \cdot a = \boldsymbol{a^2 + 1}$

$a - a \cdot a/a = a - a/a \cdot a = \boldsymbol{0}$
$a \cdot a/a - a = a/a \cdot a - a = \boldsymbol{0}$
$a \cdot a - a/a = \boldsymbol{a^2 - 1}$
$a/a - a \cdot a = \boldsymbol{1 - a^2}$ (kun muligt hvis a=1)

Vi kan nu opskrive de mulige resultater:

0	$a^2 + 2a$
1	$2a^2$
2	$a^3 - a$
$2a - 1$	$a^3 + a$
$2a$	a^4
$2a + 1$	
$4a$	*Kun hvis a=1:*
$a^2 - 2a$ (a≠1)	$2a - a^2$ (eller a=2)
$a^2 - 1$	$a + 1/a$
a^2	$a - 1/a$
$a^2 + 1$	$1/a - a$

Tabel 6.5 - Resultater, fire ens tal

For $a = 1$ og $a = 2$ (særligt førstnævnte) vil mange af udtrykkene i tabel 6.5 give samme resultat. For $a \neq 1{,}2$ er der 16 forskellige udtryk, der derimod oftest vil give forskellige resultater. Se tabel 6.6 på næste side.

a	Antal resultater	Resultater
1	5	0,1,2,3,4
2	10	0,1,2,3,4,5,6,8,10,16
3	16	0,1,2,3,5,6,7,8,9,10,12,15,18,24,30,81
4	14	0,1,2,7,8,9,15,16,17,24,32,60,68,256
5	16	0,1,2,9,10,11,15,20,24,25,26,35,50,120,130,625
6	15	0,1,2,11,12,13,24,35,36,37,48,72,210,222,1296
7	16	0,1,2,13,14,15,28,35,48,49,50,63,98,336,350,2401
8	16	0,1,2,15,16,17,32,48,63,64,65,80,128,504,520,4096
9	16	0,1,2,17,18,19,36,63,80,81,82,99,162,720,738,6561
10	16	0,1,2,19,20,21,40,80,99,100,101,120,200,990,1010,10.000

Tabel 6.6 - Resultater for forskellige værdier af a

Hvis parenteser også tillades i udregningerne, vil vi kunne opnå udtryk, som ikke findes i tabel 6.5:

$(a+a+a)/a = \mathbf{3}$	$(a+a)\cdot a - a = \mathbf{2a^2 - a}$
$a-(a+a)/a = \mathbf{a-2}$ (a ≠1)	$(a+a)\cdot a + a = \mathbf{2a^2 + a}$
$(a\cdot a)/(a+a) = \mathbf{a/2}$ (a lige)	$a\cdot(a+a+a) = \mathbf{3a^2}$
$(a\cdot a - a)/a = \mathbf{a-1}$ (a≠1)	$(a+a)\cdot(a+a) = \mathbf{4a^2}$
$a+(a-a)\cdot a = \mathbf{a}$	$(a+a)\cdot a\cdot a = \mathbf{2a^3}$
$(a\cdot a + a)/a = \mathbf{a+1}$	$a(a\cdot a + a) = \mathbf{a^3 + a^2}$
$(a+a)/a + a = \mathbf{a+2}$	$a(a\cdot a - a) = \mathbf{a^3 - a^2}$
$(a/a+a)\cdot a = \mathbf{a^2 + a}$	

Tabel 6.7 - Resultater, fire ens tal, med brug af parenteser

Jeg er her ikke gået helt så systematisk til værks og kan muligvis have overset enkelte resultater, men faktum er, at der i hvert fald findes omkring dobbelt så mange nye udtryk, hvis vi også tillader parenteser.

For $a = 1,2,3$ viser det sig, at udtrykkene i tabel 6.7 giver anledning til henholdsvis 0, 2 og 7 resultater, som man ikke kan få, hvis der ikke sættes parenteser. For $a \geq 4$ fås 13, 14 eller 15 nye resultater. For fx $a = 8$ kan man få $16 + 15 = 31$ forskellige resultater i alt (eventuelt plus et par stykker, jeg kan have overset, når der sættes parenteser). Den øvre grænse er her $8^4 + 1$ jf. overvejelser i afsnit 6.1.4.1.2, som altså viser sig at være langt over det antal, man faktisk kan opnå.

6.1.4.1.3 Spørgsmål 3

Findes der 4 kort, som tillader 3 forskellige kombinationer, der alle giver det samme N? 4 forskellige kombinationer?

Det åbne spørgsmål kræver først og fremmest, at vi lægger os fast på, hvad vi skal forstå ved ’forskellige kombinationer’. Jeg vil i det følgende ikke betragte to kombinationer der giver samme resultat som forskellige, hvis de led, der indgår, er ens. Fx er kombinationerne $a\cdot b + c + d$ og $d + c + b\cdot a$ ens i modsætning til $a - a\cdot a/a$ og $a\cdot a/a - a$, der begge giver 0, men indeholder forskellige led.

Med denne definition er svaret herefter ja! Fx er det muligt med tallene 2,3,4 og 5 at skrive tallet 5 på (mindst 6) forskellige måder:

$$(2+3)\cdot(5-4)=5$$
$$4+2\cdot 3-5=5$$
$$4+(5-3)/2=5$$
$$4+(5-2)/3=5$$
$$3+2(5-4)=5$$
$$5(2+3-4)=5$$

Endvidere kan vi i dette spørgsmål bruge overvejelser fra spørgsmål 2, hvor tilfældet med fire ens kort blev undersøgt (a, a, a, a). Har vi fire ens kort, vil 0 altid kunne skrives på mindst fem forskellige måder:

$$a+a-a-a=0$$
$$a\cdot a-a\cdot a=0$$
$$a/a-a/a=0$$
$$a-a\cdot a/a=0$$
$$a\cdot a/a-a=0$$

6.1.4.1.4 Spørgsmål 4

Hvilke kombinationer af kort kan bruges, hvis man skal have N=0? N=1? N=2? Er der nogle N, der er nemmere at få (dvs. med flere muligheder) end andre?

Igen kan overvejelser og resultater fra spørgsmål 2 benyttes og give delresultater. Har vi fire ens kort kan vi altid skrive 0, 1 og 2. For fx $a=1$ viser det sig, at både tallene 0 og 2 i hvert fald kan skrives på ti forskellige måder og tallet 1 på otte forskellige måder, hvilket kan tjekkes vha. udtryk i afsnit 6.1.4.1.2. For $a \geq 2$ er 0 nemmest at få med fire ens kort, hvilket måske gælder mere generelt uanset de fire korts værdier?

6.1.4.1.5 Spørgsmål 5

Samme spørgsmål, men hvor man kun kan bruge en af de fire operationer +, -, x, / én og kun én gang.

Hver af de fire første spørgsmål må nu genovervejes. Fx vil det største tal ikke være $a\cdot b\cdot c\cdot d$, hvis alle kortværdier er forskellig fra 1, da multiplikation kun må benyttes én gang.

6.2 Analyse af udvalgte situationer

De fire udvalgte situationer, hvor eleverne arbejder med Math en Jeans opgaven *Matematisk solitaire,* vil blive præsenteret og analyseret i dette afsnit. Situationerne vil som det første blive placeret i en kontekst, hvor det gerne skulle blive klart, hvad eleverne arbejder med i de pågældende atelierer samt hvad der foregår før og efter de konkrete situationer. Dernæst vil jeg kommentere det objektive miljø og elevernes viden og herefter analysere hver af de fire situationer med udgangspunkt i transskriptionerne. Endelig vil jeg i diskussionsafsnittet understrege de vigtigste pointer fra analysen og på baggrund af disse diskutere, hvad der karakteriserer elevarbejde med Math en Jeans opgaver.

6.2.1 Kontekst

Vi skal i situation 1 se på en konkret situation fra gruppe 4's arbejde i Math en Jeans atelieret d. 28. november 2012. Tre af gruppens medlemmer (de to sidste elever var ikke til stede denne dag) arbejder her med spørgsmål 2 i opgaven *Matematisk solitaire*[15]. For at placere situationen i en kontekst har jeg nedenfor i tabel 6.8 skitseret timens indhold med en kort beskrivelse af de faser, som atelieret kan opdeles i. En fase skal her forstås som en del af timen defineret ved den aktivitet, der finder sted. Den kan ofte opdeles i mindre episoder med små interaktioner mellem eleverne indbyrdes eller mellem elever og lærer. Situation 1 består af flere episoder inden for samme fase og er markeret med rød. Eleverne har fået tildelt anonyme navne.

Tid (min:sek)	**Timens indhold**
00:00	Gruppen går i gang med at undersøge, hvilke resultater de kan få med tallene 1,3, 7 og 9. Martin melder ud, at han vil lave stykker med multiplikation.
03:37 10:01 13:17	Oliver og Umar påpeger, at Martin har misforstået opgaven - han har set på kombinationer af to tal: fx $9 \cdot 7$ og $3 \cdot 9$. Gruppen diskuterer antallet af resultater. Oliver og Umar prøver igen at forklare Martin, at man skal bruge alle fire tal og desuden også kan benytte $+, -$ og $/$. **(SITUATION 1)**
16:52 18:55	Oliver går op og spørger læreren, om de må få negative resultater og kommer tilbage til gruppen. Martin og Oliver snakker om subtraktion: $7-1 = 6$ og $1 - 7 = -6$.
27:52	Oliver fortæller Martin, hvordan man udregner $(7 + 3) \cdot (9 + 1)$, og gruppen diskuterer resultatet til $9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$.
54:19	Timen slutter.

Tabel 6.8 - Oversigt over forløb i Math en Jeans atelier, 28.11.2012, gruppe 4

[15] **2:** Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få? (Det afhænger (muligvis) af de 4 givne kort).

I situation 2, 3 og 4 skal vi se på tre forskellige situationer fra gruppe 4's arbejde i Math en Jeans atelieret d. 9. januar 2013. Gruppen arbejder i løbet af timen både med spørgsmål 2, 3 og 4[16]. Også denne dag mangler to af gruppens medlemmer. Det er dog ikke de samme som i situation 1. Jeg har på samme måde som for den første situation lavet en oversigt, der placerer situation 2, 3 og 4 i en kontekst (igen markeret med rød og ligeledes anonyme navne):

Tid (min:sek)	**Timens indhold**
06:04	Gruppen er nået til spørgsmål 2 i *Matematisk solitaire* og snakker om, hvad opgaven går ud på.
07:10	Lucas har valgt tallene 1,3,7 og 9 og opskriver stykker med multiplikation. Amir og Umar har valgt tallene 3,5,7 og 9 og undersøger, hvilke resultater de her kan få. De udregner sammen $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$. **(SITUATION 2)**
18:24	Amir og Umar går videre til spørgsmål 3 og prøver at finde en ny kombination, der ligesom $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ også giver 62.
23:20 25:19 30:42 33:30	Lucas fortæller Amir og Umar, at han er færdig med gange og vil gå i gang med minus. Læreren kommer og ser, hvad gruppen er i gang med. Han spørger ind til Lucas' udregninger. (Amir og Umar er fortsat i gang med at prøve at få 62) Lucas fortæller Amir og Umar, at han har fundet ud af, hvor mange forskellige resultater, man kan få. Gruppen bliver enige om, at de nu er færdige med spørgsmål 2. **(SITUATION 3)**
41:13	Gruppen går i gang med spørgsmål 4. Læreren kommer forbi og de diskuterer, hvordan man kan få 0. **(SITUATION 4)**
54:19	Timen slutter

Tabel 6.9 - Oversigt over forløb i Math en Jeans atelier, 09.01.2013, gruppe 4

I situation 1 og 2 arbejder eleverne selvstændigt uden på noget tidspunkt at konsultere læreren, der omvendt heller ikke kommer forbi og ser, hvad de laver. I situation 3 og 4 vil vi derimod se interaktion mellem lærer og elever.

Jeg har vedlagt transskriptioner af hele timen for hvert af de to atelierer i bilag 8. En vejledning til læsning af transskriptionerne findes i bilag 7. Eleverne behersker både det franske og det danske sprog, og man vil i transskriptionerne opdage, at de benytter sig af begge dele og ofte veksler mellem dem fransk og dansk. I analysen af de fire

[16] **3:** Findes der 4 kort, som tillader 3 forskellige kombinationer, der alle giver det samme N? 4 forskellige kombinationer? **4:** Hvilke kombinationer af kort kan bruges, hvis man skal have N=0? N=1? N=2? Er der nogle N, der er nemmere at få (dvs. med flere muligheder) end andre?

situationer, hvor uddrag fra transskriptionerne er udgangspunktet, har jeg kursiveret de steder, der er oversat fra fransk til dansk.

6.2.2 Det objektive miljø og elevernes viden

Det objektive miljø i situationerne, som er uafhængigt af lærer og elever, består af et matematisk miljø sammen med et materielt. Førstnævnte udgøres i alle fire situationer af opgaven *Matematisk solitaire*, analyseret i afsnit 6.1.4.1, som er udgangspunktet for elevernes arbejde. Det materielle miljø består af papir, blyant samt lommeregnere (evt. på elevernes mobiltelefoner), da det er disse redskaber, som eleverne gør brug af i arbejdet med opgaven.

Matematisk solitaire, hvis matematiske indholdsområde både er talteori og kombinatorik, kan udforskes af elever allerede i folkeskolen, da de matematiske forudsætninger for at arbejde med opgaven udelukkende er et kendskab til de fire regneoperationer $+$, $-$, $\cdot$ og $/$, deres hierarki samt brugen af parenteser. For elever i 6.- og 7.klasse vil denne viden ikke være fuldstændig etableret, hvad man kunne kalde *gammel viden*, men snarere kunne betegnes som *viden i udvikling*, dvs. viden som ikke er helt ny for eleverne, men er på vej til at blive etableret. Elever på dette klassetrin ved højst sandsynlig, hvordan man adderer, subtraherer, multiplicerer og dividerer tal med hinanden, men det aritmetiske hierarki og parentesbrug kan man ikke forvente, at de er fuldstændig fortrolige med. Min egen erfaring siger mig i hvert fald, at selv elever i 1.g kan have svært ved at udregne et udtryk som $4/2 - 5 \cdot 3 + 2(6 + 3)$ og ikke altid er klar over, hvilken rækkefølge operationerne skal udføres i.

6.2.3 Situation 1

Jeg vil i det følgende præsentere og analysere situation 1 og afrunde med generelle overvejelser om situationen, hvor mine pointer bliver understreget. Herefter følger yderligere tre afsnit (6.2.4, 6.2.5 samt 6.2.6), hvor det samme vil blive gjort for situation 2, 3 og 4.

I situation 1 er gruppe 4 i gang med spørgsmål 2 i *Matematisk solitaire*: 'Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få? (Det afhænger (muligvis) af de 4 givne kort)'. De har valgt tallene 1,3,7 og 9. Martin har på sit papir opskrevet gangestykker, hvori der indgår to tal (fx 9·7, 9·1 og 3·9). Umar påpeger, at det ikke er sådan, man skal gøre. Gruppen snakker om, hvad spørgsmålet egentlig går ud på:

1	Umar:	Du [Martin] skal lave flere. Det er ikke kun to numre.
2	Oliver:	Men jeg har bare ikke forstået det, må jeg lige se på den her, *spørgsmål*? [Oliver kigger på opgaveformuleringen]
3	Martin:	Nej, men jeg har ikke forstået, hvordan jeg så skal gøre?

4	Oliver:	Du skal bare finde alle resultaterne, du kan. Du har fire kort. Så skal du finde alle resultaterne, man kan med dem.
5	Umar:	Du ved godt, du skal bruge fire numre og så bare dividere, gange, plusse.
6	Martin:	Det har jeg også gjort, men jeg /
7	Umar:	Nej du har kun brugt én og to, én og to, det er jo bare meget nemt, det er de der /
8	Martin:	Ja, nårh, okay.

Diskussionen fortsætter:

9	Martin:	To sekunder, man kan kun finde, nå nej, så man kan /
10	Oliver:	Nej man kan finde mange. Du kan også lave nogle med gange og plus og /
11	Martin:	Nej, men det, jamen, vi gør jo én ting hver.
12	Oliver:	Nej nej fordi ellers får vi aldrig fundet dem, hvor der er minus, gange og plus samtidig.
13	Martin:	Og dividere.
14	Oliver:	Ja og dividere. Nu gør vi det, (??uforst.) bagefter.
15	Martin:	Orh pis. (pause)
16	Oliver:	Okay, *så, 1 plus 7, det giver 8, 8 minus 9, det giver minus 1, minus 1 plus /*
17	Martin:	Behøver vi at finde resultaterne på dem?
18	Oliver:	Ja, *man skal finde alle de resultater, man kan få.*
19	Martin:	Damn.
20	Umar:	*Alle resultaterne, ja.*
21	Oliver:	*Som man kan få med de fire kort.*

Eleverne er i handlingssituationen i gang med at tilpasse sig det objektive miljø. Martin benytter kun to tal i sine udregninger og ikke fire, som miljøet lægger op til. Vi ser her endvidere, hvordan han har konstrueret et subjektivt miljø, som ikke stemmer over ens med de to andre elevers, idet Oliver og Umar forsøger sig med netop fire tal. Martin har desuden valgt kun at bruge multiplikation og er af den overbevisning, at de ”gør én ting hver” (linje 11), hvilket vidner om et ønske om en systematisk fremgangsmåde. Gruppen må gennem en længere forhandling omkring, hvordan spørgsmålet skal forstås og sammen prøve at skabe et fælles subjektivt miljø at arbejde i. Denne forhandling fortsætter efter et par minutter, hvor de begynder at diskutere antal resultater, man kan få med de fire tal:

22	Martin:	Jeg bliver rundtosset af det her.
23	Oliver:	Hvorfor?
24	Martin:	Fordi der er så mange tal og man kan ikke…
25	Umar:	Jamen altså, der er fire tal. [de griner]
26	Amir:	Fire tal ja.
27	Umar:	Gange 1.
28	Oliver:	12, det giver, øh, 13, 20.
29	Martin:	Helt ærlig, skal vi virkelig også gøre det med... (pause)
30	Martin:	Men det her, det er jo næsten umuligt.

31 Oliver: Nej.
32 Martin: Med fire tal jo.
33 Oliver: Hvorfor? Det skal man med fire tal.
34 Umar: Så det er ikke umuligt, du skal bare /
35 Oliver: Regne det ud.
36 Martin: Ja ja, men nu kom jeg, hvis man nu lægger, laver, ligemeget, man kan jo så lave /
37 Oliver: 3, 3 gange 9.
38 Umar: Præcis, du kan bare lave 3 gange 9 plus 7 plus 1.
39 Oliver: Ja.
40 Martin: Der er over 100 resultater. Meget over.
41 Umar: Ja så skal du bare tage en af de der 100. Eller, altså du kan bare skrive /
42 Oliver: Jeg tror ikke, at der er 100 resultater. Ellers ville de ikke spurgt, spørge det, fordi vi skal skrive alle de resultater, vi fandt.

Martin kan godt se, at der findes mange kombinationer, hvis de skal bruge alle fire tal og bliver ifølge ham selv ”helt rundtosset” (linje 22). Han kan ikke overskue, hvordan man på systematisk vis kan opskrive alle de mulige kombinationer, hvorfor han over for de to andre annoncerer, at det ”jo næsten er umuligt” (linje 30), da ”der er over 100 resultater, meget over” (linje 40). Vi ser her, hvordan Martin på baggrund af erfaringer i handlingsfasen rent faktisk overvejer antallet af resultater, men hans hypotese ”der er over 100 resultater” bliver ikke rigtig begrundet. Det at eleverne forsøger med forskellige tal og regneoperationer giver endvidere anledning til overvejelser og diskussion omkring, hvordan opgaven skal forstås. Hvis opgaven går ud på at finde forskellige resultater med alle fire tal, er der enormt mange kombinationsmuligheder, hvilket Martin har indset ved at eksperimentere og prøve sig frem, og netop af denne grund bliver han frustreret og har svært ved at forholde sig til, at det kan være dét, som opgaven går ud på. At Martin netop nævner tallet 100, er blot et udtryk for, at han har en fornemmelse af, at der er mange resultater - han kunne i princippet have sagt 500 eller 1000.

Martins frustration kan skyldes, at eleverne i den almindelige matematikundervisning sandsynligvis ofte arbejder med mere lukkede opgaver med ét facit og én løsningsmetode, hvilket opgaven *Matematisk solitaire* og Math en Jeans opgaverne generelt bryder med. Her stilles eleverne over for en åben opgave, som er meget vanskelig at give en fuldstændig løsning til, også selvom man har valgt fire konkrete tal jf. overvejelser i afsnit 6.1.4.1. Umar og Oliver deler ikke samme frustration. Umar ser det ikke som et problem, at der er mange resultater og holder fast i, at alle fire tal skal indgå i hvert regnestykke, hvilket hans kommentar ”ja så skal du bare tage en af de der 100” (linje 41) vidner om. Oliver mener ikke, at der er over 100 resultater, hvilket han begrunder med, at de ikke ville blive sat til at løse sådan en opgave (linje 42). Olivers argument er ikke rationelt set fra et matematisk synspunkt, men derimod en effekt af en didaktisk kontrakt fra den sædvanlige undervisning, som han håber på også gælder her. Han har en forventning om, at læreren ikke sætter dem til at løse en (med Martins ordvalg) ”umulig” opgave. I Olivers optik er der grænser for, hvor indviklet en opgave kan være.

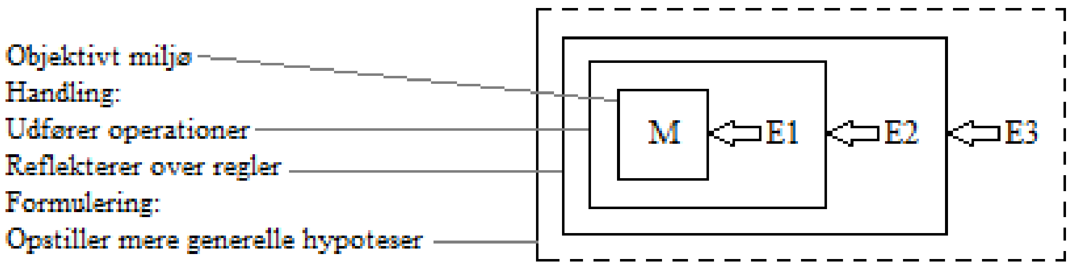
Martin har altså svært ved tilpasse sig det objektive miljø og tilslutte sig det subjektive miljø, som Oliver og Umar har etableret. Senere forsøger han dog at finde forskellige resultater med de fire tal som Oliver og Umar, men pointerer lidt efter endnu en gang, at der her findes mange forskellige:

43 Martin: 9 plus 3 minus 1 gange med 7, giver… Her kan man finde rigtig mange.
44 Oliver: Nej.
45 Martin: Jo.
46 Oliver: Ikke specielt mange.
47 Martin: Jo.
48 Oliver: Nej fordi prøv at se, der er 1, 2, 3. 3.
49 Martin: 4.
50 Oliver: Hvor? Nej jeg taler om det der [Oliver peger på operationerne]. 1, 2, 3. Der er tre af dem.
51 Martin: Nårh.
52 Oliver: Og hvor mange, du kan ikke bruge særlig mange gange tre, når du blander dem eller gør hele tiden det samme.
53 Martin: Nej okay.

Vi ser i linje 53, hvordan Martin tilsyneladende ender med at godtage Olivers lidt uklare argument, der går på, at de tre regneoperationer $+, -$ og $\cdot$ ikke kan kombineres på mange måder: ”Du kan ikke bruge særlig mange gange tre, når du blander dem eller gør hele tiden det samme” (linje 52). Martins subjektive miljø har altså udviklet og ændret sig, og han går med til at arbejde med alle fire tal i hvert regnestykke som Oliver og Umar. Gruppen ender således efter lang forhandling med overvejelser og diskussion af antallet af resultater at blive enige om et fælles udgangspunkt: at finde så mange forskellige tal som muligt med <u>alle</u> fire tal 1,3,7 og 9 ved at bruge addition, subtraktion, multiplikation og division.

6.2.3.1 Generelle overvejelser om situation 1

Situation 1 er et eksempel på en handlingsfase, hvor eleverne udforsker det objektive miljø og tilpasser sig dette. Der er flere niveauer i elevernes arbejde med opgaven i situation 1, som jeg har forsøgt at illustrere i figur 6.4 nedenfor. Strukturen gør sig ikke kun gældende i netop denne situation, men karakteriserer de forskellige ’lag’ i meget af det elevarbejde, jeg har observeret i ateliererne.



Figur 6.4 - Elevarbejdets struktur (inspiration: Brousseau, 1997, p.248)

Først og fremmest har vi det objektive miljø **M** bestående af et matematisk og et materielt miljø (se afsnit 6.2.2). Eleverne (**E1)** udforsker dette miljø ved at tage forskellige tal og udføre regneoperationer på disse. Netop dette spil giver anledning til at reflektere over spillets regler, som altså kan ses som et andet spil, hvor eleverne (**E2**) - også i handlingsfasen - sammen forsøger at få afklaret, hvordan spørgsmålet skal forstås, herunder hvad der er tilladt ('hvad må vi?'). Det er i handlingssituationen, at det objektive miljø tilpasses og dannelsen af et subjektivt miljø finder sted, netop som vi ser det i situation 1, hvor Martin, Oliver og Umar efter at have forsøgt med forskellige tal og regneoperationer begynder at diskutere antallet af resultater og senere får konstrueret et fælles subjektivt miljø. Vi kunne tilføje et ekstra lag, hvor eleverne (**E3**) på baggrund af erfaringer i handlingsfasen forsøger at systematisere deres resultater og opstiller mere generelle hypoteser, men formulering og validering indtager en beskeden rolle i elevernes arbejde med opgaven, hvorfor linjerne på figur 6.4 her er stiplede. Desuden arbejder eleverne hovedsageligt selvstændigt uden at interagere med læreren, og jeg har derfor ikke har medtaget et ekstra lag, som kunne kaldes 'samspil med lærer'.

Det har vist sig, at handlingsfasen står meget centralt i elevernes arbejde i samtlige Math en Jeans atelierer, som jeg har observeret. Eleverne bruger her utrolig lang tid på at afgrænse spørgsmålene, diskutere, hvad de går ud på, reformulere betingelser osv. (hvad jeg i figur 6.4 kalder "reflekterer over regler"), hvilket situation 1 netop er et eksempel på. Det skyldes til dels det faktum, at opgaven er åben jf. analysen i afsnit 6.1.4.1.1, men kan ligeledes ses som kompensation for en 'normal' devolution. Det subjektive miljø vil normalt skabes omkring det objektive miljø i fællesskab i devolutionsfasen i starten af enhver undervisningslektion, hvor læreren introducerer en opgave og hjælper med at afklare eventuelle spørgsmål fra eleverne. Denne fase optræder som beskrevet i afsnit 3.2.2 <u>ikke</u> i Math en Jeans atelierne, når man ser bort fra de første gange, hvor lærer og professor præsenterer opgaverne.

6.2.4 Situation 2

Situation 2 er et andet eksempel på en handlingsfase, hvor miljøet udforskes, men her reflekterer eleverne ikke over reglerne som i situation 1 (**E2** i figur 6.4). De er derimod i gang med at kombinere tallene 3,5,7 og 9 og udføre forskellige regneoperationer på disse tal (**E1** i figur 6.4).

Vi skal se på en episode, hvor de to elever Amir og Umar har opskrevet stykket $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$, som de skal udregne. Der er her mulighed for at få forskellige resultater alt efter hvor der sættes parenteser:

- 1. udregning: $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 62$
- 2. udregning: $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7 = 224$
- 3. udregning: $9 \cdot (3 + 5 \cdot 7) = 342$

- 4. udregning: $9 \cdot (3 + 5) \cdot 7 = 504$

Eleverne udregner først stykket i hovedet og får her 224. Udregningen foregår i tre trin i) $9 \cdot 3 = 27$ ii) $27 + 5 = 32$ og iii) $32 \cdot 7 = 224$ (2. udregning). De vil herefter tjekke svaret, og Umar taster følgende ind på sin telefon, der har indbygget lommeregner (1. udregning):

Figur 6.5 - Udregning af $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ på telefon

1	Umar:	Øh 62. Det tror jeg virkelig ikke, det tror jeg altså ikke.
2	Amir:	Er du helt sikker? 9 gange 3 plus 5 gange 7 lig 62?
3	Umar:	9 gange 3 /
4	Amir:	Nårh, måske skal man kalkulere ligesom 27 plus øh /
5	Umar:	Nårh, vi har glemt de der *parenteser*.
		[Amir taster $(9 \cdot 3) + (5 \cdot 7)$ ind på telefonen, som blot svarer til 1. udregning]
6	Amir:	Det siger stadig 62.
7	Umar:	Vi fik 224, det siger vi. Det er 62.
8	Amir:	Nej så skal vi sige 62.
9	Lucas:	*Mystery*.
10	Umar:	Nej vent lige, vi prøver igen. Okay 9 gange 3, det giver 27.
11	Amir:	Ja.
12	Umar:	Plus 5.
13	Amir:	Nej måske er det plus øh, 35 plus 27.
14	Umar:	Nej, men det giver jo… hvorfor siger du 35? Det er det, jeg ikke forstår.
15	Amir:	Nej 5 gange 7.
16	Umar:	Nej vi kan lave det med vores hoved, vi har ikke brug for telefoner.

Umar er i situationen meget uforstående over for, at lommeregneren giver et andet svar end det, han når frem til ved hjælp af hovedregning. Han kommer i tanke om, at det kan skyldes, at de ikke har sat parenteser (linje 5), men de får sat parenteserne to steder, hvor de ingen betydning har: $(9 \cdot 3) + (5 \cdot 7)$. Amir foreslår, at de måske skal sige 35 plus 27 (linje 13), men han virker usikker, og Umar står fast på resultatet 224. Han stoler på egne evner (hovedregning) og mener ikke, at ”de har brug for telefoner” til at finde resultatet (linje 16). Han forsøger herefter igen uden lommeregner, men der er stadig uoverensstemmelse mellem det resultat, han her når frem til og det, som telefonen giver dem:

17	Umar:	9 gange 3, 27, plus 5, det giver 32. 7 gange 30, 7 gange 30. 7 gange 3, det giver 21. 210, øh, det giver jo 224!
18	Amir:	Nej det er 62, jeg har lige…
19	Umar:	62. Seriøst. 9 gange 3 /
20	Amir:	9 gange 3, 27. Og så /
21	Umar:	Nej det der, det er plus.

22	Amir:	Ja plus 5 gange 7 og 5 gange 7, det er 35.
23	Umar:	Nej plus 5, plus 5. Se se. 7, jeg tror at det, altså, 9 gange 3 plus 5, plus 5, gange, gange 7. [Amir taster ind på telefonen imens]
24	Amir:	Gange 7, er lig, 62.
25	Umar:	Nej, men det, det /
26	Amir:	Ja det er 62. Lommeregneren har lige /
27	Umar:	Den dér, der skal være *parentes* før. Er der *parentes* der?
28	Amir:	Nej der er ingenting.
29	Umar:	Kan vi ikke bare tage en *lommeregner*? (pause)
30	Lucas:	Jeg får brug for meget papir og tusch i dag.
31	Amir:	Det er 62, det er stadig 62.
32	Umar:	Vent lige, vent lige, vent lige.
33	Amir:	Det er hele tiden 62.

Amir prøver endnu en gang i linje 22 at fortælle Umar, at de skal sige 27 plus 35 (l. udregning), men Umar holder i linje 23 stadig fast i, at de skal sige 9 gange 3, herefter lægge 5 til og til sidst gange med 7, altså: $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7$ (2. udregning). Amir formår heller ikke her at få overbevist Umar om, at $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ er lig 62, når der ikke sættes parenteser, men henviser blot til, at lommeregneren lige har givet dette svar (linje 26) og giver ikke Umar en forklaring såsom ”man skal altid udregne gange før plus”. Det aritmetiske hierarki og brugen af parenteser er uden tvivl viden i udvikling hos de to elever, som de ikke er fortrolige med.

Umar kommer lidt efter på en ny idé og får sammen med Amir tastet $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7$ ind på telefonen og trykket ”=” (2. udregning):

34	Umar:	224! Det var det, jeg sagde.
35	Amir:	Men du gjorde ikke sådan der. [Amir peger på $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ på deres papir]
36	Umar:	Nej, men fordi, vi skal bare have to *parenteser* her.
37	Amir:	Ja ja.
38	Umar:	Ja ja, den er god med dig. Jeg vidste det var ikke 62.

Det lykkes således til sidst Umar at få lommeregneren til at give det svar, han ønsker, og de ender med at konkludere, at svaret er 224. Det bliver dog aldrig helt klart for dem, at $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ giver 62, mens $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7$ giver 224, hvilket Umars sidste kommentar vidner om: ”Jeg vidste det var ikke 62” (linje 38). Amir henvender sig lidt efter til mig og spørger, om det de har lavet er rigtigt, hvilket ligeledes viser, at de er usikre på, hvordan stykker som $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ egentlig skal regnes ud. De ved, at parenteser kan gøre en forskel, men de har ikke styr på brugen, ligesom de heller ikke er fortrolige med det aritmetiske hierarki.

6.2.4.1 Generelle overvejelser om situation 2

Eleverne bruger i situation 2 utrolig meget tid på at finde ud af, hvad stykket $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ giver. Det er ikke en nem opgave for dem. Jeg har flere gange observeret tilsvarende situationer, også i den anden gruppe, der har arbejdet med opgaven *Matematisk solitaire*, hvor eleverne eksempelvis har diskuteret om $9 - 5 + 5 + 5 \cdot 5$ giver 34 eller 70, og om $5 - 5 + 5 - 5 \cdot 9$ giver minus 40 eller 0[17]. Mønsteret er her det samme: Når eleverne udregner stykkerne i hovedet starter de fra venstre og udfører operationerne i den rækkefølge, de står skrevet. De tager altså ikke højde for det aritmetiske hierarki, og deres resultat ved hovedregning giver derfor ofte ikke samme resultat som deres lommeregner, hvilket giver anledning til diskussion og usikkerhed.

Eleverne har desuden svært ved at trække tal fra hinanden, hvis resultatet bliver negativt, hvilket også er med til at give problemer med udregningerne i handlingsfasen. Blandt andet erkender en elev i et af ateliererne blankt følgende over for gruppen: ”Jeg er virkelig dårlig til det der med minus. Jeg kan aldrig huske, hvad det er for en vej, man skal sætte dem?”. Han fortsætter lidt efter: ”Skal man sætte det største tal først eller det mindste tal først? Jeg har lige glemt det.” En elev forklarer herefter, at $7 - 1$ giver 6, mens $1 - 7$ giver minus 6.

Af andre eksempler kan nævnes to elever, der skal udregne $(9 - 8) - 2 + (4 + 5) + 1$:

1 Céline: Giver det 10, det der?
[Céline peger på Louises stykke, hvor 10 står skrevet som resultatet]
2 Louise: Ja. 9 minus 8, det giver 1, minus 2, det giver 0.
3 Céline: Nej. 1 minus 2, det giver minus 3.
4 Louise: Ja, men det <u>er</u> 0 /
5 Céline: 1 minus 2.
6 Louise: For vi tæller ikke de der minusting med. Minustal.
7 Céline: Nå okay.
8 Louise: Okay, så det giver 0, og så 4 plus 5, det giver 9, plus 1, det giver 10. Og her gav det 0, så 10 plus 0.
9 Céline: Nå ja. 0 plus 4 plus 5 plus 1.

Den ene elev påstår altså, at 1 minus 2 giver minus 3. Den anden mener, at det giver 0 og giver her en lidt uklar begrundelse: ”For vi tæller ikke de der minusting med. Minustal” (linje 6). For Louise er alt under 0 blot det samme som 0. Der er ikke noget at sige til, at eleverne kan have svært ved at tænke på de negative tal som tal. Historisk set tog det flere hundrede år, før de negative tal blev bredt accepteret blandt matematikere.

Situation 2 er altså bare én af mange situationer i elevarbejdet med opgaven *Matematisk solitaire*, der viser, at den matematiske viden, der er i spil ikke er veletableret hos eleverne, men snarere kan betegnes som viden i udvikling. Eleverne bruger af denne

---

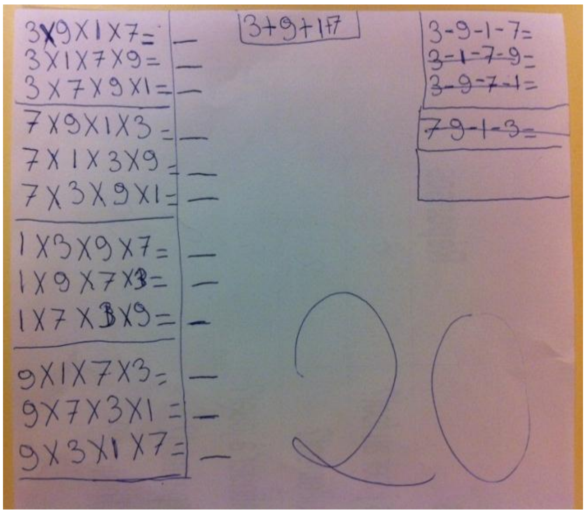
[17] $9 - 5 + 5 + 5 \cdot 5 = 34$ hvorimod $(9 - 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 70$.
$5 - 5 + 5 - 5 \cdot 9 = -40$ hvorimod $(5 - 5 + 5 - 5) \cdot 9 = 0$.

grund lang tid på udregninger - tid som kunne have været brugt på fx at overveje spørgsmålene mere generelt og opstille mere generelle hypoteser. Til gengæld opnår de større fortrolighed med det aritmetiske hierarki og parentesbrug, hvilket situation 3 i næste afsnit er et godt eksempel på.

6.2.5 Situation 3

Situation 3 illustrerer som situation 2, at den matematiske viden, som er i spil, ikke viden i udvikling hos eleverne og giver desuden et indblik i lærerens rolle i ateliererne.

Lucas har her valgt tallene 1,3,7 og 9 og er i gang med spørgsmål 2 i *Matematisk solitaire*: ”Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få? (Det afhænger (muligvis) af de 4 givne kort)”. Efter at have opskrevet alle de stykker med multiplikation, han har kunnet komme på (se figur 6.6), fortæller han Amir og Umar, at han nu vil gå i gang med minus. Minusstykkerne på kladdepapiret i figur 6.6 er dem, han senere får opskrevet.



Figur 6.6 - Kladde til spørgsmål 2 (hvor mange forskellige tal kan man få?)

1 Lucas: Jeg er færdig med gange nu.
2 Umar: Hvad mener du?
3 Amir: Ja, du har ikke (?uforst.)
4 Lucas: Nej, men altså, man skal se hvor mange *svar* man kan få jo.
5 Umar: Nårh, så bare begynd at finde /
6 Lucas: Jeg behøver ikke at lave svarene, så det er bare 1, 2, 3. Men det gider jeg ikke tælle nu.
(pause)
7 Lucas: Og nu tager jeg minus.
8 Umar: Nej vi har ikke prøvet med minus.
9 Lucas: Nej, altså, man skal gøre det med alle tingene, altså prøv at se, det var spørgsmål…
10 Umar: Ja ja, ja ja, jeg ved det godt.

11 Lucas: Man skal også gøre det med forskellige, det her, det bliver rigtig hårdt, kan jeg mærke.

Lucas mener ikke, at det er nødvendigt at finde resultaterne til gangestykkerne, da opgaven, som han påpeger, går ud på at finde ud af hvor <u>mange</u> resultater, man kan få, og ikke <u>hvilke</u> (linje 4 og 6). Af denne grund opdager han ikke, at resultatet er det samme hver gang, da multiplikation er kommutativt. Vi ser desuden her et ønske om systematik fra Lucas' side på samme måde som Martin i situation 1, da han starter med multiplikation og herefter vil fortsætte med subtraktion.

