INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Et didaktisk design om definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral

Nicole Koefoed
Kandidatspeciale

December 2013

IND's studenterserie nr. 33

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte – Om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2013)
29. Morten C. B. Persson: Kvantekemi i gymnasiet - Tilrettelæggelse, udførelse og evaluering af et undervisningsforløb (2013)
30. Sofie Birch Jensen: Køn, evaluering og The Force Concept Inventory (2013)
31. Simone Gravlund Nielsen: Når børn forsker i matematik (2013)
32. Henrik Egholm Wessel: Smartphones as Scientific Instruments in Inquiry Based Science Education (2013)
33. **Nicole Koefoed: Et didaktisk design om definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral (2013)**

Abstract

Dette speciale skrives i Matematikdidaktik, og det overordnede formål er en undersøgelse af, om en mere præcis tilgang til det bestemte integral kan gives til en dansk gymnasieklasse, og specielt om de mere topologiske spørgsmål vedrørende det bestemte integral kan indgå. Specialet indeholder en teoretisk præsentation af det bestemte integral og det beskrives, hvordan emnet introduceres i de nutidige gymnasielærebøger. I forlængelse af dette indeholder specialet et design af et undervisningsforløb, og den empiriske del baseres på udførelsen af dette i en lånt 2.g-klasse på Hvidovre Gymnasium og HF.

Endvidere indgår Den Antropologiske Teori om det Didaktiske som den teoretiske ramme for specialet, og desuden er en epistemologisk referencemodel udviklet for at muliggøre et studie af den planlagte og den realiserede didaktiske proces, som præciseres i en a priori og a posteriori analyse. På baggrund af de to analyser belyses de didaktiske begrænsninger, udfordringer og muligheder, som eksisterer i forbindelse med undervisning i det bestemte integral.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

Indholdsfortegnelse

1. Resume 4
2. Abstract 4
3. Introduktion 6
4. Den teoretiske ramme 7
4.1 Teorien om den didaktiske transposition 7
4.2 Den Antropologiske Teori om det Didaktiske 8
4.3 Didaktiske organisationer og faserne i den didaktiske proces 10
4.4 Bestemmelsesniveauer 11
5. Problemformulering 12
6. Den akademiske matematiske integrationsteori 13
6.1 Darboux-integralet 14
6.2 Analysens fundamentalsætning 17
6.3 Riemann-integralet 17
6.4 Ækvivalens af Darboux- og Riemann-integralet 18
6.5 Anvendelse af integralet: Arealberegning 19
7. Den matematiske viden, som skal formidles 19
7.1 Undervisning i det bestemte integral i 1960'erne 20
7.2 Undervisning i det bestemte integral i dag 21
8. Epistemologisk referencemodel 26
9. Design af et undervisningsforløb 33
9.1 Planlægning samt konstruktion af et undervisningsforløb 33
9.2 Fagdidaktiske udfordringer 34
9.2.1 Tilgangen til det bestemte integral 34
9.2.2 Sammenhængen mellem areal og det bestemte integral 35
9.2.3 Definitionen af det bestemte integral 36
9.2.4 Integrabilitet 37
9.2.5 Sammenhæng mellem integral og stamfunktion 38

9.2.6 Notation og begreber 38
9.3 Mål og delmål 39
9.4 Inddragelse af CAS i forbindelse med undervisning og læring 40
10. A priori analyse af det designede undervisningsforløb 41
10.1 Del 1: Definition og eksistens af bestemt integral 43
10.2 Del 2: Eksakt værdi af bestemt integral 49
11. Metodologi 52
12. A posteriori analyse af den realiserede didaktiske proces 53
12.1 Lektion 1 og 2 53
12.2 Lektion 3 og 4 60
12.3 Lektion 5 og 6 76
12.4 Lektion 7 og 8 85
12.5 Konklusion på a posteriori analysen 92
13. Diskussion 94
14. Konklusion 99
15. Litteraturliste 101
Bilag 1 104
Bilag 2 124
Bilag 3 138
Bilag 4 144
Bilag 5 148
Bilag 6 153
Bilag 7 158
Bilag 8 186
Bilag 9 207
Bilag 10 211
Bilag 11 215

1. Resume

Dette speciale skrives i Matematikdidaktik, og det overordnede formål er en undersøgelse af, om en mere præcis tilgang til det bestemte integral kan gives til en dansk gymnasieklasse, og specielt om de mere topologiske spørgsmål vedrørende det bestemte integral kan indgå. Specialet indeholder en teoretisk præsentation af det bestemte integral og det beskrives, hvordan emnet introduceres i de nutidige gymnasielærebøger. I forlængelse af dette indeholder specialet et design af et undervisningsforløb, og den empiriske del baseres på udførelsen af dette i en lånt 2.g-klasse på Hvidovre Gymnasium og HF.

Endvidere indgår Den Antropologiske Teori om det Didaktiske som den teoretiske ramme for specialet, og desuden er en epistemologisk referencemodel udviklet for at muliggøre et studie af den planlagte og den realiserede didaktiske proces, som præciseres i en a priori og a posteriori analyse. På baggrund af de to analyser belyses de didaktiske begrænsninger, udfordringer og muligheder, som eksisterer i forbindelse med undervisning i det bestemte integral.

Det er vanskeligt at fremsætte en entydig konklusion, men udførelsen af det designede undervisningsforløb viste, at det er en udfordring at få den topologiske matematiske organisation indeholdende spørgsmål omkring definitionen og eksistens af det bestemte integral til at leve. Samtidig tydeliggjorde den realiserede didaktiske proces, at det var svært at få elevarbejdet med teknologiske-teoretiske spørgsmål til at fungere i praksis. Afslutningsvist indeholder specialet en diskussion af en række overvejelser vedrørende en fremtidig gentagelse af planlægning og udførelse af et lignende undervisningsforløb.

2. Abstract

This thesis is written on the subject of Mathematical Didactics. The main purpose is an examination of the question, whether a more specific approach to ‘the definite integral’ can be introduced to a Danish High School class, particularly whether the topological questions concerning the definite integral can be part of the subject. The thesis consists of a theoretical presentation of the definite integral and it is described how the subject is introduced in contemporary educational high school text books. In continuation of this, the thesis consists of an educational programme and the empiric part is based on the execution of this in a second year high school class on Hvidovre Gymnasium and HF**.**

Furthermore the anthropological theory of didactic forms part of the theological framework of the thesis and in addition to this an epistemological reference model has

been developed to enable a study of the planned and the implemented didactical process which is clarified in an ‘a priori’ and an ‘a posteriori’ analysis. In view of the two analyses the didactical limitations, challenges and possibilities, that exist in relation to teaching ‘the definite integral’ are highlighted.

It is difficult to put forward an unambiguous conclusion, but the execution of the educational programme proved that it is a challenge to get the topological mathematical organisation containing questions about the definition and existents of the definite integral to exist. At the same time the didactical process made it clear that it was difficult to get the students’ work about the technological-theoretical questions to function in practice. The thesis concludes with a discussion concerning considerations relating to a potential future repetition of the designed student programme.

3. Introduktion

Den matematikundervisning, som i dag gør sig gældende i de danske gymnasier består specielt af emner inden for matematisk analyse, der blandt andet beskæftiger sig med integralregningsteori og herunder det bestemte integral. Undervisningen i det bestemte integral fokuserer på bestemmelsen af det bestemte integral af en given funktion, og der præsenteres en tydelig forbindelse mellem det bestemte integral og arealet under grafen for funktionen, og i forlængelse af dette får elever ofte den opfattelse, at det er arealet af en punktmængde under grafen for en funktion, som giver mening til det bestemte integral. Motivationen bag dette speciale er den til tider upræcise tilgang til det bestemte integral, og det det virker mere naturligt først at give mening til det bestemte integral af en funktion f fra a til b, dvs. symbolet $\int_a^b f(x)\,dx$, og undersøge om det findes, førend det bestemmes. Der er bestemt en udfordring knyttet til dette, da eksempelvis det bestemte integral defineres på forskellige måder inden for den akademiske matematik og desuden er teorien omkring det bestemte integral tæt knyttet til eksempelvis begreber som grænseværdi og kontinuitet – teoretiske begreber, som i dag kun indgår i form af upræcise formuleringer i gymnasiets matematikundervisning. Jeg fandt det alligevel interessant, at undersøge om det var muligt at konstruere et undervisningsforløb, som kunne få spørgsmålet omkring definition og eksistens af det bestemte integral til at leve i en undervisningssituation.

I det følgende vil teorien om det bestemte integral blive præsenteret samt den antropologiske teori for didaktik, og jeg vil ligeledes udvikle en epistemologisk referencemodel. Dette skal danne grundlag for udarbejdelsen og planlægningen af et undervisningsforløb, som efterfølgende skal udføres i en 2.g-klasse. Der udarbejdes en a priori analyse samt en a posteriori analyse af designet, og afslutningsvist følger der en diskussion af, hvilke overvejelser jeg ville gøre mig i forbindelse med en eventuel gentagelse af designet og dets udførelse.

4. Den teoretiske ramme

I dette afsnit følger en kort præsentation af teorien om didaktisk transposition, hvorefter hovedelementerne i Den Antropologiske Teori om det Didaktiske (i det følgende blot ATD) vil blive fremsat. Dette afsnit vil således danne det teoretiske grundlag for dette speciale og specielt for a priori analysen af det designede undervisningsforløb samt a posteriori analysen af den efterfølgende udførelse.

4.1 Teorien om den didaktiske transposition

I 1980 gav Yves Chevallard sit første kursus omhandlende den didaktiske transposition, og hvad man senere skulle se var, at dette begreb blev spiren til en ny matematik-didaktisk teori. Med ordet transposition menes en proces, hvorigennem viden bevæger sig mellem institutioner, herunder hvordan denne viden tilpasses den modtagne institution. Processen starter med en udvælgelse af en viden, som eksisterer i institutioner uden for skolen, hvorefter denne viden gennemgår en redigerings- og tilpasningsproces, som muliggør, at den kan blive genstand for undervisning (Bosch, M. og Gascón, J., 2006).

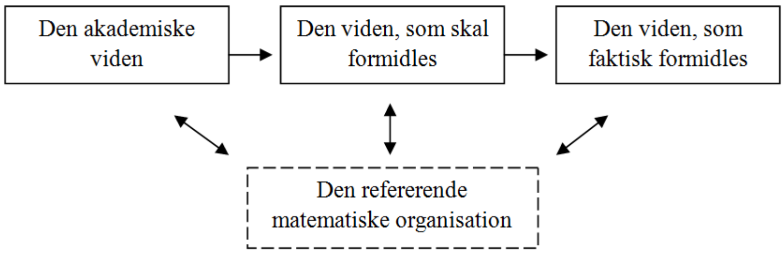
I teorien om didaktisk transposition skelnes der mellem (1) den originale akademiske matematiske viden (benævnes også den ”scholarly” matematiske viden), (2) den viden, som skal formidles, (3) den viden, som bliver formidlet af læreren og (4) den lærte matematiske viden. Den akademiske matematiske viden produceres primært af matematikere og tilhører universitets- og forskningsmiljøet, hvorimod den viden, som skal formidles tilhører uddannelsesinstitutioner, og hovedsageligt er denne viden bestemt jf. bekendtgørelser. Eksempelvis findes kernestoffet samt de faglige mål for Matematik B i Bekendtgørelsen om uddannelsen til studentereksamen (bilag 11), hvori følgende nævnes i forbindelse med integralregning:

- *stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, anvendelse af integralregning til arealberegning af punktmængder begrænset af grafer for ikke-negative funktioner* (kernestof).
- *Anvende differentialkvotient og stamfunktion for simple funktioner og fortolke forskellige repræsentationer af disse* (fagligt mål).

Bekendtgørelsen om uddannelsen til studentereksamen indeholder en del frihed, og en lærer kan (og bør) dermed være medbestemmende til, hvad en specifik type viden skal indeholde. Oftest vil læreren inddrage eksamensopgaver, lærebøger samt vejledningen til den givne læreplan i udvælgelsen af den viden, som der skal undervises i.

Den viden, som formidles af læreren kan observeres i en given undervisningssituation i et klasserum og den lærte viden, er den viden, som eleverne (efter et undervisningsforløb) er i stand til at anvende, formulere og videregive. Denne viden er naturligvis svær at identificere og specificere – både for læreren og eleverne.

For at kunne foretage en analyse af et givent didaktisk problem er det ifølge teorien essentielt at inddrage hver af de enkelte institutioner. For at blive i stand til at forstå den matematik, som der arbejdes med i skolen (i forbindelse med dette speciale *gymnasiet*) omkring et givent emne, er det eksempelvis nødvendigt at betragte den akademiske matematiske viden (som ofte tages for givet i uddannelsesinstitutioner), da denne til dels motiverer og retfærdiggør arbejdet med emnet. Hver af disse institutioner vil kunne besvare de spørgsmål, som rejser sig i forbindelse med en analyse af en læringsproces, eksempelvis følgende: Hvad er det bestemte integral? Hvordan fremsættes det i undervisningssammenhænge, og hvilke essentielle pointer eksisterer der i forbindelse med dette emne? Ifølge teorien bør forskere arbejde uafhængigt af deres tilhørende institution, og de bør være kritiske over for de enkelte institutioners svar. For at opnå dette foreslår teorien, at der udvikles en epistemologisk referencemodel på basis af data fra de enkelte institutioner.



Figur 1: Den didaktiske transpositionsproces

Den didaktiske transposition formulerede på denne måde et behov for at betragte denne ”videns-proces” med et flertal af aktører, og denne betragtning blev anset som et vigtigt led i forsøget på at forstå det, som gøres i en undervisningssituation. I forbindelse med denne teori om didaktisk transposition begyndte man som noget nyt at inddrage empiri fra virkeligheden, hvilket medførte en ny antropologisk tilgang til undervisningsproblemer i matematik: Den Antropologiske Teori om det Didaktiske (Bosch og Gascón, 2006).

4.2 Den Antropologiske Teori om det Didaktiske

Den Antropologiske Teori om det Didaktiske indeholder værktøjer til blandt andet at analysere og beskrive matematisk viden samt underviseres og elevers praksis, og teorien er dermed væsentlig at behandle i forbindelse med dette speciale. ATD anser matematik som en menneskelig aktivitet, gennem hvilken problembaserede opgaver studeres, og i forlængelse af dette identificeres der to aspekter af en matematisk aktivitet: en matematisk konstruktionsproces og resultatet af denne.

Et centralt begreb i ATD er *en matematisk praxeologisk organisation* (i det videre blot matematisk organisation). I forbindelse med en problembaseret opgave, kræves en anvendelse af en teknik, og oftest vil en given teknik kunne benyttes til at løse en gruppe af opgaver, som alle er af samme type. En opgavetype T er således defineret som en familie af opgaver, som alle løses ved en given teknik τ. Ikke alle teknikker er lette at karakterisere (hvilket jeg vender tilbage til i forbindelse med den epistemologisk referencemodel), beskrive og vise til andre, men ifølge ATD vil enhver problembaseret opgave kræve eksistensen af en teknik, som dog ikke altid er entydigt bestemt (eksempelvis findes der forskellige teknikker til at gennemføre et bevis). Parret T (, τ) danner en praktisk blok, som er den ene af de to dimensioner som en matematisk aktivitet består af. Den anden dimension, en teoretisk blok, har til opgave at beskrive, forklare og retfærdiggøre det, som gøres i forbindelse med en matematisk aktivitet. Den teoretiske blok består af en teknologi, som kan forklare og retfærdiggøre anvendelsen og valget af en given teknik og desuden benyttes til at skelne mellem en række teknikker. Teknologierne er på samme måde forklaret og retfærdiggjort ved brug af en given teori, og til sammen danner en teknologi θ og en teori Θ en teoretisk blok (θ, Θ). Til en matematisk aktivitet er der således knyttet en praktisk og en teoretisk blok, og tilsammen danner disse to blokke en matematisk organisation $(\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta)$. Dermed vil et møde med en opgave give anledning til udviklingen af matematiske organisationer, som derved kan opfattes som et resultat af en dynamisk aktivitet.

I forbindelse med en analyse af en didaktisk transpositionsproces, herunder elevers viden om et givent matematisk emne, er det vigtigt at bemærke at de matematiske organisationer kan klassificeres som værende punktuelle, lokale, regionale eller globale.

En organisation kaldes punktuel, hvis opbygningen af denne sker med udgangspunkt i en specifik opgavetype, eksempelvis: ”$\mathrm{T_x}$: *Bestem det bestemte integral af en given funktion*”. Forskellige opgavetyper kan derfor medføre, at flere punktuelle matematiske organisationer (med hver deres tilhørende teknik, der karakteriserer opgavetypen) kan dannes, og hvis en familie af disse punktuelle organisationer deler samme teknologi vil familien da danne en lokal organisation. En punktuel matematisk organisation kan naturligvis godt placeres i forskellige lokale organisationer, da man kan sammenkoble lokale organisationer på forskellige måder (dvs. ved brug af forskellige teknologier).

Hvis en familie af lokale organisationer deler samme teori, som kan forklare og beskrive de forskellige indgående teknologier, kaldes denne familie for en regional organisation, og igen vil en lokal organisation kunne indgå i forskellige regionale organisationer, da en given teknologi (tilhørende en lokal organisation) muligvis kan beskrives ved hjælp af andre teorier. En samling af de regionale organisationer vil, er det sidste som kan opnås, og en sådan kaldes en global matematisk organisation.

4.3 Didaktiske organisationer og faserne i den didaktiske proces

I det forrige blev det beskrevet, hvad en matematisk organisation består af, og i det følgende vil jeg kort beskrive, hvordan en sådan organisation udvikles eller dannes. Som tidligere nævnt er der til en matematisk aktivitet knyttet to aspekter: en matematisk konstruktionsproces, som kaldes den didaktiske proces og resultatet af konstruktionen, svarer til en eller flere af de før beskrevne matematiske organisationer. Den didaktiske proces er tilsvarende en menneskelig aktivitet, og denne kan beskrives ved hjælp af såkaldte *didaktiske praxeologiske organisationer*.

"En didaktisk praxeologi benyttes når en person eller en gruppe af personer ønsker at have mulighed for selv at opnå en tilsigtet MO (matematikerens eller den studerendes didaktiske praxeologi) eller hjælpe andre med det." (Barbé et al., 2005, p. 239).

En didaktisk praxeologi indeholder ligeledes en praktisk og en teoretisk blok, og de didaktiske opgaver tilhørende den praktiske blok vil ofte bestå i at udvikle en given matematisk organisation gennem en undervisningssituation, og de didaktiske teknikker vil være de 'redskaber' som læreren benytter, og det som læreren gør. En teknik kunne være lærerens udvælgelse eller konstruktion af opgaver (som leder frem mod den ønskede matematiske organisation), eller lærerens inddragelse af allerede etableret matematisk viden i forbindelse med undervisningssituationen. Teknologierne vil være former for diskurser som læreren benytter over for eleverne, hvilket vil sige måden, hvorpå eksempelvis et lærergennemgået eksempel bliver anvendt og præsenteret. En didaktisk teori har samme funktion som en teori i forbindelse med en matematisk organisation, nemlig at kunne forklare, relatere og retfærdiggøre den anvendte teknologi.

Den didaktiske proces kan karakteriseres ved seks faser, som ikke nødvendigvis indtræffer i en given rækkefølge, og de vil variere i forhold til kvalitet og kvantitet, men som det nævnes af Barbé et. al. "*har de alle en specifik funktion at udfylde, som er afgørende for en succesfuld fuldstændiggørelse af den didaktiske proces."* (Barbé et. al., 2005, p. 238).

Den første fase kaldes *det første møde*, hvor eleven møder den matematiske organisation og det objekt, som skal studeres. Der er ikke en entydig måde at møde objektet på, men oftest vil det være i form af en opgavetype og/eller en problemstilling, som tilhører den matematiske organisation. Det første møde kan godt bestå af en mængde af opgaver og problemstillinger og oftest vil det første møde indeholde motivationen bag udviklingen af en tilsigtet matematisk organisation. I den efterfølgende *udforskningsfase* udvikles der en eller flere umiddelbare anvendelig teknikker til at løse de givne opgavetyper, der er indeholdt i den matematiske organisation, som betragtes. Den tredje didaktiske fase er den *teknologiske-teoretiske fase*, som består i, at eleven forsøger at udvikle et teknologisk-teoretisk miljø i hvilket teknikkerne kan begrundes og beskrives, og dermed skabes der i denne fase elementer tilhørende den teoretiske blok. Den fjerde fase betegnes den tekniske fase, gennem hvilken eleven udvikler, forfiner, forbedre og effektivisere den umiddelbare teknik, hvilket kan ske ved at teknikken afprøves på nye opgaver og øvelser. Institutionaliseringsfasen er den femte fase, hvori resultatet – den matematiske organisation – identificeres og defineres, og det klarlægges, hvilke elementer fra de forrige faser, der tilhører den matematiske organisation og ikke kun processen som skabte den. Den afsluttende fase, evalueringsfasen, er tæt knyttet til institutionaliseringsfasen, da evalueringsfasens mål blandt andet er at undersøge om den givne MO (defineret i institutionaliseringsfasen) er blevet etableret. Desuden indeholder evalueringsfasen en analyse af værdien af den opnåede viden samt en kritisk vurdering af de udviklede teknikker. Det bør afslutningsvist bemærkes, at der mellem flere af faserne er en meget tæt tilknytning og i visse situationer et samspil, og desuden vil måden, hvorpå en fase udføres naturligvis variere.

4.4 Bestemmelsesniveauer

Som tidligere nævnt indgår den viden, som skal formidles som en af de fire videnstyper i den didaktiske transposition. Ønsket er, at denne viden skal etableres som lært viden hos eleverne, og Chevallard understreger, ”*at det som kan ske, hovedsageligt er bestemt ved betingelser og begrænsninger, som ikke kan reduceres til de umiddelbare identificerbare betingelser og begrænsninger i klasserummet (…).”* (Bosch og Gascón, 2006, p. 60). Chevallard præsenterer en bestemmelsesniveauskala, som gør det muligt at se den viden der skal undervises i, i et større perspektiv. Formålet med skalaen er at blive i stand til at identificere henholdsvis objektet for en undervisningssituation samt de vilkår og faktorer, som befinder sig uden for klasserummet, men som stadig er med til at definere den viden, som er genstand for undervisningen.

Civilisation ⇔
Society ⇔
School ⇔
Pedagogy ⇔
Discipline ⇔
Domain ⇔
Sector ⇔
Theme ⇔
Subject

Figur 2: Bestemmelsesniveauskala

I forbindelse med dette speciale, er den *skole*, som betragtes den danske gymnasieskole, *disciplinen* er matematik, *domænet* er matematisk analyse, *sektoren* er integralregning, *temaet* er det bestemte integral, og de to overordnede *emner,* som jeg senere vil uddybe, er definition og eksistens af det bestemte integral samt eksakt værdi af det bestemte integral. I forlængelse af dette skal det bemærkes, *"at punktuelle, lokale, regionale og globale organisationer vil svare til underniveauerne af emnet, temaet, sektoren og domænet."* (Bosch og Gascón, 2006, p. 61). Oftest har en gymnasielærer kun indflydelse på niveauerne tema og emne, idet disciplinen, domænet og sektoren er bestemt af videnskabs- og uddannelsesinstitutioner. Disse ydre faktorer bevirker, at der eksisterer nogle begrænsninger i forhold til lærerens praksis, eksempelvis vil en lærer ofte have svært ved at begrunde, hvorfor et emne gøres til genstand for undervisning, da motivationen og meningen omkring en matematisk viden ofte tilhører et af de højere institutionelle niveauer.

5. Problemformulering

Det bestemte integral har siden 1935 været en del af pensum for matematikundervisningen i gymnasieskolen og er det stadig i dag, men præsentationen af denne teori har langt fra været den samme gennem denne periode. En detaljeret læsning af periodens gymnasielærebøger afslører, at den "topologiske" dimension af det bestemte integral, blandt andet indeholdende spørgsmål omkring definition og eksistens, har været betydelig mere fremtrædende i begyndelsen af 1960'erne, end den er i dag. Det er interessant at overveje, *hvilke mulige grunde, som ligger bag denne nedtoning af den topologiske dimension af det bestemte integral, og om den bør eksistere i undervisningssammenhæng på gymnasielt niveau?*

Det virker langt fra tilfredsstillende at begrænse gymnasieundervisningen til (overordnet set) at omhandle "algebraen for det bestemte integral", som indeholder spørgsmålet omkring, hvordan det bestemte integral bestemmes, da det i princippet virker unaturligt at bestemme ’noget’, før man ved om det findes. Det undrer mig derfor, hvorfor der i gymnasieskolens matematikundervisning ikke lægges op til inddragelsen og udviklingen af en matematisk organisation, som netop omhandler definitionen og eksistensen af det bestemte integral. I forlængelse af dette er det værd at bemærke, at den ”definition” af det bestemte integral, som oftest præsenteres i de nutidige lærebøger langt fra er tilfredsstillende set fra et mere akademisk synspunkt.

Jeg vil i dette speciale derfor designe et undervisningsforløb og observere udførelsen af dette med det formål at undersøge, om *det er muligt at give elever en mere præcis tilgang til spørgsmålet vedrørende definition og eksistens af det bestemte integral samt, hvilke didaktiske muligheder, begrænsninger og udfordringer, der eksisterer i forbindelse med undervisning i det bestemte integral*.

Endvidere vil følgende spørgsmål blive behandlet på baggrund af det empiriske data:

(1) Hvilke dele af den didaktiske proces er vanskelige at få til at fungere i praksis?
(2) Hvilke principielle fejl iagttages hos eleverne?
(3) Er det muligt at etablere den matematiske organisation omhandlende den topologiske dimension (eller dele af denne) hos eleverne, samt forbindelsen til den matematiske organisation omhandlende den algebraiske dimension?

6. Den akademiske matematiske integrationsteori

Formålet med dette afsnit er at give en kort præsentation af den akademiske matematiske viden omkring det bestemte integral herunder definition af det bestemte integral samt essentielle matematiske resultater, hvilket vil danne det teoretiske grundlag for designet af det efterfølgende undervisningsforløb. Som nævnt tidligere defineres det bestemte integral på forskellige måder inden for akademisk matematik, og jeg vil blot præsentere to af disse, da en fyldestgørende teoretisk analyse ikke er relevant i forhold til dette speciale.

Igennem 1800-tallet og en stor del af 1900-tallet blev integrationsteori anset som genstanden for det modsatte af differentiation, og det var på baggrund af denne forståelse, at mange af de matematikere, som var grundlæggere af kalkulus, heriblandt Newton, Leibniz og Fermat, arbejdede med sammenhængen mellem stamfunktioner og arealbestemmelsesproblemet. Definitionen af integration som den inverse operation til differentiation resulterede i, at kun et meget begrænset antal funktioner kunne integreres, og det var derfor et interesseret studie af integration Cauchy, og senere Bernhard Riemann, begyndte i 1850, hvor udgangspunktet var et areal under en kurve, og denne tilgang viste sig at give anledning til opbygningen af en stringent definition af integralet (Abbott, S., 2001).

I det følgende fremsættes en kort præsentation af teorien omkring integralregning, og indledningsvist præsenteres den måde, hvorpå den franske matematiker Gaston Darboux (1842-1917) definerede integralet. Herefter fremsættes det alternative definitionsforslag som blev givet af den tyske matematiker Bernhard Riemann (1826-1866), og det skal bemærkes, at det er primært er den akademiske bog 'Kalkulus' af Tom Lindstrøm, som danner grundlaget for dette afsnit.

6.1 Darboux-integralet

For at præsentere Darboux' definition af det bestemte integral, kræves en række definitioner, der indledningsvist fremsættes, og afslutningsvist vil Analysens fundamentalsætning og Riemanns definition af det bestemte integral angives.

Definition: En inddeling af intervallet $[a, b]$ er en endelig mængde $I = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ så

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Ved en sådan inddeling af intervallet $[a, b]$ fås n delintervaller:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Lad funktionen f være begrænset på et lukket interval $[a, b]$, og sæt for hvert delinterval $[x_{i-1}, x_i]$, da defineres følgende:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Undersummen for f med hensyn til en inddeling $I = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ af intervallet $[a, b]$ er givet ved:

$$U(I) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Oversummen for f med hensyn til I er givet ved:

$$O(I) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Bemærk at der for forskellige inddelinger af intervallet $[a, b]$ gælder, at $O(I) \geq U(I)$.

Intuitivt giver det mening, at en given oversum vil være et overestimat for værdien af integralet, og at en given undersum vil være et underestimat, samt at en finere inddeling vil resultere i, at oversummerne vil blive mindre, og undersummerne vil blive større. Man kan derved forstå en funktion som værende integrabel, hvis under- og oversummerne mødes i en fælles værdi. I stedet for at betragte grænseværdierne for disse summer, betragtes komplethedsaksiomet i forbindelse med Darboux-integralet, og dette giver anledning til at definere infimum for oversummerne og supremum for undersummerne.

Definition: Lad Π være samlingen af alle mulige inddelinger af intervallet $[a, b]$. Det øvre integral af f defineres da ved

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf\{O(I) : I \in \Pi\}$$

Og det nedre integral af f defineres ved

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup\{\,U(I) : I \in \Pi\}$$

Integralet af f kan nu defineres som den fælles værdi for det nedre og øvre integral.

Definition: En begrænset funktion f defineret på et interval $[a, b]$ er integrabel, hvis

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx},$$

og integralet $\int_a^b f(x)dx$ defineres da ved

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx}.$$

Sætning: Enhver monoton funktion er integrabel.

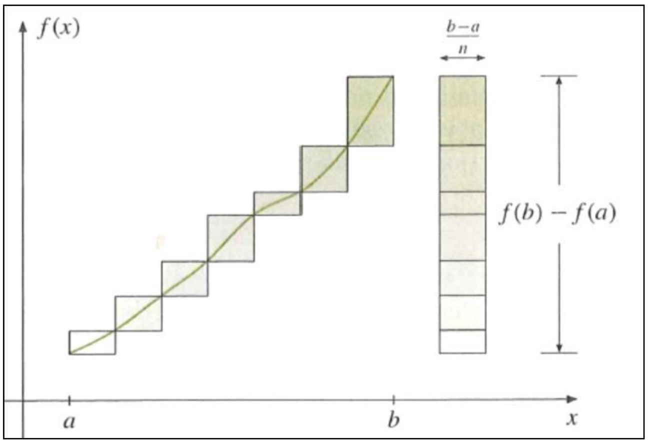
Beviset[1] udføres ved at antage, at $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ er voksende og lade I være en inddeling, som deler intervallet $[a, b]$ i n lige lange delintervaller af længde $\frac{b-a}{n}$. Herefter indses ved et kort regnestykke, at $O(I) - U(I) = [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n}$, og dermed vil

$$O(I) - U(I) < \varepsilon$$

[1] Der henvises til Lindstrøm, T., 2006, p. 368 for et komplet bevis

når n vokser.

At differensen mellem over- og undersummen kan reduceres til $[f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n}$ kan ligeledes indses ved hjælp af nedenstående figur 3.



Figur 3: Illustration til beviset for at enhver monoton funktion er integrabel (Lindstrøm, T., 2006)

Visse funktioner er ikke integrable, og visse områder kan ikke måles, og vi må acceptere, at det ikke er muligt at finde et fornuftigt arealbegreb, som omfatter alle mængder. Et eksempel på en funktion, som ikke er integrabel jf. ovenstående definition, er funktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & når\ x\ er\ rational \\ 1, & når\ x\ er\ irrational \end{cases}$$

Da ethvert åbent interval (a, b), hvor $a < b$, indeholder både rationale og irrationale tal, vil ethvert delinterval af [0,1] naturligvis indeholde både rationale og irrationale tal, og det betyder at $M_i = 1$ og $m_i = 0$ selv for et meget lille delinterval $[x_{i-1}, x_i]$. Oversummen og undersummen vil da blive hhv. 1 og 0, for alle inddelinger I af intervallet [0,1]:

$$O(I) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

$$N(I) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

Dette medfører, at $\overline{\int_0^1 f(x)dx} = 1$ og $\underline{\int_a^b f(x)dx} = 0$, og dermed er f ikke integrabel på [0,1] jf. definitionen.

6.2 Analysens fundamentalsætning

Før analysens fundamentalsætning præsenteres, bemærkes følgende: En funktion F kaldes for en stamfunktion til f på intervallet $[a, b]$, hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$ og F er kontinuert i a og b.

Lemma: Lad F og G være to stamfunktioner til f på intervallet $[a, b]$. Da findes en konstant k så

$$F(x) = G(x) + k$$

for alle $x \in [a, b]$.

Integralet blev tidligere defineret ved hjælp af suprema og infima for endelige summer, og dermed er den afledte og integralet defineret uafhængigt af hinanden, men der eksisterer et bemærkelsesværdigt inverst forhold mellem differentiation og integration, hvilket fremsættes i Analysens fundamentalsætning. Analysens fundamentalsætning formuleres i to påstande, hvoraf den første er af teoretisk art, og den anden er en mere beregningsmæssig påstand.

Sætning - Analysens fundamentalsætning:

i. Hvis f, defineret på intervallet $[a, b]$, er kontinuert, så har f en stamfunktion på $[a, b]$, og da vil f være integrabel på $[a, b]$.
ii. Hvis F opfylder at $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$ (dvs. F er stamfunktion til f) så gælder $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

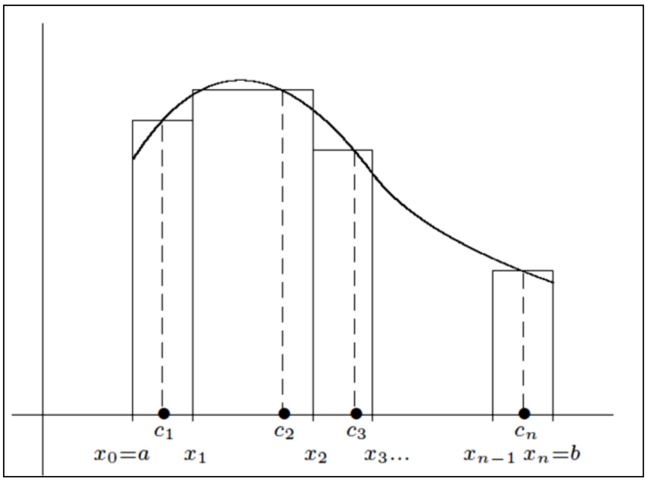
6.3 Riemann-integralet

Som nævnt i indledningen gav Bernhard Riemann en alternativ definition, som har vist sig at være lettere at anvende i mange teoretiske og praktiske problemer. Der gives en det følgende en række definitioner, som er nødvendige for at kunne præsentere ideen bag Riemanns definition.

Definition: Givet en funktion f, en inddeling $I = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ og et udvalg $U = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, hvor $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ defineres Riemann-summen til

$$R(I, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Riemann-summen angiver således en sum af arealer til en samling rektangler.



Figur 4: En Riemann-sum

Til en inddeling I, defineres den maksimale delintervallængde som det følgende:

$$|I| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$$

Definition: Funktionen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ er *Riemann-integrabel*, hvis der findes et tal α så

$$\lim_{n\to\infty} R(I_n, U_n) = \alpha$$

for alle følger $\{I_n, U_n\}$ af inddelinger og udvalg så $|I_n| \to 0$. Denne fælles værdi α kaldes Riemann-integralet til f over $[a, b]$.

Ideen bag den førnævnte definition er, at når den maksimale delintervallængde går mod 0, så vil alle Riemann-summerne nærme sig en fælles grænseværdi, som netop er værdien af integralet.

6.4 Ækvivalens af Darboux- og Riemann-integralet

Det viser sig, at definitionen givet af Darboux' er ækvivalent til definitionen fremført af Riemann, og at de dermed udtrykker det samme, hvilket fremsættes i følgende sætning, som desuden leder frem til et efterfølgende korollar.

Sætning[2]: Darboux- og Riemann-integralet er det samme; en funktion er Darboux-integrabel, hvis og kun hvis den er Riemann-integrabel, og værdien af de to integraler er altid den samme.

Korollar: Antag at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge af inddelinger og udvalg så $|\Pi_n| \to 0$. Da er

[2] Der henvises til Lindstøm, T., 2006, p. 392-395 for et bevis for ækvivalensen af Darboux' og Riemmans definitioner.

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dette korollar kan benyttes når integralregningen ønskes anvendt i forbindelse med beregning af forskellige størrelser, da det siger, at hvis en sådan størrelse kan skrives som en grænse af Riemann-summer, da vil størrelsen være lig integralet.

6.5 Anvendelse af integralet: Arealberegning

Der er til integralregningen knyttet en række anvendelser, og specielt er anvendelsen i forbindelse med arealbestemmelse interessant i forhold til dette speciale, og et af hovedresultaterne er det følgende:

Sætning: Hvis f er en integrabel funktion, så $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$, så er arealet begrænset af grafen til f, x-aksen og de to lodrette linjer $x = a$ og $x = b$ givet ved

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Hvis $f(x) \leq 0$ for alle $x \in [a, b]$, så er arealet i stedet

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Arealet afgrænset af graferne til to integrable funktioner $f(x) \geq g(x)$ og de to lodrette linjer $x = a$ og $x = b$ er givet ved

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Det er vigtigt at pointere, at det bestemte integral således tillægger arealet af en vilkårlig punktmængde en mening. I forbindelse med egenskaber ved integralet og integrationsteknikker henvises der til Lindstrøm, T., 2006, kapitel 9, p. 429.

7. Den matematiske viden, som skal formidles

I det følgende vil jeg vende blikket fra den akademiske fremstilling til den fremstilling af det bestemte integral, som findes i undervisningsmæssigsammenhæng.

Jeg vil på baggrund af en række gymnasielærebøger redegøre for, hvordan det bestemte integral præsenteres i forskellige gymnasielærebøger. De tidligst udgivne lærebøger, som jeg har inddraget er 'matematik 2' af Kristensen og Rindung fra 1969 og 'Elementær matematik II', af Fenchel, W. et al. fra 1967, og vil begynde dette afsnit med en gennemgang af, hvordan disse lærebøger behandler og fremsætter integralregningsteorien.

7.1 Undervisning i det bestemte integral i 1960'erne

I lærebøgerne 'matematik 2' (Kristensen og Rindung) og 'Elementær matematik II' (Fenchel, W. et al.) indføres det bestemte integral for en funktion f fra a til b ved hjælp af supremum for undersummerne og infimum for oversummerne. Kristensen og Rindung definerer, for en begrænset funktion f i intervallet $[a, b]$, $\mathcal{U}$ og $\mathcal{O}$ som mængden af de tal, der er henholdsvis undersummer og oversummer for f og skriver, at f er *integrabel* i intervallet $[a, b]$, hvis det gælder, at $\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}$ (Kristensen og Rindung, 1969, p. 154). Endvidere fremsættes følgende resultat i begge lærebøger:

Sætning: En funktion f er da og kun da integrabel i intervallet $[a, b]$, når der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en undersum s og en oversum S, så $S - s < \varepsilon$ (Kristensen og Rindung, 1969, p. 154).

Desuden indføres integralet fra a til b af en funktion f på følgende måde: Hvis f er integrabel i intervallet $[a, b]$, betegnes den fælles værdi af $\sup \mathcal{U}$ og $\inf \mathcal{O}$ med $\int_a^b f(x)dx$. I begge bøger behandles herefter integrabilitet for kontinuerte funktioner samt integrationsreglerne.

Sammenhængen mellem det bestemte integral og et givent areal inddrages naturligvis også i begge lærebøger, og indgår i forbindelse med anvendelser af integralregningen. I lærebogen Elementær Matematik II behandles spørgsmålet omkring arealbegrebet for en vilkårlig punktmængde, for hvilken det ydre og indre areal defineres, og følgende sætning omkring eksistensen af et areal for en begrænset punktmængde gives:

Sætning: En begrænset punktmængde $M \neq \emptyset$ har et areal, hvis og kun hvis der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et ydre triangulerbart område $\overline{P}$ og et indre triangulerbart område $\underline{P}$ for M således, at $\alpha(\overline{P}) - \alpha(\underline{P}) < \varepsilon$.

Kristensen og Rindung indleder derimod kapitlet om integralregning ved at betragte en række indledende problemer, herunder spørgsmålet vedrørende arealberegning. For en plan punktmængde $\mathcal{P}$ defineres en ydre og en indre polygon, P_y og P_i, så $P_i \subseteq \mathcal{P} \subseteq P_y$, og med $A(P)$ betegnes arealet af en vilkårlig polygon P, og følgende fremsættes:

$$A(P_i) \leq A(\mathcal{P}) \leq A(P_y).$$

Afslutningsvist kommenteres det, at *en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at* $\mathcal{P}$ *har et areal, er, at der for ethvert* $\varepsilon > 0$ *findes en indre polygon* P_i *og en ydre polygon* P_y*, så* $A(P_y) - A(P_i) < \varepsilon$ (Kristensen og Rindung, 1969, p. 150).

Der betragtes herefter en vilkårlig funktion f, og en vilkårlig inddeling I af intervallet $[a, b]$, så $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Funktionen f er begrænset i ethvert interval $[x_i, x_{i+1}]$, og der kan bestemmes to tal g_i og G_i så $\forall x \in [a, b]: 0 \le g_i \le f(x) \le G_i$. Herefter angives $s = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x_{i+1} - x_i)$ og $S = \sum_{i=0}^{n-1} G_i(x_{i+1} - x_i)$, hvorefter det afslutningsvist kommenteres, at hvis man til ethvert $\varepsilon > 0$ kan bestemme s og S, så $S - s < \varepsilon$, har punktmængden $\mathcal{P}$ et areal.

Efterfølgende præsenteres teorien omkring summer, integrable funktioner og tilhørende sætninger, integrabilitet, integral og stamfunktion samt regneregler for integration, og der vendes afslutningsvist tilbage til spørgsmålet omkring arealbestemmelse i kapitlet om anvendelser af integralregningen.

Det skal således bemærkes at begge lærebøger antyder, at der er problem omkring bestemmelsen af et areal af visse plane figurer, og at studiet af bestemte typer af summer er interessant i forbindelse med dette. Desuden bemærkes det, at arealet på forhånd ikke eksisterer, og der tages eksplicit højde for eksistensen af dette (Kristensen og Rindung, 1969, p. 151). Afslutningsvist skal det nævnes, at definition og eksistens af det bestemte integral (integrabilitet) går forud for sammenhængen mellem integral og stamfunktion, og derved også forud for bestemmelse af det bestemte integral.

7.2 Undervisning i det bestemte integral i dag

Teorien omkring det bestemte integral viser sig i de nutidige lærebøger at være meget anderledes, både i form af notation, begreber og teoretiske definitioner og resultater. Den primære indledende bemærkning i de nutidige lærebøger er, at man kan bestemme arealer ved hjælp af stamfunktioner, og samtlige af de lærebøger jeg har benyttet betragter en ikke-negativ kontinuert funktion f på et interval $[a, b]$ (en af bøgerne benytter ikke begrebet kontinuert, men skriver at *en funktion hvis graf er sammenhængende i et interval* $[a, b]$ betragtes). Herefter præsenteres problemet/opgaven, nemlig at bestemme arealet af den figur, der begrænses af x-aksen, grafen for f og linjerne $x = a$ og $x = b$.

Ingen af lærebøgerne inddrager det centrale spørgsmål om et sådan område har et areal, og fælles for de fleste lærebøger er, at arealfunktionen $A(x)$ for en kontinuert ikke-negativ funktion f på et interval $[a, b]$, hvor x er et tal mellem a og b indføres på følgende måde*:*

$A(x) \ = \ arealet\ af\ området\ mellem\ grafen\ for\ f\ og\ x$*-aksen i intervallet* $[a; x]$. (Carstensen, et. al., 2008, p.34).

Langt de fleste lærebøger vælger i forlængelse af dette at angive de to sætninger og definitionen, som er anført nedenfor:

Sætning: Hvis f er en kontinuert og ikke-negativ funktion i intervallet $[a, b]$, er arealfunktionen A differentiabel med den afledede funktion f, dvs. $A'(x) = f(x)$, eller med andre ord: A er en stamfunktion til f.

Sætning: Hvis f er en kontinuert og ikke-negativ funktion i intervallet $[a, b]$, er arealet A af det område, der begrænses af grafen, x-aksen og linjerne $x = a$ og $x = b$ givet ved $A = F(b) - F(a)$, hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f.

Definition: Lad f være kontinuert i intervallet $[a, b]$ med stamfunktionen F. Ved det bestemte integral af f fra a til b forstås tallet $F(b) - F(a)$, og vi skriver

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Afslutningsvist fremsætter bøgerne sætninger omkring regnereglerne for bestemte integraler, integration ved substitution samt indskudsreglen, og angiver en række tilhørende eksempler.

Det skal bemærkes, at et par lærebøger inddrager et kapitel omkring summer, hvoraf nogle er mere omfattende end andre. I lærebogen 'MAT A3' indgår det bestemte integral i Kapitel 2, 'Areal og bestemt integral', hvor det følgende indgår i kapitlets indledning: *Desuden finder integralregning anvendelse ved bestemmelse af fænomener, der er resultater af summer af (uendelig) mange små dele. Ordet 'integration' betyder netop 'sammenfatning' eller sammenlægning* (Carstensen et. al., 2008, p.32). Teorien omkring summer indgår herefter som det sidste delkapitel, hvor det nævnes, at det bestemte integral kan fås frem som en grænseværdi for summer af funktionsværdier. Bogen betragter det samlede areal af n rektangler, og når frem til følgende påstand $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)dx \approx \int_a^b f(x)dx$.

Endnu en lærebog, som behandler summer, er lærebogen 'MAT 3H' fra 1999, som giver en lidt mere præcis forklaring ved hjælp af over- og undersummer, og i forbindelse med disse summer gives følgende definition:

Definition: Lad f være en ikke-negativ funktion i $[a, b]$. Så tillægges punktmængden

$$M = \{(x, y) | a \leq x \leq b \ \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

et areal, hvis det for en følge af oversummer O_n og en følge af undersummer U_n gælder, at

$$\lim_{n\to\infty}(\,O_n - U_n) = 0.$$

Det kommenteres i de efterfølgende par linjer, at den fælles grænseværdi for over- og undersummerne netop må være punktmængdens areal, og at der for kontinuerte funktioner gælder (hvis arealet eksisterer), at

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Herefter gives nedenstående sætning, hvilken bliver bevist med udgangspunkt i en tilhørende figur.

Sætning 6: Lad f være kontinuert og ikke-negativ i $[a,b]$. Så har punktmængden

$$\{(x,y)|a \leq x \leq b \;\wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

et areal.

Introduktionen til integralregningen hviler således i de ældste lærebøger på problemet omkring bestemmelse af arealet af en vilkårlig punktmængde, og det bemærkes eksplicit at målet er at kunne tillægge vilkårlige punktmængder et areal, hvis det eksisterer. I modsætning til dette introducerer de nyere lærebøger arealfunktionen, uden at overveje om det areal, som arealfunktionen tilknytter til ethvert x i et interval giver mening og om det eksisterer. Udover introduktionen, er specielt også måden, hvorpå det bestemte integral bliver defineret ikke entydig. De ældste lærebøger definerer det bestemte integral som en fællesværdi af over- og undersummer, hvorimod de nyere lærebøger definere det bestemte integral af en funktion f fra a til b som tilvæksten over et interval $[a,b]$ af en vilkårligt valgt stamfunktion til f, dvs. de benytter det ene resultat i Analysens fundamentalsætning som en definition.

En sidste afgørende forskel er, at de ældste lærebøger behandler problematikken omkring, hvornår en funktion f er integrabel (dette er naturligvis muligt grundet den forudgående teori omkring under- og oversummer). Denne problematik inddrages ikke i nogle af de nye lærebøger, og er desuden heller ikke anført som et krav i Stx-bekendtgørelsen (bilag 10 og 11).

I forbindelse med de praktiske opgaver, som er tilknyttet teorien om integralregning observeres igen en række forskelle, men den primære opgavetype som indgår i alle de udvalgte gymnasielærebøger er følgende:

T: Givet f på $[a, b]$, bestem $\int_a^b f(t)dt$

Det kan kort bemærkes, at hvis en sådan opgave skal løses, gælder det overordnet om at finde en stamfunktion, jf. analysens fundamentalsætning. Der findes dog ikke en entydig teknik til at bestemme en stamfunktion $F(x)$ til en given funktion f, og teknikken vil ofte afhænge af funktionen f, og i adskillige tilfælde skal der desuden gøres brug af regnereglerne for bestemmelse af stamfunktioner. I gymnasiet introduceres reglen for lineær integration (en sum eller differens), konstantreglen for integration og integration ved substitution. Det skal bemærkes, at partiel integration ikke længere indgår som en del af pensum (efter 2006), men det er oplagt at inddrage som en del af det supplerende stof.

De opgaver eller øvelser, som optræder i lærebøgerne har naturligvis tilknytning til den ovenfor beskrevne teori. Ved en læsning af opgavehæfterne af Kristensen og Rindung, samt de øvelser, som indgår i lærebogen af Fenchel et. al., ses at en række opgaver har tilknytning til eksistensen af det bestemte integral, hvilket nedenstående to øvelser er eksempler på (Fenchel et. al., 1967, p. 240).

3.12 Øvelse: Gør rede for, at en konstant funktion med værdien k er integrabel i ethvert interval $[x_0; x] \subseteq R$, $x_0 < x$, og at

$$\int_{x_0}^{x} k\,dx = k(x - x_0)\ .$$

3.13 Øvelse: Gør rede for, at den reelle funktion f bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in Q\,, \\ 1 & \text{for } x \in R \setminus Q \end{cases}$$

ikke er integrabel i noget interval $[x_0; x] \subseteq R$, $x_0 < x$.

Figur 5: Eksempler på øvelser fra lærebogen 'Elementær matematik II'

Desuden findes der opgaver, hvor regneregler for bestemte integraler ønskes bevist (for kontinuert funktioner), og en anden opgavetype er følgende, som indgår i opgavehæftet 'matematik, 2.1 opgaver' af Kristensen og Rindung:

236.* Bevis, at når f er kontinuert og integrabel i $[a;b]$, så eksisterer der et tal $c \in [a;b]$, så

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \qquad \text{og} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)\,.$$

Vis herefter, at når $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ betegner delintervallerne ved deling af $[a;b]$ i n lige store dele, så eksisterer der tal $c_1, c_2, \ldots, c_n$, således at $c_i \in \delta_i$, og

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(c_1)+f(c_2)+\ldots+f(c_n)}{n}\,.$$

Figur 6: Eksempel på øvelse fra lærebogen 'matematik 2'

Sådanne opgaver er ikke at finde i de nutidige lærebøger, hvilket naturligvis hænger sammen med den manglende tilhørende teori til løsning af sådanne opgaver. Der angives et par beviser for regnereglerne i de nutidige lærebøger samt for nogle af de essentielle resultater, men disse præsenteres ikke som øvelser men er nærmere tiltænkt en lærergennemgang. Afslutningsvist skal det bemærkes, at eksempelvis opgaver ved brug af instrumenterede teknikker samt en række opgaver med en mere eksperimenterede tilgang i dag indgår i lærebøgerne.

Efter analysen af den akademiske viden og af den viden, som skal formidles kan det diskuteres om tilgangen, indholdet og præsentationen af det bestemte integral i de nutidige gymnasielærebøger er tilfredsstillende. For min synsvinkel er det ærgerligt, at de nutidige lærebøger ikke behandler spørgsmålet omkring eksistens af det bestemte integral, og desuden mener jeg, at det virker mere hensigtsmæssigt at holde fast i at arealbegrebet kan indgå som et motiverende element og naturligvis i forbindelse med anvendelser af det bestemte integral. Det teknologiske og teoretiske indhold som indgår i de nutidige lærebøger er tilstrækkeligt i forhold til læreplanens krav, og man må antage, at en stor del af landets gymnasielærer i dag vælger denne tilgang, hvilket indikerer, at tilgangen fungerer i praksis, herunder i forbindelse med mundtlig og skriftlig eksamen i matematik. Jeg vil i de følgende kapitler kommentere yderligere på diskussionen omkring undervisning i det bestemte integral, samt uddybe og præcisere overvejelser forbundet med dette.

8. Epistemologisk referencemodel

I dette afsnit præsenteres en epistemologisk referencemodel, som vil bidrage til at præcisere den efterfølgende a priori og a posteriori analyse af det designede undervisningsforløb. I afsnit 4 præsenterede jeg Den Antropologiske Teori om det Didaktiske, hvori jeg skrev, at studiet af den didaktiske transposition kræver en epistemologisk referencemodel, som udvikles uden for de tre institutioner (den akademiske institution, uddannelsessystemet og klasserummet), men på basis af data fra disse. Målet med dette afsnit er ikke at fremstille en komplet referencemodel, men derimod vil den valgte detaljeringsgrad afhænge af modellens funktion i de efterfølgende kapitler.

Modellen er udviklet på basis af data fra de førnævnte tre institutioner, hvori jeg har identificeret to lokale matematiske organisationer: MO_1 og MO_2, hvor følgende tre store spørgsmål kan knyttes til MO_2:

> Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde?
> Q_1: Findes arealet af en forelagt punktmængde?
> Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?

Førend MO_1 og MO_2 uddybes skal det bemærkes, at de grundlæggende figurer, som tilhører elementær geometri kan inddeles i to typer: dem, som er begrænset af linjesegmenter (polygoner) og dem, som er begrænset af kurver. I dette speciale vil der fokuseres på punktmængder, hvor kurven, som begrænser disse (helt eller delvist) kan beskrives ved en funktionsforskrift.

Den lokale matematiske organisation MO_1 koncentrerer sig om den algebraiske dimension af det bestemte integral, og det bestemte integral er i MO_1 defineret ved hjælp af stamfunktioner og er derved ikke knyttet til spørgsmålet omkring *areal*.

Praksisblokken består af en række opgavetyper (en samling af opgaver), som overordnet set omhandler hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af* $\int_a^b f(x)dx$ *for en given funktion* f *defineret på intervallet* $[a,b]$. Hver opgavetype er bestemt ved en given teknik, som består af en sekvens eller en sammensætning af delteknikker, og i nogle tilfælde kan en given opgave løses ved brug af forskellige teknikker (dvs. forskellige sammensætninger af de givne delteknikker). Derved kan en mængde af opgaver ikke inddeles i disjunkte familier af opgaver. I følgende tabel ses eksempler på delteknikker, og jeg vil efterfølgende forsøge at give et par eksempler på opgaver, som illustrerer, hvordan en given opgavetype kan karakteriseres.

Bestemt integral	τ_0: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), hvor\ F' = f$
Ubestemt integral	τ_1: $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$
	τ_2: $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
	τ_3: $\int (f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
	τ_4: $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$
	τ_5: $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + k = F\big(g(x)\big) + k$
	τ_6: Tabel over stamfunktioner for ”elementære” funktioner
Bestemt integral	τ_7: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
	τ_8: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
	τ_9: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right)\frac{b-a}{n}$
	τ_{10} *: Instrumenterede teknikker

For at løse en given opgave vil der ofte skulle gøres brug af en sammensætning af disse delteknikker, og denne sammensætning eller sekvens af delteknikker, vil derved karakterisere den pågældende opgavetype.

En opgave kunne bestå i at bestemme $\int_2^4 (6x^2 + 2x)dx$, hvor delteknikkerne τ_0, τ_1, τ_2 og τ_6 vil indgå i løsningen:

$$\int_2^4 (6x^2 + 2x)dx = \left[\int (6x^2 + 2x)dx\right]_2^4 = \left[\int 6x^2dx + \int 2xdx\right]_2^4 = \left[6\int x^2dx + 2\int x\,dx\right]_2^4$$
$$= \left[6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_2^4 = [2x^3 + x^2]_2^4 = (2 \cdot 4^3 + 4^2) - (2 \cdot 2^3 + 2^2) = 124$$

Opgavetypen kan dermed benævnes T_{0125}.

En anden opgave kunne være at bestemme $\int_2^3 \frac{8x}{x^2+5}dx$, hvilket gøres på følgende måde:

$$\int_2^3 \frac{8x}{x^2+5}dx = \left[\int \frac{8x}{x^2+5}dx\right]_2^3 = \left[\int \frac{8x}{t} \cdot \frac{1}{2x}dt\right]_2^3 = \left[4\int \frac{1}{t}dt\right]_2^3 = 4[ln|t|]_2^3 = 4[ln(x^2+5)]_2^3$$
$$= 4 \cdot (ln14 - ln9) = 4 \cdot ln\left(\frac{14}{9}\right)$$

Det er således delteknikkerne τ_0, τ_5 og τ_6, som benyttes, og opgavetypen vil således benævnes T_{056}.

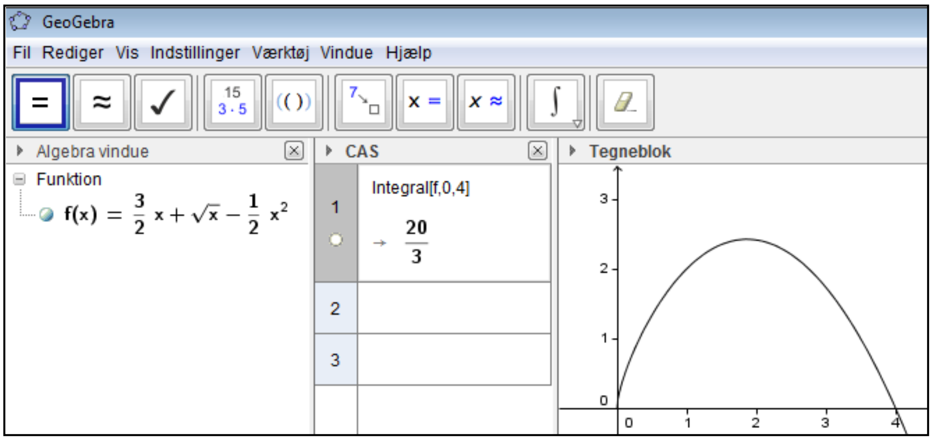
Et eksempel på en opgave, hvor partiel integration indgår som en del af teknikken, kunne være at bestemme $\int_{-2}^{1} x \cdot e^x dx$, hvor løsningen er givet ved det følgende:

$$\int_{-2}^{1} x \cdot e^x dx = \left[\int x \cdot e^x dx\right]_{-2}^{1} = \left[x \cdot e^x - \int e^x dx\right]_{-2}^{1} = [x \cdot e^x - e^x]_{-2}^{1} = e - e - (-2e^{-2} - e^{-2})$$
$$= 3e^{-2}$$

Opgavetypen vil her være T_{045}, da teknikken er en sammensætning af delteknikkerne τ_0, τ_4 og τ_5.

En opgave, som benytter teknikken τ_9: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \frac{b-a}{n}$ kunne være følgende: *Lad A betegne arealet af en punktmængde* $\{(x,y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. *Beregn en tilnærmet værdi for A på grundlag af en deling af intervallet* $[a, b]$ *i n lige store delintervaller*. Løsningen af denne opgave vil bestå i at bestemme en grænseværdi, eksempelvis ved brug af et CAS-værktøj eller ved at genkende udtrykket som en uendelig række. Derved vil denne opgave nok nærmere tilhører en opgavetype som vil indgå i en epistemologisk referencemodel for emnet grænseværdi.

De ovenfor nævnte opgaver omkring bestemmelse af et bestemt integral vil alternativt kunne løses ved brug af et CAS-værktøj. Eksempelvis vil $\int_0^4 \left(\frac{3}{2}x + \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right) dx$ kunne bestemmes ved hjælp af kommandoen $Integral[< Funktion >, < Fra >, < Til >]$ i matematikprogrammet GeoGebra, og værdien $\frac{20}{3}$ fås som output.



Figur 7: Beregning af bestemt integral vha. GeoGebra

Det bør bemærkes, at hvis der udelukkende benyttes instrumenterede teknikker, består det teknologiske-teoretiske niveau af forklaringer omkring brugen af CAS-værktøjet og de indgående kommandoer. Jeg vil ikke uddybe de instrumenterede teknikker, da det er vanskeligt at liste disse generelt men blot kommentere, at mange opgaver tilhørende MO_1 vil kunne bestemmes ved hjælp af instrumenterede teknikker eller en kombination af både instrumenterede og ikke-instrumenterede teknikker.

For at opsamle på det foregående understreges det, at den teknologiske-teoretiske diskurs tilhørende MO_1 (ved ikke-instrumenterede teknikker) blandt andet udgøres af analysens fundamentalsætning og regnereglerne for bestemte og ubestemte integraler, da disse elementer forklarer, genererer og retfærdiggør de indgående teknikker.

Den anden matematiske organisation, MO_2, omhandler det topologiske aspekt af det bestemte integral, som i denne organisation er defineret jf. Riemann (se afsnit 6.3). MO_2 indeholder en række hovedproblemtyper Π med tilhørende opgavetyper T. Jeg har undladt en diskussion af, hvorvidt det jf. ATD er egentlige opgavetyper, der anføres nedenfor, da denne ville blive meget omfangsrig og ikke være relevant for dette speciale. Jeg har i det følgende forsøgt at opstille eksempler på hovedproblemtyper og opgavetyper, men det skal bemærkes, at disse opgavetyper ikke på samme måde kan ses som værende karakteriseret ved en sammensætning af delteknikker, og notationen og indekseringen må derfor ikke forveksles med notationsbrugen i det forrige.

Π_0: Hvad menes der med det bestemte integral af en funktion f fra a til b, dvs. $\int_a^b f(x)dx$?

$\mathrm{T_A}$: Giv en meningsfuld definition af, hvad der menes med $\int_a^b f(x)dx$

Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes

$\mathrm{T_B}$: Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes

$\mathrm{T_C}$: Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ ikke findes

Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion

$\mathrm{T_D}$: Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om A'?

T_E: Vis at $A'(x) = f(x)$, for en pæn vilkårlig funktion f

T_F: Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om $A(b)$?

Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi

T_G: Redegør for at $\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ kan opfattes som middelværdien for f på intervaller $[a, b]$.

Π_4: Bevis regnereglerne for bestemte integraler; for integrable funktioner f og g

T_H: Vis at, $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
...

Π_5: Bevis regnereglerne for bestemt integraler; for kontinuerte funktioner f og g

T_I: Vis at, $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
...

$T*$: Bevis 'Analysens fundamentalsætning'

Jeg vil i det følgende kort kommentere et par af disse opgavetyper, men jeg vil ikke give en udførlig beskrivelse af de teknikker, som har relation til disse.

I forbindelse med opgavetypen T_A: *Giv en meningsfuld definition af, hvad der menes med* $\int_a^b f(x)dx$, skal det bemærkes, som nævnt tidligere, at integralet selv i akademisk matematik er defineret på forskellige måder, men ordet meningsfuld her dækker over en definition, som har tilknytning til noget geometrisk og som kan benyttes til at eftervise egenskaber og resultater for det bestemte integral.

Den anden hovedproblemtype, Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes*, har relation til det store spørgsmål Q_1: *Afgør om arealet af en forelagt punktmængde findes*, og hvis en opgave består i at afgøre om arealet af en forelagt punktmængde findes, bør der i en fyldestgørende besvarelse indgå et trin, hvori det begrundes, hvorfor det bestemte integral kan opfattes som et areal, og derfor kan foretages en teoretisk omformulering. Denne hovedproblemtype giver anledning til to opgavetyper som angivet ovenfor. Hvis $\int_a^b f(x)dx$ findes for en given funktion, vil en umiddelbar løsning bestå i at vise, at funktionen er kontinuert, og derved følger det af analysens fundamentalsætning. Hvis man ikke er i stand til at vise, at funktionen er kontinuert, kan det vises, at differensen mellem over- og undersummer går mod 0. Mere præcist beskrevet vises det, at for ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling I, så $O(I) - U(I) < \varepsilon$ (se afsnit 6 for en mere præcis uddybning af dette).

Hvis $\int_a^b f(x)dx$ ikke findes for en given funktion, er denne funktion ikke integrabel, og da giver symbolet $\int_a^b f(x)dx$ ikke mening, men over- og undersummer er derimod defineret for alle begrænsede funktioner. Det kan da vises, at en funktion ikke er integrabel ved at vise, at undersummen ikke er lig oversummen, hvilket blev vist i forbindelse med den ikke-integrable funktion (afsnit 6)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & når\ x\ er\ rational \\ 0, & når\ x\ er\ irational \end{cases}$$

I forbindelse med hovedproblemtypen Π_3: *Etabler sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi*, ønskes det vist at $\frac{f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})}{n} \to \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ for n gående mod uendelig, og at værdien af $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ dermed kan opfattes som et gennemsnit af funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$.