Læreren kommer lidt efter forbi og ser Lucas' kladde:

12 Lærer: *Med gange? Du har valgt fire tal, er det det?*
13 Lucas: *Ja.*
14 Lærer: *Hvor mange får man med gange?*
15 Lucas: *Øh.*
16 Lærer: *Hvor mange? Forskellige resultater.*
17 Lucas: *Jeg finder resultaterne til sidst.*
18 Lærer: *Er du sikker? Fordi når du skriver 3, når du tager 3 gange 9, 9 gange 3, det er det samme, ik', resultaterne, ik'? 3 gange 9 eller 9 gange 3, det er det samme, det er det samme. Så, faktisk, hvis du tænker over det…*
(pause)
19 Lærer: *Alle de resultater her, hvad er forskellen?*
20 Lucas: *Øh.*
21 Lærer: *Fordi hver gang står der 1 gange 3 gange 7 gange 9, 1 gange 3 gange 7 gange 9* [han peger på det første stykke og herefter det andet], *1 gange… Så, alt det her, efter min mening, så vil det give det samme, ik'?*
22 Lucas: *Jo.*
23 Lærer: *Du kan tjekke efter på lommeregneren, men efter min mening, øh /*
24 Lucas: *Ja.*
25 Lærer: *Så ser du, det er faktisk det samme.*
26 Lucas: *Nå ja.*
27 Lærer: *Og bagefter, det vil være sådan, efter min mening, at hvis man sætter et plus i stedet for gange et af stederne, så vil det ændre sig, med plus.*
28 Lucas: *Og det her, giver det også altid det samme?*
[Lucas peger på sine stykker med minus]
29 Lærer: *Ah, med minus nej, fordi… med minus, nej. Ah, hvis du sætter tallene sådan, ja. Hvis du sætter dem sådan, ja. Det giver altid det samme resultat, hvis du sætter dem i samme rækkefølge* [han peger på de tre første stykker, hvor 3 står først]. *Men hvis du satte, hvis det begynder med et 1-tal, så tager du 1 minus 3, for eksempel, 3 minus 1, her, så er det ikke længere det samme, vel?*
30 Lucas: *Ah, jeg kan sætte parenteser ik'?*
31 Lærer: *Hvis man tilføjer parenteser, så er det endnu mere kompliceret. Jeg ville starte uden parenteser.*
32 Lucas: *Ja.*
33 Lærer: *Jeg tænker, at det også er kompliceret med minus, fordi, sådan nogle stykker, det er sværere at udregne, med minus. Jeg ville starte med plus og gange. Bagefter ville jeg se, om jeg kan udfylde med… Fordi med division, der er det også kompliceret.*
34 Lucas: *Okay.*

35 Lærer: *Med plus og multiplikation, det vil ikke være så dårligt.*

Læreren vælger her at gribe ind, da han opdager, at Lucas ikke er klar over, at alle gangestykkerne giver samme resultat. Han besidder den matematiske viden, der er i spil, men forsøger på ingen måde at slå tingene fast. I stedet for øjeblikkeligt at understrege over for Lucas, at alle udregningerne giver samme facit, indleder han med et ”er du sikker?” (linje 18), da Lucas fortæller, at han vil finde resultaterne til sidst. Læreren ønsker ikke at påtage sig den typiske lærerrolle som ”ham der ved bedst”, men forsøger i stedet at være på samme niveau som eleverne, hvilket vi kan fornemme ud fra hans retorik. Blandt andet benytter han flere gange vendingen ”efter min mening” (linje 21, 23 og 27) frem for blot at konstatere at ”det er sådan her, det er”. Vi ser desuden, hvordan læreren ikke ønsker at instruere eleverne i, hvad de skal gøre, men i stedet kommer med forslag til, hvordan de kan gå frem. Efter læreren har forsøgt at få Lucas til at indse, at gangestykkerne giver samme resultat, spørger Lucas i linje 28, om det samme gælder minusstykkerne (se figur 6.6) og nævner lidt efter, at man også kan sætte parenteser. Læreren foreslår her, at Lucas venter med at sætte parenteser og holder sig til addition og multiplikation i første omgang, da parenteser, subtraktion og division er mere kompliceret. Retorikken er igen den samme: ”Jeg ville starte uden parenteser” (linje 31) og ”jeg ville starte med plus og gange” (linje 33). Godt nok har læreren både mere matematikfaglig viden (fx viden om det aritmetiske hierarki) og ”tværgående” viden (se afsnit 3.2.1) end eleverne, hvilket begge parter er velvidende om, men vi ser her, hvordan læreren ikke vil styre elevernes arbejde for meget. Han pointerer blot, hvordan han selv ville gribe opgaven an og ligger som eleverne heller ikke inde med en løsning.

Da læreren er gået, taster Lucas gangestykkerne ind på en lommeregner, og det virker som om, at det først her for alvor går op for ham, at de giver samme resultat:

36 Lucas: Det er faktisk rigtig nemt det her.
37 Amir: Ja så gør det.
38 Lucas: Nej, men altså, det giver alt sammen 189.
39 Amir: 189?
40 Lucas: Det gør det fandeme, jeg har lige regnet det ud.
(pause)
41 Lucas: Alt den arbejde, den er bare så spildt.
42 Amir: Kom nu, arbejd.
43 Lucas: Arbejd selv.
44 Amir: Det gør jeg også.
45 Umar: Ja arbejd igen.
46 Lucas: Så skal man kun lave én i alt. Det er bare godt for mig.

Lucas føler, at alt arbejdet med at opskrive alle gangestykkerne er spildt, da han finder ud af, at resultatet bliver det samme (linje 41). Til gengæld har han rent faktisk lært noget ved selv at eksperimentere og prøve sig frem. Det er måske mindre tilfredsstillende, at det er med lommeregneren, at han indser, at fx $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$ er det samme som

$9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$, da han på denne måde ikke får nogen ide om, hvorfor det gælder. Hvorfor er fx 7+7+7 (3 gange 7) lig 3+3+3+3+3+3+3 (7 gange 3)? Men vi kan konkludere, at der er sket en progression i forhold til Lucas' matematiske viden. Han ved nu, at stykker med gange giver samme resultat, hvis det er de samme tal, der indgår. Det at han har brugt lang tid på at opskrive udregningerne for så at finde ud af, at de alle giver det samme, gør at han højst sandsynligt ikke glemmer denne indsigt.

Vi ser senere, hvordan den nye erkendelse har gjort indtryk på Lucas, da han erklærer over for Amir og Umar, at han nu har fundet ud af, hvor mange resultater, man kan få:

47 Lucas: Jeg har fundet ud af, hvor mange numre, man kan få.
[Amir og Umar reagerer ikke]
48 Lucas: Jeg har fundet, hvor mange numre, man kan få. Svaret står lige her.
[Lucas viser dem sit papir]
49 Amir: 20?
50 Lucas: Man kan få 20 numre i alt.
51 Umar: 20 numre?
52 Lucas: De skal være forskellige. Jeg har regnet det ud.
53 Umar: Med gange? Kun med gange?
54 Lucas: Nej med alt.
55 Umar: Det tror jeg ikke.
56 Amir: Du ved godt, at der er flere trillioner, millioner.
57 Lucas: Det er rigtigt.
58 Umar: Nej, men /
59 Lucas: Man kan kun få én med alt, se. Alt det her, det giver alt sammen 189.
[Lucas peger på sine stykker med gange]
60 Umar: Nårh, alt sammen? Alt det her?
61 Lucas: Ja så vi kan kun lave det med én og /
62 Umar: Nårh, jeg troede du sagde, at der var kun 20 øh, der var 20…
63 Lucas: Der var 20, man kan kun få 20 forskellige numre.
64 Umar: Nå okay.
65 Lucas: Og ved du hvorfor? Fordi gange, der giver det 189 alt sammen. Så man kan kun få én her.
66 Amir: Nå ja, det er rigtigt, det er bare gange gange gange.
67 Umar: Så vi er færdige med den der.
68 Lucas: Så vi er færdige med *spørgsmål 2*.

Lucas mener, at man kan få 20 forskellige resultater i alt ved at kombinere de fire tal 1,3,7 og 9, men han uddyber ikke, hvilke 20 det drejer sig om. Mit bud er, at han har lagt antal resultater, de tidligere har fundet, sammen med det antal, han selv har fundet i dette atelier og på denne måde er nået op på 20. Amir og Umar afviser først hans påstand med kommentarerne "det tror jeg ikke" (linje 55) og "du ved godt, at der er flere trillioner, millioner" (linje 56), men Lucas får forklaret, at alle gangestykkerne giver det samme, og de tre elever ender med at konkludere, at de nu er færdige med spørgsmål 2. Lucas virker i situationen begejstret og ivrig efter at fortælle Amir og Umar, hvad han har fundet ud af, og det er tydeligt, at det, der har gjort indtryk, er det faktum, at udregningerne alle giver 189. Lucas startede med at melde ud, at det ville blive rigtig hårdt at opskrive alle muligheder (linje 11), men har nu erfaret, at mange af udregningerne kan slås sammen, idet de giver samme resultat, hvilket sparer én for en del arbejde.

6.2.5.1 Generelle overvejelser om situation 3

Situation 3 er som situation 1 og 2 hovedsagligt eksempel på en handlingsfase, hvor Lucas prøver at finde forskellige resultater med tallene 1,3,7 og 9, men vi ser også, hvordan Lucas rent faktisk efter at have udført forskellige operationer på de fire tal ender med at formulere en hypotese: At der i alt findes 20 forskellige resultater med de fire tal. Amir og Umar stiller ikke spørgsmålstegn ved antallet 20, og de tre elever bliver uden videre enige om, at de er færdige med spørgsmål 2. Eleverne diskuterer ikke hvorfor, de er færdige. Hvordan kan de fx vide, at der ikke kan findes flere resultater? Tendensen er den samme for begge grupper, der har arbejdet med opgaven *Matematisk solitaire* i forbindelse med spørgsmål 2: Formuleringen 'hvor mange forskellige tal kan man få?' tolkes hos eleverne som 'hvor mange forskellige tal kan vi få?'. Eleverne har en fornemmelse af, at der findes rigtig mange resultater, hvilket vi blandt andet ser i situation 1, hvor Martin melder ud, at der må være over 100 resultater og igen i situation 3, hvor Amir kommer med kommentaren "du ved godt, at der er flere trillioner, millioner." Men de har ikke overblikket til at liste alle muligheder med fire tal, hvilket også er en kompliceret tælleopgave, jf. analysen i afsnit 6.1.4.1, hvorfor de stiller sig tilfredse med blot at finde så mange resultater, som de kan. De kan måske ikke give det nøjagtige antal, men har derimod mulighed for at konstatere, at der findes mindst x antal resultater efter at have fundet x forskellige.

Situation 3 illustrerer ligesom situation 2, at den matematiske viden, der er i spil, ikke er veletableret hos eleverne, men understreger ligeledes en anden vigtig faglig pointe. Godt nok bruger Lucas lang tid på at opskrive gangestykker for til sidst at indse, at resultatet bliver det samme (tid han kunne have brugt på at finde andre resultater), men han bliver gennem arbejdsprocessen mere bevidst omkring det aritmetiske hierarki og parentesbrug, hvilket gælder helt generelt for elevarbejdet. Eleverne har ikke styr på den teori, der er i spil i arbejdet med opgaven, men de får gennem praksis et indblik i, hvordan de forskellige regningsarter virker og en fornemmelse af, hvilke regler, der må gælde. De vinder således matematisk indsigt, hvilket vi netop ser i situation 3, hvor Lucas gennem selvstændig udforskning af spørgsmålene i opgaven selv erfarer, at rækkefølgen er underordnet, når man ganger tal sammen.

Endelig får vi i situation 3 et indblik i lærerens rolle i Math en Jeans ateliererne. Generelt holder læreren sig i baggrunden og lader eleverne arbejde selvstændigt. Han griber kun sjældent ind, hvis han vurderer, at der er behov for det, som i situation 3, hvor læreren spørger ind til Lucas' gangestykker for at få arbejdet til at skride fremad.

Det er her tydeligt at se ud fra lærerens retorik, at han forsøger at være på samme niveau som eleverne. Han kommer blot med forslag til, hvordan man kan gribe opgaven an og instruerer ikke eleverne. Vi vil se samme tendenser i situation 4 i næste afsnit, hvor spil- og ansvarsfordeling mellem lærer og elever i arbejdsprocessen vil blive belyst yderligere.

6.2.6 Situation 4

I situation 4 ser vi nærmere på samspillet mellem lærer og elever i arbejdsprocessen. Gruppen går her i gang med spørgsmål 4: 'Hvilke kombinationer af kort kan bruges, hvis man skal have N=0? N=1? N=2? Er der nogle N, der er nemmere at få (dvs. med flere muligheder) end andre?'. De forsøger som det første at finde en kombination med de fire tal 3,5,7 og 9, som giver 0. Det lykkes hurtigt Umar, som kommer på følgende udregning: $9 + 3 - (7 + 5)$.

Læreren kommer forbi lidt efter og ser, hvad de laver:

1	Umar:	*Vi har fundet, jeg har fundet 9 plus 3, parentes, minus 7 plus 5, parentes. Det giver 0.*
2	Lærer:	*Ja.*
3	Umar:	*Men altså, nu, (er det?) rigtigt, at vi skal finde en anden kombination som giver 0?*
4	Lærer:	*Jeg ved det ikke.*
5	Amir:	*Nej det er med 2.* [læreren kigger på opgaveformuleringen]
6	Lærer:	*Ja, det vil sige, hvis vi tilfældigt tager, fordi her…* (pause)
7	Lærer:	*Men jeg, jeg ved det ikke. Kan man få 0 med de, med fire tilfældige tal? Her, har du valgt dem tilfældigt?*
8	Umar:	*Nej.*
9	Lærer:	*Dem der har du valgt fra starten ik'?*
10	Umar:	*Jo, det er en smule tilfældigt.*
11	Lærer:	*Jeg, man kunne forsøge med de fire tal der. Kan man kombinere dem på en anden måde og få 0?*

Umar er her i tvivl omkring, hvordan de skal fortsætte arbejdet og spørger læreren til råds. Han har en forventning om, at læreren har et større overblik og ved, hvad de skal gøre, hvilket kommer til udtryk i spørgsmålet "er det rigtigt, at vi skal finde en anden kombination som giver 0?" (linje 3). Men opgaven er åben, og der er ikke én mulig fremgangsmåde, hvilket giver eleverne en høj grad af fritid til selv at vælge, hvordan de vil gribe den an, en frihed som de måske ikke er vant til. Læreren ved ikke meget mere end eleverne og er i samme situation som dem, hvilket er med til at gøre den forskningslignende situation autentisk. Der er ingen, der kender svarene på forhånd.

Læreren bakker op omkring Umars idé og foreslår, at de kan prøve at få 0 på en anden måde med de fire tal, de har valgt. Eleverne forsøger sig herefter med dette:

12 Umar: *Ah ja, hvis vi siger 7 plus 5 minus 9 plus 3, det giver 0.*
[Umar skriver $7 + 5 - (9 + 3)$]
13 Lærer: *Ja, men det, det er den samme måde.*
14 Amir: *Ja, okay, vi skifter /*
15 Lærer: *Prøv med gange eller division.*
16 Amir: *Vi skifter de to her.*
[Amir peger på tallene 7 og 9]
17 Lærer: *Prøv med gange eller division.*
18 Amir: *Vi kan også skifte /*
19 Umar: *Nej fordi hvis vi tager 9 plus 5, så giver det 14.*
20 Lærer: *Ja 9 plus 5, det giver 14 og 3 plus* /
21 Umar: *Og bagefter* /
22 Lærer: *Ja det går ikke. I må se om man kan* /
23 Umar: *Altså*, 9 /
24 Lærer: *Ja fordi det, de går ud med hinanden, de tal der, fordi det giver 12 og 12.*
[læreren peger på stykket $7 + 5 - (9 + 3)$]

Umar får hurtigt skrevet $7 + 5 - (9 + 3)$ op på sit papir, men læreren pointerer, at denne kombination ikke er forskellig fra den første udregning $9 + 3 - (7 + 5)$, og han foreslår, at de i stedet prøver at bruge multiplikation og division (linje 15). Amir og Umar vælger dog fortsat at forsøge at bytte rundt på tallene og bibeholde operationerne. Læreren respekterer denne tilgang og forlanger ikke, at eleverne arbejder videre med hans idé. Umar indser herefter i samspil med læreren, at det ikke hjælper at lægge 9 og 5 sammen, da 14 (9+5) er forskellig fra 10 (7+3). Det lykkes ikke Amir og Umar at få 0 ved blot at bytte rundt på tallene, og læreren kommer herefter med et nyt spørgsmål, der måske kan bringe dem videre i arbejdet:

25 Lærer: *Har I været heldige at få det eller kan man altid finde en måde? Det er det, der er spørgsmålet. Er det der, har I været heldige at få det eller kan man altid finde en måde at få 0 på hvis man tager andre tal?*
26 Umar: *Men måske vil det være bedre, hvis man tog nogle (lige?) tal, fordi… Vi tager 7, nej.*
[læreren snakker med Lucas, mens Amir og Umar arbejder videre]
27 Umar: *Vi tager 6. 4, 6, 4, bagefter øh 6, 4, 3 og øh, jeg ved ikke, og og, og 9.*
(pause)
28 Umar: *6, 4, 3, 9. Så, tag* /
29 Amir: *Nej, vi prøver sådan.*
30 Umar: *Okay, så.*
31 Amir: *6.*
32 Umar: *Parentes. Plus 4, det giver* /
33 Amir: *Okay, 6 plus 4.*
34 Umar: *Ja.*
35 Amir: *Det giver 10.*
36 Umar: *Ja, 6 plus 4, det giver 10. Øh, minus 9 plus 3. Parentes.*
37 Amir: *9 plus 3?*
38 Umar: *Ja.*
[Amir taster $(6 + 4) - (9 + 3)$ ind på telefonen]
39 Amir: *Minus 2.*
40 Umar: *Minus 2. Men går det med negative tal? Vi har fundet negative tal, går det?*

41 Lærer: *Ja, men ikke* (*en måde at*?) *finde 0? I har ikke fundet 0?*
42 Amir: *Ah ja, det er rigtigt.*
43 Umar: *Nej.*

Læreren forsøger her at få eleverne til mere generelt at overveje, om man altid kan få 0 uanset hvilke fire tal, man vælger (se evt. analysen i afsnit 6.1.4.1). Han lægger herefter ansvaret over på eleverne og lader dem arbejde videre selvstændigt. Umar vælger straks at kigge på fire nye tal, hvilket er et af flere eksempler, der vidner om, at eleverne har svært ved at overveje spørgsmålene mere generelt, som læreren her selv har i tankerne. Læreren forlanger dog ikke svar på sine spørgsmål, men stiller dem for at hjælpe eleverne med at komme på nye ideer. Endvidere ser vi, hvordan læreren husker dem på, hvad de er i gang med. Amir og Umar får resultatet minus 2 efter at have prøvet sig frem med de nye tal, og læreren minder dem her om, at det er 0, de prøver at finde (linje 41). Da opgaven er åben, skal spørgsmålene præciseres, og det viser sig, at eleverne ofte bruger læreren i denne forbindelse, som her i situation 4, hvor de ikke selv tager stilling til, om negative tal er ”tilladte”, men i stedet spørger læreren, om ”det går med negative tal?” (linje 40).

Lidt efter har eleverne igen behov for at få afklaret spillereglerne og spørger denne gang, om de også må dividere i forsøget på at få 0 med de nye tal 3,4,6 og 9:

46 Amir: *Monsieur, må vi også gerne dividere?*
47 Umar: *Ja.*
48 Lærer: *Ja, ja. Division er smart når det giver et helt tal, fordi hvis det ikke giver et helt tal, så er det kompliceret. For eksempel, kan vi sige 9 divideret med 3 eller 6 divideret med 3.*
49 Umar: *9 divideret med 3. Det giver…*
50 Amir: *9 divideret med 3, det giver 3. Og hvad så?*
51 Umar: *6 divideret med 4.*
(pause)
52 Lærer: *Hvis jeg skriver, hvis jeg skriver det sådan?*
53 Amir: *Hvad?*
[læreren har skrevet $(9 - 3 - 6) \cdot 4$ på et papir]
(pause)
54 Umar: *3 minus… divideret med…*
55 Lærer: *Hvis jeg skriver, vi får så 0, bagefter, man* (?uforst.) *for eksempel kun tre tal for at finde 0. Hvis det giver 0 og man ganger med den sidste, så giver det 0.*
56 Umar: *Jeg har ikke forstået det.*
57 Lærer: *Ser du, hvis jeg siger, hvis jeg siger 9 minus 3 minus 6, så giver det 0.*
[Umar nikker]
58 Lærer: *Og bagefter 0 gange 4, 0. Altså har jeg fundet 0 ik'? Det er en kombination.*
59 Umar: *Men ja, det virker. 9 minus 3, 9 minus 3, 6.*
60 Lærer: *9 minus 3, 6.*
61 Umar: *Minus 6, det giver 0.*
62 Lærer: *0.*
63 Umar: *0 gange 4, det giver 0.*
64 Lærer: *0, ja, det er en mulighed.*
(pause)

65 Lærer: *Bagefter kan man se om man kan finde andre.*

Amir og Umar bruger i situation 4 forholdsvis lang tid på først at finde andre måder at få 0 med tallene 3,5,7 og 9 (uden held) og hernæst at få 0 med fire nye tal, 3,4,6 og 9 (også uden held), og læreren ender her med at give løsningsforslaget $(9-3-6)\cdot 4$ (linje 52), som han gennemgår i fællesskab med Umar, der i første omgang ikke kan se, hvorfor det giver 0. Læreren har hermed givet en ny idé, som eleverne måske kan arbejde videre med.

6.2.6.1 Generelle overvejelser om situation 4

Vi får i situation 4 belyst samspillet mellem lærer og elever i arbejdet med Math en Jeans opgaven *Matematisk solitaire*. De vigtigste pointer vil kort blive opsummeret i det følgende.

Når eleverne stiller læreren spørgsmål, er det oftest for at få præciseret de åbne spørgsmål i opgaven, fx om negative tal er tilladt, om man må dividere osv., som vi ser i situation 4. Eleverne lægger her en del af ansvaret over på læreren, hvilket kan ses som effekt af en didaktisk kontrakt. De er vant til, at læreren ved, hvordan de opgaver, som de arbejder med, skal forstås, hvorfor de også her spørger ham til råds frem for selv at foretage et valg. De vil have ham til at sætte grænser. Læreren hjælper således med afklaring af spørgsmålene, men han giver ingen instrukser i forhold til, hvordan de skal gå frem. Det er eleverne, der styrer hvilken retning, de vil gå, og læreren respekterer deres forskellige tilgange og deltager på deres præmisser. Hvis han fornemmer, at de er kørt fast, stiller han spørgsmål, der måske kan få dem videre og kommer med forslag til, hvad de kan prøve. Han har større matematikfaglig viden, hvorfor han kan give eleverne råd i forhold til det regnetekniske som i situation 4, hvor han minder Amir og Umar om, at division er smart, når resultatet giver et helt tal eller som i situation 3, hvor han foreslår Lucas at starte med addition og multiplikation. Til gengæld ved han ikke så meget mere end eleverne i forhold til, hvilke svar, man kan finde i arbejdet med opgaven, hvilket bestemt er en afgørende forskel fra sædvanlige matematiktimer. Han må derfor som eneste bindende del af kontrakten fokusere på at holde dem fast på opgaveformuleringen.

6.2Diskussion

Jeg har gennem de fire situationer i de forrige afsnit forsøgt at belyse karakteren af elevarbejdet i Math en Jeans. Det er klart, at jeg ud fra mine observationer på den franske skole ikke kan drage nogen helt generelle slutninger, men dialogerne og analysen giver et indblik i, hvordan 6.- og 7. klasseeleverne har arbejdet med Math en Jeans opgaven *Matematisk solitarie*. De vigtigste pointer fra analysen af de fire situationer vil blive understreget i dette afsnit, og jeg vil på et mere overordnet plan diskutere de spørgsmål, jeg har stillet i min problemformulering i kapitel 5.

Først og fremmest har jeg i hvert Math en Jeans atelier ikke observeret samme faser, som vil kunne identificeres i løbet af en sædvanlig matematiktime. Læreren har i matematikundervisningen, i modsætning til hvad der er tilfældet i Math en Jeans, til opgave at konstruere et didaktisk miljø, så eleverne kan tilegne sig en specifik matematisk viden som beskrevet i afsnit 3.2.1. Eleverne vil i løbet af en typisk matematiktime derfor ikke blot blive sat til at udforske miljøet på egen hånd (handlingsfase), men også formulere og validere hypoteser (didaktisk eller adidaktisk) for efterfølgende ved institutionalisering at få fællesgjort den personlige viden. Det tidsmæssige perspektiv er et helt andet i Math en Jeans, hvor det der foregår i hvert atelier ikke er tilrettelagt af læreren. Det er derimod eleverne, der sætter dagsordenen, og faser som formulering og validering finder ikke nødvendigvis sted i løbet af et atelier, som det i almindelighed vil gøre i en sædvanlig matematiktime.

Handlingsfasen står helt centralt i arbejdsprocessen, og størstedelen af tiden går med, at eleverne forsøger at kombinere fire udvalgte tal på forskellig måde. Det er en udfordring for dem, idet viden om det aritmetiske hierarki samt parentesbrug er viden i udvikling hos eleverne, hvilket henholdsvis situation 2 og 3 er eksempler på, hvor Amir og Umar i førstnævnte bruger lang tid på at udregne $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$, og Lucas i sidstnævnte i første omgang ikke har indset, at fx $3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 7 = 3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 9$. Foruden det spil, der eksisterer, hvor eleverne med en eksperimentel tilgang udfører operationer på forskellige tal, reflekterer de over regler i handlingsfasen (se figur 6.4). Både fordi opgaven er åben, men også fordi devolutionsfasen kun finder sted i de første atelierer. Eleverne bruger lang tid på at diskutere, hvordan opgaven skal forstås, som vi ser i situation 1, hvor Martin kombinerer to tal og ikke fire som Umar og Oliver. De må undervejs overveje og præcisere spørgsmålene, da der er variable, der ikke er givet i det objektive miljø: Må man sætte parenteser, få negative tal mm.

Det at systematisere resultater og opstille hypoteser på baggrund af erfaringer i handlingsfasen, sker kun i begrænset omfang i elevernes arbejde med opgaven *Matematisk solitatire*. Jeg har under observationerne kun få gange set eksempler på elever, der faktisk overvejer de fem spørgsmål mere generelt, som da Martin i situation 1 melder ud over for Oliver og Umar, at ”der er over 100 resultater, meget over”. Deres formuleringer er her noget upræcise og ubegrundede og snarere bare intuitive fornemmelser. Men de kan i princippet validere Martins hypotese ved at finde mindst 100 forskellige resultater og således nå delresultatet ”der findes minimum 100 resultater med de fire tal, vi har valgt”. Netop minimum- og maksimumsbetragtninger kan være en mulig tilgang i store tælleproblemer jf. analysen i afsnit 6.1.4.1.

Der er ikke noget at sige til, at eleverne har svært ved at besvare spørgsmålene generelt, da opgaven også er udfordrende for en ”voksen” matematiker, hvorfor det må ses som tilfredsstillende, at de trods alt engagerer sig i problemet og blot eksperimenter med fire konkrete tal som Lucas i situation 3, der ender med at have fundet 20 forskellige resultater. Specielt når man også tager i betragtning, at eleverne ikke er fortrolige med regning, herunder det aritmetiske hierarki og brug af parenteser, hvorfor man ikke kan forvente så meget mere, end den måde, de rent faktisk arbejder på i ateliererne. Fx vil en strategi i spørgsmål 2, hvor man skal undersøge antallet af resultater med fire tal, være at udvælge fire tal og gå systematisk frem og opskrive alle muligheder, som jeg selv har forsøgt i tilfældet med fire ens tal (afsnit 6.1.4.1). Men denne tilgang, som flere af eleverne forsøger sig med undervejs, bliver bremset af den viden, de ikke har på plads. Lucas forsøger fx i situation 3 at gå systematisk frem med de fire tal 1,3,7 og 9 og starter med at lade de tre operationer, der skal bruges, være ens, men hans forsøg på systematik falder lidt til jorden, idet han ikke er klar over, at man kun kan få ét resultat med multiplikation.

Det kan, som Nathalie Wahl pointerer (se transskription af interview i bilag 11), være vanskeligt for eleverne, særligt de yngste, selv at strukturere og "rydde op" i deres svar og formulere, hvad de rent faktisk har fundet ud af. Men bare det, at eleverne i slutfasen, hvor de præsenterer resultater for hinanden samt for lærer og professor, ender med at kunne diskutere, hvad de er nået frem til, må betragtes som værende tilfredsstillende. Wahl udtaler her:

> "Men det er klart, at det man, man vil gerne gå hen til at de får et eller andet struktureret svar, og det har tit været på den måde, at når jeg kommer til sidst, så diskuterer man den slags med dem, og det… Bare det at de kommer på niveau til at begynde at diskutere det, det synes jeg, det er super." (Interview B, bilag 11, p.186)

Eleverne formulerer måske ikke mere generelle hypoteser, men til gengæld opnår de større fortrolighed med det aritmetiske hierarki og brugen af parenteser, hvilket må siges, at være en vigtig faglig pointe. Erkendelsen sker gennem eksperimenterende selvstændigt arbejde, hvor eleverne udforsker området på egen hånd og herigennem bliver mere bevidste omkring regnereglerne, hvilket efter min mening kan være mere udbytterigt end hvis en lærer fx blot havde sat dem til at udregne en masse stykker med multiplikation for herefter at få dem til at opdage, at resultatet bliver det samme.

Læreren lader eleverne arbejde selvstændigt langt det meste af tiden, men han har alligevel en særdeles vigtig rolle, idet han hjælper dem med at organisere arbejdet. Han sikrer blandt andet, at hver gruppe efter hvert atelier får lagt deres resultater ind i deres fælles mappe for på den måde fra gang til gang at fastholde, hvad de er i gang med, hvor langt de er nået osv. Desuden sørger han for, at der sker en vis progression i arbejdet og kan hjælpe med at fokusere, systematisere, fastholde elevernes observationer osv. Men det er eleverne, der sætter dagsordenen. De vælger selv, hvilke spørgsmål, de vil arbejde med, hvilke tal, de vil kigge op osv., men læreren kan, hvis han fornemmer, at de er gået lidt i stå, stille spørgsmål, der måske kan hjælpe dem videre som vi ser i situation 4. Da han har større matematisk indsigt kan han ligeledes hjælpe dem med at undgå banale fejl. Til gengæld ved han ikke meget mere end eleverne i forhold til, hvad der kan komme ud af arbejdet.

Det kan måske umiddelbart virke lidt overraskende, at elevernes interesse kan fastholdes over så lang en periode, men netop det, at hverken elever eller lærer kender svarene på forhånd, kan være med til at fastholde deres nysgerrighed. Der er selvfølgelig den risiko, at eleverne mister interessen og giver op, fordi de skal bruge så lang tid på bare at forstå spørgsmålene og ikke synes, at de finder ud af noget, men det viser sig, at de ikke har så store krav til en besvarelse som en ”voksen” matematiker fx i forhold til generalitet. Eleverne finder det derimod tilfredsstillende blot at kigge på fire konkrete tal og finde forskellige resultater. De føler rent faktisk, at det går fremad. Et eksempel er en elev, der efter et atelier over for gruppen konstaterer følgende: ”Vi har nået ret meget i dag”.

Eleverne engagerer sig i problemerne, og jeg har flere gange oplevet stor begejstring i grupperne. Et eksempel er en elev i gruppe 3, der også arbejder med opgaven *Matematisk solitaire*. Gruppen har valgt tallene 5,5,5 og 9. Céline finder her resultatet 5625 $(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9)$ og udbryder ivrigt: ”Ej hvor sejt. Det giver 5625. 5625!!!”. Begejstringen fortsætter lidt efter: ”Orh, jeg har fundet det største tal, man kan finde, for jeg har brugt gange”. Et andet eksempel er i samme gruppe, hvor Louise har fået resultatet 0 med udregningen $(5 - 5 + 5 - 5) \cdot 9$:

1	Louise:	Hey Céline, sig lige tillykke til mig, jeg har fundet 0.

Hun viser herefter sin udregning til resten af gruppen, som regner efter i hovedet og på lommeregner.

2	Marie:	Tillykke. Hun fandt nul, hun fandt nul.
3	Louise:	Jeg fandt nul.
4	Marie:	Hun fandt nul. Det er mig, der skulle finde det. Det er mig, der skulle finde det. Grrr.

Det giver dem en vis tilfredshed at finde ”særlige” tal som 0 og måske også kunne imponere andre elever og læreren med deres ”opdagelser”, som de får lov til at præsentere til kongressen, der afrunder arbejdet og kan ses som en form for institutionalisering jf. afsnit 3.2.2. I Math en Jeans kender ingen svarene på forhånd, hvilket giver eleverne en vis form for ejerskab over resultater, de når frem til (”nu skal I se, hvad <u>vi</u> har fundet ud af”). Da opgaven er åben, kan grupperne vælge forskellige veje at gå, og de vil opleve, at matematikken kan være andet end at løse opgaver, hvor alle elever gerne skulle få det svar, som læreren har stående på sin facitliste. De forskningslignende situationer i Math en Jeans giver eleverne mulighed for at fordybe sig og arbejde selvstændigt med et matematisk problem over en længere periode, hvor de vil opdage, at matematik kan være andet end dét, de oplever i den sædvanlige matematikundervisning.

7. De institutionelle betingelser

Fritidsaktiviteten Math en Jeans kan uden tvivl give eleverne et andet udbytte end den almindelige matematikundervisning, hvilket gerne skulle stå klart efter analysen af Math en Jeans opgaverne og elevarbejdet i henholdsvis kapitel 6 og 7. Af denne grund er det oplagt at se nærmere på, om lignende tiltag er mulige i Danmark. Math en Jeans har stor tilslutning i Frankrig samt på franske skoler i Europa, men det har, som vi skal se, vist sig at være vanskeligt at få danske folkeskoler og gymnasier til at melde sig til projektet.

Jeg vil i denne del af specialet betragte Math en Jeans fra et institutionelt perspektiv og undersøge, hvilke betingelser, der er med til at afgøre, om en fritidsaktivitet som Math en Jeans kan realiseres i danske skolesammenhænge og ligeledes forsøge at identificere forskelle på danske og franske betingelser. Hvor jeg i kapitel 5 og 6 har belyst fænomenet Math en Jeans fra et mikro-didaktisk perspektiv, vil jeg i dette kapitel således fokusere på det makro-didaktiske.

Kapitlet indledes med et metodeafsnit, herefter følger en analyse og endelig afrundes med en diskussion.

7.1 Metodologi

For at belyse problemstillingen fra forskellige vinkler har jeg foretaget to uformelle interviews med to personer, der på forskellig vis er eller har været inde omkring Math en Jeans projektet i Danmark.

Interview A er med en lærer, der underviser i matematik på en dansk folkeskole, der blev præsenteret for Math en Jeans projektet i efteråret 2011 med henblik på at deltage i skoleåret 11/12 med afsluttende konference i København april 2012. På trods af stor interesse endte han med at takke nej, hvilket de omkring fire gymnasielærere, der også blev informeret om projektet af Carl Winsløw og Line Nissen[18], ligeledes gjorde. I bilag 9 kan ses projektbeskrivelsen af Math en Jeans, som blev sendt ud til lærerne pr. mail. Hovedformålet med interview A var at finde ud af, hvorfor folkeskolelæreren, der i første omgang sagde ja til at deltage med elever fra sin skole, alligevel måtte mel-

[18] Nissen (2011) undersøger i sit speciale forudsætninger og muligheder for at konstruere et nyt tilbud til danske gymnasieelever i stil med Math en Jeans.

de fra i sidste ende. Interviewet blev baseret på en række specifikke spørgsmål, der blev mailet til folkeskolelæreren forinden, men dog ikke blev gennemgået slavisk under selve interviewet. Spørgsmålene ses nedenfor. De to første er medtaget for først at få indblik i lærerens erfaring og interesse for matematik. De fire sidste omhandler selve Math en Jeans projektet.

Baggrund:

- Hvor mange år du har du undervist og hvilke fag underviser du i?
- Hvorfor har du valgt at undervise i lige præcis matematik?

Math en Jeans projektet:

- Hvordan blev du præsenteret for projektet?
- Hvorfor fangede projektet din interesse?
- Hvad gjorde, at du i sidste ende måtte melde fra?
- Hvilke faktorer tror du kan være med til at gøre det vanskeligt at få indført matematik-fritidsaktiviteter som Math en Jeans i danske (folke)skoler?

Interview B er med professor Nathalie Wahl (født og opvokset i Belgien, nu bosat i København), der i de fire år den franske skole har deltaget i Math en Jeans, har udformet og præsenteret de Math en Jeans opgaver, som eleverne har arbejdet med. Hun har herudover været ude og holde oplæg om projektet for enkelte danske gymnasieklasser i efteråret 2011. Hovedformålet med interviewet var her dels at høre, hvordan hun har oplevet det at komme ud på et dansk gymnasium og præsentere Math en Jeans, dels at høre hendes bud på, hvilke forskelle, der kan være på danske og franske betingelser for at etablere en fritidsaktivitet som Math en Jeans i skolesammenhænge. Også her blev de spørgsmål, som jeg gerne ville vende, mailet til hende forinden. Det drejer sig først og fremmest om spørgsmål vedrørende de institutionelle betingelser, men jeg valgte også at spørge lidt ind til selve Math en Jeans opgaverne. Spørgsmålene ses nedenfor.

Math en Jeans opgaverne:

- Hvad karakteriserer et godt Math en Jeans spørgsmål? Har du et eksempel?
- Skal eleverne kunne opsøge viden på fx internettet, når de arbejder med et Math en Jeans spørgsmål?

De institutionelle betingelser:

- Hvordan har du oplevet det at komme ud og holde oplæg i en dansk gymnasieklasse?
- Hvad tror du kan gøre det vanskeligt at etablere Math en Jeans i danske skolesammenhænge?
- Projektet har stor tilslutning i Frankrig. Hvordan kan det være?
- I forlængelse af de to foregående spørgsmål: Hvilke forskelle mener du, at der er på danske og franske betingelser for at realisere en fritidsaktivitet som Math en Jeans?

Transskriptioner af de to interviews kan ses i henholdsvis bilag 10 og 11.

Jeg vil i analysen i afsnit 7.2 understrege de vigtigste pointer fra interviewene og antyde, hvilke forhindringer der kan opstå i forhold til at etablere Math en Jeans i danske skolesammenhænge. I diskussionsafsnittet 7.3 vil jeg med udgangspunkt i pointerne fra analysen suppleret med egne overvejelser sammenligne og diskutere forskellige niveauer af didaktisk bestemmelse i forhold til danske og franske betingelser for at realisere en fritidsaktivitet som Math en Jeans. *Den antropologiske teori om det didaktiske* (ATD), der fokuserer på institutionelle perspektiver på viden og matematikundervisning som beskrevet i afsnit 3.3, vil her være den teoretiske ramme. Netop denne teori muliggør komparative studier, i hvilke man kan identificere centrale forskelle, som varierer fra institution til institution. Vi kan således sammenligne forhold i forskellige lande og kulturer med de forskellige niveauer af didaktisk bestemmelse som analyseapparat.

Det skal her understreges, at det i afsnit 7.3 vil være betingelser i den danske folkeskole, der vil blive diskuteret og sammenlignet med betingelser i hvad der svarer til den franske folkeskole. Folkeskolen og gymnasiet er uden tvivl to vidt forskellige institutioner, hvorfor det er nødvendigt at rette fokus på én af disse. At mit valg falder på folkeskolen skyldes i særdeleshed, at jeg har observeret Math en Jeans aktiviteten i hvad der svarer til en fransk folkeskole, nemlig den franske skole i København. Prins Henriks Skole er måske ikke en typisk fransk skole, først og fremmest fordi den ligger i Danmark. Når det så er sagt vurderer jeg ikke, at der er væsentlig forskel på den franske skole i København set i forhold til en skole i Frankrig. Førstnævnte kan betragtes som et ”stykke af Frankrig” på dansk jord, der underviser i overensstemmelse med det franske skolesystem, og af den grund i min optik snarere må ses som en fransk institution end en dansk[19].

7.2 Analyse

Læreren i interview A er en engageret matematiklærer, der udover at undervise i udskolingen også er matematikvejleder på skolen samt fagkonsulent i skolens kommune. At arbejde med åbne matematiske problemer, som netop karakteriserer Math en Jeans opgaverne, hvor man i højere grad får lov til at høre elevernes meninger, tiltaler ham, og han pointerer i interviewet, at det i den almindelige matematikundervisning ofte kan være svært at få tid til denne type opgaver. Ligeledes understreger han, at projektet falder i god tråd med det fokus, der de seneste år er kommet på matematiske kompetencer, hvilket den såkaldte KOM-rapport fra 2002 af Niss og Jensen udstedt af Under-

[19] http://www.prinshenriksskole.dk/content/dk/kontakt/ofte_stillede_sporgsmal?OpenChild=284#Child284

visningsministeriet er eksempel på[20]. Rapporten gør her brug af verber som at eksperimentere, indsamle, behandle, formulere hypoteser, formulere, opstille, løse problemer, samarbejde, undersøge, systematisere og begrunde - verber der netop kendetegner elevarbejdet i Math en Jeans.

Det helt store benspænd i forhold til at få etableret aktiviteten på skolen, var ifølge læreren det tidsmæssige perspektiv:

> ”[…] og tidsmæssigt, det andet var at den, undervisningen, den normale undervisning var jo planlagt. Ikke at man ikke kan ændre i den, men når man lige pludselig skal til at bruge forholdsvis meget tid på kort tid, så var det noget ungerne sagde, at det havde de faktisk ikke mulighed for at gøre om eftermiddagen, og i den normale undervisningstid, der er det svært at putte ind. Der har man jo sin årsplan, hvor det hele er planlagt. Så man kan sige, fremadrettet, der skal vi jo tænke det ind allerede i vores årsplan, og vi skal finde timer til lærerne, der skal står for det i… Eller i hvert fald være med jo. De skal jo ikke gøre det alene ungerne. Selvfølgelig skal de arbejde med det alene, men der skal jo være en tovholder på det ik'?” (Interview A, bilag 10, pp.174-175)

Math en Jeans aktiviteten skal tænkes ind i årshjulet, og både elever og lærere skal ”varsles” i god tid. Specielt skal der afsættes timer (og hermed løn) til de involverede lærere. Det økonomiske perspektiv må ikke undervurderes. At det tidsmæssige aspekt er en vigtig faktor, konstateres ligeledes hos Nissen (2011). På trods af fuld opbakning fra skolens ledelse og positiv indstilling fra såvel lærere som elever viste det sig her at være umuligt at gennemføre et frivilligt pilotprojekt på N. Zahles gymnasium. Også her var den primære årsag mangel på tid, både i forhold til skoleåret, men også som konkret forbrug af tid fra lærere og elevers side (Nissen, 2011, p.26).

Lærerne på de danske folkeskoler kan altså ifølge læreren i interview A have svært ved at finde (løn)timer til en aktivitet som Math en Jeans, men det må også være et spørgsmål om prioritering fra lærerens side. Wahl nævner i denne forbindelse, at hun har været overrasket over at se, hvor lidt motiverede de danske lærere har været, når de er blevet præsenteret for projektet. Lærerne fra Prins Henriks Skole er derimod ifølge Wahl meget engagerede og lægger en enorm mængde energi i arbejdet med Math en Jeans, hvor antal løntimer ikke stemmer overens med den faktiske arbejdstid, særligt i forbindelse med organisering af konferencen i København april 2012. Retter vi blikket mod de lærere, som involverer sig i Math en Jeans projektet i Frankrig, forklarede læreren fra Prins Henriks Skole i en uformel snak, at disse ikke får tildelt ekstra løntimer, men arbejder frivilligt af den simple grund, at de finder projektet og emnerne spæn-

[20] Her præsenteres følgende otte matematiske kompetencer: tankegangs-, problembehandlings-, modellerings-, ræsonnements-, repræsentations-, symbolbehandlings-, kommunikations- og hjælpemiddelskompetence.

dende. Det er svært at forestille sig lignende tilstande i danske skolesammenhænge, hvor tid er penge.