Den efterfølgende hovedproblemtype som blev angivet var Π_4: *Bevis regnereglerne for bestemt integraler*, og der kan nævnes en række opgaver, som har relation til denne. Eksempelvis opgaver, som består i at bevise følgende sætninger:

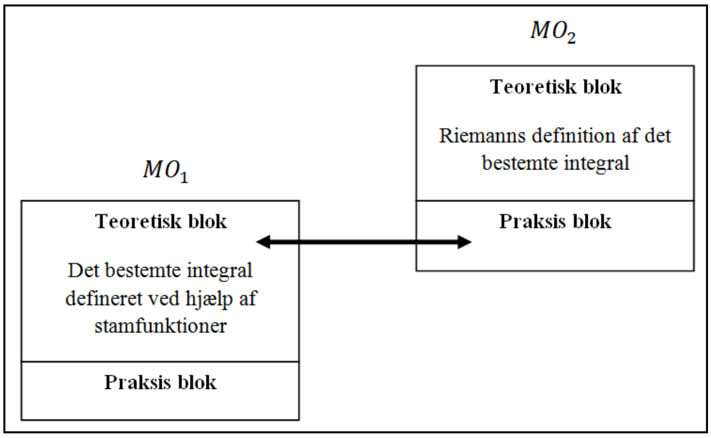
(1) Sætningen om integration ved substitution
(2) Sætningen om partiel integration
(3) Indskudssætningen

Det skal bemærkes som ovenfor anført, at beviserne for disse regneregler afhænger af, om det er kontinuerte eller integrable funktioner, som indgår i den pågældende sætning. Som beskrevet tidligere siger analysens fundamentalsætning, at hvis en funktion f er kontinuert, da har f en stamfunktion, og hvis f har en stamfunktion, da er f integrabel. Det gælder ikke den anden vej, så hvis det eksempelvis skal vises, at

(i) $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

hvor f *og* g *er to kontinuerte funktioner (og* k *et reelt tal)*, benyttes det at f og g hver har en stamfunktion. Hvis regnereglerne derimod defineres for integrable funktioner, vises disse i stedet ved hjælp af Riemanns definition af det bestemte integral – mere præcist vises det, at Riemann-summerne til funktionerne $f + g$ og $f - g$ konvergerer mod henholdsvis $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ og $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ når $n \to \infty$.

Forbindelsen mellem MO_1 og MO_2 er, at opgavetyper og teknikker, som tilhører praksisblokken i MO_2 er med til at retfærdiggøre det teknologiske-teoretiske niveau for MO_1, hvilket er forsøgt illustreret ved nedenstående figur. Det kan nogle gange være vanskeligt at skelne disse to matematiske organisationer, da der eksistere en tydelig forbindelse mellem disse. I forbindelse med dette kan det eksempelvis nævnes, at hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion*, indgår i den teoretiske blok af MO_1, men arbejdet med denne hovedproblemtype, herunder arbejdet med opgavetyperne T_D, T_E og T_F, tilhører den praktiske blok af MO_2.



Som nævnt i indledningen til dette delafsnit er modellen udviklet med henblik på dens funktion og virkning i dette speciale. Som det forrige har antydet kan en alternativ model udvikles, både med hensyn til notation, indhold og detaljeringsgrad. Det skal afslutningsvist bemærkes, at der derfor kan argumenteres for at elementer i denne model skulle revideres, da der ikke findes en færdigudviklet og præcis epistemologisk referencemodel i forbindelse med det bestemte integral.

9. Design af et undervisningsforløb

Som nævnt i min problemformulering vil jeg i dette speciale undersøge, hvilke didaktiske muligheder, begrænsninger og udfordringer der eksisterer i forbindelse med undervisning i det bestemte integral, og om det er muligt at give elever en mere præcis tilgang til spørgsmålet vedrørende definition og eksistens af det bestemte integral. For at undersøge dette designede jeg i forbindelse med dette speciale et undervisningsforløb, som efterfølgende skulle udføres i en gymnasieklasse. I forbindelse med udførelsen lånte jeg en 2.g-klasse (16-17 år) med studieretningsfagene matematik, fysik og kemi samt klassens matematiklærer på Hvidovre Gymnasium og HF.

I det følgende vil jeg indledningsvist kommentere de væsentligste fagdidaktiske udfordringer, som jeg identificerede på baggrund af mit studie af den akademiske viden og den viden, der i dag indgår i forbindelse med underisning i det bestemte integral. Herefter vil jeg fremsætte de tilsigtede mål og delmål, samt kort kommentere inddragelsen af CAS (*Computer Algebra Systems)* i forbindelse med undervisning.

9.1 Planlægning samt konstruktion af et undervisningsforløb

Et undervisningsforløb planlægges på baggrund af en række valg, som vil være påvirket af institutionelle begrænsninger samt en mængde af data. Data vil eksempelvis udgøres af lærebøger og den specifikke læreplan, som indeholder en række af de matematiske elementer undervisningen skal indeholde samt et par pædagogiske og didaktiske principper. I forbindelse med mit design består data blandt andet af bekendtgørelsen om uddannelsen til studentereksamen samt en lang række gymnasielærebøger. Integralregningsteori nævnes både i forbindelse med kernestoffet for Matematik A og Matematik B jf. læreplanen:

- Stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, anvendelse af integralregning til arealberegning af punktmænger begrænset af grafer for ikke-negative funktioner.
- Stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$ samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion (se bilag x for den samlede læreplan for Matematik B og A)

Desuden nævnes en række didaktiske principper i læreplanens kapitel 3 om tilrettelæggelse af undervisning, hvori det blandt andet nævnes, at der skal fokuseres på elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver, og at en eksperimenterende tilgang skal sikre, at elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler. Desuden nævnes det, at eleverne skal få forståelse for bevisets betydning i matematisk teori, at der skal lægges vægt på matematikkens anvendelser og at CAS-værktøjer ikke blot skal udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse (Stx-bekendtgørelsen, Matematik B – stx, juni 2010, bilag 11). Disse principper har jeg forsøgt at implementere i forbindelse med planlægningen og designet af mit forløb.

Desuden udgør den akademiske viden samt den viden, som skal formidles (jf. gymnasielærebøger) en stor og betydningsfuld del af det data, som inspirerede mig til at designe forløbet, og i forbindelse med den teoretiske analyse af dette data (afsnit 6 og 7) identificerede jeg nogle fagdidaktiske udfordringer, som jeg i det følgende vil diskutere med henblik på de valg jeg foretog i planlægnings- og designfasen. Det skal dog kort bemærkes, at grundet eksamensperioden i gymnasiet, var jeg nødsaget til at placere udførelsen af mit design på et tidligt tidspunkt i min specialeperiode, hvilket resulterede i at den teoretiske analyse af integralregning, som lå forud for planlægningsfasen, ikke blev så detaljeret, som jeg havde ønsket.

9.2 Fagdidaktiske udfordringer

9.2.1 Tilgangen til det bestemte integral

Som beskrevet tidligere vælger mange nutidige gymnasielærebøger at indføre og definere arealfunktionen $A(x)$, hvis output er arealet af en punktmængde. Den overordnede problemstilling – at finde en metode til at bestemme arealer af figurer, som ikke udelukkende er begrænsede af rette linjer – præsenteres i samtlige lærebøger, men det diskuteres ikke om punktmængder af en sådan type overhovedet har et areal, og herunder, hvilken værdi dette areal (hvis det findes) kan tilskrives.

En af ideerne bag designet var et ønske om at give eleverne en alternativ tilgang til det bestemte integral end den som gives i lærebøgerne, og at bevare motivationen bag de indgående teoretiske definitioner og resultater. Som motivation for arbejdet med mit forløb ville jeg gerne have eleverne til at overveje om alle punktmængder har et areal og få dem til at udtale sig om mulige værdier som kunne tilskrives disse arealer (under antagelse af at arealerne findes). Således håbede jeg på at få eleverne til at indse, at det at definere et sådant areal er et interessant matematisk spørgsmål. Jeg ønskede i den forbindelse at undgå indførelsen af en arealfunktion og valgte i stedet at lade eleverne arbejde med venstre- og højresummer.

9.2.2 Sammenhængen mellem areal og det bestemte integral

En anden væsentlig udfordring er, hvornår og hvordan eleverne skal introduceres for sammenhængen mellem det bestemte integral og et givent areal. De fleste gymnasielærere vælger i dag at definere arealfunktionen, og herefter hævde at ”*arealbestemmelse er meget tæt forbundet med beregning af en størrelse, man kalder et bestemt integral”*. (Nielsen, K.E. og Fogh, E., 2006, p. 206). Denne fremstilling får den uheldige konsekvens, at eleverne får en opfattelse af, at det er arealet af en given punktmængde, som giver det bestemte integral mening. Fra et akademisk matematisk synspunkt forholder dette sig omvendt, og jeg mener ikke, at man skal gå på kompromis med dette, på trods af, at det bestemt ikke er nemt at formulere en definition, som kan fungere i undervisningssammenhæng, hvilket det følgende vil vise.

Ofte vælger lærebøgerne at lade A betegne arealet af den punktmængde, som er begrænset af grafen for en positiv funktion f, x-aksen og de to lodrette linjer $x = a$ og $x = b$ og herefter opskrive følgende:

(1) $A = \int_a^b f(x)dx$
(2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (hvor F er en stamfunktion til f)

Der afsluttes med en kort kommentar om, at tallet $\int_a^b f(x)dx$ kaldes *det bestemte integral fra* a *til* b *af* f.

Denne præsentation vil resultere i, at eleverne udelukkende forbinder det bestemte integral med et areal, og ikke en sum. Gymnasieeleverne kan naturligvis ikke præsenteres for den akademiske viden omkring integralregning, men jeg vil dog gerne med mit speciale tydeliggøre for eleverne, at man i geometri beregner arealer ved hjælp af formler, hvorimod man i forbindelse med kalkulus definerer areal som en grænseværdi af en sum, hvilket udregnes som et bestemt integral (Usiskin, Z., et. al., 2003). Jeg valgte, at lade arealproblematikken indlede mit forløb, for herefter blot at nævne, at når en funktion f er positiv på et givent interval $[a, b]$, dvs. $f(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$ kan det bestemte integral $\int_a^b f(x)dx$ opfattes som arealet under grafen for f. Den anden del af mit designede forløb koncentrerer sig ligeledes om at bestemme en eksakt værdi for det bestemte integral og ikke om beregning af et areal. Jeg valgte desuden i forbindelse med designet at lade læreren præsentere og definere $A(x)$ på følgende måde:

For en pæn funktion f, som betragtes på intervallet $[a, b]$, hvor $a \leq x \leq b$ defineres $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Jeg havde overvejet at benytte notationen $S(x)$ i stedet for $A(x)$, da $\int_a^x f(t)dt$ angiver en grænseværdi af en sum, men jeg valgte dog at benytte $A(x)$, da denne optræder i elevernes bøger samt i den efterfølgende matematikundervisning. Afslutningsvist skal det nævnes, at jeg valgte at benytte begrebet en *pæn* funktion (eksempelvis voksende eller aftagende) i stedet for en kontinuert funktion, da jeg ville minimere brugen af begreber, og specielt er begrebet kontinuitet ligeledes svært at give en præcis tilgang til i forbindelse med undervisning i gymnasiet.

9.2.3 Definitionen af det bestemte integral

En udbredt tendens i de nutidige gymnasielærebøger er at definere det bestemte integral ved brug af det beregningsmæssige resultat i analysens fundamentalsætning. Følgende er den definition, som gives i lærebogen 'MAT C til B', men som er fælles for en lang række lærebøger:

Definition: Lad f være kontinuert i intervallet $[a, b]$ med stamfunktionen F. Ved det bestemte integral af f fra a til b forstås tallet $F(b) - F(a)$, og vi skriver: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Ved brug af denne definition mister det matematiske resultat og denne del af analysens fundamentalsætning sin værdi som et resultat. En præcis definition findes i form af eksempelvis definitionen givet af Darboux eller af Riemann jf. afsnit 6. I forbindelse med Darboux, defineres det først, hvad det vil sige, at en begrænset funktion er integrabel (det øvre integral fra a til b af f er lig det nedre integral fra a til b af f) og det bestemte integral defineres da som denne fællesværdi (Lindstrøm, T., 2006, p. 366). Definitionen hviler således på det øvre og nedre integral, som er defineret som hhv. infimum af oversummerne og supremum af undersummerne, og i forbindelse med definitionen af over- og undersummerne indgår der ligeledes supremum og infimum for de værdier den betragtede funktion antager på det givne interval. Indførelsen af supremum og infimum kræver en dybere forståelse af fuldstændigheden af de reelle tal, $\mathbb{R}$, herunder begreber som en opadtil eller nedadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$, samt en øvre og nedre grænse for en delmængde af $\mathbb{R}$. Dette indgår ikke i forbindelse med matematikundervisningen i et dansk gymnasium, og det vil derfor ikke være muligt at præsentere eleverne for Darboux' definition af det bestemte integral.

Riemann har en lidt anden tilgang til definitionen, og som beskrevet tidligere er værdien af Riemann integralet den fælles grænseværdi som Riemann-summerne nærmer sig når den maksimale intervallængde går mod 0. Grundideen i Riemanns definition er at forstå integralet af en funktion f over intervallet $[a, b]$ som en fælles grænseværdi, og dette virker intuitivt mere klart end at inddrage definitionen af det nedre og øvre integral. Det vil heller ikke være muligt at overføre Riemanns definition af det bestemte integral direkte til en undervisningssammenhæng i gymnasiet, og jeg valgte i stedet, at det følgende skulle indgå som en ”definition” af det bestemte integral i mit design:

For en pæn funktion f på intervallet $[a, b]$, med en inddeling I: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, gælder at:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n},$$

under forudsætning af at grænseværdien eksisterer.

9.2.4 Integrabilitet

Med integrabilitet menes om en given funktion f er integrabel på et interval, det vil sige, om det bestemte integral af f eksisterer. De nutidige gymnasiebøger nævner ikke denne vigtige del af integralregningsteorien, og en af grundene til dette kan være at samtlige funktioner som gymnasieelever støder på er integrable, og det derved er svært at definere noget som ”alle” funktioner er – set med deres øjne. Med den viden som eleverne opnår gennem de emner som går forud for integralregning (jf. bekendtgørelsen) vil de ikke være i stand til at forstå en funktion, som ikke er integrabel. Et eksempel på en ikke-integrabel funktion er som før nævnt funktionen $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ defineret ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & når\ x\ er\ rational \\ 1, & når\ x\ er\ irrational \end{cases}$$

Hvis en lærer ønsker at inddrage dette eksempel i en undervisningslektion, vil en meningsfuld definition samt et kendskab til mængden af irrationelle tal i forhold til rationelle være en nødvendig forudsætning. Igen er dette ikke muligt, da gymnasieelever langt fra er i besiddelse af disse faglige forudsætninger, og dette gjorde det rigtig vanskeligt at præsentere eleverne for eksistensen af det bestemte integral af en funktion. Jeg valgte udelukkende at lade integrable funktioner indgå i mit designede undervisningsforløb, og jeg kunne i forbindelse med integrabilitet blot konstruere en opgave, hvori eleverne skulle vise, at funktionen $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2]. Desuden lod jeg læreren vise, at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel, og jeg planlagde, at han i forbindelse med dette skulle kommentere, at de funktioner eleverne arbejder med i gymnasiet alle er integrable, men at der findes funktioner, som ikke er det. Jeg håbede på at disse to elementer alligevel vil bidrage til at eleverne blev bevidste om, at det bestemte integral ikke altid eksistere, og at det er en interessant matematisk opgave at vise, at det findes eller, at det ikke findes. I forbindelse med dette spørgsmål omkring eksistens af det bestemte integral ville der derved gå nogle essentielle og interessante pointer tabt, men dette er desværre ikke uundgåeligt i forsøget på at præsentere en detaljeret matematisk teori for gymnasieelever.

9.2.5 Sammenhæng mellem integral og stamfunktion

En udfordring som også viste sig i forbindelse med den teoretiske analyse af det bestemte integral var spørgsmålet omkring etableringen af sammenhængen mellem integralet og stamfunktioner. Jeg valgte at lade eleverne opdage, at $A'(x) = f(x)$ for et par givne lineære funktioner og i forlængelse af dette ønskede jeg, at eleverne skulle vise dette resultat for en vilkårlig pæn funktion. Jeg var opmærksom på, at dette ville være en udfordring, men jeg valgte at medtage dette, da der var mulighed for et teknologisk-teoretisk arbejde i forbindelse med denne bemærkelsesværdige sammenhæng mellem integral og stamfunktion, hvilket har relation til mine forskningsspørgsmål.

9.2.6 Notation og begreber

Afslutningsvist er det værd at bemærke, at matematisk notation er en vigtig dimension af det at planlægge et undervisningsforløb. Faget matematik er specielt et notationstungt og symbolholdigt fag, og notation er en af de fem kategorier, som elevernes skriftlige eksamener bliver bedømt ud fra. Det bliver ligeledes nævnt i forbindelse med de faglige mål, hvor det angives, at *eleverne skal kunne håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold* (Stx-bekendtgørelsen, Matematik A, bilag x). Læreren bør derfor i forbindelse med planlægning af et undervisningsforløb overveje brugen af symbolholdigt sprog, og være opmærksom på, at eleverne har svært ved at blive fortrolig med brugen af denne. Det er naturligvis ikke muligt at undgå symbolholdigt sprog og algebraisk notation i forbindelse med undervisning i matematik, men jeg har forsøgt at designe mit forløb med en minimal brug af dette og undlod eksempelvis at introducere eleverne for summationstegnet. Som før nævnt er det en udfordring at bevare de essentielle teoretiske pointer (fx definitioner og resultater), når man forsøger at præsentere en detaljeret matematisk teori for gymnasieelever, og en række af de opgaver, som indgår i mit design er et forsøg på at realisere et mere teknologisk-teoretisk arbejde, hvilket kræver brug af algebraisk notation. Jeg forsøgte ligeledes at undgå begreber som kontinuitet og under- og oversum, da disse ikke ville kunne præsenteres på en acceptabel og præcis måde grundet elevernes faglige forudsætninger. Det skal afslutningsvist bemærkes, at specielt notationen i forbindelse med de indgående intervaller og delepunkter viste sig at være udfordrende. Eksempelvis valgte jeg i forbindelse med inddelingen af et interval $[a, b]$ i n lige store dele, at lade $x_0, x_1, \ldots, x_n$ svare til de $n+1$ delepunkterne således, at $a = x_0$ og $b = x_n$. Der opstod herefter et problem i forbindelse med opgaven, hvor eleverne skal vise at $A'(x) = f(x)$ for en vilkårlig pæn funktion f, da det her er naturligt at lade x_0 betegne et fast punkt i intervallet $[a, b]$. Jeg overvejede om det faste punkt skulle betegnes med x_k i stedet, men i forbindelse med opskrivning af en differenskvotient var eleverne vant til brugen af x_0 som det faste punkt. Jeg skiftede mening adskillelige gange, hvilket resulterede i en notationsfejl i opgave 13, som dog ikke fik konsekvenser i forbindelse med udførelsen.

9.3 Mål og delmål

Jeg har tidligere nævnt, at nutidig undervisning i det bestemte integral oftest kun omhandler de matematiske elementer, som indgår i MO_1. Det overordnede mål med mit design er at give eleverne en mere præcis tilgang til det bestemte integral fra a til b af en funktion f, hvor definition og eksistens går forud for beregning af den eksakte værdi. Min intention er således at få den lokale matematiske organisation MO_2 til at leve i forbindelse med udførelsen af mit design i en 2.g-klasse, og at få et elevarbejde med opgaver tilhørende MO_2 til at fungere i praksis. I forlængelse af dette er det desuden et overordnet mål at skabe forbindelsen mellem de to lokale matematiske organisationer, MO_2 og MO_1, og mit design skal koncentrere sig om den teoretiske og praktiske blok af MO_2, samt den teoretiske blok af MO_1.

For at præcisere dette yderligere, kan følgende delmål nævnes:

1. Eleverne skal gøres opmærksomme på, at arealbegrebet for nogle punktmængder er en tvivlsom størrelse (Q_0 og Q_1).
2. Eleverne skal præsenteres for en mere meningsfuld definition af det bestemte integral med tilknytning til geometriske betragtninger (Π_0 og T_A).
3. Der skal etableres en sammenhæng mellem det bestemte integral og en funktions middelværdi på et interval (Π_3 og T_G).
4. Eleverne skal præsenteres for spørgsmålet omkring eksistensen af det bestemte integral (Π_1 og T_B).
5. Der skal etableres en sammenhæng mellem integral og stamfunktion (Π_2, T_D, T_E og T_F).
6. Det skal præsenteres, hvordan den eksakte værdi af et bestemt integral findes (Π_0).

Jeg har udarbejdet en kortfattet modelbesvarelse, som er et forsøg på at ramme en mulig elevbesvarelse (bilag 2).

9.4 Inddragelse af CAS i forbindelse med undervisning og læring

I dette delafsnit vil jeg kort kommentere på brugen af *computer algebra systems* (CAS), herunder matematiksoftware som eksempelvis GeoGeobra, i forbindelse med studiet af matematik i gymnasiet, hvilket er blevet behandlet i adskillige videnskabelige artikler og bøger. En række muligheder og udfordringer er knyttet til brugen af CAS i forbindelse med undervisning, og jeg vil i det følgende fokusere på didaktiske argumenter, der angår den rolle CAS-brug kan spille i relation til elevers læring.

Jf. ATD kan brugen af CAS-værktøjer i forbindelse med undervisning og læring umiddelbart relateres til 'teknikker', og der tales om instrumenterede teknikker når et mere eller mindre effektivt værktøj indgår i teknikken (Gyöngyösi, Solovej, Winsløw, 2005).

En umiddelbar fordel ved brugen af et CAS-værktøj er dets evne til at lette de ofte tidskrævende og omhyggelige teknikker udført i hånden, hvilket bevirker, at teknikker udført i hånden kun bevare en lille pragmatisk værdi. Desuden vil anvendelsen af et CAS-værktøj give eleverne mulighed for at genere, teste, forbedre og udforske umiddelbare formodninger og hypoteser, samt at eleverne ved hjælp af disse har mulighed for at modtage en ikke-dømmende feedback. Det nævnes endvidere af Gyöngyösi, E., Solovej, J., og Winsløw, C. (2011), at brugen af et CAS-værktøj kan påvirke elevernes evne til at udforske et matematisk emne på et højere niveau, da CAS-værktøjet kan udføre det mere detaljerede og ofte tidskrævende arbejde. Denne effekt kaldes løftestangsprincippet.

I modsætning til de ovenfor nævnte potentialer eksisterer der også en række udfordringer og begrænsninger. Eksempelvis vil en for ofte brug af et CAS-værktøjet kunne resultere i, at fokus flyttes fra resultaterne til teknikkerne, hvilket kan påvirke elevernes evne til at argumentere og redegøre. I forbindelse med brugen af CAS har en række studier vist en fiske-opførsel, som karakteriseres ved, at elever gentager en masse ustrukturerede forsøg, og ved en manglende bevidsthed om, hvad de ønsker at nå frem til, men i stedet et håb om, at noget interessant og brugbart vil dukke op (Guin, D. og Trouche, L., 2002). Den sidste begrænsning som jeg vil nævne er, at CAS-værktøjet er ensrettet, og dermed ikke giver svaret på, hvad outputtet betyder i forhold til inputtet, hvilket er en begrænsning af værktøjets læringsmuligheder, og nogle elever vil være i stand til at løse en række opgaver uden at opnå en dybere forståelse for emnet.

Det skal bemærkes at potentialer og begrænsninger i nogle tilfælde ikke er to separate begreber, og eksempelvis kan fiskeopførelsen give elever mulighed for at komme i gang med en given opgave, i modsætning til et blankt stykke papir.

De førnævnte didaktiske argumenter for brug af CAS i gymnasieundervisning antyder, at man kan opnå et mere varieret eller lettere tilgængeligt eksempelmateriale, og i nogle tilfælde ligefrem muliggøre visse eksempler, grundet den pragmatiske værdi. Mange artikler nævner, at man derved direkte kan fokusere mere på forståelsen af de begreber og sammenhænge, som eksemplificeres. I forlængelse af dette nævner Lagrange, at de traditionelle teknikker udført i hånden har spillet en væsentlig rolle i forbindelse med begrebsdannelse, og da disse teknikker anvendes mindre og mindre i forbindelse med læring, vil der være et behov for at overveje nye teknikker forbundet til brugen af CAS-værktøjer, herunder den mulige epistemiske værdi, hvilket ikke er let, *da matematisk kultur indirekte er forbundet med teknikker udført i hånden og den er ikke vant til ideen om, at andre værktøjer kan støtte begrebsdannelsen* (Lagrange, J.-B., 2005, p. 118).

Dette delafsnit har understreget at der til anvendelsen af CAS i forbindelse med undervisning og læring er knyttet en række udfordringer, og at den pragmatiske og epistemiske værdi af traditionelle teknikker skal genovervejes, samtidig med at nye instrumenterede teknikker skal undersøges og specielt deres mulighed for et epistemisk bidrag. Jeg valgte i forbindelse med mit design at inddrage matematikprogrammet GeoGebra, og jeg konstruerede et par opgaver, hvor eleverne skulle benytte dette program, hvilket er nærmere beskrevet og begrundet i den efterfølgende a priori analyse. Det skal blot nævnes, at mit udgangspunkt var at benytte en Applet, da kommandoerne til beregning af venstre- og højresummer i GeoGebra ikke var lette at finde. Dette lykkedes dog, hvilket var en fordel, da den lånte klasse var vant til at arbejde med GeoGebra.

10. A priori analyse af det designede undervisningsforløb

I det følgende vil jeg i lyset af den antropologiske teori for didaktik og ved hjælp af den opstillede epistemologiske referencemodel analysere de indgående elevopgaver samt de lærerstyrede introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger, som indgår i mit design (se bilag 1 for de konstruerede opgaver og bilag 3 – 5 for de enkelte lektionsplaner).

Det designede undervisningsforløb består overordnet af to dele: Del 1, der omhandler definition og eksistens af det bestemte integral og Del 2, som omhandler eksakt værdi af bestemt integral. Del 1 indeholder 11 konstruerede elevopgaver, og del 2 indeholder 4 konstruerede elevopgaver, og desuden indeholder designet tre lektionsplaner, hvoraf den første lektionsplan indeholder en detaljeret beskrivelse af den planlagte udførelse af det første modul (lektion 1 og 2), herunder tidsangivelser, lærerrolle og elevrolle i forbindelse med de indgående aktiviteter, samt en uddybende beskrivelse af de planlagte lærerstyrede introduktioner, opsamlinger og institutionaliseringer. Den anden lektionsplan omhandler det andet modul (lektion 3 og 4), og den tredje lektionsplan omhandler det tredje modul (lektion 5 og 6).

I lektionsplanerne kan det ses, at jeg planlagde, at elevarbejdet skulle være adidaktisk, og jf. Brosseau er adidaktiske situationer læringssituationer, som muliggør et selvstændigt elevarbejde, hvilket vil sige, at lærerens indgriben i elevernes arbejde er fuldstændig fraværende (Brosseau, G., 1997). Da læreren i forbindelse med udførelsen af dette undervisningsforløb er til stede i klasserummet og eleverne derved har mulighed for at inddrage ham, er det ikke egentlige adidaktiske læringssituationer jeg refererer til i mit speciale, men blot at læreren forsøger at begrænse sig til udelukkende at besvare opklarende spørgsmål om, hvordan opgaverne skal forstås. Grunden til, at jeg valgte at lade eleverne arbejde selvstændigt med opgaverne skal findes i mine forskningsspørgsmål. Kort beskrevet var en del af formålet med dette speciale at undersøge om en alternativ tilgang til det bestemte integral kunne få MO_2 til at leve i gymnasial sammenhæng, og jeg ønskede, at de to lokale matematiske organisationer MO_1 og MO_2 samt linket mellem disse skulle udvikles. Desuden ønskede jeg at undersøge, hvilke muligheder, vanskeligheder og udfordringer der er forbundet med det førnævnte, samt undersøge realiseringen af den didaktiske proces. Jeg mener, at det adidaktiske elevarbejde i langt højere grad, end eksempelvis en lærestyret forelæsning, vil kunne danne en fornuftig baggrund for den efterfølgende a posteriori analyse, samt for konklusionen på mine forskningsspørgsmål.

I forbindelse med afsnit 4.3 beskrev jeg, at en matematematisk organisation udvikles gennem en didaktisk proces, som kan karakteriseres ved seks faser: det første møde, udforskningsfasen, den tekniske fase, den teknologiske-teoretiske fase, institutionaliseringsfasen og evalueringsfasen, som ikke nødvendigvis skal optræde i en homogen struktur, men som godt kan indtræffe flere gange og med varierende intensitet. Designet kan dermed ikke analyseres som en række af didaktiske processer, hver bestående af alle seks faser, men nærmere som en didaktisk proces, hvori fem af faserne indtræffer skiftevis i mere eller mindre komplette realiseringer. Det skal bemærkes, at evalueringsfasen, som består af en kritisk vurdering af teknikker og teknologier ikke indgår i designet, da en sådan vurdering af teknikkernes rækkevidde og mulige alternative teknikker, langt fra kan foretages i gymnasiet.

Designet har naturligvis en lineær tidsdimension, og eleverne skal fra A (deres udgangspunkt, som indeholder en allerede etableret viden) til B via mit design. Denne vej skal opfattes som en proces, hvorigennem teknikker, teknologier og teorier udvikles løbende og dermed som et bræt af felter, der langsomt bliver udfyldt.

10.1 Del 1: Definition og eksistens af bestemt integral

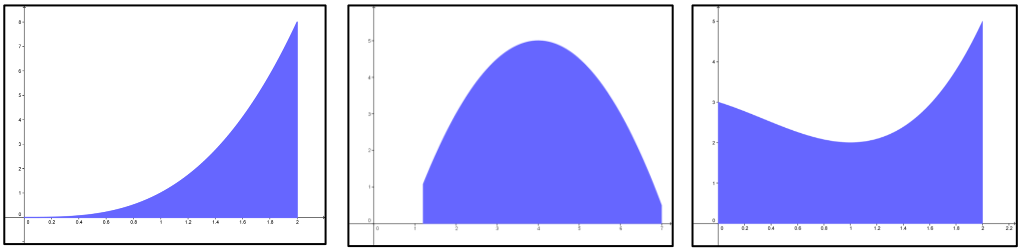
Opgave 1 var et forsøg på at lade eleverne møde de store spørgsmål, som blev anført i den epistemologiske referencemodel:

> Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde?
> Q_1: Findes arealet af en forelagt punktmængde?
> Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?

Disse skulle således motivere arbejdet med forløbet, og opgave 1 skulle udgøre den første af de seks faser i den didaktiske proces, *det første møde*, hvor eleverne skulle diskutere begrebet *areal* på baggrund af følgende tre spørgsmål:

- Tegn tre figurer som I kan beregne arealet af, og forklar hvordan arealet beregnes.
- Diskutér om de tre punktmængder på næste side har et areal, og hvis ja, om I kan beregne arealet.
- Hvis vi antager, at de tre punktmængder har et areal, hvad kunne I så sige om disse tal? Angiv fx nogle tal, der er større eller mindre end arealerne, gæt på hvad værdierne ca. kunne være, osv.

Delopgave 1.1, 'Tegn tre figurer som I kan beregne arealet af, og forklar hvordan arealet beregnes' skulle minde eleverne om de teknikker, som de allerede var bekendt med. Disse teknikker skulle efterfølgende benyttes til at udvikle ufuldstændige teknikker til at bestemme en eksakt eller tilnærmet værdi, som ville kunne tilskrives arealet af de tre punktmængder nedenfor.



Figur 8: De tre figurer, som indgår i opgave 1

Udforskningsfasen skulle fortsætte i forbindelse med den planlagte opsamling af opgave 1, hvor eleverne skulle dele deres overvejelser og ufuldstændige teknikker, og hvor læreren skulle forsøge at få eleverne til at holde fast i opdelinger ved hjælp af rektangler.

I opgave 2, 3 og 4 blev det nødvendigt at guide eleverne, set i forhold til de forskningsspørgsmål jeg arbejdede ud fra samt den valgte teoretiske ramme. Jeg valgte at konstruere tre opgaver omkring bestemmelse af en delintervallængde samt beregning af en venstre- og højresum for henholdsvis en aftagende og en voksende funktion, og disse skulle således konkretisere elevernes arbejde med udforskningsfasen. Det tekniske arbejde skulle, ved brug af allerede kendte teknikker, hjælpe eleverne til at udvikle en upræcis teknik relateret til de store spørgsmål, Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde og Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?

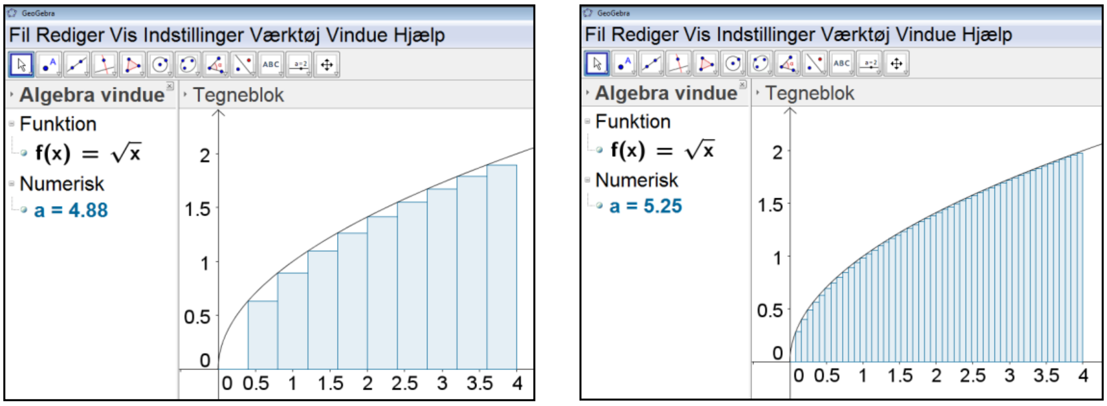
Desuden skulle de tre opgaver forberede eleverne på lærerens institutionalisering det bestemte integral fra a til b af en funktion f som grænseværdien for venstresummen, når antallet af intervalinddelinger går mod uendelig. En sidste grund til konstruktionen af opgave 2, 3 og 4 var, at disse skulle lette og danne grundlag for arbejdet med matematikprogrammet GeoGebra. Jeg havde planlagt en kort opsamling efter opgave 3, hvor læreren skulle understrege forskellen på en venstre- og højresum og opskrive venstresummen fra opgave 3 med algebraisk notation på tavlen, igen for at forberede eleverne på de næste opgaver.

I den efterfølgende opgave 5 lod jeg eleverne inddrage CAS-værktøjet GeoGebra, da de gennem de forrige opgaver havde udviklet praktiske midler til at kunne evaluere på de resultater de ville opnå ved hjælp af de instrumenterede teknikker, og dette ville endvidere sikre, at eleverne ville være bevidste om, hvordan resultaterne i GeoGebra var fremkommet. Jeg så en række fordele ved at inddrage GeoGebra, og den første af disse var, at eleverne skulle benytte GeoGebra til at verificere en tidligere beregnet venstre- og højresum. Desuden mente jeg, at de tilhørende visuelle illustrationer, som vises i GeoGebra kunne støtte begrebsdannelsen i forbindelse med begreberne venstre- og højresum, og jeg var således opmærksom på, jf. læreplanens afsnit 3.3 (bilag 10) at CAS-værktøjer ikke blot benyttes til at udføre komplicerede beregninger, men også understøtter færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.

Ved hjælp af GeoGebra kan en given sum for eksempelvis 100 intervalinddelinger nemt og hurtigt beregnes, hvilket gør det muligt at undersøge summerne for et stort antal delintervaller og derved muliggøre eksempler, som ikke ville kunne betragtes ved brug af udelukkende ikke-instrumenterede teknikker. I forlængelse af dette var det klart en fordel, at GeoGebra desuden kunne illustrere og synliggøre den fælles grænseværdi for venstre- og højresummen (når antallet af intervalinddelinger øges). Den sidste fordel jeg anså som væsentlig var, at arbejdet med de instrumenterede teknikker ville gøre det muligt at realisere et elevarbejde på et teknologisk-teoretisk niveau omkring sammenhængen mellem summerne og et voksende antal intervalinddelinger, samt negative summer. Jeg håbede således på, at eleverne kunne forbinde praktiske og teoretiske aspekter omkring venstre- og højresummer, og at dette samtidig ville udvikle en bedre forståelse for de to begreber.

I lyset af ATD indgår både den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase således i opgave 5, 6 og 7. Hver af de tre opgaver består af en indledende teknisk fase, hvorigennem eleverne kan udvikle de instrumenterede teknikker, og en efterfølgende teknologisk-teoretisk fase, i hvilken eleverne kan opbygge en teknologi, som forbinder og beskriver teknikkerne.

Eksempelvis gør opgave 5 det muligt at udvikle en instrumenteret teknik til at udregne henholdsvis venstre- og højresummen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, for 4, 10, 50, 100 og 500 inddelinger af intervallet [0,4]. På nedenstående figur illustreres det, hvad der vises i GeoGebra, når venstresummen ønskes bestemt for 10 og 50 inddelinger.



Figur 9: Beregning af venstresum vha. GeoGebra

Intentionen var, at de efterfølgende teknologiske spørgsmål disse spørgsmål eksempelvis omkring sammenhængen mellem en venstresum og antallet af intervalinddelinger, ville igangsætte en diskussion i elevgrupperne, og at tabellen med de ufyldte summer ville give anledning til en række elevkommentarer.

Begrundelsen for konstruktionen af opgave 7 var, at teorien omhandlende summer ikke skulle begrænses til blot at omhandle positive monotone funktioner, men at eleverne også skulle præsenteres for en ikke-monoton funktion, som derudover også antager negative funktionsværdier på det givne interval. Funktionen som jeg valgte var $f(x) = cos(x)$, og intervallet var [1,4]. Opgaven skulle vise, at det ligeledes er muligt at beregne venstre- og højresummer og at disse begreber er meningsfulde for en ikke-positiv funktion. Endvidere skulle opgaven give anledning til at observere og diskutere negative venstre- og højresummer. Det afsluttende spørgsmål i denne opgave var at begrunde de negative summer, og tanken var, at realisere et teknologisk arbejde, hvor eleverne skulle inddrage det foregående arbejde – specielt beregningerne af summerne udført i hånden.

I relation til den epistemologiske referencemodel skulle arbejdet med opgave 5, 6 og 7 have relation til de store spørgsmål Q_0: *Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde?* og Q_2: *Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?* (hvor, som nævnt i referencemodellen, at den forelagte punktmængde her er begrænset af grafen for en given funktion). Desuden omhandler arbejdet med opgave 5, 6 og 7 hovedproblemtypen Π_0: *Hvad menes der med det bestemte integral af en funktion* f *fra* a *til* b, *dvs.* $\int_a^b f(x)dx$*?*, samt opgavetypen $\mathrm{T_A}$: *Giv en meningsfuld definition af, hvad der menes med* $\int_a^b f(x)dx$.

Efter elevernes arbejde med opgave 7 planlagde jeg en klassediskussion mellem læreren og eleverne, hvor et mere teoretisk arbejde kunne realiseres. Opsamlingen skulle indledes med en diskussion af elevernes observationer herunder venstre- og højresummernes fælles grænseværdi, og desuden skulle læreren understrege, at eleverne nu havde udviklet en teknik til at bestemme en tilnærmet værdi af et givent areal (under antagelse af, at det findes) og institutionalisere følgende:

For en pæn funktion f defineret på intervallet $[a, b]$, med en inddeling $I: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, gælder:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Denne institutionaliseringsfase skulle således delvist besvare opgavetypen $\mathrm{T_A}$: *Giv en meningsfuld definition af, hvad der menes med* $\int_a^b f(x)dx$.

Tanken med den efterfølgende opgave 8 var, at lade eleverne etablere en forbindelse mellem integral og en funktions middelværdi på et givent interval, og derved opnå en ny fortolkning af det bestemte integral, og dermed omhandler opgave 8 hovedproblemtypen Π_3: *Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi* og opgavetypen $\mathrm{T_G}$: *Redegør for at* $\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *kan opfattes som middelværdien for* f *på intervaller* $[a, b]$.

Opgave 8 består af en indledende teknisk fase, hvor funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, og tre inddelinger af intervallet [2,5] betragtes. Eleverne skulle udvikle en teknik til at bestemme arealet af et rektangel, som var fremkommet ved en intuitiv forestilling om, at de tre rektangler, som angiver venstresummer, kan udglattes til et udglattet rektangel. I forlængelse af den tekniske fase består opgaven af en mere teknologisk-teoretisk fase, hvor den netop udviklede teknik skal generaliseres, og der betragtes derfor en vilkårlig funktion f og n inddelinger af intervallet $[a, b]$.

Formålet med den efterfølgende opsamling var, at eleverne ved hjælp af læreren skulle nå det teoretiske niveau, hvor læreren skulle gøre et forsøg på at bringe mening til det følgende:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n}\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

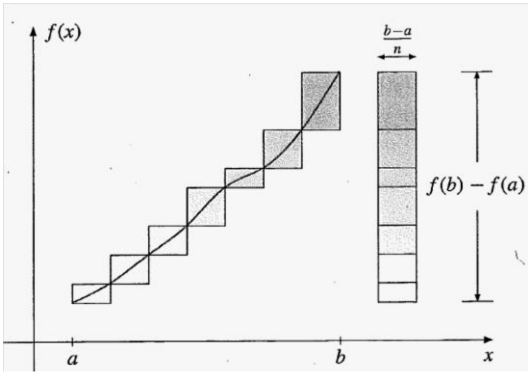
Læreren skulle institutionalisere, at tallet $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ kunne opfattes som en funktions middelværdi på det givne interval samt den værdi, som ville angive højden af det ”intuitive udglattede rektangel”.

Den næste hovedproblemtype jeg planlagde, at eleverne skulle arbejde med var Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes* og den tilhørende opgavetype T_B: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes.* Gennem opgave 9 og 10 skulle eleverne udforske og udvikle en umiddelbar teknik til opgavetypen T_B. Det tekniske arbejde skulle omhandle differensen mellem en række venstre- og højresummer for henholdsvis funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ og $f(x)=\frac{1}{x}$, og det efterfølgende teknologiske arbejde skulle bestå i at redegøre for de negative differenser samt at kommentere sammenhængen mellem differensen og antallet af delintervaller. Afslutningsvist skulle det begrundes, hvorfor det ikke er den samme differens der bliver negativ i opgave 9 som i opgave 10. Igennem dette arbejde skulle eleverne opbygge en teknologi, som kunne forbinde de udviklede teknikker, og gøre eleverne i stand til at forklare og kommentere på disse samt på de tilhørende resultater.

Den efterfølgende opsamling skulle bestå i, at læreren skulle gøre det klart for eleverne, at det grundet deres nuværende faglige niveau ikke er muligt at præsentere en præcis definition af, for hvilke funktioner det bestemte integral fra a til b findes, men at det findes for alle pæne (fx voksende eller aftagende) funktioner. I forlængelse af dette skulle læreren institutionalisere, at man viser, at en pæn funktion er integrabel ved at godtgøre for, at differensen mellem højre- og venstresummerne går mod 0, når antallet af intervalinddelinger går mod uendelig, dvs. $|H_n - V_n| \to 0$ for $n \to \infty$. Der skulle således ikke gives en fuldstændig redegørelse for teknikkerne tilhørende hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes* og de to opgavetyper, T_B: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes* og T_C: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ ikke findes*. Afslutningsvist skulle læreren relatere det forrige til den fælles grænseværdi eleverne tidligere havde arbejdet med i et forsøg på at give eleverne en forståelse af sammenhængen mellem de tre store spørgsmål og hovedproblemtyperne.

Opgave 11 omhandler også hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes*, og opgavetypen T_B: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes*. Opgaven tager udgangspunkt i funktionen $f(x)=x^2$ på intervallet [1,2] og fem intervalinddelinger, og det skal da vises, at funktionen $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2]. De to første delopgaver består i at opskrive og reducere udtrykket for differensen mellem højre- og venstresummen og indse, at summerne indeholder de samme led bortset fra leddet $f(b) \cdot \frac{b-a}{n}$ i den første sum, og leddet $f(a) \cdot \frac{b-a}{n}$ i den anden sum. Herefter ændres antallet af intervalinddelinger fra tre til n, og afslutningsvist skal grænseværdien for differensen for n gående mod uendelig diskuteres, så det kan konkluderes, at funktionen er integrabel. Tanken bag opgave 11 var, at denne skulle være en fortsættelse af det tekniske arbejde fra de to forrige opgaver, og at eleverne skulle udforske, udarbejde og blive fortrolige med en konkret teknik, og specielt skulle opgaven forberede eleverne på det teoretiske niveau, som læreren ville præsentere dem for i den efterfølgende opsamling.

Under denne opsamling skulle læreren præsentere eleverne for et teknologisk-teoretisk niveau ved at gennemgå beviset for, at *enhver funktion er integrabel* og supplere dette med nedenstående figur, så argumentet blev klarere og måske lettere for en større del af klassens elever.



Figur 10: Illustration til beviset for, at enhver monoton funktion er integrabel

Det skal bemærkes, at jeg bad læreren undgå brugen af ordet *monoton*, og i stedet præsentere sætningen som at *enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel*, da et af målene med designet var at befordre den tilsigtede viden med et minimalt brug af matematiske begreber og matematisk notation. Desuden noterede jeg i lektionsplanen, at beviset skulle udføres i fællesskab med eleverne, og begrundelsen for dette skal hentes i mine forskningsspørgsmål. Argumentet for at *enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel*, var en del af den tilsigtede viden, og netop elevernes kommentarer, spørgsmål og overvejelser (som ville komme til udtryk under den fælles gennemgang) ville afsløre *didaktiske muligheder, begrænsninger og udfordringer* og samtidig gøre det muligt at vurdere, hvorvidt *elever kan opnå en mere præcis tilgang til spørgsmålet vedrørende definition og eksistens af det bestemte integral*. Grundet elevernes forrige arbejde med opgave 11 mente jeg, at det skulle være muligt at inddrage eleverne og få dem til at forstå og kommentere de enkelte trin.

Afslutningsvist skulle læreren gentage, hvad der forstås ved det bestemte integral fra a til b af en funktion f, samt hvordan det vises, at en pæn funktion f er integrabel, og derved ville denne institutionaliseringsfase blive den afsluttende fase i forhold til udviklingen af den lokale matematiske organisation MO_2.

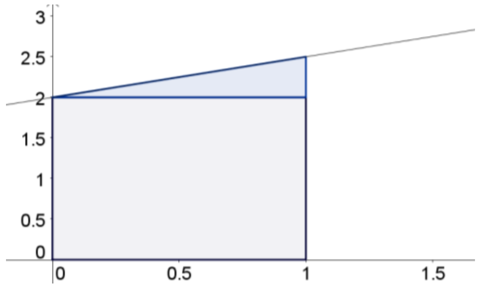
10.2 Del 2: Eksakt værdi af bestemt integral

Intentionen med den første del af det designede undervisningsforløb var at få den matematiske organisation MO_2 til at leve i en gymnasial sammenhæng og få givet mening til arealet under grafen for en funktion i form af det bestemte integral. Dette ville bevirke, at nye teoretiske spørgsmål ville melde sig – teoretiske spørgsmål knyttet til algebraen for funktioner og dermed knyttet til MO_1. Desuden skulle del 2 motivere det store spørgsmål, Q_2: *Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?* samt hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på intervallet* $[a,b]$, tilhørende MO_1.

Ideen med den anden del af forløbet var at etablere linket mellem MO_2 og MO_1, samt primært at realisere et arbejde med den teoretiske blok af MO_1. Del 2 skulle indledes med en introduktion af funktionen $A(x)$, og denne skulle defineres på følgende måde: $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, *hvor funktionen f betragtes på intervallet* $[a,b]$, *og* $a \leq x \leq b$. Desuden skulle læreren gøre eleverne opmærksomme på, at x nu ville betegne den øvre grænse for integralet, og der derfor ville være behov for et variabelskift. Afslutningsvist skulle læreren forklare sammenhængen mellem funktionen $A(x)$ og et givent areal under en graf, samt få eleverne til at overveje, hvorfor $A(a) = 0$.

Denne introduktion skulle gøre eleverne i stand til at påbegynde et fornuftigt arbejde med opgave 12, som omhandler hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion*, og arbejdet med opgavetypen T_D: *Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om A'?* Jeg planlagde, at hver gruppe skulle bestemme $A(1)$ for en given lineær funktion, men valgte at gruppernes lineære funktioner skulle være forskellige i håbet om at eleverne ville indse, at sammenhængen $A'(x) = f(x)$ gælder i almindelighed.

Den tænkte teknik til at beregne $A(1)$ var at opdele området under grafen i to figurer, et rektangel og en trekant – to figurer som eleverne ville kende arealformlerne for.



Figur 11: Opdeling af området, som betragtes i opgave 12

Efterfølgende skulle den samme strategi benyttes til at bestemme et udtryk for $A(x)$, som herefter skulle differentieres. Afslutningsvist består opgave 12 i at kommentere på det differentierede udtryk, og derved skabe en teknologi, som forbinder teknikken til at finde et udtryk for $A(x)$ og teknikken til at differentiere $A(x)$. Ideen var at opgave 12 endvidere skulle forberede eleverne på det efterfølgende teoretiske arbejde.

Jeg planlagde en kort opsamling af denne opgave, hvor hver elevgruppe på tavlen skrev deres funktion $f(x)$ samt det differentierede udtryk for $A(x)$. Læreren skulle herefter i relation til hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion* institutionalisere, at der i almindelighed gælder, at hvis f er en pæn funktion defineret på intervallet $[a, b]$, da er $A(x)$ differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

I forlængelse af denne korte institutionaliseringsfase planlagde jeg, at eleverne i opgave 13 skulle arbejde med opgavetypen $\mathrm{T_E}$: *Vis at $A'(x) = f(x)$, for en pæn vilkårlig funktion f*, og derved udvikle en teori samt forberede den efterfølgende institutionalisering. Specielt skulle det i forbindelse med denne opgave kommenteres, at hvis en funktion f betragtes på et meget lille interval vil funktionen være enten voksende eller aftagende på dette lille interval, og at en voksende eller aftagende funktion f på et meget lille interval kan betragtes som næsten konstant. På baggrund af dette samt definitionen af det bestemte integral består opgave 13 i at redegøre for det følgende:

- $A(x_0 + h) - A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$
- $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0) \cdot h$ og $f(x_0 + h) \cdot h$
- $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$, for små værdier af h

Konklusionen på opgave 13 er at bestemme differentialkvotienten for A i punktet x_0 og derved fuldende beviset. Da jeg konstruerede denne opgave var jeg sikker på, at den ville volde problemer for mange af eleverne i forbindelse med udførelsen af det designede undervisningsforløb, men jeg havde en ide om, at et par fagligt stærke elever ville kunne producere et rimeligt løsningsforslag. Hvis det var muligt, ønskede jeg, at en elev skulle institutionalisere det teoretiske resultat og det tilhørende bevis, men i lektionsplanen kommenterede jeg, at læreren havde mulighed for at reagere undervejs, for at sikre en faglig acceptabel institutionaliseringsfase. Afslutningsvist ønskede jeg at læreren påpegede at argumentet gælder for en vilkårlig funktion på trods af, at opgaven tog udgangspunkt i en positiv funktion.

Eleverne havde forinden mit forløb arbejdet med stamfunktioner og kendte til at *en funktion F kaldes en stamfunktion til funktionen f, hvis $F'(x) = f(x)$*, og *hvis F_1 og F_2 i et interval er stamfunktioner til en funktion f, er forskellen $F_1 - F_2$ konstant*. På baggrund af dette mente jeg, at eleverne ville finde opgave 14 tilgængelig. Opgaven skulle omhandle hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på intervallet* $[a, b]$ tilhørende MO1, men arbejdet var relateret til opgavetypen T_F: *Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om $A(b)$?*

Eleverne skulle gennem en række konstruerede delopgaver nå frem til følgende teoretiske resultat: *Hvis f er en pæn funktion defineret på intervallet* $[a, b]$*, og F er en stamfunktion til f, da gælder $A(b) = F(b) - F(a)$*. Teknikken til at udføre argumentet for dette resultat tilhører den praktiske blok af MO_2, men resultatet tilhører den teoretiske blok af MO_1. Jeg kommenterede i lektionsplanen, at læreren måtte vurdere om eleverne havde behov for en opsamling for at få præciseret og institutionaliseret argumentet yderligere.

Den sidste opgave som jeg konstruerede i forbindelse med dette design var opgave 15, som i forlængelse af den forrige opgave ligeledes omhandler hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på intervallet* $[a, b]$. Eleverne skulle på et praktisk niveau anvende den udviklede teori til at beregne $A(2) = \int_{0.5}^2 f(t)dt$ eksakt for funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$, og tanken bag dette tekniske arbejde var, at dette skulle muliggøre en konsolidering af den nyetablerede teori. I relation til den epistemologiske referencemodel vil teknikken tilhørende denne opgave være en sammensætning af delteknikkerne τ_0: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), hvor\ F' = f$ og τ_6: Tabel over stamfunktioner for "elementære" funktioner, og derved kan den opgavetype, som indeholder opgave 15 karakteriseres ved T_{06}.

Som afslutning på opgave 15 og derved på hele forløbet ønskede jeg, at en institutionaliseringsfase skulle realiseres. Jeg planlagde, at læreren skulle understrege, at det forrige resultat gjorde det muligt at bestemme en eksakt værdi af et bestemt integral, og herefter skulle læreren give en tydelig identifikation og definition af de to lokale matematiske organisationer.

11. Metodologi

Mine forskningsspørgsmål, som indgår i problemformuleringen beskriver, hvad jeg ønsker at undersøge i forbindelse med dette speciale og specielt i forbindelse med udførelsen af designet, og jeg valgte i forbindelse med udførelsen at indsamle en mængde af data, som senere skulle behandles og analyseres. Jeg vil i dette afsnit kort kommentere på de valg jeg tog i forbindelse med dette.

Jeg valgte at indsamle data i form af lydoptagelser af udvalgte gruppers arbejde med opgaverne, elevernes skriftlige besvarelser, samt videooptagelser af de fælles introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger. I de første to lektioner foretog jeg lydoptagelser af alle grupper, for på baggrund af disse at udvælge fire grupper, som jeg optog i de resterende seks lektioner. De fire grupper blev udvalgt således, at (1) det faglige niveau i de fire grupper var varierende, (2) de udvalgte grupper arbejdede intenst og seriøst, (3) grupperne havde en god evne til at diskutere de givne opgaver, og (4) de deltog aktivt i forbindelse med lærerstyrede opsamlinger ved tavlen. Grunden til jeg valgte at fokusere på fire grupper var, at jeg ikke ville have tid til at behandle en større mængde af data. Endvidere valgte jeg efter hver lektion at kopiere elevernes individuelle besvarelser. Jeg havde forinden gjort eleverne opmærksomme på, at de kun skulle skrive på de udleverede opgaveark, og at der var indsat tekstbokse til eventuelle noter i forbindelse med de løbende introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger. Det sidste data jeg indsamlede var de videooptagelser jeg optog under alle introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger, hvor både læreren og eleverne deltog. Andet data kunne have været indsamlet, eksempelvis kunne jeg have valgt at interviewe læreren samt eleverne, eller jeg kunne have afsluttet forløbet med en prøve, men den udvalgte dataindsamling virkede fornuftig set i forhold til mine forskningsspørgsmål.

Den efterfølgende databehandling bestod i at analysere den indsamlede mængde af data, og derved danne grundlag for en a posteriori analyse. Før jeg kunne foretage en sådan analyse gjorde jeg mig det klart, hvordan jeg skulle bearbejde og behandle det indsamlede data, og hvad jeg (løst sagt) ledte efter. Begrundelsen for min dataindsamlingen og databehandling skal findes i mine forskningsspørgsmål, som dannede nogle konkrete og velbegrunde rammer for, hvilket data jeg ønskede at indsamle samt, hvordan dette efterfølgende skulle analyseres.

12. A posteriori analyse af den realiserede didaktiske proces

I det følgende vil jeg analysere det observerede elevarbejde, som indtraf i forbindelse med udførelsen af det designede undervisningsforløb omkring det bestemte integral. A posteriori analysen skrives på baggrund af det indsamlede data, som udgøres af en række videooptagelser af de fælles introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger, de enkelte elevbesvarelser samt lydoptagelser af udvalgte gruppediskussioner. Desuden refereres der løbende til den epistemologiske referencemodel, og det skal bemærkes at bilag 6 indeholder en tabel, hvori den realiserede didaktiske proces er simplificeret og konkretiseret. Desuden vil der indgå en række uddrag fra de transskriberede lydoptagelser og videooptagelser, og i det følgende vil de angivne sekvenser være at finde i bilag 7, som indeholder transskriberinger af elevarbejdet, og når der refereres til en given opsamling, vil hele transskriberingen af denne være at finde i bilag 8.

12.1 Lektion 1 og 2

Ifølge den antropologiske teori for didaktik kræver enhver didaktisk proces et første møde med den matematiske organisation som ønskes skabt. Som beskrevet i a priori analysen udgjorde opgave 1 i designet dette første møde, som viste sig kun delvist at fungere. Eleverne skulle diskutere om de tre punktmængder i deres opgaveark havde et areal, og hvis de mente dette, skulle de herefter fremsætte mulige ufuldstændige metoder til at beregne disse tre arealer. Det, der uden tvivl fejlede var, at eleverne straks forsøgte at bestemme arealerne, i stedet for først at diskutere om disse arealer fandtes. Opgaven formåede således ikke at få etableret en diskussion af de to store spørgsmål Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde? og Q_1: Findes arealet af en forelagt punktmængde? En del grupper kommenterede slet ikke på diskussionen af Q_1 som opgaven bad om, mens andre hurtigt og (ud fra deres tonefald at bedømme) indlysende konkluderede, at de tre punktmængder selvfølgelig havde et areal. Hvorfra eleverne havde denne klare opfattelse, vil jeg ikke diskutere i dette speciale. Følgende er et uddrag af transskriberingen af sekvens 1 (bilag 7), og illustrerer netop det før beskrevne:

Elev B læser opgaveformulering til delopgave 2.

- Elev B: Det har vi ikke lært jo.
- Elev A: Diskuter om de på næste side har et areal.
- Elev C: Og hvis ja, kan I beregne.
- Elev A: Nårh vi skal bare se om vi kan beregne arealet af de her.
- Elev B: Det kan vi godt jo. Altså hvis vi har to punkter på den jo, ikke? Så kan vi godt jo. Det tror jeg ikke er noget problem.
- Elev C: Hvordan vil du så regne, altså, det første.

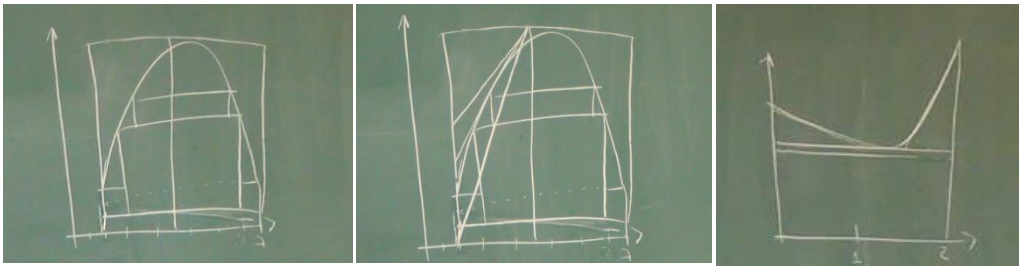
- Elev B: Jamen det eneste vi skal, er overvejelser om det er om, hvad hedder det, om vi godt kan.
- Elev C: Det tror jeg godt man kan.
- Elev A: Altså alle sammen har et areal jo.
- Elev C: Det kan godt være de har et areal, men hvilken formel kan vi så bruge for at regne det her ud.
- Elev B: Det er det, der er spørgsmålet, men vi skal tænke på det, for vi kan ikke argumentere for det, fordi vi ikke har lært om det.
- Elev A: Alle har et, man skal bare bruge sin øh baggrundsviden.
- Elev B: Ok, så vi siger alle har et areal, og derfor kan man godt lave overvejelser.
- Elev A: Problemet er bare om vi kan beregne arealet. Vi kan putte det ind i en computer og finde arealet.

Den efterfølgende udforskningsfase fungerede godt, da eleverne havde mange bud på mulige teknikker til at bestemme en tilnærmet værdi til arealet af de tre punktmængder, og der var en klar forbindelse mellem deres overvejelser og delopgave 1.1 (tegn tre figurer som I kan beregne arealet af og forklar, hvordan arealet beregnes). Følgende uddrag er igen taget fra sekvens 1, og elevgruppen diskuterer her, en teknik til at bestemme de tre arealer, som de bestemt mener findes:

- Elev B: På en computer kan vi, kan vi nemt regne… Jeg har skrevet, på en computer kan vi nemt regne arealet af alle tre figurer.
- Elev A: Men øh jeg tænkte på.
- Elev B: Men problemet er så, hvordan man kan gøre det teoretisk.
- Elev A: De er svære at beregne arealet af. Man skal dele dem op.
- Elev C: Hvordan vil du dele dem op?
- Elev B: Vi kan regne det ud teoretisk.
- Elev C: Det vil sige halvdelen af den, og så regner du den ud, og så den ud.
- Elev A: Vi laver bare flere af de her altså.
- Elev B: Jeg tænkte på, vi kan også dele dem op, altså hvor vil vi finde arealet fra jo. Altså hvis det for eksempel er her til her ikke, så skal vi bruge de her to rum til noget jo.
- Elev C: Jeg tror ikke vi kan, altså, jeg tror ikke der er en formel, som det kan beregnes med. De her skæve figurer.
- Elev A: Jo, vi kan godt finde arealet af dem.
- Elev B: Det er problemet, hvordan vi skal gøre teoretisk. Hvilken formel.

Elevdiskussion viser således tydeligt, at eleverne godt kan se, at der er et problem, og at de hurtigt ønsker at dele punktmængderne op i flere dele. Desuden kommenterer elev A, at de *bare skal lave flere af de her,* hvilket antyder, at de har fat i en tilnærmelsesproces, som dog må siges at være ustruktureret og ufuldstændig. Mine feltnoter, de skriftlige elevbesvarelser og de 9 lydoptagelser understreger, at de to tidligere eksempler viser det generelle billede af elevarbejdet med opgave 1.

Videooptagelsen af opsamlingssessionen af opgave 1 viser tydeligt, at eleverne var engagerede og mange elever deltog aktivt. Transskriberingen af denne videooptagelse afslører, at opsamlingen ikke indeholder en diskussion af om de tre punktmængder har et areal, hvilket der vendes tilbage til i forbindelse med diskussionen af forløbet i afsnit 13. Læreren lod løbende elever komme til tavlen og vise deres bud på en umiddelbar teknik til at bestemme det areal, som de mente fandtes. En fælles teknik for alle grupper var at inddele den givne punktmængde i flere forskellige kendte figurer, og nedenfor ses et par eleveksempler på dette.



Figur 12: Elevforslag til delopgave 1.1

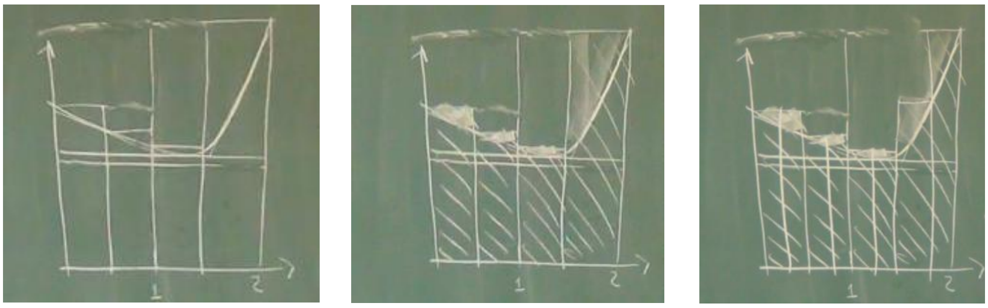
Foruden videooptagelsen af opsamlingen, findes i bilag 8 en transskribering af hele opsamlingssessionen 'Opsamling af opgave 1', hvorfra følgende stammer:

- Læreren: Ja rektangel, den tager vi også. Godt, hvis vi nu går over til de her tre figurer her, kan vi på nogen måde komme i gang med at beregne arealet af sådan nogle?
- Elev C: Vi ved de alle sammen har et areal ikke, og så figur 2 for eksempel, så kan man først dele den op i rektangler, og så kan du dele den op i flere bitte små stykker som trekanter.
- Læreren: Hvordan skulle jeg finde et rektangel?
- Elev C: Må jeg prøve at vise dig det?