Wahl peger på en anden væsentlig forskel, der kan forklare, hvorfor Math en Jeans har stor tilslutning i Frankrig, men har svært ved at få fodfæste i både danske folkeskoler og gymnasier. Skoler i Frankrig er præget af en stram disciplin med distance mellem lærer og elever, blandt andet tiltaler eleverne deres lærer ”Monsieur”. Det er læreren, der sætter dagsordenen:

> ”Der er ikke noget med ”hvad vil du nu, vil du lave puslespil?” Nej, nej, der er ikke noget. Der er en plan, ”du laver dét, du laver dét”. Der er ligesom… Det er læreren, der er *in charge*. Det er også, det er måske det, det er ikke noget med ”vi skal være venner” bla bla bla. Nej nej nej nej. Læreren bestemmer. Eleverne gør ligesom… Det er ikke fordi, man ikke kan lave noget kreativt eller noget, men der er en struktur.” (Interview B, bilag 11, p.190)

Omgangstonen i timerne og lærer/elev-forholdet er langt mere afslappet i danske skoler - også set i forhold til Prins Henriks Skole, hvor disciplinen måske er en smule mindre streng end skoler i Frankrig. Wahl fremhæver i interviewet sit første besøg i en dansk gymnasieklasse, hvor hun præsenterede Math en Jeans projektet og fik en anden respons fra eleverne end på Prins Henriks Skole:

> ”De var meget søde, men, men de var faktisk i forhold til… Jeg har præsenteret de der emner nogle gange på den franske skole, og det plejer altså at være virkelig god feedback. Altså, de reagerer, man stiller spørgsmål, og så som den første gang, man dukker op, de plejer at være med. De interesserer sig for det, man snakker om, de stiller spørgsmål, de har modeksempler til ting man siger. Men her, alle de kiggede, ja, de kiggede meget afslappet på mig, men de reagerede ikke så meget.” (Interview B, bilag 11, p.188)

Det er klart, at det har betydning, hvordan læreren forbereder eleverne til oplægget, og Wahl pointerer her, at hun havde en fornemmelse af, at han havde meddelt dem, at ”de nu skulle prøve noget lidt mærkeligt fransk”. I så fald er der ikke noget at sige til, at de virkede tilbageholdende. Under alle omstændigheder var stemningen markant anderledes:

> ”Der var en vildt afslappet stemning, som jeg ikke kender overhovedet fra min skoletid[21].” (Interview B, bilag 11, p.187)

En fritidsaktivitet som Math en Jeans, der ligger efter skoletid, kan være attraktiv for både franske lærere og elever i et skolesystem med en stram disciplin, da de her oplever en anden mere afslappet stemning, hvorimod Math en Jeans i danske skolesam-

[21] I Belgien, hvis skolesystem ifølge Wahl ligner det franske.

menhænge på dette punkt ikke vil adskille sig synderligt fra den almindelige matematikundervisning, hverken i folkeskolen eller gymnasiet. Danske elever vil blot opfatte Math en Jeans som ”mere af det samme”. Som læreren fra Prins Henriks Skole nævnte, er franske elever desuden ikke vant til gruppearbejde i så høj grad som danske, hvilket også kan være med til at gøre Math en Jeans nyt og spændende for de franske elever.

7.3 Diskussion

Sammenligner vi den danske folkeskole med hvad der svarer til den franske folkeskole vil vi først og fremmest finde en væsentlig forskel på niveauet *pædagogik*. Disciplinen er strammere i det franske skolesystem end i det danske (også på Prins Henriks Skole). Danske lærere og elever er tættere knyttet end franske, hvor der er større distance i deres indbyrdes forhold. Som beskrevet i afsnit 7.2 vil franske elever (og lærere) derfor opleve en mere afslappet omgangstone i Math en Jeans, hvilket kan være tillokkende. Denne forskel på niveauet *pædagogik*, som har betydning for, hvorvidt lærere og elever vil finde rammerne for Math en Jeans projektet interessant, kan forklares ud fra betingelser på de højere niveauer af didaktisk bestemmelse, fx niveauet *civilisation*. En stor distance mellem hvad man kunne kalde under- og overordnet er ikke blot karakteristisk for forholdet mellem lærer og elev i franske skoler, men kendetegner ligeledes andre relationer i det franske samfund, hvilket Geert Hofstede, hollandsk professor der forsker i kulturelle forskelle, antyder i undersøgelser fra 1966[22]. Det viser sig her, at Frankrig har et markant højere indeks end Danmark (68 over for 18) i forhold til dimensionen ”magtdistance”, der kort kan defineres som de normer, folk i en kultur har for, hvordan et forhold er og bør være mellem under- og overordnede mennesker i forskellige kontekstuelle sammenhænge. Jo større magtdistance i en kultur, jo større tendens har en underordnet til at opføre sig med autoritetstro og respekt over for en overordnet (fx ansatte over for deres chef). En klar professionel distance mellem lærer og elever i franske skoler skal altså ses i et større perspektiv og er blot ét af flere eksempler, der illustrerer, hvad vi kunne kalde magtdistancen i det franske samfund.

På niveauet *skole* er der ligeledes en markant forskel på danske og franske betingelser. Hvis Math en Jeans skal etableres i en dansk folkeskole, skal der findes timer til lærerne, som læreren i interview A understreger. Der er i skolesystemet klare normer for, hvad et arbejde som folkeskolelærer indebærer, og det at engagere sig i et projekt uden at blive aflønnet hører ikke med til en del af jobbet. En dansk folkeskolelærer arbejder ikke frivilligt. På samme måde har danske folkeskoleelever formentlig en opfattelse af, hvilke forpligtelser, der hører med til det gå i skole. Det kan være svært for dem at få tid til en matematikaktivitet efter skoletid, da de har afleveringer og andre lektier, men

[22] http://www.globalskole.dk/globalundervisning/Ungdomsuddannelser/Emner/Demokrati/ metode/kulforskel.htm

hvis de derudover ikke ser det at deltage i et projekt som Math en Jeans som noget, man gør som en del af sin skolegang, skal der meget til, før de melder sig til. Tanken om at beskæftige sig med matematik i fritiden er fremmed for både lærere og elever, hvorfor det kan være svært at realisere Math en Jeans i danske skolesammenhænge. Noget kunne tyde på, at franske folkeskolelærere har en anden opfattelse af deres profession og de opgaver, der hører med hertil. Som Wahl beskriver, er lærerne på Prins Henriks Skole meget engagerede, og de er villige til at bruge ekstra timer på et projekt som Math en Jeans, lige så vel som lærere på skoler i Frankrig er det, der her deltager i Math en Jeans frivilligt uden at blive aflønnet. Det er for de franske lærere ikke et spørgsmål om, hvorvidt man har tid. Det handler om at give sig tid. De finder projektet spændende, og der stilles ikke spørgsmålstegn ved det at deltage i Math en Jeans - det er bare noget, man gør. At danske og franske folkeskolelærere tilsyneladende har forskellige opfattelse af matematiklærerprofession og dets funktion skal ses i et større perspektiv. Vi kan fx betragte niveaet *samfund*. Matematikken har en særlig status i det franske samfund, hvor en vigtig opgave er at rekruttere fremtidens matematikere, som det fremgår af nedenstående citat af Cédric Villani, institutleder på på *l'Institut Henri Poincaré,* Paris:

> ”[…] man skal sikre, at der vækkes et tilstrækkeligt antal kald blandt de unge, i en tid hvor man ikke som noget naturligt tænker på det at blive matematiker, eller mere generelt naturvidenskabsmand, som en drømmekarriere. For det er det jo! Det er en livsvej, som indeholder masser af eventyr. Med enkelte undtagelser, er det ikke en livsvej, man bliver rig af, men det er et erhverv, som giver en fremragende kombination af gode materielle forhold og intellektuel stimulering og status. Det er et godt erhverv, nyttigt for individet og samfundet. Det er meget vigtigt, at et tilstrækkeligt antal unge vælger denne karriere. Af denne grund, er det nødvendigt at give dem et glimt af denne drøm for at anspore dem til at kaste sig ud i studier, som kan forekomme længere og vanskeligere end de faktisk er, og som ofte viser sig at være meget tilfredsstillende.” (Chevallard, 2013, p.12, l.1-12, egen oversættelse)

Slår man ordet ’kald’ op i den danske ordbog på fx www.ordnet.dk får man følgende betydning: ”Hverv eller (livs)opgave, ofte af åndelig karakter, som man uegennyttigt påtager sig som følge af en stærk indre drift eller overbevisning” (egen understregning). Villanis udtalelse, der netop gør brug af udtrykket ”at vække et kald”, leder næsten tankerne hen på en religiøs tolkning. Det er matematikernes (”de frelstes”) opgave at vække kald hos unge mennesker, hvilket netop kan ske gennem en aktivitet som Math en Jeans, hvor intentionen er, at eleverne skal opleve matematikken som et spændende og levende fag. Matematikken skal i det franske samfund markedsføres, hvilket Chevallard (2013) i øvrigt stiller sig kritisk over for, idet han ikke mener, at man skal forsøge at sælge matematikken på denne måde.

De franske lærere i hvad der svarer til folkeskolen brænder for matematikfaget og føler sig sandsynligvis som en del af den kreds af matematikere, hvis opgave det er at vække begejstring for matematik som en slags ”apostle” for nu at blive i det religiøse univers. I kontrast hertil står de danske folkeskolelærere, der nok snarere opfatter sig selv som lønmodtagere og måske ikke nødvendigvis har samme interesse for deres fag. En faktor der her kan spille ind, er lærernes uddannelse. Hvor danske folkeskolelærere uddannes på lærerseminariet, uddannes de franske på universitetet og har således større tilknytning til forskningsmiljøet.

Jeg har her blot antydet en forskel på niveauet *samfund*, som klart kunne undersøges yderligere med en grundigere analyse af både det danske og franske uddannelsessystem, samfundsforhold samt historie. Det er dog et ambitiøst projekt, der ligger uden for dette speciales rammer. Under alle omstændigheder må konstateres, at der kan opstå forhindringer på alle fire disciplinuafhængige niveauer af didaktisk bestemmelse i forhold til at realisere en aktivitet som Math en Jeans i danske skolesammenhænge. Betingelser på ét niveau skyldes ofte betingelser på et højere liggende niveau, da niveauerne på en relativ kompleks måde påvirker hinanden. Det står klart, at Math en Jeans skal ses i et større perspektiv, hvis man ønsker at belyse, hvorfor projektet har stor tilslutning i Frankrig, men har svært ved at blive etableret i Danmark.

8. Konklusion

Jeg har i dette speciale undersøgt det franske fænomen Math en Jeans, der giver børn og unge mulighed for at fordybe sig i et matematisk problem over en længere periode.

Analysen i specialets **første del** har vist, at en typisk Math en Jeans opgave er åben og kan udfordre eleverne på et passende niveau og altså kan betegnes som et matematisk problem. Endvidere er en typisk Math en Jeans opgave lettilgængelig, kræver ingen særlige forudsætninger og første strategier vil opstå hurtigt og naturligt hos eleverne i arbejdet med opgaven. Flere af Godot og Greniers kriterier for at skabe en god forskningslignende situation er dermed opfyldt. Jeg har i specialets **anden del** analyseret konkrete situationer, hvor elever i 6.-7. klasse arbejder med Math en Jeans opgaven *Matematisk solitaire*, og herigennem belyst arbejdets karakter, dog uden at kunne slutte noget helt generelt om elevarbejde i Math en Jeans. Som det fremgår af a priori analysen i afsnit 6.1.4.1, viser *Matematisk solitaire* sig at være et typisk åbent Math en Jeans problem. Det bliver i analysen af de fire situationer klart, at en egenskab som åbenhed i en opgave har stor betydning for arbejdsprocessen. Eleverne bruger i handlingsfasen lang tid på at diskutere opgaven og må som forskeren selv fastlægge rammer og forudsætninger for at arbejde med den som vi ser i situation 1.

Elevarbejdet er karakteriseret ved en høj grad af selvstændighed, men læreren indtager alligevel en vigtig rolle i Math en Jeans ateliererne, idet han - uden at instruere - hjælper eleverne med at fokusere, systematisere, fastholde observationer og stiller spørgsmål, der kan bringe dem videre som vi ser i situation 3 og 4. Læreren kender dog heller ikke svarene på de spørgsmål, der stilles i opgaven *Matematisk solitaire*, som i øvrigt viser sig at være udfordrende og svære at besvare generelt, også for en ”voksen” matematiker. Af denne grund må det ses som værende tilfredsstillende, at eleverne kun kommer med enkelte hypoteser undervejs som i situation 1 (”der er over 100 resultater”) og blot eksperimenterer med fire konkrete tal og udfører forskellige operationer på disse. Ligeledes har de ikke selv så store krav til en besvarelse i forhold til fx generalitet, hvorfor interessen kan fastholdes over lang tid.

Endelig kan vi konkludere, at den matematiske viden, der er i spil i arbejdet med opgaven (det aritmetiske hierarki og brugen af parenteser) viser sig at være viden i udvikling hos eleverne. Fx er det en udfordring for dem at udregne et stykke som $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ som vi ser i situation 2. Til gengæld får de gennem praksis en fornemmelse af, hvordan de forskellige regningsarter virker og hvilke regler, der må gælde, hvilket må siges at være en vigtig faglig pointe.

Jeg har i specialets **tredje** del belyst fænomenet Math en Jeans fra et institutionelt perspektiv for at undersøge, om en aktivitet som Math en Jeans kan realiseres i danske skolesammenhænge. Sammenligner man danske og franske betingelser, viser det sig, at der på de øverste niveauer af didaktisk bestemmelse er markante forskelle, der kan være med til at forklare, hvorfor et projekt som Math en Jeans har stor tilslutning i

Frankrig, men derimod har svært ved at blive etableret i Danmark. Blandt andet er der i det danske skolesystem normer for, hvad et arbejde som folkeskolelærer indebærer, og der skal afsættes løntimer til lærerne, hvis de skal deltage i et projekt som Math en Jeans. Franske lærere har derimod tilsyneladende en anden opfattelse af deres profession og arbejder gerne frivilligt. Særlig vigtigt er det måske i denne forbindelse at påpege, at matematikken har en særlig status i det franske samfund, hvor det anses som en vigtig opgave at få vakt børn og unges interesse for matematik - en opgave som de franske lærere tager del i. Det er netop set i lyset af denne samfundsforestilling, at Math en Jeans fænomenet er opstået som et af de tiltag, der skal få eleverne til at opleve matematikken som et levende, kreativt og spændende fag.

Vi kan altså konkludere, at en aktivitet som Math en Jeans er vanskelig at etablere i danske skolesammenhænge, men vi må samtidig konstatere, at det eksperimenterende arbejde med åbne matematiske problemer er udbytterigt for eleverne. Det er selvfølgelig nødvendigt, at elever i matematikundervisningen, om det så er i folkeskolen eller gymnasiet, trænes i basale regneteknikker gennem rutineopgaver, men det må også ses som en vigtig opgave, at læreren lader eleverne arbejde med opgaver, som giver plads til mere eksperimentende tilgange, der kan give dem indblik i matematikkens kreative og sjove sider. Netop her kan et projekt som Math en Jeans måske inspirere.

9. Litteratur

Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). 'International Comparative Studies on Mathematics Education: A Viewpoint from the Anthropological Theory of Didactics'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), pp.47‑82.

Audin, P & Duchet, P. (2005). 'MATh.en.JEANS, chercher, chercher à faire, faire chercher, apprendre, faire apprendre, apprendre à faire chercher, apprendre à faire, faire, aimer, chercher à aimer, aimer chercher, apprendre à aimer chercher, etc..'. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, Actes Université d'été Animath, Saint Flour (Cantal), 22-27 août 2004, Brochure APMEP no.186, Paris.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). 'Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions in Spanish high schools'. *Educational Studies in Mathematics*, 59 no.1-3, pp.235-268.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). 'Twenty five years of the didactic transposition'. *ICMI Bulletin*, 58, 51-65.

Brosseau, G. (1997). 'Theory of didactical situations in mathematics'. Kap. 5. Dordrecht: Kluwer.

Carson, J. (2007). 'A Problem With Problem Solving: Teaching Thinking Without Teaching Knowledge'. *The Mathematics Educator*, vol. 17, no. 2, pp. 7–14.

Chevallard, Y. (2003). 'Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ?' UMR ADEF & IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2004). 'La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire'. 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal). IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF.

Chevallard, Y. (2006). 'Steps towards a new epistemology in mathematics education'. IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2013). 'Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement'. *Journal du seminaire TAD/IDD*, UMR ADEF.

Conway, J. H. (1996). 'The angel problem'. *MSRI*, vol. 29, Games of No Chance, Cambridge University Press. Se http://library.msri.org/books/Book29/files/conway.pdf (sidst besøgt 27/5).

Godot, K. & Grenier, D. (2005). 'Situations de recherche pour la classe. Objectifs, caractéristiques pour une dévolution à l'élève, condition pour une gestion pour l'enseignant'. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, 3e

Université d'été Animath, Saint Flour (Cantal), 22-27 août 2004, Brochure APMEP no. 168.

Dubois, I. (2012). 'Demarche d'investigation en mathématiques : l'exemple des ateliers Math.en.Jeans'. Actes du colloque EMF 2012.

Frost, G. (2006). 'Noter til kombinatorik og grafteori'. Københavns Universitet, Matematisk afdeling. Se http://www.math.ku.dk/noter/filer/dis1-01.pdf (sidst besøgt 27/5).

Hersant, M. & Perrin-Glorian, M. J. (2005). 'Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didatical situations'. *Educational Studies in Mathematics*, 59, no.1-3, pp.113-151.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1987). 'Problem solving. A handbook for teachers'. Second edition, Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). 'Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark'. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie* nr.18. Se http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf (sidst besøgt 27/5).

Nissen, L. K. (2011). 'Matematik for sjov. Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst'. IND's studenterserie nr. 24.

Polya, G. (1957). 'How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method'. Stanford University, Doubleday Anchor Books, Doubleday & Company, Inc. Garden City, New York.

Polya, G. (1962). 'Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving'. Vol. 1, John Mileys & Sons, Inc., New York.

Schoenfeld, A. H. (1985). 'Mathematical problem solving'. Academic Press Inc. (London) LTD.

Wilson, J. W, Fernandez, M. L. & Hadaway, N. (1993). 'Mathematical problem solving'. Wilson, P. S. (1993): *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*. Kap. 4, New York, MacMillan.
Se http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/PSsyn/Pssyn.html (sidst besøgt 27/5).

Winsløw, C. (2006a). 'Didaktiske elementer – en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik'. Frederiksberg, Biofolia.

Winsløw, C. (2006b). 'Didaktiske miljøer for ligedannethed'. *MONA*, 2006-2, pp.47-62.

Winsløw, C. (2012a). 'Mathematics at university: the anthropological approach'. *ICME12*, Seoul: ICMI, pp.887-901.

Winsløw, C. (2012b). 'Recherche et étude en mathematiques supérieures'. Dorier, J. L. & Coutat, S. (Eds): *Enseignement des mathématiques et contrat social - Enjeux et défis pour le 21ème siècle*. Actes du colloque EMF 2012, Genève: Université de Genève, pp. 1044-1052.

Winsløw, C. (2012c). 'Matematiklærerprofessionen i et institutionelt perspektiv'. *MONA*, 2012-4, pp.7-22.

Winsløw, C., Matheron Y. & Mercier, A. (2013). 'Study and research courses as an epistemological model for didactics'. *Educational Studies in Mathematics*, 82, no.1, pp.267-284.

Internetsider (sidst besøgt 27/5)

Math en Jeans' officielle hjemmeside:
http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm

Math en Jeans emner 2006-2007, Pontoise:
http://www.mejlfph.sitew.com/#PARTICIPANTS_ET_SUJETS.B

Math en Jeans emner 2011-2012, København:
http://mathenjeans.free.fr/amej/evenements/cong_07/partsuj_07/partic_suj.html

Magiske rektangler:
http://www.mathematische-basteleien.de/magsquare.htm

Approksimation af pi:
http://en.wikipedia.org/wiki/Pi

Matematisk solitaire:
http://www.freearcade.com/MathSolitaire.flash/MathSolitaire.html

Prins Henriks Skole:
http://www.prinshenriksskole.dk/content/dk/kontakt/ofte_stillede_sporgsmal?OpenChild=284#Child284

Mellemfolkeligt samvirke:
http://www.globalskole.dk/globalundervisning/Ungdomsuddannelser/Emner/Demokrati/metode/kulforskel.htm

Den danske ordbog:
http://ordnet.dk/ddo/ordbog?query=kald

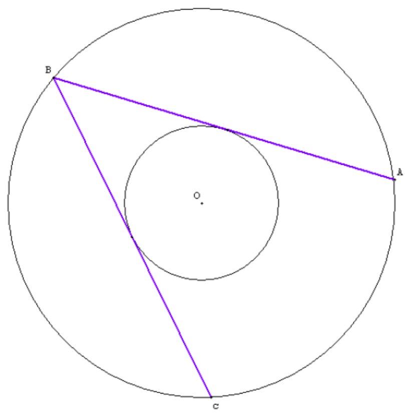
BILAG

Bilag 1: Datamateriale, 48 Math en Jeans opgaver (dansk)

Afslutningsproblem

Vi tager to cirkler *C* med radius *R* og *C'* med radius *R'*, med samme centrum og med $R > R'$. Vi tager udgangspunkt i et punkt *A* på *C*'s cirkelperiferi, vi tegner en af tangenterne til *C'*, som går gennem *A*, den skærer igen *C* i et punkt *B*, vi gentager fremgangsmåden med udgangspunkt i *B* osv.

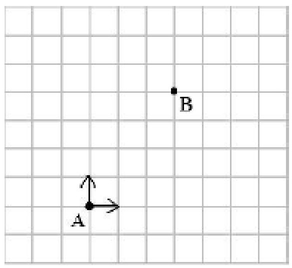
Vi får en række af linjestykker, vil der på et tidspunkt være et af disse linjestykker, der går gennem *A* igen?



Alle veje fører til Rom

6.1 Formulering

Vi betragter et kvadreret net. En person bevæger sig i dette ternede mønster ved kun at tage skridt, der er af samme længde, som siderne i de små kvadrater, til højre eller opad.

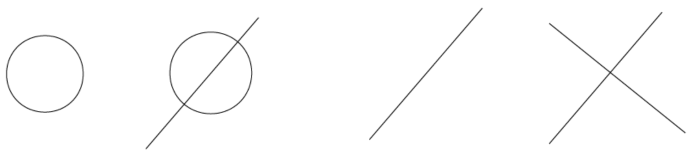


6.2 Spørgsmål

- Hvor mange forskellige veje kan han tage, hvis han skal fra *A* til *B*?
- Kan man finde en formel, der giver dette antal af veje, som afhænger af punkterne *A* og *B*'s position?
- Hvad sker der, hvis personen også kan bevæge sig til venstre og nedad?
- Hvad gør man, hvis der er "forhindringer" mellem punkterne *A* og *B*?
- Hvad sker der, hvis man har et net bestående af små trekanter? Et kubisk net?

Antal farver til at udfylde et kort

Vi undersøger her kort, hvor landenes grænser er rette linjer eller cirkler. Vi siger, at to lande er naboer, hvis de har en fælles grænse af længde forskellig fra nul. I eksemplerne givet nedenfor er to farver nok til at farvelægge kortet.



Problem 1:

Hvis vi tager udgangspunkt i kort konstrueret med rette linjer og cirkler, er 2 farver så tilstrækkeligt, hvis nabolandene skal have forskellig farve? Hvis ikke, hvad er det minimale antal farver, der skal bruges?

Problem 2:

Besvar det samme spørgsmål for kort, som udelukkende er konstrueret med halvlinjer.

Problem 3:

Besvar det samme spørgsmål for kort, som udelukkende er konstrueret med halvlinjer og cirkler.

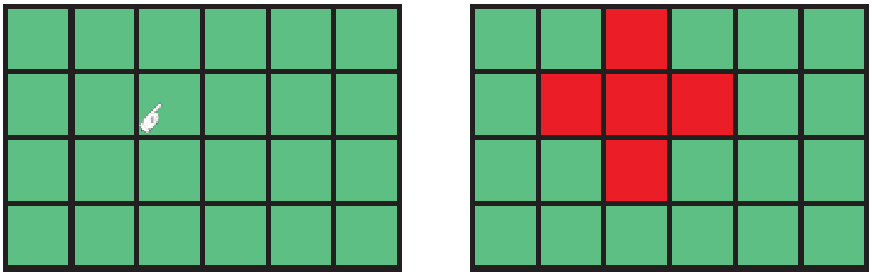
Den rejsendes problem

En rejsende vil besøge n interessante steder under sit ophold. Stederne er forbundet med veje.

a) Find en (af) betingelse(rne) for, at den rejsende kan besøge alle byerne én gang og herefter vende tilbage til sidst udgangspunkt.
b) Find en (af) betingelse(rne) for at den rejsende passerer hver vej én gang, før han vender tilbage.

Det følsomme dambræt

Et dambræt består af $p \times q$ små kvadrater, som alle er grønne til at starte med. Hver gang at man rører et felt, ændres farven på dette felt, men også på alle de felter, der deler en side med det rørte felt (man ændrer altså farven på fem felter ved at røre et felt i midten af brættet, tre felter ved at røre et felt i et hjørne og fire felter ved at røre et felt ude i siden, som ikke er i et hjørne).



Spørgsmål. Hvilke værdier af p og q gør det muligt at ændre et helt grønt dambræt $p \times q$ til et bræt med kun røde felter? Mere generelt, hvilke forskellige farvelægninger af dambrættet kan vi få?

Engel og djævel

På et uendelig stort skakbræt forsøger en djævel at fange en engel. Ved hvert træk fjerner djævlen ét af pladens felter, herefter kan englen hoppe til et felt, som ikke er blevet fjernet, og som har en maksimal afstand på N felter, hvor N er et positivt helt tal, fastsat til at starte med (N kaldes englens ”kraft”). Djævlens mål er at forhindre englen i at flytte sig.

Kan englen blive ved med at undslippe djævlen, så længe dens kræfter er tilstrækkelige?

Et solitaire spil?

Achilleus og Hektor spiller følgende spil: fire røde skåle og én hvid er stillet op på en række, den hvide skål står yderst til højre. Til at starte med er der to riskorn i alle de røde skåle.

Achilleus vælger en af skålene, tager alle riskorn op herfra og fordeler dem (ét korn pr. skål) i skålene, der står til højre for den valgte (han starter forfra i skålen yderst til venstre, hvis det er nødvendigt). Hvis det sidste riskorn lander i en tom rød skål, er det Hektors tur. Hvis det lander i en rød skål, som ikke er tom, tømmer han denne skål og fordeler kornene som før. Hvis det lander i den hvide skål, kan Achilleus frit vælge en ny skål at tømme.

Den spiller, som har lagt flest riskorn i den hvide skål, vinder.

Kan Achilleus vinde, uden at Hektor har kunnet spille?

Hvad hvis man tager *2n* røde skåle med *n* riskorn i hver og én tom hvid skål?

Farvelægning af polyeder

På hvor mange forskellige måder kan man farvelægge fladerne på et regulært polyeder? (tetraeder, kubus,…) med 3 farver?

Fodboldodds

En tipskupon består af 3 kolonner, svarende til de tre mulige resultater i en fodboldkamp: sejr, uafgjort eller nederlag. Man odds'er ved at sætte et kryds i hver række. Der er to muligheder afhængig af, om man vil spille på 7 eller 15 kampe. Spiller man på 7 kampe, vinder man, hvis man har højst én fejl. Spiller man på 15 kampe, vinder man, hvis man har højst 3 fejl. Hvor mange kuponer skal man mindst udfylde for at være sikker på at vinde, uanset hvilke resultater, der indtræffer, i hvert af de to tilfælde?

Man kan også variere de tre parametre: antal kolonner, antal rækker, antal acceptable fejl.

Fordelingen mellem piraterne

Fem ubarmhjertige, men rationelle pirater Claude, David, Eric, Fabien og Gaël vil dele de 1000 diamanter, som de lige har erobret. De beslutter sig for at komme med et forslag på skift (i rækkefølgen CDEFG) og så stemme om det. Hvis flertallet godkender et

forslag, bliver det vedtaget, og alle tager tilfredse derfra. Hvis forslaget forkastes, bliver den pirat, som kom med det, smidt i havet, og den næste pirat på listen kommer med et nyt forslag. I tilfælde af stemmelighed, bliver forslaget forkastet.
Piraterne synes, at det er meget morsomt at smide deres (gamle) kammerater i havet og vælger altid denne mulighed, hvis det ikke koster dem noget.
Hvordan bliver den endelige fordeling? Hvem bliver smidt i vandet?
Gaël foreslår, at de ikke forkaster et forslag med stemmelighed. Hvem vil være enig med ham?
Eric fortæller, at det på et tidligere togt, hvor 100 pirater skulle dele byttet, blev aftalt, at de ville bruge samme måde med systematisk at foreslå en retfærdig fordeling. Vil der være flertal for hans forslag?

Fransk billard

Ved et fransk billardbord (billard uden huller med to lange sider og to korte) sætter to topidrætsmænd sig for følgende træningsseance. Den ene skal komme med en rækkefølge af bander, der skal rammes, eksempelvis: tre korte, to lange, en kort og fire lange. Den anden skal skyde til én kugle placeret på billardbordet og ramme banderne i den givne rækkefølge.

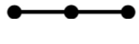
- Kan en hvilken som helst rækkefølge udføres af vores to mestre?
- Findes der et skud, som indeholder alle følgerne?
- Hvad hvis billardbordet har en anden form?

Frimærkeproblemet

En kuvert har plads til h frimærker, og frimærkerne kan have k forskellige værdier, hvor k er et naturligt tal. Hvis h og k er givet, hvad er så det maksimale beløb $n(h,k)$ sådan at man kan frankere brevet med en hvilken som helst værdi mellem 1 og $n(h,k)$? Hvad bliver da frimærkernes værdi? For eksempel, hvis $h = 2$, $k = 3$, har vi $n(2,3) = 8$, og de eneste mulige værdier er $\{1,3,4\}$.

Grafer

En graf er en samling knuder, forbundet eller ikke forbundet med kanter. En knudes grad er antallet af kanter, der udgår fra knuden. Vi betragter en graf med *n* knuder.

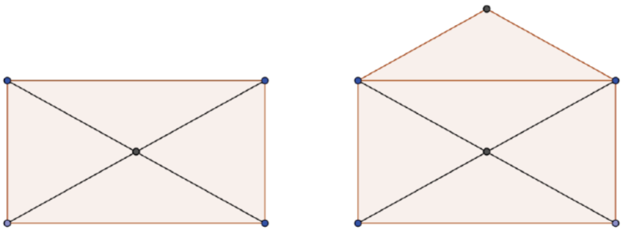
Hvor mange kanter kan den maksimalt have, hvis ingen knuder har grad ≥ 2? (vi siger, at den ikke har en delgraf )

Hvis ingen knuder har grad ≥ 3? (dvs. ingen delgraf )

Hvis ingen knuder har grad $\geq n$?

Hvis grafen ikke har ”trekanter”? (dvs. ingen delgraf ) Hvis den ikke har ”kvadrater”? Hvis den ikke har cykliske delgrafer med længde *n*?

Grafteori



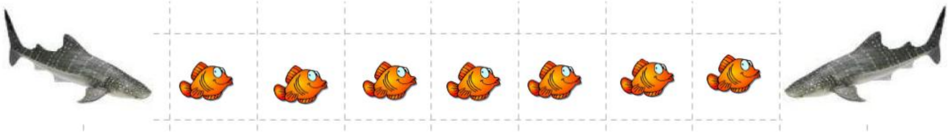
Kan man tegne figurerne ovenfor uden at løfte blyanten og uden at passere en linje mere en én gang?
Kan man tegne figurerne med de forrige betingelser og komme tilbage til det punkt, man startede ved?
Efter at have prøvet at tegne disse konvolutter, kan I undersøge, hvordan man kan vide, endda uden først at forsøge, om en given konstruktion kan tegnes.

Emnets hovedtræk:

1. Undersøge en nødvendig betingelse for at realisere konstruktionen.
2. Studere problemet ’Königsberg broer’.
3. Finde (og programmere?) en algoritme, der søger efter veje, som opfylder betingelserne.

Hajens spilstrategi

Lad *k* og *m* være hele naturlige tal. To hajer er adskilt af *m* portioner mad opstillet på en række. På skift spiser hver haj et antal madportioner, der varierer mellem 1 og *k*. Den haj, som spiser den sidste portion, bliver spist af den anden haj. Hver haj kender det antal portioner, som den anden haj har spist.



Problem:

Findes der en overlevelsesstrategi for hajen som starter eller for den anden haj?

Andet man kan undersøge:

Antallet af portioner, som hajerne kan vælge at spise hver gang, er en delmængde af $\{1,2,\ldots,k\}$. Er der en overlevelsesstrategi?

Eksempel: der er 7 portioner mad mellem de to hajer, og hver haj må kun spise 1, 3 eller 6 portioner.

Håndtrykkene

Hr. og Fru Rocco er i et selskab, hvor der er n andre par. Alle i selskabet giver hånd til dem, de kender (kun én gang), men ikke til hverken sig selv, sin ægtefælle og folk, som de ikke kender. Hr. Rocco konstaterer, at de andre $2n+1$ personer i forsamlingen alle har givet et forskelligt antal håndtryk. Hvor mange håndtryk har Hr. og Fru Rocco udvekslet?

Kaptain Kids skat

Første del

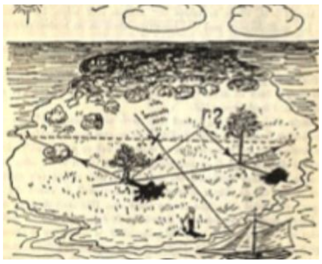
På et gammelt pergament fra Kaptain Kid, finder I denne tekst:

Start ved citadellets fyrtårn og gå mod Nordvest.
På den første ø står en palme, et egetræ og en galge.
Gå fra galgen og tæl skridtene hen til egetræet. Drej her en kvart omgang mod højre, gå det samme antal skridt som før og plant en kæp i jorden.
Gå på samme måde fra galgen til palmen. Drej herefter en kvart omgang mod venstre og gå samme antal skridt som fra galgen til palmen. Plant så en kæp i jorden.
Midt imellem disse to kæppe befinder skatten sig.

Da I kommer til øen, ser I det gamle palmetræ og den gamle eg, men desværre er galgen der ikke længere. Kan I alligevel finde Kaptain Kids skat?

Anden del

Vi foreslår, at man definerer addition og multiplikation for punkterne i et koordinatsystem. Lad $A(a, b)$ og $B(c, d)$ være to punkter i planen.



Vi foreslår følgende regler:

Addition: $A(a, b) + B(c, d) = S(a + c, b + d)$

Subtraktion: $A(a, b) - B(c, d) = S(a - c, b - d)$

Multiplikation: $A(a, b) \times B(c, d) = P(a \times c - b \times d, a \times d + b \times c)$

a) Find en metode, som giver koordinatsættet til midten af et linjestykke.
b) Placer i et koordinatsystem følgende forskellige koordinatsæt:
   $(0,0); (0,1); (1,0); (-1,0); (0, -1);$
   $(0,1) + (1,0); (0,1) - (-1,0); (1,0) \times (0,1); (1,0) \times (0, -1);$
   $(1,1) \times (0,1); (1,1) \times (0, -1); (1,3) \times (0,1); (1,3) \times (0, -1).$

c) Hvilken geometrisk operation svarer til at gange med koordinatsættet $(1,0)$? Og med koordinatsættet $(0,1)$? Og med koordinatsættet $(0, -1)$?

Måske vil det være nemmere for jer at hjælpe Kaptain Kid med at finde skatten ved hjælp af disse nye operationer…

Konstruktion med farver

Her kommer firfarveproblemet: Kan man altid farve et kort med fire forskellige farver således at to nabolande har forskellig farve? Svaret er JA, men man kan kun bevise det ved hjælp af en computer.

Vi interesserer os for dette problem, men i tre dimensioner, for eksempel med Lego.

Spørgsmål 1:

Hvor mange farver er tilstrækkelige til at konstruere en plan flade? En hvilken som helst flade?

a) med 2 × 2 klodser?
b) med 2 × 4 klodser?
c) generelt?

Eksempler:

- For at konstruere et tårn er to farver nok.
- For at konstruere en ”plan” mur, er tre farver nok.

Spørgsmål 2:

I tre dimensioner: hvis to farver, der deler en flade, skal være forskellige, hvor mange farver er så tilstrækkelige til at konstruere en kubus? en regulær rummelig figur? en hvilken som helst figur?

Kvadrater i rektangler

3.1 Formulering

Ideen er at opdele et rektangel i forskellige kvadrater ved hjælp af en række udskæringer.

Eksempel: vi opdeler et 16/9 rektangel (dvs. med længde 16 og bredde 9) i forskellige kvadrater.

- Det første kvadrat får vi ved at opdele rektanglets startlængde (16), det er 9 gange 9.
- Der bliver et rektangel tilbage med længde 9 og bredde 7, vi skærer et kvadrat ud ved at opdele den nye længde, det vil være 7 gange 7.
- Dernæst får vi et nyt rektangel med længde 7 og bredde 2. Vi skærer igen og får 3 kvadrater, der alle er 2 gange 2.
- Til slut får vi med en sidste udskæring 2 kvadrater, der er 1 gange 1.

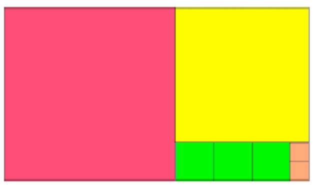


FIG. 3 - Figur efter udskæring

Vi opnår dermed koden: **1-1-3-2**, for man kan placere:

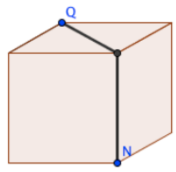
- **1** enkelt kvadrat ud fra det første rektangels længde,
- herefter **1** enkelt kvadrat ud fra det første rektangels bredde (længden af det rektangel, der bliver tilbage),
- endelig kan man placere **3** ud fra bredden af det andet rektangel, man får (længden af det rektangel, der bliver tilbage),
- og **2** ud fra længden af det sidste rektangel.

Området er dækket totalt, og kodningen er hermed færdig.

3.2 Spørgsmål

- Hvordan finder man koden, når man har den brøk, man starter med?
- Hvordan finder man frem til rektanglernes størrelse ud fra deres kodning?
- Hvordan kan jeg sammenligne to tal, hvis jeg kender deres kodning?
- Er man sikker på, at udskæringen stopper på et tidspunkt, uanset hvilken form, man starter med?
- Hvad sker der i det tilfælde, hvor man har et A4 papir (omkring 210mm × 297 mm, men det eksakte forhold er kvadratroden af 2, hvilket også er forholdet mellem diagonalen og siden i et kvadrat)?

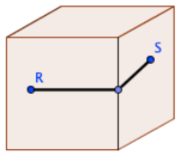
Kubens geometri



Spørgsmål 1: Hvad er en ret linje? En trekant? En cirkel?...

Eksempler: Er afstanden QN en ret linje (dvs. den korteste afstand mellem Q og N)? Hvis ja, er den unik?

Spørgsmål 2: Hvordan finder man den korteste vej mellem to punkter? Hvornår er den unik?



Findes der parallelle rette linjer?

Hvad er vinkelsummen i en trekant?

Spørgsmål 3: Forestil jer at 2,3,4 (eller flere!) personer befinder sig på en kubus. Hvor skal de placere sig for at være så langt væk fra hinanden som muligt?

Spørgsmål 4: Samme spørgsmål for et tetraeder, en kugle, etc.

Labyrinter

Hvordan finder man vej ud af en labyrint? Kommer man ud, hvis man udforsker labyrinten på må og få? Hvor lang tid tager det? Vil strategier, hvor man ikke går tilfældigt rundt, være bedre?

Lys!

Hvordan skal man placere tre spots i et kubisk værelse for at få et så stort oplyst rumfang som muligt?

a) Hvis man kun sætter spots i loftet?
b) Hvis man tillader spots hvor som helst?

Magiske rektangler

Magiske rektangler har pirret folks nysgerrighed siden tidernes morgen… Kinesiske matematikere har kendt til dem siden -650, araberne siden det 7.århundrede. Kvadraternes magiske karakter har gjort, at studiet af dem ofte er forbundet med religion, med astrologi.

På samme måde som magiske kvadrater, er et magisk rektangel et rektangel, hvor der gælder at:

- Summen af tallene i hver kolonne er den samme.
- Summen af tallene i hver række er den samme.

Et rektangel siges at være ”normaliseret” med længde L og bredde l, hvis de tal der bruges i det magiske rektangel er: $\{1,2,\ldots,L \times l\}$

<u>*Spørgsmål 1*</u>*:* Hvilke magiske rektangler findes der (normaliserede eller ej)? Hvordan kan man konstruere dem?

<u>*Eksempler:*</u>

1	2
3	4

1	3
4	2

Dette er ikke magiske rektangler. Er det muligt at konstruere et normaliseret 2×2 rektangel…

1	1
1	1

1	2
2	1

a	b
b	a

Dette er magiske rektangler. Er det den eneste mulighed?

Spørgsmål 2:

Et anti-magisk rektangel er et rektangel, hvor summen af tallene i hver række og summen af tallene i hver kolonne alle er forskellige. Hvilke anti-magiske rektangler findes der (normaliserede eller ej)? Hvordan kan man konstruere dem?

Eksempel:

1	2
3	4

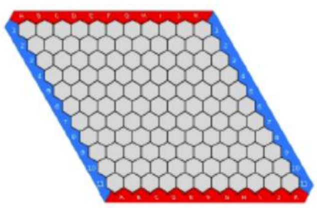
Dette rektangel er anti-magisk.

Matematik og spil

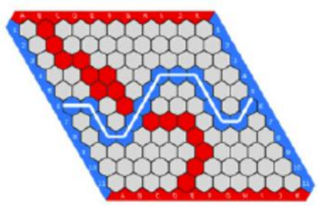
• **Dobble**. Spillet Dobble består af 55 kort med forskellige symboler. Alt afhængig af hvordan man vælger at spille (der er flere mulige regler), gælder det altid om, at finde et symbol, som to kort har til fælles, så hurtigt som muligt. To kort i spillet Dobble har altid *ét og kun ét* symbol til fælles, som i eksemplet nedenfor:

Hvordan er spillet konstrueret? Hvor mange forskellige symboler skal man bruge for at lave et spil med 10 kort?

• **Hexagone.** Man spiller spillet Hexagone på en plade, der består af små sekskanter, som illustreret nedenfor:



Hver spiller placerer på skift en sekskant med sin farve (rød eller blå) på et af pladens tomme felter. Vinderen er den, der først forbinder de to sider, der har den farve man spiller med:



Kan spillet blive uafgjort? Er der en vinderstrategi for en af spillerne og hvis ja, hvilken? Hvorfor ikke spille på en plade, der er dækket af små kvadrater?

Møntsystem

2.1 Formulering

Forestil jer, at møntsystemet kun består af to mønter: 5€ og 7€. Ved visse beløb er det nemt nok at finde ud af, hvilke mønter man skal betale med.

Hvis en ting eksempelvis koster 12€, er det nok at give 1 af hver mønt. Eller hvis en ting koster 2€, er det nok at give 1 7€ mønt, og ekspedienten giver os så 1 5€ mønt tilbage.

Men problemet bliver langt mere kompleks ved andre beløb. Hvis en ting for eksempel koster 1€, skal man give 3 7€ mønter, og ekspedienten giver os så 4 5€ mønter tilbage.

2.2 Spørgsmål

- Er det muligt at betale et hvilken som helst beløb med dette system bestående af mønterne 5€ og 7€?
- Kan man erstatte 5€ og 7€ med hvilke som helst andre værdier?
- Hvad sker der, hvis ekspedienten ikke længere har nogen byttepenge?
- Hvad sker der, hvis man har 3 forskellige mønter? 4 forskellige mønter? osv…
- Hvordan finder man et system, som minimerer antallet af mønter, der bliver brugt ved hvert køb?

n! ('n fakultet')

Vi undersøger kvalitative egenskaber ved faktorer.

a) Hvad er antallet af cifre i $n!$?
b) Hvad er antallet af nuller (i slutningen?!) af $n!$?
c) Hvad er det sidste ciffer forskellig fra nul i $n!$?

Opsplitning i enhedsbrøker

I antikke civilisationer var måden at skrive rationale tal anderledes end vores; I det gamle Egypten repræsenterede man for eksempel

$\frac{7}{11}$ ved hjælp af summen $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{88}$ og

$\frac{55}{84}$ ved hjælp af summen $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{84}$.

Generelt udtrykte egypterne et rationalt tal $\frac{p}{q}$ (hvor p og q er hele naturlige tal forskellig fra nul med $p \leq q$) ved hjælp af en endelig sum af enhedsbrøker (med 1 i tælleren), som alle er forskellige:

$$\frac{7}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{88}$$

$$\frac{55}{84}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{84}$$

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}$$

hvor $n_1, \dots, n_k$ er hele naturlige tal forskellig fra nul, der alle er forskellige. Vi siger, at $\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}$ er en *opsplitning af* $\frac{p}{q}$ *i enhedsbrøker*.

Denne skrivemåde gør det nemmere at sammenligne rationale tal. Hvis vi for eksempel tager $\frac{7}{11}$ og $\frac{55}{84}$, kan vi hurtigt se, at $\frac{55}{84}$ er større end $\frac{7}{11}$ ved at sammenligne deres opsplitning i enhedsbrøker, hvilket ikke umiddelbart er klart ved første øjekast.

Spørgsmål. Med kendskab til denne skrivemåde, er matematikeren selvfølgelig forvirret over en så usædvanlig repræsentation af de rationale tal; men han genvinder hurtigt sin karakter og stiller sig naturligvis følgende matematiske spørgsmål:

1) Givet et rationalt tal $\frac{p}{q} \leq 1$, findes der så en opsplitning af $\frac{p}{q}$ i enhedsbrøker? Hvordan finder man en sådan opsplitning?
2) Hvor mange forskellige opsplitninger i enhedsbrøker har $\frac{p}{q}$?
3) Er der grænser for, hvor mange led, der kan være i en opsplitning af $\frac{p}{q}$ i enhedsbrøker?
4) Findes der et helt tal N, således at alle rationale tal $\frac{p}{q} \leq 1$ kan skrives som en sum af enhedsbrøker med mere end N forskellige led? Hvis ja, hvad er det mindste N, som opfylder denne egenskab?

Idé. Til at starte med vil det bedste ofte være at kigge på, hvad der sker i visse specialtilfælde. For eksempel, hvad er opsplitningen af tallet *1/q* i enhedsbrøker (eksempel: 1/4 = 1/6 + 1/2), hvad er opsplitningen af tallet *2/q*...

Pandekageudskæring

n personer ønsker at dele en cirkelformet pandekage. Det betyder ikke noget for dem, hvis alle stykker ikke er lige store, de vil bare alle være sikre på at få et stykke. Man kan skære i pandekagen, hvor man vil (man behøver ikke skære gennem centrum). Hvor mange gange skal man mindst skære? Ændrer det noget, hvis pandekagen er snoet, så den har form som en hestesko? Og hvis den er cirkelformet, men med et hul i midten (og form som en ring)?

Pengesedlerne
Hvis jeg skal betale 18€, kan jeg vælge at betale med følgende mønter og sedler: 10+2+2+2+2 eller på den meste økonomiske måde: 10+5+2+1.
a) Hvis der kun er trykt fem forskellige sedler, hvilket valg er så mest økonomisk, hvis man skal kunne betale alle beløb op til 200€?
b) Hvis man kun tillader summer større end 5€, hvor mange forskellige beløb skal man så udgive for at kunne betale alle summer op til 200€?

Periodiske ord
2. Det andet projekt, som jeg forestår jer, stiller spørgsmål såsom

Hvis man i et ord bytter om på to forskellige bogstaver, der står ved siden af hinanden, kan man så altid opnå et periodisk ord? For eksempel får man ved ombytning i ordet *abba* ordene *baba* og *abab,* begge periodiske. Kan man bestemme alle ord, der har denne egenskab? Og hvad hvis man begrænser sig til kun to ombytninger?

Det er et typisk emne om Kombinatorik af Ord, hvis ubestridte mester er Hr. Lothaire (en fransk gruppe fra Lotharingie regionen). Det giver mulighed for at diskutere

spørgsmål, der i den grad er oppe i tiden, såsom frie monoider[23] af ord, som man kan danne (ordforråd) ud fra et givent alfabet og spørgsmålet om periodicitet af disse ord.
Løsningen gør brug af en kendt sætning, nemlig den af Wilf-Fine, men starten skulle også give mindre resultater, der ikke desto mindre er af stor interesse. Derimod er den grafiske del ikke lige så interessant som den i det første projekt[24]; man kan ikke andet end at give nogle eksempler på disse ord og studere deres egenskaber.
Det drejer sig også om en personlig forskning, som til og med vil være emnet, som jeg[25] præsenterer i en kommende matematisk artikel.

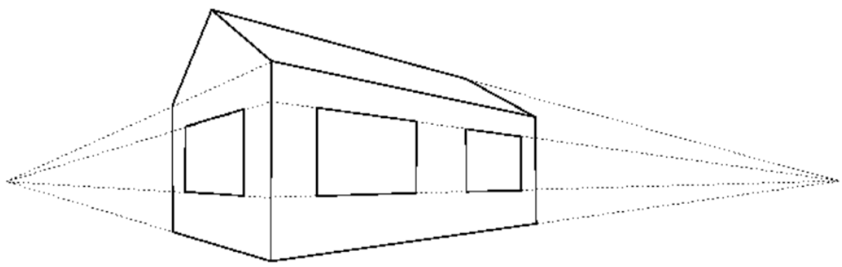
Perspektiv

Vi placerer en kubus (af ståltråd) på en flade, vi oplyser den med en projektør (tæt nok på kubussen), hvordan vil kubussens skygge se ud?

Perspektiv m. to forsvindingspunkter

Forestil jer, at vi ser et kantet objekt gennem et vindue, og at vi tegner linjerne set gennem ruden. Tegningens horisontale parallelle linjer er ikke parallelle set igennem ruden, men bevæger sig mod et punkt. Hvis vi kun har tre retninger (to horisontale og en vertikal), da vil linjerne i hver af de to horisontale retninger mødes i samme punkt. Objektets vertikale linjer forbliver vertikale set gennem ruden. Det er derfor, at kalder man en sådan tegning for "perspektiv med to forsvindingspunkter".

Størrelsesforholdene ændrer sig også. Linjerne der er længere væk er mindre. Derfor er det ikke nemt at konstruere en god perspektivtegning med to forsvindingspunkter.



Hvis vi skal tegne en mursten på dette hus, må vi nøje overveje murstenens dimensioner. Vi skal først svare på en række forskellige spørgsmål…

[23] Se fx http://www.math.utu.fi/en/home/karhumak/combwo.pdf.
[24] En af de andre opgaver, som eleverne blev præsenteret for.
[25] Matematiker ved navn Dan Schwarz.

- Hvordan kan vi konstruere miden af et horisontalt linjestykke? (Desværre er det ikke bare midten på tegningen set gennem ruden!)
- Hvordan kan vi konstruere midten af et vertikalt linjestykke?
- Hvordan kan vi fordoble længden af et linjestykke, horisontalt eller vertikalt? gange det?
- Hvordan kan vi opdele et linjestykke i flere lige store dele, for eksempel i tre eller fem?
- Hvordan kan vi tegne et hus magen til ved siden af det første?
- Hvad sker der, hvis vinduet ikke er vertikalt, men skråt?

Punkter og halvplaner

Lad D være en cirkel i planen og $r > 0$. Der er nu to spillere, den første spiller med punkter, og den anden spiller med halvplaner[26]. Den første spiller vælger et punkt M_1 indenfor D. Den anden vælger en halvplan S_1, som indeholder M_1. Nu vælger den første spiller et nyt punkt M_2, som både ligger inden for cirklen D og i halvplanen S_1. Den anden spiller vælger dernæst en halvplan S_2, som indeholder M_2. Spiller nummer to vinder, hvis alle punkter valgt af spiller nummer et på et tidspunkt ligger inden i en cirkel med radius r. Kan I finde en taktik for spiller 2, så spiller 2 er sikker på vinde, hvis han følger denne taktik, hvilken måde bør spiller 1 spille på?

Punkter på et kvadrat

Vi placerer n punkter på et enhedskvadrat. Hvor skal de placeres, så de er så langt fra hinanden som muligt?

På jagt efter skatten

I befinder jer midt i en tom ørken. 1000 km derfra ligger en fantastisk skat begravet. I vil absolut have fat i den, men jeres bil giver jer et problem: den kører 2,5 km pr. liter brændstof, men der kan kun være 200 liter i tanken. I beslutter derfor at placere ekstra benzindunke på strategisk valgte steder på den strækning I skal køre.

1. Forklar hvorfor det med denne strategi er muligt at nå frem til skatten.

[26] Fx vil en linje trukket fra ét punkt til et andet (begge på cirkelperiferien) opdele cirklen i to halvplaner.

2. Hvor mange liter brændstof har bilen brug for for at transportere jer frem til målet? Hvor skal man placere reservedunkene? Er jeres løsning den bedst tænkelige?
3. Hvad skulle man gøre, hvis skatten befandt sig 2000 km væk…? For søren da, vi har glemt hjemturen, hvordan klarer vi den?

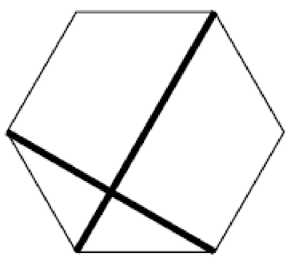
Radioaktivitet

Den 5. april 2011 undersøgte man i området Ibaraki syd for Fukushima et kg sand og fandt her 526 becquerels af radioaktivt cæsium.

Vurder hvor mange år der vil gå, før stranden igen kan benyttes.

Rum med fælder

Vi betragter et sekskantet rum. Vi ved, at der er to usynlige stråler, som er dødelige for mennesker, men ikke dræber robotter, hver stråle går fra ét hjørne til et andet, og vi ved ikke, hvilke to hjørner, det drejer sig om (og som kan være kan de samme for de to stråler). Vi vil gerne finde ud af, hvor de to stråler er. Til det formål sender vi robotter ind, som går i lige linjer, uanset hvilket punkt, de bliver sat til at starte ved og hvilket, de bliver sendt over imod. Hver robot har en måler, som registrerer, hvor mange stråler, den er gået igennem. Hvor mange robotter skal minimum bruges, og hvilke veje, skal vi lade dem gå for at være sikre på, at vi opdager strålerne? Hvad hvis vi ændrer antallet af hjørner i rummet? Eller antallet af stråler? (Man kan forestille sig, at man fastsætter robotternes ruter til at starte med, eller at man vælger en robots rute i forhold til forrige robotters resultater).



Skift plads

Første del

1. Først har vi dette spil:

Man spiller alene og har to muligheder:

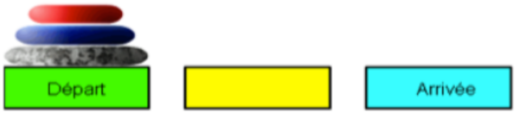
- flytte en brik én plads til et tomt hul;
- eller lade den springe over en enkel brik og lande i et tomt hul.

Hvor mange træk er nødvendigt for at få de sorte og de hvide brikker til at bytte plads? Hvis man starter med p sorte og q hvide?

2. Og hvad hvis det var tilladt at springe over et hvilket som helst antal brikker til man lander i et tomt hul…?

Anden del

1. Og nu har vi dette spil:



Ved hvert træk skal man flytte en skive fra ét sted til et andet. Det er forbudt at placere en skive ovenpå én, der er mindre. Hvor mange træk er nødvendigt for at få flyttet hele pyramiden fra én plads til en anden? Hvad hvis vi har n skiver til at starte med?

2. Samme arbejde hvis man starter med to pyramider på hver sin plads og ønsker at flytte dem til en ny plads…

Skubbespil

A	B	C
D	E	F
G	H	

H	D	F
	A	B
G	C	E

Kan man få den højre plade til at se ud som den venstre ved hjælp af en række operationer, hvor man må rykke et bogstav ved siden af det tomme felt (op, ned, til højre eller til venstre) hen til det tomme felt?

Find eksempler på plader, der er forbundet med den første plade på denne måde og eksempler på plader, som ikke er forbundet med den første plade på denne måde.

Spiren

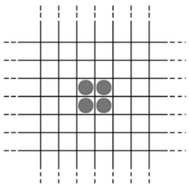
Dette spil kaldes 'spiren', da figurerne, der optræder, ligner træers spiren.

Dette spil spilles af to spillere med en kuglepen og et stykke papir. Til at starte med afsættes 3 punkter på papiret. Hver spiller skal på skift trække en linje mellem to eksisterende punkter og sætte et nyt punkt på denne linje. To regler skal overholdes: linjerne må ikke krydse hinanden, og et punkt må ikke være forbundet med mere end tre linjer.
Taberen er den, der ikke længere kan trække en linje uden at overtræde disse regler.

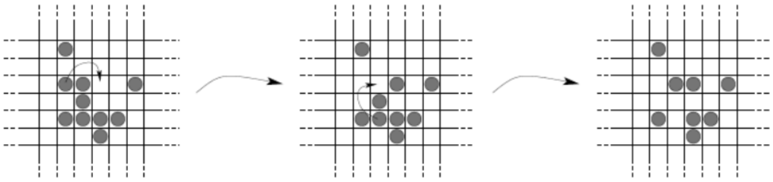
1. Hvorfor vil spillet altid stoppe? Hvor mange træk kan maksimalt foretages?
2. Hvordan er det optimalt at spille? Er der en vinderstrategi? Hvad hvis man starter med to eller fire punkter…?
3. Hvad sker der, hvis man tillader at hvert punkt må være forbundet med fire linjer? Eller kun to linjer?
4. Prøv følgende variant: hvert punkt må være forbundet med fire linjer, men de to nye linjer, som udgår fra et punkt, der ligger på en linje, skal placeres modsat hinanden: det vil sige, at det er forbudt at gå ud til samme side ved to linjer, som allerede er tegnet.

Solitaire

Vi spiller følgende spil. Et $n \times n$ kvadrat af brikker er placeret på en uendelig stor kvadreret plade. For eksempel ser 2×2 tilfældet således ud:



Vi følger herefter reglerne i solitaire: en brik kan hoppe over en anden vertikalt eller horisontalt og lande på et tomt felt. Brikken, som man hopper over, er så fanget og fjernes fra pladen. Nedenfor ses eksempler på træk:



Det gælder om at fange alle brikkerne, undtagen den sidste selvfølgelig. Hvis det er nemt at vinde i 2×2 tilfældet, hvad så med et 3×3 eller 4×4 kvadrat?

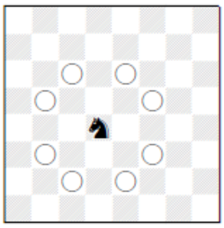
Springerens tur

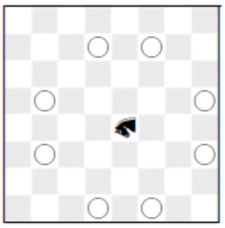
Vi placerer en Springer på et skakbræt. Kan den gennemrejse skakbrættets 64 felter uden at passere et felt mere end én gang?

Kan den gøre det på en måde, så den lukker sin rute, dvs. kommer tilbage til det felt, den startede på ved det 65. træk?

Man kan ved hver rundtur nummerere skatbrættets felter ud fra den rækkefølge, som Springeren tager: forsøg at opstille ekstra betingelser for denne nummerering.

Hvad sker der, hvis Springeren bevæger sig anderledes ((1,3),(2,3),…)?





Stern-Brocots træ

Vi vil trin for trin konstruere en række af tal. Vi starter med at lade de to brøker $\frac{0}{1}$ og $\frac{1}{0}$ repræsentere henholdsvis 0 og uendelig. Ved hvert trin indskyder vi brøken $\frac{m+m\prime}{n+n\prime}$ mellem de to brøker $\frac{m}{n}$ og $\frac{m\prime}{n\prime}$, som vi kalder midterbrøken af $\frac{m}{n}$ og $\frac{m\prime}{n\prime}$. Således har vi efter

1. trin: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$

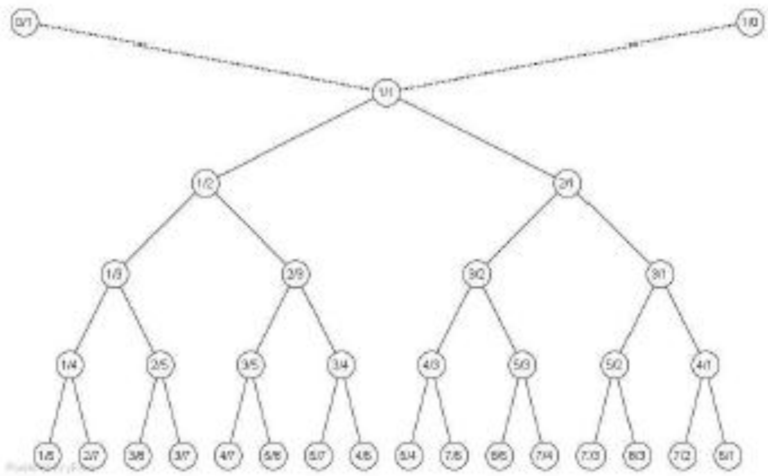
2. trin: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$

Osv…

Efterhånden får vi en liste med brøker, som bliver længere og længere. Vi vil præsentere denne liste på en ret særlig måde. De brøker, der er kommet frem ved det *p*'te trin, noteres på den *p*'te linje, men den horisontale fordeling bevares. Således kan listen ved det 3. trin skrives:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & \frac{1}{0} \\
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & & & \frac{2}{1} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{1} &
\end{array}$$

De brøker, som er dukket op i det *p*'te trin, er midterbrøker af de to brøker, hvor kun den ene er dukket på i det *p-1*'te trin (den anden har været der fra starten). For at få vores træ binder vi disse to brøker sammen. Hver brøk (pånær $\frac{0}{1}$ og $\frac{1}{0}$) er altså forbundet til to brøker. Dette giver os for 5. trin:



Vi får det, man kalder et træ. Det har fået navnet efter Moriz Stern, en tysk matematiker, og Achille Brocot, en fransk urmager, som opdagede det uafhængigt at hinanden (i henholdsvis 1858 og 1860).

Vi vil gerne vide, hvilke tal, der optræder i træet, under hvilke skrivemåder og hvor mange gange, de optræder. Hvert tal i træet kan nemt angives ved en række af *V*(enstre) og *H*(øjre) (vi starter ved $\frac{1}{1}$). For eksempel repræsenter *VVH* brøken $\frac{2}{5}$. Hvilken "metode" kan omdanne en brøk (der optræder i træet) til en række af *V*'er og *H*'er? (og omvendt?)

Hvis vi bruger denne metode på et tal, der ikke optræder i træet, for eksempel det gyldne snit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, hvad vil der så ske? Hvad vil I få?

Talsystemer

Vores talsystem er baseret på opdeling i grupper af 10, 100, 1000 osv.

Når vi eksempelvis skriver 2635 tyder det at

$$2635 = 2 \times 1000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 5$$

som vi også kan skrive:

$$2635 = 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$$

5 indikerer, at der i 2635 er fem enere. 3 indikerer, at der er 3 grupper af 10, 6 at der er 6 grupper af 10 ganget med 10, altså 6 grupper af 100, og 2 at der er 2 grupper af 10 gange 10 gange 10, altså 2 grupper af 1000.

Det forekommer os naturligt at opdele i grupper af 10, måske fordi vi har ti fingre. Men vi har to arme, så hvorfor ikke opdele i grupper af 2?

Hvis vi opdeler 2635 i grupper af 2, vil der være én en'er og 1317 grupper af 2. Vi deler herefter disse 1317 grupper af 2 i grupper af 2: der vil så være én gruppe af 2 og 658 grupper af 2 gange 2.

Vi deler så disse 658 grupper i grupper af 2. Der vil ikke være nogen isoleret gruppe af 2 gange 2, og vi vil få 329 grupper af 2 gange 2 gange 2 gange 2. Osv.

Tallet 2635 skrives således, i vores system, hvor vi opdeler i grupper af 2: 101101001011.

Det betyder at:

$$2635 = 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

Skrivemåden 101101001011 er skrevet med grundtal 2 og svarer til tallet 2635, som er skrevet med grundtal 10.

Man kan også skrive tal med grundtal 5, 9 eller endda 16.

Spørgsmål:

1. Hvor mange symboler skal man bruge for at skrive et tal med grundtal *n*?
2. Hvordan kan man skrive et tal givet som decimal med grundtal *n*?
3. Hvordan kan man omskrive et tal med grundtal *n* til et tal med grundtal 10?
4. Kan man addere, subtrahere, multiplicere og dividere tal med grundtal *n* uden først at omskrive til et tal givet som decimal?
5. Hvordan omskriver man et tal skrevet som brøk til at et tal skrevet "med komma" og omvendt, hvis grundtallet er *n*?

Tetraeder

1. Det første projekt, som jeg forestår jer, stiller spørgsmål såsom

Mellem hvilke værdier kan summen $\sum_{1\leq i<j\leq 4} < A_iPA_j$, bestående af seks vinkler, hvor $A_1,\ldots,A_4$ er siderne i et tetraeder, og hvor P er et punkt inden i tetraederet, befinde sig?

Hvad kan man sige om en lukket kurve på en kugleoverflade, som har mindre længde end en storcirkel på kugleoverfladen? Er den indeholdt i en halvkugleflade?

Der er en uventet sammenhæng mellem disse spørgsmål! Et problem, som tilsyneladende handler om sfærisk trigonometri, der kan løses med en kombinatorisk tilgang. Man kan i projektet tegne tredimensionelle dynamiske figurer (applets), med de tilladte bevægelser, for at undersøge de mulige svar på en heuristisk måde.

Matematiske begreber lige fra sfærisk geometri til teoremer om konveksitet vil være i spil, men også kombinatoriske metoder, hvor kendskab til geodætiske linjer på en kugleoverflade (storcirkler) er det eneste, der er nødvendigt.

Det handler om en personlig undersøgelse med ting, man kun kender meget lidt til, som jeg mestrer til fulde (idet jeg[27] er forfatter bag).

Tetrisbrikker

4.1 Formulering

Tetrisbrikker er sammensat af 4 små kvadrater af samme størrelse. Der findes 7 forskellige.

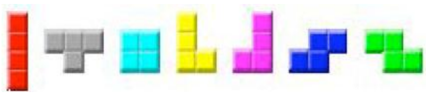


Fig. 4 - Tetrisbrikker

Domino-brikker er sammensat af 2 kvadrater. Brikker, som er sammensat af 3 kvadrater kaldes triomino-brikker ; 4, tetromino-brikker ; 5, pentamino-brikker; 6, hexamino-brikker; 7, heptamino-brikker; 8, octamino-brikker; osv…

[27] Dan Schwarz som i opgaven *Periodiske ord.*

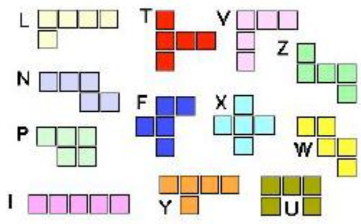


Fig. 5 - Pentamino-brikker

Spørgsmål:

- Hvor mange hexamino-brikker findes der? Heptamino? Octamino?
- Kan man finde en formel, der giver antallet af forskellige brikker, man kan fremstille ud fra et givent antal kvadrater?
- Kan man dække et rektangel ved hjælp af alle slags pentamino-brikker?
- Hvordan dækker man et rektangel kun ved hjælp af én type brikker?
- Hvad sker der, hvis man erstatter de små kvadrater med ligesidede trekanter?

Tæpperne

Vi interesser os her for ”tæpper”, der er sat sammen af kvadrater af samme størrelse. Tæpperne er sammenhængende, men vi accepterer også tilfælde, hvor kun kvadraternes hjørner rører hinanden.

Findes der et rektangulært område, man kan *dække* med disse tæpper?

- Hvis nej, hvorfor ikke?
- Hvis ja, hvilke størrelse rektangler er det muligt at dække?

Udskæring af rektangel i kvadrater

Et rektangel R_0 har sidelængder u_0 og u_1, hvor $u_0 = 1$ og $0 < u_1 < 1$. Vi skærer rektanglet R_0 ud i så mange kvadrater med sidelængde u_1 som muligt (lad os sige p_1 kvadrater), der bliver et rektangel R_1 tilbage med sidelængder u_1 og u_2, hvor $u_2 < u_1$. Vi skærer nu rektangel R_1 ud i så mange kvadrater med sidelængde u_2 som muligt (lad os sige p_2 kvadrater), der bliver et rektangel R_2 tilbage med sidelængder u_2 og u_3, hvor $u_3 < u_2$. Ved at gentage denne proces, konstruerer vi således en følge (u_n). Processen kan stoppe efter et endeligt antal udskæringer, eller den kan fortsætte i det uendelige. Når den stopper efter et endeligt antal operationer N, kan I så finde frem til u_1 ud fra $p_1, p_2, \dots, p_N$? Kan I undersøge tilfældet, hvor $p_n = 1$ for alle n?

Bilag 2: Datamateriale, 48 Math en Jeans opgaver (original)

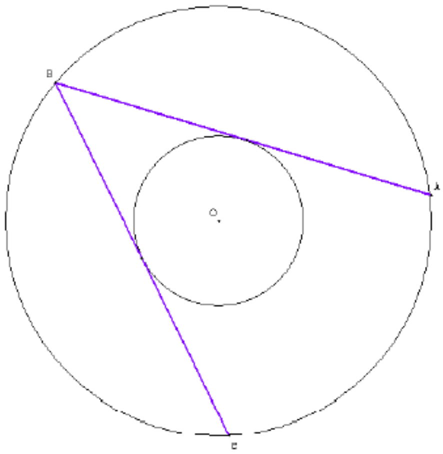
Afslutningsproblem

Problème de fermeture

On prend deux cercles C de rayon R et C' de rayon R', tous deux de même centre et avec R>R'.

On part d'un point A de C, on trace l'une des tangentes à C' passant par A, elle coupe à nouveau C en B, on répète l'opération à partir de B et ainsi de suite.

On obtient une suite de segments, vont-il repasser par A ?

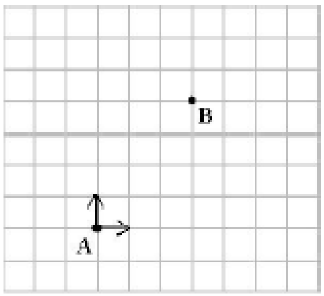


Alle veje fører til Rom

6 Tous les chemins mènent à Rome

6.1 Énoncé

On considère un réseau carré. Un marcheur évolue dans ce quadrillage en ne faisant que des pas de longueur une arête du réseau, vers la droite ou vers le haut.



6.2 Questions

- Combien de chemins pourra-t-il emprunter en partant de A pour se rendre en B ?
- Peut-on trouver une formule qui donne ce nombre de chemins en fonction de la position des points A et B ?
- Que se passe-t-il si on le marcheur peut aussi aller vers la gauche et vers le bas ?
- Comment faire s'il existe des "obstacles" entre les points A et B ?
- Que se passe-t-il dans le cas d'un réseau triangulaire ? d'un réseau cubique ?

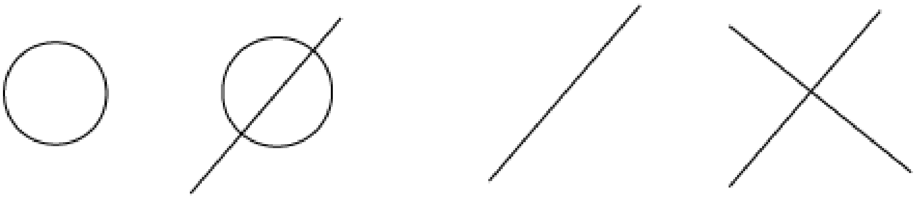
Antal farver til at udfylde et kort

Nombre de couleurs pour remplir une carte

Nous étudions ici les cartes dont les frontières des pays sont des droites ou des cercles.

On dit que deux pays sont voisins s'il existe une frontière commune de longueur non nulle.

Dans les exemples donnés ci dessous, deux couleurs suffisent pour colorer la carte.



Problème 1:

A partir de cartes formées de droites et de cercles, 2 couleurs sont elles suffisantes pour que les voisins soient de couleurs différentes ? Sinon, quel est ce nombre minimal de couleurs ?

Problème 2:

Répondre à la même question pour des cartes construites avec uniquement des demi droites.

Problème 3:

Répondre à la même question pour des cartes construites avec uniquement des demi droites et des cercles.

Den rejsendes problem

1) Le problème du Voyageur:
Un voyageur veut visiter n sites intéressants depuis sa résidence. Ces sites sont reliés par des routes.

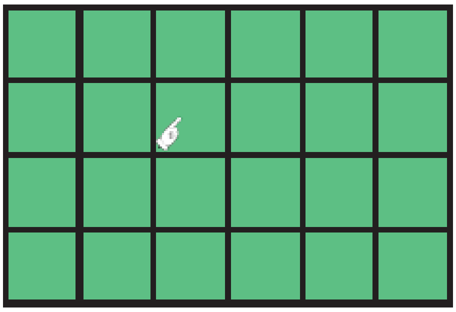
a) Trouver une (des) condition(s) pour que le voyageur puisse visiter toutes les villes une seule fois et revenir au point de départ.

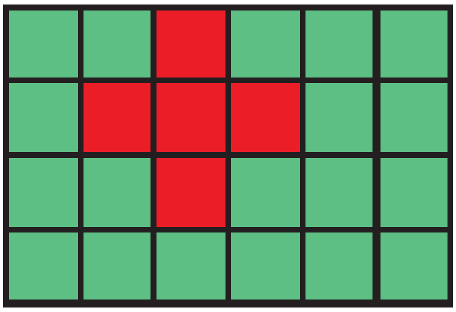
b) Trouver une (des) condition(s) pour que le voyageur passe une seule fois par chacune des routes avant de revenir.

Det følsomme dambræt

2. Le damier sensitif

Un damier est formé d'un quadrillage $p \times q$, entièrement vert au début. Chaque fois que l'on effleure une touche, on modifie la couleur de la case touchée, mais aussi de toutes les cases qui sont en contact avec elle par un côté (on modifie donc la couleur de cinq cases en effleurant une case intérieure, de trois cases en effleurant une case dans un coin, et de quatre cases en effleurant une case sur un côté qui n'est pas dans un coin).





Question. Pour quelles valeurs de p et q est-il possible de rendre entièrement rouge un damier vert de dimension $p \times q$?
Plus généralement, quels coloriages du damier pouvons nous obtenir ?

Engel og djævel

Sujet 2 : Ange et démon

Sur un échiquier de taille supposée infinie, un diable tente de piéger un ange. À chaque coup, le diable élimine l'une des cases du plateau, puis l'ange doit sauter à une case quelconque non éliminée, distante de N cases au maximum, N étant un entier positif fixé au préalable (dénommé « pouvoir » de l'ange). L'objectif du diable est d'empêcher l'ange de se déplacer.
L'ange peut-il échapper indéfiniment au diable, à condition que son pouvoir soit suffisant ?

Et solitaire spil?

3 *Un jeu en solitaire ?*

Achille et Hector jouent au jeu suivant : quatre bols rouges et un bol blanc sont disposés en ligne, le bol blanc étant à l'extrémité droite. Les bols rouges contiennent au départ chacun deux grains de riz.

Achille choisit l'un des bols dont on prend tous les grains de riz que l'on répartit (un grain par bol) dans les bols situés à droite (en recommençant à l'extrémité gauche si nécessaire). Si le dernier grain est mis dans un bol rouge vide, c'est à Hector de jouer. S'il est mis dans un bol rouge plein, il vide ce bol en répartissant les grains qu'il contenait comme précédemment. S'il est mis dans le bol blanc, Achille peut choisir un nouveau bol à vider.

Le joueur qui a mis le plus grand nombre de grains de riz dans le bol blanc a gagné.

Est-il possible pour Achille de gagner sans que Hector ait pu jouer ?

Et si l'on prend $2n$ bols rouges contenant chacun n grains de riz, et un bol blanc vide ?

Farvelægning af polyeder

Peinture sur les polyèdres

De combien de manières différentes peut-on peindre les faces d'un polyèdre régulier (tétraèdre, cube, ...) avec 3 couleurs ?

Fodboldodds

Loto foot

Une grille de loto foot comporte 3 colonnes, correspondant aux trois résultats possibles d'un match de foot : victoire, nul ou défaite. On parie en cochant une case dans chaque ligne. Il y a ensuite deux possibilités de mise, selon que l'on veuille parier sur 7 ou 15 matches. Si l'on parie sur 7 matches, on gagne si l'on a fait au plus une erreur. Si l'on parie sur 15 matches, on gagne si l'on a fait au plus 3 erreurs. Quel est le nombre minimal de grilles à remplir pour être sûr de gagner, quelques soient les résultats qui surviennent, dans l'un et l'autre cas ?

On peut aussi faire varier les trois paramètres : nombre de colonnes, nombre de matches, nombre d'erreurs tolérées.

Fordelingen mellem piraterne

1 *Le partage des pirates*

Cinq pirates impitoyables mais rationnels, Claude, David, Eric, Fabien et Gaël veulent partager les 1000 diamants qu'ils viennent de dérober. Ils décident de faire chacun leur tour une proposition (dans l'ordre CDEFG) et de voter. Si une majorité absolue est d'accord avec le partage, il est appliqué et chacun repart satisfait. Si le partage est refusé, celui qui a fait la proposition est jeté à la mer, et le pirate suivant sur la liste fait une proposition. En cas d'égalité, on considère que la proposition est refusée.

Précisons également que les pirates trouvent très amusant de jeter leurs (anciens) compagnons à la mer et choisissent toujours cette option si cela ne leur coûte rien.

Quel sera le partage final ? Qui sera jeté à la mer ?

Gaël propose de considérer qu'un vote à égalité n'est pas un refus. Qui sera d'accord avec lui ?

Eric raconte que lors d'une précédente campagne, 100 pirates devant se partager le butin, il fut convenu que l'on utiliserait la même méthode en proposant systématiquement un partage équitable. Trouvera-t-il une majorité pour le soutenir ?

Fransk billard

6 *Billard français*

Devant une table de billard francais (billard sans trou ayant deux cotés longs et deux cotés courts), deux champions se proposent une séance d'exercice. L'un donne une séquence de bandes à faire, par exemple : trois courtes, deux longues, une courte et quatre longues. L'autre doit parvenir, en tirant sur une unique boule posée sur le billard, à ce qu'elle tape sur les bandes dans l'ordre annoncé.

- Est-ce que n'importe quelle sequence peut être réalisée par nos champions ?
- Existe-t'il un tir qui contient toutes les séquences ?

- Que donnent d'autres formes de billard ?

Frimærkeproblemet

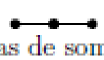
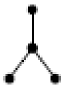
<u>Le problème du timbre-poste</u>

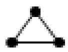
Une enveloppe a de la place pour h timbres et les timbres disponibles ont pour valeurs faciales k entiers naturels. Étant donnés h et k, quel est l'entier maximal $n(h,k)$ tel que l'on puisse affranchir l'enveloppe pour n'importe quelle valeur entière comprise entre 1 et $n(h,k)$? Quelles sont alors les valeurs faciales des timbres ?

Par exemple, si $h = 2$ et $k = 3$, on a $n(2,3) = 8$ et le seul ensemble de valeurs faciales possible est $\{1, 3, 4\}$.

Grafer

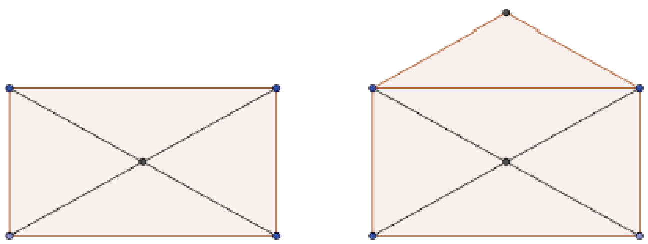
3 Sujet 3 : graphes à motifs exclus

Un graphe est un ensemble de sommets, pouvant être ou non reliés par une arête. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet. On considère un graphe à n sommets. Combien d'arêtes peut-il avoir au maximum, si on sait qu'il n'a pas de sommet de degré ≥ 2 ? (On dit qu'il n'a pas de sous-graphe ) Et s'il n'a pas de sommet de degré ≥ 3 ? (i.e. pas de sous-graphe ) Et s'il n'a pas de sommet de degré $\geq n$?

Et s'il n'a pas de "triangle" ? (i.e. pas de sous-graphe ) Pas de "carré" ? Pas de sous-graphe cyclique de longueur n ?

Grafteori

La théorie des enveloppes



Peut-on réaliser les figures ci-dessous, sans lever le crayon et sans repasser sur un trait dessiné ?

Peut-on réaliser les figures avec les contraintes précédentes en revenant au point de départ ?

Après avoir essayé de reproduire ces enveloppes, vous rechercherez comment, avant même de se lancer dans une tentative de construction, on peut savoir si la construction est réalisable.

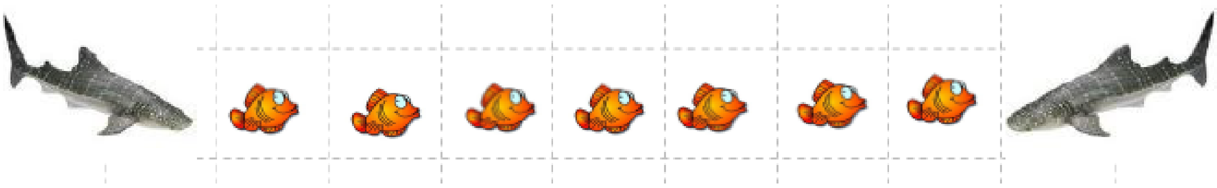
Les grandes lignes du sujet :

1. Recherche d'une condition nécessaire pour réaliser la construction
2. Étude du problème des ponts de Königsberg
3. Recherche (et programmation ?) d'un algorithme de recherche de tracés.

Hajens spilstrategi

Stratégie du jeu du requin

Soit 2 entiers naturels k et m .
Deux requins sont séparés par m portions alignées de nourriture.
A tour de rôle, chacun mange un nombre de portions de nourriture variant entre 1 et k.
Le requin qui avale la dernière portion est mangé par le requin adverse.
Chaque requin connaît le nombre de portions mangées par l'autre.



Problème :

Existe t-il une stratégie de survie pour le requin qui commence ou pour le second ?

Pour aller plus loin :

Les nombres de portion consommables en un coup forment un sous-ensemble inclus dans $\{1,2...k\}$.
Existe t -il une stratégie de survie ?
Exemple:il y a 7 portions de nourriture entre les deux requins et chacun ne peut manger que 1, 3 ou 6 portions.