Elev C går op til tavlen, og retter først lidt på lærerens skitse af figur to.

- Elev C: Den går sådan her jo. Så ville jeg tage herfra og herud til, og så ville jeg gå ned herovre, så har jeg et rektangel. Det er ikke helt præcist, og så derefter ville jeg dele den op i trekanter.

Dette uddrag viser for det første endnu en elevs klare opfattelse af, at de tre figurer alle har et areal. Elevens metode til at bestemme arealet af figur 2 bygger på en inddeling i et rektangel og i flere små trekanter, og eleven kommenterer, at figuren skal *deles om i flere bitte små stykker som trekanter*, og har derved allerede lidt fat i den tænkte teknik. Transskriberingen viser desuden, at en anden elev sammenligner området med en halvcirkel, hvilket læreren påpeger ikke er helt præcist. Efter en række elevforslag, der ikke indeholdt ideen med rektangler, måtte læreren uden det store elevbidrag tegne to og herefter fire rektangler og desuden justere de enkelte rektanglers højder, som nedenstående tavleskitser viser.



Figur 13: Figurer tegnet af læreren under opsamlingen af opgave 1

Følgende uddrag fra samme sekvens viser, at eleverne selv indser, at der er noget ekstra, og at de ønsker at minimere dette overskydende areal:

- Elev N: Men du skal stadig trække det ekstra fra.
- Læreren: Der er stadig en fejl ja. Det her er en fejl, det her er en fejl og det her er en fejl (*læreren skravere det overskydende område, se figur 13*).
- Elev B: Kan vi ikke undlade de der fejl?
- Læreren: Kan vi på nogen måde gøre det bedre, så det kommer til at passe bedre?
- Elev G: Sætte dem i helt tynde rektangler.
- Læreren: Ja man kunne gøre dem tyndere endnu.
- Elev B: Nårh.
- Elev A: Du gør det bare endnu mere besværligt.
- Elev B: Han kommer tættere på jo. Nu bliver det unødvendige mindre.

Eleverne er således bevidste om, at der er en fejl, og det blot er en tilnærmet værdi, som de nu ville være i stand til at beregne. Uddraget viser desuden, at en elev endelig (efter ca. 15 min.) kommenterer, at en tilnærmet værdi til arealet ville blive mere præcis, hvis rektanglerne blev gjort smallere, og højderne blev justeret. Læreren redigerede tegningen på tavlen som figur 13 viser.

På baggrund af hele videooptagelsen kan det konkluderes, at eleverne umiddelbart ikke fandt approksimationen ved hjælp af rektangler anvendelig, hvilket jeg troede eleverne selv ville indse samt acceptere. Eleverne holdt i stedet længe fast i ideen om trekanterne og halvcirklen. Det viste sig, at brugen af rektangler ikke faldt eleverne naturligt, og efter lærerens forklaring af denne løst formulerede teknik, var eleverne stadig ikke overbeviste om, at denne teknik var enklere, hvilket elevkommentaren – *"du (læreren) gør det bare endnu mere besværligt"* – understreger.

Transskriberingen viser desuden, at læreren længe forsøgte at få eleverne til at indse, at man udelukkende kan benytte rektangler, men elevkommentaren (henvendt til læreren), *"hvad ville du gøre?"* illustrerer, at eleverne løber tør for ideer, og at de ønskede at få lærerens teknik til at bestemme en mere præcis tilnærmet værdi. Videooptagelsen afslører desuden, at eleverne fandt det svært at formulere og beskrive de teknikker de havde udviklet, hvilket understregede et behov for at udvikle et teknologisk-teoretisk miljø, som ville gøre eleverne i stand til at forklare og retfærdiggøre de anvendte teknikker samt producere nye.

Det efterfølgende adidaktiske elevarbejde var primært af teknisk art, hvor det via opgaverne blev nødvendigt at guide eleverne i den rigtige retning og derved muliggøre udarbejdelsen af den tænkte teknik. Eleverne arbejdede godt med opgaverne, men jeg observerede to matematiske elementer, som viste sig at være vanskelige for en betydelig del af grupperne. Det første vanskelige element bestod i besvarelsen af opgave 2 (intervallet [2,5] opdeles i tre delintervaller, bestem længden af hvert delinterval), hvor enkelte elever begyndte at måle på den talakse, som var indsat i opgavearket, og de måtte bede læreren om hjælp. Det andet element bestod i, at flere elever havde problemer med at bestemme højden af de rektangler, som indgik i henholdsvis venstre- og højresummen. Jeg observerede flere grupper, som forsøgte at aflæse højden ved hjælp af y-aksen, men som dog selv var klar over, at dette ikke var præcist. Læreren måtte over for flere grupper understrege, at de skulle beregne højden, og han blev nødsaget til at forklare, at brugen af funktionsforskriften ville give den præcise højde. Et eksempel, som viser problematikken omkring bestemmelse af de enkelte rektanglers højder er følgende uddrag af sekvens 5, hvor en elevgruppe arbejder med delopgave 3.2:

- Elev B: 1 gange med, hvor høj er den her? 0,35 ikke?
- Elev A: Nej, ikke 35, du kan i det mindste sige 39.
- Elev B: Hvorfor 39?
- Elev C: Ja, hvorfor 39, kan vi ikke bare sige 0,3?
- Elev B: Hvis du går direkte op.
- Elev A: Ærligt jeg mener det, så sig 38. Altså 0,38, det er ikke 35.
- Elev C: Det er 35.
- Elev A: Hvorfor kan jeg ikke få det til at passe.

Det viser tydeligt, at eleverne er uenige om aflæsningen af højden, og endnu et eksempel på dette højdebestemmelsesproblem ses i følgende uddrag af sekvens 7:

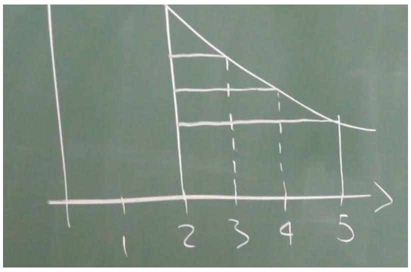
- Læreren: Kan I beregne højden der uden at aflæse men beregne den i stedet for, mere præcist?
- Elev A: Nårh, beregne den.
- Elev C: Uden at aflæse? Så kan man sige højde gange grundlinje jo, ikke?

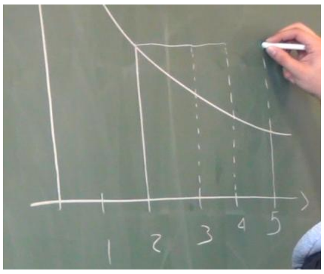
- Læreren: Jo, jo, men først skal vi jo aflæse, nej beregne, kan I beregne højden her?
- Elev C: Det kan man da ikke.
- Læreren: Når I rammer, I ved, hvad det er for en funktion ikke?
- Elev B: Nårh så kan man bare se…
- Elev A: Det er en eksponentiel.
- Læreren: Nej nej. Det står herovre.
- Elev A: Så skal man da have…
- Læreren: Det er 1 divideret med x. *Læreren forlader gruppen.*
- Elev B: En divideret med x?
- Elev C: Hvad?
- Elev A: En divideret med x. Det er tre, det vil sige en deles med 3, en tredjedel.
- Elev B: Hvor skulle jeg vide det fra?
- Elev A: Måske er det rigtigt. Jeg ved dette ikke. Jeg tror nok det er rigtigt sådan der. Altså en deles med x, x er der, så har vi, de er alle sammen 1 cm i bredden, i højden har vi en deles med x, det vil sige en over, nummer to er en fjerdedel, og den sidste er en femtedel. Fordi hvis det er en deles med x, og x-punktet her er 3, her er det 4, og her er det 5, og arealet er så en gange en tredjedel, det er en tredjedel, en fjerdedel og en femtedel. Hvis det er rigtigt.

Transskriberingen viser, at denne gruppe har behov for lærerens hjælp og specielt, at kun en elev i gruppen forstår hjælpen og dermed kan gøre brug af denne, men på trods af dette er eleven (elev A) stadig usikker på de enkelte beregninger.

Den tekniske fase, omkring udarbejdelsen af en teknik til at bestemme venstre- og højresummer for en given funktion på et givent interval, var således ikke en adidaktisk fase for et par elevgrupper. Læreren måtte afvige for den planlagte lektionsplan, da han ikke kunne begrænse sig til at besvare opklarende spørgsmål om, hvordan spørgsmålene skulle forstås. Dog arbejde langt de fleste grupper fornuftigt og selvstændigt med opgave 2 og 3.

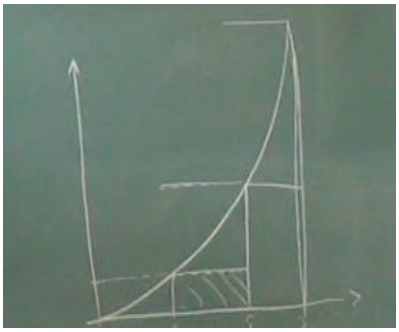
Læreren bad to elever gå til tavlen for at tegne en skitse af henholdsvis venstre- og højresummen, og nedenstående figur viser de to elevers skitser.





Figur 14: Venstre- og højresum tegnet på tavlen af to elever

På trods af, at lærerens forklaring af summerne samt nedenstående skitse (figur 15) ved den forrige fælles opsamling, fik begge elever ikke tegnet summerne korrekt. Med hjælp fra klassens andre elever, blev begge summer dog hurtigt redigeret, og desuden blev den beregnede venstre- og højresum skrevet op.



Figur 15: Lærerens illustration i forbindelse med forklaring af venstre- og højresum

Den tekniske fase fortsatte herefter ved brug af ikke-instrumenterede teknikker i opgave 4, og problemet fra opgave 2 med at bestemme en delintervallængde viste sig igen hos få elevgrupper. Det var tydeligvis udfordrende at bestemme længden af hvert delinterval, hvis intervallet [0,4] opdeles i tre lige store delintervaller, og i forlængelse af dette viste det sig desuden at være vanskeligt at bestemme delepunkterne, x_1 og x_2 (hvor $x_0 = 0$ og $x_3 = 4$). Jeg var forud for udførelsen af mit design overbevist om, at eleverne havde etableret en eksisterende viden omkring intervaller og længder, i et sådan omfang at denne viden kunne benyttes i forbindelse med andre emner. Jeg erfarede, at dette langt fra var tilfældet hos et par elevgrupper, og konsekvensen af dette blev at simple udregninger krævede en for stor arbejdsindsats og et for stort tidsforbrug.

Det tekniske arbejde i opgave 5, 6 og 7 bestod, som tidligere beskrevet, i at benytte matematikprogrammet GeoGebra. Nedenstående transskribering er et uddrag af sekvens 6, hvor en elevgruppe i forbindelse med besvarelsen af delopgave 5.2 (benyt GeoGebra til at tjekke jeres resultat for venstre- og højresummen fra opgave 4) opdagede en beregningsfejl i opgave 4.

Elev B beregner venstresummen ved hjælp af GeoGebra.

- Elev A: 1,38, vi havde fået…
- Elev B: 4,8.
- Elev A: Den første havde vi i hvert fald lavet rigtig.
- Elev B: Vent, lad os lige prøve at gøre det igen.
- Elev A: Det er fordi den beregner for det hele. Først laver vi sådan her, 1,33. Man kan også se her ikke, at det her burde give mere end 3,07.

De beregner venstresummen fra opgave 4 igen.

- Elev A: Det giver så 4,778, og så 4,778 gange 1,33, 6,35. Se nu passer det jo.
- Elev B: Det var vores kvadratrod vi havde lagt sammen forkert.

Eleverne gik således straks i gang med at rette deres fejl fra opgave 4 uden lærerens indblanding, og det viste sig at være fornuftigt at lade eleverne benytte GeoGebra til at verificere tidligere beregninger. Som nævnt i afsnittet omkring brugen af CAS i undervisningsmæssigsammenhæng er det netop en fordel at eleverne modtager en neutral feedback, og de får ikke direkte at vide, at deres beregning er forkert.

Endnu en gruppe gjorde på samme måde brug af GeoGebra til at tjekke og rette deres foregående beregning af højresummen, hvilket følgende uddrag af sekvens 4 viser:

- Elev B: Højresummen det er 6,38, og hvad fik vi vores højresum til?
- Elev B: Også deromkring.
- Elev A: Neeej.
- Elev B: Gjorde vi ikke?
- Elev A: Vi fik det til 4,83, hvordan kan det være? Måske skulle vi plusse den sidste sammen?
- Elev B: Ja hvis vi plusser med den sidste, så passer det.

De andre grupper arbejdede hovedsageligt tilsvarende adidaktisk med det tekniske arbejde i forbindelse med opgave 5, og læreren blev blot inddraget til eksempelvis at forklare, hvordan en kvadratrodsfunktion defineres i GeoGebra, og desuden forklare den sidste indtastning, <Position of rectangle start> i kommandoen, på trods af, at jeg havde forsøgt at forklare dette i opgavearket. Læreren valgte på grund af tiden at give eleverne for som lektie at udfylde tabellerne i opgave 6 og 7, hvilket få grupper ikke gjorde, og derfor måtte bruge tid på i den efterfølgende lektion 3.

12.2 Lektion 3 og 4

De observationer jeg gjorde mig i begyndelsen af lektion 3 viste alle, at det tekniske arbejde udført ved hjælp af GeoGebra var overkommeligt og bestemt havde en positiv effekt på elevdeltagelsen. Endvidere arbejdede eleverne med spørgsmål omkring forbindelsen mellem hhv. venstre- og højresummerne og et voksende antal intervalinddelinger, som skulle skabe et teknologisk-teoretisk miljø, hvori den udviklede teknik kunne beskrives, og teknikkens anvendelighed kunne diskuteres.

Mere præcist betragtede eleverne i opgave 5 og 6 henholdsvis funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ og $f(x) = \frac{1}{x}$ og diskuterede, hvad der sker med henholdsvis venstre- og højresummerne, når antallet af inddelinger vokser. Disse spørgsmål blev af hovedparten af eleverne besvaret meget kortfattet med ordene *vokser* og *aftager*, og kun få elever bemærker, at summerne nærmer sig en fælles grænseværdi, når antallet af inddelinger vokser, og noterede eksempelvis, at *tallene kommer tættere på hinanden* eller at *tallene slutter på samme punkt*.

Et par stærke elever indser dog allerede denne fælles grænseværdi, da de beregner summerne, hvilket følgende elevdiskussion fra sekvens 6 illustrerer:

Følgende er elevdiskussionen forud for beregning af den sidste højresum:

- Elev B: Skal jeg være ærlig? Jeg tror den falder til 32 nej 34.
- Elev A: Den falder til 5,33 også, for begge to. Eller næsten det samme, og hvis man bliver ved og ved så kommer de samme (e*lev A læser delopgave 5 op).*
- Elev B: Den stiger
- Elev B: Hvad sker der med højresummen, den vokser, nej falder. Den er voksende og aftagende, skal vi sige det?
- Elev A: Lad os spørge om det her faktisk, om vi skal skrive mere, det kan godt være vi skal skrive mere.
- Elev A (til læreren): Vi lavede den her ikke, og så havde vi fundet for venstresummen og højresummen. Og vi kunne se på venstresummen at den var voksende og faldende for højresummen, og de nærmer sig det samme tal. Det blev mere præcist. Behøver vi skrive mere?
- Læreren: Prøv at skriv det ned, formuler det du lige har sagt.

Udover elevens hurtige opdagelse af den fælles grænseværdi, skal det også bemærkes, at elev A kommenterer, at *det vil blive mere præcist*. Hvad eleven konkret mener med *det*, er svært at vide, men eleven har dog en klar forståelse af, at der er tale om en tilnærmelsesproces, og at 'noget' bliver mere præcist for et stort antal delintervaller.

Den efterfølgende begrundelse for de negative venstre- og højresummer for funktionen $f(x) = \cos(x)$ som indgik i opgave 7, viste sig at være udfordrende for samtlige elever. Jeg observerede et par elevgrupper, som ikke var i stand til at påbegynde en diskussion af dette og ikke bad læreren om hjælp, hvilket flere lydoptagelser også bekræfter. Andre grupper spurgte løbende læreren om hjælp, og jeg observerede, at læreren bad en gruppe genoverveje, hvordan venstresummen for fire intervalinddelinger beregnes uden brug af instrumenterede teknikker. Dette igangsatte ikke en diskussion i elevgruppen, og læreren spurgte dem om, hvordan arealet af hvert rektangel var blevet beregnet. Gruppen var stadig tavs, hvilket må være en indikation på, at eleverne stadig ikke var i stand til at redegøre for de negative summer, og derfor spurgte læreren til sidst, om nogle af disse arealer (red. rektanglernes arealer) ville blive negative. Nu bidrog eleverne til diskussionen og forklarede læreren, at en stor del af rektanglerne ville have

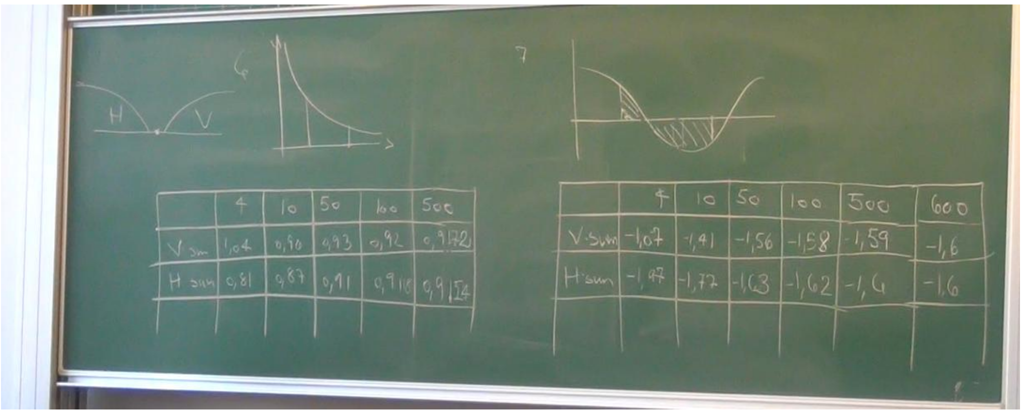
”*negative højder*” og dermed ”*negative arealer*”, og dette ville resultere i en negativ venstresum. I modsætning til dette, viser følgende uddrag fra sekvens 8, at denne elevgruppe delvist får begrundet de negative summer:

Elev A læser delopgave 7.5: Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative.

- Elev B: Fordi den går jo sådan her jo, den går nedenunder.
- Elev A: Det er fordi det cosinus jo.
- Elev C: Hvad for noget?
- Elev B: Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative. Fordi det er cosinus. Det er fordi at $f(x) = \cos(x)$.

Det hurtige svar, som eleverne noterer for herefter at arbejde videre med den efterfølgende opgave, er bestemt ikke fyldestgørende. Det er langt fra en præcis forklaring og redegørelse, og den korte elevdiskussion afslører, at eleverne ikke overvejer den bagvedliggende beregning af eksempelvis en venstresum for 10 intervalinddelinger. Andre lidt mere præcise elevbesvarelser var følgende: *(1) fordi den er under x-værdien, altså vi vil få negative tal, (2) fordi at mængden ligger for det meste nede under x-aksen, (3) fordi der er en større mængde, der er under 0 i y-aksen, dvs. negativ, summen bliver negativ,* og *(4) det bliver negativt fordi rektanglerne, der peger nedad har et negativ areal, og derfor bliver det samlede areal negativt.*

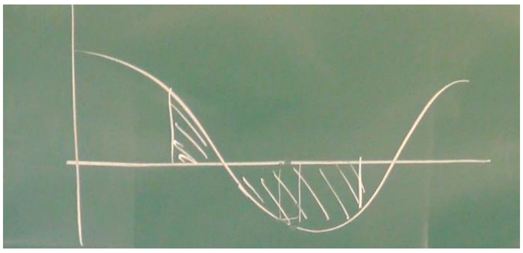
Jeg havde håbet at eleverne havde givet en mere fyldestgørende begrundelse og inddraget, at en venstresum angiver summen af de rektangler, hvis højder er funktionsværdierne af de venstre delintervalendepunkter, og at netop de negative funktionsværdier som cosinus antager på det givne interval, vil resultere i en negativ venstresum. Denne udfordring omkring begrundelsen for de negative summer, viste sig igen i den efterfølgende lærerstyrede opsamling, som tog udgangspunkt i de tre udfyldte tabeller, som blev skrevet på tavlen.



Figur 16: Opsamling af opgave 5, 6 og 7

Transskriberingen af denne opsamling (bilag 8) illustrerer, at eleverne havde opbygget dele af et teknologisk-teoretisk miljø, da de var i stand til at kommentere på og sammenligne tabelværdierne. En stor del af klassens elever var ivrige efter at dele deres observationer med resten af klassen, og det var tydeligt, at de havde forstået, at summerne ville nærme sig en fælles grænseværdi fra hver sin side, når antallet af delintervaller voksede. Desuden fornemmede jeg, at det forekom eleverne klart, at venstresummerne for en aftagende funktion ville aftage, og højresummerne for en aftagende funktion ville vokse (for et voksende antal delintervaller) samt, at det omvendte måtte gælde for en voksende funktion. Problemerne opstod i forbindelse med de negative summer. Følgende uddrag fra ’Opsamling af opgave 5, 6 og 7’ (bilag 8) viser, at elevens svar ikke er præcist og tilmed utrolig kortfattet:

- Læreren: De er begge negative ja, kan I forklare, hvorfor de bliver negative. Hvorfor får vi et negativt tal for arealet her, det er jo ca. det her område (*læreren tegner en skitse på tavlen, se figur 16*).
- Elev A: Lad mig forklare det.
- Elev C: Det er cosinus.
- Læreren: Ja det er cosinus, men hvorfor får vi et negativt tal her, for vores areal?
- Elev D: Fordi det går nedenunder, det er minus-tal.
- Læreren: Ja vi er jo under x-aksen her, dvs. de arealer vi får hernede, det beregner vi jo som vores funktionsværdi her, og så gange bredden, vores funktionsværdi vil være negativ.
- Elev A: Det er også fordi, at vores areal er større, når det er negativt, nedenunder, end når den er positiv.
- Læreren: Ja, alt det vi har under x-aksen her vil bidrage med en negativ værdi ikke, fordi det her nede så er større end det her oppe.

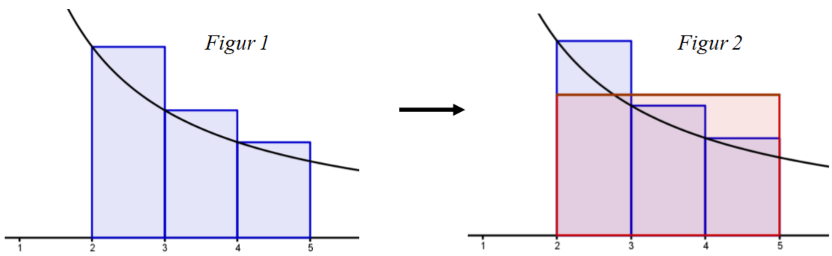


Figur 17: Lærerens illustration til gennemgang af delopgave 7.5

Det skal desuden kommenteres, at videooptagelsen afslører, at kun få elever markerer i forbindelse med redegørelsen for de negative summer, hvilket igen indikerer en delvis manglende forståelse, samt at arbejdet med de teknologiske spørgsmål forekom eleverne mere krævende. Desuden viser de skriftlige elevbesvarelser, lydoptagelserne af elevdiskussioner samt videooptagelsen af opsamlingen, at eleverne ikke umiddelbart er opmærksomme på og bevidste om, at grænseværdien, som fremkommer i tabellerne, er en tilnærmet værdi til et areal af en sådan punktmængde, som blev betragtet i opgave 1.

Den realiserede institutionaliseringsfase fungerede udmærket, og gennem læreren blev de matematiske elementer, som skulle blive en del af den tilsigtede matematiske organisation, identificeret. Desuden lykkedes det gennem læreren at nå et teoretisk niveau, og de essentielle teknologiske-teoretiske betragtninger blev præciseret i forhold til hovedproblemtypen Π_0: *Hvad menes der med det bestemte integral af en funktion f fra a til b, dvs. $\int_a^b f(x)dx$?* Som nævnt i a priori analysen, var det ikke tænkt, at eleverne skulle nå det teoretiske niveau uden lærerens hjælp, men jeg havde bestemt troet, at eleverne kunne inddrages i langt højere grad. Eksempelvis havde det været interessant, at lade eleverne forsøge at formulere, hvad den observerede grænseværdi er et udryk for, og se om de selvstændigt ville inddrage opgave 1.

I forbindelse med opgave 8 viste det sig at være vanskeligt at realisere både den tekniske og den teknologiske-teoretiske fase. Det tekniske arbejde bestod i at udarbejde en teknik til at bestemme arealet af et udglattet rektangel ved hjælp af de teknikker eleverne havde udviklet i det forrige arbejde samt en allerede kendt viden omkring beregning af gennemsnitsværdier. I opgaven blev funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ betragtet på intervallet [2,5], som blev opdelt i tre lige store dele, og følgende illustration var givet:



Figur 18: Illustration til opgave 8

Få elevgrupper bad læreren forklare ideen bag det udglattede rektangel, men langt de fleste elevgrupper var i stand til på egen hånd at gå i gang med opgaven, hvilket følgende uddrag fra sekvens 8 viser:

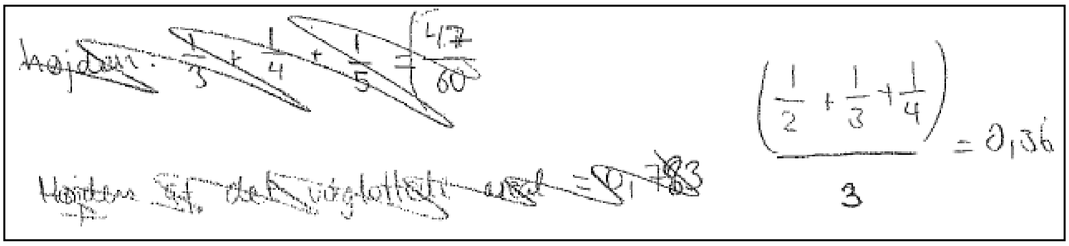
- Elev B: Ok. Så alle de her tre ikke, tilsammen, altså det areal vi får.
- Elev A: Nårh sådan der.
- Elev B: Så det der svarer til det der areal.
- Elev A: Ja, den her og den hers areal er det samme.
- Elev B: Men hvordan kan vi…
- Elev A: Og så skal vi finde bredden af den her.

En del af det tekniske arbejde var at bestemme bredden og højden af det udglattede rektangel, hvilket den førnævnte gruppe diskuterer i det følgende uddrag, som ligeledes er fra sekvens 8:

- Elev B: Og nu skal vi finde højde og areal. Højde hvordan kan vi, nårh det var det der, det var 1 divideret med.
- Læreren: Ja det ved vi jo ikke rigtig, hvad er, men der står heroppe…
- Elev B: Er et gennemsnit af tre tal.
- Læreren: Gennemsnit af tre tal ja.
- Elev B: Hvad for nogle tre, er det tre tal.
- Læreren: Ja, hvad tror I det er, prøv at kig på tegningen, på figuren.
- Elev A: Et gennemsnit af tre tal, 1, 2, 3.
- Læreren: Hvis det der areal skal være lige så stort som det der areal.
- Elev B: Så er det den her, den her og den her.
- Læreren: Ja, prøv at skriv det ned, sådan mere formelt.
- Elev A: Ok, hvad kan vi skrive?
- Elev B: Øh, højden af det udglattede er et gennemsnit af de tre højder fra figur 1. Men hvordan finder vi højderne fra figur 1?
- Elev A: Hvad har du skrevet.
- Elev B: Jeg skal lige spørge.
- Elev A: Højden af det udglattede er et gennemsnit af de tre højder fra figur 1.
- Elev B: Og så tror jeg det vil sige, 1 divideret med 2, 1 divideret med 3 og 1 divideret med 4, men jeg skal lige spørge, om det er rigtigt, for hvis det er rigtigt, kan vi også finde arealet, for så er det bare bredde gange højde.

På baggrund af dette antydes det, at specielt elev A har forstået ideen bag det udglattede rektangel samt beregningen af de enkelte rektanglers højder ved hjælp af funktionsforskriften. Desuden fortæller elev A, at han/hun skriver følgende: højden af det udglattede er et gennemsnit af de tre højder fra figur 1 (figur 18). Eleven formulerer således denne besvarelse selvstændigt, og det må kunne konkluderes på baggrund af hele den transskriberede sekvens (bilag 7), at eleverne er klar over, hvilke højder der skal beregnes et gennemsnit af, samt hvordan dettes gøres. Læreren inddrages senere i elevgruppens diskussion, og her forklarer elev A, at gruppen har tænkt sig at beregne de tre enkelte rektanglers højder for herefter at gange med bredden, så arealet bestemmes. Læreren påpeger, at summen af de tre enkelte rektanglers højder ikke er lig med højden af det udglattede rektangel, og at eleverne skal gøre en ting mere efter, at de har lagt de tre højder sammen. Elev A forklarer med det samme, at de også skal dividere. Den forrige elevdiskussion i samme sekvens, hvor læreren ikke er til stede viser, at eleven var klar over, at summen skulle divideres for at beregne et gennemsnit.

Det var bestemt ikke alle grupper, som fandt opgaven overkommelig, og det viste sig for en række elever at være problematisk for det første at forstå, at højden af det udglattede rektangel var et gennemsnit af tre tal og for det andet, hvilke tre tal der skulle tages et gennemsnit af. Desuden var det igen vanskeligt for et par elever, at bestemme højden af de tre rektangler, og på trods af det forrige arbejde blev læreren igen nødt til at påpege, at funktionsforskriften skulle benyttes. Et par elever havde desuden problemer med at vælge de rigtige x-værdier i forbindelse med at bestemme de tre rektanglers højder, hvilket nedenstående elevbesvarelse er et eksempel på.

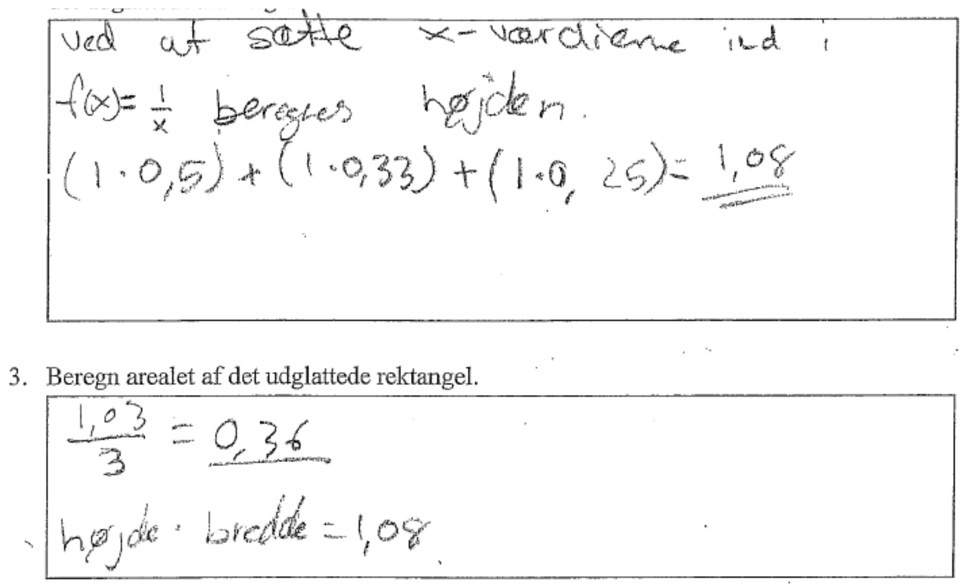

~~højden:~~ $\cancel{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}}$

$\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}{3}=0{,}36$

~~Højden af det udglattede rekt = 0,783~~

Figur 19: Elevbesvarelse af delopgave 8.2

Eleven har streget sit første forkerte svar ud, hvor højden af de tre rektangler, som angiver højresummen er skrevet i stedet for højden af de tre rektangler, som angiver venstresummen. Det tyder på, at den viden som eleven skulle have opnået i forbindelse med de forrige opgaver og opsamlinger, ikke er etableret fuldstændigt. Endnu en elevbesvarelse, som gik igen hos en anden gruppe var følgende:


Ved at sætte x-værdierne ind i $f(x)=\frac{1}{x}$ beregnes højden.

$(1\cdot 0{,}5)+(1\cdot 0{,}33)+(1\cdot 0{,}25)=\underline{1{,}08}$

3. Beregn arealet af det udglattede rektangel.

$\frac{1{,}03}{3}=\underline{0{,}36}$

højde · bredde = 1,08

Figur 20: Elevbesvarelse af delopgave 8.2 og 8.3

Denne besvarelse viser tydeligvis et manglende overblik, og jeg tvivler på elevens forståelse af både de enkelte rektanglers højder (herunder beregningen af disse), højden af det udglattede rektangel (herunder forbindelsen til det forrige) samt arealet af det udglattede rektangel, da der ikke er en klar forbindelse mellem opgaveformuleringen og det noterede elevsvar. I delopgave 8.2, hvori højden af det udglattede rektangel ønskes bestemt, noterer eleven venstresummen, og i delopgave 8.3, hvor arealet (af det udglattede rektangel) ønskes bestemt, angives dette areal, samt højden af det udglattede rektangel, som i princippet var besvarelsen af delopgave 8.2. Eleven har naturligvis fat i dele af den rigtige teknik og formår også at nå et korrekt svar, men igen tror jeg ikke, at den viden som eleven skulle have opnået i forbindelse med det forrige arbejde, er etableret i det omfang, som var intentionen. Andre elever gav en mere fornuftig besvarelse, eksempelvis nedenstående, hvori eleven skriver, ”*vi beregnede højden ved at sætte x-værdierne ind i* $f(x) = \frac{1}{x}$ *(men det var af de enkelte rektangel)*”:

vi beregnede højden ved at sætte x-værdierne ind i f(x) = $\frac{1}{x}$. (men det var af de enkelte rektangel.) For denne udglattede rektangel er hør det også 3 ho,

$(1 \cdot 0{,}5) + (1 + 0{,}33) + (1 \cdot 0{,}25) = 1{,}08$ er summen af højder

$\frac{\text{sum af højder}}{n} = \frac{1{,}08}{3} = 0{,}36$

n der er 3 delintervaller

3. Beregn arealet af det udglattede rektangel.

$0{,}36 \cdot 3 = 1{,}08$

højde · bredde

Det viser at den udglattede rektangel har samme areal, som de 3 tre rektangler

Figur 21: Elevbesvarelse af delopgave 8.2 og 8.3

Det skal bemærkes, at eleven noterer, at 1,08 er summen af højder, men den tilhørende udregning afslører, at det faktisk er venstresummen (dvs. det samlede areal af de tre rektangler). Eleven skriver i sin besvarelse af delopgave 8.3, *”Det viser at den udglattede rektangel har samme areal, som de tre rektangler”*, hvilket antyder, at eleven forstår, at 1,08 både er lig summen af rektanglernes højder og lig venstresummen, da delintervallængden er 1.

I den efterfølgende teknologiske-teoretiske fase, skulle eleverne betragte en vilkårlig funktion f på intervallet $[a, b]$ som opdeles i n delintervaller, og antage at $f(x) \geq 0$ på intervallet. Elevbesvarelserne afslører, at en række elever støder på problemer i denne fase. Mange elever har i deres besvarelser angivet funktionsværdierne $f(x_0)$ og $f(x_{n-1})$ som henholdsvis højden af det første og det sidste rektangel, men følgende uddrag (sekvens 9) af en lydoptagelse, hvori gruppen diskuterer delopgave 8.4 viser, at svaret ikke var indlysende:

- Elev A: Jeg ved det ikke, jeg forstår det ikke, forstår du det?

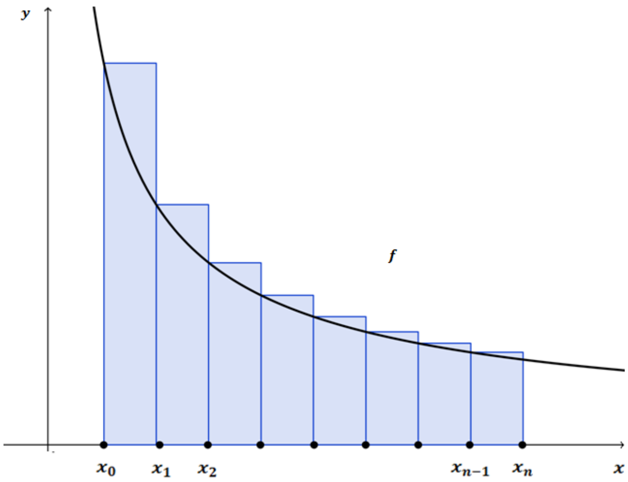
Eleverne er tavse og ukoncentrerede i et par minutter. (...)

- Elev C: Vi har ikke lavet den her jo. Vi har lavet opgave 3 og 2, vi mangler den her opgave 4. Hvordan skal jeg beregne højden, når der ikke er nogle tal?
- Elev B: Jo vi siger…
- Elev C: Bestem et udtryk?
- Elev B: Jo, funktionen og så sætter man b ind i funktionen. Er det ikke det? Skal vi ikke sige b minus, vi gjorde det lige før, vi skal bare gøre det uden tal. Hvad er dens funktion?
- Elev A: Vi ved jo ikke, hvad funktionen er.
  (*Eleverne går til pause og får efterfølgende ikke selvstændigt formuleret et svar)*

Elevsamtalen viser, at eleverne forstår opgaven, men at den mere generelle tilgang og de manglende tal gør opgaven vanskelig, hvilket specielt kommentaren fra elev C, *"Hvordan skal jeg beregne højden, når der ikke er nogle tal?"*, og kommentaren fra elev A, *"Vi ved jo ikke, hvad funktionen er"*, illustrerer. Endnu en gruppe fandt delopgave 8.4 vanskelig på grund af den vilkårlige funktion (sekvens 10):

- Elev A: Hvis de gerne vil have, at vi skal bestemme højden ikke, så skal vi have funktionen, og der står bare, at det er en vilkårlig funktion, så man kan ikke rigtig bestemme højden. For normalt har vi brugt en funktion til at sige, for eksempel en deles med x eller et eller andet.
- Elev B: Jamen skal vi så ikke også lave det der, er der ikke venstre og højresum her.
- Elev A: Det er det (e*lev A kalder på læreren).*
- Elev A: Hvis vi skal kunne bestemme et udtryk for højden af de her rektangler ikke, så har vi jo brug for en funktion. Men der står bare, at det er en vilkårlig funktion.
- Læreren: Jamen, hvad bliver højden af det første rektangel?
- Elev A: Det kommer jo an på, hvilken funktion vi har.
- Læreren: Ja, den hedder f.
- Elev A: Jamen så vil det være $f(x_0)$, og så af x, n'te.

Diskussionen viser, at elev A, præcis som elev C i forrige sekvens, undrer sig over, at en funktionsforskrift ikke er givet, men læreren formår ved blot at gentage opgaveformuleringen, at få elev A til hurtigt at svare, at højden af det første rektangel er $f(x_0)$. Herefter fortsætter en længerevarende diskussion mellem læreren og gruppen førend, at eleverne indser, at højden af det sidste rektangel ikke er $f(x_n)$, men derimod $f(x_{n-1})$ (se sekvens 10, bilag 7). Det er en lidt problematisk lydoptagelse at kommentere på, da eleverne og læreren diskuterer, hvor på figur 22 $f(x_0)$, $f(x_n)$ og $f(x_{n-1})$ findes, og desværre viser lydoptagelsen ikke, hvor læreren og eleverne peger henne. Det kan dog høres, at eleverne ikke finder det let at pege på de forskellige funktionsværdier, og en elev kommenterer desuden, at $f(x_n)$ *ikke er der* (dvs. på nedenstående figur 22).

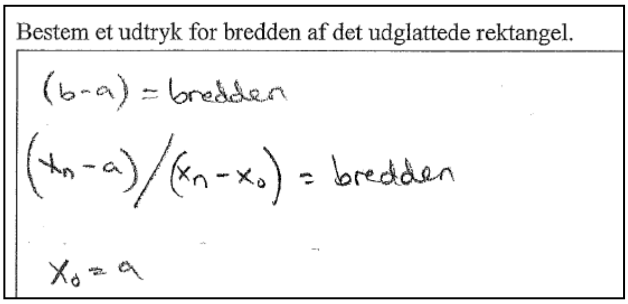


Figur 22: Figuren tilhørende delopgave 8.4

Transskriberingen af henholdsvis sekvens 9 og 10 viser, at eleverne mangler en forståelse for forbindelsen mellem konkrete og generelle tilfælde samt en forståelse af det visuelle. I de forrige opgaver, hvor eleverne beregnede højder af rektangler for givne konkrete funktioner, samt konkrete intervaller og delintervalpunkter, kunne eleverne sammenligne deres beregnede eksakte værdi med en aflæst værdi, og derved få en forståelse af forbindelsen mellem det konkrete tilfælde og den tilhørende visuelle repræsentation. Dette var ikke muligt i det mere generelle tilfælde, og det var langt fra kun den førnævnte gruppe, som havde store vanskeligheder med at angive $f(x_0)$ og $f(x_{n-1})$ som henholdsvis højden af det første og det sidste rektangel.

Efterfølgende skulle eleverne bestemme et udtryk for bredden af det udglattede rektangel, og dette var heller ikke en overkommelig delopgave for mange elever trods det tidligere arbejde med delopgave 2.2. Eksempelvis mener størstedelen af eleverne, at $(x_{n-1} - x_0)$ angiver bredden af det udglattede rektangel, mens andre noterer $(x_0 + x_n)$.

Nedenstående elevbesvarelse (figur 23) viser, at de to forskellige notationsformer for det givne interval for nogle elever gav anledning til forvirring.


Bestem et udtryk for bredden af det udglattede rektangel.

$(b-a)$ = bredden

$(x_n - a)/(x_n - x_0)$ = bredden

$x_0 = a$

Figur 23: Elevbesvarelse af delopgave 8.5

Jeg havde forinden ikke anset denne delopgave som krævende, og for nogle elever blev tidsforbruget desværre for stort og arbejdsindsatsen for omfattende, i forhold til det planlagte.

Kun få elever besvarede de to sidste delopgaver (8.6 og 8.7), og af disse har ingen af eleverne noteret en redegørelse for, at højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$. Følgende uddrag (sekvens 10) viser en kort elevdiskussion af delopgave 8.6, og lydoptagelsen understreger, at gruppen ikke havde besvær med at benytte den angivne notation:

Elev A læser delopgaven (8.6) igen.

- Elev A: Hvad var det vi gjorde før? Vi sagde… Nårh så skal vi bare plusse alle de her, altså så hedder det.
- Elev B: Nårh.
- Elev A: Vi skal faktisk, vi skal sige den her, alle de her, dvs. f nul, $f(x_0)$ til $f(x_{n-1})$.
- Elev B: Ja. Er det $f(x)$?
- Elev A: Altså det hele er plus, det skal lægges sammen ikke, og så det tal man får,… Var det ikke sådan her, vi gjorde før?

Ud fra lydoptagelsen at bedømme, finder elev A det ikke vanskeligt at svare på delopgaven, men dog kommenterer ingen af eleverne eksplicit i denne lydoptagelse, at summen af funktionsværdierne skal deles med n. Der vil naturligvis ikke altid være overensstemmelse mellem det eleverne siger, og det de noterer i deres opgaveark, så det kan ikke umiddelbart konkluderes, at gruppen ikke var opmærksom på dette. Det som dog med rimelighed kan konkluderes er, at eleven bestemt er på vej i den rigtige retning, og at brugen og forståelsen af den generelle notation ikke længere er en udfordring for denne gruppe.

På baggrund af samtlige lydoptagelser af elevgruppernes diskussioner i forbindelse med opgave 8 kan det konkluderes, at et selvstændigt elevarbejde med det mere generelle tilfælde, hvor en vilkårlig funktion f betragtes, ikke er nemt at realisere, og at overgangen til den teknologiske-teoretiske fase således er svær at få til at fungere i praksis. Dermed kan det konkluderes, at det var svært for eleverne at arbejde med hovedproblemtypen Π_3: *Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi* og opgavetypen $\mathrm{T_G}$: *Redegør for at* $\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *kan opfattes som middelværdien for* f *på intervaller* $[a,b]$, til at fungere i praksis.

Den efterfølgende opsamling blev indledt ved en diskussion af det konkrete eksempel, og videooptagelsen viser, at mange elever markerer. Dog stiller en elev (elev D) til sidst følgende spørgsmål: *"(...) Du sagde, at man først starter ved 2, når man skal finde højden. Skal man ikke starte ved 3, fordi det er en venstresum?"*

Dette spørgsmål indikerer, at der åbenbart stadig opleves problemer og forvirring i forhold til de to typer af summer og forklaringen af disse, skulle både skriftligt i opgavearket samt mundtligt ved hjælp af læreren, have været mere udførlig og præcis.

Ved overgangen til det mere generelle tilfælde, hvor en vilkårlig funktion indgår, er der betydelig færre elever, som markerer. Følgende er et uddrag fra transskriberingen af 'Opsamling af opgave 8' (se bilag 8), hvor bredden af det udglattede rektangel diskuteres:

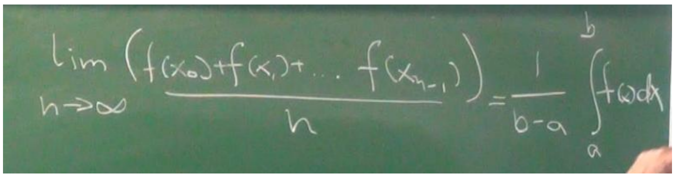
- Elev H: x_{n-1} minus x_0 (l*æreren skriver elevens svar på tavlen).*
- Læreren: Er det rigtigt?
- Elev A: Nå man har x_n, så har man også x_0.
- Læreren: Ja bredden af det her, vores to værdier her, hvor vi starter i x_0, og så til x_n. Så det skal være x_n minus x_0 her. Ligesom vi havde det herovre ikke, der havde vi 5 og 2 som vores endepunkter, så det er de to værdier vi skal trække fra hinanden. Så det bliver det her.

Det er svært at vide, om elev H's forkerte svar er et udtryk for, at eleven ikke kender det korrekte svar, eller om det er notationsbrugen, som her gør opgaven udfordrende. Videooptagelsen viser som tidligere nævnt, at et betydeligt større antal elever markerede i forbindelse med det forrige konkrete eksempel, så den visuelle forståelse af, hvad der ønskes bestemt må eksistere hos størstedelen af eleverne, og at det derfor nok nærmere er den generelle notationsbrug og manglen på talværdier, som gør denne delopgave vanskelig. Læreren vender desuden i forbindelse med dette generelle udtryk for bredden af det udglattede rektangel tilbage til det konkrete eksempel, hvor bredden blev bestemt som afstanden mellem 2 og 5, og benytter dette til at forklare, at det korrekte udtryk for bredden derved er $x_n - x_0$. Således viste det sig, at en delopgave krævede en større arbejdsindsats og et større tidsforbrug end forventet – både i forbindelse med elevernes gruppearbejde samt i forbindelse med den efterfølgende opsamling.

Læreren spørger i forlængelse af det foregående om højden af det udglattede rektangel, og diskussionen i forbindelse med dette, indgår i følgende uddrag:

- Højden, højden her, af det udglattede rektangel, hvordan kan vi finde den, igen som et gennemsnit af nogen værdier?
- Elev I: Er det ikke fra x_0 til $f(x_{n-1})$?
- Læreren: Jeg skal lige have den en gang til.
- Elev I: Fra x_0 til $f(x_{n-1})$, og så plus det sammen.
- Læreren: x_0 siger du?
- Elev I: Ja.
- Læreren: Nej, er det rigtigt?
- Elev I: Alt $f(x_0)$ så.
- Læreren: Ok, det er jo noget andet.
- Elev I: Og så til $f(x_{n-1})$.
- Læreren: Ja, og hvad skal jeg gøre ved dem?
- Elev I: Altså det hele lægges sammen.

På videooptagelsen, som dette uddrag stammer fra ser man, at meget få elever markerer ved lærerens første spørgsmål, og læreren må stille elev I flere spørgsmål, for at få eleven til at præcisere sit svar. Lærerens reaktion på dette er yderst fornuftig idet, at han understreger, at der er forskel på det eleven siger, x_0, og det eleven mener, $f(x_0)$, og igen tyder det på, at brugen af notation er en udfordring. Videooptagelsen viser endvidere, at læreren blot skriver $f(x_0)$ og $f(x_{n-1})$ på tavlen, men venter med at angive, at der er tale om en sum, førend eleven nævner, at funktionsværdierne skal lægges sammen. Figur 24 viser, hvad der stod på tavlen i forbindelse med lærerens afsluttende kommentar omkring værdien af $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Læreren fik afslutningsvist givet eleverne en fornuftig konklusion og understregede flere gange, at $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ med rimelighed kan opfattes som funktionens middelværdi på intervallet.



Figur 24: Lærerens opsamling på opgave 8

Det teoretiske niveau blev nået udelukkende via læreren, og til sidst i opsamlingen forsøgte han ikke at inddrage eleverne formentligt på grund af elevernes manglende evne til producere selvstændige svar til de teknologiske-teoretiske spørgsmål. Det kunne dog have været interessant, at lade eleverne give en fortolkning af værdien af $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, blot for at se om nogle elever ville være i stand til at reflektere over værdien og resultatet af det forrige arbejde.

Det efterfølgende elevarbejde bestod af et teknisk arbejde efterfulgt af mere teknologiske spørgsmål forbundet til Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes* og T_B: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes.* På baggrund af mine observationer, lydoptagelserne og de skriftlige elevbesvarelser kan det konkluderes, at de fleste grupper i forbindelse med opgave 9 fik skitseret venstre- og højresummen, skraveret differensen samt udfyldt tabellen. Kun få grupper fik diskuteret, hvorfor differensen mellem venstre- og højresummen blev negative, og hvad der sker med denne differens (samt differensen mellem højre- og venstresummen), når antallet af delintervaller forøges. Et par elever fik desuden udfyldt tabellen i opgave 10, men kun en gruppe nåede, meget kort, at besvare delopgave 10.2, inden læreren påbegyndte opsamlingen.

En lydoptagelse af en elevgruppe, indeholder ikke nogle diskussioner, men blot en elev som undervejs giver få korte kommentarer, hvilket er grunden til at denne lydoptagelse ikke indgår i bilag x. Lydoptagelsen indledes med en kort diskussion af, hvordan de to summer skal tegnes, men hurtigt bliver de enige, og de efterfølgende beregninger af differenserne mellem højre- og venstresummerne synes ligeledes overkommelige for gruppen. Da gruppen skal beregne differensen mellem venstresummerne og højresummen, siger en elev: *"Så bliver det jo bare et negativt tal, det bliver helt det samme, men bare negativt"*. Den samme elev læser herefter delspørgsmål 6 og siger, *"altså for det første, trækker vi et lille tal væk fra et stort tal"*. De få elevkommentarer som denne lydoptagelse indeholder viser, at eleven med rimelighed kan begrunde, hvorfor summerne bliver negative, og de negative værdier er bestemt indlysende for eleven. I modsætning til denne gruppe, når følgende gruppe lidt længere i deres arbejde, og følgende er transskriberingen af denne elevgruppes arbejde med delopgave 9.7 (sekvens 11):

- Elev A: Er det ikke sådan her, de kommer mod grænseværdien, de kommer tættere og tættere på hinanden.
- Læreren: Differensen, hvad sker der med den?
- Elev A: Den bliver mindre.
- Læreren: Den bliver mindre og mindre, og hvad går den imod?
- Elev A: Mod grænseværdien.

- Læreren: Hvilken grænseværdi? Hvad tror du, der vil ske med de tal her, hvis du fortsætter med at lave…
- Elev A: De vil komme tættere og tættere på hinanden jo.
- Læreren: Ja, og hvad så med forskellen, det er forskellen i regner ud her. Den starter med 2, 0,8, 0,1, 0,08, 0,016. Hvad sker det med den grænseværdi her?
- Elev A: Kommer den ikke tættere på 0? Den går imod 0.

Denne korte samtale mellem elev A og læreren illustrerer, at det ikke er let for eleverne at formulere sig præcist, og de gør sig i meget kortfattede kommentarer og kun få refleksioner og overvejelser, hvilket også gjorde sig gældende i det forrige eleveksempel. Det virker som om, at elev A i dette eksempel er en anelse forvirret over sammenhængen mellem de tidligere tabeller, hvori værdierne af summerne blev angivet, og de nuværende tabeller, hvori differenserne angives. Der er tale om en grænseværdi for begge tabeller, men ikke den samme, og de to grænseværdier er desuden heller ikke et udtryk for det samme. Det er svært at måle en elevs forståelse af en matematisk teori, men i dette tilfælde, er elevens svar dog så upræcise og kortfattede, at jeg ikke er overbevist om, at eleven har forstået, at den fælles grænseværdi for summerne (for et voksende antal delintervaller) angav en tilnærmet værdi til det søgte areal, men at grænseværdien for differensen, giver et udtryk for, løst sagt, om denne tilnærmede værdi kan nås.

På grund af tiden valgte læreren at starte opsamlingen førend alle elevgrupper var blevet færdige, hvilket resulterede i, at kun en gruppe (den førnævnte) nåede at diskutere det sidste delspørgsmål i opgave 10: *Begrund hvorfor det ikke er den samme differens i opgave 9 og 10, som bliver negativ.* Følgende uddrag (sekvens 11) er transskriberingen af lydoptagelsen af dette gruppearbejde:

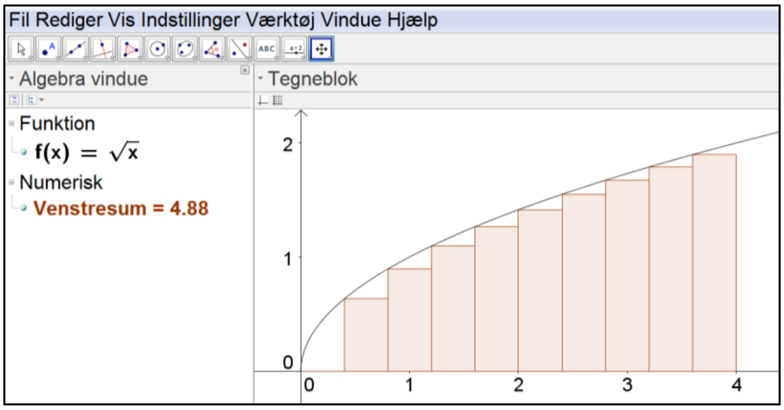
- Elev B: Den første (*funktion*) den er voksende, og den anden den er aftagende.
- Elev A: I virkeligheden ikke, der burde ikke stå 0 her, der burde stå 0 komma et eller andet.
- Elev B: Ja *(elev A kalder på læreren).*
- Elev A: Begrund, hvorfor det ikke er den samme differens i opgave 9 og 10, som bliver negative.
- Læreren: Så skal vi kigge på graferne *(læreren starter opsamlingen).*

På lydoptagelsen kan det høres, at elev B, giver sit svar, med det samme, hvilket indikerer, at denne elev er opmærksom på, at for en voksende funktion vil højresummen være større end venstresummen og omvendt for en aftagende funktion, hvilket naturligvis resulterer i, at det i opgave 9 er differensen *venstresum minus højresum,* som bliver negativ, og i opgave 10 er differensen *højresum minus venstresum*, som bliver negativ. Elevens svar er dog, som så mange af de andre, kortfattet, og elev A kommenterer ikke på dette, men understreger i stedet, at tabellens sidste værdi, ikke bør være et 0, da der er tale om en grænseværdi. Eleven er således klar over, at differensen ikke vil ramme 0, men blot vil nærme sig, for et voksende antal delintervaller.

Elevernes skriftlige besvarelser viser tilsvarende, at eleverne ikke var i stand til eller havde tid til at besvare de mere teknologiske spørgsmål, og kun under halvdelen af eleverne har noteret et muligt svar til disse spørgsmål. Det er svært at kommentere på manglende svar, men en grund kunne være, at formuleringsopgaver, hvor netop anvendte teknikker og resultater skal begrundes, kræver at eleven ikke finder teknikken vanskelig og har en evne til at kommentere på teknikkens rækkevidde og anvendelighed. Desuden skal eleven kunne sammenholde begreber, teknikker og resultater, samt kunne se processen, gennem hvilken teknikken udvikles, i et større perspektiv.

Det skal dog bemærkes, at de manglende svar ikke nødvendigvis er et udtryk for, at eleverne ikke er i stand til at give et svar, men det kan ligeledes være en manglende koncentration, som er skyld i de tomme tekstbokse. Dog viser lydoptagelserne, at mange grupper enten ikke når til at diskutere de teknologiske spørgsmål, grundet store vanskeligheder med at tegne summerne og skravere differensen, eller at de ikke kan reflektere over spørgsmålene, og det kan derfor konkluderes, at der hos en stor del af klassens elever var problemer med at opbygge et teknologisk-teoretisk miljø.

Jeg havde i forbindelse med designet af denne opgave fejlbedømt sværhedsgraden af at tegne summerne, og det blev langt mere krævende end forventet på trods af, at eleverne i de foregående opgaver havde set mange eksempler på venstre- og højresummer, og at læreren både havde givet en forklaring af disse, samt skitseret en række summer på tavlen. I forlængelse af dette skal det nævnes, at når en sum beregnes i GeoGebra, ved hjælp af kommandoen Rectanglesum eller Trekantsum (afhængig af den enkelte programversion), vises summen i GeoGebras tegneblok således:



Figur 25: Beregning af venstresummen for $f(x) = \sqrt{x}$ på [0,4] med $n = 10$ i GeoGebra

Det forrige elevarbejde, de forrige opsamlinger samt dette visuelle del af GeoGebra, havde jeg uden tvivl troet ville medvirke til, at eleverne uden store vanskeligheder ville være i stand til at tegne summerne, samt skravere differensen, men alt for mange grupper havde behov for lærerens hjælp til dette. Udførelsen af designet antyder at det var svært at få det store spørgsmål Q_1: *Findes arealet af en forelagt punktmængde?* til at leve i praksis, og få eleverne til at arbejde selvstændigt med hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion* f*, afgør om* $\int_a^b f(x)dx$ *findes* og opgavetypen T_B: *Givet en funktion* f*, vis at* $\int_a^b f(x)dx$ *findes*.

Flere elever deltog aktivt i forbindelse med opsamlingen af opgave 9 og 10, og essentielle betragtninger og konklusioner blev præciseret og understreget. Afslutningsvist kommenterede læreren på, hvad det vil sige, at en funktion er integrabel, og kommenterede desuden, at man i et sådant tilfælde, hvor differensen går i mod 0 for n gående mod uendelig, vil have et areal under grafen. Desuden fik læreren, som planlagt, kommenteret opgavetypen $\mathrm{T_C}$: *Givet en funktion* f*, vis at* $\int_a^b f(x)dx$ *ikke findes* og nævnt, at der findes funktioner, som ikke er integrable, men at disse er mere specielle og derfor ikke betragtes i gymnasiet.

12.3 Lektion 5 og 6

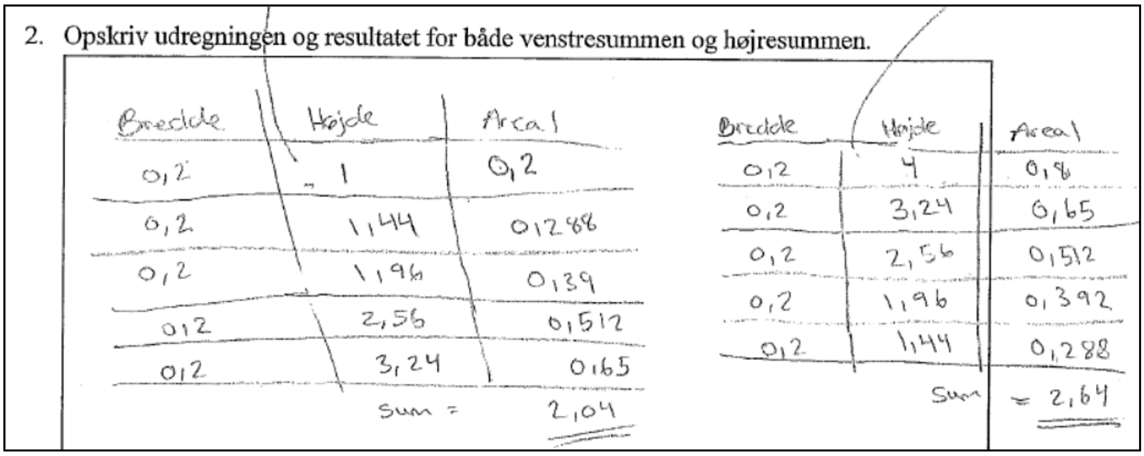
Som beskrevet i a priori analysen bestod opgave 11 i at udvikle en teknik til at vise, at funktionen $f(x) = x^2$ er integrabel på intervallet [1,2], og denne skulle dermed også omhandle hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion* f*, afgør om* $\int_a^b f(x)dx$ *findes*, og opgavetypen $\mathrm{T_B}$: *Givet en funktion* f*, vis at* $\int_a^b f(x)dx$ *findes*. Teknikken skulle i den efterfølgende opsamling udvikles og give anledning til at nå et teoretisk niveau, på hvilket det skulle vises, at enhver monoton funktion er integrabel. I forbindelse med det adidaktiske arbejde omkring opgave 11, var et par elever i tvivl om besvarelsen af delopgave 11.1, *bestem ved beregning længden af hvert delinterval (når intervallet [1,2] opdeles i fem delintervaller).* Nedenstående er et eksempel på en elevbesvarelse af denne delopgave.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}$$

Figur 26: Elevbesvarelse af delopgave 11.1

Det er vanskeligt at udtale sig om, hvad eleven har tænkt, men eleven har til dels fat i det korrekte svar (en femtedel), og jeg tror, at de enkelte tal skal angive x-værdierne for delepunkterne. Baggrunden for, at jeg har inddraget dette eksempel, er at jeg ønsker at påpege, at et sådan ukorrekt og/eller upræcist svar, kan være en årsag til de efterfølgende forkerte besvarelser eller manglen på samme.

Langt de fleste grupper fandt det let at bestemme venstre- og højresummen i delopgave 11.2, men et par elever opdagede ikke, at der i forbindelse med differensen ville være en række led, som ville gå ud med hinanden. Grunden til dette tror jeg skal findes i deres opskrivning af venstre- og højresummen, og følgende opskrivning var meget populær blandt eleverne.



2. Opskriv udregningen og resultatet for både venstresummen og højresummen.

Bredde	Højde	Areal
0,2	1	0,2
0,2	1,44	0,288
0,2	1,96	0,39
0,2	2,56	0,512
0,2	3,24	0,65
	Sum =	2,04

Bredde	Højde	Areal
0,2	4	0,8
0,2	3,24	0,65
0,2	2,56	0,512
0,2	1,96	0,392
0,2	1,44	0,288
	Sum	= 2,64

Figur 27: Elevbesvarelse af delopgave 11.2

Naturligvis afslører de to skemaer en række fælles værdier i de to summer men de elever, som skrev beregningerne op som to rækker af summer indså nemt og hurtigt, hvilke led, som overlevede i udtrykket for differensen.

Lydoptagelsen af et gruppearbejde afslører, at denne gruppe ikke finder opgave 11 overkommelig, og at gruppen kun når til delopgave 11.3. Eleverne diskuterer længe, hvordan de skal bestemme længden af hvert delinterval (når intervallet [1,2] inddeles i fem lige store delintervaller), og gruppen får i forbindelse med delopgave 11.3 beregnet en absolut differens, i stedet for opstilling af et udtryk. I forlængelse af dette læser den ene elev i gruppen opgaveformuleringen, '*reducér dette udtryk (uden brug af lommeregner)'*, hvilket resulterer i, at eleven tvivler på gruppens besvarelse og derfor kalder på læreren, hvorefter følgende diskussion indtræffer (sekvens 13):

- Elev A: Er det rigtigt, at stille det op sådan her, hvis vi skal opstille et udtryk for højresummen minus venstresummen, så er det jo arealerne minus hinanden.
- Læreren: Ja, men prøv at brug de her udtryk, der står her, den fra den. De to der, prøv at kig på dem, og se om I kan kigge på dem. Jeg får godt nok ikke det her. Prøv lige at, det der ser heller ikke rigtigt ud. Her har i en og her har i to, hvad vil det der så hedde? Hvis I skal finde højden af det her rektangel, så skal I bruge den der *x*-værdi til at finde højden ikke? Hvad vil den der *x*-koordinat være?
- Elev A: Den vil være to femtedele.
- Læreren: Nej. En femtedel, det her er en femtedel, to femtedele, så den vil være. Denne her højde, den skal I jo få der, så I skal bruge der, så I skal bruge denne her, I skal bruge en plus en femtedel, og sætte den i anden, det vil sige 1,2 i anden.
- Elev B: Det vil sige, at alt det her er forkert?
- Elev A: Det vil sige, at hvis han siger, at det her er en plus en femtedel, så er det et eller andet tal. Det her tal skal du så sige plus det her. Det ser ellers rigtig godt ud.

Uddraget af sekvensen viser, at elevgruppen korrekt har beregnet længden af hvert delinterval til $\frac{1}{5}$, (når intervallet [1,2] inddeles i 5 delintervaller), men at problemet opstår når gruppen skal beregne x_1 (hvis x_0 betegner intervallets venstre endepunkt, det vil sige $x_0 = 1$). Gruppen mener, at $x_1 = \frac{2}{5}$, formentlig fordi, de har konkluderet, at $1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Læreren bliver nødt til at forklare, hvordan de enkelte delintervalpunker bestemmes, hvilket jeg bestemt ikke havde forudset ville blive nødvendigt.

I den videre diskussion, som indgår i bilag 7, diskuterer eleverne lærerens hjælp, og en elev siger eksempelvis følgende: "*Jamen det er jo i anden, og han (læreren) siger, at vi bare skal lægge dem sammen her, så giver det jo ingen mening. Fordi hvis du allerede lægger dem sammen, hvordan kan man så sætte det i anden?*". Denne kommentar samt hele diskussionen antyder, at lærerens hjælp ikke har givet gruppen en forståelse for beregningen af de enkelte delintervalpunkter samt udregningen for henholdsvis venstre- og højresummen. Det skal dog bemærkes, at elevgruppen er opmærksom på, at funktionsforskriften skal benyttes til at bestemme de enkelte rektanglers højder, samt at de ved beregning af venstresummen og højresummen skal benytte henholdsvis det venstre og det højre endepunkt for hvert delinterval.

En anden gruppe hvis diskussion er transskriberet i sekvens 12 havde tydeligvis ikke vanskeligheder med bestemmelse af delepunkterne. Transskriberingen viser, at gruppens elever har nogle fornuftige betragtninger og bestemt bevæger sig hen i mod en god og korrekt besvarelse. En elev kommenterer, at det er funktionsforskriften, som skal benyttes, men fejlagtigt får eleven benyttet forskriften fra de tidligere opgaver $f(x) = \frac{1}{x}$ i stedet for $f(x) = x^2$. Dette får den anden elev dog redigeret, og samtidig kommenterer denne elev forskellen på venstre- og højresummen. Gruppen oplever således ikke store vanskeligheder med denne opgave, og læreren inddrages kun for at verificere tidligere resultater men på trods af, at opgaven virker overkommelig, er den stadig tidskrævende, og diskussionen viser, at gruppen har behov for at diskutere de enkelte beregninger længe før en besvarelse noteres. Dette behov viste sig hos flere grupper, hvilket resulterede i, at eleverne naturligvis brugte mere tid end planlagt.

Eleverne skulle efter at have inddelt intervallet [1,2] i fem lige store delintervaller, betragte n lige store delintervaller, hvilket ikke alle elever nåede. Der var dog et par grupper, der var i stand til at benytte den mere generelle notation, og hvis arbejde var ganske fornuftigt. En del indså hurtigt, at delepunkterne $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ skulle benyttes ved beregning af venstresummen og delepunkterne $x_1, x_2, \dots, x_n$ skulle benyttes ved beregning af højresummen. Gruppen, hvis diskussion er transskriberet i sekvens 12 får grebet opgaven an mere generelt end det var tænkt. De får hurtigt angivet $\frac{b-a}{n}$ som delintervallængden, og de påbegynder en sum af funktionsværdier. De indser, at venstresummen starter med $f(x_0)$ og højresummen med $f(x_1)$, men de får behov for lærerens hjælp i forbindelse med den sidste funktionsværdi for hver af de to summer. Transskriberingen illustrerer desuden, at eleverne ser, at de kan forkorte en del led ud, og de ender med et korrekt udtryk for differensen mellem højre- og venstresummen, når n delintervaller betragtes. Afslutningsvist læser elev A delopgave 11.5 højt, og følgende diskussion indtræffer (sekvens 12):

- Elev A: Det var det vi skrev sidst jo.
- Elev B: Kan vi ikke lave b minus a divideret med n til kun en af dem.
- Læreren: Jo du kan sætte det uden for en parentes. Den brøk der.
- Elev A: Jo, så står der, det han mener, det er b minus a divideret med n, og så står der sådan her, $f(x_n) - f(x_0)$. Det er sådan her du mente ikke?
- Læreren: Ja.
- Elev B: Men hvad kan vi, er det her så udtrykket? Nå vi skal lave højre minus venstresum, så det her er venstresum, er det ikke den sidste, den her?
- Læreren: Det der er rigtigt.
- Elev A: Du sagde også, at når venstresummen vokser, så bliver højresummen mindre, og det vil sige, at venstresummen bliver negativ.

- Læreren: Nej, det kommer an på om funktionen er aftagende eller voksende, om det er venstresummen eller højresummen, der er størst.
- Elev A: Men der står her, at når venstresummen bliver mindre så vokser højresummen, og derved bliver v minus h negativ.
  Læreren går op til tavlen for at påbegynde opsamlingen.

Uddraget viser, at gruppen har svært ved at vurdere udtrykket $\frac{1}{n}(f(x_n) - f(x_0))$ for n gående mod uendelig. Ud fra elevernes kommentarer at dømme lader det til, at de ikke ved, hvad det vil sige at vurdere et udtryk, og de tror, forståeligt nok, at de skal søge svaret i opgave 9 og 10, hvor de kort forinden betragtede differenser. Der var ingen grupper, som fik noteret en besvarelse af denne delopgave, og den efterfølgende opsamling illustrerer ligeledes, at denne delopgave var vanskelig for eleverne at kommentere på.

På baggrund af samtlige lydoptagelser og de skriftlige elevbesvarelser, kan det konkluderes, at elevarbejdet med opgave 11 fungerede godt for langt de fleste elevgrupper. De elevgrupper, som ikke fandt de tre første delopgaver vanskelige indså, at kun leddene $f(x_n)$ og $f(x_0)$ ville overleve i forbindelse med differensen mellem højre- og venstresummen, og de gjorde desuden brug af en fornuftig generel algebraisk notation. Det var overraskende, at få elevgrupper havde behov for lærerens hjælp i forbindelse med bestemmelse af delintervalpunkterne og de enkelte rektanglers højde, da eleverne havde arbejdet med dette i de forrige opgaver, samt at læreren havde kommenteret det under de forrige opsamlinger. Desværre var ingen elever i stand til at vurdere udtrykket for n gående mod uendelig, og dermed blev der af eleverne ikke formuleret en egentlig konklusion.

I den efterfølgende opsamling gentager læreren, hvordan de enkelte delintervalpunkter bestemmes, for herefter at få en elev til at forklare beregningen af henholdsvis venstre- og højresummen. Afslutningsvist forsøger læreren med afsæt i beregningen fra delopgave 11.3, $H - V = 0{,}2 \cdot (2^2 - 1^2) = 0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6$, at få eleverne til at overveje, hvad der vil ske med denne differens, hvis antallet af delintervaller forøges. Følgende er et uddrag af netop denne diskussion ('Opsamling af opgave 11', bilag 8):

- Læreren: Det giver 0,2 gange 3, lig 0,6. Det passer også med det, vi havde før. Hvad vil der nu ske, hvis vi lader n gå mod uendelig, det vil sige, at vi laver flere og flere delintervaller, vi gør delintervallerne mindre. Hvad vil der så ske med højresummen minus venstresummen hernede?
- Elev G: Den er stadig det samme.
- Elev H: Den vil blive mindre.
- Læreren: Hvorfor? Hvordan kan vi se det ud af den beregning, vi har lavet her.
- Elev C: Vi kan se, at venstresummen bliver større, og højresummen bliver mindre.

- Læreren: Nu tænker jeg specielt på forskellen her, hvad vil der ske med det, når vi laver flere delintervaller?
- Elev C: Den der 2,2 opløftet i anden, den bliver…
- Læreren: Der er ikke noget 2,2 opløftet i anden. De her to værdier *(to i anden og en i anden*), sker der noget med dem, når vi ændrer antallet af delintervaller?
- Elev E: De bliver mindre.
- Læreren: Den første og den sidste værdi vi har.
- Elev E: Der kommer flere delintervaller.
- Elev F: Den første, altså 0,2, når den bliver mindre, så bliver resultatet også mindre jo, to i anden og en i anden bliver altid det samme, det er kun den der 0,2, der bliver mindre.
- Læreren: Hvorfor bliver den her mindre (*bredden*)?
- Elev F: Den går mod 0 jo.

Uddraget af transskriberingen viser således, at det efter et par upræcise og ukorrekte elevkommentarer lykkedes at få elev F til at kommentere, at konsekvensen af det øgede antal intervalinddelinger vil være, at delintervalbredden (0,2) vil gå mod 0, og dermed vil det samlede udtryk for differensen gå mod 0. Læreren afslutter den fælles opsamling ved at præciserer argumentet og konkludere, at de dermed havde vist, at funktionen $f(x) = x^2$ er integrabel på intervallet [1,2].

Læreren undgik en opskrivning af delopgave 11.4, formentlig på grund af, at den algebraiske notation viste sig at være vanskelig og desuden for at holde tidsplanen.

Ud fra videooptagelsen at dømme fik eleverne opbygget et teknologisk-teoretisk miljø i forbindelse med den planlagte lærergennemgang af beviset for, at *enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel*. Flere elever deltog aktivt i forbindelse med opskrivningen af udtrykket for differensen, samt i reduktionen af dette, og størstedelen af eleverne forstod notationen, og fandt det indlysende, at kun to led ville overleve.

Videooptagelsen afslører at kun få elever kom med fornuftige bemærkninger, og elever formåede at konkludere på det viste. Det viste sig dermed, at der ikke var let for eleverne selvstændigt at reflektere over hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes* samt at der i forbindelse med dette eksisterer to opgavetyper $\mathrm{T_B}$: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes* og $\mathrm{T_C}$: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ ikke findes*.

I det planlagte forløb indgik også en tilhørende figur til beviset i håbet om, at et mere visuelt argument ville inddrage flere elever. Læreren valgte igen selv at forklare denne figur og gav ikke eleverne meget betænkningstid, efter eksempelvis at have spurgt om højden af det areal, som beskriver differensen mellem højre- og venstresummen. På baggrund af videooptagelsen er det svært at vurdere, om denne illustration havde nogen effekt, da ingen elever bidrager med kommentarer eller spørgsmål til lærerens gennemgang af denne.

Som overgang til anden del af mit designede forløb introducerede læreren funktionen $A(x)$ og forklarede, at dette A kan forstås som arealet under grafen og pegede kort på figuren, som indgik i forbindelse med det foregående bevis. Jeg havde ønsket, at denne funktion var blevet præciseret lidt mere, og at der havde været en selvstændig illustration og understregning af, at $A(x)$ (for en funktion defineret på et interval $[a, b]$, og hvor $a \leq x \leq b$), angiver grænseværdien af venstresummen for n gående mod uendelig (hvor n er antallet af intervalinddelinger). Dette vender jeg tilbage til i diskussionen af denne a posteriori analyse. Det skal kort nævnes, at den fælles overvejelse af $A(a)$, som det var planlagt skulle indgå i denne introduktion, i stedet blev inddraget undervejs i opsamlingen af opgave 12.

Indledningsvist bestod opgave 12 i, at eleverne skulle opdele det betragtede område i kendte figurer, og jeg troede, at eleverne hurtigt ville opdele området i et rektangel og en trekant, men det viste sig ikke at være tilfældet. Den lydoptagelse, som er transskriberet (sekvens 14) viser, at gruppen først foreslår tre rektangler, hvilket jo egentlig er forståeligt, da det forrige arbejde netop omhandlede rektangler. Læreren skulle stille mange ledende spørgsmål og gentage, at en nemmere opdeling var mulig førend, at eleverne valgte et rektangel og en trekant. De andre lydoptagelser viser, at andre grupper ligeledes havde en lang diskussion af denne opdeling. Det er ærgerligt, at denne delopgave får så meget fokus, samt at tidsforbruget bliver større end beregnet, da en formulering, hvor det blev understreget at området skulle opdeles i **to** kendte figurer (som ville dække området), formentlig havde hjulpet eleverne.

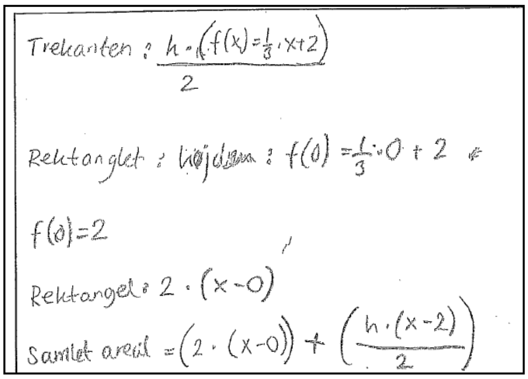
Endvidere observerede jeg, at adskillige grupper aflæste højden af henholdsvis rektanglet og trekanten, hvilket førte til problemer i delopgave 12.2. Nedenstående uddrag af en lydoptagelse (sekvens 14) viser, at læreren er nødt til at understrege (og gentage), at det igen er funktionsforskriften, der skal benyttes til at angive en højde.

- Læreren: Ja, hvordan kan I finde hele den højde her?
- Elev A: Det er ved at plusse de her to sammen.
- Læreren: Nej, det gjorde I før, men det var fordi det her var 1. Hvis det her er x, hvordan kan I så finde hele denne her højde…, når det her er grafen for den funktion?
- Elev B: Vi kan finde hældningen.
- Elev A: Nej x opløftet i det dér.

- Læreren: Man sætter x ind på den her, på t's plads, så får vi jo funktionsværdien, så har I hele den her højde.

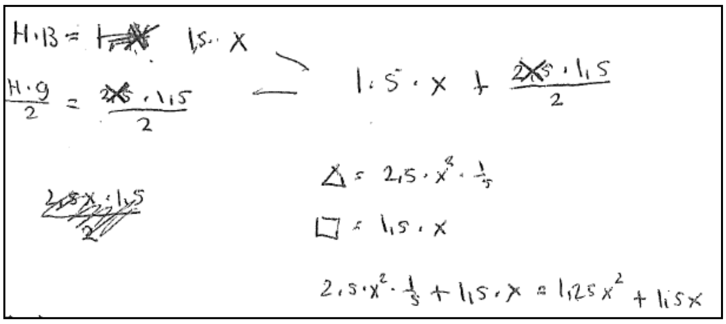
I den videre diskussion af trekantens højde (se sekvens 14, bilag 7) påpeger læreren, at eleverne gætter, og flere gange udtrykker en elev forvirring omkring, hvad det er, de er i gang med at bestemme, hvilket indikerer, at gruppen har svært ved at skabe et overblik i opstillingen af et udtryk for $A(x)$. På trods af de førnævnte vanskeligheder, får gruppen nemt differentieret udtrykket samt indset, at der for den givne funktion f gælder, at $A'(x) = f(x)$.

Nedenstående eksempel på en elevbesvarelse af delopgave 12.2 illustrerer, at det ikke var let for eleverne at opstille et samlet og enkelt udtryk for $A(x)$. Eleven skriver, at den ene sidelængde i rektanglet er $(x - 0)$, hvilket også er korrekt, men dette samt det upræcise udtryk for det samlede areal antyder, at eleven mangler et overblik og bestemt ikke fandt besvarelsen af denne delopgave let.



Figur 28: Elevbesvarelse af delopgave 12.2

En anden elev har noteret følgende til delopgave 12.2:

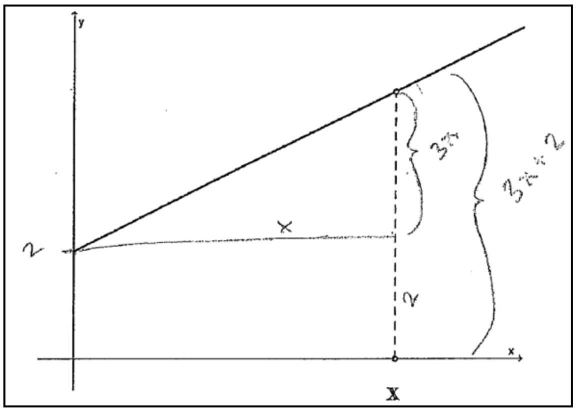


Figur 29: Elevbesvarelse af delopgave 12.2

Denne gruppe arbejdede med funktionen $f(t) = 2{,}5t + 1{,}5$, og elevens beregninger viser et par få fejl. I beregningen af trekantens areal, skriver eleven den korrekte formel,

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ eller $\frac{h \cdot g}{2}$, men i sin udregning får eleven ikke ganget med grundlinjen x. Dette har eleven dog gjort lidt længere nede, hvor eleven tegner en trekant og korrekt skriver $2{,}5 \cdot x^2$, men får skrevet gange $\frac{1}{5}$, hvilket jeg dog ikke tror, antyder en manglende forståelse for opgaven, da eleven ender med korrekt at skrive udtrykket $1{,}25x^2 + 1{,}5x$ for det samlede areal. Besvarelsen og elevens egne små overstregninger tyder på, at denne delopgave var udfordrende men dog gav mulighed for, at eleverne kunne producere selvstændige løsningsforslag.

Adskillige elever fandt et overblik ved at notere de enkelte højder på figuren, og følgende er en elevs eksempel på dette:



Figur 30: Elevillustration til delopgave 12.2

I langt de fleste grupper indtraf der interessante diskussioner, som alle understregede det den tidligere transskribering afslører: problemer med brugen af funktionsforskriften i forbindelse med højden af både rektanglet og trekanten, samt en forvirring og et manglende overblik i forbindelse med at angive et udtryk for $A(x)$.

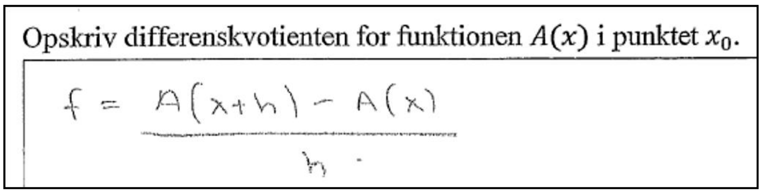
En konklusion på dette elevarbejde bliver, at det tekniske arbejde viste sig at være udfordrende for mange elever, og langt fra alle elever kom frem til et korrekt udtryk for $A(x)$. Det viste sig således at det er svært at konstruere en opgave, som kan indlede elevarbejdet med hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion*, men dog formåede et par elevgrupper at formulere et svar med tydelig relation til opgavetypen T_D: *Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om A'?*

Det er svært at konkludere på de vanskeligheder, som opstod i forbindelse med delopgave 13.2, som udelukkende bygger på allerede etablerede teknikker og teorier. På baggrund af al datamaterialet, er jeg overbevist om, at eleverne havde svært ved at se en kobling mellem en funktionsværdi og en afstandslængde, og i forlængelse af dette se en mulighed i brugen af en funktionsforskrift i forbindelse med bestemmelse af et areal.

12.4 Lektion 7 og 8

Videooptagelsen af den fælles opsamling på opgave 12 viser, at en elev indledningsvist kommenterede, *at* $A'(x)$ *er differentiabel til* $f(x)$, hvilket læreren præciserede for herefter at institutionalisere følgende resultat, som ligeledes blev skrevet på tavlen: *Lad* f *være en pæn funktion defineret på intervallet* a *til* b*, så er* $A(x)$ *en stamfunktion til* f*, det vil sige, at* A *er differentiabel med differentialkvotienten* f. Hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion* blev da implicit inddraget og præciseret. Afslutningsvist understregede læreren, at eleverne kun havde set på et par konkrete funktioner, og at den næste opgave bestod i at give et argument for at resultatet også gjaldt for en vilkårlig funktion.

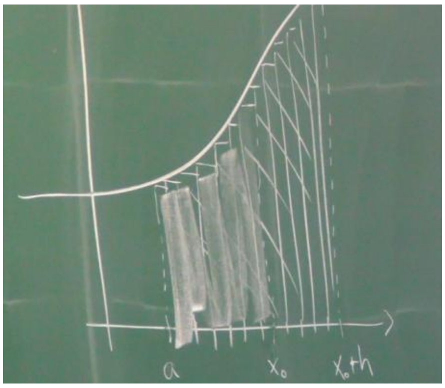
Denne opgave viste sig at være den mest udfordrende. Et par grupper blev i forbindelse med delopgave 13.1, *opskriv differenskvotienten for funktionen* $A(x)$ *i punktet* x_0, nødt til at finde tidligere noter frem, og figur 31 viser en elevbesvarelse, som antyder, at eleven mangler en forståelse for, hvad begrebet *differenskvotient* giver udtryk for.


Opskriv differenskvotienten for funktionen $A(x)$ i punktet x_0.

$f = \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$.

Figur 31: Elevbesvarelse af delopgave 13.1

Lydoptagelserne indeholder mange usammenhængende elevdiskussioner og ofte kun enkeltstående elevkommentarer, som er svære at konkludere på. Kun en lydoptagelse viste sig at være værd at transskribere (sekvens 18), og i denne indleder elev A med at spørge elev B, om han har forstået opgaven, og lidt længere fremme i diskussionen kommenterer elev B i forbindelse med delopgave 13.2, at *opgaverne bliver sværere og sværere*. Senere fortæller elev A til en gruppe, som spørger dem om hjælp, at de sidder fast, og kort herefter beder læreren dem kigge på $A(x_0 + h)$, hvortil elev A svarer, at *de kigger på det, men bare ikke forstår det*. Disse løbende kommentarer samt, at kun en lydoptagelse indeholder et egentligt elevarbejde viser tydeligt, at eleverne mødte en reel udfordring. Læreren valgte at afbryde elevarbejdet med en kort opsamling af delopgave 13.1 og 13.2, som afslørede, at ingen elever kunne give et fornuftigt bud på delspørgsmål 13.2, på trods af lærerens forklaring samt lærerens illustration på tavlen (figur 32).



Figur 32: Lærerens illustration i forbindelse med opsamling af delopgave 13.2

Følgende er et uddrag af transskriberingen af videooptagelsen af denne opsamling ('Opsamling af opgave 13', bilag 8):

- Læreren: (…) Hvad får vi, når vi trækker de to fra hinanden? Den øverste det er grænseværdien af venstresummerne i det her interval, og den nederste er grænseværdien af venstresummerne i det her interval. Hvad vil vi få, når vi trækker de to fra hinanden?
- Elev A: x_0?
- Elev B: a?
- Elev C: h?
- Læreren: Hvad får vi så tilbage?
- Elev D: Er det ikke h?
- Elev A: Kan du ikke lige forklare det igen?
- Læreren: Det er venstresummerne. Det øverste her, det er så venstresummerne i hele det her interval.
- Elev A: Nårh, så får vi bare højresummerne tilbage jo.
- Læreren: Vi laver alle venstresummerne her, og tager grænseværdien når n går mod uendelig.
- Elev B: Får vi så a tilbage, eller hvad?

Hele transskriberingen, men specielt dette uddrag viser, at eleverne ikke var i stand til at give et fornuftigt svar på lærerens indledende spørgsmål og først efter mange ukorrekte og uforståelige bud, sagde en elev følgende: *Du tager den side, som er markeret, minusser med det som du sagde lige før, så har du x_0 til $x_0 + h$ tilbage, du har det område tilbage*, hvilket læreren gentog og præciserede.

Jeg observerede, at de fleste elevgrupper formåede at omskrive $A(x_0 + h)$ og $A(x_0)$ til korrekte bestemte integraler, men at forstå $A(x_0 + h)$ og $A(x_0)$ som henholdsvis grænseværdien af venstresummen på intervallet $[a, x_0 + h]$ og intervallet $[a, x_0]$, når antallet af inddelinger går mod uendelig, var udfordrende for samtlige elever. Det er interessant, at flere elever ikke formår at besvare lærerens indledende spørgsmål fra det forrige transskriberede uddrag: ”*Hvad får vi, når vi trækker de to fra hinanden? Den øverste det er grænseværdien af venstresummerne i det her interval, og den nederste er grænseværdien af venstresummerne i det her interval. Hvad vil vi få, når vi trækker de to fra hinanden?*”. Jeg tror, at grunden til dette bunder i en manglende basal viden omkring intervallængder, hvilket opgave 2 også viste. På baggrund af de observerede lektioner fornemmede jeg at eleverne ikke havde en intuitiv og visuel opfattelse af, at hvis eksempelvis intervallet [0,2] trækkes fra intervallet [0,5] vil det tilbageværende interval være [2,5], og den algebraiske notation i delopgave 13.2 komplicerer naturligvis opgaven yderligere.

Eleverne fortsatte efter denne delopsamling med delopgave 13.3, hvor grupperne igen stødte på problemer, og eksempelvis brugte en gruppe lang tid på at afgøre, hvilken afstand på figuren som var lig med h. Læreren valgte efter blot 6 min. at starte opsamlingen, og følgende uddrag er taget fra diskussionen af delopgave 13.3:

- Læreren: Ja. Sådan, hvis vi nu kigger på den størrelse, der hedder $f(x_0) \cdot h$, hvad vil det være, hvis vi kigger på vores tegning her, hvordan kan vi så illustrere det?
- Elev A: Altså, det er $f(x_0) \cdot x_0$, er det ikke, på en eller anden måde.
- Læreren: Nej det er $f(x_0) \cdot h$.
- Elev A: Så er det afstanden mellem x_0 og $x_0 + h$.
- Læreren: Ja h er det her stykke, gange $f(x_0)$, hvordan kan jeg så illustrere det her?
- Elev A: $f(x_0)$ lig med $A(x)$.
- Læreren: h er det her stykke, $f(x_0)$ er det her stykke, hvad får jeg så ud af det?
- Elev C: Man kan se $f(x_0)$ som en slags højde af et rektangel.

Det skal bemærkes, at videooptagelsen afslører, at læreren giver eleverne god betænkningstid, men at der ikke er mange elever, som markerer. Dette samt uddraget viser, at eleverne har svært ved at koble de matematiske udtryk til illustrationen på tavlen, og først efter et pænt stykke tid, nævner elev C, at $f(x_0)$ angiver en højde på et rektangel. Kort herefter skal der redegøres for, at $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0) \cdot h$ og $f(x_0 + h) \cdot h$, for en meget lille værdi af h, og læreren spørger i denne forbindelse om, hvordan det bestemte integral var blevet defineret. Ingen elever markerer, og læreren må gentage definitionen. En engageret og arbejdsom elev kommenterer undervejs følgende: *Men hvis vi lader* h *gå mod* x_0, *så har vi jo ikke noget* h *tilbage*, hvilket antyder, at eleven ikke blot reflekterer over den tilsigtede viden, men at allerede eksisterende viden, i dette tilfælde begrebet *grænseværdi*, giver anledning til undren. Dette påvirker etableringen af den nye viden og komplicerer elevarbejdet samt de lærerstyrede opsamlinger.

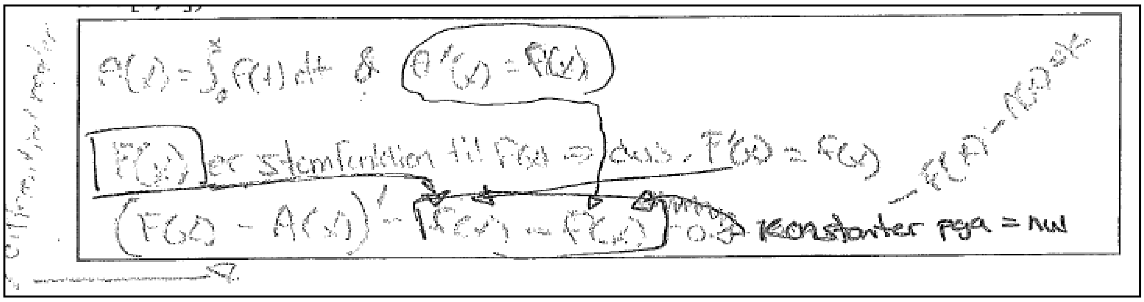
Det kan således konkluderes, at det teoretiske niveau udelukkende blev nået gennem læreren, og at eleverne ikke selvstændigt kunne udvikle teorien, og arbejdet med opgavetypen T_E: *Vis at* $A'(x) = f(x)$, *for en pæn vilkårlig funktion* f viste sig at være udfordrende for samtlige elever.

Et interessant arbejde viste sig i forbindelse med den efterfølgende opgave (opgave 14), hvor eleverne skulle betragte en pæn funktion f på intervallet $[a, b]$, og sætte $A(x) = \int_0^x f(t)dt$. De skulle gennem fire delopgaver nå frem til, at $A(b) = F(b) - F(a)$, for en vilkårlig stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$. Lydoptagelserne viser, at et par grupper havde behov for lærerens hjælp til at indse, at både $F'(x)$ og $A'(x)$ er lig $f(x)$, hvorfra de selvstændigt får formuleret, at da vil $F(x) - A(x)$ differentieret give 0, hvilket betyder, at $F(x) - A(x)$ må være lig en konstant. Andre grupper derimod indser, at både $F'(x)$ og $A'(x)$ er lig $f(x)$, men kan ikke give en præcis konklusion på dette, hvilket følgende uddrag af sekvens 16 er et eksempel på:

- Elev A: Vi tænker bare over det. Vi ved, at det der differentieret, A mærke differentieret det giver $f(x)$, og vi ved at $F(x)$…
- Læreren: Skriv det ja, det lyder rigtigt, på at skrive det ned.
- Elev B: Er differentiabel til A. Ok, hvis vi siger at $A(x)$ er lig med $f(x)$ ikke, og hvis vi siger store F differentiabel, hvad er det så?
- Elev A: Det er også $f(x)$.
- Elev B: Er det bare det?
- Elev A: Så hvad kan vi sige, $F(x)$ minus $A(x)$.
- Elev B: Det er lig med lille $f(x)$ ikke? Eller vent.
- Elev A: Men jeg kan ikke forstå det der tegn.
- Elev B: Vi ved, at de begge differentieret giver $f(x)$. Tror du så ikke det giver…

Diskussionen mellem elev A og B fortsætter, hvorefter læreren inddrages og spørger til differensen, og først efter et par ukorrekte svar fra både elev A og B nævner elev A, at den differentierede differens giver 0. Der går endvidere et stykke tid, førend elev A i pausen får sagt, at $F(x) - A(x)$ må være lig en konstant.

Jeg var i designfasen opmærksom på, at delopgave 14.2, hvor x-værdien a skulle indsættes i udtrykket fra delopgave 14.1 krævede, at eleverne var klar over, hvilket udtryk de skulle benytte samt, at de havde nået et korrekt udtryk. Figur 33 er et eksempel på en elevbesvarelse, og for denne elev har det formentlig ikke været let at gennemskue, hvilket udtryk, som skulle benyttes i den efterfølgende delopgave.



Figur 33: Elevbesvarelse af delopgave 14.1

Det viste sig, at dette blev et problem, og det mest tydelige eksempel findes i transskriberingen af en lydoptagelse (sekvens 16), hvori elev A eksplicit spørger, hvilket udtryk, som skal benyttes. Samme sekvens antyder, at eleverne er forvirrede, og besvarelsen af delopgaven ender med at bestå af en længere diskussion.

Det er svært at vurdere, hvorfor nogle grupper ikke formåede at komme i gang med en delopgave og andre endte med at diskutere en forholdsvis simpel delopgave i lang tid. Jeg tror, at manglen på tal og resultater i form af absolutte talværdier har en stor indflydelse, og desuden veg de designede opgaver også en del fra de vante typeopgaver i form af opbygningen. Jeg havde forsøgt, at lade hver delopgave føre eleverne et skridt nærmere på resultatet, og for at et adidaktisk elevarbejde med en sådan en opgave skal lykkes, kræver det, at eleverne undervejs accepterer, at hver delopgave ikke giver et egentligt svar.

Hos et par grupper identificerede jeg et rigtig velfungerende og fornuftigt arbejde med opgave 14, og derved opgavetypen $\mathrm{T_F}$: *Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for en pæn funktion f), hvad kan du da sige om $A(b)$*?, men på grund af, at de resterende grupper sad fast og derved blev ukoncentrerede, samt at tiden var knap, valgte læreren at påbegynde opsamlingen. Det havde uden tvivl været interessant, at undersøge, hvordan de få engagerede og arbejdsvillige elevgrupper havde fortsat deres adidaktiske gruppearbejde, men som lærer er man naturligvis nødt til at påbegynde en opsamling, hvis mange elever sidder fast. Jeg tror dog stadig på baggrund af data, at det vil være svært at få arbejdet med hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion* til at fungere, da eleverne ikke kunne se opgaverne, teknikkerne og resultaterne i et større perspektiv.

Læreren fik i forbindelse med den efterfølgende opsamling institutionaliseret det ønskede resultat, og løbende kom flere elever med fornuftige svar og indvendinger. Afslutningsvist understregede læreren følgende ('Opsamling af opgave 14', bilag 8):

- Læreren: Det vil sige, at hvis vi skal regne det her ud, vores A her, som vi nogle gange kunne forstå som et areal. Hvis vi skal lave det fra a til x, eller fra a til b, så kan vi regne det ud på denne her måde. $A(b)$ som jo er integralet fra a til b af $f(t)\ dt$, kan vi regne ud på den her måde, som $F(b)$ minus $F(a)$, hvor store F er en stamfunktion til denne her. Så den her, som vi kan forstå som arealet i intervallet fra a til b, kan vi regne ud som denne her, tage stamfunktion til f i b minus stamfunktionen til f i a. Godt prøv at regn opgave 15.

For at have tydeliggjort forbindelsen mellem dette resultat og arbejdet med del 1 af designet, kunne læreren have understreget, at det som eleverne førhen havde bestemt en tilnærmet værdi for nu kunne bestemmes eksakt.

I forbindelse med det efterfølgende arbejde med opgave 15 måtte en del grupper gøre brug af bøger eller noter for at bestemme stamfunktionen til funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$. Jeg observerede, at mange grupper gik i stå, da de havde skrevet $F(2) - F(0.5)$, hvilket lydoptagelserne også bekræfter. Eleverne indså ikke, at de skulle gøre brug af resultatet fra delopgave 15.1, hvilket de muligvis havde, hvis det i formuleringen af delopgave 15.1 havde været præciseret, at eleverne skulle kalde den fundne stamfunktion for F.

Af transskriberingen af sekvens 17 fremgår det, at denne gruppe længe måtte diskutere, hvad der menes med en stamfunktion, da en elev ikke forstod dette, og bad om en forklaring, hvilket resulterede i, at gruppen kun nåede at kommentere følgende i forbindelse med delopgave 15.3:

- Elev A: Det var det her, vi lige fandt her. $A(2)$ er lig med det der.
- Elev B: $A(2)$ er det så det her? Så vi skal beregne det der, ved hjælp af det her?
- Elev A: Er det ved hjælp af den, eller skal vi bare skrive det her, jeg ved det ikke.
- Elev B: Jeg tror vi skal beregne det der ved hjælp af resultatet, det er det der står.
- Elev A: Ved hjælp af resultatet fra forrige opgave, ved hjælp af $ln(t)$. Skal vi så sige, denne her er jo lig med $F(2) - F(a)$, er det ikke sådan?
- Elev B: Men hvad skal vi så bruge resultatet fra denne her opgave til?
- Elev A: Er det ikke, jeg tænker på den gamle opgave, vi lavede deroppe?

Det er interessant, at elev A nævner $F(2) - F(a)$ og derved formår at indsætte 2 som b-værdien men ikke formår at indsætte $0{,}5$ som a-værdi. Jeg observerede et par andre grupper, som heller ikke indsatte de to talværdier med det samme, hvilket indikerer, at eleverne ikke var bevidste om, at opgaven bestod i at bestemme det bestemte integral fra $0{,}5$ til 2 af $f(t) = \frac{1}{t}$ (hvilket kan tolkes som et areal, da $f(t) \geq 0$ på $[0{,}5; 2]$, hvilket også blev nævnt i opgaven). Desuden tyder det på, at eleverne ikke kunne identificere værdierne a og b i det forrige resultat, $A(b) = F(b) - F(a)$, med grænserne for det bestemte integral og med intervalendepunkterne, og en præcisering af dette i forbindelse med institutionaliseringen af det førnævnte resultat burde indgå, hvis udførelsen skulle gentages.

Det bør ligeledes kommenteres, at de to elever i det forrige transskriberingsuddrag er lidt forvirrede over, hvilket resultat der henvises til i forbindelse med opgaveformuleringen *'beregn $A(2)$ ved hjælp af resultatet fra forrige opgave*'. En mere præcis formulering kunne have været brugt, og ville formentlig, have gjort det klarere for eleverne, hvordan opgaven skulle løses, men det er naturligvis en balancegang, da svaret heller ikke skal foræres til eleverne gennem en række præcise udførlige instruktioner. Den anden gruppe, hvis diskussion jeg også har transskriberet, noterede hurtigt, at stamfunktionen til $f(x)$ er lig $F(x) = ln(t) + k$, men i forbindelse med delopgave 15.2, meldte der sig en række misforståelser. Følgende er et uddrag af de to elevers diskussion (sekvens 18):

- Elev A: Nej der står bemærk, at $A(2)$ kan opfattes som et areal. Er det så ikke her, fordi når vi siger en halv gange 2, det er 1. Det må nok være her. Nej.
- Elev B: Du forvirrer mig rigtig meget.
- Elev A: Det er herovre.
- Elev B: Hvorfor her?
- Elev A: Fordi arealet skal give 2.

Det er svært at vurdere, hvorfor eleven nævner disse tal og hvorfra de stammer, men det er tydeligt at eleven ikke havde forstået indførelsen af funktionen $A(x)$. Det tyder på at eleven troede, at betegnelsen $A(2)$ angiver et område, hvis areal er lig med 2, og at opgaven derved bestod i at finde og skravere et sådant område.

Andre grupper udførte et fornuftigt teknisk arbejde i forbindelse med denne opgave, og med hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på intervallet* $[a, b]$, tilhørende MO_1. For disse grupper opstod der ikke vanskeligheder undervejs, og jeg fik en klar fornemmelse af, at de forstod opgaven som helhed, og kunne relatere denne til det forrige resultat, samt til det store spørgsmål Q_2: *Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde*?

Opsamlingen på opgave 15 blev indledt med, at en elev forklarede løsningen af denne, og undervejs præciserede læreren, at konstanten, som indgår i stamfunktionen ville gå ud i forbindelse med bestemmelse af $A(2)$. Afslutningsvist konkluderede læreren følgende ('Opsamling af opgave 15', bilag 8):

- Læreren: (…) Så det vi kan sige nu, det er, at nu har vi fundet en måde, hvis vi har en positiv funktion i hvert fald, at beregne arealet under grafen på. Så hvis vi har en funktion, og vi vil beregne, hvis vi lige skriver det op mere generelt. Vi har en funktion

- her, vi har to grænser, og vi vil beregne det her areal, så kan vi beregne arealet som det bestemte integral fra a til b af $f(x)dx$. Sådan, det er arealet, vi kan beregne på den måde. Vi har også set, hvordan vi beregner det. Vi finder stamfunktionen af f, så man plejer lige at skrive det på den her måde. De her firkantede parenteser betyder, at man skal sætte de her to grænser ind og trække fra. Det er bare en anden måde at skrive, først den øvre grænse minus den nedre grænse.
- Elev A: Var det der forkert eller hvad?
- Læreren: Nej det du havde lavet var rigtigt. Så arealet kan vi altså beregne på den her måde, bestemt integral fra a til b, som beregnes som stamfunktionen i de to grænser.

Jeg havde i forbindelse med denne afsluttende opsamling ønsket, at læreren havde relateret denne opgave til det første møde, som bestod i diskussionen af givne punktmængders arealer samt de forrige opgaver, der omhandlede venstre- og højresummer. I forlængelse af dette var en egentlig institutionaliseringsfase planlagt, hvor læreren skulle konkludere på hele forløbet, og definere og identificere, hvilke teoretiske resultater den udviklede matematiske organisation indeholdt. Grundet tiden blev denne institutionaliseringsfase ikke realiseret.

12.5 Konklusion på a posteriori analysen

Den foregående a posteriori analyse har vist en række konkrete eksempler på de vanskeligheder, der opstod i forbindelse med realiseringen af den planlagte didaktiske proces og udviklingen af de to lokale matematiske organisationer MO_1 og MO_2. I det følgende vil jeg konkludere på a posteriori analysen og understrege de essentielle udfordringer.

Den første udfordring jeg vil nævne har forbindelse til elevernes faglige forudsætninger. Det viste sig at være et gentagende problem for en betydelig del af klassens elever at benytte en given funktionsforskrift til at beregne højden af et rektangel på trods af, at der i forbindelse med opgave 3 eksplicit stod, *"(…) hvis højder svarer til funktionsværdierne af delintervallernes højre endepunkter".* Flere elever forsøgte konstant at aflæse disse højder, og det resulterede i, at en lang række af opgaverne blev vanskeligere, end jeg havde forventet. Jeg er overbevist om, at eleverne var bevidste om, hvordan en funktionsværdi beregnes, men de manglede en geometrisk fortolkning af en given funktionsværdi (som en længdeangivelse og ikke blot en y-værdi).

Endnu en udfordring vist sig i forbindelse med realiseringen af den teknologiske-teoretiske fase. Det var tydeligt, at eleverne havde svært ved de mere teknologiske og teoretiske spørgsmål, eksempelvis da det skulle begrundes, hvorfor venstre- og højresummerne i opgave 7 blev negative. Det var sværere at få det teknologiske og teoretiske arbejde til at fungere i praksis end jeg havde troet, og som den forrige analyse illustrere gjaldt det for en stor del af klassen.

Den forrige analyse viste yderligere, at brugen af algebraisk notation langt fra var overkommelig for eleverne, og de var bestemt ikke fortrolige med denne. Opgaverne hvori de skulle bestemme udtryk, som eksempelvis delopgave 8.4, hvor et udtryk for højden af det første og sidste rektangel ønskes angivet, gav problemer hos mange grupper. Desuden afslørede lydoptagelserne, at et par elever direkte kommenterede, at manglen på tal var et problem og umuliggjorde deres arbejde.

I forlængelse af dette skal det bemærkes, at opgaver omhandlende generaliseringer viste sig at være problematiske for eleverne. Det kan eksempelvis nævnes, at en elev kommenterede over for læreren, at de i opgave 8 manglede en funktion, og de fandt det langt fra naturligt at betragte og arbejde med en vilkårlig funktion. Endnu et eksempel kan gives i forbindelse med opgave 11, hvor en række grupper fandt det vanskeligt at betragte n intervalinddelinger og forstå, at man i det hele taget kan snakke om n antal intervalinddelinger. I forlængelse af dette bør det ligeledes nævnes, at jeg ikke er overbevist om, at alle elever fandt det let at generalisere argumentet fra opgave 11 (hvor det blev vist at funktionen $f(x) = x^2$ er integrabel på intervallet [1,2]) så dette kunne benyttes til at vise, *at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel*.

Opgave 13 blev et tydeligt eksempel på at det er svært at få eleverne til at udføre et deduktivt ræsonnement og ligeledes forstå et sådan. Det var tydeligvis en svær opgave, og hver delopgave viste sig at kræve en enorm arbejdsindsats og en betydelig inddragelse af læreren. Lærerens gennemgang af beviset for, *at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel*, viste ligeledes problematikken omkring deduktiv bevisførelse, og transskriberingen af denne gennemgang afslører at læreren selv må konkludere på, hvad ræsonnementet bestod i, og hvad der var blevet vist.

Afslutningsvist vil jeg kommentere den sidste essentielle udfordring, som bestod i at få de topologiske spørgsmål og de store spørgsmål til at leve i forbindelse med udførelsen af undervisningsforløbet. Specielt viste udførelsen, at de store spørgsmål Q_0: *Hvad menes der med arealet af en forelagt punktmængde*? og Q_1: *Findes arealet af en forelagt punktmængde*? var svære at få til at leve, og eleverne kommenterede ikke disse løbende. Dette har tilknytning til, at det heller ikke lykkedes at få et arbejde med hovedproblemtypen Π_1: *Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes* og opgavetypen T_B: *Givet en funktion f, vis at $\int_a^b f(x)dx$ findes*, til at fungere fuldstændigt. Endnu en hovedproblemtype, som var udfordrende var Π_3: *Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi* og den forrige analyse viste, at opgavetypen T_G:

Redegør for at $\frac{a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *kan opfattes som middelværdien for* f *på intervaller* $[a, b]$ var vanskelig for mange elever at arbejde selvstændigt med.

Hvad der dog fungerede var arbejdet med hovedproblemtypen Π_0: *Hvad menes der med det bestemte integral af en funktion* f *fra* a *til* b, *dvs.* $\int_a^b f(x)dx$?, og enkelte grupper opnåede uden tvivl en god forståelse for hovedproblemtypen Π_2: *Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion* og specielt opgavetyperne $\mathrm{T_D}$: *Hvis* $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ *(for en pæn funktion* f*), hvad kan du da sige om* A'? og $\mathrm{T_F}$: *Hvis* $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ *(for en pæn funktion* f*), hvad kan du da sige om* $A(b)$?. Desuden fungerede arbejdet omkring hovedproblemtypen Π_0: *Bestem den eksakte værdi af* $\int_a^b f(x)dx$ *for en given funktion* f *defineret på intervallet* $[a, b]$ tilhørende MO_1 ligeledes udmærket. Der var således elementer af dette design, som aldrig fik lov at leve under udførelsen, men det skal understreges, at en del af de hovedproblemtyper som gav problemer for eleverne blev indledt af et fornuftigt teknisk arbejde, og det ofte først var i forbindelse med de sidste delopgaver at vanskelighederne indtraf.

13. Diskussion

I forbindelse med a posteriori analysen har en række konkrete samt mere generelle vanskeligheder vist sig i forbindelse med forsøget på at give eleverne en mere præcis tilgang til det bestemte integral. Som nævnt tidligere blev a posteriori analysen skrevet på baggrund af de observationer jeg gjorde mig i lektionerne, det skriftlige elevarbejde, videooptagelserne af de fælles opsamlinger samt lydoptagelserne af elevdiskussionerne, og analysen af dette data førte til en række interessante observationer. Disse observationer består eksempelvis af de vanskeligheder, som eleverne mødte i forbindelse med opgaverne, de vanskeligheder læreren mødte i forbindelse med institutionaliseringer og opsamlinger, og i et lidt større perspektiv observationer omkring realiseringen af de indgående didaktiske faser og udviklingen af de to lokale matematiske organisationer. Et oplagt og interessant spørgsmål er naturligvis, *hvad jeg ville gøre anderledes, hvis design- og udførelsesfasen skulle gentages.* I dette afsnit vil jeg diskutere dette, og fremsætte de overvejelser jeg har gjort mig i forhold til en mulig fremtidig gentagelse af forløbet. Jeg vil ikke kommentere alle lektionerne, herunder opgaver og opsamlinger, men i stedet med henblik på en gentagelse, diskutere de bemærkelsesværdige og essentielle udfordringer.

Det første jeg vil kommentere er, meget passende, realiseringen af det første møde, hvor eleverne skulle møde det store spørgsmål omkring arealet af plane figurer. Som beskrevet tidligere skulle eleverne diskutere om tre givne punktmængder havde et areal, hvilket desværre ikke skete, og alle eleverne havde en klar intuitiv opfattelse af, at arealet af hver figur fandtes. Hvis dette forløb skulle gentages, ville jeg bestræbe mig på at eleverne skulle få mulighed for i langt højere grad at reflektere over spørgsmålet, *hvad menes der med areal?* Det viste sig, at eleverne associerede arealbegrebet med formler frem for en størrelse, og på baggrund af dette konkluderede de, at det blot handlede om at finde eller lære en formel til beregning af arealet af de tre punktmængder. Jeg tror bestemt, at en alternativ opgave kunne få det første møde til at fungere bedre og forhåbentlig gøre arealbegrebet lidt tvivlsomt for eleverne. I et fremtidigt design, kunne jeg godt tænke mig at lade elever diskutere flere typer af plane figurer og præsentere eleverne for figurer, som ikke umiddelbart kan identificeres med en kendt figur, og måske derfor kan få eleverne til at forstå at arealet af en sådan figur ikke på forhånd eksisterer og er givet. Et ”modeksempel” i form af en figur eller punktmængde, som ikke har dette sanselige areal og ikke umiddelbart kan tilskrives et arealet ville forhåbentlig igangsætte den diskussion, som ikke indtraf i udførelsen af dette designede forløb.

I forbindelse med introduktionen til venstre- og højresummer har udførelsen af mit design vist et behov for en mere udførlig forklaring af disse to begreber eller et mere udførligt arbejde med disse. Som nævnt i a posteriori analysen blev bestemmelsen af bredden og højden af de rektangler, som indgik i venstre- og højresummerne et gentagende problem for en række elever, hvilket vanskeliggjorde det teknologiske-teoretiske arbejde. Alternativt kunne man lade læreren introducere og forklare disse to begreber i et større omfang, eksempelvis ved hjælp af eksempler gennemgået på tavlen. På denne måde ville eleverne have nemmere ved det tekniske arbejde og formentlig ikke finde det vanskeligt at bestemme rektanglernes højder ved hjælp af den givne funktionsforskrift. Jeg ville dog i stedet vælge at konstruere en række forberedende opgaver i beregning af en venstre- og højresum, da jeg tror, at et selvstændigt elevarbejde frem for en lærerstyret gennemgang vil resultere i, at en videre anvendelse af teknikken vil forløbe lettere.

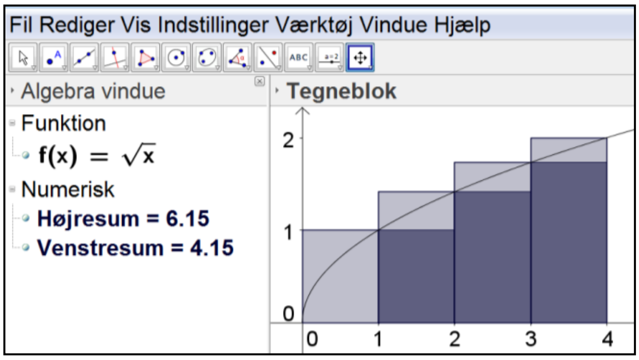
Det kan også diskuteres, hvordan og i hvilket omfang instrumenterede teknikker skal og kan inddrages i forbindelse med dette emne. Udførelsen af mit design viste, at eleverne ved hjælp af instrumenterede teknikker kunne nå et teknologisk niveau, som forberedte eleverne på det efterfølgende teoretiske niveau. I forbindelse med en revidering af dette design tror jeg, at der er flere fordele at hente ved inddragelsen af et CAS-værktøj, så disse instrumenterede teknikker ikke blot for eleverne vil fremstå som en alternativ og langt mindre tidskrævende teknik, men at man i langt højere grad kunne nå teknologisk-teoretisk niveau. Eleverne fandt brugen af GeoGebra overkommelig, og de blev hurtigt fortrolige med denne teknik, så jeg ville bestemt i disse opgaver kræve mere af eleverne i form af flere teknologiske-teoretiske spørgsmål. En mulighed kunne være at lade eleverne kommentere på de udfyldte skemaer, og ikke formulere de delspørgsmål jeg valgte og dermed undersøge, hvilke refleksioner og observationer de selvstændigt ville gøre sig. Endvidere ville jeg formulere et spørgsmål, som bad eleverne relatere GeoGebras resultater til de diskussioner eleverne havde haft i forbindelse med det første møde, og få eleverne til at kommentere på tallene og den observerede grænseværdi. Den sidste opgave som eleverne løste ved brug af GeoGebra omhandlede de negative værdier for venstre- og højresummerne, og denne opgave ville jeg klart revidere, hvis forløbet skulle udføres igen. Mange af eleverne havde svært ved at forklare de negative værdier, og jeg tror det havde hjulpet, hvis opgaven bestod i en indledende delopgave, hvor eksempelvis venstresummen for 4 intervalinddelinger skulle beregnes uden brug af GeoGebra.

Jeg lod i dette design eleverne arbejde med hovedproblemtypen Π_3: *Etabler en sammenhæng mellem integral og en funktions middelværdi på et interval*, for at undgå en udelukkende arealbaseret fortolkning af det bestemte integral. Udførelsen af mit design viste, at opgaven omhandlende denne hovedproblemtype skulle introduceres bedre, så eleverne ville få en klarere fornemmelse af den intuitive ide om en funktions middelværdi på et interval. Som nævnt tidligere fandt et par elevgrupper det desuden vanskeligt at forstå det udglattede areal, og jeg fornemmede, at det ikke var præciseret tilstrækkeligt, at når eksempelvis tre rektangler med forskellige højder udglattes, opnås der først tre rektangler med samme højde, sådan at det samlede areal forbliver det samme, og disse tre rektangler med samme højde kan da opfattes som ét fladt udglattet rektangel. Jeg ville i forbindelse med en gentagelse forsøge at konstruere en opgave, hvorigennem eleverne selv indser og formulerer ideen med det udglattede rektangel, og hvis det foregående arbejde med beregning af venstre- og højresummer blev mere udførligt, tror jeg bestemt, at en sådan opgave ville komme til at fungere i praksis.

I forbindelse med hovedproblemtypen Π_1: *Afgør om det bestemte integral findes*, ville jeg genoverveje det første møde med denne problemtype. Jeg ville forsøge at konstruere en opgave, som kunne gøre eleverne opmærksomme på at spørgsmålet omkring eksistensen er interessant og væsentligt. Det kunne være en mulighed i forlængelse af arbejdet med GeoGebra og ”opdagelsen” af den fælles grænseværdi, at bede eleverne diskutere om en sådan grænseværdi altid vil eksistere. Desuden kunne det tænkes at GeoGebra eller matematikprogrammet Maple kunne inddrages i forbindelse med en præsentation af funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ defineret ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & når\ x\ er\ rational \\ 1, & når\ x\ er\ irrational \end{cases}$$

På baggrund af a posteriori analysen ville jeg endvidere ladet arbejdet med differensen mellem venstre- og højresummer fylde mere i designet, da analysen viste, at en række elever fandt det vanskeligt at tegne venstre- og højresummen på samme figur, samt skravere differensen. Én opgave, som gav en illustrativ forståelse af differensen, var øjensynligt ikke tilstrækkeligt. Det kunne være oplagt at inddrage GeoGebra i forbindelse med dette, hvilket jeg undlod dels på grund af tidsrammen og min forventning om, at eleverne ikke ville finde arbejdet omkring differens svært. En mulighed kunne være at bede eleverne definere funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet [0,4] i GeoGebra og beregne både venstre- og højresummen for eksempelvis 4, 10 og 50 intervalinddelinger, hvilket for 4 intervalinddelinger ville give følgende output.



Figur 34: Beregning af venstre- og højresum for $f(x) = \sqrt{x}$ for $n = 4$ i GeoGebra

Eleverne ville stadig skulle besvare spørgsmålet omkring hvilket område, som svarer til differensen, men det illustrative element i GeoGebra ville tydeliggøre, at denne differens vil gå mod 0. I forlængelse af dette kunne opgaven desuden bestå i at lade eleverne vende tilbage til spørgsmålet omkring eksistensen af det bestemte integral af en funktion f (hvor det bestemte integral var præsenteret som grænseværdien af en venstresum). I opgave 9 lod jeg det afsluttende spørgsmål være følgende, *hvad sker der med differensen, $H - V$ og differensen, $V - H$, når antallet af intervalinddelinger vokser?* Hvis jeg skulle gentage forløbet ville jeg her tilføje et spørgsmål omkring, hvad svaret på dette ville betyde, og eventuelt bede eleverne relatere svaret til spørgsmålet omkring eksistensen af det bestemte integral.

Jeg havde i dette design planlagt, at læreren afslutningsvist i opsamlingen af opgave 11 skulle introducere funktionen $A(x)$. Som transskriberingen viser, definerede læreren denne funktion som det bestemte integral fra a til x af en funktion $f(t)$ defineret på intervallet $[a, b]$ og hvor $a \leq x \leq b$, og nævnte i forlængelse af dette, at det bestemte integral af en funktion f, var defineret som en grænseværdi. Læreren tilføjede, at når f er en positiv funktion, kan $A(x)$ opfattes som arealet under grafen op til en vis x-værdi. Jeg er ret sikker på, at eleverne, grundet betegenelsen $A(x)$, meget nemt forbinder denne funktion med en arealfunktion. Hvis jeg skulle gentage dette forløb, ville jeg muligvis vælge betegnelsen $S(x)$, hvilket jeg som tidligere nævnt også overvejede, men efter udførelsen tror jeg at det ville tydeliggøre, at funktionen nærmere er en ”sumfunktion”.

I forbindelse med planlægningen af mit design valgte jeg at konstruere en opgave, som ville gøre det muligt for eleverne at indse, at $A'(x) = f(x)$, hvor f var en given lineær funktion. Jeg ønskede ikke, at læreren skulle præsentere eleverne for denne sammenhæng, og jeg syntes bestemt at den konstruerede opgave var fornuftig. Det viste sig dog at en betydelig stor del af klassens elever fandt den opgave meget vanskelig, hvilket resulterede i, at kun få elever nåede at kommentere på udtrykket for $A'(x)$, og der var dermed svært at realisere arbejdet med opgavetypen T : Hvis $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, hvad kan du sige om $A'(x)$? Hvis denne opgave skulle indgå i en gentagelse af forløbet, ville jeg tilføje en række delopgaver for at gøre opgaven lettere og skabe et bedre overblik. Det kunne også være interessant at konstruere en helt ny opgave med inddragelse af GeoGebra, og undersøge om en sådan opgave ville føre flere elever frem til den tilsigtede teoretiske pointe.

Jeg valgte at lade eleverne gennemføre det tilhørende bevis for, at der for en vilkårlig pæn funktion f gælder, at $A(x)$ er stamfunktion til f, dvs. A er differentiabel og $A'(x) = f(x)$. Det viste sig, at et fornuftigt elevarbejde var umuligt at realisere i forbindelse med dette, og det var enormt vanskeligt, at få eleverne til at gennemføre det deduktive ræsonnement. Jeg tror dog, at denne opgave vil kunne komme til at leve, men det kræver for det første at eleverne er fortrolige med differentialregningsteori, for det andet, at eleverne kan gøre brug af algebraisk notation og for det tredje, at opgaven udstyres med flere ledende delopgaver. Jeg er dog i tvivl om konsekvens af dette, og jeg er bange for at eleverne vil miste overblikket.

I forbindelse med den efterfølgende opgave 14, ville jeg i en revideret udgave af mit design tilføje en henvisning til kapitlet i deres bog om stamfunktioner og desuden ville jeg tilføje en afsluttende delopgave, som skulle lade eleverne kommentere på udtrykket for $A(b)$. Det kunne være interessant at se, om eleverne kunne formulere, hvad dette teoretiske resultat bevirker i forhold til bestemmelse af den eksakte værdi af det bestemte integral. Det samme gør sig gældende i den sidste opgave, hvor jeg ligeledes ville tilføje en delopgave, hvor eleverne skulle kommentere på det opnåede resultat for $A(2)$.

Afslutningsvist vil jeg kommentere de indgående introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger. Det ville i forbindelse med udarbejdelsen af et revideret design være en klar fordel at udarbejde dette i samarbejde med den lærer, som skal udføre undervisningen. Jeg havde i forbindelse med dette speciale korte møder med klassens lærer, og taget i betragtning af det synes jeg bestemt, at de indgående introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger fungerede udmærket. Grundet tiden blev en egentlig institutionaliseringsfase ikke realiseret, og dette ville jeg bestemt ønske ville ske, hvis forløbet skulle uføres igen. Jf. den antropologiske teori for didaktik er det gennem institutionaliseringsfasen at der indtræffer en tydelig identifikation og definition af de udviklede lokale matematiske organisationer. Dette ville over for eleverne have tydeliggjort de essentielle teoretiske definitioner og resultater, og forhåbentlig anskueliggjort forbindelsen mellem de to lokale matematiske organisationer, MO_1 og MO_2.

14. Konklusion

Meget kort beskrevet bestod dette speciale i en undersøgelse af, hvorvidt det ville være muligt at give elever i en dansk gymnasieklasse en mere præcis tilgang til det bestemte integral, og specielt om det kunne lykkes at få den matematiske organisation MO_2 omkring de mere topologiske spørgsmål knyttet til det bestemte integral til at leve.

Den teoretiske analyse af det bestemte integral, som omfatter afsnittet om den akademiske viden samt den viden, som skal formidles, udgjorde mit udgangspunkt, for at designe et undervisningsforløb, som overordnet set skulle forsøge at realisere det ovenstående. Udførelsen af dette undervisningsforløb resulterede i en mængde empirisk data og afslørede den realiserede didaktiske proces herunder de udviklede matematiske organisationer. Den epistemologiske referencemodel muliggjorde at en mere præcis a priori og a posteriori analyse af designet kunne udarbejdes, og specialet tog sin afslutning i forbindelse med en diskussion af, hvad jeg ville genoverveje og revidere, hvis en planlægning og udførelse af et lignende undervisningsforløb skulle gentages.

Specialet har belyst en række interessante fagdidaktiske udfordringer og begrænsninger, som viste sig at eksistere i forbindelse med en mere præcis tilgang til det bestemte integral. Specielt var det en udfordring at få eleverne til at reflektere over spørgsmål knyttet til definition og eksistens af det bestemte integral, samt at realisere et fornuftigt og lærerigt arbejde i de teknologiske-teoretiske faser. Algebraisk notation samt generaliseringer viste sig gentagende gange også at være udfordrende elementer i mit design, og specielt også det deduktiv ræsonnement. Der var bestemt også elementer, som fungerede, og flere elever kommenterede interessante teknologiske-teoretiske observationer, og mange af opgaverne gav trods alt anledning til et lærerigt arbejde. Jeg har et indtryk af, at eleverne nåede langt, men desværre ikke i mål.

Ved en læsning af bekendtgørelsen om uddannelsen til studentereksamen står det klart at gymnasiets matematikundervisning i dag er rettet mod matematisk analyse, og jeg tror, at de førnævnte generelle vanskeligheder som udførelsen af dette design afslørede, formentlig også vil være at finde i forbindelse med undervisning og læring i andre emner inden for analyse. I et større perspektiv er det derfor interessant, hvad formålet med gymnasiets matematikundervisning skal være, og hvad denne med rimelighed kan og bør indeholde. I forlængelse af dette skal det kommenteres, at der specielt inden for de seneste år er set en stigning i inddragelsen af instrumenterede teknikker i forbindelse med læring og undervisning, og disse har bestemt en indflydelse på det tekniske arbejde. Brugen af CAS letter bestemt det tekniske arbejde i forbindelse med mange af de matematiske emner, som skal berøres af gymnasieelever, og jeg er sikker på, at der derved er plads til nye opgavetyper, som kan støtte og skabe et interessant teoretisk elevarbejde i forbindelse med en række emner inden for analyse. Jeg håber således, at der vil blive foretaget en genovervejsele af det der i dag er formålet med matematikundervisning i gymnasiet, og at dette vil give mulighed for at teoretiske og topologiske spørgsmål kan blive inddraget og tilføre en undervisningen en lærerig og interessant dimension.

15. Litteraturliste

Abbott, S. (2001). Understandig Analysis, Chapter 7, The Riemann Integral. Springer.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón , J.: 2005, Didactic restrictions on teachers practice – the case of limits of functions in Spanish high schools Educational Studies in Mathematics 59 no. 1-3, 235-268.

Bosch, M. and Gascón, J. (2006). Twenty five years of the didactic transposition. ICMI Bulletin 58.

Bregendal, P., Schmidt, S.N. og Vestergaard, L. (2007). MAT A hhx, 1. udgave, 1. oplag, Systime.

Brosseau, G. (1997). Theory of didactical situations i mathematics, chap. 5. Derdrecht: Kluwer.

Clausen, F., Schomacker, G. og Tolnø, J. (2006). Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog B2, 1. udgave, 1. oplag, Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. og Tolnø, J. (2006). Gyldendals Gymnasiematematik Arbejdsbog B2, 1. udgave, 1. oplag, Gyldendal.