Håndtrykkene

Les poignées de mains.

M. et Mme Rocco assistent à une réunion où il y a n autres couples. Chaque personne serre la main aux personnes de sa connaissance (une fois seulement), mais ne serre la main ni à lui-même, ni à son conjoint, ni aux personnes qu'elle ne connait pas. M. Rocco constate que dans l'assemblée, les $2n+1$ autres personnes présentes ont échangé des nombres de poignées de mains tous distincts. Combien de poignées de mains ont-elles été échangées par M. et Mme Rocco?

Kaptain Kids skat

SUJET 5 ($3^{ème}$): LE TRESOR DE CAPITAINE KID
Proposé par Yishao Zhou

Première partie

Sur un vieux parchemin de votre ancêtre le Capitaine Kid, vous découvrez ce texte :

Lorsque vous arrivez sur l'île, vous apercevez le vieux palmier et le vieux chêne mais malheureusement, la potence n'a pas survécu au temps. Arriverez-vous tout de même à découvrir le trésor de Capitaine Kid ?

Deuxième partie

On propose de définir une addition et une multiplication pour les points dans un repère.

Soient A(a , b) et B(c , d) deux points du plan.

On propose les règles suivantes :

$$\text{Addition} : A(a,b) + B(c,d) = S(a+c, b+d)$$

$$\text{Soustraction} : A(a,b) - B(c,d) = S(a-c, b-d)$$

$$\text{Multiplication} : A(a,b) \times B(c,d) = P(a \times c - b \times d, a \times d + b \times c)$$

a. *Proposer une formule qui donne coordonnées du milieu d'un segment ?*

b. *Placer dans un repère les points ayant ces différentes coordonnées :*
(0, 0) ; (0, 1) ; (1, 0) ; (−1, 0) ; (0, −1) ;
(0, 1) + (1, 0) ; (0, 1) − (−1, 0) ; (1, 0) × (0, 1) ; (1, 0) × (0,−1) ;
(1,1) × (0,1) ; (1,1) × (0,−1) ; (1,3) × (0,1) ; (1,3) × (0,−1).

c. *À quelle opération géométrique correspond la multiplication par le point de coordonnées (1 , 0) ? Et par le point de coordonnées (0 , 1) ? Et par le point de coordonnées (0 , −1) ?*

Peut-être qu'avec ces nouvelles opérations, il vous sera plus simple d'aider Capitaine Kid à retrouver le trésor…

Konstruktion med farver

Sujet 2 : Construire avec des couleurs.

Voici le problème des quatre couleurs : Peut-on toujours colorier une carte avec quatre couleurs différentes de telle sorte que deux pays voisins aient des couleurs différentes ?
La réponse est OUI, mais on ne peut le prouver que par ordinateur…

Nous nous intéressons à ce problème, mais en trois dimensions, avec des legos, par exemple.

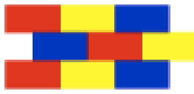
Question 1 : Combien de couleurs sont suffisantes pour construire une surface régulière ? quelconque ?

a) avec des briques 2x2 ?
b) avec des briques 2x4 ?
c) en général ?

Exemples :

- Pour construire une tour, deux couleurs suffisent.

- Pour construire un mur « régulier », trois couleurs suffisent.



Question 2 : En trois dimensions : sachant que deux couleurs qui partagent une surface doivent avoir des couleurs différentes, combien de couleurs sont suffisantes pour construire un cube ? un volume régulier ? quelconque ?

(D'après Søren Eilers)

Kvadrater i rektangler

3 Des carrés dans les rectangles

3.1 Énoncé

Le but du jeu est de découper l'aire d'un rectangle en différents carrés à l'aide de découpages successifs.

Prenons un exemple : on décompose un rectangle $16/9$ (c'est à dire de longueur 16 et de largeur 9) en différents carrés.

- Le premier carré est coupé dans la longueur initiale (de 16) du rectangle, il est de 9 sur 9.
- Il reste un rectangle de longueur 9 et de largeur 7, on découpe un carré dans la nouvelle longueur, il sera de 7 sur 7.
- Ensuite, on obtient un nouveau rectangle de longueur 7 et de largeur 2. On refait des découpages pour avoir 3 carrés de 2 sur 2.
- Enfin avec un dernier découpage, on obtient 2 carrés de 1 sur 1.

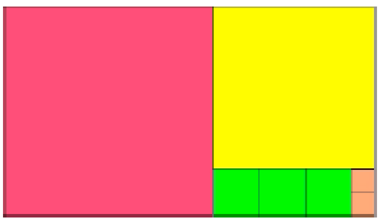


FIG. 3 – Figure obtenue après découpages

Le code obtenu est alors : **1-1-3-2**, car on peut placer :

- **1** seul carré dans la longueur initiale,
- puis **1** seul dans la largeur initiale (la longueur du rectangle restant),
- ensuite on peut en placer **3** dans la largeur du second rectangle obtenu (la longueur du rectangle restant),
- et **2** dans la longueur du dernier rectangle.

L'espace est totalement occupé, le codage est donc fini.

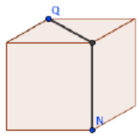
3.2 Questions

- Comment trouver le code quand on a la fraction de départ ?
- Comment retrouver les proportions des rectangles à partir de leurs codages ?
- Comment comparer deux nombres si je connais leurs codages ?
- Si on part de n'importe quelle forme, est-on sûr que le découpage s'arrête ?
- Que se passe t'il dans le cas d'une feuille de papier au format A4 (210mm x 297mm environ, mais la proportion exacte est racine de 2 qui est aussi le rapport de la diagonale du carré à son côté) ?

Kubens geometri

Sujet 4 : La geometrie du cube

Question 1 : Qu'est-ce qu'une ligne droite ? Un triangle ? Un cercle ? ...

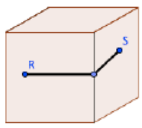


Exemples : Le chemin QN est-il une ligne droite (c'est-à-dire est-ce le chemin le plus court entre Q et N) ? Si oui, est-il unique ?

Question 2 : Comment trouver le chemin le plus court entre deux points ? Quand est-il unique ?

Existe-t-il des droites parallèles ?

Quelle est la somme des angles d'un triangle ?



Question 3 : Supposons que 2, 3, 4 (ou plus !) personnes sont sur un cube. Où doivent elles se placer pour être le plus éloignées les unes des autres ?

Question 4 : Mêmes questions sur un tétraèdre, une sphère, etc.

Les sujets ont été conçus par Nathalie Wahl, Copenhague.

Labyrinter

Sujet 2 : Labyrinthes : Comment trouver son chemin dans un labyrinthe? Explorer un labyrinthe au hasard permet-il d'en sortir? En combien de temps? Des stratégies non aléatoires sont-elles meilleures?

Lys!

4) Lumière!

Comment installer trois spots dans une pièce cubique pour que le volume éclairé soit maximal?

a) En ne plaçant les spots qu'au plafond.

b) En autorisant des spots n'importe où.

Magiske rektangler

<u>SUJET 1 : LES RECTANGLES MAGIQUES</u>

Les carrés magiques « intriguent » depuis la nuit des temps... Les mathématiciens chinois les connaissent depuis -650, les arabes depuis le VIIe siècle. Leur caractère magique fait que leur étude est aussi souvent liée à la religion, à l'astrologie.

Sur le principe d'un carré magique, un rectangle magique est un rectangle de sorte que :

- La somme des nombres de chaque colonne est la même.
- La somme des nombres de chaque ligne est la même.

Dans le cas particulier d'un rectangle dit "normalisé", de longueur L et de largeur l, les nombres utilisés dans le rectangle magique sont : $\{1, 2, \ldots, L \times l\}$

<u>Question 1 :</u> Quels sont les rectangles magiques possibles (normalisés ou non) ? Comment les construire ?

<u>Exemples :</u>

1	2
3	4

1	3
4	2

Ce ne sont pas des rectangles magiques. Est-ce possible de construire un rectangle magique normalisé 2x2...

1	1
1	1

1	2
2	1

a	b
b	a

Ce sont des rectangles magiques. Est-ce la seule possibilité ?

Question 2 : Un rectangle anti-magique est un rectangle dont les sommes des nombres de chaque ligne et les sommes des nombres de chaque colonne sont toutes différentes.
Quels sont les rectangles anti-magiques possibles (normalisés ou non) ? Comment les construire ?

Exemple :

1	2
3	4

C'est un rectangle anti-magique.

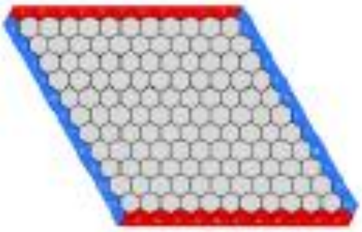
Matematik og spil

Sujet 1 : Maths et jeux

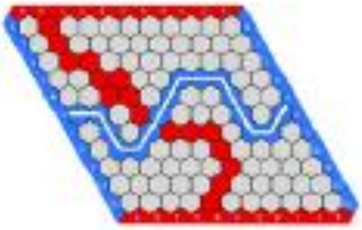
• **Dobble.** Le matériel du jeu Dobble consiste en 55 cartes sur lesquelles sont dessinés symboles. Quelle que soit la façon de jouer (il y a plusieurs règles possibles), le but es toujours de repérer le plus rapidement possible un symbole commun entre deux cartes. E effet, deux cartes du jeu Dobble ont toujours *un et un seul* symbole commun, comme dan l'exemple ci-dessous :

Comment le jeu est-il construit ? Combien de symboles faut-il pour faire un jeu de 1 cartes ?

• **Le jeu des hexagones.** Le jeu des hexagones se joue sur un plateau en forme de losang découpé en petits hexagones :



Chaque joueur pose tour à tour un hexagone de sa couleur sur une case vide du plateau Le but du jeu est d'être le premier à relier les deux bords de sa couleur :



Peut-il exister une partie nulle ? Y a-t-il une stratégie gagnante pour un des joueurs et s oui lequel ? Pourquoi ne pas jouer avec un pavage selon des petits carrés ?

Møntsystem

2 Système monétaire

2.1 Énoncé

Supposons que le système monétaire ne comporte que des pièces de 5 €et 7 €. Pour certains montants, il est assez facile de bien s'organiser pour les payer.

Par exemple, pour un objet à 12 €, il suffit de donner 1 pièce de chaque montant. Ou encore, pour un objet à 2 €, il suffit de donner 1 pièce de 7 €, et le commerçant nous rend 1 pièce de 5 €.

Mais le problème devient beaucoup plus complexe pour d'autres montants.

Par exemple, pour un objet à 1 €, il faut donner 3 pièces de 7 €, alors que le commerçant nous rend 4 pièces de 5 €.

2.2 Questions

- Est-il possible de payer n'importe quel montant avec ce système de pièces de 5 €et 7 € ?
- Peut-on remplacer 5 €et 7 €par n'importe quelles autres valeurs ?
- Que se passe-t-il si le commerçant ne rend plus la monnaie ?
- Que se passe-t-il avec 3 valeurs de pièces différentes ? 4 valeurs de pièces différentes ? etc...
- Comment trouver un système qui minimalise le nombre de pièces utilisées pour chaque achat ?

n! ('n fakultet')

2) *n*! ('Factorielle *n*'):
On cherche des propriétés qualitatives de la factorielle.

a) Quel est le nombre de chiffres de $n!$?
b) Quel est le nombre de zéros (à la fin?!) de $n!$?
c) Quel est le dernier chiffres non nul de $n!$?

Opsplitning i enhedsbrøker

1. Décomposition en fractions unitaires

Dans les civilisations antiques, l'écriture des nombres rationnels différait de la notre ; ainsi en Egypte ancienne on représentait

$$\frac{7}{11} \quad \text{comme la somme} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{88}, \text{et}$$
$$\frac{55}{84} \quad \text{comme la somme} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{84}.$$

D'une manière générale, les égyptiens exprimaient un nombre rationnel p/q (où p et q sont des entiers naturels non nuls avec $p \leq q$) sous la forme d'une somme finie de fractions unitaires (ayant 1 pour numérateur) toutes différentes :

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{11} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{88}, \\
\frac{55}{84} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{84}, \\
\frac{p}{q} &= \frac{1}{n_1}+\ldots+\frac{1}{n_k}
\end{aligned}
$$

avec $n_1, \ldots, n_k$ des entiers naturels non nuls et deux à deux distincts. On dit que $1/n_1 + \ldots + 1/n_k$ est une *décomposition en fractions unitaires* de p/q.

Cette écriture possède l'avantage de faciliter les comparaisons entre rationnels. En effet, reprenons l'exemple de $7/11$ et $55/84$, en comparant leurs décompositions en fractions unitaires il apparaît immédiatement que $55/84$ est supérieur à $7/11$, ce qui n'était pas évident au premier abord.

Questions. En prenant connaissance de cette écriture, le mathématicien est bien sûr déconcerté par une représentation aussi inhabituelle des rationnels ; mais il retrouve vite ses esprits et se pose naturellement les questions de mathématiques suivantes :

(1) Etant donné un rationnel $p/q \leq 1$, existe t-il une décomposition en fractions unitaires de p/q ?
Comment trouver une telle décomposition ?

(2) Combien p/q a t-il de décompositions en fractions unitaires ?

(3) Le nombre de termes dans une décomposition en fractions unitaires de p/q peut-il être aussi grand qu'on veut ?

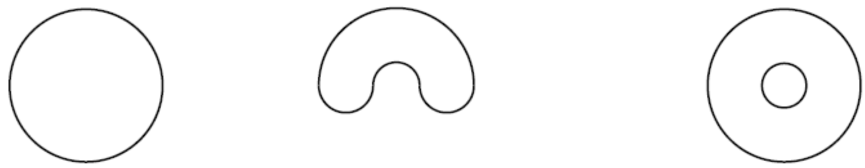
(4) Existe t-il un entier N tel que tout rationnel $p/q \leq 1$ s'écrive comme somme d'au plus N fractions unitaires distinctes ?
Si oui, quel est le plus petit N vérifiant cette propriété ?

Pistes. Pour commencer, le mieux consiste souvent à regarder ce qui passe dans certains cas particuliers. Par exemple, quelles sont les décompositions en fractions unitaires des nombres $1/q$ (exemple : $1/4 = 1/6 + 1/12$), quelles sont les décompositions en fractions unitaires des nombres $2/q$...

Pandekageudskæring

2 Sujet 2 : le découpage de la crêpe

n personnes souhaitent se partager une crêpe circulaire. Cela leur est égal si toutes les parts n'ont pas la même taille, elles veulent juste être sûres d'avoir quelque chose. On peut couper la crêpe où on veut (on n'est pas obligé de passer par le centre). Combien de coups de couteau faut-il donner au minimum ? Est-ce que cela change quelque chose si la crêpe est tordue en forme de fer à cheval ? Et si elle est circulaire mais trouée (et forme un anneau) ?



Pengesedlerne

3) Les billets de banque:
Pour payer 18€, je peux choisir de payer de la façon suivante en pièces et billets: 10+2+2+2+2, ou de la façon la plus économique: 10+5+2+1.

a) En n'imprimant que cinq types de billets, quel est le choix le plus économique pour payer toutes les sommes jusqu'à 200€?

b) En admettant que les sommes sont toutes plus grandes que 5€, combien de montants différents doit-on éditer pour pouvoir payer toutes les sommes jusqu'à 200€?

Periodiske ord

2. Le deuxième projet que je vous propose porte sur des questions comme

Si dans un mot on fait l'inversion de deux lettres adjacentes distinctes, peut-on toujours obtenir un mot périodique? Par exemple, du mot *abba* **on obtient les mots** *baba* **et** *abab***, les deux périodiques. Peut-on déterminer tous les mots qui ont cette propriété? Et si on se limite à deux inversions seulement?**

C'est un sujet typique de la Combinatorique des Mots, dont le maître incontesté est M. Lothaire (un groupe français de la région de Lotharingie). Ça permet de parler de questions très à la mode, de nos jours, comme le monoïde libre des mots qu'on peut former (vocabulaire) à partir d'un alphabète donné, et de la question de périodicité de ces mots.

La solution fait recours à un théorème célèbre, celui de Wilf-Fine, mais le préambule devraît mentionner aussi de moindres résultats, néanmoins de très grand intérêt. Par contre, la partie graphique n'est pas aussi intéressante que celle du premier projet; on ne peut que donner quelques exemples de ces mots, et en étudier leurs propriétés.

Il s'agit aussi d'une recherche personnelle et originelle, qui va même faire le sujet d'un article mathématique futur que je vais présenter.

Perspektiv

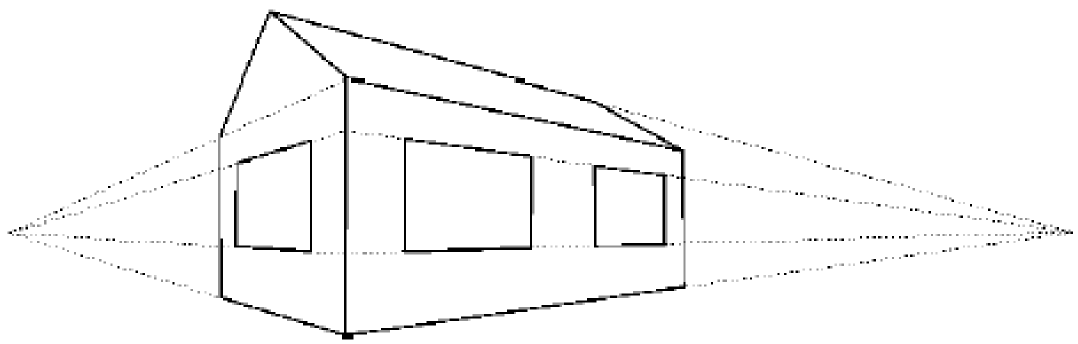
Perspective

On place un cube (en fil de fer) sur un plan, on l'éclaire avec un projecteur (assez proche du cube), comment sera l'ombre du cube ?

Perspektiv m. to forsvindingspunkter

Dessin en perspective à deux points

Imaginons que nous regardons à travers une fenêtre un objet angulaire et que nous en dessinons les traits sur la vitre. Le dessin des lignes horizontales parallèles ne sont pas, sur la vitre, parallèles, mais se dirigent vers un point. Si nous n'avons que trois directions importantes (deux horizontales et une verticale) alors les deux directions horizontales sont chacune liées à un même point. Les lignes verticales de notre objet restent, sur la vitre des lignes verticales. C'est pourquoi un tel dessin est dit „en perspective à deux points"
Les dimensions aussi sont modifiées. Les traits des parties éloignées sont plus petits. C'est pour cela qu'il n'est pas simple de réaliser une bonne construction en perspective à deux points.



Si nous pouvons dessiner assez facilement une brique de cette maison à l'angle face à nous, il nous faut bien réfléchir pour connaitre les dimensions de la suivante. Nous devrons d'abord répondre à de nombreuses et différentes questions ...

- Comment pouvons nous construire le milieu d'un segment horizontal? (Malheureusement ce n'est pas le milieu de son dessin sur la vitre!)
- Comment pouvons nous construire le milieu d'un segment vertical?
- Comment pouvons-nous doubler la longueur d'un segment, horizontal ou vertical? la multiplier?
- Comment peut-on diviser un segment en plusieurs parties égales, par exemple en trois ou cinq?
- Comment dessiner une maison identique accolée à la première?
- Que se passe-t-il si la fenêtre n'est plus verticale mais inclinée?

Punkter og halvplaner

Sujet 1.

Le jeu des points et des demi-plans.

Soit D un disque du plan et $r > 0$. Il y a deux joueurs, le premier joue des points de D et le second joue des demi plan. Le premier joueur choisit un point M_1 dans D. Le deuxième joueur choisit un demi plan S_1 contenant M_1. Puis le premier joueur choisit un point M_2 qui est à la fois dans D et dans le demi espace S_1. Ensuite le deuxième joueur choisit un demi plan S_2 contenant M_2. Le deuxième joueur gagne si, à partir d'un certain rang, tous les points joués par le premier joueur restent dans un disque de rayon r. Pouvez-vous indiquer une tactique pour le joueur 2 telle que, si le joueur 2 suit cette tactique, il est sûr de gagner, quelque soit la façon de jouer du joueur 1?

Punkter på et kvadrat

Points dans un carré

On place n points dans un carré unité. Comment les placer pour qu'ils soient le plus éloigné possible les uns des autres ?

På jagt efter skatten

SUJET 6 (Terminales S) : A LA CHASSE AU TRESOR
Proposé par Qimh Xantcha

Vous vous trouvez au milieu d'un vaste désert. À 1000 kilomètres est enterré un magnifique trésor. Vous voulez absolument l'atteindre avec votre 4x4 mais votre 4x4 vous pose un problème : il consomme 1 litre pour 2,5km parcouru mais il ne peut transporter que 200 litres d'essence. Vous décidez alors de placer des bidons d'essence en dépôt le long de votre parcours que vous avez stratégiquement choisi.

1. Expliquer pourquoi, avec ce type de stratégie, il est alors possible d'atteindre le trésor.
2. Combien d'essence faudra-t-il pour vous transporter jusqu'au but ? Où devra-t-on placer les dépôts d'essence ? Votre solution est-elle la meilleure possible ?
3. Et comment aurait-on fait si le trésor était à 2000 kilomètres ... ? Zut, on a oublié le trajet retour, comment doit-on s'y prendre ?

Radioaktivitet

Sujet 4 : Modélisation de la radioactivité.

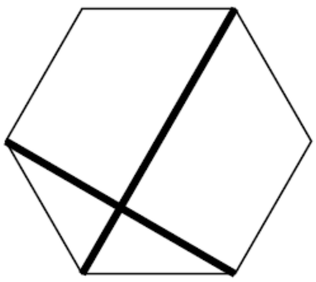
Le 5 avril 2011, dans la préfecture d'Ibaraki dans le sud de Fukushima, on a détecté 526 Becquerels de Césium radioactif dans un kilogramme de sable.

Estimez dans combien d'années la plage sera à nouveau utilisable.

Rum med fælder

4 Sujet 4 : la salle piégée

On considère une salle hexagonale. On sait qu'il y a deux rayons invisibles qui tuent les humains mais n'abîment pas les robots, chaque rayon ayant pour extrémité 2 sommets qu'on ne connaît pas (et qui peuvent être les mêmes pour les deux rayons). On veut savoir où sont les rayons. Pour cela, on envoie des robots qui effectuent des trajets en ligne droite, de n'importe quel point d'un côté à n'importe quel point d'un autre côté. Chaque robot a un compteur qui permet de savoir combien de rayons il a traversé. Combien au minimum faut-il de robots, et quel parcours leur faire faire, pour être sûr de détecter les rayons ? Et si on change le nombre de côtés de la salle ? Ou le nombre de rayons ? (On peut imaginer qu'on fixe les trajets des robots dès le début, ou qu'on choisit le trajet d'un robot en fonction des résultats des robots précédents).

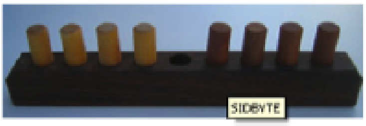


Skift plads

SUJET 3 (6ème): ÉCHANGEONS DE PLACE !

Première partie

1. D'abord, on a ce jeu-ci :



On y joue seul, et on a deux possibilités :
- déplacer une pièce sur le trou d'à côté à condition que ce trou soit vide ;
- ou la faire sauter par dessus une seule pièce afin de la placer dans un trou vide de l'autre côté.

Combien de déplacements seront nécessaires pour échanger les places des pièces noires et des pièces blanches ? Si l'on commence avec *p* pièces noires et *q* pièces blanches ?

2. Et s'il était possible de sauter par dessus d'un nombre quelconque de pièces jusqu'au premier trou vide ... ?

Deuxième partie :

1. Et maintenant, on a ce jeu-là :

Chaque tour, on doit déplacer un disque d'un pôle à un autre. Il est interdit de mettre un disque plus grand sur un disque plus petit. Combien de déplacements sont nécessaires pour faire déplacer tout la pyramide de disques d'un pôle à un autre ?
Et si l'on commence avec *n* disques ?

2. Même travail si l'on commence avec deux pyramides de disques, chacun sur son pôle, et que l'on désire les échanger de place ...

Skubbespil

Le jeu de pousse-pousse

A	B	C
D	E	F
G	H	

H	D	F
	A	B
G	C	E

Peut-on passer de la deuxième grille à la première par une suite d'opérations consistant à mettre une lettre voisine du trou (au-dessus, au-dessous, à droite ou à gauche) à la place du trou ?

Trouver des exemples de grilles reliées de cette façon à la première grille et de grilles non reliées de cette façon à la première grille.

Spiren

SUJET 2 (5ème): LE JEU DES POUSSES
Proposé par Qimh Xantcha

Ce jeu est nommé jeu des pousses, car les figures représentées ressemblent à des pousses d'arbres.

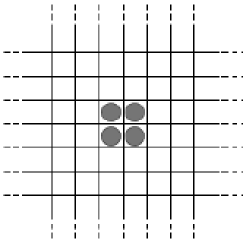
Ce jeu se joue à deux joueurs avec un stylo et une feuille de papier.
Au départ il y a 3 points sur la feuille. Chaque joueur, à tour de rôle,
relie deux points existants par une ligne et ajoute un nouveau point sur cette ligne. Deux contraintes doivent être respectées : les lignes ne peuvent se croiser, et un point ne peut être relié à plus de trois lignes.
Le perdant est celui qui ne peut plus jouer sans enfreindre ces deux contraintes.

1. Pourquoi le jeu termine-t-il toujours ? Combien de coups faudra-t-il au maximum?
2. Comment fait-on pour jouer à l'optimum ? Est-ce qu'il y a une stratégie gagnante ? Si l'on commence avec deux points ou quatre points ... ?
3. Qu'est-ce qui se passe si l'on permet à chaque point d'être relié à quatre lignes ? Ou à seulement deux lignes ?
4. Essayez la variante suivante : chaque point peut être relié à quatre lignes, mais les deux nouveaux lignes qui poussent d'un point créé sur une ligne doivent être opposés : cela veut dire qu'il leur est interdit de sortir du même côté des deux lignes déjà dessinées.

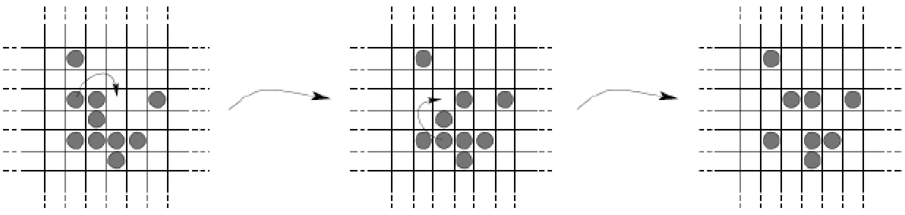
Solitaire

Sujet 7 : Solitaire

On joue au jeu suivant. Un carré $n \times n$ de pions est placé sur une grille infinie. Par exemple, le cas 2×2 est comme suit :



On suit alors les règles du solitaire : un pion peut sauter par dessus un autre verticalement ou horizontalement pour arriver dans une case vide. Le pion sauté est alors capturé et retiré du plateau. Voici des exemples de mouvements :



Le but du jeu est de capturer tous les pions, sauf bien sûr le dernier. S'il est facile de gagner dans le cas 2×2, qu'en est-il pour le carré 3×3 ou le 4×4 ?

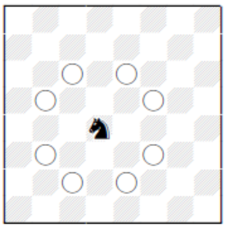
Springerens tur

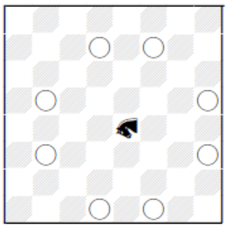
La promenade du Cavalier

On place un Cavalier sur un échiquier. Peut-il parcourir les 64 cases de cet échiquier sans jamais passer deux fois par la même ?
Peut-il le faire de façon à refermer son circuit, c'est-à-dire revenir sur sa case de départ au 65ème coup ?

Chaque promenade permet de numéroter les cases de l'échiquier par le rang de passage du Cavalier : essayer d'imposer des conditions supplémentaires relatives à cette numérotation.

Que se passe-t-il avec d'autres bondisseurs ((1,3), (2,3),…) ?





Stern-Brocots træ

3. L'arbre de Stern-Brocot

Quittons la géométrie. Nous allons construire pas à pas une suite de nombres. Partons à l'étape 0 des deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ représentant 0 et l'infini. À chaque étape nous intercalons entre deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ la fraction $\frac{m+m'}{n+n'}$ que l'on appellera le médiant de $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$. Ainsi

à l'étape 1, on a la liste $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$,

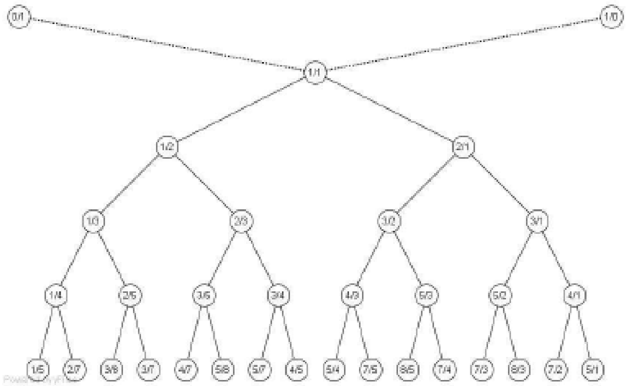
à l'étape 2, on a $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$

Ainsi de suite…

De proche en proche on définit bien une liste de fractions de plus en plus longue. On va présenter cette liste d'une façon assez particulière. Les fractions apparues à l'étape p seront notées sur la ligne p, mais en conservant la répartition horizontale. Ainsi la liste à l'étape 3 s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & \frac{1}{0} \\
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & & & \frac{2}{1} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{1} &
\end{array}$$

Les fractions apparures à l'étape p sont les médiants de deux fractions dont une seule est apparue à l'étape $p-1$ (l'autre pouvant être là depuis l'étape 0). Pour obtenir notre arbre on va relier ces deux fractions. Chaque fraction (à part $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$) est donc reliée à deux fractions. Ce qui donne à l'étape 5 :



On obtient ce que l'on appelle un arbre. Il porte les noms de Moriz Stern, mathématicien allemand, et d'Achille Brocot, horloger français, qui l'on indépendament découvert (1858 pour l'un, 1860 pour l'autre).

On a envie de savoir quels sont les nombres qui apparaissent sur l'arbre, sous quelles écritures et combien de fois ils apparaissent. Chaque nombre de l'arbre est facilement repéré par une suite de G(auche) et de D(roite) (on part de $\frac{1}{1}$). Par exemple GGD représente le nombre $\frac{2}{5}$. Quel est le « procédé »qui permet de convertir une fraction (apparaissant dans l'arbre) en une suite de G et de D ? (et inversement ?)

Si vous appliquiez ce procédé à un nombre n'appartenant pas à l'arbre, par exemple au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que se passerait-il ? Qu'obtiendriez-vous ?

Talsystemer

LES SYSTÈMES D'ÉCRITURE DES NOMBRES.

Notre système d'écriture des nombres est basé sur les partages en groupes de 10, de 100, de 1 000 etc.

Par exemple, lorsque nous écrivons 2 634 cela signifie que :

$$2\,635 = 2\times 1000 + 6\times 100 + 3\times 10 + 5$$

que nous écrivons aussi : $2\,635 = 2\times 10^3 + 6\times 10^2 + 3\times 10 + 5$

En particulier, le 5 indique que dans le partage de 2 634 il y a 5 unités isolés. Le 3 indique qu'il y a 3 groupes de 10 isolés, le 6 qu'il y a 6 groupes de 10 fois 10, donc 100, isolés et le 2 qu'il y a 2 groupes de 10 fois 10 fois 10, c'est-à-dire 2 groupes de 1 000.

Cela nous semble naturel de partager en groupes de 10 peut-être parce que nous avons dix doigts. Mais nous avons deux bras, alors pourquoi ne pas partager en groupes de 2 ?

Si l'on partage 2 635 en groupe de 2, il y aura une unité isolée et 1 317 groupes de 2.
Partageons alors ces 1 317 groupes de 2 en groupes de 2 : il y aura un groupe de 2 isolé et 658 groupes de 2 fois 2.
Partageons alors ces 658 groupes en groupes de 2. Aucun groupe ne sera isolé et nous aurons 329 groupes de 2 fois 2 fois 2 fois 2. Ainsi de suite.
Le nombre 2 635 s'écrit alors, avec notre système de partage en groupe de 2 : 101101001011.
Ce qui signifie que :

$2635 = 1\times 2^{11} + 0\times 2^{10} + 1\times 2^{9} + 1\times 2^{8} + 0\times 2^{7} + 1\times 2^{6} + 0\times 2^{5} + 0\times 2^{4} + 1\times 2^{3} + 0\times 2^{2} + 1\times 2 + 1$

L'écriture 101101001011 est l'écriture en base 2 du nombre 2 635 écrit en base 10.

On peut s'amuser à écrire des nombres en base 5, 9, ou même 16.

Questions :

1. Combien de symboles doit-on utiliser pour écrire un nombre dans une base n ?
2. Comment écrire un nombre donné en écriture décimale dans une base n ?
3. Comment passer de l'écriture d'un nombre en base n à son écriture en base 10 ?
4. Peut-on additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres dans une base n sans revenir à leurs écritures décimales ?
5. dans une base n, comment passe-ton de l'écriture fractionnaire à l'écriture « à virgule » et inversement ?

Tetraeder

1. Le premier projet que je vous propose porte sur des questions comme

Entre quelles valeurs la somme $\sum_{1\leq i<j\leq 4} \angle A_iPA_j$ des six angles sous lesquels les côtés d'un tetrahèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont vues, à partir d'un point P intérieur, peut-elle se situer?

Qu'est-ce-qu'on peut dire sur une courbe fermée, de longueur plus petite que celle d'un équateur, située sur la surface d'une sphère? Est-elle contenue dans une hémisphère?

Il y a une relation inattendue entre ces questions! Un problème apparemment de trigonométrie sphérique va être résolu par un approche combinatorique. Le projet permet la réalisation de dessins tri-dimensionnels dynamiques (applets), avec mouvements permis, pour étudier de façon heuristique les réponses possibles.

Les mathématiques utilisées vont des notions de trigonométrie sphérique jusqu'à théorèmes de convexité, mais aussi des méthodes combinatoriques, où la connaissance des géodésiques sur une sphère (les grands arcs) est la seule requise.

Il s'agit d'une recherche personnelle et originelle, portant sur des choses très peu connues, que je maîtrise à fond (en étant l'auteur).

Tetrisbrikker

4 Les pièces du Tetris

4.1 Énoncé

Les pièces du Tetris sont formés avec 4 petits carrés de même taille. Il en existe 7 différentes.

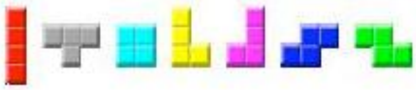


FIG. 4 – Les pièces du Tetris

Le domino est composé de 2 carrés accolés par un côté. Les polyominos qui en réunissent 3 sont dénommés triominos; 4, tetrominos; 5, pentaminos; 6, hexaminos; 7,heptaminos; 8,octaminos; etc...

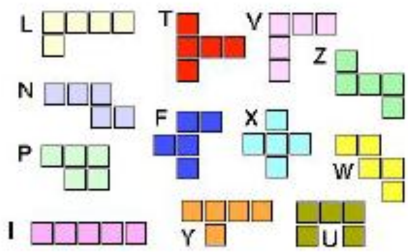


FIG. 5 – Les pentaminos

Questions :
- Combien existe-t-il d'hexaminos? d'heptaminos? d'octaminos?
- Peut-on trouver une formule qui donne le nombre de polyominos en fonction du nombre de carrés utilisés pour les fabriquer?
- Est-il possible de paver un rectangle avec tous les pentaminos?
- Comment paver un rectangle avec des exemplaire d'un même polyominos?
- Que se passe-t-il si on remplace les petits carrés initiaux par des triangles équilatéraux?

Tæpperne

Sujet 1 : Les tapis

On s'intéresse ici à des "tapis" qui ont la forme d'un morceau de quadrillage, dont le bord est découpé en suivant les lignes du quadrillage. Les tapis sont d'un seul tenant, mais on accepte que ses cases ne se touchent que par un coin.
Existe-t-il une pièce rectangulaire *pavable* avec ce tapis ?
- S'il n'en existe pas, pourquoi ?
- S'il en existe, quelles sont les dimensions possibles des rectangles pavables ?

Udskæring af rektangel i kvadrater

Sujet 4.

Découpage d'un rectangle en carrés.

Un rectangle R_0 a des cotés de longueur u_0 et u_1, avec $u_0 = 1$ et $0 < u_1 < 1$. On découpe le rectangle R_0 en autant de carrés de cotés de longueur u_1 que possible (disons p_1 carrés), il reste un rectangle R_1 de cotés u_1 et u_2, avec $u_2 < u_2$. On découpe ensuite le rectangle R_1 en autant de carrés de cotés de longueur u_1 que possible (disons p_2 carrés), il reste un rectangle R_2 de cotés u_2 et u_3, avec $u_3 < u_2$. En réitérant l'opération, on construit ainsi une suite (u_n). Cette opération peut s'arrêter après un nombre fini de découpages, ou continuer indéfiniment. Quand elle s'arrête après un nombre fini N d'opérations, pouvez-vous retrouver u_1 à partir de p_1, p_2,...,p_N? Pouvez-vous étudier le cas où $p_n = 1$ pour tout n?

Bilag 3: Analyseresultat for hver enkel Math en Jeans opgave

Opgavetitel	1 Indholdsområde	2 Resurser?	3 Åben?	4 Lettilgængelig?	5 Første strategier?
Afslutningsproblem	Geometri	Nej	Ja	Ja	Nej
Alle veje fører til Rom	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Antal farver til at udfylde et kort	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Den rejsendes problem	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Det følsomme dambræt	G&K	Nej	Ja	Ja	Ja
Engel og djævel	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Et solitaire spil?	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Farvelægning af polyeder	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Fodboldodds	Kombinatorik	Ja	Nej	Ja	Ja
Fordelingen mellem piraterne	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Fransk billard	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Frimærkeproblemet	Talteori	Ja	Nej	Ja	Ja
Grafer	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Grafteori	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Hajens spilstrategi	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Håndtrykkene	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Kaptain Kids Skat	Talteori	Nej	Nej	Nej	Nej
Konstruktion med farver	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Kvadrater i rektangler	Talteori	Ja	Nej	Ja	Nej
Kubens geometri	Geometri	Ja	Ja	Ja	Ja
Labyrinter	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Nej
Lys!	Geometri	Nej	Ja	Ja	Nej
Magiske rektangler	Talteori	Ja	Ja	Ja	Ja
Matematik og spil	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Møntsystem	Talteori	Nej	Nej	Ja	Ja
n! ('n fakultet')	Talteori	Ja	Nej	Ja	Ja
Opsplitning i enhedsbrøker	Talteori	Ja	Ja	Nej	Ja
Pandekageudskæring	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Pengesedlerne	Talteori	Nej	Nej	Ja	Ja
Periodiske ord	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Perspektiv	Geometri	Ja	Ja	Ja	Ja
Perspektiv m. to forsvindingspunkter	Geometri	Ja	Nej	Ja	Nej
Punkter og halvplaner	Geometri	Nej	Ja	Ja	Ja
Punkter på et kvadrat	Geometri	Ja	Ja	Ja	Ja
På jagt efter skatten	Talteori	Nej	Nej	Ja	Ja
Radioaktivitet	Andet	Ja	Ja	Ja	Nej
Rum med fælder	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Skift plads	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Skubbespil	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Spiren	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Solitaire	Kombinatorik	Nej	Ja	Ja	Ja
Springerens tur	Kombinatorik	Ja	Ja	Ja	Ja
Stern-Brocots træ	Talteori	Ja	Ja	Nej	Nej
Talsystemer	Talteori	Ja	Nej	Nej	Nej
Tetraeder	G&K	Nej	Ja	Nej	Nej
Tetrisbrikker	G&K	Ja	Ja	Ja	Ja
Tæpperne	G&K	Nej	Ja	Ja	Ja
Udskæring af rektangel i kvadrater	Talteori	Ja	Nej	Ja	Nej

Bilag 4: Analyseresultat, variabel 2

De 30 opgaver med lettilgængelige resurser ses i tabellen nedenfor. Til hver opgave er angivet det søgeord, der gav de relevante links - links der omhandler problemstillingen i en given opgave. Alle internetsiderne er sidst besøgt d. 27. maj 2013.