Jensen, T., Jessen, C. og Nielsen, M.O. (2006). Matema10k: Matematik for gymnasiet, Bind 2, B-niveau, Frydenlund.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (1999). MAT 3H, 1. udgave, 1. oplag, Systime.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (2002). MAT 3H: Opgaver, 1. udgave, 2. oplag, Systime.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (1999). MAT 2A, 1. udgave, 3. oplag, Systime.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (1994). Matematik 3: for højt niveau, 1. udgave, 3. oplag, Systime.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (2010), MAT A2, 1. udgave, 4. oplag, Systime.

Carstensen, J. og Frandsen, J. (2008). MAT A3, 1. udgave, 4. oplag, Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J. og Studsgaard, J. (2010). MAT B til A stx, 2. udgave, 2. oplag, Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J. og Studsgaard, J. (2009). MAT C til B stx, 1. udgave, 2. oplag, Systime

Fenchel, W., Handest, F., Meyer, H. og Neerup, P. (1967). Elementær matematik II, Munksgaard

García, J., Gascón, J., Higueras, L.R. og Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mahtematics, ZDM 2006 Vol. 38 (3).

Guin, D. og Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity og instrumental orchestrations. Zentralblatt für Didaktik der Matematik 34 (5), 204-211.

Gyöngyösi, E., Solovej, J. og Winsløw, J. (2011). Using Cas-based work to ease the transition from calculus to real analysis. To appear in proceedings of CERME7, Rzeszow, Poland, 2011.

Hansen, H.C., Haarh, O., Jensen, H.N., Wedege, T., Jakobsen, I.T., Thybo, C., Munkholm, E.S., Antonius, S., Madsen, T.G. og Jørsboe, O.G. (2008). Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet: Gymnasial og videregående matematik, Syddansk Universitetsforlag.

Hoyles, C. and Lagrange, J.-B. (2010). Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. Vol. 13. Springer.

Jensen, T., Jessen, C. og Nielsen, M.O. (2006). Matema10k, Matematik for gymnasiet, bind 2, B-niveau, Frydenlund.

Kristensen, E. og Rindung, O. (1969). Matematik 2, G.E.C Gads forlag, 3. udgave

Kristensen, E. og Rindung, O. (1974). Matematik 2.1 Opgaver, G.E.C Gads forlag, 2. oplag

Lagrange, J.-B. (2005). Using Symbolic Calculators to Study Mathematics: the case tasks and techniques. In: D. Guin and L. Trouche (Eds), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, pp. 113-135. Berlin: Springer.

Larsen, N.H. og Offenberg, G. (1990). Gads Matematik: Integralregning og differentialligninger, Gjellerup og Gad

Lindstrøm, T. (2006). Kalkulus, 3. udgave, Universitetsforlaget, Oslo.

Nielsen, K.E. og Fogh, E.: 2006a, Vejen til Matematik A2, Forlaget HAX

Nielsen, K.E. og Fogh, E.: 2006b, Vejen til Matematik B2, Forlanget HAX

Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E.A. og Stanley, D.: 2003, Mathematics for High School Teachers: An Advanced Perspective, Pearson Education

Winsløw, C. (2006). Didaktiske miljøer for ligedannethed. MONA 2006-2, 47-62.

Winsløw, C. (2013). Mathematical analysis i high school: a fundamental dilemma. University of Copenhagen.

Bilag 1

Undervisningsforløb i integralregning

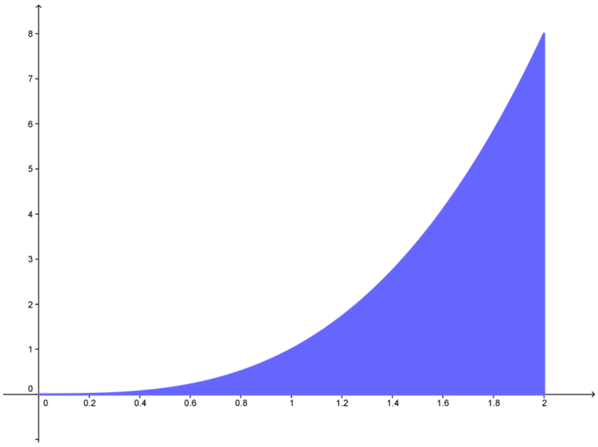
Definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral

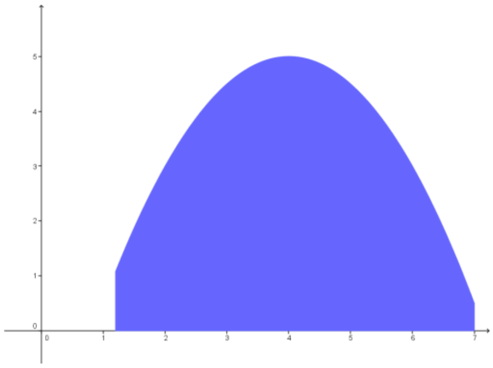
Del 1: Definition og eksistens af bestemt integral

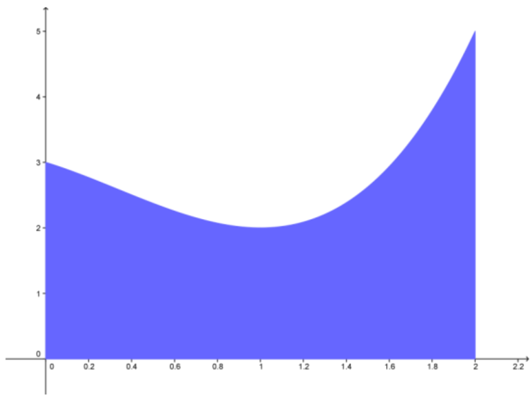
Opgave 1

1. Tegn tre figurer som I kan beregne arealet af, og forklar hvordan arealet beregnes.

2. Diskutér om de tre blå punktmængder på næste side har et areal, og hvis ja, om I kan beregne arealet. Skriv jeres overvejelser og ideer i tekstboksen.



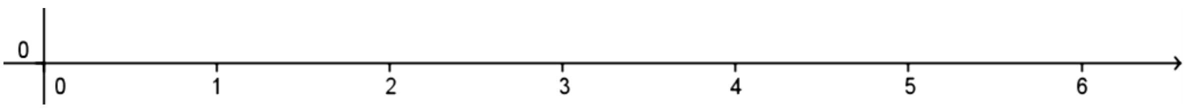




3. Hvis vi antager, at de tre punktmængder har et areal, hvad kunne I så sige om disse tal? Angiv fx nogle tal, tal der er større eller mindre end arealerne, gæt på hvad værdierne ca. kunne være, osv.

Opgave 2

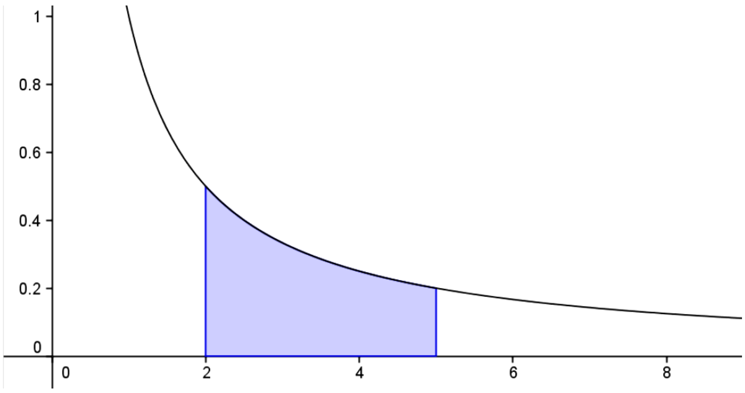
1. Inddel intervallet [2,5] på x-aksen i fire lige store delintervaller, og beregn længden af hvert delinterval.



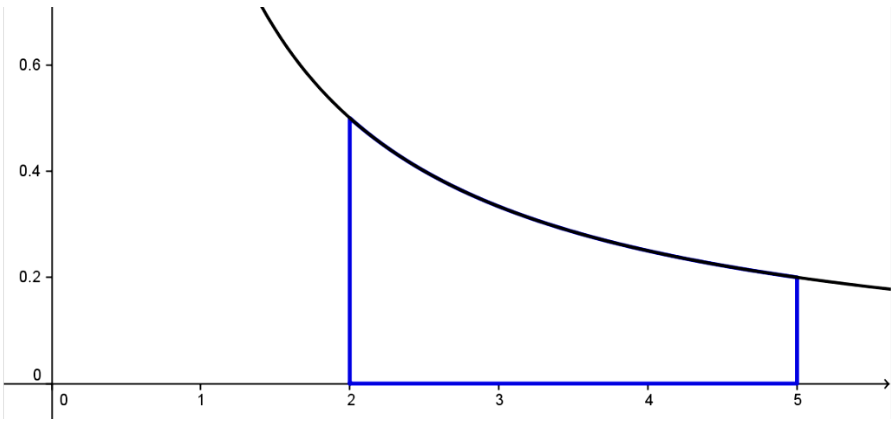
2. Betragt et generelt interval $[a, b]$. Opstil et generelt udtryk for længden af hvert delinterval, hvis intervallet $[a, b]$ inddeles i n lige store delintervaller.

Opgave 3

På nedenstående figur ser I den punktmængde, som begrænses af x-aksen, grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ og de to rette linjer $x = 2$ og $x = 5$.



1. Inddel intervallet [2,5] i tre lige store delintervaller, og tegn de tre rektangler, hvis højder svarer til funktionsværdierne af delintervallernes **højre** endepunkter.

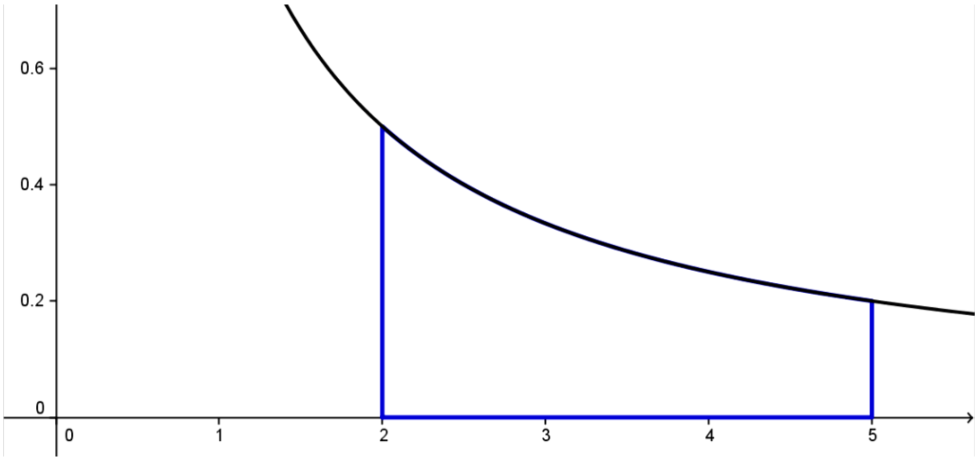


2. Bestem bredden og højden af hvert af de tre rektangler og beregn arealet af disse. Skriv dine resultater i skemaet.

Rektangel	Bredde	Højde	Areal
1			
2			
3			

3. Beregn summen af de tre rektanglers arealer. Denne sum kaldes **højre**summen.

4. Tegn nu de tre rektangler, hvor funktionsværdien af delintervallernes **venstre** endepunkter benyttes som højderne.



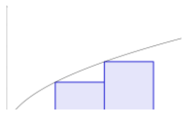
5. Beregn summen af de tre rektanglers arealer. Denne sum kaldes **venstre**summen.

Opgave 4

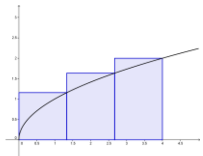
Betragt funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, på intervallet [0,4].

1. Bestem længden af hvert delinterval, når intervallet [0,4] opdeles i tre lige store delintervaller.

2. Beregn venstresummen



3. Beregn højresummen



Opgave 5

Betragt igen funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet [0,4]. I skal nu arbejde videre med højre- og venstresummer, men nu ved brug af GeoGebra.

1. Definér f ved kommandoen ”Funktion[sqrt(x), 0, 4]”. Bemærk at *sqrt* er en forkortelse af det engelske ord *squareroot*, som på dansk betyder *kvadratrod*.

Ved hjælp af kommandoen ”RectangleSum[<Function>, <Start x-Value>, <End x-Value>, <Number of Rectangles>, <Position for rectangle start>]”, kan GeoGebra beregne både venstre- og højresummer.

Det første, som indtastes i kommandoen er funktionen, her skrives f, da I har defineret denne. I betragter funktionen over intervallet [0,4] på x-aksen, og I skriver derfor 0 som

<Start x-Value> og 4 som <End x-Value>. Antallet af rektangler (antal delintervaller) indskrives på pladsen <Number of Rectangles>. Det sidste I skal skrive ind er <Position for rectangle start>. Her skriver I 0, hvis I ønsker at GeoGebra skal benytte delintervallernes venstre endepunkter som rektanglernes højder, og I skriver 1, hvis GeoGebra i stedet skal benytte de højre endepunkter.

Summen af rektanglernes arealer skrives herefter både i algebra vinduet og i tegneblokken.

2. Benyt GeoGebra til at tjekke jeres resultat for højre- og venstresummen fra opgave 4.
3. Åbn en ny tegning, og definér igen funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet [0,4], ved at skrive ”Funktion[sqrt(x), 0, 4]” i input feltet.

Bemærk at når I har udregnet en sum, kan I dobbeltklikke på den numeriske sum i algebra vinduet, og nemt indskrive et nyt antal delintervaller i det vindue som åbner.

4. Benyt GeoGebra til at udfylde nedenstående skema. Start med at beregne venstresummerne for de forskellige antal delintervaller, og skriv løbende summerne ind i nedenstående skema. Beregn herefter højresummerne, og skriv ligeledes disse ind i skemaet.

Antal delintervaller, n	**4**	**10**	**50**	**100**	**500**
Venstresum					
Højresum					

5. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af inddelinger vokser?

6. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?

Opgave 6

Betragt funktionen som du arbejdede med i opgave 3, $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet [2,5].

1. Åbn en ny tegning i GeoGebra, og definér funktionen f.
2. Benyt GeoGebra til at udfylde nedenstående skema.

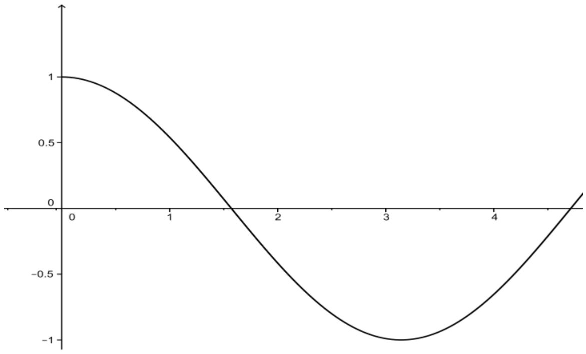
Antal delintervaller, n	**4**	**10**	**50**	**100**	**500**
Venstresum					
Højresum					

3. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af delintervaller vokser?

4. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?

Opgave 7

Åbn en ny tegning i GeoGebra. Definér funktionen $f(x) = \cos(x)$ på intervallet [1,4].



1. Beregn ved hjælp af GeoGebra venstresummerne for de forskellige antal delintervaller, som ses i nedenstående skema, og skriv summerne i skemaet.
2. Beregn ligeledes højresummerne ved hjælp af GeoGebra, og skriv disse i skemaet.

Antal delintervaller, n	**4**	**10**	**50**	**100**	**500**	**600**
Venstresum						
Højresum						

3. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af delintervaller vokser?

4. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?

5. Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative. Diskutér eventuelt dette med din sidemand.

I forrige opgave så I eksempler på, at venstresummen og højresummen for en pæn funktion (fx voksende eller aftagende) nærmer sig det samme tal fra hver sin side, når antallet af inddelinger vokser. I så desuden, at en sådan grænseværdi kunne være negativ, og I fik præsenteret *det bestemte integral fra a til b af en funktion f* på følgende måde:

For en pæn funktion f på intervallet $[a, b]$, med en inddeling I: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, gælder at:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n},$$

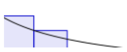
under forudsætning af at grænseværdien eksisterer.

Opgave 8

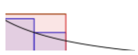
Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[2, 5]$. I opgave 3, beregnede I venstre- og højresummen for tre intervalinddelinger. På figur 1 nedenfor ser I de tre blå rektangler, hvis samlede areal angiver venstresummen.

Intuitivt kan man forestille sig, at man kan glatte de tre blå rektangler (med forskellige højder) ud til tre rektangler med samme højde. Disse tre rektangler (med samme højde) vil danne ét rødt rektangel (figur 2), sådan at det røde rektangel får samme areal som de tre blå rektangler tilsammen. Vi kalder dette røde rektangel det *udglattede rektangel*.

Figur 1



Figur 2



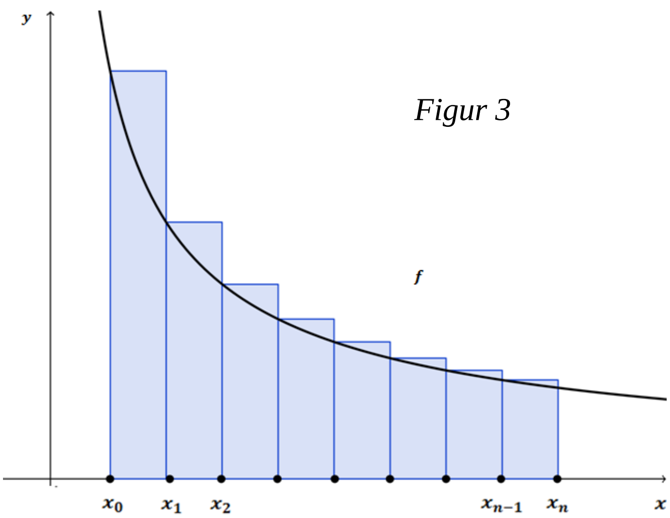
Betragt i det følgende det udglattede røde rektangel på figur 2.

1. Bestem bredden af det udglattede rektangel.

2. Husk at det udglattede rektangel har samme areal som de tre blå rektangler tilsammen. Højden af det udglattede rektangel er et gennemsnit af tre tal, hvilke? Beregn denne højde af det udglattede rektangel.

3. Beregn arealet af det udglattede rektangel.

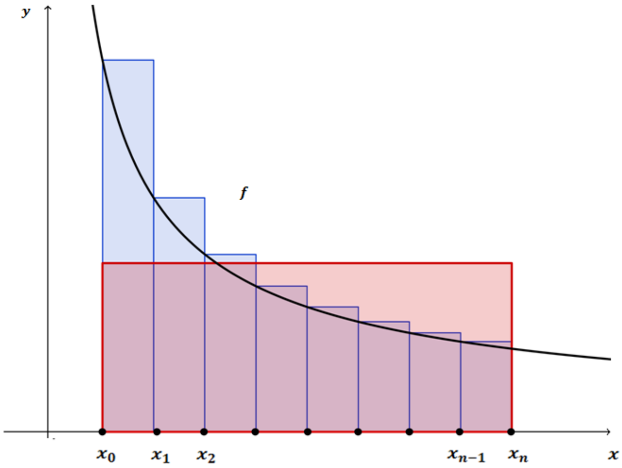
Betragt nu en vilkårlig funktion f på intervallet $[a, b]$; vi antager at $f(x) \geq 0$ på intervallet. Intervallet $[a, b]$ inddeles i n lige store delintervaller, og der fremkommer derved n blå rektangler (se figur 3). Lad $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ betegne de punkter på x-aksen, som svarer til endepunkterne for de n delintervaller (se nedenstående figur). Som det også fremgår af figuren, vil x_0 svare til a, og x_n vil svare til b.



Figur 3

4. Bestem et udtryk for højden af det første og det sidste rektangel.

Vi forestiller os, at vi igen udglatter de n rektangler, til ét rødt udglattet rektangel, med samme areal som de n blå rektangler tilsammen.



5. Bestem et udtryk for bredden af det udglattede rektangel.

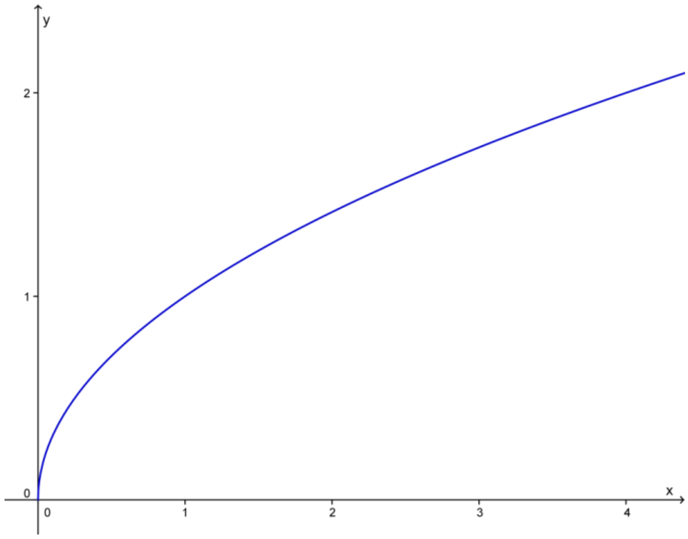
6. Gør rede for, at højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$, og bestem et udtryk for denne højde.

7. Benyt udtrykket for bredden og udtrykket for højden til at bestemme et udtryk for arealet af det udglattede rektangel.

Opgave 9

Betragt $f(x) = \sqrt{x}$ fra opgave 5 på intervallet [0,4].

1. Opdel intervallet [0,4] i fire lige store delintervaller og tegn (på nedenstående figur) de rektangler, som angiver venstresummen.
2. Tegn (på samme figur) de rektangler, som angiver højresummen.
3. Skravér (på samme figur) det område, som svarer til differensen mellem højresummen og venstresummen.



I de følgende delspørgsmål skal I benytte resultaterne fra skemaet i opgave 5, hvor I arbejdede med funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet [0,4].

4. Beregn for hvert antal af delintervaller 'højresummen minus venstresummen', hvilket skrives $H - V$ (evt. ved brug af lommeregner). Skriv resultaterne i skemaet nedenfor.

5. Beregn for hvert antal af delintervaller 'venstresummen minus højresummen', $V - H$, og skriv resultaterne i skemaet nedenfor.

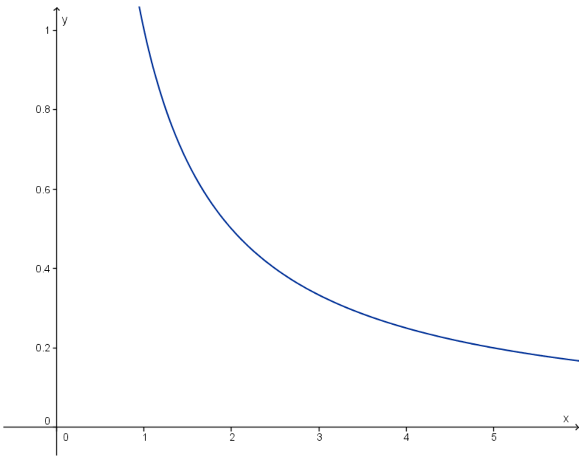
Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500
H − V					
V − H					

6. Begrund hvorfor den ene differens bliver negativ.

7. Hvad sker der med differensen, $H - V$, og differensen, $V - H$, når antallet af delintervaller vokser?

Opgave 10

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet [2,5]. Denne funktion arbejdede I med i opgave 6.



1. Benyt jeres resultater fra skemaet i opgave 6 til at udfylde nedenstående skema for summernes differens.

Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500
H − V					
V − H					

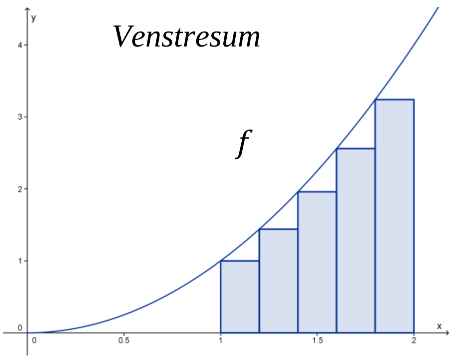
2. Begrund hvorfor det ikke er den samme differens i opgave 9 og 10, som bliver negativ.

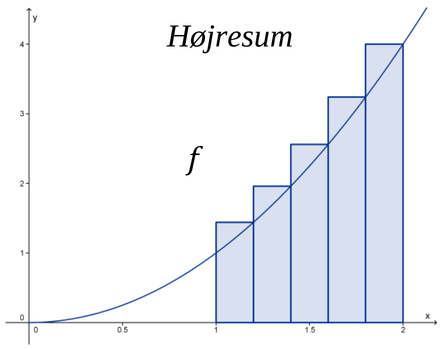
Som det blev nævnt ved forrige opsamling, kan vi ikke her give en helt præcis definition af for hvilke funktioner det bestemte integral fra a til b findes. Men alle pæne (fx voksende eller aftagende) funktioner er faktisk integrable og for disse vises det ved at godtgøre, at $|H_n - V_n| \to 0$ for $n \to \infty$, hvor intervallet $[a, b]$ inddeles i n lige store delintervaller, og hvor H_n angiver højresummen, og V_n angiver venstresummen.

Opgave 11

Betragt funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[1,2]$. Vi ønsker at vise, at funktionen er integrabel på dette interval. Opdel intervallet $[1,2]$ i fem delintervaller.

1. Bestem ved beregning længden af hvert delinterval (angiv denne som en brøk).





2. Opskriv udregningen og resultatet for både venstresummen og højresummen.

3. Benyt udregningerne fra forrige delspørgsmål til at opskrive et udtryk for ’højresummen minus venstresummen’ og reducér dette udtryk (uden brug af lommeregner).

Betragt fortsat funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[1,2]$. Forestil jer, at intervallet $[1,2]$ nu opdeles i n lige store delintervaller.

4. Bestem et udtryk for ’højresummen minus venstresummen’.

5. Lad antallet af delintervaller, n, gå mod uendelig, og diskutér med gruppen, hvad der vil ske med udtrykket for ’højresummen minus venstresummen’. Begrund jeres svar.

6. Hvad kan du nu konkludere om funktionen f og hvorfor?

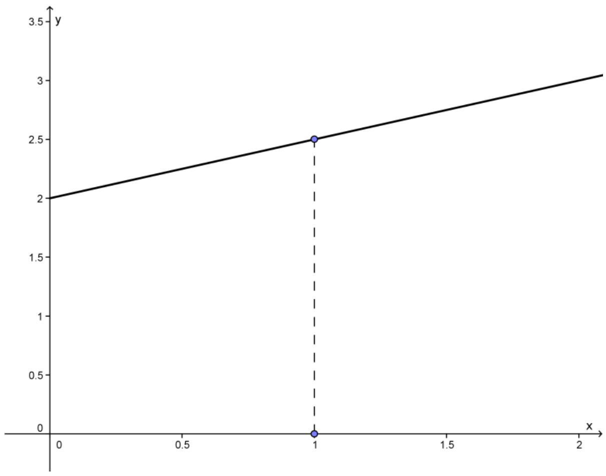
Del 2: Eksakt værdi af bestemt integral

Hvis en funktion f betragtes på intervallet $[a, b]$, og $a \leq x \leq b$, defineres $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. Vi minder om at for $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$ kan $A(x)$ opfattes som et areal.

Opgave 12

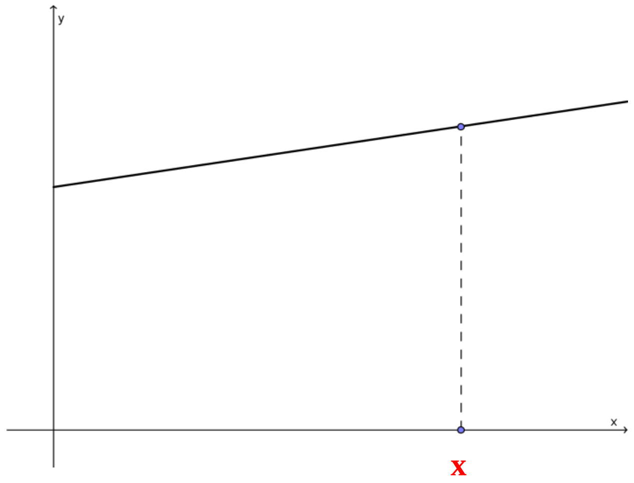
Betragt funktionen $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

1. Sæt $A(x) = \int_0^x f(t)dt$. Beregn $A(1)$ ved at opdele området i kendte figurer som I kan beregne arealet af.



Betragt igen funktionen $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

2. Sæt $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ for $x \geq 0$ og bestem et udtryk for $A(x)$ ved at benytte metoden fra forrige spørgsmål



3. Differentiér udtrykket for $A(x)$ og kommentér dette

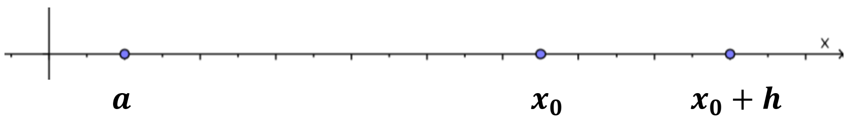
Opgave 13

I denne opgave skal I vise, at hvis f er en vilkårlig pæn funktion, er $A(x)$ en stamfunktion til f, dvs. $A(x)$ er differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

Betragt en pæn funktion f, og lad x_0 være et bestemt punkt i intervallet $[a, b]$. Vi indskrænker os til at se på det tilfælde, hvor h er positiv, så $x_0 + h$ ligger til højre for x_0.

1. Opskriv differenskvotienten for funktionen $A(x)$ i punktet x_0.

Vi forestiller os, at intervallet $[a, x_0 + h]$ og $[a, x_0]$ inddeles i lige store delintervaller. Dette vil give en inddeling af intervallet $[x_0, x_0 + h]$.



Husk at vi har defineret følgende for en pæn funktion f, defineret på $[a, b]$:

- $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, for $a \leq x \leq b$.
- $\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$,

hvor $(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$ angiver venstresummen.

Betragt tælleren i udtrykket for differenskvotienten fra delspørgsmål 1.

2. Gør rede for at $A(x_0 + h) - A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

Vi forestiller os, at vi gør intervallet $[x_0, x_0 + h]$ meget lille, det vil sige at vi ser på en meget lille værdi af h. Det betyder, at vi ikke behøver at inddele dette ”meget lille” interval i flere små delintervaller.

3. Gør rede for at $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0) \cdot h$ og $f(x_0 + h) \cdot h$.

4. Benyt definitionen af det bestemte integral til at forklare, at $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$, for små værdier af h.

5. Beregn differentialkvotienten for A i punktet x_0 ved hjælp af de foregående spørgsmål.

Opgave 14

I denne opgave ser vi på en pæn funktion f, som betragtes på intervallet $[a, b]$, og vi sætter $A(x) = \int_0^x f(t)dt$. Vi minder om at $A'(x) = f(x)$.

1. Lad $F(x)$ være en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$. Hvad kan du sige om $F(x) - A(x)$ (for $x \in [a, b]$)? *Hint*: Differentiér.

2. Indsæt nu x-værdien a i udtrykket fra delspørgsmål 1. Husk at $A(a) = 0$.

3. Indsæt nu x-værdien b i udtrykket fra delspørgsmål 1.

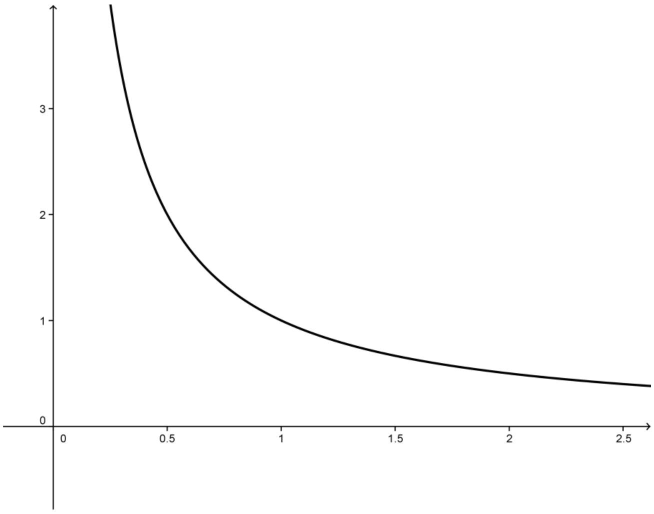
4. Beregn $A(b)$ ved hjælp af de to forrige udtryk.

Opgave 15

Betragt funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$.

1. Bestem en stamfunktion til $f(t)$.

2. Sæt $A(2) = \int_{0,5}^{2} f(t)dt$, og bemærk at $A(2)$ kan opfattes som et areal, da $f(t) \geq 0$ på [0.5,2]. Skraver $A(2)$ på nedenstående figur.



3. Beregn $A(2)$ ved hjælp af resultatet fra forrige opgave.

Bilag 2

Modelbesvarelse

I nedenstående modelbesvarelse er opgaveteksten flere steder reduceret (der henvises til bilag 1 for et eksemplar af det fuldstændige designede opgavesæt), og enkelte opgaver har jeg valgt ikke at konstruere et svar til, da disse består i en diskussion.

Del 1: Definition og eksistens af bestemt integral

Opgave 1

4. Tegn tre figurer som I kan beregne arealet af, og forklar hvordan arealet beregnes.

   Tre mulige figurer: Trekant, Rektangel, Cirkel

   Delopgave 1.2 og 1.3. undladt

Opgave 2

3. Inddel intervallet $[2;5]$ på x-aksen i fire lige store delintervaller, og beregn længden af hvert delinterval.

   Længden af hvert delinterval: $\frac{5-2}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

4. Betragt et generelt interval $[a;b]$. Opstil et generelt udtryk for længden af hvert delinterval, hvis intervallet $[a;b]$ inddeles i n lige store delintervaller.

   Længden af hvert delinterval: $\frac{b-a}{n}$

Opgave 3

På nedenstående figur ser I den punktmængde, som begrænses af x-aksen, grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ og de to rette linjer $x = 2$ og $x = 5$.

6. Inddel intervallet $[2{,}5]$ i tre lige store delintervaller, og tegn de tre rektangler, hvis højder svarer til funktionsværdierne af delintervallernes **højre** endepunkter.
7. Bestem bredden og højden af hvert af de tre rektangler og beregn arealet af disse. Skriv dine resultater i skemaet.

Rektangel	**Bredde**	**Højde**	**Areal**
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

8. Beregn summen af de tre rektanglers arealer. Denne sum kaldes **højre**summen.

   Højresummen: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}=0{,}78$

9. Tegn nu de tre rektangler, hvor funktionsværdien af delintervallernes **venstre** endepunkter benyttes som højderne.

10. Beregn summen af de tre rektanglers arealer. Denne sum kaldes **venstre**summen.

    Venstresummen: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}=1{,}08$

Opgave 4

Betragt funktionen $f(x)=\sqrt{x}$, på intervallet $[0{,}4]$.

4. Bestem længden af hvert delinterval, når intervallet $[0{,}4]$ opdeles i tre lige store delintervaller.

   Længde af delinterval: $\frac{4-0}{3}=\frac{4}{3}=1{,}33$.

5. Beregn venstresummen.

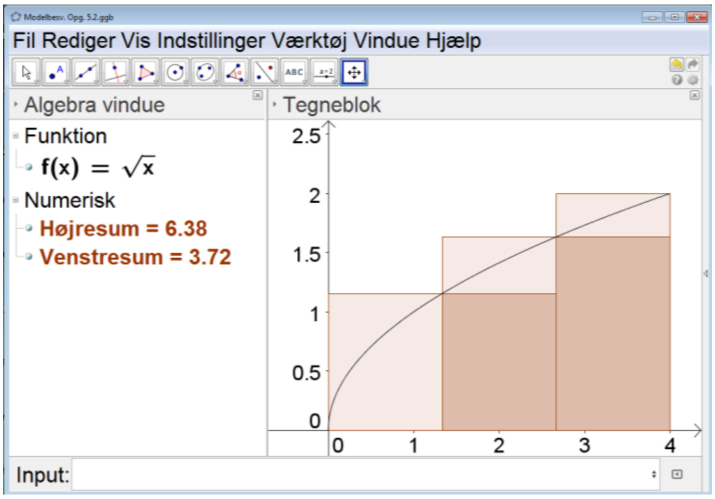
   Venstresummen: $\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=3{,}72$

6. Beregn højresummen

Højresummen: $\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{8}{3}}+\sqrt{4}\right)=6{,}38$

Opgave 5

1. Definér f ved kommandoen "$Funktion[sqrt(x), 0, 4]$"
2. Benyt GeoGebra til at tjekke jeres resultat for højre- og venstresummen fra opgave 4.



3. Åbn en ny tegning, og definér igen funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ på intervallet [0,4], ved at skrive "$Funktion[sqrt(x), 0, 4]$" i input feltet.
4. Benyt GeoGebra til at udfylde nedenstående skema. Start med at beregne venstresummerne for de forskellige antal delintervaller, og skriv løbende summerne ind i nedenstående skema. Beregn herefter højresummerne, og skriv ligeledes disse ind i skemaet.

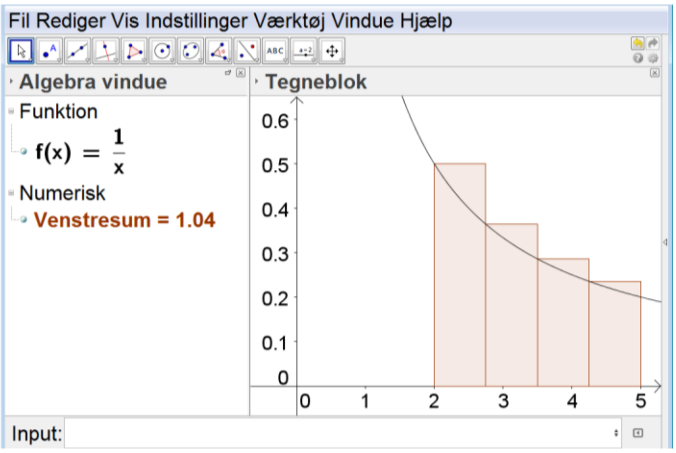
Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500
Venstresum	4,15	4,88	5,25	5,29	5,33
Højresum	6,15	5,68	5,41	5,37	5,34

5. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af inddelinger vokser?
Venstresummen vokser, når antallet af delintervaller forøges.

6. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?
   Højresummen aftager når antallet af delintervaller forøges. Desuden observeres en fælles grænseværdi for venstre- og højresummen, for n gående mod uendelig, og de to summer nærmer sig denne fælles værdi fra hver sin side. Den fælles værdi vil ligge mellem 3,33 og 3,34 og værdien vil være en tilnærmet værdi for arealet under grafen.

Opgave 6

5. Åbn en ny tegning i GeoGebra, og definér funktionen f.
6. Benyt GeoGebra til at udfylde nedenstående skema.



Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500
Venstresum	1,04	0,96	0,93	0,92	0,92
Højresum	0,81	0,87	0,91	0,91	0,92

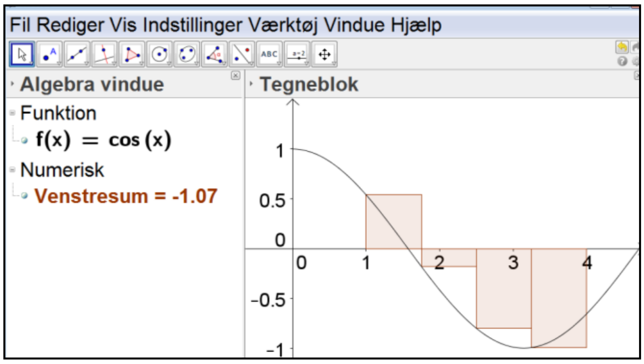
7. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af delintervaller vokser?
   Skemaet viser, at når antallet af intervalinddelinger stiger, vil venstresummen falde.

8. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?
   Højresummen vil derimod stige (igen i takt med at antallet af delintervaller vokser), og desuden vil de to summer nærme sig den samme værdi, 0,92, hvilket vil være en tilnærmet værdi til arealet under grafen.

Opgave 7

Åbn en ny tegning i GeoGebra. Definér funktionen $f(x) = \cos(x)$ på intervallet [1,4].

6. Beregn ved hjælp af GeoGebra venstresummerne for de forskellige antal delintervaller, som ses i nedenstående skema, og skriv summerne i skemaet.
7. Beregn ligeledes højresummerne ved hjælp af GeoGebra, og skriv disse i skemaet.



Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500	600
Venstresum	-1,07	-1,41	-1,56	-1,58	-1,59	-1,6
Højresum	-1,97	-1,77	-1,63	-1,62	-1,6	-1,6

8. Hvad sker der med venstresummen, når antallet af delintervaller vokser?

   Venstresummen vokser, når antallet af delintervallet forsøges.

9. Hvad sker der med højresummen, når antallet af delintervaller vokser?

   Højresummen bliver derimod mindre, når antallet af delintervaller forøges. Desuden nærmer venstre- og højresummen sig den samme værdi fra hver sin side, når antallet af delintervaller forøges.

10. Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative. Diskutér eventuelt dette med din sidemand.

De to summer udregnes som et samlet areal af en antal rektanglers arealer. Hvert af disse rektangler har en højde, som svarer til funktionsværdien af enten det venstre eller det høje endepunkt af et delinterval, og da funktionen $f(x) = cos(x)$ antager negative værdier på hovedparten af intervallet [1,4], vil venstre- og højresummerne blive negative (for ethvert n).

Opgave 8

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[2, 5]$. I opgave 3, beregnede I venstre- og højresummen for tre intervalinddelinger. På figur 1 nedenfor ser I de tre blå rektangler, hvis samlede areal angiver venstresummen $(\dots)$. Betragt i det følgende det udglattede røde rektangel på figur 2.

1. Bestem bredden af det udglattede rektangel.

   Bredden af det udglattede rektangel: $5 - 2 = 3$

2. Højden af det udglattede rektangel er et gennemsnit af tre tal, hvilke? Beregn denne højde af det udglattede rektangel.

   Højden af det udglattede rektangel: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)/3 = \frac{13}{36} = 0{,}36$

3. Beregn arealet af det udglattede rektangel.

   Areal af det udglattede rektangel: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)/3 \cdot 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1{,}08$

Betragt nu en vilkårlig funktion f på intervallet $[a, b]$; vi antager at $f(x) \geq 0$ på intervallet. Intervallet $[a, b]$ inddeles i n lige store delintervaller, lad $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ betegne de punkter på x-aksen, som svarer til endepunkterne for de n delintervaller.

4. Bestem et udtryk for højden af det første og det sidste rektangel.

   Udtryk for højden af det første rektangel: $f(x_0)$

   Udtryk for højden af det sidste rektangel: $f(x_{n-1})$

5. Bestem et udtryk for bredden af det udglattede rektangel.

   Udtryk for bredden af det udglattede rektangel: $x_n - x_0$ eller $b - a$

6. Gør rede for, at højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$, og bestem et udtryk for denne højde.

   Højden af det udglattede rektangel: $\frac{(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))}{n}$

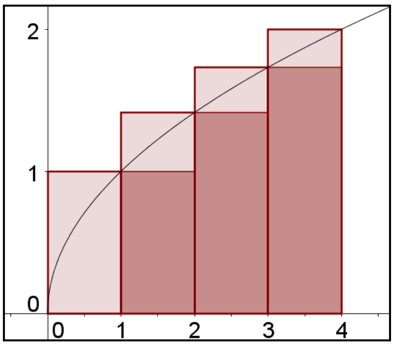
7. Benyt udtrykket for bredden og udtrykket for højden til at bestemme et udtryk for arealet af det udglattede rektangel.

   Areal af det udglattede rektangel: $\frac{(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))}{n} \cdot (x_n - x_0)$

Opgave 9

Betragt $f(x) = \sqrt{x}$ fra opgave 5 på intervallet [0,4].

8. Opdel intervallet [0,4] i fire lige store delintervaller og tegn (på nedenstående figur) de rektangler, som angiver venstresummen.
9. Tegn (på samme figur) de rektangler, som angiver højresummen.
10. Skravér (på samme figur) det område, som svarer til differensen mellem højresummen og venstresummen.



I de følgende delspørgsmål skal I benytte resultaterne fra skemaet i opgave 5, hvor I arbejdede med funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet [0,4].

11. Beregn for hvert antal af delintervaller 'højresummen minus venstresummen', hvilket skrives $H - V$ (evt. ved brug af lommeregner). Skriv resultaterne i skemaet nedenfor.
12. Beregn for hvert antal af delintervaller 'venstresummen minus højresummen', $V - H$, og skriv resultaterne i skemaet nedenfor.

Antal delintervaller, n	4	10	50	100	500
H − V	2	0,8	0,16	0,08	0,01
V − H	-2	-0,8	-0,16	-0,08	-0,01

13. Begrund hvorfor den ene differens bliver negativ.

    Da funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ er voksende, vil højresummen være større end venstresummen for ethvert antal intervalinddelinger, og da vil venstresummen minus højresummen blive negativ for ethvert antal intervalinddelinger.

14. Hvad sker der med differensen, $H - V$, og differensen, $V - H$, når antallet af delintervaller vokser?

    Differensen $H - V \to 0\ for\ n \to \infty$ og differensen $V - H \to 0\ for\ n \to \infty$.

Opgave 10

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[2,5]$. Denne funktion arbejdede I med i opgave 6.

3. Benyt jeres resultater fra skemaet i opgave 6 til at udfylde nedenstående skema for summernes differens.

$Antal\ delintervaller,\ n$	4	10	50	100	500
$H - V$	-0,23	-0,09	-0,02	-0,01	0,00
$V - H$	0,23	0,09	0,02	0,01	0,00

4. Begrund hvorfor det ikke er den samme differens i opgave 9 og 10, som bliver negativ.

   Da vi i opgave 9 betragter den voksende funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ vil højresummerne være større end venstresummer for ethvert antal delintervaller, og da vil differensen ’venstresum minus højresum’ derved blive negativ. I denne opgave (opgave 10) betragtes derimod den aftagende funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor venstresummerne vil være større end højresummer for ethvert antal delintervaller, og da vil differensen ’højresum minus venstresum’ blive negativ.

Opgave 11

Betragt funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[1,2]$. Vi ønsker at vise, at funktionen er integrabel på dette interval. Opdel intervallet $[1,2]$ i fem delintervaller.

7. Bestem ved beregning længden af hvert delinterval (angiv denne som en brøk).

   Længden af hvert delinterval: $\frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$

8. Opskriv udregningen og resultatet for både venstresummen og højresummen.

   Venstresum:

$$\frac{1}{5}\left(1^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2\right) = \frac{1}{5}(1^2 + 1{,}2^2 + 1{,}4^2 + 1{,}6^2 + 1{,}8^2) = 2{,}04$$

   Højresum:

$$\frac{1}{5}\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 2^2\right) = \frac{1}{5}(1{,}2^2 + 1{,}4^2 + 1{,}6^2 + 1{,}8^2 + 2^2) = 2{,}64$$

9. Benyt udregningerne fra forrige delspørgsmål til at opskrive et udtryk for ’højresummen minus venstresummen’ og reducér dette udtryk (uden brug af lommeregner).

$$\begin{aligned} H - V &= \frac{1}{5}\left(\frac{6^2}{5} + \frac{7^2}{5} + \frac{8^2}{5} + \frac{9^2}{5} + 2^2\right) - \left(\frac{1}{5}\left(1^2 + \frac{6^2}{5} + \frac{7^2}{5} + \frac{8^2}{5} + \frac{9^2}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{6^2}{5} + \frac{7^2}{5} + \frac{8^2}{5} + \frac{9^2}{5} + 2^2 - \left(1^2 + \frac{6^2}{5} + \frac{7^2}{5} + \frac{8^2}{5} + \frac{9^2}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}(2^2 - 1^2) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Betragt fortsat funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet [1,2]. Forestil jer, at intervallet [1,2] nu opdeles i n lige store delintervaller.

10. Bestem et udtryk for 'højresummen minus venstresummen'.

$$H - V = \frac{1}{n}({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{n-1}}^2 + 2^2) - \left(\frac{1}{n}(1^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{n-1}}^2)\right)$$
$$= \frac{1}{n}(2^2 - 1^2) = \frac{3}{n}$$

11. Lad antallet af delintervaller, n, gå mod uendelig, og diskutér med gruppen, hvad der vil ske med udtrykket for 'højresummen minus venstresummen'. Begrund jeres svar.

$$H - V = \frac{3}{n} \to 0 \; for \; n \to \infty$$

12. Hvad kan du nu konkludere om funktionen f og hvorfor?

    Da er funktionen $f(x) = x^2$ integrabel på intervallet [1,2], jf. den forrige definition.

Del 2: Eksakt værdi af bestemt integral

Hvis en funktion f betragtes på intervallet $[a, b]$, og $a \leq x \leq b$, defineres $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. Vi minder om at for $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$ kan $A(x)$ opfattes som et areal.

Opgave 12

Betragt funktionen $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

4. Sæt $A(x) = \int_0^x f(t)dt$. Beregn $A(1)$ ved at opdele området i kendte figurer som I kan beregne arealet af.

   Areal af rektangel: $1 \cdot 2 = 2$
   Areal af trekant: $\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 2\right) - 2\right) \cdot 1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$
   Så $A(1) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

Betragt igen funktionen $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

5. Sæt $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ for $x \geq 0$ og bestem et udtryk for $A(x)$ ved at benytte metoden fra forrige spørgsmål.

   Areal af rektangel: $x \cdot 2 = 2x$
   Areal af trekant: $\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot x + 2\right) - 2\right) \cdot x = \frac{1}{4}x^2$
   Så $A(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

6. Differentiér udtrykket for $A(x)$ og kommentér dette.

$$A'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right)' = \frac{1}{2}x + 2$$

   Ser at $A'(x) = f(x)$, for funktionen $f(t) = \frac{1}{2}x + 2$.

Opgave 13

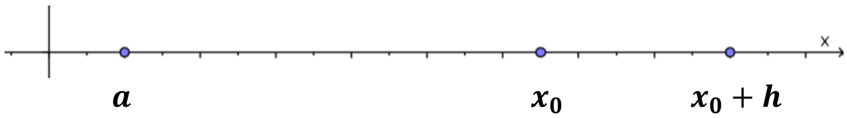
I denne opgave skal I vise, at hvis f er en vilkårlig pæn funktion, er $A(x)$ en stamfunktion til f, dvs. $A(x)$ er differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

Betragt en pæn funktion f, og lad x_0 være et bestemt punkt i intervallet $[a, b]$. Vi indskrænker os til at se på det tilfælde, hvor h er positiv, så $x_0 + h$ ligger til højre for x_0.

6. Opskriv differenskvotienten for funktionen $A(x)$ i punktet x_0.

$$\frac{\Delta A}{h} = \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$$

Vi forestiller os, at intervallet $[a, x_0 + h]$ og $[a, x_0]$ inddeles i lige store delintervaller. Dette vil give en inddeling af intervallet $[x_0, x_0 + h]$.



Husk at vi har defineret følgende for en pæn funktion f, defineret på $[a, b]$:

- $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, for $a \leq x \leq b$.
- $\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$,
  hvor $(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$ angiver venstresummen.

Betragt tælleren i udtrykket for differenskvotienten fra delspørgsmål 1.

7. Gør rede for at $A(x_0+h)-A(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

$A(x_0+h)=\int_a^{x_0+h} f(t)dt$ og $A(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$ jf. definitionen af $A(x)$, og endvidere gælder:

$$\int_a^{x_0+h} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f(a)+\cdots+f(x_{0-1}+h))\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^{x_0} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f(a)+\cdots+f(x_{0-1}))\cdot\frac{b-a}{n}$$

Da fås at

$$A(x_0+h)-A(x_0)=\frac{b-a}{n}\left(\lim_{n\to\infty}\left(f(a)+\cdots+f(x_{0-1}+h)\right)-\left(\lim_{n\to\infty}\left(f(a)+\cdots+f(x_{0-1})\right)\right)\right)$$

hvilket giver følgende:

$$A(x_0+h)-A(x_0)=\frac{b-a}{n}\left(\lim_{n\to\infty}\left(f(x_0)+\cdots+f(x_{0-1}+h)\right)\right)$$

Da $\frac{b-a}{n}\left(\lim_{n\to\infty}\left(f(x_0)+\cdots+f(x_{0-1}+h)\right)\right)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ må

$$A(x_0+h)-A(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Vi forestiller os, at vi gør intervallet $[x_0, x_0+h]$ meget lille, det vil sige at vi ser på en meget lille værdi af h. Det betyder, at vi ikke behøver at inddele dette ”meget lille” interval i flere små delintervaller.

8. Gør rede for at $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0)\cdot h$ og $f(x_0+h)\cdot h$.
9. På et meget lille interval vil en pæn funktion kunne betragtes som enten voksende eller aftagende, og da vil $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0)\cdot h$ og $f(x_0+h)\cdot h$. Jf. definitionen angiver $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ grænseværdien for en venstresum på intervallet $[x_0, x_0+h]$, og udtrykkene $f(x_0)\cdot h$ og $f(x_0+h)\cdot h$ kan opfattes som arealer af to rektangler, hvor $f(x_0+h)\cdot h$ vil være større end $f(x_0)\cdot h$ for en voksende funktion om omvendt for en aftagende funktion, og da vil $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0)\cdot h$ og $f(x_0+h)\cdot h$.

10. Benyt definitionen af det bestemte integral til at forklare, at $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$, for små værdier af h.

Hvis en enten voksende eller aftagende funktion betragtes på et meget lille interval vil den kunne opfattes som værende næsten konstant (på det meget lille interval), og derved vil $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$.

11. Beregn differentialkvotienten for A i punktet x_0 ved hjælp af de foregående spørgsmål.
Differentialkvotienten for A i punktet x_0:
$$\frac{\Delta A}{h} = \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \to f(x_0)\ for\ h \to 0$$
Dette betyder, at $A'(x) = f(x)$ som ønsket.

Opgave 14

I denne opgave ser vi på en pæn funktion f, som betragtes på intervallet $[a, b]$, og vi sætter $A(x) = \int_0^x f(t)dt$. Vi minder om at $A'(x) = f(x)$.

5. Lad $F(x)$ være en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$. Hvad kan du sige om $F(x) - A(x)$ (for $x \in [a, b]$)? *Hint*: Differentiér.

   Da $\left(F(x) - A(x)\right)' = 0$ må $F(x) - A(x) = k$ (hvor k er en konstant).

6. Indsæt nu x-værdien a i udtrykket fra delspørgsmål 1. Husk at $A(a) = 0$.

   Indsætter a i udtrykket $F(x) - A(x) = k$ og får $F(a) - A(a) = k$, og da $A(a) = 0$ fås $F(a) = k$.

7. Indsæt nu x-værdien b i udtrykket fra delspørgsmål 1.

   Indsætter b i udtrykket $F(x) - A(x) = k$ og får $F(b) - A(b) = k$.

8. Beregn $A(b)$ ved hjælp af de to forrige udtryk.

   Da $F(a) = k$ og $F(b) - A(b) = k$, fås at $F(b) - A(b) = F(a)$.
   Heraf følger det, at $A(b) = F(b) - F(a)$.

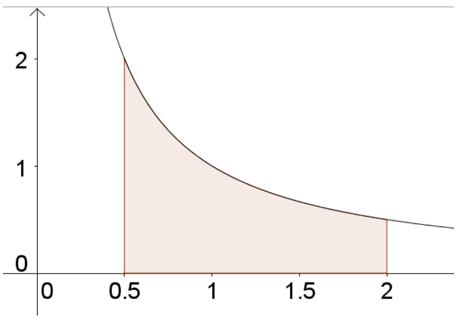
Opgave 15

Betragt funktion $f(t) = \frac{1}{t}$.

4. Bestem en stamfunktion til $f(t)$.

   En stamfunktion til $f(t) = \frac{1}{t}$ er $F(t) = \ln(t) + k$.

5. Sæt $A(2) = \int_{0,5}^{2} f(t)dt$, og bemærk at $A(2)$ kan opfattes som et areal, da $f(t) \geq 0$ på [0.5,2]. Skraver $A(2)$ på nedenstående figur.



6. Beregn $A(2)$ ved hjælp af resultatet fra forrige opgave.

   Da $A(b) = F(b) - F(a)$ fås:

$A(2) = F(2) - F(0,5) = ln(2) + k - ln(0,5) + k = ln(2) - ln(0,5) = 2 \cdot \ln(2) = 1,39$

Bilag 3

Design af et undervisningsforløb om det bestemte integral

Lektionsplan for lektion 1 og 2 (d. 15.4.2013)

Introduktion: Undervisningsforløbet bliver udført i en 2.g-klasse på Hvidovre Gymnasium og HF af klassens matematiklærer. Forløbet er planlagt til at strække sig over 6 lektioner á 50 min. (3 moduler á 2 lektioner), og eleverne vil undervejs arbejde både individuelt og i lærerbestemte grupper, hvor de lærerbestemte grupper benyttes gennem hele forløbet. Eleverne får udleveret de konstruerede opgaver løbende, hvori eleverne i de indsatte tekstbokse kan skrive deres besvarelser på de enkelte opgaver, og der er samtidig indsat tekstbokse til noter eleverne eventuelt vil tage i forbindelse med fælles diskussioner. Jeg hæfter kopisiderne sammen for hver elev, så de efterfølgende har et samlet ark med opgaver, besvarelser, noter, definitioner og resultater.

Ved de fælles opsamlinger giver læreren eleverne mulighed for at deltage aktivt, hvorimod at læreren i forbindelse med opgaveregning forsøger at begrænse sig til opklarende spørgsmål omkring, hvordan opgaverne eller delopgaverne skal forstås.

De to første lektioner er sammenhængende, og pausen (5 min.) holdes derfor efter opsamlingen af opgave 2 og 3 (efter 42 min.).

Lektion 1: kl. 10.05 – 10.47 (42 min.)			
Mandag d. 15.4.2013			
Aktivitet	**Tid**	**Lærerrolle**	**Elevrolle**
Introduktion (Nicole)	5 min.	Forklaring af baggrunden og emnet for forløbet, Nicoles rolle samt dataindsamling	Eleverne lytter og er naturligvis velkomne til at stille spørgsmål.
Opgave 1	7 min.	Observerer elevernes gruppearbejde og lytter til deres diskussioner (dette vil forhåbentlig også sikre at eleverne holder koncentration)	Gruppearbejde: Eleverne overvejer arealer af punktmængder med krum rand.
Opsamling	8 min.	1. Arealbegreb tvivlsomt 2. Forklare tilnærmelse vha. rektangler	Elevgrupperne bidrager med deres ideer, og har naturligvis mulighed for at stille spørgsmål.
Opgave 2 og 3	12 min.	Observerer elevernes gruppearbejde og lytter til deres diskussioner (hvilket forhåbentlig også vil sikre at eleverne holder koncentration)	Gruppearbejde. Hvis en gruppe bliver færdig før tid, skriver de svarene på tavlen.
Opsamling	10 min.	Hvis der ønskes en gennemgang af en beregning gives denne (af en elev/læreren). Læreren understreger forskellen på venstre- og højresummen. Afslutningsvist skriver læreren højresummen op for opgave 3 med en	Eleverne deltager aktivt ved at give svar og stille spørgsmål.

		mere generel notation.	
Lektion 2: kl. 10.52 – 11.50 (58 min.)			
Mandag d. 15.4.2013			
Opgave 4, 5, 6 og 7	25 min	Læreren forbereder opsamling, og overværer eleverne for at få en fornemmelse for deres forståelse.	Individuelt arbejde med GeoGebra. Nå en forståelse af en tilnærmelsesproces, og en sum af mange rektangler (grænseværdi).
Opsamling	8 min.	Fælles diskussion af tabeller, hvis arealet findes kan det opfattes som en grænseværdi for en uendelig sum.	Eleverne tjekker deres egne udregninger, stiller spørgsmål, og forsøger at svare på lærerens spørgsmål.
Opgave 8	12 min.	Læreren identificerer grupper med "gode" betragtninger/besvarelser, og holder sig i øvrigt til at besvare opklarende spørgsmål om, hvordan spørgsmålene skal forstås. Så vidt muligt skal læreren holde sig fra at lede og guide eleverne.	Gruppearbejde. Eleverne diskuterer opgaverne, og deler deres betragtninger og overvejelser. De forsøger at svare helt eller delvist på delspørgsmålene. De hurtige kan skrive resultater på tavlen.
Opsamling	13 min.	Se afsnittet om opsamlinger sidst i lektionsplanen.	Enkelte elever: gennemgå løsninger. De øvrige elever (og alle til slut): Lytte, stille opklarende spørgsmål og tage noter.

Da det langt fra er sikkert, at ovenstående tidsplan kan følges, har læreren naturligvis mulighed for at reagere undervejs. Formentlig vil de sidste delspørgsmål i opgave 8 være forholdsvis krævende for en del elevgrupper, og en mulighed for at indhente lidt tid, kunne derfor være at starte den fælles opsamling før tid. Naturligvis tages dette valg på baggrund af en vurdering af elevernes arbejde og diskussioner.

Hvis der sker et større skred i tidsplanen, kan en plan b være at undlade opgave 8, og lade opsamlingen på opgave 4, 5, 6 og 7 være det afsluttende element for lektion 2.

Beskrivelse af introduktioner, institutionaliseringer og opsamlinger

Jeg introducerer kort forløbet samt baggrunden for dette, og forklarer rammerne for forløbet (opgaveark som samles til et kompendium, adidaktisk arbejde, dataindsamling og observationer). Herefter udleverer læreren opgave 1, som eleverne bedes arbejde med i de lærerbestemte grupper.

Opsamling af opgave 1:

Når læreren får indtryk af at alle grupper er nået frem til nogle ideer, begynder en kort fælles opsamling, hvor læreren udvælger en elev til at nævne tre kendte figurer som eleven kan beregne arealet af samt forklare beregningsmetoden (intet skrives på tavlen). De tre blå figurer fra opgave 1 tegnes på tavlen og elevernes ideer til forståelse samt beregning af de tre arealer diskuteres. Forhåbentlig nævner en elev at man kan tilnærme sig ”arealet” ved brug af figurer som man forstår og kan beregne arealet af. Læreren styrer kridtet og forsøger at samle op på elevernes forslag ved at skrive på/under de tre figurer på tavlen. Læreren sørger for at ideen med rektangler præsenteres og understreger, at diskussionen har vist at det for nogle punktmængder ikke er let at tilskrive disse et areal og forstå, hvad der menes med dette, og at det netop er dette, som eleverne skal arbejde videre med. Læreren viser afslutningsvist på tavlen, at der ved 4 inddelinger er to muligheder for rektangler. Man kan lade højden af rektanglerne svare til enten delintervallernes venstre eller højre endepunkter. Læreren skal ikke uddybe dette mere blot sikre sig, at eleverne kan skelne mellem de to typer af rektangler.

Læreren udleverer opgave 2 og 3, og eleverne arbejder med disse i grupper, og læreren forsøger så vidt muligt ikke at guide eleverne undervejs. Læreren gør imens tavlen klar til den efterfølgende opsamling og de hurtige grupper kan få lov at gå til tavlen og skrive svarene til opgave 2 og 3 (inklusiv tegninger af rektangler).

Opsamling af opgave 2 og 3:

Læreren forklarer kort opgave 2 med udgangspunkt i de to resultater som en elev har skrevet på tavlen. En anden elev har desuden på tavlen angivet besvarelsen på opgave 3, i form af tegninger af rektanglerne, det udfyldte skema, samt resultatet af venstre- og højresummen. Hvis en eller flere grupper ønsker en forklaring af beregningerne kan læreren enten bede en elev vise dette eller selv gennemgå det. Læreren understreger at (skrives ikke på tavlen):

- Højresummen, er summen af rektanglernes arealer, hvor hvert rektangels højde er funktionsværdien af det højre intervalendepunkt.
- Venstresummen, er summen af rektanglernes arealer, hvor hvert rektangels højde er funktionsværdien af det venstre intervalendepunkt.

Læreren tegner en skitse af venstresummen for opgave 3 på tavlen, og anfører på denne følgende notation: x_0, x_1, x_2, x_3 samt $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. Læreren pointerer at funktionsværdierne $f(x_0), f(x_1)\ og\ f(x_2)$ angiver højden af de tre rektangler, som angiver venstresummen. Læreren skriver afslutningsvist venstresummen op for opgave 3 med følgende generelle notation:

$$\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)\right)\cdot\frac{b-a}{n}=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)}{n}$$

Læreren giver eleverne mulighed for at stille spørgsmål til dette, og forsøger at få eleverne til at se sammenhængen mellem udtrykket og grafen.

Læreren udleverer opgave 4, 5, 6 og 7 og beder eleverne åbne matematik-computerprogrammet GeoGebra. Eleverne arbejder individuelt med disse opgaver, ved mindre en eller flere elever ikke har en computer til rådighed.

Opsamling af opgave 4, 5, 6 og 7:

Opgave 4 verificerer eleverne selv (som en del af opgave 5) vha. GeoGebra.

Opgave 5 opsamles ved en indledende fælles betragtning af det udfyldte skema på tavlen. Eleverne deler hinandens observationer af venstresummen og højresummen, mens læreren kortfattet skriver disse på tavlen. Forhåbentlig har eleverne bemærket, at venstresummen vokser og højresummen falder når antallet af delintervallet, n, vokser. Læreren understreger, at højre- og venstresummen nærmer sig den samme værdi, det vil sige, at grænseværdien for de to summer er den samme. I forlængelse heraf pointerer læreren, at summerne nærmer sig grænseværdien fra hver sin side: venstresummen nærmer sig grænseværdien fra venstre, og højresummen nærmer sig I fra højre, da venstresummerne var mindre end højresummerne. Her kan nedenstående illustration muligvis tegnes på tavlen. Desuden spørger læreren om, hvordan man kan opnå en endnu bedre tilnærmelse til den fælles værdi for summerne. Læreren skal sikre sig, at eleverne indser, at det er for en meget fin inddeling, dvs. for n gående mod uendelig, at tilnærmelsen vil blive mere præcis.

Opsamlingen af opgave 6 påbegyndes ligeledes med en fælles opsamling af det udfyldte skema på tavlen, og eleverne deler igen hinandens observationer og betragtninger. Læreren supplerer med ord på tavlen til delspørgsmål 3 og 4, og understreger, at det nu er en aftagende funktion, hvilket bevirker, at højresummerne vil være mindre end venstresummerne. Læreren gentager om nødvendigt at venstre- og højresummen igen nærmer sig en fælles grænseværdi fra hver sin side.

I opgave 7 betragtes funktionen $f(x)=\cos(x)$, og opsamlingen af denne opgave starter ligeledes med at det udfyldte skema på tavlen kommenteres og læreren lader efterfølgende elever svare på delspørgsmål 3, 4 og 5. Læreren skriver igen (kort) elevernes pointer op på tavlen til de tre delspørgsmål. Læreren gentager om nødvendigt forklaringen af de negative summer, og læreren tilføjer, at funktionen kan betragtes som stykkevis voksende eller aftagende, og at det vil gælde alle de funktioner som eleverne vil støde på i gymnasiet.

Læreren indleder nu en institutionalisering med at gentage pointen med opgave 1, at areal for visse punktmængder er et tvivlsomt begreb, og at eleverne ikke var i besiddelse af en teknik til at bestemme et sådan (under forudsætning af at det fandtes). I forlængelse af dette forklarer læreren at, hvis der findes et areal, har vi fundet en metode, som kan hjælpe os med at beregne en *tilnærmet* værdi, hvor vi beregner højresummen (eller venstresummen) for et stort antal intervalinddelinger. Herefter institutionaliserer læreren at det som summen af rektanglernes arealer går i mod (for n gående mod uendelig), defineres som det bestemte integral fra a til b for $f(x)$, og følgende skrives på tavlen:

For en pæn funktion f defineret på intervallet $[a, b]$, med en inddeling $I: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, gælder:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Læreren understreger, at det er en venstresum, der tages en grænseværdi af i det ovenstående udtryk, men tilføjer at de forrige opgaver viste, at de to summer konvergerer mod det samme, og at man i forbindelse men en højresum skulle benytte delepunkterne $x_1, \dots x_n$. Læreren udleverer opgave 8, og tegner imens figur 2 på tavlen som skal indgå i den efterfølgende opsamling.

Opsamling af opgave 8:

Læreren får en elev til på tavlen at skrive beregningerne samt resultaterne til delspørgsmål 8.1, 8.2 og 8.3, og eleven bedes forklare løbende. Denne elev udvælges af læreren på basis af lærerens observationer af gruppearbejdet. Baggrunden for dette er, at sikre et så godt elevbidrag som muligt og med fokus på, at opsamlingens tidsramme holder. En ny elev (tilsvarende udvalgt) skriver svarene til delspørgsmål 8.4 – 8.7 på tavlen og forklarer ligeledes løbende. Læreren samler op ved at illustrere svarene (udtrykkene) vha. en figur.

Læreren inddrager herefter eleverne i en diskussion af delspørgsmål 8.8 (på trods af at alle elever formentlig ikke nåede at diskutere dette i gruppearbejdet). Læreren understreger, at det udglattede rektangel har samme areal som de n rektangler, og derfor søges gennemsnittet af de n rektanglers forskellige højder i forbindelse med bestemmelse af højden af det udglattede rektangel. Læreren inddrager generel notation, og det forklares, at udtrykket $\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n}$ kan opfattes som et gennemsnit af funktionsværdierne på intervallet $[a,b]$, og dermed kan udtrykket opfattes som højden af det udglattede rektangel (gennemsnitshøjden).

Definitionen af det bestemte integral skrives herefter ligeledes på tavlen, og læreren forsøger at få en elev til at kommentere på delopgave 8.9. Forhåbentlig vil en elev eller flere se sammenhængen mellem følgende udtryk:

1. $(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))\cdot\frac{b-a}{n}$
2. $(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n}$

I forlængelse af dette pointerer læreren (hvis ikke en elev har nævnt det i forbindelse med det forrige), at

$$\lim_{n\to\infty}(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n}=\int_a^b f(x)dx \text{ (*)}$$

hvor $\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n}$ var gennemsnittet af funktionsværdierne på intervallet $[a,b]$, og det uddybes, at man derved også kan opfatte grænseværdien af dette gennemsnit som en slags gennemsnit. Læreren kan benytte sig af en mere løs formulering, eksempelvis ”gennemsnittet af uendelig mange højder”, men understrege at dette gennemsnit er lidt tvivlsomt, da man betragter *uendelig* mange.

Med udgangspunkt i det foregående (*), forklarer læreren afslutningsvist det mere generelle resultat – at gennemsnittet af funktionsværdierne af f på intervallet $[a,b]$ derved kan opfattes som $\frac{1}{(b-a)}\cdot\int_a^b f(x)dx$ og følgende skrives på tavlen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n}=\frac{1}{(b-a)}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Læreren forklarer, at dette også gælder for funktioner, som måtte have både negative og positive værdier, og hvor ”arealtolkningen” ikke umiddelbart er meningsfuld (formentlig vil tiden være knap, men en illustration kunne medtages). Læreren kan eventuelt vende tilbage til at tallet $\frac{1}{(b-a)}\cdot\int_a^b f(x)dx$ giver en definition af et sådant gennemsnit af uendelig mange tal, hvilket derved bliver mindre tvivlsomt. Det er vigtigt, at læreren får institutionaliseret at fortolkningen af integralet i denne forbindelse har relation til en funktionens middelværdi på et interval.

Bilag 4

Design af et undervisningsforløb om det bestemte integral

Lektionsplan for lektion 3 og 4 (d. 17.4.2013)

Lektion 3: kl. 10.15 – 11.01 (46 min.)			
Onsdag d. 17.4.2013			
Aktivitet	**Tid**	**Lærerrolle**	**Elevrolle**
Opgave 5, 6 og 7	10 min.	Skriver de tre tomme tabeller på tavlen og holder sig i øvrigt til at besvare opklarende spørgsmål om, hvordan spørgsmålene skal forstås.	Eleverne diskuterer delspørgsmålene i grupper, og skriver deres besvarelser i tekstboksene. En hurtig gruppe udfylder de tre skemaer på tavlen.
Opsamling	10 min.	Fælles opsamling af de tre skemaer (konvergens for de to summer samt negativ summer). Læreren ”definerer” det bestemte integral af en pæn funktion.	Eleverne deltager aktivt, stiller om nødvendigt spørgsmål og noterer sig de vigtige pointer.
Opgave 8	14 min.	Læreren forsøger ikke at hjælpe eleverne med at besvare opgaverne, og begrænser sig til kun at hjælpe med forståelsen af spørgsmålene. Læreren gør tavlerne klar til den efterfølgende opsamling.	Eleverne arbejder med opgave 8 i grupper, og forsøger at skrive en besvarelse af alle delspørgsmålene. En hurtig gruppe kan skrive deres besvarelser af de 7 delspm. på tavlen.
Opsamling	12 min.	Læreren udvælger en eller to elever. Supplerer og præciserer elevernes svar og institutionaliserer at tallet $\frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx$ kan opfattes som gennemsnittet af funktionsværdierne af f på $[a, b]$. Det pointeres at det også gælder for funktioner, som måtte have både negative og positive værdier.	En eller to elever besvarer og forklarer delspørgsmålene (udvalgt af læreren). De resterende elever lytter og stiller opklarende spørgsmål.
Lektion 4: kl. 11.06 – 12.00 (54 min.)			
Opgave 9 og 10	12 min.	Observere elevernes arbejde for at identificere grupper med ”gode” betragtninger/besvarelser, og holder sig i øvrigt til at besvare opklarende spørgsmål om, hvordan spørgsmålene skal forstås. Så vidt muligt skal læreren holde sig fra at lede og guide eleverne.	Eleverne arbejder i grupper. De betragter differenser, og skriver resultater og begrundelser ned i tekstboksene.
Opsamling	12 min.	Læreren udvælger en elev. Efterfølgende ”definerer” læreren integrabilitet for en pæn funktion.	En elev gennemgår opgave 9 og 10. De resterende elever har naturligvis mulighed for at stille spørgsmål.
Opgave 11	15 min.	Læreren observerer elevernes arbejde, og begrænser sig stadig til besvarelse af, hvordan spørgsmålene skal forstås.	Gruppearbejde. Eleverne arbejder med konkret funktion, vise denne er integrabel. Hvis en gruppe bliver

			hurtig færdig, kan de på tavlen skrive deres udregninger samt svar på delspm. 3 og 4.
Opsamling	15 min.	Læreren understreger at eleverne så på en bestemt pæn funktion. Læreren gennemgår beviset for at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel. Læreren forsøger at inddrage eleverne undervejs.	En elev forklarer delspm. 3 og 4. En ny elev begrunder delspm. 5 og 6. Eleverne deltager i det omfang de kan, og kan naturligvis stille spørgsmål undervejs.

Eleverne fik for som lektie til lektion 3 at udfylde tabellerne, som indgår i opgave 5, 6 og 7, og lektion 3 påbegyndes ved at læreren beder grupperne arbejde med følgende delopgaver: 5.5, 5.6, 6.3, 6.4, 7.3 – 7.5. Læreren tegner imens de tre tomme tabeller på tavlen samt en skitse af hver graf. Hvis en gruppe løser delopgaverne hurtigt, kan denne begynde at udfylde de tre tomme skemaer på tavlen.

Opsamling af opgave 5, 6 og 7:

Der henvises til lektionsplanen for lektion 1 og 2.

Opsamling af opgave 8:

Der henvises til lektionsplanen for lektion 1 og 2.

Efter opsamlingen på opgave 8 udleveres opgave 9 og 10, og eleverne arbejder med disse opgaver i grupper, mens læreren på tavlen tegner en skitse af grafen fra opgave 9 og 10 (henholdsvis $f(x) = \sqrt{x}$ og $f(x) = \frac{1}{x}$). Hvis en gruppe bliver hurtig færdig, kan denne tegne venstre- og højresummen som indgår i delopgave 9.1 på tavlen samt udfylde skemaet fra opgave 9 og 10.

Opsamling af opgave 9 og 10:

En elev illustrerer på grafen (ved tavlen) differensen mellem højre- og venstresummen og forklarer endvidere på baggrund af skemaet, hvorfor den ene differens bliver negativ, og hvad der sker med differensen $H_n - V_n$ og $V_n - H_n$for $n \to \infty$ (denne elev udvælges af læreren for at sikre et fornuftigt elevbidrag og for at holde tidsramme). Afslutningsvist forklarer eleven, at da det er hhv. en voksende og aftagende funktion, som betragtes i opgave 9 og 10, vil det ikke være den samme differens som bliver negativ (delopgave 10.2).

Læreren understreger desuden (om nødvendigt) at differensen 'venstresummen minus højresummen' vil blive negativ, for enhver voksende funktion, da venstresummerne vil være mindre end højresummerne og, at det omvendte gælder for en aftagende funktion.

Læreren påbegynder herefter en institutionalisering, hvor det indledningsvist forklares, at det i gymnasiet ikke er muligt at give eleverne en helt præcis definition af for hvilke funktioner det bestemte integral fra a til b rent faktisk findes, men at følgende dog kan siges:

Alle pæne (fx voksende eller aftagende) funktioner faktisk er integrable (integralet findes), og for disse vises det ved at godtgøre, at differensen mellem højre- og venstresummen går mod 0, når antallet af intervalinddelinger n går mod uendelig, dvs. $|H_n - V_n \to 0|$ *for* $n \to \infty$ (dette skrives på tavlen).

Læreren forklarer notationen, hvis der er behov for dette, og forklarer endvidere, at idet differensen går mod 0, så mødes de to summer i "et tal" (de to summer kommer helt tæt på hinanden), og lærerne understreger, at det var denne grænseværdi, som eleverne arbejdede med i de foregående opgaver.

Opgave 11 udleveres og eleverne arbejder med denne i grupper. Hvis en gruppe bliver færdig før tid, kan denne skrive deres besvarelse af delopgave 11.3 og 11.4 på tavlen.

Opsamling af opgave 11:

Læreren lader en elev forklare delopgave 3 og 4, og han understreger, at det kun er det første og det sidste led, som vil bevares i forbindelse med beregningen af differensen mellem højre- og venstresummen. Læreren lader herefter en elev svare på delopgave 5 og 6. Læreren pointerer, at eleverne hermed har vist, at denne konkrete pæne funktion $f(x) = x^2$ er integrabel på intervallet [1,2], og at de nu i fællesskab vil bevise, at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel. Læreren gennemgår det generelle bevis for klassen, og forsøger at inddrage eleverne så meget som muligt.

<u>Sætning</u>: Enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel.

<u>Bevis</u>: Antag at funktionen f er voksende (beviset er analogt for en aftagende funktion), og defineret på intervallet $[a, b]$. Lad I være inddelingen, som deler $[a, b]$ i n lige lange delintervaller af længde $\frac{b-a}{n}$.

Da f er voksende vil højresummerne være større end venstresummerne. Betragt nu differensen:

$$H_n - V_n = \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big) - \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big(\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) - \big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big)\Big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_n) - f(x_0)\big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$$

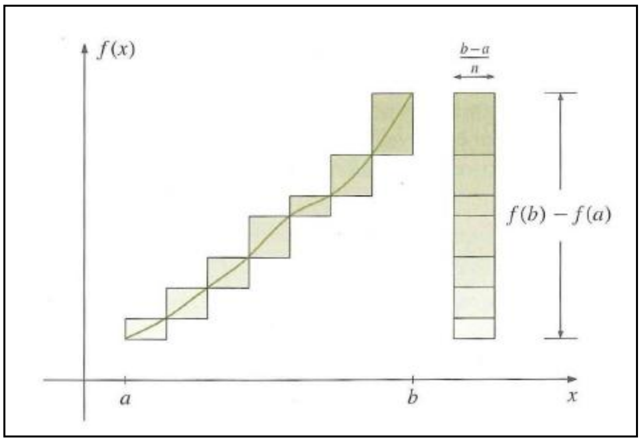
Lader vi n vokse, ser vi, at udtrykket $\frac{b-a}{n} \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$, som var et udtryk for differensen, vil gå mod 0, og derfor er f integrabel.

Beviset suppleres med illustration nedenfor og argumentet gentages kort.

Læreren bør i andet trin medtage flere led, så det bedre kan illustreres, at det kun er $f(x_0)$ og $f(x_n)$ som vil overleve.

Afslutningsvist følger en kort konklusion på disse to lektioner. Læreren kan gentage at:

1. Det bestemte integral for en pæn funktion på et interval er grænseværdien for venstresummen (og højresummen), når antallet af delintervallet går mod uendelig.
2. En pæn funktion kaldes integrabel, hvis det bestemte integral findes, hvilket vises ved at vise, at $|H_n - V_n| \to 0$ for $n \to \infty$.



Bilag 5

Design af et undervisningsforløb om det bestemte integral

Lektionsplan for lektion 5 og 6 (d. 22.4.2013)

Lektion 5: kl. 10.05 – 10.53 (48 min.)			
Mandag d. 22.4.2013			
Aktivitet	**Tid**	**Lærerrolle**	**Elevrolle**
Opsamling af lektion 3 og 4	6 min.	Opskriver definitionen af $\int_a^b f(t)dt$ på tavlen samt, at en pæn funktion kaldes integrabel, hvis $\|H_n - V_n\| \to 0$, for $\to \infty$.	Eleverne har mulighed for at stille spørgsmål undervejs eller bede læreren uddybe.
Opgave 11	12 min.	Læreren observerer elevernes arbejde, og begrænser sig til besvarelse af, hvordan spørgsmålene skal forstås. Læreren gør tavlen klar til opsamlingen (se tavleskitse).	Vise $f(x) = x^2$ er integrabel. Hvis en gruppe bliver hurtig færdig, kan de på tavlen skrive deres udregninger samt svar på delspm. 3 og 4.
Opsamling	15 min.	Læreren understreger, at eleverne så på en bestemt pæn funktion, og gennemgår beviset for at enhver voksende/aftagende funktion er integrabel. Læreren forsøger at inddrage eleverne undervejs. Læreren introducerer $A(x)$, kommenterer at $A(x)$ kan opfattes som et areal, hvis $f(x) \geq 0$, og overvejer $A(a)$ i fællesskab med eleverne.	En elev forklarer delspm. 3 og 4. En ny elev begrunder delspm. 5 og 6. Eleverne deltager i det omfang de kan, og kan naturligvis stille spørgsmål undervejs.
Opgave 12	10 min.	Læreren begrænser sig til besvarelse af, hvordan spørgsmålene skal forstås. Læreren gør tavlen klar til den efterfølgende opsamling (se tavleskitse).	Eleverne opdager at $A'(x) = f(x)$, for forskellige funktioner. En elev fra hver gruppe udfylder en tabel med $f(x)$ og $A'(x)$ på tavlen.
Opsamling	5 min.	Styrer fælles opsamling: i almindelighed gælder $A'(x) = f(x)$.	Eleverne lytter og stiller om nødvendigt spørgsmål.
Lektion 6: kl. 10.58 – 11.50 (52 min.)			
Opgave 13	15 min.	Læreren lader fortsat eleverne arbejde på egen hånd (i det omfang det er muligt)	Eleverne arbejder med argumentet for at $A'(x) = f(x)$. En hurtig elev opskriver differenskvotienten for $A(x)$.
Opsamling	6 min.	Læreren præciserer elevernes argumenter undervejs, og besvarer eventuelle spørgsmål.	En lærer-udvalgt elev forklarer de efterfølgende delspørgsmål.

Opgave 14	8 min.	Læreren begrænser sig til besvarelse af, hvordan spørgsmålene skal forstås.	Eleverne arbejder sig frem til, at $A(b) = F(b) - F(a)$.
Opsamling	5 min.	Gennemgang af beviset hvis behov (evt. fra et vist trin), ellers uddeles opgave 15.	Eleverne giver udtryk for, om der er behov for en gennemgang.
Opgave 15	5 min.	Læreren begrænser sig stadig til besvarelse af, hvordan spørgsmålene skal forstås.	Vha. forrige resultat beregner eleverne $A(2) = \int_{0,5}^{2} \frac{1}{t} dt$.
Opsamling	5 min.	Læreren understreger, at stamfunktioner blev "miraklet" til at bestemme eksakte værdier for bestemte integraler. Eksemplet $\int_0^1 e^{x^2} dx$ nævnes kort.	En elev gennemgår løsningen ved tavlen. Eleverne har mulighed for at stille spørgsmål undervejs.
Opsamling af hele forløbet	8 min.	De matematiske pointer skrives kort på tavlen.	Eleverne kan bede læreren forklarer en eller flere af de matematiske pointer.

Lektion 5 indledes med en opsamling af lektion 3 og 4 ved læreren. Læreren opskriver følgende på tavlen og forklare samtidig:

1. For en pæn funktion f på intervallet $[a, b]$ gælder:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$$
2. Alle pæne funktioner er faktisk integrable (integralet findes), det vises ved at vise, at $|V_n - H_n| \to 0$ for $n \to \infty$.

Herefter udleveres opgave 11.

Opsamling af opgave 11:

Der henvises til lektionsplanen for lektion 3 og 4.

Læreren introducerer herefter funktionen $A(x)$ for eleverne. Læreren husker eleverne på, at det bestemte integral for en pæn funktion var defineret ved:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Ved hjælp af en illustration forklarer læreren, at grænseværdien for venstresummen vil variere afhængigt af, hvor x "placeres" i intervallet $[a, b]$, og derfor kan det bestemte integral fra a til b af en funktion f betragtes som en funktion af x, hvor x betegner den øvre grænse for det bestemte integral. Læreren definerer funktionen og skriver følgende på tavlen:

Hvis en funktion f *betragtes på* $[a, b]$*, og* $a \leq x \leq b$*, defineres* $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Læreren forklarer endvidere variabelskiftet, samt at for en funktion, som er positiv på intervallet (dvs. $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$) kan $A(x)$ opfattes som et areal. Læreren forklarer desuden, hvilket areal, eksempelvis ved brug af en skitse af $f(t) = t^2$ på [0,4] benyttes til at illustrere $A(3) = \int_0^3 t^2\, dt$. Læreren styrer afslutningsvist en fælles overvejelse af, hvad $A(a) = \int_a^a f(t)dt$ er lig med, og sikrer sig, at eleverne forstår, at $A(a) = 0$ da $|a - a| = 0$.

Læreren udleverer opgave 12 og gør tavlen klar til den efterfølgende lektion.

Opsamling af opgave 12:

En elev fra hver gruppe skriver (i en tabel på tavlen) gruppens funktion $f(t)$ samt udtrykket for $A'(x)$. Læreren forsøger at få en elev til at kommentere at der måske i almindelighed gælder at $A'(x) = f(x)$, da dette har vist sig at være tilfældet for de ni funktioner klassen har betragtet. Læreren understreger at, A dermed er en stamfunktion til f, da x var valgt vilkårligt, og institutionalisere det følgende:

Lad f *være en pæn funktion defineret på intervallet* $[a, b]$*. Så er* $A(x)$ *differentiabel, og* $A'(x) = f(x)$ (dette skrives på tavlen).

Læreren udleverer opgave 13 og understreger, at eleverne i forrige opgave blot så, at resultatet gjaldt for enkelte funktioner, men at de i opgave 13 skal vise resultatet for en vilkårlig funktion f. Samtidig gør læreren tavlen klar til den efterfølgende opsamling. En gruppe som bliver hurtig færdig kan eventuelt opskrive differenskvotienten på tavlen.

Opsamling af opgave 13:

En elev udvælges af læreren til at redegøre for delopgave 13.2 – 13.5, og desuden give en konklusion efter bestemmelse af differentialkvotienten. Eleven udvælges på baggrund af lærerens observationer af gruppearbejdet for at sikre et så godt elevbidrag som muligt, og læreren uddyber og præciserer elevens svar om nødvendigt.

Jeg tror at denne opgave vil være krævende for en stor gruppe elever, og læreren har derfor mulighed for at reagere undervejs. Hvis han vurderer, at eleverne sidder fast, kan opgaven tages ved tavlen. Læreren bør ikke inddrage for meget matematisk notation, men muligvis vil en illustration af $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ vha. venstresummerne hjælpe eleverne med forståelsen af argumenterne. Læreren understreger, at argumentet ikke kræver en betragtning af en positiv funktion, men at $A'(x) = f(x)$ gælder for en vilkårlig funktion.

Opgave 14 uddeles.

Opsamling af opgave 14:

Hvis en stor del af grupperne gik i stå ved et bestemt trin, gennemgår læreren opgaven fra dette trin på tavlen, men hvis læreren fornemmer, at alle grupper er kommet igennem undlades gennemgangen og opgave 15 uddeles.

Opsamling af opgave 15:

En elev gennemgår løsningen ved tavlen, og læreren understreger, at vi nu har en metode til at bestemme den eksakte værdi for et bestemt integral, og ikke blot en tilnærmelse. Herefter nævner læreren kort, at man for visse funktioner ikke kan opskrive stamfunktionen, eksempelvis kan vi ikke bestemme $\int_0^1 e^{x^2} dx$, vha. en stamfunktion, men at det ved hjælp af definitionen på det bestemte integral er muligt at bestemme en tilnærmet værdi af det bestemte integral.

Endelig opsamling på hele forløbet:

De matematiske ”definitioner” og resultater opskrives i kortfattet form på tavlen, og eleverne har mulighed for at stille opklarende spørgsmål. Læreren kan inddrage passende illustrationer i forbindelse med forklaringer.

1. Definition af det bestemte integral: ”grænseværdi for uendelig sum af uendelig små størrelser”. For en pæn funktion gælder:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}$$
2. Integrable funktioner: En helt præcis definition kan ikke gives her, men alle pæne funktioner er integrable, og dette vises ved at godtgøre, at $|V_n - H_n| \to 0$ for $n \to \infty$.
3. Sætning: Enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel
4. Definition af $A(x)$: Hvis en funktion f betragtes på $[a, b]$, og $a \le x \le b$, defineres $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.
5. Hvis $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [a, b]$, kan $A(x)$ opfattes som et areal (definitionen af det bestemte integral gav mening til det tvivlsomme areal)
6. For en pæn funktion gælder: $A(x)$ er differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

7. For en pæn funktion f, hvor $F(x)$ er en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$ gælder: $A(b) = F(b) - F(a)$.

Det understreges for eleverne, at de for velkendte figurer kendte formler til at beregne arealet af en sådan figur, men at det viste sig at være et interessant spørgsmål, hvilken værdi man kunne tilskrive en punktmængde under grafen for en pæn funktion. Gennem forløbet blev der først givet mening til dette areal ved hjælp af det bestemte integral, som blev defineret som en grænseværdi for en sum (den fælles grænseværdi de observerede i forbindelse med venstre- og højresummer). Herefter blev det institutionaliseret at de funktioner eleverne støder på alle vil være integrable, hvilket vil sige, at det bestemte integral (grænseværdien) eksisterer for disse, men at der findes funktioner som ikke er integrable. Det blev afslutningsvist institutionaliseret at arealet beregnes som et bestemt integral, $\int_a^b f(x)dx$ ved hjælp af stamfunktioner og at arealet da vil være lig med den eksakte værdi af dette integral.

Bilag 6

Tabel 1 – Den planlagte didaktiske proces

Lektion 1 og 2

Hovedproblemtype	**Matematiske teknikker**	**Teknologiske-teoretiske elementer**	**Fase**
Store spørgsmål: Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punkt-mængde? Q_1: Findes arealet af en forelagt punktmængde? Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punkt-mængde?	Etableret viden om kendte figurer samt kendte teknikker til arealberegning.		Det første møde Udforskningsfasen
Opsamling, som relateres til de forrige store spørgsmål	Specielt inddeling vha. rektangler.		Udforskningsfase
Store spørgsmål: Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punkt-mængde? Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punktmængde?	Ikke-instrumenterede: Beregne delintervallængde, når intervallet [2,5] inddeles i fire lige store delintervaller. Beregne venstre- og højresum for få antal delintervaller, givet en funktion og et interval.		Udforskningsfase (guidet) Den tekniske fase
Opsamling, som relateres til Q_0 og Q_2		Definition af venstre- og højresum for $f(x) = \frac{1}{x}$ på [2,5], og tre intervalinddelinger. Generelt udtryk for venstresummen for en funktion f defineret på $[a, b]$, når dette interval inddeles i tre delintervaller, med delepunkterne x_1 og x_2.	Udforskningsfase (guidet) Den tekniske fase
Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Ikke-instrumenterede: Beregne venstre- og højresum for få antal delintervaller (en given funktion, et givent interval og antal delintervaller)		Den tekniske fase
Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Instrumenterede: Beregne venstre- og højresum for større antal delintervaller	Voksende funktion: Venstresummen vil vokse og højresummen vil aftage, når antallet af delintervaller vokser. Aftagende funktion: Venstresummen vil aftage og højresummen vil vokse, når antallet af delintervaller vokser.	Den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase

		Fælles grænseværdi for venstre- og højresummen, når antallet af delintervaller går mod uendelig.	
Opsamling, som relateres til Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$		Opsamling på de forrige teknologiske-teoretiske elementer.	
Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$		Definition af det bestemte integral som grænseværdi for venstresum.	Institutionaliseringsfase
Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi	Givet $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på [2,5], og tre intervalinddelinger, beregn areal af det udglattede rektangel.	Højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$. Det generelle udtryk for arealet af det udglattede rektangel, når en vilkårlig funktion f betragtes.	Teknisk fase Teknologisk-teoretisk fase
Opsamling		De to forrige teknologiske-teoretiske elementer	
Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi		Tallet $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ kan opfattes som funktionens middelværdi på $[a, b]$.	Institutionaliseringsfase

Lektion 3 og 4

Hovedproblemtype	**Matematiske teknikker**	**Teknologiske-teoretiske elementer**	**Fase**
Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Instrumenterede: Beregne venstre- og højresum for større antal delintervaller	Voksende funktion: Venstresummen vil vokse og højresummen vil aftage, når antallet af delintervaller vokser. Aftagende funktion: Venstresummen vil aftage og højresummen vil vokse, når antallet af delintervaller vokser. Fælles grænseværdi for venstre- og højresummen, når antallet af delintervaller går mod uendelig.	Den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase
Opsamling, som relateres til Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$		Opsamling på de forrige teknologiske-teoretiske elementer.	
Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$		Definition af det bestemte integral som grænseværdi for venstresum.	Institutionaliseringsfase

Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi	Givet $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på [2,5], og tre intervalinddelinger, beregn areal af det udglattede rektangel.	Højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på intervallet $[a, b]$. Det generelle udtryk for arealet af det udglattede rektangel, når en vilkårlig funktion f betragtes.	Teknisk fase Teknologisk-teoretisk fase
Opsamling		De to forrige teknologiske-teoretiske elementer	
Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi		Tallet $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ kan opfattes som funktionens middelværdi på $[a, b]$.	Institutionaliseringsfase
Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes	Udfylde tabeller og reflektere over de indgående værdier	For en voksende og en aftagende funktion gælder, at $\lvert V - H\rvert \to 0\ for\ n \to \infty$ For en voksende funktion er $H - V > 0$ og $V - H < 0$. For en aftagende funktion er $V - H > 0$ og $H - V < 0$.	Teknisk og teknologisk-teoretisk fase
Opsamling		På de tre forrige teknologiske-teoretiske pointer	
Institutionalisering		Alle pæne funktioner er integrable og for disse vises det ved at godtgøre at: $\lvert \mathrm{H_n} - \mathrm{V_n}\rvert \to 0$ for $\mathrm{n} \to \infty$	Institutionaliseringsfase
Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes	Opskrivning og reducering af udtrykket for H-V, hvor 5 delintervaller betragtes Opskrivning og reducering af udtrykket for H-V, hvor n delintervaller betragtes.	”Bevis” for at $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2].	Teknisk fase
Opsamling		Argumentet for at $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2].	
Institutionalisering	Vise at $\lvert \mathrm{H_n} - \mathrm{V_n}\rvert \to 0$ for $\mathrm{n} \to \infty$, for en vilkårlig voksende funktion.	Bevis for sætningen: Enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel.	Institutionaliseringsfase

Lektion 5 og 6

Hovedproblemtype	**Matematiske teknikker**	**Teknologiske-teoretiske elementer**	**Fase**
Opsamling af forrige lektioner		Definitionen af $\int_a^b f(x)dx$ At en pæn funktion kaldes integrabel, hvis $\lvert H_n - V_n \rvert \to 0$, for $\to \infty$.	
Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes	Opskrivning og reducering af udtrykket for H-V, hvor 5 delintervaller betragtes Opskrivning og reducering af udtrykket for H-V, hvor n delintervaller betragtes.	”Bevis” for at $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2].	Teknisk fase
Opsamling		Argumentet for at $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2].	
Institutionalisering	Vise at $\lvert \mathrm{H_n} - \mathrm{V_n} \rvert \to 0$ for $\mathrm{n} \to \infty$, for en vilkårlig voksende funktion.	<u>Sætning</u>: Enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel. $A(x)$ introduceres som $\int_a^x f(t)dt$ $A(x)$ kan opfattes som et areal, hvis $f(x) \geq 0$ $A(a) = 0$	Institutionaliseringsfa se
Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion.	Bestem udtryk for $A(x)$ og differentier dette	Indse $A'(x) = f(x)$ for enkelte lineære funktioner	Teknisk og teknologisk-teoretisk fase
Opsamling		Opsamling på den forrige teknologiske-teoretiske pointe.	
Institutionalisering		For en vilkårlig pæn funktion gælder $A'(x) = f(x)$.	Institutionaliseringsfa se
Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Overvejelse af en funktions opførsel på et meget lille interval Bestemme differentialkvotient for A.	Vis at $A'(x) = f(x)$ gælder for enhver pæn funktion. Redegørelse for at: $A(x_0 + h) - A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0) \cdot h$ og $f(x_0 + h) \cdot h$ $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$, for små værdier af h Bestemmelse af differentialkvotient for A.	Teknologisk-teoretisk fase

Opsamling		De forrige teknologiske-teoretiske elementer.	
Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion.		Vise at $A(b) = F(b) - F(a)$.	Teknologisk-teoretisk fase
Opsamling		Argumentet for at $A(b) = F(b) - F(a)$.	
Π_0: Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på $[a, b]$.	Bestemme stamfunktion til $f(t) = \ln(t)$ Benytte at $A(b) = F(b) - F(a)$.		Teknisk fase
Opsamling	Bestemme stamfunktion til $f(t) = \ln(t)$ Benytte at $A(b) = F(b) - F(a)$.		
Institutionalisering		De essentielle definitioner og resultater fra hele forløbet	Institutionaliseringsfase

Bilag 7

Transskribering af udvalgte sekvenser fra lydoptagelserne af elevarbejdet

Sekvens 1 (Opgave 1)

- Elev A: Dens areal finder man bare ved en halv gange grundlinje gange højde
- Elev B: Ja, højde gange grundlinje gange *b*, gange en halv ikke?
- Elev A: Og så laver vi en firkant.
- Elev A: *a* gange *b* ikke?
- Elev B: Det er a gange *b*.
- Elev B: Det er jo et kvadrat ikke? Det kommer an på om det er et kvadrat, så er alle siderne lige lange jo, og hvad kan vi så gøre?
- Elev A: Så kan vi tage cirkel eller?
- Elev C: Pi gange radius i anden.
- Elev B: Jo radius i anden.
- Elev A: Jo det er den.
- Elev B: Pi gange radius i anden.
- Elev A: Eller pi gange diameter.
- Elev B: Ja præcis. Lad os bare sige radius i anden skråstreg diameter.

Elev B læser delopgave 2.

- Elev B: Det har vi ikke lært jo.
- Elev A: Diskuter om de på næste side har et areal.
- Elev C: Og hvis ja, kan I beregne.
- Elev A: Nårh vi skal bare se om vi kan beregne arealet af de her.
- Elev B: Det kan vi godt jo. Altså hvis vi har to punkter på den jo, ikke? Så kan vi godt jo. Det tror jeg ikke er noget problem.
- Elev C: Hvordan vil du så regne, altså, det første.
- Elev B: Jamen det eneste vi skal overvejelser om det er om, hvad hedder det, om vi godt kan.
- Elev C: Det tror jeg godt man kan.
- Elev A: altså alle sammen har et areal jo.
- Elev C: Det kan godt være de har et areal, men hvilken formel kan vi så bruge for at regne det her ud.
- Elev B: Det er det, der er spørgsmålet, men vi skal tænke på det, fordi vi kan ikke argumentere for det, fordi vi ikke har lært om det.
- Elev A: Alle har et, man skal bare bruge sin øh baggrundsviden.
- Elev B: Ok, så vi siger alle har et areal, og derfor kan man godt lave overvejelser.
- Elev A: Problemet er bare om vi kan beregne arealet. Vi kan putte det ind i en computer og finde arealet.
- Elev C: Jeg tror ikke det er det de mener, det er ligesom vi kan finde et areal for en trekant og en firkant.
- Elev B: Det eneste, der står bare, diskuter om de tre blå punktmængder på siden har et areal, og hvis ja, om I kan beregne arealet, skriv jeres overvejelser og ideer i tekstboksen. Det er to forskellige ting.
- Elev A: Ok, vi skriver lige på en computer kan vi nok finde arealet

- Elev C: Hvad skriver du?
- Elev B: På en computer kan vi, kan vi nemt regne (pause). Jeg har skrevet, på en computer kan vi nemt regne arealet af alle tre figurer.
- Elev A: Men øh jeg tænkte på.
- Elev B: Men problemet er så hvordan man kan gøre det teoretisk.
- Elev A: De er svære at beregne arealet af. Man skal dele dem op.
- Elev C: Hvordan vil du dele dem op?
- Elev B: Vi kan regne det ud teoretisk.
- Elev C: Det vil sige halvdelen af den, og så regner du den ud, og så den ud.
- Elev A: Vi laver bare flere af de her altså.
- Elev B: Jeg tænkte på, vi kan også dele dem op, altså hvor vil vi finde arealet fra jo. Altså hvis det for eksempel er her til her ikke, så skal vi bruge de her to rum til noget jo.
- Elev C: Jeg tror ikke vi kan, altså, jeg tror ikke der er en formel som det kan beregnes med. De her skæve figurer.
- Elev A: Ja vi kan godt finde arealet af dem.
- Elev B: Det er problemet hvordan vi skal gøre teoretisk. Hvilken formel.

Eleverne er ukoncentrerede men læreren får dem hurtigt i gang igen.

- Elev B: Det var ligesom jeg sagde før, vi kan vælge to punkter, fra 2 til 5 for eksempel, så bare lige det der stykke.
- Elev A: Vi kan dele dem op i dele.
- Elev B: Ja det er det jeg tænker på. Men jeg tænkte bare, det er bare lidt svært jo. Jeg tænker vi kunne jo udvælge et bestemt punkt, og starte med det.

Opsamlingen starter.

Opgave 2 løses på baggrund af et velfungerende samarbejde. De går herefter i gang med opgave 3. Elev A læser opgaveformuleringen.

- Elev B: Ja det er nemt jo.
- Elev A: 2 til 5.
- Elev B: Ja de skal være lige store ikke? Hvordan kan vi gøre det?
- Elev A: Og vi skal lave det i tre lige store dele.
- Elev B: Jeg tænkte på, hvis vi gør det som vi også gjordet det før, deler det op i en stor firkant, og så to rektangler ikke?
- Elev A: Først skal vi kun lave i tre lige store, så kan vi bare lave.
- Elev B: Jamen problemet er, vi er nødt til at lave først til en firkant ikke, og så bagefter to rektangler, og så kan vi cutte ned derfra.
- Elev A: Der står, hvis højder svarer til funktionsværdien for højre endepunkt. Det vil sige at dens højde skal være lige så høj som denne her.
- Elev B: Ja.
- Elev A: Og det skal være tre rektangler, og de skal være lige store.
- Elev C: Skal vi tegne på den her, eller skal vi regne noget ud?
- Elev A: Jeg tror vi laver sådan her, først laver vi en lige streg,… og så skal vi lave tre lige store.
- Elev B: Det er ikke et problem, så kan vi bare gøre det her jo, ikke? En to, der er en to tre jo ikke? Men problemet er, den der lille trekant deroppe, det hører også med til arealet jo.

- Elev A: Jeg tror vi skal lave noget med... Kan I se han har lavet det billede (på tavlen)? Det er sådan et vi skal lave.
- Elev C: Hvordan gør vi det?
- Elev B: Prøv at se, alt det her ikke.
- Elev C: Det er ekstra.
- Elev C: Det skal være rektangler, og ikke kvadrater.

Læreren inddrages

- Elev A: Jeg tænkte på i den her ikke, vi skal have tre ikke? (læreren: ja) Der er en her og en her og en her. Og så, det skal være tre rektangler. Og alle deres højde skal være lige så høje som den her.
- Læreren: Nej de skal svare til funktionsværdierne af delintervallernes højre endepunkt. Delintervallerne, det er de tre her. Delintervaller ok. Det højre endepunkt, hvis vi nu tager det første her, hvor er det højre endepunkt af det delinterval? Ja og der skal højden være.
- Elev A: Nårh det er nemt nok. Den skal være hertil så, og den her skal være hertil, og den her skal være hertil.
- Elev B: hvordan?

Læreren beder eleverne holde 5 minutters pause

Sekvens 2 (Opgave 4)

- Elev A: Bredden skal den herovre være en?
- Elev B: Er det 1,13 eller hvad?
- Elev A: Den er ikke præcis.
- Elev B: Jeg ved ikke hvad jeg skal sige, hvordan skal vi finde bredden af den?
- Elev C: Skal vi prøve at spørge?
- Elev A: Og man kan ikke være så præcis herovre.
- Elev B: Hvis jeg måler det, så giver det 1,8.
- Elev A: Kan vi ikke sige at det er ca. 1,35, eller et eller andet
- Elev C: Jo det ku man godt. Det ku man godt
- Elev A: Hvad kan vi gøre?

Elev A kalder på læreren

- Elev A: Man kan ikke gøre det så præcist herovre.
- Læreren: Nej man kan ikke aflæse, men man skal beregne. Man skal beregne.
- Elev A: Jamen hvis vi skal beregne venstresummen, skal vi så ikke først have bredden?
- Læreren: Jamen hvis I ved det går fra 0 til 4, vi har tre intervaller, de er lige store.
- Elev B: Det giver 0,75.
- Læreren: Nej.
- Elev A: 4 divideret med 3.
- Læreren: Ja, 4 divideret med 3, det er en og en tredjedel, eller 1,333. Så det her det må være en, en tredjedel og det må være to, to tredjedele.

Sekvens 3 (Opgave 3)

- Elev A: Opgave 3, skal vi lave den. Hvordan har du gjort det?
- Elev B: Jeg har sat den ind i funktions, hvad er det det hedder, $f(x)$ lig med 1 deles med x. Hvor jeg har indsat de forskellige x-værdier
- Elev A: Og så har du bare skrevet højderne?
- Elev B: Men bredderne der er jeg lidt i tvivl, fordi, er det herfra, er det den her rektangel, eller er det kun den her rektangel, du ved. Er det den her, eller er det hele den her?
- Elev A: To sekunder.
- Elev B: Men det er jo kun det markerede område, er det ikke? Så må det nok
- Elev C: Jeg tror det er de der tre.
- Elev B: Ja så det er kun den her, så bredden er nok en for hver af dem, det må det være, skal vi lige spørge om hvilken.
- Elev A: Hvad spørger vi om, jeg har ikke helt forstået det?
- Elev B: Vi skal beregne areal af de enkelte rektangler ikke? Så af det første rektangel, er det den her hele, eller er det kun den her, du ved herfra. Så er det så en i bredde, så er det 1 gange 0,33. Det er det samme som der står her.
- Elev A: Og så skal vi bare plusse de tre arealer her og så højresum.
- Elev B: Ja så er det bare de der tre plusset sammen.
- Elev A: Ja det var det jeg sagde.

Læreren inddrages for at tjekke deres resultat og fremgangsmåde (…). De går herefter i gang med at beregne venstresummen.

- Elev B: Nu skal vi så bruge, (læser opgaven op).
- Elev A: Hvad sagde han var højre, eller venstre da du spurgte ham?
- Elev B: Altså her har vi gjort det højre, så jeg tror det bliver sådan her, forstår du?
- Elev A: Skal vi tegne, skriver du det på igen?
- Elev B: Ja for en sikkerhedsskyld, det behøver I ikke.
- Elev A: Må jeg godt låne din lineal når du er færdig?
- Elev B: Ja så gør jeg det lige hurtigt.

Sekvens 4

Elev A læser opgave 5 højt for gruppen.

- Elev A: Jeg ved ikke om jeg kan definere her herovre.
- Elev B: Jeg kan slet ikke finde ud af GeoGebra.
- Elev A: Jeg ved ikke hvordan den her skal sættes ind. Den er kommet, det er helt den samme, men den er kun markeret dertil. Den er der, ok.
- Elev B: Så skal vi skrive højre og venstresummer.
- Elev A: Ved hjælp af kommandoen 'rectangelsum', funktion start.
- Elev B: Det står også på bagsiden, det skal du også være klar over når du sætter ind i GeoGebra, så er der også bagsiden
- Læreren: Har I lavet den her? Så skal I, i gang med.
- Elev B: Ja vi er gået i gang.
- Læreren: Godt.
- Elev B: Hvor er det du er nået henne?

- Elev A: Det er der ved hjælp af kommandoen.
- Elev B: Så prøv at skriv det.
- Elev A: Sådan der ikke?
- Elev A: Skal jeg skrive $g(x)$? og antallet der, er…
- Elev B: Har du skrevet 0 som start? Så står der, benyt GeoGebra til at tjekke.
- Elev A: Ja det har jeg, men det er delintervaller, der skal stå 3?
- Elev B: Prøv at sæt det ind.
- Elev A: Ja men vi mangler stadig. Jeg forstår ikke om jeg skal skrive venstre eller højre. Hvordan det skal skrives, der står, position of rectangle.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B (til læreren): Hvordan sætter vi venstre og højre ind på GeoGebra
- Elev A: Vi har sat alle de her ind? g, 0, 4 og 3.
- Læreren: Ja position og rectangel, det er 0 der eller 1 der, det kan man stille der, det er 0, hvis det er en venstresum, og 1 hvis det er en højresum.
- Elev A: Så 0 på venstre og 1 på højre.
- Elev B: Skal vi ikke lige skrive det hurtigt.
- Elev A: Var det 0 eller 1?
- Elev B: 0 det er venstre, og 1 er højre.
- Elev A: Jeg skriver 0 lige nu ok? Så har vi fået det der, og det var, hvad sagde du, 0 hvis det er?
- Elev B: 0 er venstre, og 1 er højre.
- Elev A: Ok tak. Så kan vi også den anden hurtigt.
- Elev B: Jeg skal lige skrive resultatet. Eller bare gør det, nu har du alligevel også styr på det. Det vil sige, var det højre du satte ind?
- Elev A: Altså venstresummen ikke? For os, den passer godt her. Venstresummen er 3,72.
- Elev B: Jamen vi skal skrive det her. Du sagde venstresummen for 4 er?
- Elev A: Tre komma øh, 3,72.
- Elev B: 3,27?
- Elev A: Syv to, syv to
- Elev B: Hvad så med, hvad hedder det?
- Elev B: Højresummen det er 6,38, og hvad fik vi vores højresum til?
- Elev B: Også deromkring.
- Elev A: Neeej.
- Elev B: Gjorde vi ikke?
- Elev A: Vi fik det til 4,83, hvordan kan det være? Måske skulle vi plusse den sidste sammen?
- Elev B: Ja hvis vi plusser med den sidste, så passer det.
- Elev B: Det gav 6 komma hvad?
- Elev A: Vent lige. Det gav 6, øh, derovre gav det 6,38, og hvis vi også lægger den der til ikke?
- Elev B: Så det også 6,38 ikke?
- Elev A: 37, meeen.
- Elev B: Nej det er fordi det tredje decimal skal afrundes, for hvis du afrunder den så, jeg skriver bare 37, sådan.

De arbejder videre med at udfylde tabellen, og når inden at læreren begynder opsamlingen at kommentere på delopgave 5.5.

- Elev B: Det vokser med.
- Elev A: Vent lige.
- Elev B: Er det ikke det dobbelte? Nej vel.

Sekvens 5 (Opgave 3)

- Elev A: Det er den her rektangel der er tale om. Vi skal dele herfra og hertil i tre lige store, nej i fire?
- Elev B: Tre lige store.
- Elev A: Så det nemt jo, bare lige her og så her. Undskyld, hvad skal man så gøre?
- Elev C: Det er umuligt de kan blive lige store.

Elev B læser opgaven igen.

- Elev A: Jeg forstår ikke, det her lille stykke skal det inddeles i tre lige store.
- Elev B: Kan vi ikke lave den her.
- Elev A: Må vi gerne det, du sagde den må ikke komme højere op end det her. Var det ikke det du lige sagde?
- Elev B: Jamen hvis nu jeg begynder den herfra og stopper den der.
- Elev A: Skal vi spørge. Øh må vi lige spørge om noget?
- Elev B: Vi tænkte på om vi må lave en herfra?
- Elev A: Må vi gerne det?
- Læreren: I skal dele i tre lige store
- Elev A: Må det ikke bare være sådan her?
- Læreren: Jo. Sådan.
- Elev A: Det var det jeg sagde. Det var mig der sagde det

Elev C læser delopgave 2 op.

- Elev C: Skal vi bare give nogle tal eller hvad?
- Elev B: Vi skal beregne arealet. Du skal sige 1 gange med
- Elev A: Hvordan ved du,… er det 1 cm det her?

Elev A kalder på læreren, som hjælper med at tegne de tre højder korrekt.

- Elev B: Nu skal vi regne areal ud.
- Elev A: Yes.
- Elev B: 1 gange med, hvor høj er den her? 0,35 ikke?
- Elev A: Nej, ikke 35, du kan i det mindste sige 39.
- Elev B: Hvorfor 39?
- Elev C: Ja hvorfor 39, kan vi ikke bare sige 0,3?
- Elev B: Hvis du går direkte op
- Elev A: Ærligt jeg mener det, så sig 38. Altså 0,38, det er ikke 35.
- Elev C: Det er 35.
- Elev A: Hvorfor kan jeg ikke få det til at passe.
- Elev C: Ok bredden er 1 cm, eller vi ved ikke, hvad enheden er.
- Elev B: Vi har også trekanten.
- Elev A: Nej der står rektanglerne.

De fortsætter med at aflæse højderne for de to resterende rektangler og læreren begynder efterfølgende opsamlingen.

Sekvens 6 (Opgave 5)

Elevgruppen har lige fuldendt arbejdet med opgave 4, og på baggrund af lydoptagelsen kan det konkluderes at gruppen får løst denne opgave korrekt gennem et par diskussioner. De går herefter i gang med opgave 5.

- Elev B: Det er nu vi skal bruge GeoGebra.

Elev A kalder på læreren for at få forklaret, hvordan en kvadratrod skrives ind i GeoGebra.

- Læreren: Det står her, sqrt parentes x.
- Elev A: Først skriver vi f.
- Læreren: Ja $f(x)$.
- Elev A: Er lig med sqrt.
- Læreren: Parentes x.
- Elev A: Ja så har vi den der.
- Læreren: Ja så kan I lave den der rektangelsum.

Læreren hjælper dem med at udregne den første

- Læreren: Ja den tegner det også, og ja 3,72
- Elev A: Vi fik 3,7
- Læreren: Ja det er noget med jeres afrunding.
- Elev A: Lad os lige skrive ned vi fik 3,7.

Elev B beregner venstresummen ved hjælp af GeoGebra.

- Elev A: 1,38, vi havde fået…
- Elev B: 4,8.
- Elev A: Den første havde vi i hvert fald lavet rigtig.
- Elev B: Vent, lad os lige prøve at gøre det igen.
- Elev A: Det er fordi den beregner for det hele. Først laver vi sådan her: 1,33. Man kan også se her ikke, at det her burde give mere end 3,07.

De beregner deres sum fra opgave 4 igen.

- Elev A: Det giver så 4,778, og så 4,778 gange 1,33, 6,35. Se nu passer det jo.
- Elev B: Det var vores kvadratrod vi havde lagt sammen forkert.

Følgende er elevdiskussionen forud for beregning af den sidste højresum:

- Elev B: Skal jeg være ærlig? Jeg tror den falder til 32 nej 34.
- Elev A: Den falder til 5,33 også, for begge to. Eller næsten det samme, og hvis man bliver ved og ved så kommer de samme.

Elev A læser delopgave 5 op.

- Elev B: Den stiger.
- Elev B: Hvad sker der med højresummen, den vokser, nej falder. Den er voksende og aftagende, skal vi sige det?
- Elev A: Lad os spørge om det her faktisk, om vi skal skrive mere, det kan godt være, vi skal skrive mere.
- Elev A (til læreren): Vi lavede den her ikke, og så havde vi fundet for venstresummen og højresummen, og vi kunne se på venstresummen, at den var voksende og faldende for højresummen, og de nærmer sig det samme tal. Det blev mere præcist. Behøver vi skrive mere?
- Læreren: Prøv at skriv det ned, formuler det du lige har sagt.

Sekvens 7 (Opgave 3)

- Elev A: Og så højden. Øh, højden er 0 komma, ej ok, hvis det her er 0,3 ikke?
- Elev B: Men tager du højden herovre eller her?
- Elev A: Hvad for noget?
- Elev B: Altså tager du højden eller skal du også have den her til?
- Elev A: Nårh. Det er rigtigt.
- Elev B: Fordi det er jo, altså det er det hele, er det ikke rigtigt?
- Elev A: Hvordan skal vi så lave det?
- Elev B: Altså det rigtig nok sådan der.
- Elev A: Det er rigtigt, hvad du siger, men vi har jo en trekant her.
- Elev B: Yes men så har vi jo en trekant.
- Elev A: Men det er jo ikke en rigtig trekant. Prøv at se, den er buet.
- Elev B: Nej det var også det jeg spurgte ham om, så sagde han.
- Elev C: Det her er virkelig forvirrende er det ikke?

Elev A kalder på læreren.

- Elev A: Skal vi beregne højden herfra?
- Læreren: Altså nu tager vi højresummen, det vil sige vi går til højre for at finde højden af rektanglet.
- Elev A: Så det er kun herfra?
- Læreren: Så det er kun dertil ikke?
- Elev A: Ok.
- Læreren: Kan I beregne højden der, uden at aflæse men beregne den i stedet for, mere præcist?
- Elev A: Nårh, beregne den.
- Elev C: Uden af aflæse? Så kan man sige højde gange grundlinje jo, ikke?
- Læreren: Jo jo men først skal vi jo aflæse, nej beregne, kan I beregne højden her?
- Elev C: Det kan man da ikke.
- Læreren: Når I rammer, I ved, hvad det er for en funktion ikke?
- Elev B: Nårh så kan man bare se.
- Elev A: Det er en eksponentiel.
- Læreren: Nej nej. Det står herovre.
- Elev A: Så skal man da have…
- Læreren: Det er en divideret med x. *Læreren forlader gruppen.*
- Elev B: En divideret med x?
- Elev C: Hvad?

- Elev A: En divideret med x. Det er tre, det vil sige en deles med 3, en tredjedel.
- Elev B: Hvor skulle jeg vide det fra?
- Elev A: Måske er det rigtigt. Jeg ved dette ikke. Jeg tror nok det er rigtigt sådan der. Altså en deles med x, x er der, så har vi, de er alle sammen 1 cm i bredden, i højden har vi en deles med x, det vil sige en over, nummer to er en fjerdedel, og den sidste er en femtedel. Fordi hvis det er en deles med x, og x-punktet her er 3, her er det 4, og her er det 5, og arealet er så en gange en tredjedel, det er en tredjedel, en fjerdedel og en femtedel. Hvis det er rigtigt.

Elev A læser delopgave 3.4.

- Elev B: Jeg forstår godt, hvad de mener men.
- Elev A: Af det her?
- Elev B: Ja.
- Elev A: Fordi han siger at det har noget med den her at gøre. Det er den samme vi bruger ikke, f af x er en deles med x. Højresum det vil sige vi skal sige en tredjedel plus en fjerdel plus en femtedel ikke? Øhm kan vi ikke bare 0,25 +
- Elev B: Skal man ikke finde en fællesnævner? Eller skal du bare gøre det sådan der?
- Elev A: Hvordan var det nu man omregnede fra decimal til brøk?
- Elev B: Decimal til brøk? (griner)
- Elev A: Ja decimal til brøk.
- Elev B: Ja så skal du… Nårh nej jeg ved fra brøk til decimal.
- Elev A: Det ved jeg også godt. Hvad gør man fra brøk til decimal?
- Elev B: Så skal du bare dividere, hvis det er en halv, så er det bare 0 komma 5. Så skal man bare kunne det udenad, jeg tror ikke der er en regel. Er der?
- Elev A: Det giver, en tredjedel. Jeg kan altså også bare finde fællesnævner til de her to.
- Elev B: Ja det var også det.
- Elev A: Så kan vi finde fællesnævner til den, og så kan vi forkorte til sidst.
- Elev B: Det tror jeg er nemmere.
- Elev A: En tredjedel plus en fjerdedel. Her kan vi forlænge med 3, og her med 4, så det giver 12, 12te del, er det ikke sådan her man gør?
- Elev B: Jo
- Elev A: Fordi man siger, nårh så skal det hedde tre og fire der. Præcis, det giver $\frac{7}{12}$, og så skal vi have, jeg skal nok vise dig det til sidst, $\frac{7}{12}$ plus $\frac{1}{5}$. Det er så, omvendt. Ikke?
- Elev B: Ja du skal bare sige, noget der giver. Du kan sige fx
- Elev A: 12 gange 5. Det er 60, og fem gange to.
- Elev B: Og syv gange, vent skriv lige det der først.
- Elev A: Så vi skal have, 12, 60, og så skal vi have 35, 60, og det giver. 47, 60, det er så forvirrende.
- Elev A: Hvad kan man så dele det her med? Man kan.
- Elev B: Altså.
- Elev A: Går 3 op, nej 3 går ikke op i det her, 3 går op i 60. Nej det gør det heller ikke. Men 47. Hvad i alverden går op i 47?
- Elev B: 7 går op i 49 ikke?
- Elev A: Ja.
- Elev B: 42 det er 6, 48 det er 8.
- Elev C: Øh så skal vi have noget der er komma.

- Elev B: Kan vi ikke også bare sige det er det her?
- Elev A: Nej man burde kunne. Det er det samme resultat, det er rigtigt så, vi er på rette vej. 47, 60, 60’ne dele. Nej det er bare det resultat. Det er bare mellemregninger, jeg skal ikke bruge det til noget. Her, du skal bare have resultatet.
- Elev B: Havde du skrevet det?
- Elev A: $\frac{47}{60}$. Det var bare mellemregninger.
- Elev B: Hvor meget var det, 0,78 ikke? Var det ikke 0,78, hvis man laver det om til decimal?
- Elev A: Jo, og så 3, 783.
- Elev B: Hvad skal vi bruge det her til?
- Elev A (til læreren): Hvorfor skriver de det ind i brøker, er det ikke mere rigtigt at skrive det i brøker?
- Elev B: Jo vi har lavet det i brøker.
- Læreren: Jo det er mere præcist.

Sekvens 8 (Opgave 7)

Elev A læser delopgave 7.5: Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative.

- Elev B: Fordi den går jo sådan her jo, den går nedenunder.
- Elev A: Det er fordi det cosinus jo.
- Elev C: Hvad for noget?
- Elev B: Begrund hvorfor venstre- og højresummerne bliver negative. Fordi det er cosinus. Det er fordi at $f(x) = \cos(x)$.

(…)

Gruppen går i gang med opgave 8 efter den fælles opsamling.

- Elev B: Ok. Så alle de her tre ikke, tilsammen, altså det areal vi får.
- Elev A: Nårh sådan der.
- Elev B: Så det der svarer til det der areal.
- Elev A: Ja, den her og den hers areal er det samme.
- Elev B: Men hvordan kan vi.
- Elev A: Og så skal vi finde bredden af den her.
- Elev B: Det er bare.
- Elev A: Er det ikke bare 3?
- Elev B: Nej det er 1. Er det ikke? Nårh altså jo det er 3 for det hele. Ok, hvor mange rektangler er der, det er 3 delt med.
- Elev A: Bestem bredden, det er 3, fordi for.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B: Vi er kommet frem til at det her har det samme areal som det udglattede.
- Læreren: Ja, det siger vi.
- Elev B: Og så bredden for det enkelte her er 1, men tilsammen er det 3. Er det ikke?
- Elev A: Bredden den er 3, fordi det er fra 2 til 5.
- Læreren: Ja bredden det er her, og det er 3 ikke, ja.

- Elev B: Og nu skal vi finde højde og areal. Højde hvordan kan vi, nårh det var det der, det var 1 divideret med.
- Læreren: Ja det ved vi jo ikke rigtig, hvad er, men der står heroppe…
- Elev B: Er et gennemsnit af tre tal.
- Læreren: Gennemsnit af tre tal ja.
- Elev B: Hvad for nogle tre, er det tre tal.
- Læreren: Ja hvad tror I det er, prøv at kig på tegningen, på figuren.
- Elev A: Et gennemsnit af tre tal, 1, 2, 3.
- Læreren: Hvis det der areal skal være lige så stort som det der areal.
- Elev B: Så er det den her, den her og den her.
- Læreren: Ja, prøv at skriv det ned, sådan mere formelt.
- Elev A: Ok, hvad kan vi skrive?
- Elev B: Øh, højden af det udglattede er et gennemsnit af de tre højder fra figur 1. Men hvordan finder vi højderne fra figur 1?
- Elev A: Hvad har du skrevet?
- Elev B: Jeg skal lige spørge.
- Elev A: Højden af det udglattede er et gennemsnit af de tre højder fra figur 1.
- Elev B: Og så tror jeg det vil sige, 1 divideret med 2, 1 divideret med 3 og 1 divideret med 4, men jeg skal lige spørge, om det er rigtigt, for hvis det er rigtigt, kan vi også finde arealet, for så er det bare bredde gange højde.

Elev B kalder på læreren.

- Elev A: Så er det tre gange højden.

Læreren inddrages.

- Elev A: Vi tænkte på højden ikke, det er de tre højder fra figur 1. Kan man så sige 1 divideret med 2?
- Elev B: 1 divideret med 3.
- Læreren: Ja, Ja.
- Elev A: Og så plus, plus en fjerdedel ikke?
- Læreren: Ja
- Elev A: Og når vi så har fundet højden så ganger vi bredden med højden, og så har vi fundet arealet.
- Læreren: Ja men det der, er ikke højden. Nu har du lagt de der tre sammen, du kan godt se her, det er i hvert fald mindre end den første. Hvad skal I gøre med de tre værdier I har lagt sammen her?
- Elev A: Dividere det.
- Læreren: Ja, dividere med 3.
- Elev A: Og så ganger vi de her værdier med hinanden.
- Elev B: Det er nemt nok.

Sekvens 9 (Opgave 8)

Elevgruppens diskussion i forbindelse med delopgave 8.4.

- Elev A: Jeg ved det ikke, jeg forstår det ikke, forstår du det?

Eleverne er tavse og ukoncentrerede i et par minutter. Læreren inddrages.

- Elev A: Hvordan skal vi bestemme et udtryk?
- Læreren: Prøv at kig på tegningen, hvad er det for en tegning?
- Elev B: Det er figur 2 ikke?
- Læreren: Nej det er den her. Den der ikke?
- Elev C: Det første og sidste areal.
- Læreren: Den første og sidste højde, ikke? Højden af det første rektangel, hvad er den?
- Elev B: Er det, det vi har skrevet?
- Læreren: Nej, det er den der figur, I skal kigge på.
- Elev B: Nej jeg tror ikke det er den der del, vi har lige regnet på den der.
- Læreren: Så har I sprunget noget over.
- Elev C: Nej nej kig her. Vi har lavet den her opgave ikke, så har vi lavet den her opgave, og denne her, og så hopper vi videre til opgave 4, og så skal vi bruge den her. Vi skal beregne højden af det her rektangel, og det sidste rektangel.
- Læreren: Ja.

Læreren går.

- Elev C: Vi har ikke lavet den her jo. Vi har lavet opgave 3 og 2, vi mangler den her opgave 4. Hvordan skal jeg beregne højden, når der ikke er nogle tal?
- Elev B: Jo vi siger…
- Elev C: Bestem et udtryk.
- Elev B: Jo, funktionen og så sætter man b ind i funktionen. Er det ikke det? Skal vi ikke sige b minus, vi gjorde det lige før, vi skal bare gøre det uden tal. Hvad er dens funktion?
- Elev A: Vi ved jo ikke, hvad funktionen er?

Eleverne går til pause og får efterfølgende ikke selvstændigt formuleret et svar.

Sekvens 10 (Opgave 8)

- Elev A: Og hvis vi så finder højden af de her tre, så er det det samme som den her højde, det er gennemsnittet af de her tal. Beregn denne højde af det udglattede rektangel.
- Elev B: Har vi ikke regnet den ud før?
- Elev A: Jo, gav det ikke 0,97. Jo jeg tror nok jeg skrev det ned et eller andet sted. Hvor har vi skrevet det henne? Her. Skal vi tage gennemsnittet af det her?