Opgavetitel	**Søgeord**	**Resultater**
Alle veje fører til Rom	*shortest routes square lattice*	http://math.stackexchange.com/questions/103470/how-can-i-find-the-number-of-the-shortest-paths-between-two-points-on-a-2d-latti http://www.uv.es/~balbelo/BBV_NW04.pdf http://www.robertdickau.com/path3d.html
Antal farver til at udfylde et kort	*colour a map number*	http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem http://www.funtrivia.com/askft/Question47625.html http://global.britannica.com/EBchecked/topic/214896/four-colour-map-problem
Den rejsendes problem	*the traveller's problem mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem
Engel og djævel	*angel and devil mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Angel_problem http://www.math.cornell.edu/~numb3rs/psamuelson2009/5_23_angelsanddevils.html
Farvelægning af polyeder	*colouring a polyhedron 3 colours*	http://mathworld.wolfram.com/PolyhedronColoring.html http://en.wikipedia.org/wiki/Polyhedron_model http://www.cgal.org/Manual/latest/doc_html/cgal_manual/Polyhedron/Chapter_main.html
Fodboldodds	*football odds mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_bookmaking http://www.soccerwidow.com/
Fordelingen mellem piraterne	*distribution between pirates mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Pirate_game http://www.mytechinterviews.com/5-pirates-fight-for-100-gold-coins
Fransk billard	*billard mathematics*	http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/Lashley_MATpaper_%20FINAL.pdf
Frimærkeproblemet	*stamp problem mathematical*	http://en.wikipedia.org/wiki/Postage_stamp_problem http://mathworld.wolfram.com/PostageStampProblem.html
Grafer	*graphs edges mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(mathematics)

Grafteori	*graph theory mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory http://www.jcu.edu/math/vignettes/bridges.htm
Håndtrykkene	*handshake mathematics*	http://mathforum.org/library/drmath/sets/select/dm_handshakes.html http://mathforum.org/library/drmath/view/68330.html http://dwb.unl.edu/calculators/activities/middle/shake.html
Konstruktion med farver	*4 colour problem 3 dimensions*	http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem http://www.york.cuny.edu/~malk/tidbits/tidbit-four-color.html
Kvadrater i rektangler	*squares in rectangles fraction*	http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html
Kubens geometri	*geometry of the cube the shortest way*	http://math.stackexchange.com/questions/108023/metric-on-the-unit-cube http://www.ma.utexas.edu/users/gilbert/M333L/BinderDay5.pdf http://www.ehow.com/how_8135550_geometric-distance-square-unit-cube.html
Labyrinter	*maze*	http://en.wikipedia.org/wiki/Maze
Magiske rektangler	*magic square*	http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square http://www.mathematische-basteleien.de/magsquare.htm http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
n! ('n fakultet')	*numbers of digits in n factorial*	http://mathforum.org/library/drmath/view/68245.html http://inder-gnu.blogspot.dk/2009/08/find-number-of-digits-in-factorial-of.html
Opsplitning i enhedsbrøker	*unit fraction decomposition*	http://www.mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction http://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus_2/n_table
Pandekageudskæring	*cutting a pancake mathematics*	http://demonstrations.wolfram.com/PancakeCuttingProblem/ http://mathworld.wolfram.com/CircleDivisionbyLines.html
Periodiske ord	*Lothaire combinatorics*	http://www.math.utu.fi/en/home/karhumak/combwo.pdf
Perspektiv	*shadow cube perspective*	http://www.mahalo.com/how-to-understand-perspective-in-drawing/
Perspektiv m. to forsvindingspunkter	*perspective drawings*	http://www.math.utah.edu/~treiberg/Perspect/Perspe

	mathematics	ct.htm http://www.math.vcu.edu/g1/journal/Journal6/17Griffin.pdf
Punkter på et kvadrat	*points on a square distance*	http://stackoverflow.com/questions/2723626/algorithm-putting-point-into-square-with-maximal-minimum-distance
Radioaktivitet	*radioactivity mathematics*	http://brightstartutors.com/blog/2012/radioactive-mathematics/ http://www.furryelephant.com/content/radioactivity/radioactive-decay-equations/ http://pulse.pharmacy.arizona.edu/math/chernobyl1.html
Springerens tur	*chess knight mathematics*	http://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour http://mathworld.wolfram.com/KnightGraph.html
Stern-Brocots træ	*Stern-Brocot tree*	http://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Brocot_tree http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml http://www.cut-the-knot.org/blue/encoding.shtml
Talsystemer	*number of symbols writing a number with base n*	http://en.wikipedia.org/wiki/Numeral_system http://en.wikipedia.org/wiki/Duodecimal http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.bases.html
Tetrisbrikker	*mathematics covering pentaminos tetris*	http://en.wikipedia.org/wiki/Tetromino http://en.wikipedia.org/wiki/Pentomino
Udskæring af rektangel i kvadrater	*squares in rectangles sequence*	http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.golden.ratio.html http://nrich.maths.org/4836

Bilag 5: Math en Jeans opgaver, Prins Henriks Skole, '12-13 (dansk)

PROBLEM 1: FRIMÆRKERNE.

Forestil jer, at postvæsenet i et land udsteder frimærker med de faste værdier $v_1, \ldots, v_n$.

For eksempel findes der i Danmark frimærker med værdier på 0,50 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 6,50 ; 8 ; 8,50 ; 9 ; 9,50 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 20 ; 25 ; 30 ; 50 ; 80 ; 600 ; 800 ; 835,95 (de 5 sidste kommer fra en samling på 10 eller 100 frimærker!).

Hvis der på en konvolut kan sættes et maksimalt antal frimærker N, hvad er da den mindste frimærkeværdi, som man ikke kan sætte på en konvolut?

Eksempel:
Forestil jer, at der findes frimærker med værdierne 1 ; 2 ; 5 ; 10.
Hvis en konvolut kun kan have ét frimærke, da er den første umulige værdi 3; hvis konvolutten kun kan have 2 frimærker, da er den første umulige værdi 8, for 3 frimærker er svaret 18; for 4 er det 28… osv…

SPØRGSMÅL:

- Hvad er den mindste værdi, som man ikke kan sætte på en konvolut med 5 danske frimærker?
- Hvad er det bedste valg af frimærker, der gør det muligt at få tallene fra 1 til 100 med 5 frimærker? 4 frimærker? 3 frimærker?
- Hvis man kun kan sætte 3 eller 4 eller 5 frimærker, hvilket valg af frimærkeværdier tillader da, at man kan skrive alle tallene fra 1 til N, hvor N er så stor som mulig? Mere specifikt, er 1, 2, 5 en god kombination?

PROBLEM 2: APPROKSIMERE Π I HÅNDEN.

Hvis man tager en cirkel med radius 1, da er arealet lig med π (det vil være vores definition af π).

Problemets formål:

at give en approksimation af tallet π ved hjælp af en følge af rationale tal, som nærmer sig π.

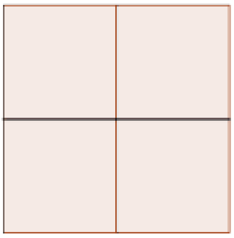
Ide til en mulig konstruktion:

Opdel diskens areal i mindre og mindre kvadrater og tæl kvadraterne, hvis areal man kender hver og en af.

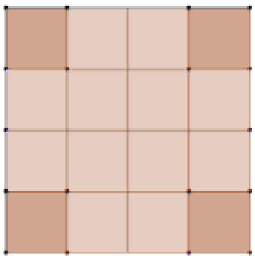
SPØRGSMÅL:

Er der en systematisk måde at fortsætte denne følge?

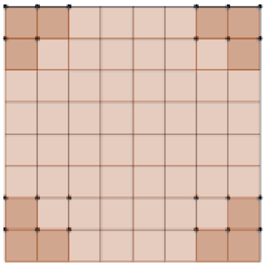
Mulig variant: tæl kvadraterne indskrevet i cirklen eller det mindste antal kvadrater, som disken er indeholdt i.



AREAL = 4



AREAL = 3



AREAL = 52 X 1/16 = 3,25

PROBLEM 3: MATEMATISK SOLITAIRE.

Spilleren får 5 kort, hvorpå der er skrevet tal fra 1 til 10. Målet med spillet er at finde en kombination af de 4 første kort med operationerne +, -, x, / som giver tallet, der står skrevet på det sidste kort.

Eksempel:
man får kort med værdierne 1; 2; 3; 4; 5.
Så har man: (((3-2)x1)+4 = 5
(((3x4) / 2)-1) = 5

Variant:

Givet et tal N og 4 kort, find en kombination af operationer med de 4 kort, som giver N (man spiller altid med det samme sidste tal, som kan være større end 10).

SPØRGSMÅL:

- Givet 4 kort, hvad er det største tal N, som man kan skrive? Det mindste? (NB: helt og positivt).
- Givet 4 kort, hvor mange forskellige tal kan man få? (Det afhænger (muligvis) af de 4 givne kort).
- Findes der 4 kort, som tillader 3 forskellige kombinationer, der alle giver det samme N? 4 forskellige kombinationer?

- Hvilke kombinationer af kort kan bruges, hvis man skal have N=0? N=1? N=2? Er der nogle N, der er nemmere at få (dvs. med flere muligheder) end andre?
- Samme spørgsmål, men hvor man kun kan bruge en af de fire operationer +, -, x, / én og kun én gang.

PROBLEM 4: I FUGLEFLUGTSLINJE / FLY OVER JORDEN SOM DREJER.

Hvordan vælger man hvilken retning, man skal flyve, hvis man skal fra København til New York, Cape Town eller Sydney?

For at gøre tingene mere simple:

1. vi ignorerer ethvert spørgsmål om vind!
2. vi antager, at jorden er flad til at starte med… og at den drejer meget hurtigt rundt!

SPØRGSMÅL:

- Hvilken retning bør man vælge at flyve for at komme fra A til B, hvis A er i centrum? Hvis B er i centrum? Hvis A og B er vilkårlige? (vi antager, at rotationshastigheden og flyvehastigheden er konstante).
- Er den korteste vej fra ét punkt til et andet altid i rette linjer, uden at vende?
- Hvad ligner projektionerne af de rette linjer med udgangspunkt i et givet punkt A? Vi antager først, at A er i centrum, hernæst uden for centrum.

Bilag 6: Math en Jeans opgaver, Prins Henriks Skole, '12-13 (original)

MATh.en.JEANS **sujets 2012-2013.**

PROBLÈME 1 : LES TIMBRES.

Supposons que la poste dans un pays donné émette des timbres aux valeurs fixées v_1, v_2, ..., v_n.

Par exemple, au Danemark, il existe des timbres aux valeurs de 0,50 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 6,50 ; 8 ; 8, 50 ; 9 ; 9,50 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 20 ; 25 ; 30 ; 50 ; 80 ; 600 ; 800 ; 835,95 (les 5 derniers émanant de collection de 10 ou 100 timbres !).

Étant donné qu'une enveloppe peut contenir un nombre maximal de timbres N, quelle est la plus petite valeur en timbre que l'on ne peut pas mettre sur une enveloppe ?

Exemple :
supposons qu'il existe des timbres de valeur 1 ; 2 ; 5 ; 10.
Si une enveloppe ne peut contenir qu'un seul timbre, la première valeur impossible est 3 ; si l'enveloppe ne peut contenir que 2 timbres, la première valeur impossible est 8 ; pour 3 timbres, c'est 18 ; pour 4, c'est 28 … etc …

QUESTIONS:

- Quelle est la plus petite valeur que l'on ne peut pas mettre sur une enveloppe avec 5 timbres danois ?
- Quel est le meilleur choix de timbre qui permette de produire tous les nombres de 1 à 100 avec 5 timbres ? 4 timbres ? 3 timbres ?
- Si on ne peut émettre que 3 ou 4 ou 5 timbres, quel est le choix de valeur de timbre qui permette d'écrire tous les nombres de 1 à N pour N aussi grand que possible ? Plus particulièrement, est-ce que 1, 2, 5 est une bonne combinaison ?

PROBLÈME 2 : APPROXIMER Π À LA MAIN.

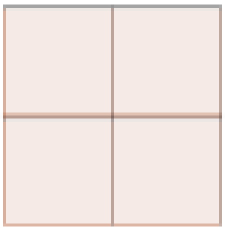
Si l'on prend un cercle de rayon 1, alors son aire vaut π (ce sera notre définition de π).

But du problème :
donner une approximation du nombre π par une suite de nombres rationnels qui approchent π.

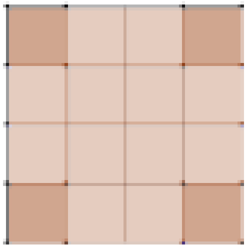
Idée d'une construction possible :
Subdiviser l'aire du disque en carrés de plus en plus petits et compter les carrés dont on connait chacune des aires.

QUESTION:

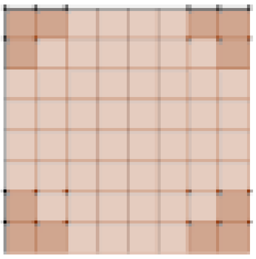
Y-a-t'il une manière systématique de continuer cette suite ?
Variante possible : compter les carrés inscrits dans le cercle ou encore le minimum de carrés contenant le disque.



AIRE = 4



AIRE = 3



AIRE = 52 x 1/16 = 3,25

PROBLÈME 3 : LE SOLITAIRE MATHÉMATIQUE.

Le joueur reçoit 5 cartes où sont inscrits les nombres de 1 à 10. Le but du jeu est de trouver une combinaison des 4 premières cartes avec les opérations +, -, x, / qui permette de retrouver le nombre inscrit sur la dernière carte.

Exemple :
on reçoit les cartes numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
Alors on a : (((3 – 2) x 1) + 4 = 5
(((3 x 4) / 2) – 1) = 5

Variante :
Étant donné un nombre N et 4 cartes, trouver une combinaison d'opérations sur les 4 cartes qui donne N (on joue toujours avec le même dernier nombre, qui peut être plus grand que 10).

QUESTIONS:

- Étant donné 4 cartes, quel est le plus grand nombre N que l'on puisse écrire ? Le plus petit ? (Attention : entier et positif).
- Étant donné 4 cartes, combien de nombres différents peut-on obtenir ? (Cela dépend (probablement) des 4 cartes données).
- Existe-t-il 4 cartes qui admettent 3 combinaisons différentes donnant le même N ? 4 combinaisons différentes ?
- Quelles sont les combinaisons de cartes qui peuvent être utilisées pour N = 0 ? N = 1 ? N = 2 ? Y-a-il des nombres N plus facile à obtenir (c'est à dire avec plus de possibilités) que d'autres ?
- Mêmes questions mais on ne peut utiliser une des quatre opérations +, -, x, / qu'une et une seule fois.

PROBLÈME 4 : À VOL D'OISEAU / D'AVION SUR UNE TERRE QUI TOURNE.

Comment choisir dans quelle direction voler si on veut aller de Copenhague à New-York, Cape Town ou Sydney ?

Pour simplifier les choses :

1. on ignore toute question de vent !
2. on suppose que la terre est plate pour commencer … et qu'elle tourne très vite !

QUESTIONS:

- Quelle direction de vol choisir pour aller de A vers B si A est au centre ? B est au centre ? Si A et B sont quelconques ? (on suppose que la vitesse de rotation et la vitesse de vol sont constantes).
- Est-ce que le chemin le plus court d'un point à un autre est toujours en ligne droite, sans tourner ?
- À quoi ressemblent les projections des lignes droites à partir d'un point donné A ? On suppose d'abord que A est au centre, puis A à l'écart du centre.

Bilag 7: Vejledning til læsning af transskriptioner

Særligt for transskriptioner af observationer fra Prins Henriks Skole '12-13:

Transskriptionerne indeholder her dato, gruppenummer, enkelte billeder fra ateliererne samt antal minutter, der er blevet optaget på diktafonen.

Tekst i kursiv angiver, hvad der sker mellem passagerne.

Gøres der brug af enkelte franske ord i en dansk sætning, er disse kursiveret.

Generelt (både gældende for observationer og interviews):

Der udskrives ordret, således at citater, hvor den interviewede afbryder sig selv, eller ændrer ord undervejs også fastholdes. Tidsangivelser skrives ind undervejs. Kommentarer står i kantede parenteser. Fx [de griner].

Desuden benyttes følgende forkortelser:

(?uforst.)	Uforstående (ét eller to ord) – når jeg efter flere gennemlytninger ikke har kunnet høre, hvad der bliver sagt. Der kan være flere årsager: person mumler, taler lavt, flere personer snakker i munden på hinanden, støj i lokalet osv.
(??uforst.)	Uforstående (mindst tre ord, ofte en hel sætning).
(frø?)	Hvis jeg mener at kunne høre, at der bliver sagt "frø", men ikke er helt sikker.
,	Komma sættes som pausekomma i det talte.
...	Personen stopper op og færdiggør ikke sin sætning.
/	Personen bliver afbrudt af en anden.
(pause)	Når der er en pause på 3 sek. eller mere, hvor der ikke bliver sagt noget.

Bilag 8: Transskription af observationer fra Prins Henriks Skole (november '12 samt januar '13)

Dato: 28.11.2012
Gruppe: 4
Optagelsestid: 48:31 min

Gruppen arbejder med spørgsmål 2 i Matematisk solitaire. De går i gang med at undersøge, hvilke resultater, de kan få med tallene 1,3, 7 og 9. Martin melder ud, at han vil lave stykker med multiplikation.

(03:37)

Martin:	3 gange 9. Okay. 3 gange 1. Sådan der, jeg har fundet dem alle.
Oliver:	Hey Martin, jeg tror lige vi har lavet en fejl.
Martin:	Nej. Jeg har fundet dem alle, jeg skal skrive svarene nu.
Oliver:	Du kan også, se, så kan du lave det.
Umar:	De der, de er nemme. Nej, de der, de er alt for nemme.
Oliver:	Så skal du også lave alt det der.
Umar:	Ja det er sådan der.
Oliver:	Det er ikke så nemt.
Martin:	Nårh, skal jeg bare gøre det sådan? Denne her vej?
Oliver:	Nej du skal lave alt.
Umar:	Du [Martin] skal lave flere. Det er ikke kun to numre.
Oliver:	Men jeg har bare ikke forstået det, må jeg lige se på den her, *question*? [Oliver kigger på opgaveformuleringen]
Martin:	Nej, men jeg har ikke forstået, hvordan jeg så skal gøre?
Oliver:	Du skal bare finde alle resultaterne, du kan. Du har fire kort. Så skal du finde alle resultaterne, man kan med dem.
Umar:	Du ved godt, du skal bruge fire numre og så bare dividere, gange, plusse.
Martin:	Det har jeg også gjort, men jeg /
Umar:	Nej du har kun brugt én og to, én og to, det er jo bare meget nemt, det er de der /
Martin:	Ja, nårh, okay.
Oliver:	10, 20. Det gør 20 i alt, hvis du tager dem.
Martin:	3 gange 9 gange 1, 9 gange 3 gange 7.
	(pause)
Martin:	To sekunder, man kan kun finde, nå nej, så man kan /
Oliver:	Nej man kan finde mange. Du kan også lave nogle med gange <u>og</u> plus og /
Martin:	Nej, men det, jamen, vi gør jo én ting hver.
Oliver:	Nej nej fordi ellers får vi aldrig fundet dem, hvor der er minus, gange <u>og</u> plus samtidig.
Martin:	Og dividere.
Oliver:	Ja og dividere. Nu gør vi det, (??uforst.) bagefter.
Martin:	Orh pis. (6:03)
	(pause)

Oliver:	Okay, alors, 1 plus 7, ça fait 8, 8 moins 9, ça fait moins 1, moins 1 plus / (06:44)
Martin:	Behøver vi at finde resultaterne på dem?
Oliver:	Ja, on doit trouver tous les résultats qu'on peut obtenir.
Martin:	Damn.
Umar:	Tous les résultats, oui.
Oliver:	Qu'on peut obtenir avec ces quatre cartes. (07:00)

De tre elever i gruppen arbejder hver især med at finde resultater.

(10.01)

Oliver:	Moi, j'ai trouvé 20, 35, 2.
Martin:	Jeg bliver rundtosset af det her.
Oliver:	Hvorfor?
Martin:	Fordi der er så mange tal og man kan ikke…
Umar:	Jamen altså, der er fire tal.
	[de griner]
Amir:	Fire tal ja.
Umar:	Gange 1.
Oliver:	12, det giver, øh, 13, 20.
Martin:	Helt ærlig, skal vi virkelig også gøre det med...
	(pause)
Martin:	Men det her, det er jo næsten umuligt.
Oliver:	Nej.
Martin:	Med fire tal jo.
Oliver:	Hvorfor? Det skal man med fire tal.
Umar:	Så det er ikke umuligt, du skal bare /
Oliver:	Regne det ud.
Martin:	Ja ja, men nu kom jeg, hvis man nu lægger, laver, ligemeget, man kan jo så lave /
Oliver:	3, 3 gange 9.
Umar:	Præcis, du kan bare lave 3 gange 9 plus 7 plus 1.
Oliver:	Ja.
Martin:	Der er over 100 resultater. Meget over.
Umar:	Ja så skal du bare tage en af de der 100. Eller, altså du kan bare skrive /
Oliver:	Jeg tror ikke, at der er 100 resultater. Ellers ville de ikke spurgt, spørge det, fordi vi skal skrive alle de resultater, vi fandt.
Martin:	Ja, men /
Umar:	Altså, men jeg tror nok vi kun skal skrive det med én resultat fordi, vi kan, man skal finde mange med 20.
Oliver:	Nej nej, dans la, c'est les résultats différents. « Étant donné 4 cartes, combien de nombres différents peut-on obtenir ? » (11:36)

De tre elever regner videre hver for sig.

(13:17)

Oliver:	Hvor mange har du fundet?
Martin:	1, 2, 3, 4, 5 /

	[Martin tæller antallet af regnestykker på sit papir]
Oliver:	Det der, det er ikke rigtigt.
Martin:	Hvorfor ikke?
Oliver:	Der er kun den dér, der er rigtig.
	[Oliver peger på det eneste stykke, hvor Martin har brugt alle fire tal]
Martin:	Hvorfor? Hvorfor er de der ikke rigtige?
Oliver:	Fordi du må ikke bruge to, du skal bruge fire.
Martin:	Nej, men behøver man at bruge fire i hver?
Umar:	Ja.
Oliver:	Ja.
Umar:	Se, du kan, ved du hvad, her, læs det her. Det hjælper.
	[Umar rækker Martin opgaveformuleringen]
Oliver:	Jeg tror ikke, at du har læst det endnu.
Umar:	Læs.
Oliver:	Du læste det sidst.
Umar:	Bare læs.
	[Martin læser det for sig selv]
Martin:	Der er ikke noget *diviser*.
Umar:	Jamen du kan godt lave det.
Oliver:	Nej vi ved godt der ikke er *diviser* med, men vi har heller ikke brugt det.
Umar:	Men du må gerne lave det.
Martin:	3 gange 7 plus 9. Okay.
Oliver:	Okay.
Martin:	Se, man skal finde alle dem med… (14:16)
	[de pjatter]
Martin:	Men så kommer man hele tiden på de samme resultater, hvis man bliver ved med at gange, med gange. (14:52)
Oliver:	Hvorfor? Jamen du skal ikke kun lave med gange.
Umar:	Martin.
Oliver:	Se du kan lave med minus.
Umar:	Du kan, du kan /
Oliver:	Du kan lave to gange gange.
Umar:	Du kan lave 3 gange 9 plus 7 /
Martin:	Er det helt blandet?
Oliver:	Ja ja selvfølgelig.
Umar:	Minus 1.
Martin:	Nårh, okay okay.
Umar:	Læs det igen, hvis du vil.
Martin:	Nej nej, men jeg forstod bare ikke, fordi det kunne godt… ligemeget.
Umar:	Bare glem det. Bare lav, øh, nogle.
Martin:	9 plus 3 minus 1 gange med 7, giver… Her kan man finde rigtig mange.
Oliver:	Nej.
Martin:	Jo.
Oliver:	Ikke specielt mange.
Martin:	Jo.
Oliver:	Nej fordi prøv at se, der er 1, 2, 3. 3.
Martin:	4.

Oliver: Hvor? Nej jeg taler om det der [Oliver peger på operationerne]. 1, 2, 3. Der er tre af dem.
Martin: Nårh.
Oliver: Og hvor mange, du kan ikke bruge særlig mange gange tre, når du blander dem eller gør hele tiden det samme.
Martin: Nej okay. (16:00)

Oliver får et negativt resultat og går op og spørger læreren, om det er okay. Han kommer herefter tilbage til gruppen.

(16:52)
Oliver: Og vi må gerne lave noget med minus 0, hvis vi ved hvordan det virker, når der, når det 0, 0 minus 3, det giver minus 3. Så er det bare det der, vi skal.
Martin: Må vi også godt gøre det?
Umar: Ja.
Oliver: Ja under 0.
Umar: *Les nombres négatifs.*
Oliver: Du skriver for eksempel 3 minus 9, det giver minus 6. (17:13)

De tre elever regner videre hver for sig.

(18:55)
Martin: Jeg er virkelig dårlig til det der med minus. Jeg kan aldrig huske, hvad det er for en vej, man skal sætte dem?
Oliver: Minus?
Martin: Mm.
Oliver: Hvordan?
Martin: Altså, skal man, jeg har glemt, hvordan man skal sætte dem. Skal man sætte det største tal først eller det mindste tal først? Jeg har lige glemt det.
Oliver: Minus?
Martin: Ja når man laver minus.
Oliver: Ah, du, prøv at se. 7 minus 1 /
Martin: Nå okay.
Oliver: Det giver 6, men 1 minus 7, det giver minus 6.
Martin: Okay, okay, okay.
Oliver: Så det er ikke helt det samme.
Martin: Okay, okay.
Oliver: Eller nej, det giver minus 5.
Martin: Men hvorfor det?
Oliver: Ehm fordi, der er jo 1. Minus 6. Der er 1 og 6.
Martin: Nå, men det der, det er et 7-tal.
Oliver: Ja.
Martin: Ja så er det minus 6.
Oliver: 1 minus, ah ja, 1 minus 7, det giver, ah ja, 6.
(pause)

Oliver: Men nogle gange gør det ikke noget Martin. Nogle gange så kan du bare sætte 3 minus 9, og så siger vi bare det giver 6. (20:05)

De tre elever regner videre hver for sig.

(27:52)

Martin: Orh det her, det er kedeligt.
Oliver: Er det kedeligt?
Martin: Nej, men jeg siger ikke det her, jeg synes bare, det er så svært.
Oliver: Svært?
Martin: At finde alle de der svar, men det /
Oliver: Nej du kan bare gøre, prøv at se. 9. Nej, jeg har en ide, jeg har en idé nu. 7. Prøv at se, nu kan jeg finde den.
[Oliver skriver $(7 + 3) \cdot (9 + 1)$ på sit papir]
Martin: Okay 7 minus /
Oliver: Nej 7 plus 3.
Martin: Plus 3 gange 7.
Oliver: 7 plus 3 gange 9, 9 plus 1, det giver 100.
Martin: Giver det 100?
Oliver: Ja. 7 plus 3 gange 9 plus 1. 7 plus 3, det giver 10. 9 plus 1, 10. 10 gange 10, 100.
Umar: Hey hey, se. 7 plus 3, det giver 10. Plus 1, det giver 11. Gange 9.
Oliver: Må jeg lige se, hvad det giver her?
Umar: 99.
Oliver: Og det der, jeg tror ikke helt, det der det er korrekt.
[Oliver peger på udregningen $9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 = 55$ på Martins papir]
Martin: Nej det tror jeg heller ikke.
[de griner]
Oliver: Fordi Umar fandt det samme, og han fandt 189, og du fandt 55.
Umar: Gjorde han det samme?
Oliver: Ja.
Umar: Så vent lige, vi laver det igen. 9 gange 7, det giver 66.
Martin: Jeg har lavet 3 /
Umar: 63.
Oliver: Ja 63.
Martin: Der står 3 gange /
Oliver: 63 gange 3, det giver mere end 100.
Martin: Der står 3 gange 9.
Umar: Ja det giver mere end 100.
Martin: Der står 3 /
Umar: Det giver 189.
Martin: Jamen jeg skrev 3 gange 9.
Oliver: 3 gange 9, det giver /
Umar: 21.
Oliver: Ja 21.
Umar: Nej nej. 27.
Oliver: 27. 27. Og så 27 gange 7, det giver ikke 55 fordi du tager /
Martin: Nej.

Oliver:	2 gange 7, det giver mere end 100, det giver cirka 140 eller sådan noget.
Martin:	Ups.
Umar:	Ja ups ikke. (29:40)

Dato: 09.01.13
Gruppe: 4
Optagelsestid: 54:19 min

Gruppen er nået til spørgsmål 2 i Matematisk solitaire.

(06.04)

Lucas:	Vi skal lave den her *question deux*, som er rigtig svær. « Étant donné 4 cartes, combien de nombres différents peut-on obtenir ? » Dadam dam-dam. [Lucas læser op fra opgaveformuleringen]
Umar:	Combien qu'on peut obtenir ?
Lucas:	Ja og det er ret svært.
Umar:	Donné quatre cartes, combien peut-on, on a quatre cartes.
Lucas:	Mais combien de <u>nombres</u>.
Umar:	Ah.
Lucas:	Og det er jo sådan alle de der *calculs*. Så skal man lave rigtig rigtig rigtig rigtig rigtig rigtig rigtig rigtig rigtig mange.
Umar:	Ah oui, c'était quoi, le nombre le plus grand qu'on avait trouvé ? J'ai trouvé, après, le nombre (?uforst.)
Lucas:	Oui.
Umar:	Alors, on peut trouver (250 cartes?).
Lucas:	Non, ça c'est le résultat et combien de résultats ? Så vi skal lave masser *calculs*, og det gør jeg.
Umar:	Oui, beaucoup de calculs.
Lucas:	Jeg spørger lige Monsieur Giroud [anonymt navn]. (06:48) [Lucas rejser sig fra bordet for at spørge læreren]

Lucas har valgt tallene 1,3,7 og 9 og opskriver stykker med multiplikation. Amir og Umar har valgt tallene 3,5,7 og 9 og undersøger, hvilke resultater, de her kan få. De udregner sammen $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ *nedenfor.*

(07.10)

Umar:	9 fois 3.
Amir:	9 fois 3, ça fait /
Umar:	21.
Amir:	Non 27.
Umar:	21.
Amir:	27. 27.
Umar:	Attends, attends, attends, c'est moi, j'ai confondu avec 3 fois 7. 9 fois 3.
Amir:	27.

Umar: 27. Plus 5, ça fait 32.
(pause)
Umar: Fois 7 égal… (??uforst.)
Amir: Quoi ?
Umar: Et 9 fois 3, ça fait 27, plus 5, ça fait 32, fois 7.
Amir: Mais alors, on a 27, fois, euh, plus /
Lucas: Jeg har fået mit papir.
Amir: Mm.
Umar: Se. 9 gange 3, det giver 27. Plus 5.
Amir: Nårh.
Umar: Plus 5, 32 ikke?
Amir: 32.
Umar: Og så skal du lave 32 gange 7.
Lucas: Hvad giver 32 gange 7?
Umar: Så 7, 7 gange 3, det giver, øh, 7 gange 2, det giver 14. 7 gange 3, øh, jeg tror det er 224. 224.
Lucas: Umar, pst, har du nogen kuglepen?
Umar: Jeg har ikke nogen. Du har din tusch.
Lucas: Ja, men der er ikke nogen kuglepen i.
Umar: 224. Skal vi tjekke det? (08:40)
[Umar taster stykket ind på lommeregneren i sin telefon. Se nedenfor]

Umar: Øh 62. Det tror jeg virkelig ikke, det tror jeg altså ikke. (09:52)
Amir: Er du helt sikker? 9 gange 3 plus 5 gange 7 lig 62?
Umar: 9 gange 3 /
Amir: Nårh, måske skal man kalkulere ligesom 27 plus øh /
Umar: Nårh, vi har glemt de der *parenthèses*. (10:21)
[Amir taster $(9 \cdot 3) + (5 \cdot 7)$ ind på telefonen]
Amir: Det siger stadig 62. (11:00)
Umar: Vi fik 224, det siger vi. Det er 62.
Amir: Nej så skal vi sige 62.
Lucas: *Mystery*.
Umar: Nej vent lige, vi prøver igen. Okay 9 gange 3, det giver 27.
Amir: Ja.
Umar: Plus 5.
Amir: Nej måske er det plus øh, 35 plus 27.
Umar: Nej, men det giver jo… hvorfor siger du 35? Det er det, jeg ikke forstår.
Amir: Nej 5 gange 7.
Umar: Nej vi kan lave det med vores hoved, vi har ikke brug for telefoner.
(pause)
Umar: 9 gange 3, 27, plus 5, det giver 32. 7 gange 30, 7 gange 30. 7 gange 3, det giver 21. 210, øh, det giver jo 224!

Amir:	Nej det er 62, jeg har lige…
Umar:	62. Seriøst. 9 gange 3 /
Amir:	9 gange 3, 27. Og så /
Umar:	Nej det der, det er plus.
Amir:	Ja plus 5 gange 7 og 5 gange 7, det er 35.
Umar:	Nej plus 5, plus 5. Se se. 7, jeg tror at det, altså, 9 gange 3 plus 5, plus 5, gange, gange 7.
	[Amir taster ind på telefonen imens]
Amir:	Gange 7, er lig, 62.
Umar:	Nej, men det, det /
Amir:	Ja det er 62. Lommeregneren har lige /
Umar:	Den dér, der skal være *parenthèse* før. Er der *parenthèse* der?
Amir:	Nej der er ingenting.
Umar:	Kan vi ikke bare tage en *calculatrice*?
	(pause)
Lucas:	Jeg får brug for meget papir og tusch i dag.
Amir:	Det er 62, det er stadig 62.
Umar:	Vent lige, vent lige, vent lige.
Amir:	Det er hele tiden 62.
Umar:	Kom kom. 9 gange 7.
	[Umar begynder at taste ind på telefonen]
Amir:	Ja, *parenthèse*.
Umar:	Nej 9 gange 3.
	[de griner]
Umar:	9 gange 3.
Amir:	Ellers kan vi også bare skifte numrene ud.
Umar:	Plus, vent lige, plus…
Amir:	Du skal lige lave *parenthèse*.
Umar:	5, gange 7.
	[Umar har nu tastet $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7$ ind og trykker ”lig med”]
Umar:	224! Det var det, jeg sagde.
Amir:	Men du gjorde ikke sådan der.
	[Amir peger på $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ på deres papir]
Umar:	Nej, men fordi, vi skal bare have to *parenthèses* her.
Amir:	Ja ja.
Umar:	Ja ja, den er god med dig. Jeg vidste det var ikke 62.
Lucas:	Okay, jeg er i gang med at lave alle de der *résultats*, man kan få. Det er... hvad er det for en kuglepen, det her?
Amir:	Den fik jeg af (?uforst.)
Umar:	Hvad kalder man… Amir, hvad er det der på dansk? Hvad er det der på dansk? Lucas, Lucas, hvad er det der på dansk?
Amir:	En parentes?
Lucas:	Parentes ja.
Amir:	Er det ikke parentes?
	[Amir henvender sig til Simone]
Simone:	Parentes, jo.
Lucas:	Jeg sagde jo, at det var parentes.
Simone:	Må jeg se, hvor har I sat den henne?

Amir: Øh lige her.
Umar: Her og her.
[de peger på stykket $(9 \cdot 3 + 5) \cdot 7$]
Amir: Er det rigtigt hele, øh…
Umar: Det er det.
Simone: Jeg vil ikke sige noget, jeg vil ikke blande mig.
Amir: Okay, men det <u>er</u> rigtigt.
Lucas: Hvad fanden er det for en kuglepen?
Simone: Men hvis I nu <u>ikke</u> sætter den, så var det rigtigt, det du [Amir] sagde.
Amir: Ja.
Umar: Så giver det der 62.
Simone: Så et andet stykke kunne være, hvor I fjerner parenteserne ikke? Og så <u>giver</u> det 62.
Amir: Nå, ja.
Umar: Nå ja, jamen det var det, jeg ville sige. (15:03)

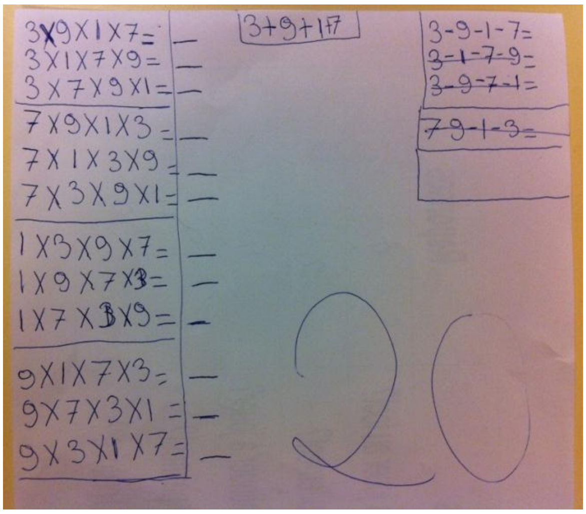
Amir og Umar går videre til spørgsmål 3.

(18:24)
Umar: Se, Amir Amir, den der, den er ret nem. Hvilken *calcul* skal vi bruge? 224 eller 62? 62 det er den nemme fordi du skal, du skal, øh, hvis du finder nu, øh, se. Nu er der 9 gange 3 plus 5 gange 7, det giver 62 ikke? Men nu skal du finde noget, som giver 62, men ikke med /
Amir: Uden /
Umar: Uden de der gange, plus og gange.
Amir: Så er det med minus og /
Umar: Nej du skal sådan skifte dem.
Amir: Nårh, skifte, ja.
Umar: Du skal finde en /
Amir: En anden en.
Umar: Ja, nej ikke en anden en. Du skal finde, *comment dire façon* ? *Comment dire façon* ?
Amir: Euh.
Simone: Måde.
Umar: En anden, du skal finde en anden måde for at finde 62, men med de der fire numre.
Amir: Okay. Det bliver svært.
Umar: Så vi kan lave 7 gange 5.
Amir: 7 gange 5, det er /
Umar: Det er 35.
Amir: Ja.
Umar: Så kan vi lave, ehm, plus 3 gange 9. 9 gange 3.
Amir: Ja det er /
Umar: 27.
Amir: Det er bare den her, den samme.
Umar: Nej, nej, fordi det, fordi vi skifter jo det.
Amir: Nej, ja, så er det, så skal vi bare lige… så er det vel let.

Umar:	Det' vi, vi skal bruge, vi skal, vi skal ikke røre ved de der numre, okay? Vi skal kun røre ved det her.
	[Umar peger på regneoperationerne i stykket $9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$]
Amir:	Nårh.
Umar:	Så vi kan lave 9 plus 3.
Amir:	Det giver /
Umar:	Gange 5 gange 7. Nej fordi ellers, ehm /
Amir:	Nej det har vi jo i *parenthèse*.
Umar:	9 plus 3 gange 5.
Amir:	Gange 5, øh hvad er det?
Umar:	9 /
Amir:	Gange 3.
Umar:	9 plus, nej, vi skal bare skifte det her.
Amir:	Ja.
Umar:	Der kommer al… fordi der er tre [regneoperationer?], så er der altid én, der kommer til at røre den anden.
	(pause)
Umar:	Gange her og plus her. Nej nej nej, det virker, det virker. Vi skal bare lægge den her gange her.
Amir:	9 plus 3 gange /
Umar:	Nej nej, vi har ikke brug for den der, hvad laver du?
Amir:	Jeg jeg jeg /
Umar:	Vi skal finde /
Amir:	Jeg prøver at finde noget nyt.
Umar:	Ja ja, men du skal bare… vi, vi skifter det her. Så 9 plus 3 gange 5 gange 7, okay?
Amir:	Skal jeg kalkulere det?
Umar:	Ja kom.
	[Amir begynder at taste ind på telefonen]
Amir:	Okay, 9 /
Umar:	*Parenthèse*.
Amir:	Øh, hvordan laver man, nårh dér. 9 plus /
Umar:	9 plus 3.
Amir:	Ja, parentes? Luk parentesen?
Umar:	Øh ja parentes.
Amir:	Øh gange…
Umar:	Parentes.
Amir:	Eller uden parentesen?
Umar:	Nej uden. Plus 5.
Amir:	Nej gange 5.
Umar:	Gange 5, gange 5.
Amir:	Gange 5.
Umar:	Parentes.
Amir:	Parentes.
Umar:	Ehm, kan man godt lave parentes, hvis der bare er ét nummer?
	[$(9 + 3) \cdot 5 \cdot (7)$]
Simone:	Så gør den ikke nogen forskel.
Umar:	Gør den ikke?

Simone:	Nej så behøver man den ikke.
Umar:	Så vi behøver ikke parentes dér. Gange 5 gange 7.
Simone:	Hvad har I tastet? Har I tastet det sådan her ind eller hvad? Parentes rundt om de dér to? [$(9 + 3) \cdot 5 \cdot 7$]
Umar:	Ja.
Simone:	Ja.
Amir:	Ja, øh ja.
Umar:	Og hvor meget giver det?
Amir:	420.
Umar:	420! [Amir griner]
Amir:	Ja.
Umar:	Okay, så skifter vi noget andet, så lægger vi plus her og gange her. [$9 \cdot 3 + 5 \cdot 7$]
Amir:	Okay. 9 gange 3, i parentes.
Umar:	9 gange 3, ja i parentes.
Amir:	9 gange 3 i parentes, plus, nej.
Umar:	Øh /
Amir:	Plus eller gange nu?
Umar:	Plus.
Amir:	Ja plus.
Umar:	Ja plus plus. Nej, arh, det ved jeg ikke, det ved jeg ikke, du skal også hjælpe mig.
Amir:	Okay jeg prøver med plus. Og så 5 gange 7. [Amir taster ind på telefonen]
Amir:	62!
Umar:	62?
Amir:	Ja.
Umar:	Seriøst?
Amir:	Ja. 62. Ej det er den, vi gjorde før. Ej det er den, vi lavede før.
Umar:	Neeej, det var den vi lavede før. [de griner]
Amir:	Ej det her, det er altså ikke sjovt.
Umar:	Ellers, ellers så tager du den her, denne her, den der gange.
Amir:	Ja ja.
Umar:	Den tager du dér.
Amir:	Hvordan gør man?
Umar:	Plus plus, plus dér.
Amir:	Øh plus.
Umar:	Og så /
Amir:	Gange dér, ikke? Og så tilbage. [de får tastet $9 \cdot 3 \cdot 5 + 7$]
Umar:	62, 62, 62.
Amir:	Ej 142.
Umar:	Ej kom nu. (23:18)

Lucas afbryder Amir og Umar for at fortælle, hvor langt han er nået. Hans kladdepapir ses nedenfor.