Elev A læser opgaveformuleringen igen.

- Elev A: Areal er det, det der 0,78? Beregn arealet af det udglattede rektangel, så er det bare det her gange 3, 2,3.

Elev A læser delopgave 4.

- Elev A: Hvis de gerne vil have, at vi skal bestemme højden ikke, så skal vi have funktionen, og der står bare, at det er en vilkårlig funktion, så man kan ikke rigtig bestemme højden. For normalt har vi brugt en funktion til at sige, for eksempel en deles med x eller et andet.
- Elev B: Jamen skal vi så ikke også lave det der, er der ikke venstre og højresum her.
- Elev A: Det er det.

Elev A kalder på læreren.

- Elev A: Hvis vi skal kunne bestemme et udtryk for højden af de her rektangler ikke, så har vi jo brug for en funktion. Men der står bare, at det er en vilkårlig funktion.
- Læreren: Jamen, hvad bliver højden af det første rektangel?
- Elev A: Det kommer jo an på, hvilken funktion vi har.
- Læreren: Ja, den hedder f.
- Elev A: Jamen så vil det være $f(x_0)$, og så af x, n'te.
- Læreren: Ja det er så ikke helt rigtigt.
- Elev A: Eller skal man så minusse noget.
- Læreren: Nej det her er rigtigt, $f(x_0)$. Den sidste der, hvad sagde du der?
- Elev A: Så sagde jeg bare det samme, men med x i n'te i stedet for.
- Læreren: Det hedder ikke i n'te, men bare x, n. Men det er ikke rigtigt. Prøv at kig på figuren.
- Elev A: Den er jo aftagende.
- Læreren: Ja, men prøv at kig. Passer det? Hvor har du $f(x_n)$ henne på figuren?
- Elev B: Nå det er $f(x_{n-1})$.
- Læreren: Præcis kan I se det på figuren? Prøv lig at snakke sammen, hvorfor er det ikke x_n? Husk det er højden, I skal have højden af rektanglet.
- Elev A: Den er da det samme, hvis det er herfra og herfra.
- Læreren: Ja højden af rektanglet, men hvis du skal have $f(x_n)$, hvor har du det på figuren?
- Elev A: Det har jeg da stadig her.
- Læreren: $f(x_0)$ er der, $f(x_n)$, hvor er det henne?
- Elev B: Den er der ikke.
- Læreren: Jo, I kan godt pege.
- Elev C: Altså mener du den der?
- Læreren: Nej $f(x_n)$, hvor er den på figuren?
- Elev C: Er det her?
- Elev A: Altså f af…
- Læreren: Ja, hvordan kan I finde det på figuren, når I har grafen for funktionen
- Elev B: Nå er det her, så er det oppe.
- Læreren: Ja hvor er det præcist? $f(x_n)$?
- Elev B: Her, altså $f(x_n)$ her, og så $f(x)$ her.
- Læreren: Ja, men det er jo ikke højden af rektanglet, kan I se det?
- Elev B: Nårh det er det du mener.
- Elev A: Nårh, den ligger herovre, fordi den her funktion rammer her, og den her funktion rammer her. Jeg forstår det godt nu.
- Elev C: Så nu skal vi bare skrive $f(x_0)$ og $f(x_{n-1})$ ikke?
- Elev A: $f(x_0)$ er det første, og $f(x_{n-1})$ er det andet.

Elev B læser introduktionen og delopgave 5.

- Elev A: Er det ikke x_0 plus x_n? Ville man ikke lægge de her to sammen, den her plus den her?
- Elev C: Jo så får vi bredden ikke?
- Elev A: Jo, og så skal vi sikkert også bestemme højden.

Elev B læser delopgave 6.

- Elev A: Alt det, der er her, er det som skal forestille at være herinde, så derfor kan vi sige, hvad kan vi sige…

Elev A læser delopgaven igen.

- Elev A: Hvad var det vi gjorde før? Vi sagde… Nårh så skal vi bare plusse alle de her, altså så hedder det.
- Elev B: Nårh.
- Elev A: Vi skal faktisk, vi skal sige den her, alle de her, dvs. f nul, $f(x_0)$ til $f(x_{n-1})$.
- Elev B: Ja. Er det $f(x)$?
- Elev A: Altså det hele er plus, det skal lægges sammen ikke, og så det tal man får,… Var det ikke sådan her, vi gjorde før?

Læreren inddrages.

- Elev A: Det er det samme som den forrige opgave med højden ikke? Her spørger de så bare til den her tegning. Så højden, det er jo højderne af alle de her rektangler. Skal man så ikke bare sige fra $f(x_0)$ til $f(x_{n-1})$. Dem lægger man sammen, og så får man højden.
- Læreren: Ja nu behøver du ikke at skrive dem alle sammen. Så skriver man de to første og så prik, prik, prik.
- Elev A: Jo, jo. Den første og den sidste, de lægges sammen, og så får man højden.

Elev A læser delopgave 7.

- Elev A: Så skal man jo bare sige det her gange det her.
- Elev B: Ja.

Sekvens 11 (Opgave 9)

Elevgruppen har et par problemer med at tegne venstre- og højresummen, samt skravere differensen, men det lykkes. Gruppen kalder på læreren i forbindelse med deres svar på delopgave 9.7.

- Elev A: Er det ikke sådan her, de kommer mod grænseværdien, de kommer tættere og tættere på hinanden.
- Læreren: Differensen, hvad sker der med den?
- Elev A: Den bliver mindre.
- Læreren: Den bliver mindre og mindre, og hvad går den imod?
- Elev A: Mod grænseværdien.
- Læreren: Hvilken grænseværdi? Hvad tror du der vil ske med de tal her, hvis du fortsætter med at lave..
- Elev A: De vil komme tættere og tættere på hinanden jo.
- Læreren: Ja, og hvad så med forskellen, det er forskellen i regner ud her. Den starter med 2, 0,8, 0,1, 0,08, 0,016. Hvad sker det med den grænseværdi her?

- Elev A: Kommer den ikke tættere på 0? Den går imod 0.

Gruppen udfylder tabellen i opgave 10 uden problemer, og læser herefter delopgave 10.2.

- Elev B: Den første den er voksende, og den anden den er aftagende.
- Elev A: I virkeligheden ikke, der burde ikke stå 0 her, der burde stå 0 komma et eller andet.
- Elev B: Ja.

Elev A kalder på læreren.

- Elev A: Begrund hvorfor det ikke er den samme differens i opgave 9 og 10, som bliver negative.
- Læreren: Så skal vi kigge på graferne.

Læreren starter opsamlingen.

Sekvens 12 (Opgave 11)

Elevgruppen løser efter en kort diskussion delopgave 11.1. Elev A kalder på læreren, og læser delopgave 11.1 højt.

- Elev A: Er det så bare b minus a delt med n, og i dette tilfælde er det 1 minus 2 delt med 5.
- Læreren: Jo.
- Elev B: Det bliver så en femtedel.
- Elev A: Siger man så 1 minus 2, eller 2 minus 1?
- Læreren: b det er det sidste her.
- Elev A: Så 2 minus 1, delt med 5, og hvad sagde du det gav, en femtedel.

Elev A læser delopgave 2.

- Elev B: kan du finde ud af, hvordan man gør?
- Elev A: Nårh skal vi ikke, er det ikke her man gør det, og så går man herind.
- Elev B: Vi skal lave det der med venstre- og højresum.
- Elev A: Nårh, men problemet er vores forskrift hedder det her ikke, ellers tænkte jeg på, at vi kunne sige 1 divideret med 1, og 1 divideret med det der.
- Elev B: Jeg tror vi skal bruge den her, jeg er ikke sikker. Der står bare opskriv udregningen og resultatet, men jeg ved ikke, hvordan.
- Elev A: Det er en voksende funktion.
- Elev B: Jeg forstår ikke, hvad de mener med udregning og resultat. Jeg ved ikke om de vil have, bredde eller højde eller areal.
- Elev A: Jeg tror vi skal finde et areal.

Elev B kalder på læreren og læser delopgave 11.2 højt.

- Elev B: Hvad mener de, skal vi finde arealet?
- Læreren: Ja, venstresummen det var jo arealet af de her, det er summen af de her arealer.
- Elev B: Og så skal vi gøre det med venstre og højre?
- Læreren: Ja.
- Elev B: Så skal vi bare lave den her.

- Elev A: Det var det jeg sagde, jeg tænkte på hver enkelt af de der, er det ikke det? Nårh, det er jo den her formel vi skal bruge, så skal vi bare sige 1 gange med det der, 1 og så en halv gange det der, tror du ikke det er det vi skal bruge?
- Elev B: Vi skal finde arealet af de her fem rektangler, og areal, det finde vi ved at sige bredde gange højde, og bredden ved vi er en femtedel, for den har vi fundet her.
- Elev A: Og højden skal vi finde.
- Elev B: Og det er.
- Elev A: En divideret med en, en divideret med 1,2, vi skal bare gøre sådan. Vi kender højden, nej vi kender bredden.
- Elev B: Skal vi lave for højresummen først?
- Elev A: Ja, skal vi skrive højresum?
- Elev B: Og så siger vi rektangel 1, 2, 3, 4 og 5, fordi der er fem rektangler ikke? Og så skal vi finde bredde og højde. Bredden den er en femtedel hos dem alle sammen, og så højden.
- Elev A: Og højden det var, så siger vi sådan her, der er jo, hvor mange, for hvis vi kigger så er det intervallet mellem…
- Elev B: Ja, så vi skal tage den der, det er for eksempel.
- Elev A: Det er 1,20, 1,40. Det tænker jeg også, men hvorfor står den der 1,5 lige i midten?
- Elev B: Den står i midten, fordi 1,2, 1,4, 1,6 jo. For eksempel, så er den første højde er 1, den næste er 1,2, den næste er 1,4, den næste er 1,6, 1,8. Vi kan også skrive det sådan her.
- Elev A: Det er højresummen, så er det 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Elev B: Så vi starter fra 1,2.
- Elev A: Ja det gør vi. Lad os først lave venstre, kig herop, den starter ikke her, men den starter her.
- Elev B: Men så er den eneste forskel på højre og venstre, at for venstre, så starter vi fra 1 til 1,8, og for højre, fra 1,2 til 2.
- Elev A: Det her er venstre ikke, så laver jeg højre.
- Elev B: det her giver så 1,2 gange 0,2, hvor meget giver det?
- Elev A: Så siger du en gange det der, du ganger de to tal med hinanden.
- Elev B: 0,32, 0,36, så er det her nok 0,40.
- Elev A: Så skal vi indsætte x opløftet i 2.

Elev A kalder på læreren.

- Elev B: Så siger vi 1 opløftet i 1, det giver jo bare 1.
- Elev A: Vores funktion det er jo x i anden, skal vi ikke opløfte det i anden så?
- Læreren: Jo.
- Elev A: Altså arealet, når vi skal sige b gange a. Skal vi ikke?
- Læreren: Hvis vi nu tager den første, hvad har I fået? Arealet, hvordan regner i arealet af det første rektangel?
- Elev A: a gange b.
- Læreren: Ja, og hvad giver det? De er dumt at sige a gange b, for det er jo de her grænser.
- Elev B: Længde gange bredde, og vores længde har vi fundet her, og det giver en femtedel. Og vores bredde det er så…
- Elev A: 5 divideret med 2, for eksempel.
- Elev B: Her har vi 1, og så plusser vi med en femtedel hver gang, så 1,2, 4 og 6.
- Læreren: Ja, og hvad skal I så gøre for at finde højden af hvert rektangel?
- Elev A: Siger vi ikke bare, hvad hedder det.

- Elev B: Så skal vi taste det her i anden, og så 1,2 opløftet i anden.
- Læreren: Ja
- Elev B: Hvis vi starter med den her ikke, 1,2.
- Elev A: i stedet for alle de her 2'ere, så skal der stå i anden.
- Elev B: Hvis vi starter med venstre, den første er bare 1, for 1 opløftet i anden er bare 1. Den næste er 1,2 opløftet i anden, det er 1,44.
- Elev A: Det vil sige opløftet i anden, opløftet i anden, opløftet i anden.
- Elev B: Og det her giver så bare 1.
- Elev A: 1,5 gange 1 ikke?
- Elev B: Nej lige nu skal vi, nej vi kan også bare gøre det sådan jo, så behøver vi ikke regne det der ud.
- Elev B: Vi ved, hvordan vi regner højden nu, vi skal altid beskæftige os med forskriften for funktionen.
- Elev A: Så du har venstresummen, er det i anden på dem alle sammen? Så det vil sige 1 gange, 1 i anden, det er bare 1, nej vent, det er 1,2 gange, og så er det 0,2. Så hvis vi skriver den første, så er det bare, 1,2. Den næste er 0,2 gange. 0,288.
- Elev B: Problemet er bare, jeg tænkte på det der 1,5 det skal vi ikke få med vel? Jo, det er bare 0,2, du skriver bare 0,2.

De diskuterer deres udregninger, og bliver enige, og elev A læser herefter delspørgsmål 11.3 højt.

- Elev B: Så vi skal finde en formel for højre minus venstre. En femtedel ikke, det er b minus a delt med n, og det andet er x i anden.
- Elev A: Og så for at finde arealet siger man bare a gange b.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B: Når vi finder et udtryk for højresummen, så bruger vi den her formel $f(x_1)$, x_2, x_3 ikke? Her har vi x_1 til x_5 og her har vi så fra x_2 til x_6. Så først tage f fra x_2 til x_6, og så b minus a divideret med n, og så minusse det med f for x_1 til x_5. Kan man ikke sige sådan?
- Læreren: Jo.
- Elev B: Hvis jeg lige skriver det ned. Først tager vi for højresummen ikke?
- Elev A: Hvorfor det der x_3?
- Elev B: Se, vi lavede det før her.
- Elev A: Hedder det så, 1 plus 1,2.
- Elev B: Der, hvor vi lavede det før var det x_1, x_2, b minus a divideret med n. Det var den formel vi brugte. For højresummen skal vi skrive 2, 3, 4.
- Elev A: Nårh skal vi kigge på den der? Jeg troede vi skulle forholde os til den her.
- Elev B: Og så 6.
- Elev A til læreren: Vi skal forholde os til den her ikke?
- Læreren: Jo.
- Elev A: b minus a divideret med n.
- Elev B: Bliver det her så ikke 1, og 1,2.
- Elev A: Og så minus. Herfra starter vi med x_1.
- Læreren: Hvad er du startet med i den anden?
- Elev A: x_2.
- Elev B: Venstresummen starter ved 1.

- Læreren: Vi plejer at starte med x_0 her. x_0, x_1 og op til x_{n-1} og x_n.
- Elev A: Så for højresummen starter man ved x_1?
- Elev B: Der starter man ved 1.
- Læreren: Ja. Højresummen starter ved x_1.
- Elev A: Vi slutter med x_6 jo?
- Læreren: Ja, det er kun for denne her. I er jo i gang med at skrive et meget generelt udtryk op, det er også fint nok, men I kan bare skrive det op for den her funktion.
- Elev A: Det skal vi gøre her jo, så her laver vi generelt, og ved generelt, bruger man det der n, så bruger man de der generelle udtryk.
- Læreren: Ja.
- Elev B: Men så lad os skrive det, at det er for højresummen, når vi skriver 1. Det er op til, hvor meget?
- Elev A: Jeg skriver den her flot, så det her væk, og så skriver vi sådan her, $f(x_0)$ plus f.
- Elev B: Det er for venstresummen nu ikke?
- Elev A: Det er for højre, der står højresummen minus venstre.
- Elev B: Så skal du starte fra 1, hvis det er højre.
- Elev A: Plus, så laver vi punktum, punktum, punktum, og så x_{n-1}, b minus a divideret med n, minus.
- Elev B: Og det her, det var højre.
- Elev A: Jeg tror vi laver 1 her, $f(x_1)$, x_2. Kan man så skrive, med højresummen så starter vi med x_1, og med venstre starter vi med x_0?
- Læreren: Ja.
- Elev A: Men hvad skal den sidste så være i de her to?
- Læreren: Der skal være lige mange.
- Elev A: Skal de begge to være det samme?
- Læreren: Nej.
- Elev A: De skal slutte med to forskellige. $f(x_0)$, den her slutter senere end den her, så her skal der måske kun være n så.
- Læreren: Ja det er rigtigt.
- Elev B: Så venstresummen slutter før.
- Elev A: Så her skal vi kun have n, vi tager minus 1 og x væk.
- Elev B: Så bare f af n?
- Elev A: Ja f af n.
- Elev B: Venstresummen, så er det $f(x_0)$
- Elev A: Nu er det højresummen minus venstre, så starter vi med x_1 plus $f(x_2)$ plus $f(x_3)$ plus $f(x_4)$ plus $f(x_5)$.
- Elev B: 1, 2, 3, 4, 5.
- Elev A: Her starter vi fra 0 jo, 0, 1, 2, 3, 4. Er det ikke sådan? Minus, og så starter vi fra x_0.
- Elev B: Nej, det er det, der er problemet. Kig på den her, her der starter den på 1, og her på 1,2.
- Elev A: Og han sagde, at x_0, den tager vi som 1.

Elev B kalder på læreren og læser delopgave 11.4 højt.

- Elev B: Højresummen den starter fra 1,2 her.
- Læreren: Lad mig lige se. Heroppe har I allerede gjort det generelt, I kan også bare kigge på de her som lægges sammen, her har I venstresiden og her har I højre, venstresummen og

højresummen, hvis I nu skal trække dem fra hinanden, kan I så kigge på tallene her, og se om man kan, hvis nu vi siger højresummen minus venstresummen, så den minus den, hvis man gør det, kan man så…

- Elev B: Er det ikke sådan her, vi har for højresummen, det her ikke? Og for venstre har vi den her, nu kan vi forkorte ud, $f(x_2)$ til $f(x_4)$, så er der kun.
- Elev A: Det er kun de her to som er tilbage jo. Det er det her der går ud, det er meget enkelt jo. Han siger vi skal forkorte ud, i sidste ende er det her tilbage og det her.
- Elev B: Så er det faktisk $f(x_n)$.

Elev A læser delopgave 11.5 højt, hvorefter elev B kalder på læreren.

- Elev A: Det var det vi skrev sidst jo.
- Elev B: Kan vi ikke lave b minus a divideret med n til kun en af dem.
- Læreren: Jo du kan sætte det uden for en parentes. Den brøk der.
- Elev A: Jo, så står der, det han mener, det er b minus a divideret med n, og så står der sådan her, $f(x_n) - f(x_0)$. Det er sådan her du mente ikke?
- Læreren: Ja.
- Elev B: Men hvad kan vi, er det her så udtrykket? Nå vi skal lave højre minus venstresum, så det her er venstresum, er det ikke den sidste, den her?
- Læreren: Det der er rigtigt.
- Elev A: Du sagde også, at når venstresummen vokser, så bliver højresummen mindre, og det vil sige, at venstresummen bliver negativ.
- Læreren: Nej, det kommer an på om funktionen er aftagende eller voksende, om det er venstresummen eller højresummen, der er størst.
- Elev A: Men der står her, at når venstresummen bliver mindre så vokser højresummen, og derved bliver v minus h negativ.

Læreren går op til tavlen for at påbegynde opsamlingen.

Sekvens 13 (Opgave 11)

Elev A kalder på læreren, i forbindelse med delopgave 11.3

- Elev A: Er det rigtigt at stille det op sådan her, hvis vi skal opstille et udtryk for højresummen minus venstresummen, så er det jo arealerne minus hinanden.
- Læreren: Ja, men prøv at brug de her udtryk, der står her, den fra den. De to der, prøv at kig på dem, og se om I kan kigge på dem. Jeg får godt nok ikke det her. Prøv lige at, det der ser heller ikke rigtigt ud. Her har i 1 og her har i 2, hvad vil det der så hedde? Hvis I skal finde højden af det her rektangel, så skal I bruge den der x-værdi til at finde højden ikke? Hvad vil den der x-koordinat være?
- Elev A: Den vil være 2 femtedele.
- Læreren: Nej. En femtedel, det her er en femtedel, to femtedele, så den vil være. Denne her højde, den skal I jo få der, så I skal bruge der, så I skal bruge denne her, I skal bruge 1 plus en femtedel, og sætte den i anden, det vil sige 1,2 i anden.
- Elev B: Det vil sige, at alt det der er forkert?
- Elev A: Det vil sige, at hvis han siger, at det her er 1 plus en femtedel, så er det et eller andet tal. Det her tal skal du så sige plus det her. Det ser ellers rigtig godt ud.

- Elev C: Skal vi hviske det hele ud?
- Elev A: Jamen det er jo i anden, og han siger, at vi bare skal lægge dem sammen her, så giver det jo ingen mening. Fordi hvis du allerede lægger dem sammen, hvordan kan man så sætte det i anden?
- Elev C: Han siger det her er 1, og det her er en femtedel, så det er 1 plus en femtedel.
- Elev B: Og så er det resultatet, som skal plusses med det der.
- Elev A: Det her skal plusses med 2 femtedele?
- Elev B: Var det ikke det han sagde?
- Elev A: Så får vi 4, det er et større tal.
- Elev C: Han sagde han havde fået 2,2 eller sådan noget.

Sekvens 14 (Opgave 12)

Elevgruppen påbegynder arbejdet med opgave 12.

- Elev A: Vi ved det er intervallet fra 0 til 1 ikke, og der er tre. Hvis vi deler det op i tre lige store rektangler, skal vi ikke?
- Elev B: Jo tre eller fire.
- Elev A: Vi kan også faktisk bare lave to, bare lige i midten.
- Elev B: Lad os lige lave en i midten.
- Elev A: (*Henvendt til læreren*) Kan man ikke lave sådan en her?
- Læreren: Jo, men nu skal vi prøve en anden metode, hvor vi… Der er jo valgt en pæn funktion, så det er muligt at beregne arealet.
- Elev B: Men så står der, ved at opdele området i kendte figurer, som I kan beregne arealet af.
- Læreren: Ja vi kan opdele det her område i kendte. Hvis vi laver det der med rektangler, så bliver det jo ikke helt præcist det der område. Vi kan gøre det på en anden måde.
- Elev B: Vi kan lave en trekant, kan vi ikke? En her fra og hertil, og så har vi to trekanter
- Elev A: Vi kan starte herfra, og så går vi herned, så har vi en trekant her, og så kan vi lave et rektangel, og så har vi to trekanter.
- Elev B: Skal vi ikke lave en streg herfra og hertil?
- Læreren: Man kan gøre det lidt nemmere. Hvordan kan man nemmest dele det her op?
- Elev B: En herfra og hertil.
- Læreren: Ja, nej, man kan dele det op i… Man kan gøre det på en nemmere måde, så man får… Så får I sådan en skæv trekant der.
- Elev A: Nårh jeg ved det godt jo, altså man kan lave denne her hertil og så har vi et rektangel og en trekant.
- Læreren: Ja det gør det lidt nemmere.
- Elev B: Herfra og hertil.
- Læreren: Ja så har I et rektangel og en trekant.
- Elev B: Ja et rektangel og en trekant.
- Læreren: Ja og det er ikke bare en trekant, det er en retvinklet trekant.
- Elev A: Pythagoras kan vi tage.
- Elev B: Det er faktisk en halv trekant.
- Elev C: En halv trekant.
- Læreren: Hvad mener du med en halv trekant? Det er en retvinklet trekant ikke?
- Elev B: Ja en retvinklet.
- Læreren: Og Pythagoras er jo lige meget her.

Læreren forlader gruppen.

- Elev B: Så er det længde gange bredde, så for den her er det 1 gange 1,5.
- Elev A: Du finder arealet ved at sige l gange b ikke?
- Elev B: Ja af et rektangel. Hvordan finder man arealet af en retvinklet trekant?
- Elev A: Der er det høje gange grundlinje delt med 2.
- Elev B: Nårh ja, det er rigtigt. Den er 2. 1 gange 2 divideret med 2, er lig med 1.
- Elev A: Og herfra, hvor meget er der dér? Der er 2 her, ikke? Nej der er ikke 2. Der er 2,5, ikke?
- Elev B: Nej nej, der er 2 herfra hertil.
- Elev A: Den slutter på 4.
- Elev B: Er det ikke 3,5?
- Elev A: Det er 2,5 i stedet for 2.
- Elev B: Er det 4?
- Elev A: Ja. Jeg troede også det var 3,5.
- Elev B: Så er det 2,5 i stedet for. Det vil sige 2,5 divideret med 2 er lig med 1,25. Så er det 1,5 plus 1,25.
- Elev A: Det er 2,75.
- Elev B: Præcis.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B: Først fandt vi det for rektanglet, det var 1,5. Så for den retvinklede trekant, det var bare højde gange grundlinje divideret med 2 eller gange en halv. Vores grundlinje det var 2,5, og den her den var 1, og det var så 1,25, og så det der plus det der.
- Læreren: Ja det ser rigtigt ud. Så skal I gå videre til… Det er den samme funktion, er det ikke? Jo.

Elev A forklarer det forrige til elev C.

- Elev A: Først så der her, beregn A ved at opdele området i kendte figurer, som I kan beregne arealet af. Kendte figurer det kan være rektangler, trekanter, cirkler. Så kigger vi her, hvad er det mest logiske vi kan gøre. Vi har en hel ren figur, så laver vi en streg her, så har vi et rektangel og en trekant. Så jeg har skrevet, at vi starter med at dele den i et rektangel og en trekant, derefter regner vi arealet ud for både trekanten og arealet. Det vil sige vi først kigger, hvordan regner man arealet for et rektangel ikke, det er længde gange bredde. Vi ved, at herfra er den 1,5, og længden den er 1, altså fra 0 til 1 ikke? Så siger vi l gange b, det er 1,5 gange 1 er lig med 1,5, så vi har arealet for rektanglet her. Så for at finde det for trekanten ikke, man kan også bruge Pythagoras, men det er nemmere sådan her, hvor man bare siger højde gange grundlinje delt med 2, og fordi det er en trekant dividerer man med 2. Så ved vi, at derfra og dertil kan vi aflæse på y-aksen, at der er fra 1,5 til 4, det er 2,5. Så vi ved at højden h er 2,5, og grundlinjen det er denne her, den er 1, dividere med 2, det er 1,25. Og for at finde arealet af det samlede, så plusser man arealerne og får 2,75.

Elev B læser nu delopgave 12.2 højt, og efter en kort diskussion kalder elev B på læreren.

- Elev B: I den her ikke, vi finder *h* gange *b*, det 1,5 gange *x*.
- Elev A: Altså højden, og så *x* her er længden. Længden der er *x*.
- Læreren: Ja.

- Elev B: Og så til den her brugte vi g gange h divideret med 2, og g er så 2,5.
- Læreren: Nej.
- Elev A: Er det ikke bare x?
- Læreren: Jo det er x.
- Elev B: Er det stadig x?
- Læreren: Ja, det er jo den samme grundlinje du har her.
- Elev B: Og så 1,5, højden?
- Elev A: Det er 2,5.
- Elev B: Skal vi skrive h i stedet for x?
- Elev A: Nårh det her er 2,5, det er for trekantens højde, er det ikke? Jo det er.
- Læreren: Ja, hvordan kan I finde hele den højde her?
- Elev A: Det er ved at plusse de her to sammen.
- Læreren: Nej, det gjorde I før, men det var fordi det her var 1. Hvis det her er x, hvordan kan I så finde hele denne her højde…, når det her er grafen for den funktion?
- Elev B: Vi kan finde hældningen.
- Elev A: Nej x opløftet i det dér.
- Læreren: Man sætter x ind på den her, på t's plads, så får vi jo funktionsværdien, så har I hele den her højde.
- Elev B: Men hvad var det vi skulle lave her?
- Læreren: I skal finde højden, denne her højde, så ved at sætte x ind kan I finde hele denne her højde.
- Elev B: Så jeg siger $2{,}5x$ plus 1,5.
- Læreren: Ja det er den totale højde, og hvad skal I så gøre?
- Elev B: Hvad skal vi mere finde, vi skal finde længden også. Eller herfra og hertil.
- Elev A: Dividere med x.
- Læreren: Det er trekanten vi snakker om nu, vi har en grundlinje, den hedder x, så skal I finde det her stykke. Det I har fundet der, det er jo det her stykke.
- Elev A: Det der gange x delt med 2.
- Læreren: Nej.
- Elev B: Minus…
- Elev A: x'erne går ud, så står der bare 2,5 plus 1,5.
- Læreren: I gætter jo. Denne her højde, den har I her, I har bare sat x ind i udtrykket deroppe. Ok, hvordan får man trukket det her stykke fra, som er det samme som det her.
- Elev B: Man finder det her og så minusser man.
- Læreren: Ja, hvordan kan I finde ud af, hvor højt det her er.
- Elev A: Det har vi fundet før jo.
- Læreren: Ja, hvad er det?
- Elev B: Det er 1,5.
- Elev A: Det er 1,5 gange x.
- Læreren: Ja 1,5.
- Elev B: Så det her minus 1,5.
- Læreren: Ja.
- Elev A: Så ved vi, at h gange b det er lig med 1,5 gange x, og så ved vi, at for at finde grundlinjen siger vi højde gang g delt med 2 er lig med, højden det var alt det der ikke? 2,5x plus 1,5, ikke? Gange grundlinjen det er 1,5, eller det er minus er det ikke?
- Elev B: Vi skal bestemme et udtryk for A(x).

- Elev A: Så A(x) er lig med 2,5x plus 1,5 minus 1,5.

De forkorter udtrukket og ender med et korrekt udtryk for A(x).

- Elev A: Hvordan er det vi differentierer?
- Elev B: Så er det bare 1,25 gange 2x plus 1,5.
- Elev A: Når man differentierer 1,25x i anden, så giver det 2 gange 1,25x, er vi enige? Og når vi differentierer det der?
- Elev B: Så går x ud, så er det bare 1,5. Vi har fået den her jo.
- Elev A: Det her er det samme som det her jo.
- Elev B: Så vores areal differentieret er det samme som vores funktion.
- Elev A: Så den her er differentiabel til den her.

Sekvens 15 (Opgave 13)

Elev B læser delopgave 13.1 højt.

- Elev A: Forstår du det?
- Elev B: Jeg kan ikke huske det der.

Elev A spørger en anden gruppe.

- Elev A: Nårh nu forstår jeg.
- Elev B: $A(x_0)$ divideret med h, var det sådan?

Elev B læser delopgave 13.2.

- Elev B: Beregn tælleren, det bliver sværere og sværere opgaver jo.
- Elev A: Tælleren, er det ikke det her?
- Elev B: Vi skal gøre rede for, at det der, er det samme som det der.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B: Der står jeg skal gøre rede for at det der, er det som det der. Men her der står $x_0 + h$, og det er så ens slutværdi, og det her er ens start.
- Læreren: I skal kigge på den her figur her, hvor der er et interval. Det er herfra og hertil, men vi har også et *A* her, fordi vores store *A* er defineret på den måde, altså heroppe står, hvordan vi har defineret store *A*, og hvordan vi definerer det bestemte integral.
- Elev B: Store *A* er det samme som det der?
- Læreren: Og det der, definerer vi som en grænseværdi af venstresummen. Det der *A(x)* betyder venstresummerne fra *a* til *x*.
- Elev B: Og venstresummerne, det er så det her og det her.
- Læreren: Ja, så skal I tænke på, hvad det her betyder, og der her betyder.
- Elev A: Det her er jo sekanthældningsformlen, altså hvis vi minusser.
- Læreren: I skal bare tænke på de der to størrelser, hvad de betyder ikke.
- Elev B: Er det venstresummen?
- Elev A: Det er bare de her to, som trækkes fra hinanden jo.

- Læreren: Ja, men det er jo defineret i forhold til *A* hernede. Så hvad betyder det her, det betyder det samme som det der integral, som betyder en sum af venstresummer, eller en grænseværdi af venstresummer. Hvad betyder det her?
- Elev B: Det betyder det samme som *A*, i hvert fald hernede.
- Læreren: I er inde på noget af det rigtige, brug den der figur og tænk på, at det her *A* altid er defineret som noget, der starter hernede fra a.

Læreren forlader gruppen.

- Elev A: Ok, vi ved at det her er et interval og det her er et interval. Så står der betragt tælleren, hvad kan vi så sige?
- Elev B: Vi kan lige skrive at *A(x)* er lige med *x*, a.

Diskussion stopper, og elev A fortæller gruppen ved siden af, at de sidder fast, og derfor ikke kan hjælpe dem. Læreren vender tilbage.

- Læreren: Kig på denne her, store A af $x_0 + h$. Vi har defineret *A* på den måde der.

Læreren forlader gruppen.

- Elev A: Vi kigger på det, vi forstår det bare ikke man.

Læreren tager en kort opsamling af delopgave 13.2, hvorefter eleverne arbejder videre med opgave 13.

Sekvens 16 (Opgave 14)

Læreren sætter eleverne i gang med opgave 14. Elev A læser delopgave 14.1 højt.

- Elev A: $F(x)$ minus $A(x)$ er lig med…
- Elev B: Lille $f(x)$.
- Elev A: Det er det samme er det ikke?
- Elev B (til læreren): Er det der ikke det samme?
- Elev A: Nej nej, A mærke differentieret er lig med f
- Læreren: Hvad spørger I om?
- Elev A: Vi tænker bare over det. Vi ved at det der differentieret, A mærke differentieret det giver $f(x)$, og vi ved at $F(x)$…
- Læreren: Skriv det ja, det lyder rigtigt, på at skrive det ned.
- Elev B: Er differentiabel til A. Ok, hvis vi siger at $A(x)$ er lig med $f(x)$ ikke, og hvis vi siger store F differentiabel, hvad er det så?
- Elev A: Det er også $f(x)$.
- Elev B: Er det bare det?
- Elev A: Så hvad kan vi sige, $F(x)$ minus $A(x)$.
- Elev B: Det er lig med lille $f(x)$ ikke? Eller vent.
- Elev A: Men jeg kan ikke forstå det der tegn.
- Elev B: Vi ved, at de begge differentieret giver $f(x)$. Tror du så ikke det giver…
- Elev A: Så hvis vi laver dem begge to differentieret.
- Elev B: Så giver det $f(x)$.
- Elev A: Så bliver de begge to $f(x)$.

- Elev B: Ja men jeg tænkte på, at det bliver differentieret $f(x)$. Tror du ikke? Hvis vi minusser de der to med hinanden. $F(x)$ minus $A(x)$ lig med f differentieret, lille.

Elev B kalder på læreren.

- Elev B: De her begge to differentieret giver $f(x)$. Så hvis vi minusser de her to giver det bare f af x mærke, gør det ikke?
- Læreren: Nej, hvad giver det så?
- Elev A: Hvis vi differentierer $F(x)$ minus A differentieret så giver det x_0.
- Elev B: Så giver det $f(x)$.
- Elev A: Det giver 0. Det der giver $f(x)$.
- Læreren: Når du siger, at det der giver $f(x)$ så skriv det. Skriv det, det giver $f(x)$.
- Elev A: $f(x)$ minus $f(x)$ lig med 0.
- Læreren: Ja, og hvad kan I så sige om det her?
- Elev A: At det går i mod 0 eller…
- Læreren: Vi ved, at hvis vi differentierer den, så giver den 0, hvad kan vi så sige om den der størrelse? Hvad er det, der giver 0 differentieret?
- Elev A: $f(x)$.
- Elev B: x_0.

Læreren beder klassen holde 5 min. pause. I pausen fortsætter elev A diskussionen med læreren.

- Læreren: Hvad kan du sige om den størrelse der? Den eneste du ved om den, er at når du differentiere den giver den 0.
- Elev A: Så er det en konstant.
- Læreren: Ja præcis.

Efter pausen læser elev B delopgave 14.2 op, og spørger læreren om hjælp.

- Elev A: Hvad er det for et udtryk?
- Læreren: Det er denne her F.
- Elev A: Så vi skal sætte a ind på x's plads, og a giver 0.
- Elev B: Det giver stadig 0 jo. Det giver stadig en konstant jo.
- Læreren: Ja det giver en konstant.
- Elev B: a er jo bare lig med 0 jo, og 0 er en konstant.
- Læreren: Nu skal jeg lige se, hvad jeg har lavet.
- Elev A: På x's plads skal vi sætte a ind, og a er det samme som 0.
- Læreren: I skal isolere store $F(x)$.
- Elev A: Vi skal isolere den her, og det er så.
- Elev B: Hvis vi skal isolere den bliver det plus, nej minus. Nej vi skal ikke skrive 0, men vi skal skrive k. Skal vi ikke skrive k. Isoler, så bliver det minus. Så står der $A(x)$ lig med k minus $F(x)$.
- Elev A: $F(x)$ lig med $A(x)$, nej $F(x)$ minus $A(x)$ er lig med 0, og så har jeg sat $A(x)$ over på den anden side.

Elev A kalder på læreren.

- Elev A: Er det ikke sådan

- Læreren: Nej.
- Elev B: Der skal stå k ikke, i stedet for 0.
- Læreren: Der skal stå k her.
- Elev B: Er det ikke sådan her.
- Læreren: Så prøv at sæt a ind der.
- Elev A: $A(x)$ gange k, og $A(x)$ det er 0 gange k.
- Læreren: Prøv lige at skriv det.
- Elev B: Skal vi isolere A, $F(x)$ eller A?
- Elev A: $F(x)$, $A(x)$ er det samme som 0 ikke? A er lig med 0 gange k.
- Elev B: Når det er mig der laver det omvendt. Jeg troede vi skulle isolere den her. Så bliver det plus ovre på den anden side.
- Elev A: Ja det er plus herovre.

Læreren starter opsamlingen.

Sekvens 17 (Opgave 15)

- Elev A: Vi skal finde store $F(x)$, hvordan var det man fik store $F(x)$? 2 sekunder, jeg har mit hæfte.
- Elev B: Der står, at vi skal skravere $A(2)$ på nedenstående figur.
- Elev A: Nårh vi skal bare integrere den, vi skal bar sige sådan her.
- Elev B: Altså den der 1 delt med 3, nej 1 delt med t.

Læreren inddrages.

- Elev A: Skal vi ikke bare integrere denne her, så finder vi stamfunktionen.
- Læreren: Jo det står der også. Det første spørgsmål er bare at bestemme stamfunktionen. Der skal I bare bestemme stamfunktionen.
- Elev A: $Ln(t)$.
- Læreren: Ja.

Læreren forlader gruppen, hvorefter elev A læser delopgave 15.2 højt.

- Elev A: Det er så herfra.
- Elev C: Hvordan kom du til ln?
- Elev D: Det er ikke sådan der.
- Elev A: Jo. $Ln(t)$ differentieret giver 1 deles med x.
- Elev D: Så skal du sætte 0 i stedet for t.
- Elev A: Nej, for de har selv sagt t.
- Elev B: Det hedder t.
- Elev A: Det er kun det du skal, bare gå videre, gå videre med opgaven. Det er kun det.
- Elev C: Nu forstår jeg det ikke. Stamfunktion er det samme som at integrere en funktion.
- Elev A: Ja.
- Elev D: Du skal ikke integrere, du skal bare sige det der mærkelige integrale, bare integraltegn.
- Elev C: Du siger differentiere, du siger integrere, og dig, du siger, nej, nej, nej bare skriv integraltegn. Prøv lige at forklar mig det. Bestem en stamfunktion til f(t).
- Elev D: Du skal differentiere.
- Elev C: Differentiere, så ikke integrere.

- Elev A: Skal jeg forklare dig, hvad du skal? Du har noget, der allerede er differentieret, som er det der, det der, det er differentieret. Du skal finde det omvendte, det omvendte.
- Elev D: Derfor kan du skrive det der integral, og så 1 delt med.
- Elev C: 1 delt med *t*.
- Elev D: Og så *dt*. Er lig med.
- Elev C: Det hedder stamfunktion det der?
- Elev D: Ja du skal finde noget som du kan differentiere, som giver 1 divideret med *x*.
- Elev A: Hvis du ikke kan huske dem, så kan du kigge i den her.
- Elev D: På reglerne.
- Elev A: Så kan du se, at 1 deles med *x*, det er *ln(x)*.
- Elev D: *Ln(t)* i stedet for *x*. Sådan, så har du gjort det.
- Elev C: Ok, tak. Så stamfunktionen det er altid når man integrerer.
- Elev A: Altså når du finde en funktion til en differentiation.
- Elev E: Hvis man skal differentiere, har man så stamfunktionen, men skal finde det andet?
- Elev D: Når du skal differentiere, har du allerede stamfunktionen.
- Elev E: Så har du den der, som du skal differentiere.

Elev A vender tilbage til delopgave 15.2.

- Elev A: Er det ikke det her vi skal skravere, som jeg forstår det?
- Elev B: Jeg tænker på, hvad med det der?
- Elev A: Nårh som højresum og venstresum.
- Elev B: Skal vi ikke kigge på det?

Elev A læser delopgave 15.3 højt.

- Elev A: Det var det her, vi lige fandt her. $A(2)$ er lig med det der.
- Elev B: $A(2)$ er det så det her? Så vi skal beregne det der, ved hjælp af det her?
- Elev A: Er det ved hjælp af den, eller skal vi bare skrive det her, jeg ved det ikke.
- Elev B: Jeg tror vi skal beregne det der ved hjælp af resultatet, det er det der står.
- Elev A: Ved hjælp af resultatet fra forrige opgave, ved hjælp af $ln(t)$. Skal vi så sige, denne her er jo lig med $F(2) - F(a)$, er det ikke sådan?
- Elev B: Men hvad skal vi så bruge resultatet fra denne her opgave til?
- Elev A: Er det ikke, jeg tænker på den gamle opgave, vi lavede deroppe?

Opsamlingen starter.

Sekvens 18 (Opgave 15)

Elev A læser delopgave 15.1.

- Elev B: ”Man er helt blank”
- Elev A: Stamfunktionen til denne her, 1 deles med *t*. Nej det er ikke stamfunktionen, undskyld, men for at finde stamfunktionen, så siger vi… hvor er de der regler? Det vil sige, at det skal hedde, plus *k*. Jeg tror det er det her, fordi når man differentierer den der, så giver det …”
- Elev B: Det ved jeg godt, *ln(t)*.
- Elev A: Ok, vi skal sætte 2 ind i stedet for *t*. Tror jeg.
- Elev B: Vi har en halv time tilbage.

- Elev A: Det er lang tid.
- Elev B: Altså 25 min.
- Elev A: Sæt *A(2)*, altså.
- Elev B: Det vil sige, at det er herfra”
- Elev A: Nej der står bemærk, at *A(2)* kan opfattes som et areal. Er det så ikke her, fordi når vi siger en halv gange 2, det er 1. Det må nok være her. Nej.
- Elev B: Du forvirrer mig rigtig meget.
- Elev A: Det er herovre.
- Elev B: Hvorfor her?
- Elev A: Fordi arealet skal give 2”
- Elev B: Skal vi så lave en streg her?

Læreren inddrages.

- Læreren: Nej ikke det.
- Elev B: Er det ikke her ved 2-tallet?
- Læreren: Jo
- Elev A: Men hvorfor står der så, at *A(2)* kan opfattes som et areal?
- Læreren: Fordi vi kan opfatte A som et areal.
- Elev B: Se, det var det jeg sagde, men jeg ved ikke hvorfor.
- Elev A: Altså, jeg tænkte også på det først, fordi de sagde, at det kan opfattes som et areal.
- Elev B: Ok, vi skal bare skravere det.

Elev A læser delopgave 15.3 højt.

- Elev B: Er det så højre- eller venstresummen vi skal beregne?
- Elev A: Du spørger den forkerte.

Elev A spørger en anden gruppe, som ikke når at hjælpe, da opsamlingen starter.

Bilag 8

Transskriberinger af de realiserede lærerstyrede opsamlinger (herunder introduktioner og institutionaliseringer)

Opsamling af opgave 1

- Læreren: Jeg tror I er kommet så langt, at vi godt kan begynde at samle lidt op. Hvis vi lige tager de første figurer. Er der nogle, der har nogle figurer man kan beregne arealer af?
- Elev A: Altså fx figur 2.
- Lærer: Det er ikke den her. Det er helt generelt, ja første opgave.
- Elev A: Altså ved første spørgsmål har vi valgt tre figurer, trekant, cirkel og kvadrat. Skal jeg også sige formlen?
- Læreren: Ja lad os bare få formerne også.
- Elev A: Altså for en trekant, så hedder formlen, en halv gange højde gange grundlinje, og en cirkel hedder den pi gange *r* i anden, og kvadratet hedder det længde gange bredde.
- Læreren: Ja er der nogle, der har andre? Der er i hvert fald en mere.
- Elev B: Hvad med rektangel?
- Elev C: Vi har en retvinklet trekant, hvor man kan bruge Pythagoras: *a* i anden plus *b* i anden er lig *c* i anden.
- Læreren: Det er jo ikke arealet, det er jo sidelængder man finder der. Men vi har, udover kvadratet, cirklen og trekanten, har vi også?
- Elev B: Rektangel, *a* gange *b*.
- Læreren: Ja rektangel, den tager vi også. Godt, hvis vi nu går over til de her tre figurer her, kan vi på nogen måde komme i gang med at beregne arealet af sådan nogle?
- Elev C: Vi ved de alle sammen har et areal ikke, og så figur to for eksempel, så kan man først den op i rektangler, og så kan du dele den op i flere bitte små stykker som trekanter.
- Læreren: Hvordan skulle jeg finde et rektangel?
- Elev C: Må jeg prøve at vise dig det?

Elev C går op til tavlen, og retter først lidt på lærerens skitse af figur to.

- Elev C: Den går sådan her jo. Så ville jeg tage herfra og herud til, og så ville jeg gå ned herovre, så har jeg et rektangel. Det er ikke helt præcist, og så derefter ville jeg dele den op i trekanter.
- Læreren: Er det et rektangel?
- Elev C: Ikke helt præcist.
- Læreren: Ok, er der er andre forslag. Ja, bare forklar det, det er det nemmeste.
- Elev D: Det der rektangel ikke, der kan vi lave to trekanter.
- Elev E: Vi har jo en halvcirkel.
- Læreren: Vi er jo ikke sikre på det er en halvcirkel.
- Elev B: Det ligner lidt.

Elev D går til tavlen og tegner sine to trekanter.

- Elev D: Og så har du to trekanter, og så har du en halvcirkel.
- Læreren: Hvad med resten?
- Elev D: Så har du en halvcirkel.

- Læreren: Jamen vi er ikke sikre på det er en halvcirkel (*eleverne diskuterer*).

Læreren lader elev F tegne sit forslag på tavlen.

- Elev F: Nedenunder kan du lave en lige linje, og så op, hvor der er en lille trekant-agtig, og så op, og så får du en trekant her, og så kan du bare blive ved sådan her.
- Læreren: Nu er vi jo ikke sikre på det er trekanter det her, hvis det er skrå sider, men det er rigtig nok at man kan dele det op i sådan nogle rektangler her, det kunne vi godt gøre.
- Elev B: Jeg tænkte bare, den der hele (*figur to*) kan man ikke bare sætte den ind i en firkant? Altså rundt om, lave en firkant rundt om.
- Læreren: Denne her?
- Elev B: Nej det hele. Skal jeg prøve at komme op og vise det? Altså.
- Elev G: Nårh, bare rundt om. Ja sådan der.
- Læreren: Ok hvad får vi her, hvis vi beregner arealet af denne her firkant, rektangel, det er et rektangel? Hvad får vi så?
- Elev G: Så er det bare højde gang side.
- Læreren: Får vi noget som er for stort eller for småt?
- Alle eleverne: Noget der er for stort.
- Læreren: Ok. Kunne vi lave noget som er mere præcist end det?
- Elev H: Vi kunne halvere.
- Læreren: Halverer den, hvordan? Sådan her? Ok det er måske ikke så tosset. Kunne vi så justere det, så det kunne komme til at passe lidt bedre, nu vi har det delt det op i to rektangler.
- Elev G: Så er det også bare halvcirkler.
- Læreren: Vi er ikke sikre på det er en halvcirkel. Ok, vi har to rektangler, kan vi justere dem, så det samlede areal bliver lidt mere præcist.
- Elev B: Den er symmetrisk.
- Elev H: Trekanter kommer der også.
- Læreren: Vi er ikke sikre på det er trekanter det her. Hvad gør vi med denne her ovre (*læreren peger på figur 3 på tavlen*)? Hvad kan vi prøve her?
- Elev D: Der kan du sætte et rektangel og en trekant.
- Læreren: Et rektangel, hvordan?
- Elev D: Der hvor den buer ned. Nej nej, jeg mener vandret.
- Læreren: Ja ok (*læreren tegner*)
- Elev D: Nej, der hvor den buer ned, den skal ramme. De skal ramme hinanden (*læreren korrigerer tegningen*). Og så har vi to trekanter.
- Læreren: En trekant her, vi ved ikke om det bliver præcist. Hvad med andre forslag?

Læreren vender tilbage til figur to.

- Læreren: Hvad med denne her? Kunne vi gøre den mere præcis, lidt bedre, så den kommer til at passe mere præcist?
- Elev H: De der to trekanter, kunne du ikke dele dem op?
- Læreren: Hvordan skal vi dele dem op, i flere (*læreren begynder at tegne*)
- Elev G: Nej trekanter fra siden af.
- Elev H: Hvis man skal dele dem op i trekanter, så skal man…
- Læreren: Sådan her, ville du dele den op i trekanter her? (*læreren forsøger at tegne det som eleverne mener*).

- Elev G: Nej nej. Hele vejen ned jo.
- Elev H: Hele vejen ned.

Læreren forsøger igen.

- Elev G: Nej.
- Elev D: Skråt ned.
- Læreren: Herned til?
- Elev H: Ja.
- Læreren: Ok.

Eleverne diskuterer på kryds og tværs.

- Elev I: Kan du ikke bare tegne et kvadrat og så minusse de to trekanter? Så har du arealet.
- Læreren: Jo men det bliver bare svært at få de her trekanter til at passe med siden herude, og beregne hvor meget der er tilbage. Jeg tror mere på den her med at dele den ind i rektangler.
- Elev B: Hvad ville du gøre? (*henvendt til læreren*)
- Læreren: Kunne vi køre videre med den ide med rektanglerne, og så justere den så det bliver mere præcist?

Læreren lader eleverne tænke, men ingen elever markerer.

- Læreren: Hvis vi nu tager den her igen (*læreren vender tilbage til figur 3*). Kunne jeg bruge den ide med to rektangler herovre til at finde en grov beregning af arealet? Hvordan kunne jeg gøre det? Hvad med den her med de lodrette rektangler? (*læreren peger på figur 2*).

Eleverne er stille så efter en kort tænkepause fortsætter læreren.

- Læreren: Her har vi to rektangler. Ok, lad os prøve at gøre det samme her, hvis jeg nu deler den i to, hvor højt skal jeg så køre op her.
- Elev B: Helt op.
- Læreren: Ok, hvis jeg nu gør sådan her, så har jeg i hvert fald skudt over målet. Kan jeg på nogen måde gøre den her mere præcis?

Ingen elever markerer.

- Læreren: Måske er der en måde så man kan gøre det mere præcist, end hvis det bare er et rektangel. Hvad nu hvis vi har to rektangler her, så kan vi måske justere højden af dem, individuelt. Kunne vi gøre det så, så det samlede areal af rektangler kom til at ligne mere.
- Elev D: Ja den til venstre.
- Læreren: Den til venstre kunne vi tage længere ned, ikke? Hertil måske.
- Elev B: Så har vi to trekanter.
- Læreren: Er det her ikke mere præcist end det vi startede med?
- Elev B: Jo så skal du bare dividere med 2.
- Læreren: Hvad mener du med at dividere med 2?
- Elev B: Du har to trekanter.
- Elev J: To rektangler.

- Elev B: Ja to rektangler, nu ligner det to trekanter når du har lavet den der streg. Det ligner også to trekanter, hvis man kigger sådan der jo. Så kan du finde arealet for den ene trekant bare, og så de to rektangler.
- Læreren: Jamen stadig, det er svært, hvis vi laver en trekant her, så er det svært at få beregnet det areal vi mangler. Jeg tror mere på den der med rektangler. Hvis vi holder fast i den med rektangler, kan vi så arbejde videre med den, og få den gjort mere præcis?
- Elev K: Man kan lave en streg igennem, ikke? Så det bliver to trekanter.
- Læreren: Ja problemet med sådan en trekant er, at det er svært at beregne det der areal der bliver tilbage her.
- Elev L: Vi skal bruge tangenten. Hvad er det det hedder, det der vi lærte om sidste gang.
- Elev H: Pythagoras?
- Elev M: Han snakker om integral.
- Elev L: Integral ja.
- Læreren: Så langt er vi slet ikke endnu. Kan vi på nogen måde gøre dette mere præcist, hvis vi deler det ind i flere rektangler.

Læreren tegner flere lodrette streger, så der i alt ses fire rektangler.

- Elev D: Jo så kan du tage de to i midten ned.
- Læreren: Så kan vi tage de to midterste ned (*læreren sænker højden af de to midterste rektangler).*
- Elev A: Ej det er total forvirrende jo.
- Læreren: Er det ikke blevet mere præcist nu? Nu har vi de her arealer her (*læreren skraverer rektanglernes arealer*). Det er rektangler det hele, det er da mere præcist end det vi beregnede til at starte med.
- Elev N: Men du skal stadig trække det ekstra fra.
- Læreren: Der er stadig en fejl ja. Det her er en fejl, det her er en fejl og det her er en fejl (*læreren skravere det overskydende område*).
- Elev B: Kan vi ikke undlade de der fejl?
- Læreren: Kan vi på nogen måde gøre det bedre, så det kommer til at passe bedre?
- Elev G: Sætte dem i helt tynde rektangler.
- Læreren: Ja man kunne gøre dem tyndere endnu.
- Elev B: Nårh.
- Elev A: Du gør det bare endnu mere besværligt.
- Elev B: Han kommer tættere på jo. Nu bliver det unødvendige mindre.

Læreren redigerer højderne på rektanglerne.

- Læreren: Den højde kan vi justere dertil ikke?
- Elev B: lad os bare fordele dem, lave dem mindre og mindre og mindre.
- Læreren: Den højde kan vi fordele dertil. Se, på den her måde kan man jo godt få et gæt på hvad arealet er. Selvom det ikke er præcist så har vi trods alt en ide om, hvad arealet er her.

Læreren går tilbage til figur 1, som der ikke er tegnet på.

- Læreren: Nå man nu skal lave sådan nogle søjler her for at beregne arealet, så kan man vælge to forskellige former for, hvis jeg nu tager den i midten her, og skal lave et rektangel her, hvor højt skal jeg lade det gå op?

- Elev B: Altså indtil den sidste streg, og så ned.

Læreren tegner en vandret streg fra funktionsværdien af det højre og det venstre intervalendepunkt.

- Læreren: Man kan gøre det på to steder ikke? Der er to muligheder for at bestemme højden af rektanglet her. Jeg kan tage den her og den her. Så enten bruger jeg denne her, som vi kunne kalde, det er denne her jeg snakke om (*læreren skraverer arealet af rektanglet, hvis højde er funktionsværdien af det venstre intervalendepunkt*), den venstre side af mit rektangel ikke? Venstreside (*lærere tegner en pil og skrive venstre på tavlen*). Hvis jeg vælger denne her, så ville det være den højre side (*læreren tegner endnu en pil og skriv højre*). Så der er to forskellige måder at gøre det på, vi kan tage dem i venstre side, det vil sige, her kommer vi til at vælge en højde, der er her, en højde, der er her og en højde, der er her. Det kalder vi venstresummen. Eller vi kan vælge den værdi, der er i højreside af vores rektangler. Det vil sige den her værdi, den her værdi og den her værdi. Det kalder vi en højresum.
- Elev H: Når du har et kvadrat, og skal beregne trekanterne, så har du sådan en buet streg, ikke en ret linje, hvordan kan vi beregne det?
- Læreren: Ja det skal vi se på, om der ikke er en eller anden måde, hvor hvis vi vil beregne arealerne af de her rektangler, er en måde hvor vi kan gøre det mere præcist.

Læreren sætter eleverne i gang med opgave 2.

Opsamling af opgave 2 og 3

- Læreren: Hvis vi starter med højresummen, vi har to forskellige måder at komme med et bud på, hvad arealet under kurven her er, og vi gør altså det, at vi inddeler i rektangler, vi inddeler i lige store. Så kan man gøre det på to forskellige måder. Enten kan man vælge højden af rektanglerne, som den værdi der er til højre i intervallet, så kalder vi den en højresum, eller vi kan vælge højden af rektanglet til den værdi der er til venstre i et interval. Så får vi den her værdi. Så bare ved at kigge på tegningerne, kan I sige noget om hvilken, hvor vi får det største areal eller højde?
- Elev A: Vi får det største areal i venstresummen.
- Læreren: I det her tilfælde får vi en venstresum, der er større end den anden.
- Elev B: Det er logisk jo.
- Lærer: Delintervallernes bredde er alle sammen 1. Højderne finder vi selvfølgelig ved, I kender funktionen heroppe. Så får vi to arealer til 1,78 og en til 1,08. Hvis vi lige skulle forsøge os med en mere generel beskrivelse. Hvis vi nu kalder de her værdier for x_0, x_1, x_2, og x_3. Så kan vi skrive, at det samlede areal det bliver, hvis vi vælger venstresummen, så skal vi tage funktionsværdien af x_0, altså når vi skal finde højden af det her rektangel, så finder vi funktionsværdien af den her *x*-værdi der er her. Så det er $f(x_0)$. Det næste bliver $f(x_1)$ og $f(x_2)$. Det her oppe skal ganges med.
- Elev C: Skal vi gange det?
- Lærer: Det er det vi har gjort her. For at finde højden her, så har I taget funktionsværdien af den første værdi nemlig 2, så højden bliver 0,5, så har man fundet arealet ved at gange med bredden her. Bredden er bare 1, og vi kan ikke generelle udtryk for bredden og delintervallerne. Det var det du fandt før i opgave 2, så nu har jeg bare sat det her udenfor en parentes. Så her har vi faktisk et udtryk for arealet, skrevet op så vi har tre delintervaller og det er en venstresum. Godt, men vi skal så i gang med opgave 4, 5, 6 og 7, og der skal I bruge GeoGebra, så I må gerne tage computeren frem.

Opsamling af opgave 5, 6 og 7

- Læreren: Ja lad starte opsamlingen, så jeg kan se, hvad I har af resultater. Vi starter med den første, lad os bare få det hele udfyldt.

Læreren udfylder tabellen fra opgave 5 med elevernes hjælp.

- Læreren: Ja, hvad kan I sige om de her ting?
- Elev A: Vi kan først og fremmest sige, at venstresummen er voksende og højresummen er aftagende, men det vi kan sige er at de ender på det samme punkt.
- Læreren: Ja lige præcis. Hvis vi kigger på venstresummen her, den vokser, højresummen aftager, og de her er næsten det samme tal. Næsten samme værdi vi får. Lad os prøve at kigge på 6'eren.

Læreren udfylder tabellen fra opgave 6 med elevernes hjælp.

- Læreren: Det er lidt mere interessant, at have flere decimaler med her, for så kan vi se, at det er ikke helt det samme tal. Hvad kan I sige om talrækken her?
- Elev B: Vi kan sige at venstresummen aftager, og højresummen den vokser.
- Læreren: Ja, og hvad med det tal de ender med her?
- Elev B: De minder lidt om hinanden.
- Læreren: Ja de kommer tættere og tættere på hinanden her. Ja så vi kan jo sige, at hvis vi kigger på denne her (*tabellen tilhørende opgave 6*), så kan vi jo sige vi har at venstresummen er større end højresummen. Så det er ligesom om de kommer herfra, hvis vi har en tallinje, venstresummerne er herfra, højresummen bevæger sig herovre fra, højresummen vokser og vokser, og de ender næsten på det samme tal. Man kan sige, at der er, måske, en grænseværdi her imellem. Vores venstresummer, og højresummer. Vi prøver 7'eren.

Læreren udfylder tabellen fra opgave 7 med elevernes hjælp.

- Læreren: Ja hvad kan I sige om de her tal, I får her?
- Elev C: Vi kan sige, at de begge er negative.
- Læreren: De er begge negative ja, kan I forklare, hvorfor de bliver negative. Hvorfor får vi et negativt tal for arealet her, det er jo ca. det her område (*læreren tegner en skitse på tavlen*).
- Elev A: Lad mig forklare det.
- Elev C: Det er cosinus.
- Læreren: Ja det er cosinus, men hvorfor får vi et negativt tal her, for vores areal?
- Elev D: Fordi det går nedunder, det er minus-tal.
- Læreren: Ja vi er jo under x-aksen her, dvs. de arealer vi for hernede, det beregner vi jo som vores funktionsværdi her, og så gange bredden, vores funktionsværdi vil være negativ.
- Elev A: Det er også fordi at vores areal er større når det er negativt, nedenunder, end når den er positiv.
- Læreren: Ja, alt det vi har under x-aksen her vil bidrage med en negativ værdi ikke, fordi det her nede så er større end det her oppe. Hvad kan vi sige om, øh, efterhånden som vi forøger inddelingen her, hvad sker der så?
- Elev E: Tallene kommer tættere på hinanden.
- Læreren: Ja de kommer tættere og tættere på hinanden, og hvis vi havde dem med flere decimaler, så kunne vi godt se, at der stadig var forskel.

- Elev E: Hvis man tog endnu flere delintervaller, ville de så på et tidspunkt ende på det samme, eller ville de bare komme tættere på hinanden?
- Læreren: Ja det er jo et interessant spørgsmål, men der sker jo det, at vi har det der begreb med grænseværdi igen. Altså hvis vi forøger det her til endnu større, eller endnu flere inddelinger.
- Elev F: Ja så grænseværdien er den samme, (…) den ene stiger, den anden falder.
- Læreren: Ja, og hvad så?
- Elev G: Så vokser forskellen mellem dem.
- Elev A: Nej det bliver jo bare det samme jo.
- Læreren: Ja vi kan sige, at hvis vi forøger antallet af delintervaller her, så vil den her værdi falde, og denne her vil vokse (*læreren peger på tabellen fra opgave 6*).
- Elev G: Så bliver forskellen også større.
- Læreren: Nej hvis I kigger på den her, og den her vil falde, så den kommer tættere og tættere på her, den her vil vokse, så man kan sige, at forskellen i mellem dem bliver mindre og mindre.
- Elev H: Jo den gør, fordi de kommer tættere på hinanden.
- Læreren: Det kommer vi til senere.
- Elev E: Så de kommer uendelig tæt på hinanden, men bliver aldrig det samme.
- Læreren: Ja lige præcis. De kommer tættere og tættere på den her værdi som vi kalder en?
- Elev A: Grænseværdi.
- Læreren: Grænseværdi, ja. Vi vil have en grænseværdi her. Det er ligesom i differentialregningen, hvor vi snakkede om grænseværdi. Vi har altså en værdi her, som de vil komme tættere og tættere på, hvis vi forøger antallet af delintervaller her. Det, der er vigtigt her, det er jo. Da vi snakkede om de der funktioner, vi havde i starten, der var der mange forskellige forslag til, hvordan man kunne beregne arealerne af dem, mest med trekanter. Der var blandt andet en der så sådan her ud (*læreren tegner en skitse af figur 2 fra opgave 1 på tavlen*), men det vi ser her, det er at hvis vi laver rektangler, og laver enten en venstre- eller en højresum. Vi kan lave en venstresum her, så ser den sådan her ud.
- Elev G: Nej, nej, nej.
- Læreren: Det er en venstresum. Hvis vi laver en venstresum af sådan nogle rektangler her, så kan vi se, at når vi forøger antallet af rektangler, så kommer vores venstre- og højresum tættere og tættere på hinanden, så vil vi have en grænseværdi, som de går imod. På den måde kan vi altså definere en måde til at måle arealet på.
- Der er forskel på de her to, 5'eren og 6'eren. Heroppe var det venstresummen som var størst, deroppe er det højresummen der er størst. Hvordan kan det være, at det lige er sådan? Jo jeg kan prøve lige at skitsere, hvis jeg nu skitserer venstresummen i de to tilfælde her, så ser den sådan her ud, det var en over x, og heroppe havde vi kvadratroden af x. Hvis vi nu laver tre intervaller her igen, og kigger på venstresummen. Hernede er venstresummen større end højresummen, heroppe er det lige omvendt?
- Elev B: Nu skal I høre ikke. Hør lige, i 5'eren ikke, så kan man se at grafen den går sådan opad, og så bliver den sådan højere ikke, den bliver højere og højere ikke. Og så i 6'eren så går den sådan nedad, så den bliver sådan 0, 0 og 0.
- Læreren: Hvis vi skal formulere det lidt mere præcist, gå opad og gå nedad, hvad kalder vi det?
- Elev B: Vokser og aftager.
- Læreren: Ok, så vi kan jo se her, at når vi har en aftagende funktion, så vil venstresummen være større end højresummen. For en voksende funktion vil det være lige omvendt, der vil højresummen være større end venstresummen. Det vigtige er jo, at ligegyldig, hvad der sker, når vi forøger antallet af delintervaller så vil de to værdier, venstresummen og højresummen, de vil

gå mod hinanden og have den samme grænseværdi. Den grænseværdi de går i mod, det er så arealet under vores kurve. Det der lige er vigtigt at vide, det er, at når vi har sådan en grænseværdi som højre- og venstresummen går imod, så siger vi at… at der er et areal under grafen, og så kan vi sige, at grafen eller funktionen er integrabel. Så kalder vi det en integrabel funktion. Det er jo meget nemt her, når vi har en voksende eller en aftagende funktion, så kan man tegne højre- og venstresummer og se at den ene er større end den anden. Det, der er vigtigt er, at alle de funktioner som vi skal beskæftige os med i gymnasiet, dem kan vi dele op i intervaller. Hvis vi har et polynomium for eksempel, der ser sådan her ud, eller en anden funktion, så kan vi altid dele den op på den her måde, så vi får et interval, hvor den er voksende, et interval, hvor den er aftagende og et interval, hvor den er voksende. Vi kan altid dele den ind i intervaller hvor den er enten voksende eller aftagende, og når vi har intervaller, hvor den er voksende eller aftagende, så er det nemt at lave de her venstre- eller højresummer. Så kan vi altid lave venstre- og højresummer, så kan vi se at de her to værdier går mod hinanden, og har samme grænseværdi.