(23:20)

Lucas:	Jeg er færdig med gange nu.
Umar:	Hvad mener du?
Amir:	Ja, du har ikke (?uforst.)
Lucas:	Nej, men altså, man skal se hvor mange *réponses* man kan få jo.
Umar:	Nårh, så bare begynd at finde /
Lucas:	Jeg behøver ikke at lave svarene, så det er bare 1, 2, 3. Men det gider jeg ikke tælle nu. (pause)
Lucas:	Og nu tager jeg minus.
Umar:	Nej vi har ikke prøvet med minus.
Lucas:	Nej, altså, man skal gøre det med alle tingene, altså prøv at se, det var spørgsmål…
Umar:	Ja ja, ja ja, jeg ved det godt.
Lucas:	Man skal også gøre det med forskellige, det her, det bliver rigtig hårdt, kan jeg mærke. (24:10)

Læreren kommer og ser, hvad gruppen er i gang med. Han spørger ind til Lucas' udregninger.

(25:19)

Lærer:	Avec la fois ? Vous avez pris quatre nombres, c'est ça ?
Lucas:	Oui.
Lærer:	Avec la fois, on trouve combien là?
Lucas:	Euh.
Lærer:	Combien ? Les résultats différents.
Lucas:	Je fais juste les résultats à la fin.

Lærer:	Tu es sûr ? Parce que quand on écrit 3, quand on fait 3 fois 9, 9 fois 3, c'est pareil, non, les résultats, non ? 3 fois 9 ou 9 fois 3, c'est la même, c'est pareil. Et donc, en fait, si tu réfléchis…
	(pause)
Lærer:	Tous ces résultats-là, où est la différence ?
Lucas:	Euh.
Lærer:	Parce que chaque fois, c'est 1 fois 3 fois 7 fois 9, 1 fois 3 fois 7 fois 9 [han peger på det første stykke og herefter det andet], 1 fois… Donc, tout cela, à mon avis, ça va faire pareil, non ?
Lucas:	Oui.
Lærer:	Tu peux vérifier dans la calculette, mais à mon avis, euh /
Lucas:	Oui.
Lærer:	Donc, donc, tu vois, ça, c'est en fait déjà pareil.
Lucas:	Ah oui.
Lærer:	Et après, c'est sûr que, à mon avis, si, à la place d'une fois, je mets un plus, quelque part, ça va changer, avec le plus.
Lucas:	Et ça, en fait, c'est aussi toujours la même ?
	[Lucas peger på sine stykker med minus]
Lærer:	Ah, avec le moins non, parce que… avec le moins, non. Ah, si tu mets comme ça, oui. Si tu mets comme ça, oui. C'est toujours le même résultat si tu mets dans même ordre [han peger på de tre første stykker, hvor 3 står først]. Mais si tu mettais, si ce commence par 1, tu fais 1 moins 3, par exemple, 3 moins 1, là, ce n'est plus pareil, oui ?
Lucas:	Ah, je vais faire la parenthèse non ?
Lærer:	Si on rajoute des parenthèses, c'est encore plus compliqué. Moi, je ferai déjà, sans parenthèse.
Lucas:	Oui.
Lærer:	Je pense que c'est compliqué avec le moins aussi, parce que, des trucs comme ça, on sait pas très bien calculer, avec le moins. Moi, je commencerais avec le plus et la fois. Après, je verrais si je peux compléter avec… Parce que avec diviser, c'est aussi compliqué.
Lucas:	Okay.
Lærer:	Avec le plus et la multiplication, ça serait déjà pas mal.
	[Læreren går igen]
Lucas:	Det her, det er bare den største fortrydelse i mit liv.
Amir:	Hvad?
Lucas:	Jeg har lavet den største fortrydelse i mit liv.
	(pause)
Umar:	Surt at hedde Kurt.
	(pause)
Lucas:	Jeg laver altså ikke det her alene, I skal altså også være med til at hjælpe.
Amir:	Vi er ved at lave noget.
Lucas:	Ved du, hvor lang tid det her tager?
Amir:	Ja, meget.
Lucas:	Det kan tage flere uger, måneder.
Amir:	Så begynd nu, før du… kom nu.
	(pause)

Lucas:	Jeg skal lige prøve at slå det ind på en *calculatrice*.
	[Lucas låner Umars telefon og taster $3 - 9 - 1 - 7$]
	(pause)
Lucas:	Det gav minus 40. 3 minus 9 minus 1 minus 7. Det giver minus 40.
	(28:59)
	[De begynder at snakke om helt andre ting]
Lucas:	Med minus kan man kun finde én. Det vil altid give det samme med minus. Alt det her, det her, det vil altid give minus 40. (30:17)
	[Lucas viser sit papir til de to andre og peger på de tre øverste stykker med minus]
Umar:	Ej nej nej, nej nej nej.
Lucas:	Jo jo, jo jo jo.
Umar:	Nej det giver også, det kan da godt give 0.
Lucas:	Jeg laver altså ikke det her mere, jeg er træt. (30:40)

Amir og Umar er fortsat i gang med at prøve at få 62.

(30:42)

Umar:	9 gange 3.
Amir:	27.
Umar:	9 plus 3.
Amir:	9 plus 3, det er 12.
Umar:	12 ja, 12. Og så hvis nu vi laver 12 gange 5.
Amir:	Det er… 12 gange 5, 12 gange 5, 12 gange 5.
Umar:	Det giver /
Amir:	Undskyld hvad giver 12 gange 5?
	[Amir henvender sig til Simone]
Umar:	Det giver 60.
Amir:	Okay, 60.
Umar:	Det giver 60. Okay, så 60, skal vi ikke virkelig lave i hovedet?
Amir:	Hvad?
Umar:	60 plus 7 eller 60 minus 7.
Amir:	Ah det kan vi så ikke.
	[de indser at hverken $(9+3) \cdot 5 + 7$ eller $(9+3) \cdot 5 - 7$ giver 62]
Umar:	Vent vent vent. Hvis nu, hvis nu vi tager 7 og lægger den her.
	[Umar skriver $9 \cdot 3 + 7 \cdot 5$ på sit papir]
Amir:	Ja. Må man det? Hvad hvis man ikke ved, om vi må?
Umar:	Hvis nu vi lige, vent lige, vi prøver lige at skifte.
Phillippe:	Man kan også kun lave én med denne her. Det vil altid give det samme.
	[Umar taster ind på sin telefon]
Umar:	7 gange 5.
	(pause)
Umar:	62.
Amir:	Det er løgn.
Umar:	Nej det er sgu da ikke løgn.
Amir:	Godt. Eller måske, ej du har bare skiftet…
	[Amir griner]
Amir:	Du har bare skiftet numrene 5 og 7.

Umar: Men det, vent lige, vent lige, du skal ikke /
Amir: Må man godt det?
Lucas: Ja det må man godt, det må man godt, okay?
[Umar går op og spørger læreren og kommer tilbage]
Umar: Det virker, vi må gerne. (32:20)

Lucas fortæller Amir og Umar, hvad han har fundet ud af.

(33:30)
Lucas: Det er faktisk rigtig nemt det her.
Amir: Ja så gør det.
Lucas: Nej, men altså, det giver alt sammen 189.
Amir: 189?
Lucas: Det gør det fandeme, jeg har lige regnet det ud.
(pause)
Lucas: Alt den arbejde, den er bare så spildt.
Amir: Kom nu, arbejd.
Lucas: Arbejd selv.
Amir: Det gør jeg også.
Umar: Ja arbejd igen.
Lucas: Så skal man kun lave én i alt. Det er bare godt for mig. (34:07)
(pause)
Lucas: Jeg har fundet ud af, hvor mange numre, man kan få. (34:31)
[Amir og Umar reagerer ikke]
Lucas: Jeg har fundet, hvor mange numre, man kan få. Svaret står lige her.
[Lucas viser dem sit papir]
Amir: 20?
Lucas: Man kan få 20 numre i alt.
Umar: 20 numre?
Lucas: De skal være forskellige. Jeg har regnet det ud.
Umar: Med gange? Kun med gange?
Lucas: Nej med alt.
Umar: Det tror jeg ikke.
Amir: Du ved godt, at der er flere trillioner, millioner.
Lucas: Det er rigtigt.
Umar: Nej, men /
Lucas: Man kan kun få én med alt, se. Alt det her, det giver alt sammen 189.
[Lucas peger på sine stykker med gange]
Umar: Nårh, alt sammen? Alt det her?
Lucas: Ja så vi kan kun lave det med én og /
Umar: Nårh, jeg troede du sagde, at der var kun 20 øh, der var 20…
Lucas: Der var 20, man kan kun få 20 forskellige numre.
Umar: Nå okay.
Lucas: Og ved du hvorfor? Fordi gange, der giver det 189 alt sammen. Så man kan kun få én her.
Amir: Nå ja, det er rigtigt, det er bare gange gange gange.
Umar: Så vi er færdige med den der.
Lucas: Så vi er færdige med *question deux*. (35:26)

Gruppen går i gang med spørgsmål 4.

(41:13)

Umar: « Quelles sont les combinaisons de cartes qui peuvent être utilisées pour » /

Lucas: Hallo, min telefon.
(pause)

Umar: Okay, ehm, vi skal bare lave, ja det, det er ikke så svært, vi skal bare lave 9 gange 3 gange, øh, 9 minus 3 minus 7 minus, nej, ehm.

Amir: Nej jeg har fundet et 1-tal før.

Umar: 9 plus 3, det giver 12.

Lucas: Jeg har lavet en fejl.

Umar: Nej, men det, det der, det er nemt, det er nemt. 9 plus 3, det giver, det giver /

Lucas: Jeg har lavet en fejl.

Umar: Det giver 12.

Lucas: Umar, Umar, jeg har lavet en fejl i to, i *question deux*. Det er 23 svar, man kan få i alt.

Umar: 9 plus 3, det giver 12. Så minus 7 plus 5, giver 0.

Amir: Øh, det ved jeg ikke. Plus 5 eller gange 5?

Umar: 9 plus 3 minus 7 plus 5.
[Amir taster $9 + 3 - 7 + 5$ ind på telefonen]

Amir: 10. Hey, 10. Nårh det er i parentes, okay.
[Amir ændrer det til $9 + 3 - (7 + 5)$]

Amir: Det giver 0.

Umar: Perfekt. (42:36)
[de begynder at snakke om helt andre ting]

Umar: Okay, har du lavet den? (43:05)

Amir: Ja det er rigtigt, det gav 0.

Umar: Okay, hvorfor sagde du det ikke?

Amir: Jeg sagde det også, men du lyttede bare ikke efter mig, du lyttede ikke.

Umar: Så skal vi finde et med 1.

Amir: Okay vent, aha.

Umar: Okay, vi er nået til fjerde spørgsmål.
[Umar taler ind i diktafonen]
(pause)

Umar: Amir, hvis vi finder en mere, så er vi færdige, så er vi færdige med det der nu…
[læreren kommer forbi og ser, hvad de er i gang med]

Umar: On a trouvé, j'ai trouvé 9 plus 3, parenthèse, moins 7 plus 5, parenthèse. Ça fait 0.

Lærer: Oui.

Umar: Mais alors, maintenant (c'est?) juste trouver une autre combinaison qui fait 0 ?

Lærer: Moi, je sais pas.

Amir: Non c'est avec 2.
[læreren kigger på opgaveformuleringen]

Lærer: Oui, ça veut dire, si on fait au hasard, parce que là…

	(pause)
Lærer:	Mais moi, je sais pas. Est-ce qu'on peut trouver 0 avec les, avec quatre nombres au hasard ? Là, est-ce que t'as fait au hasard, toi ?
Umar:	Non.
Lærer:	Celui-là, vous avez choisi au début oui ?
Umar:	Oui, c'est un peu au hasard.
Lærer:	Moi, on pourrait déjà essayer avec ces quatre nombres là. Est-ce qu'on peut les combiner d'une autre manière pour obtenir 0 ?
Umar:	Ah oui, si on fait 7 plus 5 moins 9 plus 3, ça fait 0.
	[Umar skriver $7 + 5 - (9 + 3)$]
Lærer:	Oui, mais ça, c'est de la même manière.
Amir:	Oui, alors, on change /
Lærer:	Essayez avec la fois ou le diviser.
Amir:	On change les deux-là.
	[Amir peger på tallene 7 og 9]
Lærer:	Essayez avec la fois ou le diviser.
Amir:	On peut aussi changer /
Umar:	Non parce que si on prend 9 plus 5, ça fait 14.
Lærer:	Oui 9 plus 5, ça fait 14 et 3 plus /
Umar:	Et après /
Lærer:	Oui ça va pas marcher. Il faut voir si on peut /
Umar:	Alors, 9 /
Lærer:	Oui parce que ça, ça range, ces nombres-là, parce que ça fait 12 et 12.
	[læreren peger på stykket $7 + 5 - (9 + 3)$]
Lærer:	Est-ce que vous l'avez eu de chance ou est-ce qu'on peut toujours trouver une manière ? C'est ça la question. Est-ce que là, vous l'avez eu de chance ou est-ce qu'on peut toujours trouver une manière pour obtenir 0 si on prend des autres nombres ?
Umar:	Mais peut-être que ça sera bien si on prenait des nombres (pairs?), parce que… On prend 7, non.
	[læreren snakker med Lucas, mens Amir og Umar arbejder videre]
Umar:	On prend 6. 4, 6, 4, après euh 6, 4, 3 et euh, je sais pas, et et, et 9.
	(pause)
Umar:	6, 4, 3, 9. Donc, faire /
Amir:	Non, on essaye comme ça.
Umar:	Okay, alors.
Amir:	6.
Umar:	Parenthèse. Plus 4, ça fait /
Amir:	D'accord, 6 plus 4.
Umar:	Oui.
Amir:	Ça fait 10.
Umar:	Oui, 6 plus 4, ça fait 10. Euh, moins 9 plus 3. Parenthèse.
Amir:	9 plus 3?
Umar:	Oui.
	[Amir taster $(6 + 4) - (9 + 3)$ ind på telefonen]
Amir:	Moins 2.
Umar:	Moins 2. Mais ça marche avec les nombres négatifs ? On a trouvé des nombres négatifs, ça marche ?

Lærer:	Oui, mais (une façon de?) trouver 0, non ? Vous avez pas trouvé 0 ?
Amir:	Ah oui, c’est vrai.
Umar:	Non. (47:13)
	[læreren snakker igen med Lucas, mens Amir og Umar fortsætter]
Umar:	6 plus 3, ça fait 9, et 9 plus 4, ça fait 13, mais non. (49:50)
	(pause)
Amir:	Monsieur, on a aussi le droit de faire le diviser ?
Umar:	Oui.
Lærer:	Oui, oui. Diviser c’est bien quand ça tombe juste, parce que quand ça ne tombe pas juste, c’est compliqué… Par exemple, on peut faire 9 diviser par 3 ou faire 6 diviser par 3.
Umar:	9 diviser par 3. Ça fait…
Amir:	9 diviser par 3, ça fait 3. Et après ?
Umar:	6 diviser par 4.
	(pause)
Lærer:	Si je mets, si je mets comme ça ?
Amir:	Quoi ?
	[læreren har skrevet $(9 - 3 - 6) \cdot 4$ på et papir]
	(pause)
Umar:	3 moins… diviser par…
Lærer:	Si je mets, on arrive à trouver 0, après, on (?uforst.) que trois nombres par exemple pour trouver 0. Si on fait 0 et fois le dernier, ça va faire 0.
Umar:	J’ai pas compris.
Lærer:	Voilà, moi, si je fais, si je fais 9 moins 3 moins 6, ça fait 0.
	[Umar nikker]
Lærer:	Et après 0 fois 4, 0. Donc, j’ai trouvé 0 oui ? C’est une combinaison.
Umar:	Mais si, ça va. 9 moins 3, 9 moins 3, 6.
Lærer:	9 moins 3, 6.
Umar:	Moins 6, ça fait 0.
Lærer:	0.
Umar:	0 fois 4, ça fait 0.
Lærer:	0, oui, c’est une possibilité.
	(pause)
Lærer:	Après on peut voir si on peut trouver des autres. (52:35)

Bilag 9: Projektbeskrivelse, Math en Jeans

Matematik for sjov - MATh.en.JEANS[28] :

En chance for børn og unge

til at prøve at forske i matematik

Math.en.Jeans kan på dansk oversættes som ”Matematik for sjov”. Det drejer sig om at give børn og unge en erfaring med matematikkens dybe og sjove sider, ved i mindre grupper at fordybe sig i et ”rigtigt” (men dog tilgængeligt) matematisk problem.

Aktiviteten, der normalt foregår efter skoletid, indebærer:

- Et matematikværksted som er åbent for alle elever, uafhængigt af klasse og alder
- Deltagerne arbejder i *grupper* med rigtige forskningsproblemer som udleveres af en universitetsmatematiker, der også følger gruppernes arbejde
- Gruppene mødes regelmæssigt med grupper fra andre skoler, der arbejder med de samme problemer
- Resultatet af arbejdet præsenteres mundtligt ved en stor ”Math en Jeans” konference (afholdes årligt) og i en afsluttende skriftlig præsentation.

I år afholdes en international Math en Jeans konference i København, 19.-22.april. En del af programmet vil være på dansk og engelsk (nærmere oplysninger følger).

Yderligere information på de flg. sider.

Kontakt til projektet i Danmark (for interesserede lærere og elever):

Prof. Nathalie Wahl, Institut for Matematiske Fag, wahl@math.ku.dk

Lærer Evelye Royer, Prins Henriks Skole, evelyne.royer@gmail.com

28 På fransk: ”Math.en.Jeans”, en ikke-kommerciel forening baseret i Frankrig, hvis mål det er at fremme studiet af matematiske begreber og metoder gennem udforskning af problemer der foreslås af universitetsmatematikere. Elevgrupper findes på skoler over hele Frankrig og på franske skoler i hele verden. Hjemmeside : http://mathenjeans.free.fr

Hvad skal der til for at starte en "Math.en.Jeans" gruppe?

Der er ret vide rammer for aktiviteten, således at det flg. mere er forslag end regler, som har vist sig frugtbare for mange skoler. Hver gruppe (og skole) må tilpasse sig sine lokale muligheder og betingelser.

MATh.en.JEANS foregår på **skoler (to og to)**, og involverer: **elever, som deltager frivil-ligt**; en eller flere **lærere**; og en **forsker** i matematik.

På hver skole møder eleverne **en gang om ugen** (1 time-1½ time, afhængigt af elevernes alder). Eleverne arbejder i grupper af tre eller fire, og alle med det samme problem, som gives og introduceres af en tilknyttet universitetsmatematiker. Eleverne må også gerne dele ideer og tanker spontant på tværs af grupper, men læreren sørger for at de sker regelmæs-sigt.

Skolerne arbejder i par med samme problem. Eleverne fra de to skoler mødes til **seminar** ca. fire gange i løet af året for at udveksle ideer sammen med deres lærere og forskeren.

Der afholdes en **årlig konference** hvor eleverne kan præsentere deres arbejde og resultater for et publikum bestående af grupper fra andre skoler, deres lærere og tilknyttede forskere.

Skriftlige præsentationer – små artikler der produceres efter konferencen – udgives i året der følger konferencen.

Sådan foregår værkstedet MATH.en.JEANS

<u>Begyndelsen :</u>

Det er en god idé at starte i begyndelsen af skoleåret..

1. Vælg et tidsrum for værkstedet, så flere årgange har mulighed for at deltage
2. Informér alle elever på skolen om denne mulighed, fx ved at
   - Holde et møde for eleverne hvor du fortæller om MATH.en.JEANS
   - Lade matematiklærerne fortælle om det i skoletiden
   - Sætte opslag op på passende steder på skolen.

3. Indbyd alle nysgerrige elever til at komme første gang, uden nogen forpligtelse til at "melde sig til" med det samme, og invitér også interesserede kolleger og forældre til det møde, hvor universitetsforskeren præsenterer problemet (og evt. hvad MATh.en.JEANS er).

4. Bed eleverne om at melde sig til efter nogle gange.

Ugentlige møder :

1. Eleverne arbejder i **grupper** (højst 4) og **vælger** et emne (indenfor et problem).

2. Arbejdet i gruppen sker i **samarbejde** : der søges information, man tilegner sig og forstår problematikken, man diskuterer, man fordeler opgaver mellem sig…

3. Hver gruppe fører en **logbog** om deres forskning, som dokumentation for udviklen af deres projekt.

4. Læreren deltager i alle værksteder, hvor han fungerer som "coach" og faciliterer et forskningsmiljø fx ved at hjælpe eleverne i gang med at diskutere problemet (indenfor eller på tværs af grupperne) men **uden selv at foreslå nogle løsninger**. Læreren hjælper med at formulere spørgsmål, og med at afprøve og formulere hypoteser; han opmuntrer, genstarter, trøster. Han hjælper med at forstå hvad man er i gang med (matematiske udforskninger); han forlanger begrundelser for påstande, og i det omfang eleverne har brug for det kan han hjælpe med at finde ressourcer, med at diskutere, og med at organisere og præsentere resultater.
5. Insistér på at man kommer til tiden og hver gang – samme regler gælder for læreren og forskeren (bortset fra at denne sidste ikke er der hver gang).

Seminarer

I løbet af året og inden konferencen afholdes 3 seminarer med forskeren og den skole, man danner par med. Disse møder må vare længe nok til at

- muliggøre **vidensdeling** og **diskussion** mellem eleverne ;
- **holde et oplæg** om emnet ;
- **dele ideer** om kommende dele af arbejdet ;
- at **opstille mål** for kommende dele af arbejdet;
- at forskeren kan **bedømme** de opnåede resultater.

Seminarerne giver mulighed for at samle op på det arbejde, man har gjort indetil nu, og dermed også forberede præsentationen ved konferencen.

Efter den årlige konference skal man holde et seminar for at evaluere værkstedet og færdiggøre den skriftlige præsentation (artikel).

Årlig konference:

Dette er værkstedets højdepunkt, som eleverne ser frem til : konferencen, som varer tre dage (fredag-søndag). Somme tider er der også en skattejagt om torsdagen, hvor grupperne fra forskellige skoler blandes for at fremme sammenholdet og for at lære den by at kende, hvor konferencen holdes.

Der holdes tre årlige konferencer: to i Frankrig og en i udlandet (vært er en fransk skole og dens partneruniversitet).

Elever, lærere og forskere samles for at præsentere deres arbejde og tale om deres erfaringer. Nogle ”gæstestjerner” – andre forskere – inviteres også. Der er forelæsninger af anerkendte matematikere hver dag. Konferencen udgør et samlet hele og det er bedst hvis alle kan deltage alle tre dage.

Selvom foreningens hovedsprog er fransk kan præsentationer på konferencen i udlandet holdes på engelsk da eleverne på de franske skoler ofte taler godt engelsk.

Eleverne præsenterer deres arbejde :

- Markedsplads med posterpræsentationer.

Hvert emne har et område. Ideen er at præsentere bredden af resultater med appetitlige posters. Eleverne står klar med aktiviteter (om muligt) og for at besvare spørgsmål spørgsmål fra nysgerrige gæster.

- Foredrag.

- foregår i et auditorium (med ca. 300 pladser) udstyret med projektor og mikrofon, varer 20 minutter med spørgsmål til slut. Eleverne forklarer deres emne, deres forskningsproces og nogle hovedpunkter af resultaterne (uden detaljer, fx beregninger) og endelig en konklusion, som ikke nødvendigvis ”lukker” problemet. Ordforråd og forklaringsmåder skal tilpasses tilhørerne, som er spredt i alder fra 10 til 18 år.

- Værksted.

Her er der bedre mulighed for at vekselvirke med andre deltagere, på markedspladsen eller i et mindre lokale. I et værksted skal man kort præsentere emnet og derpå diskutere med deltagerne, evt sætte dem i gang med at arbejde med emnet og nå frem til en delkonklusion. Husk at medbringe alt nødvendigt udstyr (fx ved emner om strategiske spil, rumgeometri…)

Efter den årlige konference :

Elevernes resultater befæstes og formuleres i endelig form. De skriver en artikel som offentliggøres på hjemmesiden for MATh.EN.JEANS efter at være gennemlæst af forskeren, sommetider kommer artiklerne også ud i tidsskrifter eller hæfter.

Dette er den vanskeligste del af arbejdet fordi eleverne sommetider mister motivationen efter konferencen og især fordi det er vanskeligt at formulere sig skriftligt om matematik. Alligevel er denne skrivefase afgørende og af stor betydning for at afslutte deres arbejde – ligesom for professionelle forskere.

Man skal her lægge vægt på tekstens sammenhæng og præcision, korrekthed (også stavning), at følge formatkravene og at respektere tidsfristen.

Eksempler på problemer

Skak

Skak er et indviklet spil : der er 30 mulige træk i hver tur og I gennemsnit 40 ture per spil - det bliver 30^{40} måder at spille på.

Spørgsmål 1 : Hvad er de mindste antal ture det tager at vinde, hvis vi antager at din medspiller også ønsker at du vinder?

Spørgsmål 2 : Hvad med at bruge et mindre bræt eller færre brikker ? Hvornår bliver det for let, fx hvor de hvide altid vinder?

eksempler :

- en 2x2 bræt med konger og dronninger er for lille;
- et spil uden bønder

Spørgsmål 3 : se på slutspillet, fx på et 3x3 bræt.

Eksempler : K : king ; R : tårn ; B : løber.

R		
		K
K		

Hvis vinder altid. Fordi:...

B		
		K
K		

Spillet ender uafgjort. Fordi: ...

Spørgsmål 4 : Kan springeren gennemløbe alle felter på brættet netop én gang?

Sudoku.

Vi ser først på en 4x4 sudoku, med tallene 1, 2, 3 og 4 ; derefter kan man gå videre til en 9x9 sudoku ...

Spørgsmål:

- Hvor mange udfyldte sudoku'er er der ? Kan du vise dem allesammen ? (Det sidste spørgsmål skal man ikke besvare for en 9x9 sudoku, der er alt for mange…).
- Er det altid nødvendigt for at sudoku'en kan løses, at fire (hhv. ni) af felterne er udfyldt fra starten? Hvis ikke, hvad er så det minimale antal givne tal som er nødvendigt for at der er en og kun én løsning?
- Kan man løse en sudoku hvor der i begyndelsen er 2 tomme rækker ? 3 ?
- Kan man løse en sudoku hvor der i begyndelsen er 2 tomme kvadrater ? 3 ?
- Kan vi finde en metode til at lave nye sudoku'er (der kan løses) ?

Bilag 10: Interview A, maj ’13

Interviewer: Vil du starte med at fortælle lidt om din baggrund i forhold til matematikken og dit arbejde som folkeskolelærer? Hvor meget du har undervist? Hvilke fag? (01:26)

Lærer: Ja. Jeg har undervist i… Er det ellevte år, jeg er i gang med matematik nu? Øh, ja det må være deromkring, tiende, ellevte år, og har haft udskolingen kun, fra syvende til niende og er startet forfra med syvende til niende hvert år, og blev forrige sommer 2009,10,11… Det må være have været 2010, eller 11, der blev jeg færdig som matematikvejleder, en diplomuddannelse, og har taget den, seks moduler på den. Ehm, og så har jeg matematikvejledning ude på skolen. Jeg har kasketten på dér, hvor jeg sidder og skal prøve på at finde ud af, hvad vi skal med matematik ude på skolen og har et netværk dér, alle matematiklærerne, fagteams. Vi sidder og arbejder med forskellige ting. Og så har jeg et netværk i kommunen, hvor jeg er tovholder på det, og nu hedder vi så konsulenter igen, nu har vi fået titlen tilbage, hvor jeg så har omkring 300 timer kommunalt til at holde styr på forskellige ting og snakke med skoleafdelingen om ”hvad gør vi egentlig, og hvorfor arbejder vi sådan og sådan?” Så det er sådan min historik i det.

Interviewer: Du har vel også andre fag end matematik?

Lærer: Jeg har fysik, kemi, jo.

Interviewer: Er det matematikken der sådan /

Lærer: Ja [griner].

Interviewer: Trækker mest?

Lærer: Ja det er det. Helt klart.

Interviewer: Så det er også mest… Du har ikke noget fysik, kemi i forhold til andet end /

Lærer: Nej.

Interviewer: Selve din undervisning?

Lærer: Det er ren og skær undervisning, hvor jeg har… Hvad har jeg? Seks timer om ugen i syende klasse, i fysik, og så har jeg faktisk ikke mere.

Interviewer: Og hvad så med matematik? Hvad er det, der gør, at du synes dét er fedt, at undervise i, og måske også bare sådan faget i sig selv?

(pause)

Lærer: Det ved jeg ikke [griner]. Det er bare mest mig, tror jeg. Sådan indholdet i det, og… Altså det, jeg savner nogle gange, for at stille det den anden vej, hvad skal man sige, ehm, netop de åbne opgaver, som… Hvor man faktisk får lov til at se elevernes meninger og handlinger og sådan nogle ting, og det er derfor, jeg syntes, at projektet [Math en Jeans] var rigtig spændende, ehm, fordi selvom man prøver rigtig meget i den normale undervisning, så synes jeg, at tidsmæssigt, der er vi meget pressede i forhold til, hvad man gerne vil.

Interviewer: Ja hvad man skal nå ik'?

Lærer: Ja hvad man bør nå i hvert fald ik'. Og selvom man prøver på at gøre, hvad skal man sige, gøre undervisningen så åben som mulig og arbejde med de fede opgaver og sådan noget, så er der også nogle andre ting, man skal igennem der, og jeg synes ikke, at man får lov til at, hvad skal man sige, få deres meninger og deres holdninger og deres… Samfundsfag er jo fedt at kunne koble matematikken på, fordi så begynder de lige pludselig at blive kritiske på en helt anden måde, og hvor man faktisk får lov at høre deres meninger også. Og det var jo et sted, hvor jeg synes det her projekt [Math en Jeans] var eller <u>er</u> rigtig spændende (05:12).

Interviewer: Hvordan blev du præsenteret for det?

Lærer: Det var Carl Winsløw, der skrev til mig, om ikke det var noget, vi havde lyst til, ham har jeg lavet en smule med. Og så har jeg arbejdet med lektionsstudier sammen med ham og prøvet på at gøre noget med dét og prøvet at få det op at stå og har lavet kurser i det, hvor det så er ham, der har været kursusholderen, og jeg har så taget, hvad kan man sige, det praktiske rundt om i netværket, "hvad kan vi gøre, hvilke skoler vil gerne gøre hvad og hvordan?" Og så øh, så skrev hun til mig, nu kan jeg simpelthen ikke huske, hvad hun hedder /

Interviewer: Nathalie?

Lærer: Lige præcis. Hun skrev til mig om… Og jeg syntes det lød super fedt og ville rigtig gerne. Og så blev det udskudt lidt af nogle grunde, og så lige pludselig var det helt henne i april måned, marts eller april vi skulle til… Hun var der vist i februar, og så gik der lidt med at få oversat opgaverne til dansk.

Interviewer: Okay, så hun har været ude og snakke /

Lærer: Nathalie var ude og lave oplægget for de unger, der havde lyst til at være med.

Interviewer: Så I havde fået samlet nogen elever, der egentlig gerne ville?

Lærer: Det er faktisk løgn. Til at starte med tog jeg bare revl og krat af dem jeg mente, der skulle være med, og sagde ”prøv at kom til det her og vær med det her møde, og I får ikke noget valg”.

Interviewer: Og hvad var det, var det elever i /

Lærer: Syvende, ottende og niende.

Interviewer: Syvende, ottende, niende. Ikke kun dine, men bare sådan på hele skolen?

Lærer: Nej, ja, på hele skolen, lige præcis. Jeg tog alle dem, jeg nu syntes, der skulle have noget at byde ind med, og som syntes det var lidt spændende. Øh, så nogle fik at vide, at de gerne måtte komme, og andre fik ikke at vide, at de skulle komme. Det var så hvem, der lige havde overskud og sådan nogle ting.

Interviewer: Så Nathalie kom ud og præsenterede de her opgaver /

Lærer: Lige præcis, og lavede oplæg og var der i en fire timer, tror jeg, og vi kiggede på de forskellige opgaver, og hun havde noget historik med, med hvad der var arbejdet med før og sådan nogle forskellige ting. Øh, og så var vi helt henne i marts måned, tror jeg, før hun var ude og gøre dét. Og jeg tror, var det i maj måned der var, inde på Værnedamsvej på den franske skole, den store konference, tror det var sidste år eller forrige år eller sådan noget.

Interviewer: Øh, det var sidste år ja, inde på, faktisk der, hvor jeg læser matematik, inde på HCØ i Universitetsparken.

Lærer: Okay.

Interviewer: Så altså I /

Lærer: Vi blev lidt presset på tid.

Interviewer: I blev lidt pressede.

Lærer: Ja det må man sige.

Interviewer: Altså var det mest i forhold til den konference eller var det også bare andre ting?

Lærer: Det var begge steder synes jeg. Altså konferencen i sig selv var jo et, hvad kan man sige, det var noget ungerne syntes var svært at skulle deltage i. Deres sproglige niveau på engelsk, hvor de var sådan lidt ”åh”… Det var lidt en hurdle, at at… Det syntes de, det var de ikke helt trygge ved at skulle gøre, hvis man kan sige det sådan. Øh, og tidsmæssigt, det andet var at den, undervisningen, den normale undervisning var jo planlagt. Ikke at man ikke kan ændre i den, men når man lige pludselig skal til at bruge forholdsvis meget tid på kort tid, så var det noget ungerne sagde, at det havde de faktisk ikke mulighed for at gøre om eftermiddagen, og i den normale undervisningstid, der er det svært at putte ind. Der har man jo sin årsplan, hvor det hele er planlagt. Så man kan sige, fremadrettet, der skal vi jo tænke det ind allerede i vores årsplan, og vi skal finde timer til lærerne, der skal står for det i… Eller i hvert fald være med jo. De skal jo ikke gøre det alene ungerne. Selvfølgelig skal de arbejde med det alene, men der skal jo være en tovholder på det ik'?

Interviewer: Altså så du tænker, det skulle sådan være i den almindelige undervisning, hvor alle elever ligesom var med? Eller skulle det /

Lærer: Nogle af tingene kunne man godt, eller lave specialhold, der mødtes af interesse for at arbejde med det. Så der skal jo så være en tovholder på det.

Interviewer: I deres fritid?

Lærer: Ja i deres fritid.

Interviewer: Ja, men der var så nogle problemer med, hvad eleverne mente, de egentlig havde tid til der?

Lærer: Ja når det er med så kort varsel. Normalt så kan man jo godt melde det ud, at det er et projekt, om der... Hvem der har lyst til at være med, og så kom der måske femten elever, som gerne ville, af egen fri vilje, selvom det ligger efter skoletid. Det har vi i hvert fald gjort før. Men det optimale er at sige, at vi har hele dage, hvor man gør det, og siger "jamen så går I ud fra den normale undervisning", og så har vi en seks, otte timer en dag, hvor vi mødes og arbejder med det. Det har vi måske en gang om måneden. Så de også kan nå at lave undersøgelser, eller hvad de skal i den mellemliggende tid og arbejde lidt med det selv, og så er der en tovholder på, der mødes med dem cirka en gang om måneden. Det har vi gjort med et andet projekt, med de dygtigste elever.

Interviewer: Hvad handlede det om?

Lærer: Det var simpelthen bare, at vi, vi samlede de dygtigste elever på tværs af syvende, ottende og niende og lavede noget lidt anderledes matematik.

Interviewer: Mener du også, at det skal være for nogle dygtige elever, det her Math en Jeans eller, altså ligesom det andet projekt du…

Lærer: Øh, mere for dem, der har interesse i det. Altså, det behøver ikke at være de dygtigste, men bare dem, der har lyst til at bruge den ekstra tid på det, som der jo ligger i det for deres vedkommende.

Interviewer: Hvad tænker du, at eleverne kan få ud af at prøve at arbejde med sådan nogle type opgaver i forhold til, hvad der sker i almindelig undervisning?

Lærer: Rigtig rigtig meget. Altså det der med at de faktisk kan gå ind og øh, og bruge deres færdigheder mere konkret til nogle sådan mere åbne opgaver, at de selv skal tænke meget, selv skal opstille hypoteser, selv gå ind og, hvad skal man sige, af- eller bekræfte de hypoteser, de nu har. Og hele den samtale, der også ligger i det, eleverne imellem. Det er jo rigtig meget det, vi prøver at få ind i den normale undervisning.

Interviewer: Ja at det ikke bare er det her, "hov nu har jeg løst det her, der var et resultat".

Lærer: Jamen lige præcis, altså væk fra det og stille de… Hvor den mundtlige prøve i matematik nu bliver meget den vej. Det er kompetencer, der skal vurderes på, og færdighederne bliver ikke lige så meget det, der skal vurderes på. Det er deres øh, ja matematiske kompetencer, hvordan de faktisk kan udnytte det, de arbejder med til at gå ind og danne nogle hypoteser og be- og afkræfte noget og den vej… Igen, matematikken kan gå ind og, ja, ræsonnere nogle ting ik'. Og det ligger jo rigtig godt i tråd med lige præcis de opgaver, som de arbejder med der [i Math en Jeans]. Så jeg… Man kan sige, det der var vores udfordring, var det tidsmæssige i det, altså det tidsmæssige perspektiv, at, at lige pludselig så blev det <u>meget</u> presset sammen på meget kort tid, og så står eleverne lidt af, for så mister vi niendeklasserne, de er jo ude allerede omkring 1. april, så er deres hoveder jo på afgangsprøver og gymnasiet og hvad de ellers skal. Øh, og så er der syvende og ottende tilbage, og når de så lige pludselig får at vide, at "nu kan I møde op nogle eftermiddage og være med til noget", så er der alle deres fritidsaktiviteter og alle de ting, som de / (10:41)

Interviewer: Så du tænker, at hvis man fra starten af året får introduceret det her, så /

Lærer: Lige præcis.

Interviewer: Så kunne det måske godt /

Lærer: Ja og lærerne kan nå at tænke det med i den tid, de får til at gå ud og lave opgaver på skolen, og det sker jo allerede nu, dvs… Vi sidder nu her med det i marts, april, maj måned og planlægger skoleåret efter, og hvis der skal være en lærer, der skal være tovholder på det, så skal der allerede timer ud der ik'.

Interviewer: Ja fordi, jeg tænker netop med lærerne ik'? Hvordan skal de ligesom få tid til det? Men der er der simpelthen en "pulje af tid", du ligesom deler ud på nogle ting eller hvordan?

Lærer: Ja så er det, at du kan gå til skolelederen og sige "vi har det her projekt, som lyder rigtig spændende. Er det noget I vil give mig, øh, 50 timer til at være tovholder på?" Eller 40 timer, eller hvor meget tid, man nu synes, at man skal bruge på det. Fordi det er jo noget, der ikke, hvad skal man sige, hører til skoleverdenen normalt, ik', og de ting, der kommer udefra, er noget, vi skal have separat tid til.

Interviewer: Men det kan der altså godt være tid til?

Lærer: Det kan der i hvert fald. Hvis man er god til at overtale og gøre ting. Det gjorde vi for eksempel med lektionsstudier. Der fik jeg, øh, hvad kan man sige, 10 timer til alle lærere, bare til at mødes og gøre ting. Så fik jeg lagt det ind med alt det fagteamsamarbejde, vi havde hele sidste skoleår, det er vi i gang med nu, det her skoleår, det handlede kun om lektionsstudier. Så alle fik Carls oplæg /

Interviewer: Så alle lærere har faktisk været inde omkring det?

Lærer: Alle matematiklærere i udskolingen og mellemtrinnet har arbejdet med det ja, hvor jeg så var til ledelsen og sige "jamen det gør de ikke gratis, så giv os øh, 10.000 til det plus 10 timer cirka per lærer til den kursusvirksomhed, der ligger ik', og resten skal vi nok tage fra vores fagteamsamarbejde".

Interviewer: Tror du, at du også sådan ville kunne lidt være tovholder for sådan et projekt som Math en Jeans og ligesom få lærerne til at sige "okay, men så prøver vi det"? Eller hvordan fornemmer du, at andre lærere er sådan i forhold til sådan nogle lidt alternative projekter?

Lærer: Jamen det, det er der rigtig mange, der er åbne omkring, synes jeg. Men det er jo også kulturen på skolen, og om man har en, hvad skal man sige, tovholder eller vejleder, eller hvad man nu skal kalde det, der tager det op og siger "det her, det er noget, vi skal arbejde med, eller det er noget, jeg synes, vi skal arbejde med. Hvem er med og hvordan, hvordan kan vi strukturere det", ik'? Så ikke det bliver et skal, men et kan eller øh /

Interviewer: Jeg ved ikke, jeg kunne også bare godt forestille mig, at der er nogle lærere, der måske sådan tænker "ej, men nu underviser jeg i matematik, og jeg skal bare gennemgå det hér, og, ej, jeg skal ikke forholde mig til alt mulig andet". Det ved jeg ikke, jeg har bare en forestilling om, at der måske er nogle, der netop har valgt at undervise i matematik, fordi de måske ser matematik som det, hvad hedder det, lidt statiske ik', noget der ikke rigtig er i forandring, som et eller andet sted /

Lærer: Ja og hvor der netop er én løsning, som jeg altid kan, fordi jeg er dygtigere end eleverne og /

Interviewer: Ja, ja. Og så kan jeg egentlig bare køre derudaf med det.

Lærer: Jo, jeg… Min optik på det er, at dem, der kommer ud fra seminariet her i de sidste par år og så fremadrettet er meget mere åbne over for sådan nogle ting, at der skal være plads til den fede matematik, hvor /

Interviewer: Og hvad tror du, at det sådan skyldes?

Lærer: At undervisningen på seminariet har ændret sig sindssyg meget. Altså, der er blevet meget mere didaktik og meget mere, øh, indsigt i, hvad matematik egentlig er, og hvordan eleverne egentlig lærer matematik /

Interviewer: Okay, ja, for jeg ved slet ikke noget om, sådan, hvad der sker der på læreruddannelsen i matematik.

Lærer: Nej, men det der er blevet gjort rigtig meget… Jeg blev selv færdig fra, med matematik i år 2003, og så læste jeg på seminariet videre, fordi jeg manglede nogle fag, og blev fastansat herude. Så jeg var faktisk i seminarieverdenen til 2009, fordi jeg så tog… De seks år læste jeg så et fag eller eksamen hver sommer ik'.

Interviewer: Mens du bare underviste ved siden af?

Lærer: Mens jeg underviste ved siden af ja. Jeg havde fuldtidsjob her, og så læste jeg ét fag eller en opgave, hvis man kan sige det sådan, og afleverede hver sommer og gik til eksamen i den. Og det, der bare er sket på de fem, seks år, jeg var der, det var, at didaktikken kom til at fylde meget mere i faget. Hvor da jeg læste matematik, der var det rigtig meget færdigheder, "du skal kunne sådan og sådan, sådan gør man det og det og det", og så ændrede de det jo til, at man skulle have matematik på minimum B-niveau i gymnasiet, før man kunne undervise i matematik, på øh, som lærer, og før du kunne komme ind på læreruddannelsen, og det gjorde bare at, lige pludselig så kom der jo nogle folk, som kunne meget mere åbenbart, end hvad de havde kunnet før, så lærerne fik måske overskud til at have mere fokus på didaktikken. Og det er jo dér, alt det fede ligger, fordi, i min optik, der bør alle, der starter på læreruddannelsen jo have netop matematik på A- eller B-niveau, så det faglige er på plads, og derfra, der er det didaktikken, og "hvordan skal vi lære fra os, og hvordan"… Og det er jo det, der begynder at ske nu, kan jeg mærke. At, at… Det kan godt være, at man er efter folkeskolelærerens faglige kunnen, men didaktisk, der er de blevet langt, langt dygtigere. Jeg synes, at der sker rigtig meget på det punkt, og det kan man mærke på de nye lærere, der kommer ud. De har jo sindssygt mange didaktiske muligheder, øh, og vil rigtig meget, og så laver de nogle fede ting, altså netop med åbne opgaver og med undersøgende opgaver, og læser man faghæftet [udsendt af Undervisningsministeriet], så er der jo også… Det er jo ikke sådan, at vi skal fortælle dem, hvordan de skal gøre. Det skal jo være rigtig meget undersøgende, og det er der bare en del lærere, der ikke har fået øjnene op for endnu (15:12).

Interviewer: Men der er jo også… Der er mange faktorer, der ligesom spiller ind, i forhold til at få sådan noget [Math en Jeans] til at fungere, dels lærerne, hvor du siger, at det kan være nemmere efter de år her med den uddannelse osv. ik'.

Lærer: Det, det synes jeg.

Interviewer: Så er der også eleverne.

Lærer: Ja.

Interviewer: Hvordan, det /

Lærer: Der, der… Men det er jo også, hvad kan man sige, den didaktiske kontrakt, de har haft fra matematik op igennem deres skoleforløb. Min oplevelse er, at i indskolingen, der er man ofte rigtig rigtig dygtig til at lave fede ting og lave åbne opgaver og lave undersøgende opgaver og lade dem selv finde metoder, alt det som vi egentlig bør gøre, når man læser faghæftet, og, og ja, når man har læst lidt teori omkring det. Og mellemtrinnet er sådan en mærkelig fase, hvor at… Der skal de rettes til. Der skal de være klar til udskolingen, hvor vi, tror mellemtrinslærerne tit, at vi bare laver opgaver, så der dør lidt af det her spræl og de fede ting i undervisningen, øh, så dem, dem arbejder vi rigtig meget med, med mellemtrinslærerne (og siger?) "hvordan er det så, I kan undervise, så vi kan bygge ovenpå det, eleverne kommer med?". Undervisningen fra fjerde til sjette bliver rettet ind på, at "nu er det sådan her, man gør i udskolingen". Så er det rigtig svært at gå den anden vej og sige "nu laver vi sgu åbne opgaver, vi går ind og laver alt det fede igen i udskolingen". Deres mindset er bare sat ind på, at, at, at den didaktiske kontrakt i matematik, det er, at "vi laver nogle opgaver, I får svar på det, og der er ét rigtigt facit". Så ehm, derfor ehm… Det tror jeg lidt er benspændet i det. At vi mister noget… Altså ungerne skal jo, som du var inde på… Altså, hvad er ungernes syn på det. At lige pludselig, når man får dem i syvende, det gør jeg jo så hver tredje år minimum, overtager en ny syvende klasse, og de selv skal til at tænke igen, det der med at de ikke bare skal lave nogle opgaver, som de har fået at vide, hvordan de skal lave og altså, det er jo ikke det, de regner med er matematik.

Interviewer: Nej det er klart.

Lærer: Så der går lige et halvt til et helt år før de faktisk finder ud af, hvad den fede matematik er.

Interviewer: Hvad så med sådan andre ting i samfundet, der måske, altså, kan gøre det lidt svært? Men der siger du, at der i princippet er tid til, tid til at lægge sådan nogle ting ind?

Lærer: <u>Nogle</u> har mere tid end andre, tænker jeg, skolemæssigt. Der er nogle skoleledere, der også er gode til at prioritere sådan nogle ting. Og så tænker du, om eleverne har tid til at deltage i det? Om eftermiddagen? Eller?

Interviewer: Nej jeg tror egentlig mere jeg tænkte sådan om selve skolesystemet er bygget op, så der egentlig er plads til at /

Lærer: Det synes jeg, at det er. Jeg synes, at der er plads, hvis man tager pladsen. Hvis man har sine argumenter i orden, så skal man nok finde pladsen til det. Man kan sige, det projekt, vi kørte med de dygtige elever på tværs af årgange og klasser, hvor vi havde 25 elever, tror jeg. Ehm, de mødtes så en hel dag i stedet for. De blev væk fra den normale undervisning, og så var det deres ansvar at følge med i den normale undervisning, selvom de ikke var der. Og det gjorde vi så en gang om måneden. Det vil sige /

Interviewer: Men er det så ikke… Kan det ikke blive et problem, at elever så melder fra, hvis de skal bruge en hel dag /

Lærer: Jo.

Interviewer: En hel dag, der skal hives ud, og hvis de så måske ikke føler sig så dygtige til /

Lærer: Jo, jamen vi er helt enige. Og det er jo netop, hvordan man kan organisere det. Hvad er bedst? Fordi vi har prøvet mange forskellige ting. I starten var det et tværkommunalt projekt, hvor de mødtes fra alle skoler, og så var der små 20 elever. Og der prøvede vi både eftermiddage fra to til fem, hvor vi så havde fire, øh, én om ugen, tror jeg, og mødtes fire gange om måneden, og så gik vi over til det med hele dage. Vi prøvede lidt forskelligt for at se, hvad der passede bedst til dem, og det var altså de hele dage, sagde de. Det var klart det fedeste.

Interviewer: At det blev… Fordi man har tid til så at /

Lærer: Ja det der med /

Interviewer: Fordybe sig.

Lærer: Det der med at skulle gøre noget tre timer klokken to til fem, hvor man er helt færdig. Selvom man gerne ville, så øh… Og det andet var, det kunne de meget bedre lide. Så det er det, jeg har prøvet at overføre til nogle af de andre projekter, vi så har lavet senere ik'.

Interviewer: Men også det der med at få tid til at fordybe sig ik'. Det er jo også det, der er lidt /

Lærer: Jo.

Interviewer: Fedt ved det projekt her.

Lærer: Helt klart.

Interviewer: At man arbejder med det samme problem over <u>lang</u> tid og /

Lærer: Ja og man kan gå og gøre sig sine tanker, og så mødes netop med en tovholder engang imellem og sige "vi er der og der, og i gruppen er vi der og der" og få lidt inspiration fra de andre ik'. Jeg bliver nødt til lige at sætte p-skive, for søren. Jeg løber lige to sekunder [læreren forlader lokalet og er tilbage efter et par minutter].

Interviewer: Jeg synes egentlig, at vi er kommet meget godt sådan rundt omkring. Hvad så med sådan fremtidigt? Hvis nu du blev kontaktet her igen, efter sommerferien, eller nu her, eller et eller andet, i forhold til det projekt, er det så noget, hvor du tænker "ej, men, der kan vi sgu godt prøve at få det" /

Lærer: Sagtens, jeg troede du mente, om jeg så ville være afvisende.

Interviewer: Nej nej.

Lærer: Jeg tænker, det er jo netop det der med /

Interviewer: Du skal bare have /

Lærer: Årshjulet omkring det. Så hvad skal gøres hvornår, hvordan kan der findes timer til det, og hele den proces er jo i gang nu, og lige pt. er skolelederne jo forholdsvis ramt, at økonomisk, der ved de godt, at der kommer til at ske noget med skolereformen og sådan nogle ting, så de holder lidt på pengene ik'. Ehm, men man vil altid kunne overtale og altid kunne finde nogle kolleger, der rigtig gerne vil være med i det, rundt omkring, eller selv kunne stå for det ik'. Og så det der med lige at præparere eleverne og sige "jamen, det er det og det, det handler om, og vi har den her tid, og opgaverne er nu på dansk" og altså, alle de der ting, der har været benspænd før. Fordi det var lidt svært, når der kom nogle franske opgaver eller engelske opgaver og sige (21:23) /

Interviewer: Jo, men, men… Altså fik de bare nogle franske opgaver? [griner]

Lærer: Ej, men det var det, der var hele… Det, der spændte lidt ben for det var, at allerede, ja var det november eller oktober, tror jeg, at vi sagde ja til at være med, og så skulle vi holde et møde i, ja i januar, for at få det hele på plads, og der var opgaverne… Der havde hun ikke haft tid til at oversætte dem endnu. Så der gik lige lidt tid med det, og så blev det helt henne i marts måned, eller sidst i februar, og konferencen var så vidt jeg husker i april eller maj. Så det hele var utrolig tæt samlet.

Interviewer: Så I havde egentlig allerede sagt ja, i oktober november, og så gik der bare lang tid, før /

Lærer: Ja det gjorde der.

Interviewer: Ja okay.

Lærer: Jeg tror også, at det var noget med, at jeg var på lejrskole på et tidspunkt, hvor hun kunne. Der var sådan lige en hel masse benspænd. Så man kan sige, det der med at få lagt tingene på plads, det, det skal man gøre, især i en folkeskoleverden, hvor lærerne skal have tid til at gøre det allerede før sommerferien, og ungerne skal have tid til at sætte deres hoveder ind på, at det er det, de vil, og ja, så der er mange små tidsmæssige aspekter.

Interviewer: Hvordan sådan, noget helt andet, sådan generelt elevernes interesse for matematik. Hvordan tror du, at man sådan kan, hvad skal man sige, øge den? Altså, sådan et projekt som det her, kunne måske, men /

Lærer: Ja altså det med at inddrage deres verden i det, man arbejder med, og netop stille de åbne opgaver. Nogle emner er jo lettere til at… Statistikemnet er jo fantastisk til at lade dem gå ud og undersøge noget, som de finder interessant. Stille nogle, hvad skal man sige, ting, der skal være… Altså lave nogle krav til det, de arbejder med. I syvende, i år, det må have været i år ja, der arbejdede de med, at de selv skulle vælge et emne, og så havde jeg valgt nogle statistiske deskriptorer ud, de skulle have med. Jeg havde ikke fortalt dem, hvad det var, men det skulle de så selv ud og finde ud af, hvad de kunne dække over, og så skulle de lave et oplæg for os andre, som så skulle være digitalt, dvs. enten film eller en øh… Noget, som de havde arbejdet med digitalt.

Interviewer: Føler du, at der er tid til at gøre de her ting, lidt anderledes ting i undervisningen? Altså i forhold til hvad du skal nå? Altså, der kan jo tit være det her fokus på, at "så skal I til eksamen, og vi skal nå de her ting" osv. Synes du godt, at du kan, kan få plads, til at være lidt eksperimenterede og…

Lærer: Ja det synes jeg. Det, der ryger først, det er det kedelige færdighedstræning og sådan noget, for mit vedkommende i hvert fald. Altså det, det ligger jeg ikke særlig stor vægt på, og de kan det. Nu er jeg så heldig, at vi har differentieret undervisning, eller differentierede hold ude hos os, så eleverne vælger selv, hvilke hold de er på, og så har vi tre hold, der er inddelt efter både niveau og interesse. Og jeg har så de dygtigste, eller dem, der har mest engagement for matematik, og det gør, at dem, der er der… I øjeblikket er vi 31 ik', det er cirka halvdelen af de tre klasser, sådan nogenlunde, vi er 68. Så 31 synes, at de gider matematik og er dygtige til det og har lyst til at arbejde /

Interviewer: Så måske, det er vel der, du har mulighed for det, fordi det bliver vel sværere, hvis du har de hold, der ikke har styr på de basale, øh, ting?

Lærer: Lige præcis, og det bliver jo så en helt anden form for undervisning, fordi så bliver de nødt til først at, at arbejde med færdighederne, og så bagefter så kan gå ud og gøre de fede ting ik'.

Interviewer: Jo. Så er der overhovedet tid til, at de så kan nå det? Dem der er /

Lærer: Jamen det er der. Det synes jeg, fordi vi har jo så Pernille [anonymt navn], som har det svageste hold. Øh, hun er rigtig dygtig didaktisk, altså, virkelig skarp og dygtig til de svageste elever, og hun arbejder rigtig meget med, at de også skal producere, også skal genfortælle, også skal alle mulige ting. De får måske ikke den samme mængde tid til at få ud og lave de fede, øh, digitale produktioner, men stadigvæk får de lov til at, at både fremlægge og gøre og fortælle og arbejde med det på den måde. Men det er et andet fokus, de har, fordi rigtig mange af dem, der er de svageste, ligger jo på en tredje, fjerde klasses niveau i syvende ik', hvor at de dygtigste ligger mellem, ja, niende klasse og 1.g. Så det er det spænd vi har.

Interviewer: Ja der kan være et stort spring (24:57)

Jeg havde på dette tidspunkt i interviewet fået stillet de spørgsmål, som jeg havde forberedt og ønskede svar på. Der blev herefter snakket løst og fast om andre ting, og diktafonen blev slukket.

Bilag 11: Interview B, maj ’13

Interviewer: Sådan noget som… Det er jo dig, der sidder og udformer de her spørgsmål [Math en Jeans opgaver]. Hvad lægger du vægt på? Hvad karakteriserer et godt spørgsmål, synes du?

Nathalie: Det er noget, de skal, de skal kunne selv prøve på, prøve sig frem på… Ehm, så det skal ikke være… Det skal ikke bruge alt for meget svært matematik. Jeg har også set med tiden, det skal ikke være for abstrakt. Der er… Nogle gange har jeg været overrasket over nogle spørgsmål, hvor de overhovedet ikke kan komme op på det… Ligesom, for eksempel med nogle flader, hvor jeg prøvede at få dem interesseret i nogle spørgsmål. Hvis det er for abstrakt, så kan de ikke rigtigt. De kan godt lide ligesom, hvis det har noget med spil at gøre eller hvis der… I hvert fald skal det være meget klart for dem. Det skal være konkret nok til, at de ligesom føler, at de har styr på, hvad det handler om. Øh, og det, det er rart, at der er nogle ligesom første eksempler, de kan prøve på. At de kan lave måske en simpel version af spørgsmålet. For eksempel ligesom Sudoku. Der virker det super godt, da vi gjorde det. Men vi gjorde… Vi lavede ikke nogen ni gange ni Sudoku, vi lavede de der fire gange fire. Ehm, og så kan man også ligesom ændre… Det er ikke fordi man skal absolut forstå fire gange fire Sudoku, man kan godt lave nogle små spørgsmål indenfor det større emne. Ligesom, jeg synes, det fungerer altid bedst, hvis man har mange små spørgsmål /

Interviewer: Der kan besvares. Så det ikke bare er ét stort spørgsmål?

Nathalie: Der kan… Eller i hvert fald, de kan prøve sig frem på… Og typisk vælger de én af dem, og der er ligesom… Man kommer op med mange spørgsmål, og de ender med at kigge på et lille hjørne af det, man har snakket om. Men de laver noget, ligesom… Man ved… Det er tit, man er overrasket over, hvor de går hen. Det første år, jeg gjorde det, var det et emne om metriske rum, hvor en af de ting, jeg foreslå var, at de kiggede på taxametrik i New York, der hvor man skal rundt, ehm, på gaden, og de endte med at bruge hele deres, ligesom de flere måneder, de arbejdede på projektet, på at regne ud, at regne på hvor mange lige linjer, der var mellem to punkter. Fordi det er svær kombinatorik faktisk at tælle, og de lærte ret… Ligesom, jeg synes det var faktisk… Det endte med at være super godt, men /

Interviewer: Det var ikke sådan, du havde tænkt det? [griner]

Nathalie: Vi nåede overhovedet ikke til, slet ikke det første spørgsmål, jeg stillede [griner]. Men de havde lært ligesom… Det var sjovt nok for dem bare det faktum, at der var flere lige linjer mellem to punkter. Hvor mange var der så? Det var ligesom… Så den, den slags, hvor...

Interviewer: Så det kan gå mange forskellige veje og det, pointen /

Nathalie: Ja.

Interviewer: Og pointen er, at det ikke nødvendigvis er som, som du har tænkt det?

Nathalie: Ja. Hvis man ser de yngre, de yngre studerende, de yngste, dem der ligesom er de der tolv, tretten år, så er det bedst med noget, hvor de kan bare prøve nogle eksempler.

Interviewer: Ja for jeg har jo også været ude og kigge, der på den franske skole, ehm, hvor også sådan en opgave, som du havde foreslået, den her med, noget med noget, hvad hedder sådan noget… Hvis man skulle flyve fra en destination til en anden osv. ik'? [Math en Jeans opgaven med titlen *I fugleflugtlinje / fly over jorden som drejer*, se bilag 5]

Nathalie: Ja. Ja.

Interviewer: Er det ikke også det, du siger med, at hvis det er for abstrakt, så er det ikke sådan en opgave, du måske vælger? For jeg forstod på, på læreren derude, at der ikke er nogen, der har arbejdet med den opgave?

Nathalie: Der er nogle af de ældre studerende.

Interviewer: Ja nogle af de ældre. Men netop som du siger med de yngre, de skal måske have noget /

Nathalie: Noget ja, mere konkret. Ja fordi, ligesom de yngre, det var meget godt det, de havde lavet med kortene [i opgaven *Matematisk solitaire*, se bilag 5], og de havde ligesom fundet… De havde prøvet sig frem med tal og ligesom, hvordan… Jeg tror, at en af de ting, de skal prøve, de kan prøve, det er ligesom at rydde op i, i hele spørgsmålet. Ehm, hvordan laver man matematik? Man har et spørgsmål, man skal prøve at, at rydde op i sine tanker, hvad er spørgsmålet egentlig? /

Interviewer: Ja hvad er det egentlig, det handler om.

Nathalie: Og ligesom prøve… Det øh… Fra et spørgsmål til at lave noget matematik, man skal virkelig tænke, og det er klart, at de yngre, det er svært for dem at tænke helt, at rydde op i deres svar. De har kigget på masser af eksempler, og de har ikke fundet ud af, man kunne godt finde mange måder at få det tal med nogle kort eller hvad det var. Men derfra til at sige "okay, hvad er det jeg faktisk har svaret på?", hvordan (05:07) /

Interviewer: Ja så det er lidt ligesom, som jeg også har observeret, mest bare handling og eksperimentere. Det er ikke så meget sådan at formulere nogle hypoteser sådan <u>til</u> spørgsmålet, vel? Det er mere sådan /

Nathalie: Ja og det er klart, at jo yngre… Ja, det er den del, der er lidt svær, men det er det, som Math en Jeans ligesom handler om. Man skal prøve at, at tage en matematisk tilgang til spørgsmålet, prøve at tænke på, hvad er situationen, hvad er min hypotese osv. Men man gør det på en måde, hvor man leger med nogle ting i stedet for at man hører om en sætning og prøver at bruge den og sådan noget. Man prøver at finde en sætning, på en eller anden måde.

Interviewer: Hvad så med for eksempel den der *Matematisk solitaire*, nu var du jo også ude og kigge, da de lige skulle fremlægge deres resultater osv.

Nathalie: Ja.

Interviewer: Er de så noget frem til det som… Altså, har de gjort som du havde forventet? Altså bare det der med at kigge på nogle eksempler eller…

Nathalie: Ja, men jeg synes, de var ikke nået helt så langt, som jeg gerne ville have dem til [griner], men det er klart at…

Interviewer: Altså hvordan tænker du her? Måske komme med nogle mere, øh, generelle hypoteser eller sådan?

Nathalie: Ja lige præcis. Jeg ville gerne have, at de nåede til, ligesom… Men det er noget, det kan man ikke forvente af sådan nogle /

Interviewer: Nej, nej.

Nathalie: Unge elever. Jeg synes det er fint, at de bare prøver at svare på nogle spørgsmål uden at virkelig… Men det er klart, at det man, man vil gerne gå hen til at de får et eller andet struktureret svar, og det har tit været på den måde, at når jeg kommer til sidst, så diskuterer man den slags med dem, og det… Bare det at de kommer på niveau til at begynde at diskutere det, det synes jeg, det er super. For eksempel, men /

Interviewer: Men det gør ikke noget, at de ofte ikke når til at kunne diskutere /

Nathalie: Ligesom de yngste, det er klart, at som i år, de har haft ret mange [elever], der var med på projektet, og det er ikke alle der… Lærerne sagde selv, at det måske ikke helt var så god en idé fordi, så var de ligesom lidt mindre fokuseret på en måde. Det havde måske fungeret /

Interviewer: Altså tænker du sådan i forhold til at læreren så bedre kunne nå at være med i alle elevers arbejde eller /

Nathalie: Eller ligesom motivation måske også. Så det hele måske ikke er lige så…

Interviewer: Så er der måske nogle elever, der har valgt at deltage måske uden at have så megen interesse?

Nathalie: Ja. Den generelle stemning er måske en anelse mindre seriøs.

Interviewer: Ja okay. Det var sådan lidt om opgaverne, og så det, jeg også er ret interesseret i, det er jo det her med, at… Jeg kan forstå, at I også har prøvet at introducere det her projekt sådan i, i danske skoler.

Nathalie: Ja.

Interviewer: Kan du fortælle lidt om, hvordan det sådan er foregået?

Nathalie: Ja, ehm (pause). Det er ikke gået så godt.

[begge griner]

Interviewer: Hvilke sådan… I har både været ude på gymnasier og folkeskoler eller?

Nathalie: Jeg har været én gang… Det tog lang tid at nå frem. Jeg har været en gang på et gymnasium, hvor jeg præsenterede emnerne. Ehm, og jeg har også ligesom prøvet mere for nyligt, jeg var bare en eftermiddag på et gymnasium, men… Hvor jeg prøvede at få dem lidt i gang. Men, men der var alt for mange… Ligesom det hele var, ehm… Og det var kun en eftermiddag. Det var ikke, det var ikke så let. Men dengang jeg var der bare for at præsentere emnet, i princippet, ideen var, at de skulle være med til, til konferencen.

Interviewer: Altså på et gymnasium?

Nathalie: Ja det var et gymnasium. Og ehm, jamen, der var en helt anden stemning. Der var ikke noget… Det var… Der er noget meget afslappet… Jeg ved ikke, hvordan gymnasiet… Det var første gang, du ved, jeg (?uforst.) gymnasium, og der var en vildt afslappet stemning, som jeg ikke kender overhovedet fra min skoletid [griner].

Interviewer: Ja for du kommer fra, fra /

Nathalie: Belgien.

Interviewer: Fra Belgien ja.

Nathalie: Altså med et lignende system til det franske system, og det er klart, den franske skole her, er en lille smule mere afslappet end den ville være i Frankrig, men den er ikke ligesom… Man har ikke den der, at lærer er venner med eleverne, ligesom, slet ikke.

Interviewer: Nej der er lidt større afstand.

Nathalie: Og der var… Det var på en eller anden måde lidt kaotisk i… Det hele… Der var ikke det der, "nu er vi i skole", ligesom, sådan nogle atelierer, det der Math en Jeans, det er noget efter skole. De kommer, eller nu har de kørt det i de almindelige timer [for gymnasieeleverne, se afsnit 6.1.1], men for de fleste, for det meste har de kørt efter skole, så de kommer frivilligt bagefter, så der er en mere afslappet stemning end der ville være i den almindelige klasse, men, men alligevel, der er en eller anden… Jeg følte, at da jeg var i det danske gymnasium, at de havde… Min fornemmelse har været, at de havde sagt til eleverne, at nu skulle vi prøve noget lidt mærkeligt fransk. (10:45)

Interviewer: Okay [griner]. Det er ikke så godt et udgangspunkt.

Nathalie: Det var, det var min fornemmelse. Og jeg, jeg var den der lidt, ligesom, den der person, der kom udefra med en eller anden mærkelig ide, og nu skulle de gå og kigge på, hvad det var. De skulle så overveje, om de ville tage det med eller ej. Det var ligesom min fornemmelse. Jeg ved ikke, om jeg har haft ret.

Interviewer: Det var bare sådan du /

Nathalie: Men det er sådan, jeg oplevede det. De var meget søde, men, men de var faktisk i forhold til… Jeg har præsenteret de der emner nogle gange på den franske skole, og det plejer altså at være virkelig god feedback. Altså, de reagerer, man stiller spørgsmål, og så som den første gang, man dukker op, de plejer at være med. De interesserer sig for det, man snakker om, de stiller spørgsmål, de har modeksempler til ting man siger. Men her, alle de kiggede, ja, de kiggede meget afslappet på mig, men de reagerede ikke så meget [begge griner].

Interviewer: Nej.

Nathalie: Så jeg følte, fra starten af, var det…

Interviewer: Det var meget svært?

Nathalie: Det var måske ikke lige ligesom den rigtige, jeg ved ikke… Jeg følte ikke, at de var med på en eller anden måde.

Interviewer: Nej. Hvad kan det skyldes, at elever har sådan den indstilling, tænker du? At…

Nathalie: Hvis man har, hvis du har, hvis man bliver… Det er derfor… Jeg ved ikke, hvordan jeg blev præsenteret, før jeg dukkede op, men det er klart, at hvis du siger til folk ”her kommer en, som vil prøve noget, I ikke kender til, det bliver måske mærkeligt, men kom nu bare alligevel”.

Interviewer: Ja så kan eleverne godt bakke lidt ud ik’ og sådan.

Nathalie: Så vil alle bakke lidt ud. Hvem ville have det… Man skulle være virkelig heldig for at have en, der siger ”nå, men jeg synes faktisk, jeg vil meget gerne være med til det alligevel” selvom… Mens hvis man siger til eleverne ”her er noget spændende, som man laver andre steder", og ligesom "nu skal vi lave det her, vi laver det" [griner]. Det giver en meget anden /

Interviewer: Ikke noget valg, nu kommer… Eller hvad? /

Nathalie: *Non, non,* de kunne godt på den franske skole, de kunne godt vælge, om de kommer eller ej ik'. Men hvis de kommer, og det er meget klart, man er også meget seriøs med det, hvis de kommer, så skal de altså gøre det ik'. Det er ikke noget med, at man dukker op nogle gange fordi, det ville ødelægge hele projektet.

Interviewer: Nej så går det ikke.

Nathalie: Så de er meget, de er rimelig seriøse omkring, "okay, hvis I vil være med, så"… De måtte godt komme første gang. Der var altid nogle, der kom første gang, der ikke dukkede op *later*.

Interviewer: For lige at se det an ja.

Nathalie: Bare for at se. Der er også dem, der ikke kunne og så bla bla bla. Det er ikke fordi, det hele var meget stramt, men der var noget, ligesom "det her skulle gøres" og "vil I være med eller ej? I beslutter? Men hvis I er med, så er I med" osv. osv. Hvis man præsenterer… Altså, det har en effekt, hvordan man præsenterer /

Interviewer: Ja ja.

Nathalie: Det hele.

Interviewer: Lad os nu så sige, at, at… Nu ved du ikke hvad læreren har sagt til eleverne.

Nathalie: Nej.

Interviewer: Men hvis læreren siger "nu skal vi til det her, prøve det her spændende" og ikke altså… En god indstilling på en eller anden måde fra starten af. Tror du så, at eleverne så ville, ville være med på den?

Nathalie: Hvorfor ikke? [begge griner] Der er ikke nogen… Der må være ligesom andre ting, andre typer projekt-noget, man laver alle mulige projekter, også i Danmark. Hvorfor kunne man ikke /

Interviewer: Gøre det med det, ja ja. Hvad med… Altså jeg vil jo også gerne kigge lidt på sådan forskelle mellem franske skoler og danske skoler. For eksempel, har franske og danske lærere forskellige indstillinger til, til matematikfaget og deres profession? (15:01)

Nathalie: Det ved jeg ikke.

Interviewer: Nej.

Nathalie: Men ehm, hele systemet er helt anderledes. Jeg kender ikke det gymnasiesystem så godt. Jeg har lige været, her nu… Mine børn, min ældste datter er nu i børnehave, og vi har lige været to måneder i Frankrig, hvor vi var i en rigtig fransk skole, så vi har set, hvor ekstremt forskelligt det er [griner].

Interviewer: Hvordan vil du så beskrive sådan det franske skolesystem?

Nathalie: Det franske, hele tilgangen er… Du kommer i skole… De sagde, der var ikke nogen problem, vi kunne bare lade hende være der hele dagen fra først… Vi dukkede op, de sagde, de ville bare holde hende hele dagen, der var ikke nogen problem. Hun ville have travlt [begge griner]. Hun skulle mange ting fordi, man dukker op i skolen, og så skal man dét, og man skal dét, og man skal dét. Man har ligesom… Der er ikke noget med ”hvad vil du nu, vil du lave puslespil?” Nej, nej, der er ikke noget. Der er en plan, ”du laver dét, du laver dét”. Der er ligesom… Det er læreren, der er *in charge*. Det er også, det er måske det, det er ikke noget med ”vi skal være venner” bla bla bla. Nej nej nej nej. Læreren bestemmer. Eleverne gør ligesom… Det er ikke fordi, man ikke kan lave noget kreativt eller noget, men der er en struktur. Der er ikke så meget brok [griner]. Der er ikke så meget (?uforst.), tænker jeg.

Interviewer: Er det så også det, der gør, at franske elever så godt vil bruge deres fritid, på en eller anden måde, på, på at lave matematik?

Nathalie: Det ville jo… Det gør det mere mærkeligt, gør det ik’?

Interviewer: Jo, jo, men det er det, jeg tænker. Hvis de nu er vant til /

Nathalie: Hvorfor vil de have mere matematik? [griner]

Interviewer: Ja, hvis de alligevel [griner] /

Nathalie: Hvis de allerede har en dag, som er så… Det er sjovt, er det ik’?

Interviewer: Jo lidt ik’.

Nathalie: Ja.

Interviewer: Hvordan det kan være at… Ja, det ved jeg ikke.

Nathalie: Men det er selvfølgelig… Det gør også… der er noget sjovt i, man laver sådan noget, ligesom, jeg har ikke selv haft Math en Jeans, dengang jeg var i skole, det eksisterede ikke, i Belgien i hvert fald, dengang, men øh, jeg har lavet nogle ting, faglige aktiviteter, ligesom over frokost, jeg husker. Vi havde en super god lærer. Vi lavede nogle ting, ovre fra frokostpausen, for eksempel ik’. Og vi har, jeg har også lavet lidt ligesom, vi har haft de der olympiader, øh, Georg Mohr. Det har vi også dengang, og vi har været til nogle *training sessions* et par gange eller sådan noget, men, men hvis man har et stramt system, hvor lærerne (?uforst.) osv., at lave nogle aktiviteter, som er lidt udenfor, faktisk, det kan være meget sjovt, fordi stemningen er lidt anderledes, og man lærer lige pludselig en mere afslappet situation med en ligesom… Så der, hvis det altid er afslappet, så er der ikke nogen /

Interviewer: Ja jeg skulle lige til at sige /

Nathalie: Så er det bare mere det samme.

Interviewer: Så er det bare lidt mere, ja præcis.

Nathalie: Man kan sige, i det franske system, der bliver det noget andet. Nu skal vi faktisk lave matematik for sjov [begge griner]. I klasseværelset er det ikke så særlig sjovt, men… Eller det ved… Det kan være.

Interviewer: Det kan godt være en grund ja.

Nathalie: En forskel. Men jeg ved ikke… Det jeg har været overrasket over er, hvor lidt lærerne har været motiverede.

Interviewer: Ja for det tænker jeg også på.

Nathalie: Fordi det er mere det, vi har… Carl [Winsløw] har kontaktet (?uforst.), som er alligevel en del ik', folk han kender, herfra, ligesom, har været hos ham og bla bla bla.

Interviewer: Ja fordi, hvordan er det startet? Carl har kontaktet nogen lærere på forskellige gymnasier?

Nathalie: Ja han har kontaktet mange, og så var der alligevel nogle, der sagde, de var interesserede, og så de… Folk faldt fra, den ene efter den anden efter den anden, med alle mulige undskyldninger.

Interviewer: Ofte sådan noget med tiden ik'? Eller hvad?

Nathalie: Tiden. Ja, og det er dér, hvor der er en… Der kommer vi tilbage til det problem med lærernes manglende motivation. Jeg har været vildt overrasket over de franske lærere her [på den franske skole], hvor motiverede de er, hvor meget har de afsat af deres tid osv. Der er noget... De bruger energi på at få... De har lyst til at lave lidt mere end almindeligt arbejde.

Interviewer: Ja fordi de franske lærere på den franske skole, der er med i det her Math en Jeans, er det bare ud over deres løn så at sige eller /

Nathalie: De får ekstra penge for det.

Interviewer: De får ekstra penge, men det er stadig, så de kommer til at arbejde mere end /

Nathalie: Jeg vil tro, i forhold til specielt sidste år, da de organiserede konferencen, jeg tror ikke, at det kan betale sig [begge griner] (20:25).

Interviewer: Nej der er brugt meget tid.

Nathalie: Der er virkelig en… Det virker som om, jeg ved ikke, ligesom nu, nu, det må variere. Jeg har en god veninde, det er også på den måde, at jeg kom til at kende de der folk, jeg har en veninde, der underviser i historie, på den franske skole, og jeg ved også, at hun bruger meget tid på at finde på nye ting at lave, alle mulige /

Interviewer: Så mere end bare sådan en 37 timers arbejdsuge?

Nathalie: Ja og prøver at samarbejde med andre lærere, lave nogle sjove projekter osv. Og hun sagde, at det ikke er altid, at de, at man kan finde kolleger, som gider, at lave sådan nogle samarbejdsprojekter osv. Det er ikke altid, at det fungerer helt så godt. Men, men jeg ved ikke, hvordan det er generelt, jeg ved kun, at Carl har kontaktet ligesom måske, *whatever*, ti mennesker eller sådan noget, og der er kommet nul ud af det [griner].

Interviewer: Ja det siger jo så lidt. Jeg var lige ude og snakke med en folkeskolelærer, Mikkel [anonymt navn], som Carl også har snakket med. Der fik jeg at vide, at de egentlig først havde sagt ja, men så blev det heller ikke til noget alligevel og så /

Nathalie: Var det ikke, måske var det ham… Var det ikke ham, jeg var hos?

Interviewer: Jo han sagde nemlig, at du havde været ude.

Nathalie: Ja meget flink fyr, meget (?uforst.) osv., men…

Interviewer: Hvordan var stemningen så der at komme ud?

Nathalie: Nej, men det er ham, det er der, hvor jeg var… Nårh, det var ikke gymnasium.

Interviewer: Det var folkeskole.

Nathalie: Nårh, det var folkeskole. Det er rigtigt, det var folkeskolen. Men de var nogle ældre folkeskoleelever ik'?

Interviewer: Ja det har været de ældste i folkeskolen, ja.

Nathalie: Ja ja ja.

Interviewer: Fordi der sagde han, at de /

Nathalie: Nårh ja, nu kan jeg huske det. Hele skolen var… Ja der var mange /

Interviewer: Ja.

Nathalie: Små børn.

Interviewer: At de egentlig gerne ville osv., men så blev det også noget med tiden i sidste ende, der gjorde det lidt svært.

Nathalie: Ja. Men tror du virkelig, ligesom, at han mente det? [begge griner]

Interviewer: Altså, det, det lød sådan. Nå, men, hvad hedder det nu… På den franske skole der, som du også sagde, der, for gymnasieeleverne, der var det i timerne, at det foregik ik'? Math en Jeans?

Nathalie: Ja.

Interviewer: Ved du hvorfor, det blev sådan?

Nathalie: De ville prøve. De sagde, de ville ikke gøre det igen, tror jeg. De besluttede på skolen at lave noget, hvor alle skulle lave et projekt. De kunne vælge, om det var matematik eller noget andet. Så der var noget /

Interviewer: Så man skulle ikke nødvendigvis tage (?uforst.).

Nathalie: Nej nej nej. Man kunne vælge mellem det, *whatever*, jeg kan ikke huske. Men de sagde, det var ikke så godt at have nogle ikke helt så motiverede studerende på den måde.

Interviewer: Jeg tænkte på, hvor længe har du sådan været inde over det her projekt?

Nathalie: Fire år, det må være fire år, tror jeg.

Interviewer: Har du været ude på den franske skole så, de sidste fire år så og præsentere?

Nathalie: Ja.

Interviewer: Hvordan sådan, jeg har ikke helt en idé om, hvor mange franske skoler, der sådan rundt omkring i Europa deltager? Er det rigtig mange, der… Er det meget normalt at gøre det som skole, at have det her Math en Jeans projekt?

Nathalie: I Europa?

Interviewer: Ja bare på franske skoler sådan rundt omkring.

Nathalie: Ligesom, fordi, i Frankrig er det kæmpe stort. De deler nu konferencen i flere stykker fordi, ellers er der alt for mange. Jeg tror, at det er omkring en to, tre tusinde studerende, vi snakker om ik'. Her, de europæiske franske skoler, er vi 350, måske 300 studerende og 50 lærere i København sidste år. Så ligesom hvem var… Der… Stockholm, der, ligesom Berlin var et stort sted, *Vienna* [Wien] var et stort sted. Rusland. Ja, der var… Så det, det virker som om, det er rimelig stort. Og de samarbejder også om det, det er også på den måde, at… Det er ikke alle, der kunne finde en forsker, så derfor kunne folk, skoler, der ikke havde en forsker til at foreslå emner, de kunne bruge emner fra en anden skole. Det er meningen /

Interviewer: Ja fordi på den franske skole her i København, der har de jo ikke rigtig haft nogen partnerskole, som man kalder det, vel?

Nathalie: Vi har haft, vi har samarbejdet med Stockholm før. Det er faktisk Stockholm, der startede det for fire år siden. Det var dem, der foreslog.

Interviewer: Okay, så det har kørt på den franske skole i fire år, og du har været der alle årene?

Nathalie: Ja ja, jeg var der fra starten af (26:04)

Interviewet sluttede her. Efterfølgende kom jeg i tanke om, at der var et spørgsmål, som jeg ikke havde fået stillet og vendte tilbage til Nathalie samme dag:

Interviewer: Det var bare sådan i forhold til, når eleverne arbejder med de her opgaver (00:05)

Nathalie: Ja.

Interviewer: Om du synes, det er en vigtig ting, at eleverne også sådan kan søge information på for eksempel nettet, eller om det bare handler om, at de sidder med de her opgaver og, og tænker?

Nathalie: Ej, jeg synes, det er fint, at de prøver at finde andre informationer på nettet, og jeg har selv, ligesom selv, når jeg laver opgaver, jeg søger også på nettet ik'.

Interviewer: Jo.

Nathalie: Og der er tit nogle ting, der er bevist, hvor man kan finde nogle beviser på nettet. Jeg har aldrig oplevet, at de finder frem til det… Fordi det er tit mere avanceret, end de kan overskue.

Interviewer: Men det er også fordi jeg tænker, når nu jeg har været ude og kigge, der er ingen, der er jo ikke rigtig nogen af dem, der sådan bruger computer og internet osv.

Nathalie: Internet ikke så meget. Der har, måske, der har været nogle gange, hvor for eksempel, jeg tror, dengang de lavede nogle, de skulle lave, der er det der spil, jeg kan ikke huske, hvad det hedder, med de der tal [opgaven *Skubbespil*, se bilag 1] /

Interviewer: Som man rykker rundt og skal /

Nathalie: Hvor man rykker rundt.

Interviewer: Ja ja.

Nathalie: Hvor, ja, hvor jeg også foreslår, at de prøver at forstå, hvordan den fungerer, men også at de kunne prøve at lave nogle nye spil, andre, finde nogle andre, versioner på det, og jeg tror måske, at her har de også kigget på nettet. Fordi man kan selvfølgelig finde nogle ting på nettet.

Interviewer: Så, så det er ikke nødvendigvis noget, de sådan skal gøre. Det er også bare en mulighed /

Nathalie: Det er en mulighed. Ja ja. Jeg synes det er spændende, at de prøver, men det er tit, for dem er det tit svært at forstå, for de ting, der ligger på nettet, er tit svært at forstå, for dem, at kunne de ting, de kan forstå, det er svært i hvert fald. Så jeg tror, at det er derfor, at det ikke sker mere.

Interviewer: At de ikke bruger det så meget.

Nathalie: Fordi det er ikke det samme som bare at læse, ligesom hvis du laver et eller andet projekt i historie, eller jeg ved ikke, du skal bare læse om et eller andet, som er lettilgængeligt. Hvis du søger noget matematisk, så vil du mest finde nogle ting /

Interviewer: Der er på lidt højt niveau i forhold til dem?

Nathalie: Præcis.

Interviewer: Det kan vel også være svært for dem at vide, hvad de skal søge på ik'?

Nathalie: Ja det kan også være.

Interviewer: Det var bare lige det. Tak (02:05).