Så skal vi have en definition. Det bestemte integral. Ja vi har en definition her, det bestemte integral, I kender godt integraltegnet, nu er der to tal på. Foreløbig vil vi definere det her på følgende måde, at det er grænseværdien for n gående mod uendelig.

- Elev A: Jeg kan ikke se, hvad der står.
- Læreren: Der står *lim*, grænseværdien.
- Elev A: $f(x_0) + f(x_1)$ plus hvad?
- Elev C: Så er der bare punktummer jo, det er en fortsættelse
- Læreren: Ja $f(x_0), f(x_1)$.
- Elev C: $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$.
- Læreren: Ja den sidste er $f(x_{n-1})$.
- Elev C: Det er bare en formel, hvor er du dum.
- Læreren: Hvis jeg lige skal illustrere det her. Nej lad os bare sige foreløbig, at det er definitionen vi har her.

Opsamling af opgave 8

Læreren tegner figur 1 fra opgavearket på tavlen.

- Læreren: Opgave 8 ser sådan her ud. Vi har stadig vores funktion, det er 1 over x, og så vil vi gerne prøve at beskrive arealet her mellem 2 og 5 under grafen og så x-aksen. Så først har vi lavet nogle summer her. Er det en højre- eller venstresum det der?
- Elev A: Det er en venstre.
- Læreren: Det er en venstre, ja. Godt, det vi så skal, det er at prøve at lave et rektangel, der har samme areal som de her tre, eller som den her venstresum. Så vi skal altså have et, prøve at lave et udglattet areal her, (*læreren tegner det udglattede rektangel på skitsen af figur 1)* eller et udglattet rektangel, og det skal have det samme areal som de her tre søjler. Hvad kan vi sige om bredden? Hvad bliver bredden?
- Elev B: Det er 3, og vi siger også 5 minus 2 så får vi 3, eller også kan man også aflæse det.
- Læreren: 5 minus 2, det er bare forskellen mellem de to der, så det er bredden, hvad med højden? Hvis vi skal beregne højden som et gennemsnit af tre tal.
- Elev C: Så siger vi 1 divideret med 2.
- Læreren: Hvorfor det?
- Elev C: Det er fordi det er højden af det første rektangel.

- Læreren: Hvordan ved du er 1 divideret med 2?
- Elev C: 1 divideret med x, det er vores funktion, og 2 det er vores x-værdi.
- Læreren: Ja, skal vi have højden, så kan vi aflæse den her, x-værdien det er 2, og hvis vi skal have y-værdien, så tager vi bare vores funktionsværdi af 2, altså vores $f(2)$. Det giver jo y-værdien heroppe, fordi den selvfølgelig ligger på grafen her, og vi fortsætter.
- Elev C: Det bliver 1 divideret med 3, og 1 divideret med 4, og så lægger man dem sammen og dividerer med 3, fordi der er 3 rektangler, og det giver 0,36.
- Læreren: Godt, det var højden og det var bredden, og arealet, hvad har I så fået det til?
- Elev C: Det giver 1,08.
- Læreren: Hvordan finder I det?
- Elev C: Man siger 0,36 gange 3.
- Læreren: Sådan. Nu prøver vi at gøre det lidt mere generelt. Fuldstændig det samme.
- Elev D: Må jeg ikke lige spørge om noget? Du sagde, at man først starter ved 2, når man skal finde højden. Skal man ikke starte ved 3, fordi det er en venstresum?
- Læreren: Vi starter med 2, fordi det er en venstresum. Hvis det havde været en højresum, så ville den have gået her, og så var det 3 vi skulle bruge. Når det er venstresummen, er det de her tre værdier vi bruger, og når det er højresummen, er det de her tre. Vi prøver at gå over til det lidt mere generelle tilfælde her.

Læreren tegner en skitse af figur 3 på tavlen.

- Læreren: Funktionen ser sådan her ud. Hvad er det vi har for en funktion her, det er bare en vilkårlig funktion. Den er så inddelt i et antal intervaller her, hvor vi igen laver vores venstresum, x_0, x_1, x_n er den sidste og x_{n-1} er den næstsidste. Højden af det første og det sidste rektangel, det vil altså sige denne her værdi her, højden af det første, hvad bliver det?
- Elev E: Hvilken funktion var det?
- Læreren: Det er bare en generel funktion vi har, vi ved ikke noget om den, den hedder bare f.
- Elev E: Så er det y-værdien.
- Elev F: $f(x_0)$.
- Læreren: $f(x_0)$ ja. Vi har jo vores x-værdi her, x_0, og vi skal op og ramme grafen, så bliver det $f(x_0)$, og højden af det sidste rektangel?
- Elev G: $f(x_n)$. *En elev hvisker "minus 1".* $f(x_{n-1})$.
- Læreren: Minus 1 ja. $f(x_n)$ er den sidste, men vi kan godt se, at den ikke rammer, det er den her, der rammer grafen, når det er venstresummen. Bredden, hvad bliver bredden, hvis vi nu skal lave det udglattede areal her? *Læreren tegner det udglattede rektangel på skitsen af figur 3.* Som altså er det udglattede rektangel her. Vi laver en, det er måske lidt for højt det der. Vi laver et rektangel, som har det samme areal, som vores venstresum her. Bredden af den, hvad bliver den?
- Elev H: x_{n-1} minus x_0.

Læreren skriver elevens svar på tavlen.

- Læreren: Er det rigtigt?
- Elev A: Nå man har x_n, så har man også x_0.
- Læreren: Ja bredden af det her, vores to værdier her, hvor vi starter i x_0, og så til x_n. Så det skal være x_n minus x_0 her. Ligesom vi havde det herovre ikke, der havde vi 5 og 2 som vores endepunkter, så det er de to værdier vi skal trække fra hinanden. Så det bliver det her. Højden,

højden her, af det udglattede rektangel, hvordan kan vi finde den, igen som et gennemsnit af nogen værdier?

- Elev I: Er det ikke fra x_0 til $f(x_{n-1})$?
- Læreren: Jeg skal lige have den en gang til.
- Elev I: Fra x_0 til $f(x_{n-1})$, og så plus det sammen.
- Læreren: x_0 siger du?
- Elev I: Ja.
- Læreren: Nej, er det rigtigt?
- Elev I: Altså $f(x_0)$.
- Læreren: Ok, det er jo noget andet.
- Elev I: Og så til $f(x_{n-1})$.
- Læreren: Ja, og hvad skal jeg gøre ved dem?
- Elev I: Altså det hele lægges sammen.
- Læreren: Ja så her skal der også stå, (*læreren skriver flere led i summen*). De alle sammen skal lægges sammen, det skriver vi bare sådan her. Ja, og hvad skal jeg gøre med dem, vi skal have en gennemsnitshøjde.
- Elev A: Vi er jo ikke færdige.
- Elev B: Dividere med 3 ikke?
- Elev A: Dividere med n.
- Læreren: Ja, så får vi en slags gennemsnitshøjde af rektanglerne her. Godt, så skal vi have et areal.
- Elev E: Bredden gange højden.
- Læreren: Ja bredden den ser sådan her ud, og højden ser sådan her ud. Det vil altså sige at vi ved hjælp af denne her formel, kan skrive en slags gennemsnitshøjde på de her rektangler. Hvis vi nu inddeler det her (*læreren peger på udtrykket for gennemsnitshøjden*) i mere og mere fine, kortere intervaller, som vi jo faktisk gør heroppe (*læreren peger på definitionen af det bestemte integral, det vil sige udtrykket for grænseværdien af en venstresum*). Her har vi jo grænseværdien, hvor vi inddeler det her i finere og finere intervaller. Hvis vi nu tager det der står her, og dividerer med n. Det vi har stående her er faktisk en slags gennemsnitsværdi, det er jo det samme, som vi har gjort der, og det vi gjorde herovre også. Det er en slags gennemsnitsværdi, og når vi så lader n gå mod uendelig, det vil betyde, at vi inddeler i flere og flere intervaller, så kommer det bare til at ligne den her oppe mere og mere, så det er en form for gennemsnitsværdi af f her. Det er det samme som vi har stående heroppe, så hvis jeg rykker den derind, og tager den derover, så kan jeg skrive det her som, 1 divideret med $b - a$, integralet a til b af $f(x)\,dx$. Kan I se det? *n* har jeg divideret ind her, denne her har jeg divideret over på den anden side af lighedstegnet. Det vil sige, det jeg har stående her, det kan jeg opfatte som en slags gennemsnitsværdi af funktionen her i intervallet fra a til b. Det er en måde man kan opfatte det her bestemte integral på, som vi jo bare har defineret som det deroppe, vi kan opfatte det som en slags gennemsnit af vores funktion, hvis vi dividerer med $b - a$.
- Elev D: Men bruger du det til at beregne arealet med?
- Læreren: Jo, men det kommer senere. Senere skal vi vise, at vi kan bruge det her til at beregne arealer med. Men altså her, det der står her, det er en form for gennemsnit af funktionen, og det betyder jo ikke noget, hvis f her har negative værdier. Det der står her, vil stadig være et gennemsnit af funktionen her.

Opsamling af opgave 9 og 10

Elev går til tavlen for at tegne venstre- og højresummen.

- Læreren: Ja så det, som du har skraveret der, det er forskellen på højre og venstresummen.

Eleven udfylder tabellen med de beregnede differenser. En ny elev kommer til tavlen for at skitsere differensen mellem højresummen og venstresummen for funktionen i opgave 10, samt udfylde den tilhørende tabel med de beregnede differenser.

- Læreren: Det er bare fra 2 til 5, kun det interval. Godt, hvordan kan vi opsummere det her? Hvad kan vi se ud af det her? Hvad sker der, når man forøger antallet af delintervaller her?
- Elev A: Differensen er mindre.
- Læreren: Differensen bliver mindre og mindre. Vi kan endda være mere præcise.
- Elev B: Differensen går imod 0.
- Læreren: Ja, differensen går imod 0. Det kan vi se, hvis vi forøger det her, så vil den komme tættere og tættere på 0. Så vi kan sige, at den her differens vil have en grænseværdi der går imod 0, eller den har grænseværdien 0. Hvad er positivt, og hvad er negativt af de der to forskelle mellem venstre og højre?
- Elev C: Altså, hvorfor den er negativ?
- Læreren: Det er selvfølgelig de samme tal, bare negativt eller positivt ikke? Man trækker to tal fra hinanden, det er de samme to tal man trækker fra hinanden. Kan vi sige et eller andet generelt om, hvornår den bliver positiv og negativ for graferne her?
- Elev D: Vi trækker det mindre for det større tal.
- Læreren: Ja, når vi trækker det mindre tal fra et større så får vi et positivt tal, men hvornår vil det højre minus, højresummen minus venstresummen give et positivt tal? *Stilhed et par sekunder.* Hvordan kan vi se det på funktionen, at det er det, der vil give et positivt tal?
- Elev E: På den der graf, den er voksende, og den graf er aftagende.
- Læreren: Ja, så vi kan sige her, at når vi har en voksende funktion, så vil, øh.
- Elev E: Højre til venstre være positiv.
- Læreren: Så vil højresummen minus venstresummen være positiv. Funktionen vokser, så vil højresummen være større end venstresummen, altid, ikke? Og selvfølgelig omvendt for en aftagende funktion, ved en aftagende funktion, så er venstresummen større end højresummen, og derfor er det det her, der bliver positivt og det andet, der bliver negativt. Godt, men vi kan sige, at denne her forskel mellem venstre og højresummen den går imod 0, så venstresummen og højresummen kommer altså tættere og tættere på hinanden, og når den forskel her, går imod 0, det vil sige, at vi har et areal under funktionen, og så kalder vi sådan en funktion integrabel, så integrabel det vil altså sige, at det er højre og venstresummen der går imod hinanden, så kan vi sige, at der er et areal her. Som jeg sagde før, de funktioner, eller det vi kan vise her det er, at hvis det er en monoton funktion, det vil sige hvis den vokser eller aftager, så er den integrabel. Så er der et areal under, og alle de funktioner vi kommer til at kigge på i gymnasiet vil være integrable, vi skal op i lidt specielle funktioner, for at finde nogle, der ikke er integrable.

Opsamling af opgave 11

- Læreren: Ja, det er delintervallet, og det giver hvad?
- Elev A: 0,20.
- Læreren: Eller en femtedel, og højresummen?
- Elev A: Skal jeg sige summen nu?
- Læreren: Jeg vil gerne have nogle udregninger også.
- Elev A: Vi havde bredden, som var 0,20, så regner man den første højde ud til 1,44.
- Læreren: Ja, hvordan har du regnet den ud?
- Elev A: Jeg sagde 1,20 opløftet i 2, som giver 1,44, og det gjorde sig ved de næste også, 1,4 opløftet i 2, som giver 1,96, og så videre. 1,60 opløftet i 2, 1,80 opløftet i 2 og 2 opløftet i 2. Det hele fik jeg til 2,80.
- Læreren: Ja, hvad skal du gange alle dem her med?
- Elev A: Dem skal jeg gange med bredden, som er 0,20.
- Læreren: Og det fik du til?
- Elev A: 2,64.
- Læreren: Er alle med på det? Vi har intervallet fra 1 til 2, og bredden af de her delintervaller er 0,2, det vil sige, at den x-værdi vi har herovre, det er 1,2. Når vi så skal finde højden af det første rektangel, så kan vi se, at den skær grafen heroppe, så vi kan finde højden af det ved at sige funktionsværdien af denne her. Funktionen er jo x i anden, så vi kan altså finde højden af det her rektangel, ved at sige 1,2 i anden. Vi får denne udregning, og vores venstresum?
- Elev B: Du starter bare med at sige 1 i anden gange 0,2, og så bare hele vejen til 1,8 i anden
- Elev C: Plus, plus.
- Læreren: Ja, jeg sætter 0,2 uden for parentes ligesom før, og det næste bliver så?
- Elev B: Hele vejen til 1,8.
- Læreren: Så har vi et udtryk for venstre- og højresummen, og så har vi de her to værdier, og det giver?
- Elev B: 2,04.
- Læreren: Så vi kan sige her, bare ved at regne tallene ud, kan vi sige at vores højresum minus vores venstresum er?
- Elev B: 0,60.
- Læreren: Godt kunne vi regne det her ud på en smartere måde, ved at kigge på udtrykkene?
- Elev D: Vi kan se, at de der tal går ud med hinanden.
- Læreren: Ja, vores højresum minus vores venstresum, så skal vi altså tage alle de her led og trække de led hernede fra. Nu har jeg godt nok sat det her, bredden uden for en parentes, men det kunne også stå inde på alle leddene. Hvis vi nu trækker fra, hvad bliver der så tilbage her?
- Elev E: 1,2, 1 opløftet i 2, og så 2. 1 opløftet i 2, og 2 opløftet i 2, det er det vi har tilbage.
- Læreren: 1 opløftet i 2, og 2 opløftet i 2 ja.
- Elev E: Og så skal vi sætte det der 0,2 foran.
- Læreren: Ja, hvad med fortegnet her?
- Elev E: Det er minus.
- Læreren: Hvilken en skal være minus?
- Elev E: 1 opløftet i 2 minus 2 opløftet i 2.
- Elev F: Det er 1, der skal være minus.
- Elev E: Det var det jeg mente, jeg er forvirret.

- Læreren: Godt lad os lige prøve at se, vi tager altså denne her højresum og trækker venstresummen fra, det vil sige der kommer til at stå minus foran alle de her led, og så kan vi se, at 1,2 går ud med det her, 1,4 står der begge steder, 1,6 bliver trukket fra her, og den bliver trukket fra der. Det eneste, der så bliver tilbage er 2 i anden minus 1 i anden, og så gange med bredden af vores intervaller her.
- Elev A: Så sig 0,2 gange 3.

Læreren springer delopgave 11.4 over, men forsøger at diskutere delopgave 11.5 med udgangspunkt i det forrige.

- Læreren: Det giver 0,2 gange 3, lig 0,6. Det passer også med det vi havde før. Hvad vil der nu ske, hvis vi lader n gå mod uendelig, det vil sige, at vi laver flere og flere delintervaller, vi gør delintervallerne mindre. Hvad vil der så ske med højresummen minus venstresummen hernede?
- Elev G: Den er stadig det samme.
- Elev H: Den vil blive mindre.
- Læreren: Hvorfor? Hvordan kan vi se det ud af den beregning vi har lavet her.
- Elev C: Vi kan se, at venstresummen bliver større, og højresummen bliver mindre.
- Læreren: Nu tænker jeg specielt på forskellen her, hvad vil der ske med det, når vi laver flere delintervaller?
- Elev C: Den der 2,2 opløftet i anden, den bliver…
- Læreren: Der er ikke noget 2,2 opløftet i anden. De her to værdier (*2 i anden og 1 i anden*), sker der noget med dem, når vi ændrer antallet af delintervaller?
- Elev E: De bliver mindre.
- Læreren: Den første og den sidste værdi vi har.
- Elev E: Der kommer flere delintervaller.
- Elev F: Den første, altså 0,2, når den bliver mindre, så bliver resultatet også mindre jo. 2 i anden og 1 i anden bliver altid det samme, det er kun den der 0,2, der bliver mindre.
- Læreren: Hvorfor bliver den her mindre (*bredden*)?
- Elev F: Den går mod 0 jo.
- Læreren: Ja, det her er jo bredden af vores delintervaller. Når vi forøger antallet af intervaller her, så bliver bredden af dem mindre. Så jo flere delintervaller vi kommer ind, jo mindre bliver bredden af delintervallerne, det vil sige, at den her størrelse vil blive mindre og mindre. De her to bliver stadig ved med at være det samme, den første og sidste funktionsværdi. Så denne her bliver den samme, og den her bliver mindre og mindre, det vil sige at forskellen mellem venstre- og højresummen bliver mindre og mindre, når n bliver større. Så det vi har vist, det er, at når vi kigger på det her, så har vi faktisk vist at forskellen mellem venstre- og højresummen går i mod 0, når n går i mod uendelig. Det vi har vist her, det er, at denne her funktion i det her interval er integrabel, fordi forskellen mellem højre- og venstresummen går i mod 0, når n går i mod uendelig, og det er vores definition af, at vores funktion er integrabel, så det vi har vist her, er at denne her funktion i det her interval er integrabel, og så starter vi næste time med at kigge på, at en funktion, som er voksende eller aftagende, vil være integrabel.

Opsamling af opgave 11: Vis at enhver monoton funktion er integrabel.

Læreren har forinden lektionens begyndelse, opskrevet, hvad der menes med det bestemte integral af en funktion, hvordan det vises, at en funktion er integrabel, samt sætningen, at enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel. Endvidere har læreren lavet en skitse af en vilkårlig voksende funktion.

- Læreren: Det vi viste sidst, var at når vi kigge på den her funktion, ville venstre- og højresummerne gå i mod hinanden, og derfor var den integrabel. Nu vil vi gerne vise det helt generelt: Når vi har en funktion, som er voksende eller aftagende, så er den integrabel. Jeg vil lige minde jer om, at det, at den er integrabel betyder, at forskellen mellem venstre- og højresummen går i mod 0, når n går i mod uendelig, hvor n er antallet af delintervaller, og det skal vi vise for denne her. Hvis vi for denne her funktion, som er voksende, opskriver højresummen minus venstresummen. Vi kan se her, at højresummen, det vil sige, at for hvert delinterval går hen til den højre grænse, for at finde højden af vores rektangler her, så det vil sige, at vores højresum her, vil blive f af, og vi starter ved x_1 fordi det er en højresum, plus $f(x_2)$, plus, op til den sidste, som er $f(x_n)$.
- Elev A: Hvor mange *x'er* der?
- Læreren: Der er n delintervaller.
- Elev B: Det er da x_{n-1}, som er den sidste.
- Læreren: Det er rigtigt, der havde vi x_{n-1}, fordi det (*hvad der menes med det bestemte integral af en funktion*), var venstresummen, det jeg har skrevet op her er højresummen. Jeg skal måske lige sige, at vi stadig har intervaller her fra a til b, og vi opdeler det i n lige store delintervaller. Bredden af vores delintervaller skal vi også lige have her, og ligesom før er det b minus a divideret med n. Det er vores højresum. Venstresummen, så kommer minus højresummen, vi skal igen have bredden af delintervallerne, og når det så er venstresummen, så starter vi med venstre side af vores delintervaller, *x*-værdierne som er her, det er så $f(x_0)$, plus $f(x_1)$, plus, op til $f(x_{n-1})$. Det er forskellen mellem højre- og venstresummen. Vi kan for det første sætte de her $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ helt uden for en parentes, hvad kan vi så gøre her?
- Elev C: Du kan sige parentes $f(x_n)$ minus $f(x_{n-1})$.
- Læreren: Ikke $f(x_1)$.
- Elev C: Altså den sidste, nej undskyld den første, det er $f(x_0)$, $f(x_n)$ minus $f(x_0)$.
- Elev A: De andre går ud med hinanden.
- Læreren: Lad os lige prøve at se her, alt det her nede (*venstresummen*) skal trækkes fra, men ligesom i det eksempel I kiggede på, er der mange ting der går ud. Heroppe står der for eksempel $f(x_1)$, det står også hernede, hvor det bliver trukket fra, så de to går ud med hinanden. Så står der $f(x_2)$ her, den går ud med det næste led her, som jeg måske også lige burde have skrevet.
- Elev D: Hvordan går $f(x_{n-1})$ ud?
- Læreren: Lad mig lige forlænge dem her, for at gøre det lidt klarere, jeg skriver lige lidt flere.
- Elev B: Du siger, at x_2 og x_3 går ud med hinanden dernede jo. Er det ikke derfor?
- Læreren: Jeg skriver lige lidt flere, sådan. Nu har jeg skrevet lidt flere af de her på, for at gøre det lidt klarere. Vi starter med højresummen, x_1, x_2, x_3 og op til x_{n-1} og x_n. Det er de to sidste (*læreren peger på skitsen af grafen*). Venstresummen starter så i $f(x_0)$, og slutter så på x_{n-1}. Den der kommer lige før, hedder så x_{n-2}. Godt, så kan vi se, at når vi trække dem hernede fra, så vil $f(x_1)$ gå ud med $f(x_1)$, $f(x_2)$ gå ud med $f(x_2)$, og så videre, $f(x_{n-1})$ går ud med den herovre, og denne her går ud med den her. Det eneste der bliver tilbage er $f(x_n)$ minus $f(x_0)$ hernede. Så det her er vores forskel mellem højre- og venstresummen. Denne her (*differensen*),

hvad vil der ske, hvis n går mod uendelig? De her to vil ikke ændre sig, det vil bare være den første og sidste værdi, funktionsværdi.

- Elev D: Du skal bare have den der b gange a divideret med n over på den anden side.
- Læreren: Det er jo lige meget, hvor den står henne.
- Elev D: Bliver det ikke bare $f(x_n)$ minus $f(x_0)$, og så bliver det lig med b gange a divideret med n?
- Læreren: Nej den skal ganges med denne her.
- Elev D: Så det bliver ikke lig med det?
- Læreren: Nej det skal ganges med den her, så har vi forskellen mellem venstre- og højresum. Denne her størrelse, når n går mod uendelig så vil den her mod 0, det vil sige det hele vil gå i mod 0, så denne her går i mod 0, for n gående mod uendelig. Så har vi vist det her oppe, at når n går mod uendelig, så går forskellen på højre- og venstresummen i mod 0, og så har vi vist, at hvis funktionen, som i det her tilfælde er voksende, så vil funktionen være integrabel. Så vi har vist, at en voksende, i det her tilfælde en voksende funktion, er integrabel. Men kan gøre fuldstændig det samme, hvis det er en aftagende funktion. Så det har vi bevist her.

Læreren tegner den tilhørende illustration på tavlen.

- Læreren: Ok, lad os lige prøve, at illustrere herovre, hvad det er, der sker. Lad os prøve at starte med at tegne højresummerne her, de ser sådan her ud. Sådan det er vores højresummer. Så prøver vi at tegne venstresummerne. I det her tilfælde, det bliver så det her stykke, det her stykke. Så her har vi altså højresummer og her venstresummerne, når vi trækker dem fra hinanden, hvad bliver der så tilbage? Det bliver det her stykke, så hvis vi prøver at skravere dem, der bliver tilbage, når vi trækker venstresummerne fra højresummerne, så bliver det det her. Det bliver denne her, og denne her. Godt, det, der er skraveret her, er forskellen mellem venstre- og højresummerne. Vi kunne også tegne dem her ude til siden. Hvis vi nu tegner dem herude, så kan I se, at de kommer til at passe lige præcis henover hinanden. Sådan. Så det areal vi har her er forskellen mellem venstre- og højresummerne. Hvor højt er det her areal her? En højde her, det er den værdi minus den værdi. Den værdi heroppe den hedder $f(x_n)$ og denne her hedder $f(x_0)$. I kan se højden bliver $f(x_n)$ minus $f(x_0)$. Vores bredde hernede, det er jo intervalbredden, det er jo bare b minus a divideret med n. Så her kan man se, hvad der sker. Hvis vi inddeler det her i flere intervaller, så får vi en finere inddeling her. De her forskelle på højre- og venstresummerne de bliver mindre og mindre, fordi de her bliver smallere. Så højre- og venstresummen kan vi altså få til at blive mindre og mindre ved at gøre antallet af delintervaller større.
- Elev B: Jeg forstår ikke, hvordan venstresummen kan blive mindre. Højresummen kan jeg godt forstå, men venstresummen ligger under grafen, det burde da blive større.
- Læreren: Ja det gør den også, men det jeg snakker om, er forskellen mellem dem. Det er forskellen mellem de to, der bliver mindre og mindre, og her kan vi se, at det passer med at stable de her kasser oven på hinanden, og hvis vi øger antallet af delintervaller, så bliver denne her bare smallere og smallere, og så vil det sige at arealet bliver minde. Vi kan få det til at blive vilkårligt lille, det her areal.

Læreren fortsætter med introduktionen til opgave 12.

- Læreren: Vi skal lige have defineret en funktion her. Vi har jo allerede en definition heroppe på det bestemte integral, og nu skal vi til at definere en A her. Vi definerede det her integral som en grænseværdi af en venstresum, når n går i mod uendelig. Hvis vi kigger på sådan et interval her, så kan vi kigge på en del af det her interval, vi kan bare gå op til en eller anden værdi her, som vi kalder x, og det definerer vi så som en A-funktion her, det er altså integralet fra a til x af vores funktion herovre. Se nu har vi et x her, som er vores uafhængige variabel, så derfor er vi nødt til, for ikke at blive forvirrede, at integrere denne her over en anden størrelse. Så vi definerer altså denne her funktion som integralet fra a til x af $f(t)\,dt$, og vi er altså nødt til at skifte variabel her, fordi x er vores uafhængige her. Det er kun op til en vis x-værdi vi regner denne her ud. Det der A kan vi faktisk forstå som et areal under grafen. Så A'et her, det står faktisk, når vi har sådan en pæn graf her som er positiv, så står A'et for arealet under grafen op til en vis x −værdi. Så nu skal vi til at arbejde med den her funktion.

Opsamling på opgave 12

Eleverne har forinden på tavlen skrevet deres funktion f(t) samt det differentierede udtryk for A(x).

- Læreren: I har alle sammen forskellige funktioner. Kan I se noget fællestræk ved det her?
- Elev A: A mærke x er differentiabel til $f(x)$.
- Læreren: En gang til.
- Elev A: For eksempel den første, der er A mærke x differentiabel til f af t.
- Læreren: Ja A mærke af x er det samme som f af x. Vi får vores arealfunktion her, og hvis vi differentierer den får vi vores funktion deroppe. Det vil sige, at i hvert fald for de funktioner vi har undersøgt her der gælder det at det A her, når vi differentierer det så får vi f, så hvis vi prøver at skrive det, får vi: Hvis f er en pæn funktion defineret på intervallet fra a til b, så er $A(x)$ en stamfunktion til f. Det vil sige, at A er differentiabel. Jeg kan godt gentage det, kan I se det? Altså vores små forsøg her, så det ud til, altså de her funktioner som blev undersøgt, at hvis vi skulle beskrive arealet under funktioner, som kom vi frem til, at vi får en eller anden funktion her for arealet, når vi differentierer den, så får vi den funktion vi startede med og det kan vi prøve at formulere her. Lad f være en pæn funktion defineret på intervallet a til b, så er $A(x)$ en stamfunktion til f, det vil sige, at A er differentiabel med differentialkvotienten f. Altså A er en stamfunktion til $f(x)$ her. Det skal vi nu prøve at bevise, for alle funktioner.
- Elev A: Du elsker at beviser.
- Læreren: Det er jo en vigtig del af matematik A, så lad os prøve at gøre det, I får opgave 13 nu.

Opsamling på opgave 13

Læreren valgte at tage en kort opsamling efter delopgave 13.2.

- Læreren: Lad os lige prøve at gennemgå det heroppe på tavlen. Den er lidt sværere denne her. Vi skal vise, at det heroppe gælder, og der skal vi jo vende tilbage til vores definitioner af de her ting. A har vi defineret heroppe på den her måde, som det bestemte integral fra a til x, og det bestemte integral, har vi defineret på denne her måde, som en grænseværdi af venstresummer. Så det, der står her, lad os prøve at skrive dem op. $A(x_0 + h)$, ifølge vores definition herovre, er det det samme som, integralet fra a til $x_0 + h$ af $f(t)\,dt$. $A(x_0)$ er så integralet fra a til x_0 af $f(t)\,dt$. De her bestemte integraler, det definerede vi som grænseværdien af venstresummerne. Det vil sige, at det, der står her, er altså grænseværdien når vi tager venstresummerne fra a til $x_0 + h$. Vi har lavet den her fine inddeling (*læreren tegner en skitse*), og så tager vi venstresummerne. Så heroppe har vi altså grænseværdien af venstresummerne i hele intervallet fra a til $x_0 + h$, hernede har vi $A(x_0)$, det bliver så grænseværdien af venstresummerne, der går fra a til x_0, det vil sige her fra a til x_0. Hvad får vi, når vi trækker de to fra hinanden? Den øverste det er grænseværdien af venstresummerne i det her interval, og den nederste er grænseværdien af venstresummerne i det her interval. Hvad vil vi få, når vi trækker de to fra hinanden?

- Elev A: x_0?
- Elev B: a?
- Elev C: h?
- Læreren: Hvad får vi så tilbage?
- Elev D: Er det ikke h?
- Elev A: Kan du ikke lige forklare det igen?
- Læreren: Det er venstresummerne. Det øverste her, det er så venstresummerne i hele det her interval.
- Elev A: Nårh, så får vi bare højresummerne tilbage jo.
- Læreren: Vi laver alle venstresummerne her, og tager grænseværdien når n går mod uendelig.
- Elev B: Får vi så a tilbage, eller hvad?
- Læreren: Vi tager det første integral, det viser alle de her venstresummer. Det andet integral hernede som er $A(x_0)$, det er så venstresummerne i området fra a til x_0, så det er dem her. Så når vi tager det første og trækker det andet fra, hvad får vi så?
- Elev C: Så får du den der formel der…
- Læreren: Hvorfor?
- Elev C: Fordi du tager den der minus den der.
- Læreren: Ja, hvad bliver der så tilbage? Det er ret upræcist formuleret.
- Elev C: Du tager den side, som er markeret, minusser med det som du sagde lige før, så har du x_0 til $x_0 + h$ tilbage, du har det område tilbage.
- Læreren: Ja vi får de her venstresummer, der går fra x_0 til $x_0 + h$. Det vil sige, at vi kan skrive det sådan her. Først tager vi venstresummer, der er her, og så tager vi venstresummer, der er her, grænseværdierne af dem og trækker fra. Det, der så bliver tilbage, er det område her. Grænseværdien af venstresummerne i det her område, og det kan vi skrive på den måde deroppe. Er I med?
- Elev A: Yes.
- Læreren: Godt, prøv at gå videre til den næste (*delopgave 13.3*).

Eleverne arbejder nu videre med opgave 13, hvorefter læreren opsamler.

- Læreren: Ok, lad os prøve at kigge på det her. Det er altid en fordel, lige at lave en lille tegning af det. Her har vi x_0 og $x_0 + h$, og så har vi en funktion. Det vi forestiller os, det er, at vi gør det her, h er jo det stykke, som er imellem de to værdier her. Nu forestiller vi os, at h er en meget lille størrelse, vi gør h meget lille. Det vi kan gøre, det er, at vi kan gøre h så lille, at funktionen her er enten voksende eller aftagende. Vi kan altid inddele vores funktion i intervaller, hvor funktionen så enten er voksende eller aftagende. Lad os sige den er voksende her, det gør det nemmest. Godt, hvilken værdi kan jeg aflæse herude?
- Elev A: $f(x_0)$, og den anden, det er $f(x_0 + h)$.
- Elev B: Vi får ikke lov at sige noget.
- Læreren: Ja. Sådan, hvis vi nu kigger på den størrelse, der hedder $f(x_0) \cdot h$, hvad vil det være, hvis vi kigger på vores tegning her, hvordan kan vi så illustrere det?
- Elev A: Altså, det er $f(x_0) \cdot x_0$, er det ikke, på en eller anden måde.

- Læreren: Nej det er $f(x_0) \cdot h$.
- Elev A: Så er det afstanden mellem x_0 og $x_0 + h$.
- Læreren: Ja h er det her stykke, gange $f(x_0)$, hvordan kan jeg så illustrere det her?
- Elev A: $f(x_0)$ lig med $A(x)$.
- Læreren: h er det her stykke, $f(x_0)$ er det her stykke, hvad får jeg så ud af det?
- Elev C: Man kan se $f(x_0)$ som en slags højde af et rektangel.
- Læreren: Ja vi får et rektangel her. Det, der står deroppe, det er arealet af det her, og hvis vi kigger på den anden her.
- Elev D: Hvordan kan du bevise det?
- Læreren: Jeg kan tegne et rektangel her, længden af rektanglet er h, højden af rektanglet er $f(x_0)$, så arealet af rektanglet det bliver $f(x_0) \cdot h$.
- Elev A: Nårh på den måde.
- Læreren: Jeg gør det samme her, der har vi $f(x_0 + h)$ det har vi heroppe, så får jeg det store areal her ikke? Hvis jeg kigger på det store areal, bredden er h, højden kan jeg aflæse herude, $f(x_0 + h)$.
- Elev C: Jamen er det ene ikke højresummen, og det andet venstre?
- Læreren: Jo det er det faktisk, men nu er det ikke så meget en sum, for der er kun et rektangel, men det er rigtigt nok, at den ene her faktisk er en venstresum og den anden en højresum, bortset fra der kun er et rektangel. Godt, det vi skulle vise, det er integralet her fra x_0 til $x_0 + h$ af $f(t)\ dt$ ligger i mellem de to størrelser. Ja, hvad betyder det her (*integralet*)?
- Elev D: Hvis du dividerer de to med hinanden, så har du det.
- Læreren: Nej, hvordan har vi defineret sådan et bestemt integral?
- Elev A: Det er det deroppe, er det ikke?
- Læreren: Nej ikke endnu. Hvordan definerer vi det bestemte integral? Det skrev vi op herovre, en grænseværdi af venstresummer. Så det her er altså grænseværdien af venstresummerne i det her område her. Hvis vi tegner venstresummerne, ser det sådan her ud, og så skal vi lave en grænseværdi af det, det vil sige, at vi skal lade n, antallet af intervaller her, gå mod uendelig. Kan vi forklare, at den ligger mellem de to værdier?
- Elev C: Er det ikke det areal vi gerne vil bestemme?
- Læreren: Jo man kan se, at ved det første heroppe får vi det lille areal, og det andet får vi det store, og ved denne her, får vi noget der mere ligner arealet under kurven her. Så den der vil ligge mellem de der to værdier. I det her tilfælde vil den være større end den og mindre end den. Hvis funktionen er aftagende, så er det omvendt. Godt, nu lader vi h gå i mod 0, det vil sige, at vi lader denne her komme tættere og tættere på den herovre, og denne her vil så gå i mod $f(x_0) \cdot h$. Jeg lader denne her gå vilkårlig tæt på heroppe, så vil højden af det her ene rektangel, der er tilbage, det vil være $f(x_0)$.
- Elev C: Men hvis du lader h gå mod x_0, så har vi jo ikke noget h tilbage?
- Læreren: Husk på hvad gå i mod betyder. Det betyder at komme tættere og tættere på, uden at blive 0 ikke, så der vil stadigvæk være et meget lille h, som vi kan gøre meget lille, men det vil aldrig blive 0. Det er rigtig nok, at hvis det går hen og bliver 0 er der ikke noget areal tilbage. Men hvis vi lader h gå i mod 0, så rykker den der tættere og tættere på, og til sidst kan vi se, at arealet her, det vil så være $f(x_0)$, som er højden af den, ganget med bredden, som er h. Så den går i mod det her. Godt, så var vi tilbage til vores differenskvotient. Differenskvotienten så sådan der ud, og vi fandt ud af, at tælleren kunne vi skrive på denne her måde, og hvis vi lader h gå i mod 0. Vi kan også sige, at her har vi en differenskvotient, eller en sekanthældning, når vi skal finde differentialkvotienten så lader vi h gå i mod 0 her, så vi skal lade, vi skal lade det her gå i

mod 0, eller lade h gå i mod 0. Det kan vi også skrive på den her måde, det vil sige vi skal lade det her gå i mod 0, og vi fandt ud af, at det heroppe går i mod $f(x_0 + h)$ og så dividere med h fordi der står h hernede. Hvad bliver det her til?

- Elev A: $f(x_0)$.
- Elev E: h'erne går ud med hinanden.
- Læreren: Ja så får vi $f(x_0)$ tilbage, og hvad er det vi finder ud af her, når vi har differenskvotienten eller sekanthældningen, og så lader h gå i mod 0?
- Elev A: At den er differentiabel til.
- Læreren: Det er differentialkvotienten ja. Så det vi har fundet ud af her, det er, at differentialkvotienten af A er $f(x_0)$, det vil sige, at A er en stamfunktion til f.

Læreren beder eleverne gå i gang med opgave med opgave 14.

Opsamling af opgave 14

- Læreren: Jeg kan høre, at det er tid til at gå lidt videre. I den første skal vi sige noget om det her udtryk. Der står, at vi skal differentiere udtrykket, så nu gør jeg sådan her, og differentierer. Godt, hvad er det første vi gør her?
- Elev A: Du siger F mærke, store F, det giver lille f.
- Læreren: Ja, men inden vi gør det, vil jeg gerne lige skrive vores mellemregning her. Hvordan kan det være, at jeg kan differentiere hver for sig her?
- Elev B: Du skal bare sige $F'(x)$ minus $A'(x)$. Det er en af vores differentiationsregneregler.
- Elev A: Så siger du at $F'(x)$ er lig med lille $f(x)$, og A mærke er også lille $f(x)$, og vores $f(x)$ minus $f(x)$ er lig med 0.
- Elev C: Så hvad vil det sige?
- Elev B: En konstant.
- Læreren: Hvad vil det sige?
- Elev D: At $A(x)$ og $F(x)$ differentieret er en konstant. Vi ved, de er konstante. $F(x)$ og $A(x)$ er konstanter.
- Læreren: Så du siger at den er konstant og den er konstant? (*Læreren peger på $F(x)$ og A(x)*). Du siger $F(x)$ OG $A(x)$ er konstante.
- Elev D: Det er konstanter, og differentieret giver det 0.
- Elev E: $F(x)$ minus $A(x)$ er lig med k.
- Elev D: Det var det jeg mente.
- Læreren: Det var ikke det du sagde. Du skal være mere præcis. Du sagde, $F(x)$ og $A(x)$ er konstante, så jeg forstod det som, at det er konstant og det er en konstant. Det kan godt være du mente det rigtige, men man skal bare være lidt mere præcis i matematik. Det her kommer vi frem til ikke, godt. Næste spørgsmål, der skulle vi indsætte…
- Elev B: Der skal vi indsætte a i udtrykket.
- Læreren: Ja, hvad får vi så her?
- Elev B: Der står, at store A af lille a er lig med 0.
- Læreren: Ja lad os lige prøve at sætte det ind først.
- Elev B: $F(x)$ minus $A(x)$.
- Elev F: Kan vi ikke starte med at isolere $F(x)$?
- Læreren: Lad os bare sætte ind først.
- Elev F: $F(a)$ minus $A(a)$ lig med k. Så skal vi bare isolere, så står der bare.

- Læreren: Det behøver vi sådan set ikke.
- Elev B: Der står, at det der $A(a)$ er lig med 0 jo.
- Læreren: Ja er der noget vi kan erstatte?
- Elev F: k lig med 0.
- Læreren: Nej.
- Elev G: $A(a)$ er lig med 0, så det kan vi sætte ind i stedet for.
- Elev E: Så det betyder, at der også er et 0 på den anden a?
- Læreren: Nej vi kan bare sætte 0 ind her, så står der bare, $F(a)$ lig med k, eller k er lig med $F(a)$. Denne her (*A(a)*) er selvfølgelig 0, fordi hvis vi sætter a ind her, så skal vi tage det bestemte integral fra a til a, og det er jo grænseværdien af venstresummerne, men vores intervalbredde er 0 her, så den må blive 0.
- Elev B: Var det ikke også det vi sagde, og så sagde du, nej og at vi skulle tænkte over det.
- Læreren: Godt, hvad kan vi sige nu. Hvad kan vi sige nu, hvis vi laver den der om til $F(x)$ er lig med $A(x)$ plus k.
- Elev F: Så kan man bare sige $F(x)$ lig me$d\ k, eller$?
- Læreren: Har jeg lavet en fejl.
- Elev G: Det er kun $A(a)$ som er lig med 0.
- Elev E: Så $F(x)$ er lig med en konstant. Skal der i stedet for $F(a)$ lig med en konstant, stå at $F(x)$ er lig med en konstant?
- Læreren: Nårh ja nu skal vi indsætte b ja. Godt, $F(b)$. Vi har denne her oppe. Det kan være, at vi lige skal rykke rundt på denne her, $F(x)$. Ok. Det vil sige at $A(x)$ får vi til $F(x)$ minus k, og k var $F(a)$. Det vil sige, hvis vi sætter b ind her, får vi $A(b)$ er lig med
- Elev B: $F(b)$ minus $F(a)$ eller b.
- Elev D: Jeg er lidt forvirret. Hvad er det for en, der er der?
- Elev B: Det er nummer 3. Vi laver 3'eren nu.
- Elev G: Er det ikke 4'eren det der?
- Elev B: Nej det er 3'eren.
- Læreren: Det er 3'eren og 4'eren. Godt, hvad vil det her sige nu?
- Elev F: At $A(b)$ er lig med 0.
- Læreren: Det vil sige, at hvis vi skal regne det her ud, vores A her, som vi nogle gange kunne forstå som et areal. Hvis vi skal lave det fra a til x, eller fra a til b, så kan vi regne det ud på denne her måde. $A(b)$ som jo er integralet fra a til b af $f(t)\ dt$, kan vi regne ud på den her måde, som $F(b)$ minus $F(a)$, hvor store F er en stamfunktion til denne her. Så den her, som vi kan forstå som arealet i intervallet fra a til b, kan vi regne ud som denne her, tage stamfunktion til f i b minus stamfunktionen til f i a. Godt prøv at regn opgave 15.

Opsamling på opgave 15

- Læreren: Ja lad os prøve at se engang. Hvad er det for et areal, vi kan opfatte det her integral som, som er integralet fra en halv til? Det her bestemte integral.
- Elev A: Skal jeg ikke lave opgave 1?
- Læreren: Nårh ja, hvad er det?
- Elev A: Det er $ln(t)$ plus k, og så har jeg skraveret mellem 0,5 til 2. I den tredje opgave skal man beregne det, og så kan vi se der på den øverste tavle, der står $A(b)$ er lig med $F(b)$. Så satte jeg mine tal ind, $A(2)$ er lig med $F(2)$ minus $F(0{,}5)$. Derefter skal man bruge stamfunktionen i den første opgave, hvor man så siger $ln(2)$ minus $ln(0{,}5)$ som så giver 1,38629.

- Læreren: Ja, hvad med integrationskonstanten her?
- Elev B: Er den 0?
- Læreren: Burde jeg have den med her?
- Elev A: Ja.

Læreren skriver k ind i udtrykket på tavlen.

- Læreren: Hvad så med den?
- Elev C: Vil man ikke stadig få det samme?
- Læreren: Hvorfor?
- Elev D: Det er 0.
- Læreren: Hvad er 0?
- Elev D: k.
- Læreren: Nej.
- Elev A: Nej k er bare en tilfældig konstant. Skal den ikke stå til sidste så, den der k?
- Læreren: Nu har jeg skrevet den her, $ln(2)$ plus k minus $ln(0,5)$ plus k.
- Elev C: Kan vi ikke sætte den uden for parentes?
- Elev A: Er det forkert, det vi har lavet?
- Læreren: k'erne går ud med hinanden ikke? Her står plus k, her står minus, så der bliver minus k. Så k'erne er faktisk ligegyldige, dem behøver vi ikke have med. Så det vi kan sige nu, det er, at nu har vi fundet en måde, hvis vi har en positiv funktion i hvert fald, at beregne arealet under grafen på. Så hvis vi har en funktion, og vi vil beregne, hvis vi lige skriver det op mere generelt. Vi har en funktion her, vi har to grænser, og vi vil beregne det her areal, så kan vi beregne arealet som det bestemte integral fra a til b af $f(x)dx$. Sådan, det er arealet, vi kan beregne på den måde. Vi har også set, hvordan vi beregner det. Vi finder stamfunktionen af f, så man plejer lige at skrive det på den her måde. De her firkantede parenteser betyder, at man skal sætte de her to grænser ind og trække fra. Det er bare en anden måde at skrive, først den øvre grænse minus den nedre grænse.
- Elev A: Var det der forkert eller hvad?
- Læreren: Nej det du havde lavet var rigtigt. Så arealet kan vi altså beregne på den her måde, bestemt integral fra a til b, som beregnes som stamfunktionen i de to grænser.

Bilag 9

Tabel 2 – Den realiserede didaktiske proces

Lektion 1 og 2

Lektion 1			
Tid (minutter)	**Hovedproblemtype**	**Fase**	**Didaktiske teknikker**
6 min.	Store spørgsmål: Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punkt-mængde? Q_1: Findes arealet af en forelagt punktmængde? Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punkt-mængde?	Det første møde Udforskningsfasen	
22 min.	Opsamling, som relateres til de forrige store spørgsmål	Udforskningsfase	Læreren præciserede tilnærmelse vha. rektangler
14 min	Store spørgsmål: Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punkt-mængde? Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punkt-mængde?	Udforskningsfase (guidet) Den tekniske fase	
Lektion 2			
11 min.	Store spørgsmål: Q_0: Hvad menes der med arealet af en forelagt punkt-mængde? Q_2: Hvordan findes arealet af en forelagt punkt-mængde?	Udforskningsfase (guidet) Den tekniske fase	
4 min.	Opsamling, som relateres til Q_0 og Q_2	Udforskningsfase (guidet) Den tekniske fase	Forklarede forskellen på en venstre- og højresum
26 min.	Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase	
4 min.	Opsamling, som relateres til Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$		Opsamlede på resultaterne i opgave 4 og delopgave 5.1

Lektion 3 og 4

Lektion 3			
Tid (minutter)	**Hovedproblemtype**	**Fase**	**Didaktiske teknikker**
11 min.	Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase	
16 min.	Opsamling, som relateres til Π_0: Hvad menes der med $\int_a^b f(x)dx$	Institutionaliseringsfase	Voksende funktion: Venstresummen vil vokse og højresummen vil aftage, når antallet af delintervaller vokser. Aftagende funktion: Venstresummen vil aftage og højresummen vil vokse, når antallet af delintervaller vokser. Fælles grænseværdi for venstre- og højresummen, når antallet af delintervaller går mod uendelig. Definition af det bestemte integral som grænseværdi for venstresum.
19 min.	Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi	Teknisk fase	
Lektion 4			
6 min.	Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi	Teknologisk-teoretisk fase	
15 min.	Π_3: Etabler en sammenhæng mellem integralet og en funktions middelværdi	Institutionaliseringsfase	Højden af det udglattede rektangel kan opfattes som et gennemsnit af alle funktionsværdierne på $[a, b]$. Det generelle udtryk for arealet af det udglattede rektangel, hvor en vilkårlig funktion f betragtes. Tallet $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ kan opfattes som funktionens middelværdi på $[a, b]$.
18 min.	Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes.	Den tekniske fase og den teknologiske-teoretiske fase	
7 min.		Institutionaliseringsfase	For en voksende og en aftagende funktion gælder, at $\|V - H\| \to 0 \; for \; n \to \infty$

			For en voksende funktion er $H - V > 0$ og $V - H < 0$. For en aftagende funktion er $V - H > 0$ og $H - V < 0$. Alle pæne funktioner er integrable og for disse vises det ved at godtgøre at: $\lvert H_n - V_n \rvert \to 0$ for $n \to \infty$

Lektion 5 og 6

Lektion 5			
Tid (minutter)	**Hovedproblemtype**	**Fase**	**Didaktiske teknikker**
36 min.	Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes.	Teknisk fase	
9 min.	Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes.	Institutionaliseringsfase	Gentog argumentet for at $f(x) = x^2$ er integrabel på [1,2].
Lektion 6			
14 min.	Π_1: Givet en funktion f, afgør om $\int_a^b f(x)dx$ findes.	Institutionaliseringsfase	Bevis for sætningen: Enhver voksende eller aftagende funktion er integrabel. Viste at $\lvert H_n - V_n \rvert \to 0$ for $n \to \infty$, for en vilkårlig voksende funktion. $A(x)$ introduceres som $\int_a^x f(t)dt$ $A(x)$ kan opfattes som et areal, hvis $f(x) \geq 0$
30 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion.	Teknisk og teknologisk-teoretisk fase	

Lektion 7 og 8

Lektion 7			
Tid (minutter)	**Hovedproblemtype**	**Fase**	**Didaktiske teknikker**
4 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Institutionalisering	For en vilkårlig pæn funktion gælder $A'(x) = f(x)$.
15 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion		
5 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Institutionalisering	I forbindelse med beviset for at der for en vilkårlig pæn funktion gælder $A'(x) = f(x)$, redegjorde læreren for: $A(x_0 + h) - A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$
6 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion		
9 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Institutionalisering	Læreren redegjorde for at: $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ligger mellem $f(x_0) \cdot h$ og $f(x_0 + h) \cdot h$ og $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \cong f(x_0) \cdot h$, for små værdier af h Differentialkvotienten for A blev bestemt og læreren konkluderede.
6 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Teknologisk-teoretisk fase	
Lektion 8			
10 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Teknologisk-teoretisk fase	
9 min.	Π_2: Etabler en sammenhæng mellem integral og stamfunktion	Institutionaliserings fase	Læreren gennemgik argumentet for at $A(b) = F(b) - F(a)$.
10 min.	Π_0: Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på $[a, b]$.	Teknisk fase	
6 min.	Π_0: Bestem den eksakte værdi af $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f defineret på $[a, b]$.		Læreren opsamlede på bestemmelsen af $\int_{0.5}^{2} f(t)dt$, hvor $f(t) = \frac{1}{t}$.

Bilag 10

Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen)

Matematik A – stx, juni 2010

1. Identitet og formål

1.1. Identitet

Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.

1.2. Formål

Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.

2. Faglige mål og fagligt indhold

2.1. Faglige mål

Eleverne skal kunne:

– håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold
– anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, gennemføre hypotesetest, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog
– anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger
– anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger
– opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer, samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål
– redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
– demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
– demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
– demonstrere viden om fagets identitet og metoder
– anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

2.2. Kernestof

Kernestoffet er:

- – regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, rationale og irrationale tal, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med brug af it-værktøjer
- – formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable
- – simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet og chi-i-anden test
- – forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter, vektorer i to og tre dimensioner givet ved koordinatsæt, anvendelser af vektorbaseret koordinatgeometri til opstilling og løsning af plan- og rumgeometriske problemer
- – begrebet f(x), karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner, cosinus og sinus, karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression
- – definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt regnereglerne for differentiation af $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ og $f \circ g$, udledning af udvalgte differentialkvotienter
- – monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient
- – stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$ samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer
- – lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger, kvalitativ analyse af givne differentialligninger samt opstilling af simple differentialligninger
- – principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering.

2.3. Supplerende stof

Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i matematik A, herunder samspillet med andre fag, skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole.

For at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 75 timer, blandt andet omfatte sammenhængende forløb:

- – med vægt på ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning samt deduktive forløb over udvalgte emner
- – om differentialligningsmodeller
- – med anvendelse af yderligere mindst én type statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model
- – med bearbejdning af autentisk talmateriale
- – om matematik-historiske emner.

3. Tilrettelæggelse

3.1. Didaktiske principper

Undervisningen tilrettelægges med henblik på, at den enkelte elev når de faglige mål. I centrum for undervisningen skal stå elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver.

Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.

Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar forståelse af den deduktive opbygning af matematisk teori.

Den enkelte elevs forståelse af matematik skal udvikles gennem arbejde med mundtlig formidling.

Der lægges i undervisningen vægt på matematikkens anvendelser, og eleverne skal se, hvordan de samme matematiske metoder kan anvendes på vidt forskellige fænomener.

Undervisningen tilrettelægges med progression i arbejdsmetoder og fagligt indhold samtidig med, at grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen.

CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.

3.2. Arbejdsformer

En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projektforløb eller større temaopgaver over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger, der er genstand for fagsamarbejde. For hvert større forløb formuleres faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og eleverne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater eller konklusioner vedrørende en tværfaglig problemstilling. Efter hvert forløb eller i forbindelse med en repetition demonstreres, hvorledes det faglige stof kan udmøntes i eksamensspørgsmål.

En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.

Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse, bearbejdning og præsentation af forelagte matematiske tekster.

I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner.

3.3. It

Undervisningen tilrettelægges, således at lommeregnere, it og matematikprogrammer bliver væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til

ligningsløsning, til symbolsk differentiation og integration samt til løsning af differentialligninger. Endvidere indgår anvendelse af lommeregnere, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning.

3.4. Samspil med andre fag

Når matematik A indgår i en *studieretning*, skal dele af det faglige stof vælges, så det giver mulighed for en styrkelse af det faglige samspil i studieretningen. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.

Der skal tilrettelægges sammenhængende undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Dette skal ske gennem et samarbejde med andre fagområder eller ved at inddrage elevernes kendskab til disse fagområder. De forløb, hvor matematik A indgår i et samarbejde med andre fag, skal fremgå af undervisningsbeskrivelsen.

4. Evaluering

4.1. Løbende evaluering

Både undervisningen og elevernes faglige udbytte heraf evalueres løbende.

For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes elevernes udbytte af forløbet evalueres.

Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål.

Efter hvert større projekt- eller emneforløb gennemfører lærer og elever en evaluering af undervisning, arbejdsformer og fremskridt på vej mod opfyldelsen af de faglige mål.

Gennem hele gymnasieforløbet arbejdes med løsning af skriftlige opgaver, og eleverne afleverer jævnligt skriftlige besvarelser. Besvarelserne rettes og kommenteres på grundlag af bedømmelseskriterierne i pkt. 4.3.

4.2. Prøveformer

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Den skriftlige prøve

Til den skriftlige prøve gives der fem timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål som beskrevet i pkt. 2.1. Prøven er todelt. Første delprøve skal besvares uden brug af andre end særligt tilladte hjælpemidler. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.

Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler. Kommunikation med omverdenen er ikke tilladt. Endvidere er brug af internettet ikke tilladt.

Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. pkt. 3.3.

Den mundtlige prøve

Den mundtlige prøve skal inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver. De endelige spørgsmål til den mundtlige prøve skal meddeles til eleverne før prøven og skal tilsammen dække de faglige mål og det faglige indhold. En betydelig del af eksamensspørgsmålene skal være udformet således, at det er muligt at inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver med tilhørende elevrapporter. Spørgsmålene og en fortegnelse over rapporter og undervisningsforløb sendes til censor forud for prøvens afholdelse.

Det enkelte spørgsmål skal udformes med en overskrift, der angiver det overordnede emne for eksaminationen og med konkrete delspørgsmål.

Eksaminationstiden er ca. 30 minutter pr. eksaminand. Der gives ca. 30 minutters forberedelsestid.

Prøven er todelt.

Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål suppleret med uddybende spørgsmål.

Anden del former sig som en samtale med udgangspunkt i det overordnede emne.

4.3. Bedømmelseskriterier

Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål, som de er angivet i pkt. 2.1.

I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden demonstrerer indsigt i matematisk teori samt:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder:
   – kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber
   – har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt
   – er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt.
2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder:
   – kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer
   – kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
   – kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde.
3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder:
   – kan perspektivere matematikken
   – har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag
   – kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling
   – demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål.

Ved den mundtlige prøve indgår en eventuel rapport ikke i bedømmelsen. Der tages alene hensyn til den mundtlige præstation.

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.

https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil35

Bilag 11

Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen)

Matematik B – stx, juni 2010

1. Identitet og formål

1.1. Identitet

Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.

1.2. Formål

Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.

2. Faglige mål og fagligt indhold

2.1. Faglige mål

Eleverne skal kunne:

- håndtere simple formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, kunne redegøre for foreliggende symbolholdige beskrivelser af variabelsammenhænge og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold
- anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, gennemføre hypotesetest, kunne stille spørgsmål ud fra modellen og have blik for, hvilke svar der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog
- anvende simple funktionsudtryk i modellering af givne data, kunne foretage simuleringer og fremskrivninger og forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne
- anvende differentialkvotient og stamfunktion for simple funktioner og fortolke forskellige repræsentationer af disse
- redegøre for foreliggende geometriske modeller og løse geometriske problemer
- gennemføre simple matematiske ræsonnementer og beviser
- demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
- demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
- demonstrere viden om fagets identitet og metoder
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer, herunder håndtering af mere komplekse formler og bestemmelse af differentialkvotient og stamfunktion for mere komplicerede funktionsudtryk.

2.2. Kernestof

Kernestoffet er:

– regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med it-værktøjer
– formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable
– simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet og chi-i-anden test
– forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter
– begrebet f(x), karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner samt karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression
– definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt differentiation af f + g, f – g og k · f, udledning af udvalgte differentialkvotienter
– monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient
– stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, anvendelse af integralregning til arealberegning af punktmængder begrænset af grafer for ikke-negative funktioner
– principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering.

2.3. Supplerende stof

Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i matematik B, herunder samspillet med andre fag, skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole.

For at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 50 timer, blandt andet omfatte sammenhængende forløb:

– med vægt på ræsonnement og bevisførelse
– med matematisk modellering
– med anvendelse af yderligere mindst én statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model
– med bearbejdning af autentisk talmateriale
– om matematik-historiske emner.

3. Tilrettelæggelse

3.1. Didaktiske principper

Undervisningen tilrettelægges med henblik på, at den enkelte elev når de faglige mål. I centrum for undervisningen skal stå elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver.

Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.

Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar forståelse af bevisets betydning i matematisk teori.

Den enkelte elevs forståelse af matematik skal udvikles gennem arbejde med mundtlig formidling.

Der lægges i undervisningen betydelig vægt på matematikkens anvendelser, og eleverne skal se, hvordan de samme matematiske metoder kan anvendes på vidt forskellige fænomener.

Undervisningen tilrettelægges med progression i arbejdsmetoder og fagligt indhold samtidig med, at grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen.

CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.

3.2. Arbejdsformer

En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projektforløb eller større temaopgaver over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger, der er genstand for fagsamarbejde. For hvert større forløb formuleres faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og eleverne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater eller konklusioner vedrørende en tværfaglig problemstilling. Efter hvert forløb eller i forbindelse med en repetition demonstreres, hvorledes det faglige stof kan udmøntes i eksamensspørgsmål.

En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.

Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse og præsentation af forelagte matematiske tekster.

I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner.

3.3. It

Undervisningen tilrettelægges, således at lommeregnere, it og matematikprogrammer bliver væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning og til symbolsk differentiation og integration. Endvidere indgår anvendelse af lommeregnere, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning.

3.4. Samspil med andre fag

Når matematik B indgår i en *studieretning*, skal dele af det faglige stof vælges, så det giver mulighed for en styrkelse af det faglige samspil i studieretningen. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.

Der skal tilrettelægges sammenhængende undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Dette skal ske gennem et samarbejde med andre fagområder eller ved at inddrage elevernes kendskab til disse fagområder. De forløb, hvor matematik B indgår i et samarbejde med andre fag, skal fremgå af undervisningsbeskrivelsen.

4. Evaluering

4.1. Løbende evaluering

Både undervisningen og elevernes udbytte heraf evalueres løbende.

For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes elevernes udbytte af forløbet evalueres.

Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål.

Efter hvert større projekt- eller emneforløb gennemfører lærer og elever en evaluering af undervisning, arbejdsformer og fremskridt på vej mod opfyldelsen af de faglige mål.

Gennem hele gymnasieforløbet arbejdes med løsning af skriftlige opgaver, og eleverne afleverer jævnligt skriftlige besvarelser. Besvarelserne rettes og kommenteres på grundlag af bedømmelseskriterierne i pkt. 4.3.

4.2. Prøveformer

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Den skriftlige prøve

Til den skriftlige prøve gives der fire timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål som beskrevet i pkt. 2.1. Prøven er todelt. Første delprøve skal besvares uden brug af andre end særligt tilladte hjælpemidler. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.

Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler. Kommunikation med omverdenen er ikke tilladt. Endvidere er brug af internettet ikke tilladt.

Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. pkt. 3.3.

Den mundtlige prøve

Den mundtlige prøve skal inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver. De endelige spørgsmål til den mundtlige prøve skal meddeles til eleverne inden prøven og skal tilsammen dække de faglige mål og det faglige indhold. En betydelig del af eksamensspørgsmålene skal være

udformet således, at det er muligt at inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver med tilhørende elevrapporter. Spørgsmålene og en fortegnelse over rapporter og undervisningsforløb sendes til censor forud for prøvens afholdelse.

Det enkelte spørgsmål skal udformes med en overskrift, der angiver det overordnede emne for eksaminationen og med konkrete delspørgsmål.

Eksaminationstiden er ca. 30 minutter pr. eksaminand. Der gives ca. 30 minutters forberedelsestid.

Prøven er todelt.

Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål suppleret med uddybende spørgsmål.

Anden del former sig som en samtale med udgangspunkt i det overordnede emne.

4.3. Bedømmelseskriterier

Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål, som de er angivet i pkt. 2.1.

I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder:
   – kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber
   – har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt
   – er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt.
2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder:
   – kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer
   – kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
   – kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde.
3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder:
   – kan perspektivere matematikken
   – har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag
   – kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling
   – demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgs-mål.

Ved den mundtlige prøve indgår en eventuel rapport ikke i bedømmelsen. Der tages alene hensyn til den mundtlige præstation.

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.

https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil36