INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Gymnasiealgebra i et historisk perspektiv -
Matematiske organisationer i gymnasiealgebra

Mariam Babrakzai Zadran
Kandidatspeciale

Marts 2014

IND's studenterserie nr. 36

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte – Om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2013)
29. Morten C. B. Persson: Kvantekemi i gymnasiet - Tilrettelæggelse, udførelse og evaluering af et undervisningsforløb (2013)
30. Sofie Birch Jensen: Køn, evaluering og The Force Concept Inventory (2013)
31. Simone Gravlund Nielsen: Når børn forsker i matematik (2013)
32. Henrik Egholm Wessel: Smartphones as Scientific Instruments in Inquiry Based Science Education (2013)
33. Nicole Koefoed: Et didaktisk design om definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral (2013)
34. Trine Louise Brøndt Nielsen: From Master's programme to labour market – A study on physics graduates' experience of the transition to the labour market (2013**)**
35. Rie Hjørnegaard Malm: Becoming a Geologist – Identity negotiations among first year geology students (2013)
36. **Mariam Babrakzai Zadran: Gymnasiealgebra I et historisk perspektiv – Matematiske organisationer I gymnasiealgebra (2014)**

Abstract
High school algebra appears in the form of algebraic expressions and manipulations thereof in order to solve equations. The principles associated with these expressions and their manipulation are explained using implicit and explicit conventions (calculation rules) presented without explanation. This is partly due to the fact that mathematical textbooks primarily emphasize an algebra in which algebraic rules are presented solely on a practical level, and theory is omitted. This gives rise to a number of problems for students, when they need to explain and justify their mathematical practice with respect to algebraic expressions. Based on investigations of various perspectives on algebra, an epistemological reference model for high school algebra with special attention to the justication of the manipulation of algebraic expressions is proposed. The anthropological theory of didactics forms the theoretical basis for the proposed model. This theory is used to analyze algebra as a scientic discipline from a historical perspective and as an academic subject as it manifests itself in curricula, textbooks and high school exam questions. The analysis is performed with the intention of, firstly determining which mathematical organizations the students are expected to be capable of performing with regard to algebraic exercises and, secondly identifying possible and actual correlations between these organisations. The historical perspective of algebra as a scientific discipline will in particular be used to analyze the mathematical knowledge to be taught, as formulated in curricula and textbooks. This thesis also contains a small empirical investigation (diagnostic test) of students' command of techniques and technologies used for solving algebraic exercises.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

FACULTY OF SCIENCE
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

THESIS FOR THE MASTER DEGREE IN MATHEMATICS

Mariam Babrakzai Zadran

Gymnasiealgebra i et historisk perspektiv.

Matematiske organisationer i gymnasiealgebra

Submitted:
17. marts 2014

FACULTY OF SCIENCE
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

THESIS FOR THE MASTER DEGREE IN MATHEMATICS

Mariam Babrakzai Zadran

A Historical Perspective on Secondary School Algebra.

Mathematical Organisations in Secondary Algebra

Author:
Mariam Babrakzai Zadran
Copenhagen University

. . . .

Supervisor:
Carl WINSLØW
Copenhagen University

. . . .

Submitted:
17. marts 2014

Til Khalid!

Abstract

High school algebra appears in the form of algebraic expressions and manipulations thereof in order to solve equations. The principles associated with these expressions and their manipulation are explained using implicit and explicit conventions (calculation rules) presented without explanation. This is partly due to the fact that mathematical textbooks primarily emphasize an algebra in which algebraic rules are presented solely on a practical level, and theory is omitted. This gives rise to a number of problems for students, when they need to explain and justify their mathematical practice with respect to algebraic expressions.

Based on investigations of various perspectives on algebra, an epistemological reference model for high school algebra with special attention to the justification of the manipulation of algebraic expressions is proposed. The anthropological theory of didactics forms the theoretical basis for the proposed model. This theory is used to analyze algebra as a scientific discipline from a historical perspective and as an academic subject as it manifests itself in curricula, textbooks and high school exam questions. The analysis is performed with the intention of, firstly determining which mathematical organizations the students are expected to be capable of performing with regard to algebraic exercises and, secondly identifying possible and actual correlations between these organisations. The historical perspective of algebra as a scientific discipline will in particular be used to analyze the mathematical knowledge to be taught, as formulated in curricula and textbooks. This thesis also contains a small empirical investigation (diagnostic test) of students' command of techniques and technologies used for solving algebraic exercises.

Resumé

Algebra i gymnasiet optræder i form af algebraiske udtryk samt omskrivninger heraf i forbindelse med ligningsløsning. Principperne for disse udtryks form og omskrivning bliver forklaret ved brug af mere eller mindre eksplicitte konventioner (regneregler) som fremsættes uden begrundelser. Dette skyldes delvis, at matematiklærebøgerne lægger mest vægt på en algebra, hvor algebraiske regler kun fremstilles på praksisniveau, og der mangler en sammenhængende teori af matematisk art. Dette giver anledning til en række problemer hos eleverne, når de skal forklare, begrunde og retfærdiggøre deres matematiske praksis i forbindelse med algebraiske udtryk.

På baggrund af undersøgelser af forskellige perspektiver på algebra opstilles en epistemologisk referencemodel for algebra i gymnasiet med særlig fokus på begrundelse af algebraiske udtryk og omskrivninger af sådanne udtryk. Den antropologiske teori om det didaktik udgør det teoretiske grundlag for den opstillede model. Teorien er benyttet til at analysere algebra som et videnskabsfag i et historisk perspektiv, og som et undervisningsfag, der manifesterer sig for eksempel i læreplaner, -bøger og studentereksamensopgaver. Analysen udføres med henblik på at bestemme hvilke matematiske organisationer eleverne forventes at være i stand til at udøve i forbindelse med algebraiske opgaver og med henblik på at identificere mulige og aktuelle sammenhænge imellem disse. Det historiske perspektiv på algebra som et videnskabsfag benyttes specielt til at analysere den officielle undervisningsfaglige viden (som formuleret i læreplaner og lærebøger). Specialet indeholder også en mindre empirisk undersøgelse (diagnostisk test) af elevernes beherskelse af teknikker og teknologier til løsning af algebraiske opgaver.

Mariam Babrakzai,2014

Indhold

Kapitel

1 Indledning

> *Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: 'I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine. [. . .] the danger to our soul is there, because when you pass over into algebraic calculation, essentially you stop thinking; you stop thinking geometrically, you stop thinking about the meaning. I am a bit hard on the algebraists here, but fundamentally the purpose of algebra always was to produce a formula that one could put into a machine, turn a handle and get the answer. You took something that had a meaning; you converted it into a formula; and you got out the answer* [5].

Hvis man har accepteret det ovenstående synspunkt, kan man også være enig med den store matematiker Sir Michael Atiyah, som klart illustrerer opfattelsen af algbera som "cultural pejoration".
Algebra har fået en ringere status i dag. Den er ofte præsenteret for elever som et forudbestemt og fast matematisk emne med strenge regler. Traditionel undervisning begynder med de regneregler for tal i algebra og gives uden begrundelser, som eleverne ikke kan forholde sig til. Elever forventes at beherske deres symbolske manipulation uden, at de lærer formålet med det. Derfor vil det ikke være overraskende, hvis mange elever på forhånd tager afstand fra algebra.

> *while to them geometry would be pretty, warm deep and femini-*

> *ne, algebra turned out to be ugly, cold, superficial and masculine* [5].

Algebraiske regneregler optræder implicit og som et skjult redskab til at løse matematiske problemer i gymnasier i dag. Eleverne får en opfattelse af algebra, som manipulation af symbolerne med en række regneregler uden der gives en sammenhængende matematisk teori. Eleverne får lært regneregler som et sæt konventioner uden form for begrundelse og retfærdiggørelse. Konsekvensen af, at regnereglerne ikke bliver begrundet og formaliseret i gymnasiets matematik kan føre til, at eleverne for eksempel ikke ved om hvorfor er $(-1) \cdot (-1) = 1$. De algebraiske bogstaver betragtes som generalisering af aritmetik hvilket vil sige, at alt der er tilladt med tal, også er tilladt med bogstaver.

Algebra som et videnskabsfag har en central rolle på universiteterne i dag. Den eksisterer som en vigtig disciplin. Specielt inden for den naturvidenskabelige uddannelse, hvor den optræder som et obligatorisk fag (lineær algebra) ikke kun for matematikere, men også for kemikere, fysikere, aktuarer, økonomer. Mange matematikstuderende finder sit første møde med algebra som problemfyldt. Ikke alene på grund af dens abstrakthed, men også på grund af manglende teoretiske baggrund som eleverne ikke har fået i nutidens gymnasiematematik.

Forskellen mellem algebra, som bruges og udvikles hos matematikere på universitetet og algebra, som optræder i matematiklærebøgerne i gymnasiet er stor i dag. Ideelt set bør en sådan forskel ikke eksistere, og gymnasiealgebra og den abstrakte algebra skal have så meget til fælles som muligt i forhold til deres metode og tankegang. Men dette ligger langt fra at blive opfyldt i realiteten. Videnskaben var dog direkte inspiration til gymnasiets matematik i 1970'erne (fra 1965). Der var forsøg på at modernisere videnskabsfaget algebra med gymnasiets matematik. I den periode havde algebra væsentligere position i gymnasiets end i dag. Algebra var et selvstændigt domæne, hvor de algebraiske regneregler var konkretiseret og dannede grundlag for tallene. Derfor er det interessant at studere algebra over to forskellige perioder (nu og 1970'erne) for at undersøge, hvor meget algebra eleverne forventes at kunne, sammenlignet med i dag og tidligere.

Jeg vil starte med at fremlægge den antropologiske teori om didaktik som analyseværktøj i det første kapitel (2). På baggrund af to forskellige perspektiver på nutidens algebra i gymnasiets matematik, opstiller jeg i kapitel 3 en epistemologisk referencemodel, som et analyseværktøj. Dette kapitel efterfølges med den præcise problemformulering, dvs. at præsentere de hypoteser, jeg ønsker at gøre rede for i dette speciale.

På baggrund af referencemodellen vil jeg i kapitlet (5) redegøre for videnskabsfaget algebra i et historisk perspektiv. Jeg vil ud fra det undersøge hvilke sammenhænge der er mellem gymnasiealgebra i dag og i 1970'erne.

Jeg vil efterfølgende analysere den officielle undervisningsfaglige viden (læreplaner, lærebøger og studentereksamensopgaver) med en diskussion til sidst i kapitel 6. I kapitel 7 introducerer jeg min diagnostiske test, som har til hensigt at undersøge elevernes skriftlige beherskelse af teknikker og teknologier om algebra i gymnasiet. Resultatet vil blive analyseret og diskuteret i afsnit 7.3. Kapitlet 8 runder af med en samlet diskussion og konklusion på problemformuleringen.

Dette speciale havde ikke kunnet lade sig gøre uden den hjælp, jeg modtog fra en række medstuderende. Dette var en forudsætning for at projektet kunne gennemføres. Jeg skylder derfor denne tak til Julie, Brian, Stino og Jacob til at finde tid til at læse korrektur på specialet. Derudover vil jeg gerne takke matematiklæreren Charlotte Gjerrild Hviid på Sorø Akademiet for at give sine elever min diagnostiske test. Tak til min familie og omgangskreds, der har lyttet til mine overvejelser og tanker omkring mit projekt. Jeg vil gerne takke min svoger, Casper, for gennemlæsning af hele specialet. Tak til Naneka og til Zainab, som har passet mine to dejlige små i weekenderne. Særlig tak til min dejlige mand for at bakke mig op i min specialeskrivning. Til sidst en stor tak til min vejleder, Carl Winsløw, for hans enorme tålmodige, venlige og imødekommende hjælp til at besvare mine mange spørgsmål under specialet.

Kapitel

2 Teoretisk baggrund

2.1 Den antropologiske teori om didaktik

I dette afsnit gives en præsentation af den antropologiske teori om didaktik.[1] Jeg vil i dette afsnit præsentere, de elementer i teorien, som er relevant i forhold til analysen.

Den antropologiske teori om didaktik (ATD) er en matematisk-didaktisk teori og grundlagt af Yves Chevallard. I ATD betragtes matematik som en menneskelig aktivitet. Matematik er, ligesom enhver menneskelig aktivitet, "noget" som produceres, læres, undervises. "Noget" kan i ATD forstås som "et stykke af viden" der kan være i forskellige størrelser. For eksempel i dette speciale er "hele" matematik en disciplin, algebra er et domæne i matematik og polynomier af første grad er en sektor i algebra.
ATD er en del af det epistemologiske program som hævder, at den matematiske aktivitet kan identificeres med en *matematisk modelleringsaktivitet*. Modellering skal ikke forstås som en gren af matematik, men snarere som en konstruktion af matematisk aktivitet.

I specialet forstås modellering som matematisk modellering, der refererer til sine egne domæner (aspekter), for eksempel algebraisk modellering af geometri eller geometrisk repræsentation af algebraisk eller aritmetisk repræsentation:

[1]Dette afsnit er baseret på [6], [11] og [5].

> *...And there are also algebraic notions that model geometric properties as, for instance, the metric relation between the sides of a rectangular triangle modelled by the algebraic expression $a^2 = b^2 + c^2$ (being a the hypotenuse and b, c the other two sides). Given two sides, this algebraic model produces knowledge about the triangle (a quadratic equation leads us to the unknown side). Furthermore, this algebraic model can produce knowledge about the nature of a given triangle: being a the largest side, if $a^2 < b^2 + c^2$ the triangle has three acute angles while if $a^2 > b^2 + c^2$ then the triangle has one obtuse angle and two acute angles.*

Matematiske organisationer

Ligesom menneskelig, kan enhver matematisk aktivitet beskrives, forklares og modelleres ved hjælp af *praxeologier*. En praxeologi kan deles i to blokke. På den ene side er der *praksisblokken* og på den anden *teoriblokken*. Praksisblokken, eller "know-how", består af problemtyper T, som behandles inden for et matematisk område med de teknikker τ, der bruges til at behandle disse. En opgavetype er en generel formulering af en samling opgaver, som alle kan løses ved en fælles teknik. Teoriblokken, eller også "knowledge", udgør det "diskurse" miljø, som forklarer og retfærdiggøre teknikken, og kaldes teknologi θ ([5]). Det formelle argument, som retfærdiggør en sådan teknologi, kaldes teori Θ ([11], s. 226). Teoriblokken består altså af teknologi og teori. De fire elementer indenfor matematisk viden udgør tilsammen en *matematisk praxeologi* eller *matematisk organisation* (MO) ([11], s. 226), som beskrives som et sæt $[T, \tau, \theta, \Theta]$. De bruges til at beskrive og modellere matematisk viden, som betragtes som et produkt af denne aktivitet.

De fire elementer - problemtyper, teknikker, teknologi og teori (4T model) - ses som grundlæggende elementer af den antropologiske model.

I artiklen ([11], s. 227) skrives, at Chevallard klassificerer en matematisk praxeologi som specifik, lokal, regional eller global. *En specifik praxeologi* genereres af en typeopgave. En opgavetype er defineret ved at være en generel formulering af en samling af opgaver, som alle kan løses ved en fælles teknik. I en specifik praxeologi er der kun én teknik til at beskæftige sig med opgaven, som repræsenterer den "officielle" måde at løse problemet på. Her er teknologien normalt fraværende eller implicit antaget. *Lokale praxeologier* dannes ud fra flere specifikke praxeologier, som alle kan forklares ved brug af den samme teknologiske diskurs. *Regionale praxeologier* dannes ud fra lokale praxeologier, der alle kan begrundes i en fælles matematisk teori. Endelig opstår *globale praxeologier*, når flere regionale praxeologier lægges sammen og danner et samlet emne med en sammenhængende teori, hvor alle nødvendige spørgsmål om emnet kan besvares inden for denne teori. Opdeling i praxeologier kan benyttes til at belyse elevernes viden om et givent matematisk emne.Disse matematiske praxeologier opstår ikke pludseligt og tilegner sig ikke en bestemt form. De er resultatet af komplekse og løbende aktiviteter med kompleks dynamik, som skal modelleres [6].

Didaktiske organisationer

I ATD kan to aspekter af den matematiske aktivitet identificeres: En matematisk konstruktionsproces, den såkaldte *didaktiske proces* og resultatet af denne kostruktion. Ligesom menneskelig aktivitet kan den didaktiske proces beskrives ved hjælp af *didaktiske organisationer* eller *didaktiske praxeologier*[3]

> *A didactic praxeology is used when a persen or group of persons want to have an appropriate MO available (the mathematician's or student's didactic praxeology) or to help others to do it (the teacher's didactic praxeology)*, [3] (p.239).

Den didaktiske praxeologi, ligesom andre praxeologier, har en praksisblok og en teoriblok. Praksisblokken af den didaktiske praxeologi består typisk af etableringen og udviklingen af en matematisk organisation hos eleverne (i undervisningen), hvor den didaktiske teknik vil være strukturering af undervisningen med henblik på for eksempel at forklare multiplikation af to hele tal. En teknik kunne være, at en lærer skal konstruere en opgave, som leder frem til den pågældende matematiske organisation. Teknologien er den diskurs, vedrørende de anvendte teknikker. Det er måden, hvorpå et eksempel bliver præsenteret. Teorien som skal forklare og retfærdiggøre teknologien er for eksempel den antropologiske teori om didaktik.

Skabelsen af en praxeologi afhænger af den person, der danner den. Inden for matematik er der for eksempel forskel på praxeologien for en bestemt opgave inden for den videnskabelige matematiske viden og praxeologien for den samme type opgave, som for eksempel skabes af en matematiklærer. Det betyder, at praxeologier inden for matematik er forskellige, idet de skal tilpasses de forskellige institutioner, som skaber dem. I den forbindelse er det nyttigt at undersøge de virkninger, de forskellige institutioner og de institutionelle niveauer har på den viden, der skal formidles. For at forklare dette, er det nødvendigt at præsentere teorien om den didaktiske transposition og didaktiske codetermination, der belyser de forskellige niveauer.

2.2 Den didaktiske transposition

Den antropologiske teori om didaktik er en udvidelse af teorien om *didaktisk transposition*. Den didaktiske transposition er en model for "viden, der flyttes", dvs. den beskriver rejsen som viden foretager sig gennem forskellige institutioner [26]. Den bestemmer, at der sker en transposition fra den videnskabelige matematiske viden, til den viden, der skal læres og igen fra den viden der skal læres til den viden, der bliver lært.

Den didaktiske transposition deles i to dele, nemlig *den interne* og *den eksterne didaktiske transposition.*

Den interne didaktiske transposition handler om omformning af den undervisningsfaglige viden til undervisningssituationer. Det er en transposition fra læreplaner, lærebøger over klasseundervisning og til den viden, som sætter sig hos eleverne. Det er altså ikke gymnasielærerne, der har en direkte indflydelse på hvad der i matematik skal undervises i, idet matematiklærerens og skolens hovedrolle primært ligger i den interne didaktiske transposition. Det er undervisningsministeriets job at fastsætte, hvad der skal undervises i. Der udgives bekendtgørelser og vejledninger, som beskriver hvad kernestoffet skal være for matematik (algebra).

Figur 2.1: Den matematiske viden og praksis tilpasses mellem institutioner [25].

Den eksterne didaktiske transposition handler om hvordan viden og teknikker fra bl.a. videnskabsfaget omformes til en undervisningsfaglig viden, som kommer til udtryk i læreplaner, vejledninger og lærebøger. Det vil sige analysen af læreplaner, lærebøger og eksamensæt er en analyse af den eksterne didaktiske transposition. Den viden og praksis, som skolerne skal udvikle hos eleverne præciseres af institutioner såsom universiteterne, ofte men ikke kun med kilder i videnskabsfaget [26].

Eksempelvis forstås algebra i universitetsverdenen i form af gruppeteori, ringteori, galoisteori osv. Den form for viden (algebra) fra universitet kan ikke overføres direkte til gymnasiet. Det er uddannelsessystemet, der fastsætter, hvordan der skal undervises i den viden, der kommer fra for eksempel universitetet (se figur 2.1), [26]. Dette gøres ved hjælp af læreplaner, lærebøger osv. Denne transpositionsproces er ikke let, og der skal tages mange beslutninger i betragtning for at forstå hvilke matematiske, didaktiske praxeologier der er tilgængelige for lærere og elever.

Mere specifikt kan vi skelne mellem forskellige typer af viden i den didaktiske transposition (se figur 2.2):

1. Den videnskabelige matematiske viden “scholarly”.

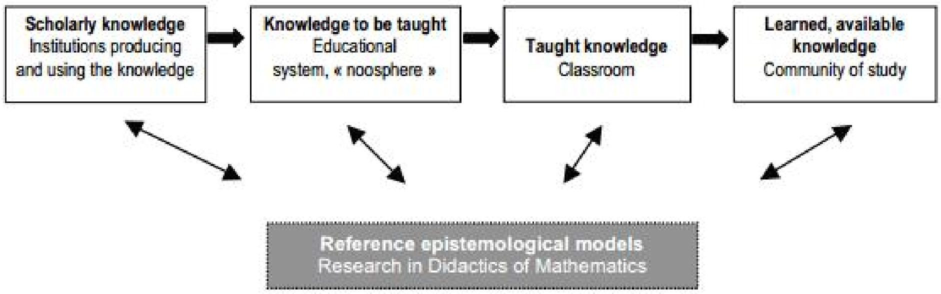
2. Den matematiske viden som er designet til at blive undervist i(matematisk viden, der skal læres).

3. Den matematiske viden som bliver undervist i det aktuelle klasseværelse (matematisk viden, der bliver udlært, fra lærere til elever).

Den fjerde form for viden tilføjes, når elevernes forståelse og læring inkluderes i processen. I dette speciale vil der fokuseres på de to første trin, som vist i figur 2.2. Det er den videnskabelige matematiske viden (algebra) og analysen af læreplaner og lærebøger.Desuden giver den diagnostiske test et indtryk af resultatet (learned knowledge), som svarer til produktet af den tredje trin i den didaktiske transposition som vist i figur 2.2.

Den matematiske viden, der bliver undervist i, er en del af en matematisk organisation, som kaldes en matematisk referenceorganisation. Denne matematiske organisation konstruerer en epistemologisk model af den videnskabelige matematiske viden, der legitimerer den matematiske viden, der skal undervises i. Med denne referencemodel er det muligt at tolke det matematiske indhold (algebra), som bliver studeret i gymnasiet[3].
Figuren 2.2 illustrerer de forskellige trin af den didaktiske transposition og inkluderer matematisk "reference" viden, som konstituerer den grundlæggende teoretiske model, *den epistemologiske referencemodel*, som forskere

har brug for til at tolke og analysere den matematiske viden, der skal undervises i [3]. Epistemologisk referencemodel er en dynamisk model, som holdes op mod de enkelte institutioner [6].



Figur 2.2: en didaktiske transposition [6].

I dette speciale arbejdes der med den eksterne didaktiske transposition, som handler om dannelsen af det officielle undervisningsfag (algebra) bl.a. ud fra videnskabsfaget, men også andre kilder. Den epistemologiske referencemodel, som jeg vil konstruere her, kan i en forstand opfattes som en "a priori" model, idet den ikke inddrager observationer af undervisning.

Didaktiske Codeterminationsniveauer

For at forklare udviklingen af de didaktiske og matematiske praxeologier og deres organisationer er det vigtigt at indtroducere de *didaktiske codeterminationsniveauer*, der påvirker dem[1]. Den didaktiske codetermination er en vekselvirkning mellem matematiske og didaktiske organisationer.
Figur 5.1 viser, at der i alt er ni didaktiske codeterminationsniveauer, hvor de er opdelt i matematiske og pædagogiske niveauer. Det svarer til, at de første niveauer, *emne, tema, sektor, domæne* og *disciplin*, er matematiske, mens de sidste niveauer, *civilisation, samfund, skolen* og *pædagogik*, er pædagogiske. Desuden er de ni niveauer codetermineret, dvs. *they are determined in their mutual interaction* [1].

I artiklen ([11], s. 228) giver Chevallard et eksempel på, hvad der reelt ligger i de matematiske niveauer:

> *"For instance, the question "Which are the symmetries of a rectangle (not squared)?" is considered, in most educational systems,*

> *as belonging to the theme "symmetries of polygons", which is included in the sector "transformations", included in the domain "Geometry", belonging to the discipline "Mathematics""*

Med hensyn til dette speciale er skolen den danske gymnasieskole, disciplinen er matematik, domænet er algebra og de sidste niveauer vil blive forklaret i det næste kapitel. Det er ofte den eksterne didaktiske transposition, der fastlægger niveauerne fag, domæne og sektor. De sidste to matematiske niveauer har læreren indflydelse på organisationen.

Civilization ↔ Society ↔ School ↔ Pedagogy ↔ Discipline ↔ Domain ↔ Sector ↔ Theme ↔ Issue

Figur 2.3: Niveauer af didaktisk codetermination [5].

Ligesom de matematiske praxeologier kan de sidste fire niveauer, nemlig domæne, sektor, tema og emne, skelnes mellem specifik, lokal, regional og global. Således dækker niveauet domæne en samling af regionale matematiske organisationer, og den samling af praxeologier former niveauet disciplinen. En sektor er defineret ved at have en samling af praxeologier som har en fælles teori. Temaniveauet har til hensigt at fokusere på en teknologi, som svarer til en lokal matematisk organisation. Niveauet emne svarer til en specifik MO, hvor der benyttes en teknik.
Et niveau, der særligt er fokus på i dette speciale, er algebradomænet. Både dette og de sidste niveauer vil blive forklaret i næste kapitel.

Alle niveauer har forskellig indflydelse på matematiske organisationer og er beskrevet ved de betingelser og begrænsninger, der gør det muligt for en praxeologisk organisation at udfolde sig i en given uddannelsesmæssig sammenhæng, se figur 5.1. Disse begrænsninger er ofte relateret til måden de forskellige domæner, sektorer, temaer og emner er organiseret på [5]. I forbindelse med de påvirkninger som de institutionelle niveauer har på den viden, som skal formidles, fremlægger Bosch (2012) et godt eksempel. Det er civilisationsniveauet, som har indflydelse på matematiske praxeologier. Mere specifikt, fremlægger Bosch (2012), at den vestlige kultur med sin mentale vane om, at den mundtlige diskurs kommer før skrift, kan have indflydelse på skolealgebra[2]. Bosch (2012) kalder det *the cultural "belittling" of algebra* eller *the cultural pejoration of algebra*[3] [5], [4]. Traditionelt

[2]Skolealgebra kan henvises til algebra på et alderstrin svarende til gymnasiet

[3]Se indledning.

betragtes de mundtlige formuleringer i den vestlige kultur som et direkte udtryk for tanker. Nedskrivning ses blot som en skriftlig transposition af mundtlig diskurs. Denne position kaldes *"logocentrisme"* og formoder, at tanken er noget, der eksisterer i vores hoved, og først kommer ud gennem diskurs, før den omskrives til skrift.

> Thus, (verbal) “reasoning” is often opposed to (written) “calculations”, as illustrates the current recommendation *“First say it with words, then write it down”*[5].

Dette er dog omvendt i algebraisk symbolmanipulation, hvor der først er nedskrivning og derefter det mundtlige. De skriftlige algebraiske symboler, i modsætning til vores mentale vaner, er ikke afledt af det mundtlige sprog. Bosch (2012) skriver, at:

> *it is the source, the manifestation and the touchstone of algebraic “thinking”.*

Den ovennævnte formodning kan påvirke undervisningspraksis og i mange undervisningsdokumenter beskrives "farligheden"ved at indføre skriftlig manipulation før betydningen er forstået.

Kapitel

3 Referencemodel for matematiske organisationer

Før jeg præsenterer den epistemologiske referencemodel, er det værd at fremlægge nogle vigtige pointer om det algebraiske domæne som Bosch (2012) og Bolea et al 2004 beskriver i artiklerne [4] og [5].

3.1 Algebra som generalisering af aritmetik

Algebra i gymnasiet kan betragtes som generalisering af aritmetik. Den bygger på generaliseringer ud fra aritmetik (**??**), hvor det omfatter bl.a. aritmetiske operationer, egenskaber, relationer, problemløsende værktøjer (opstilling af ligninger ud fra problemer, der er formuleret i et naturligt sprog). Dette perspektiv falder under *Algebra as Generalising and Formalising Relationship and Constraints*(18, p. 81). Algebra som generaliseret aritmetik handler om talegenskaber og operationer på tal, hvor bogstaver betragtes som specifikke ubekendte størrelser, for eksempel $a + b = b + a$, hvor a og b er vilkårlige tal (18, p.83).
Mange videnskabelige undersøgelser fastslår, at den første indlæring af algebra foregår i kernen af aritmetik [4]. Det er et område af matematikken, der er tæt på gymnasielever og fungerer som et referencepunkt til det algebraiske arbejde, som eleverne skal udføre. På den måde udvikles denne algebra, der er tættere på aritmetik, samt adskilt fra andre grene af matematikken. Forholdet mellem aritmetik og algebra i gymnasiets matematik er ensrettet, altså først kommer aritmetik og derved algebra. Algebra i gymnasiets matematik fremtræder, som en måde, hvorpå man kan udtrykke de generelle egenskaber for aritmetiske operationer, fokusere på symbolmanipulationer

og omskrivning af algebraiske udtryk, skriver Bolea et al 2004 i [4].

Opfattelsen af algebra som generalisering af aritmetik kan nu udtrykkes i en stor klasse af opgaver:

- At manipulere algebraiske udtryk for at reducere eller omskrive dem til en bestemt form (gange parenteser ud). at omskrive problemer skrevet med ord til ligninger.

- At opskrive algebraiske udtryk hvor bogstaver repræsenterer ukendte tal. Særligt at løse ligninger (1.grads).

3.2 Algebra som modelleringsværktøj

Udover, algebra som generalisering af aritmetik, kan algebraiske aktiviteter også betragtes som et matematisk modelleringsværktøj (se 2). I den forbindelse kommer både Bolea et al. 2004 og Bosch (2012) med et forslag om at betragte nutidens gymnasiealgebra som en *algebraisationsproces* af allerede eksisterende matematiske praxeologier. Den skal betragtes som *et værktøj* til at gennemføre en modelleringsaktivitet, der påvirker alle andres matematiske domæner (geometri, statistik, analyse osv.), mere præcist et værktøj til at modellere andre matematiske praxeologier. Her betragtes algebra ikke som et selvstændigt domæne, ligesom andre domæner, som statistik eller geometri, men snarere som et generelt modelleringsværktøj for enhver matematisk praxeologi.

Endvidere skriver Bosch (2012), at den ovenstående ide om algebra som algebraiseringsproces kan give et svar på problemet om statussen og rationaliteten af algebra i det nuværende spanske gymnasiet. Med algebraisering mener Bosch(2012) at bruge algebra som et redskab til at repræsentere, modellere eller generalisere. Det ene rationelle aspekt af algebra forekommer som et redskab til at besvare teoretiske spørgsmål, der opstår i forskellige domæner af matematikken (især aritmetik og geometri). I det tilfælde giver Bosch (2012) et velkendt eksempel, nemlig arbejdet med mønstre, hvor "et bygningsprincip" er angivet, og man er nødt til at lave en forudsigelse, og dermed finde den generelle regel for det (se for eksempel opgave 8 i min diagnostiske test). Her optræder algebra som modelleringsværktøj i den forstand, at der er givet nogle mønstre med tal, da det generelle udtryk kan modelleres ved et algebraisk udtryk. Det andet rationelle aspekt af algebra i gymnasiet er at organisere matematiske opgaver (tasks) i typeopgaver og introducere ideen om "generalisering" i løsningsprocesser.

Forudsætninger for at kunne introducere en sådan algebraiseringsværktøj i gymnasiet er, at der er først behov for at introducere en regnemetode eller et beregningsprogram, såkaldte *calculation programmes* (CP). En CP er et beregningsprogram med en række af aritmetiske operationer, der bruges til at vise metoden "trin for trin" for eksempel $19 * 4 + 34 - 6$ eller $800 + 4 - 0.02 * 150$. Her kan man starte med at bruge CP til at løse elementære aritmetiske opgaver, hvor der skal være muligheden for at udvide det. Det betyder, at hvis man skal arbejde med nogle komplekse algebraiske opgaver, brugen af CP ikke er tilstrækkeligt. Derfor giver arbejdet med CP nogle tekniske begrænsninger (for eksempel, når man forsøger at løse komplekse aritmetiske problemer). Der vil opstå nogle teoretiske spørgsmål om årsagerne og begrundelserne til det opnåede resultat. Udvidelsen af dette giver anledning til forskellige stadier af *algebraiseringsproces* [5]. Jeg giver en kort redegørelse af disse:
Det første stadie er at betragte CP ikke kun som en proces, men som en helhedsproces. Med en hedhedsproces menes, at en opgave som *hvis Brian er tre gange ældre end sin bror Peter og det er to år siden Peter var* 10 *år. Find Brians alder.* For at finde Brians alder duer det ikke at tage tallene og regne, som de er med de rette operationer $B = 3P = (3 \cdot 10 + 2)$. Man er nødt til at se på denne problemstilling som en helhedsproces, før man regner, dvs. at man skal se på det hele udtryk før man begynder at regne.
Andet stadie af algebraiseringsproces opstår, hvis der optræder nogle algebraiske opgaver i CP, hvor der er behov for modellering af forskellige former for regnestykker. For eksempel kan summen af ulige hele tal, $1+3 = 4$, $1+3+5 = 9$, $1+3+5+9 = 16$ osv. modelleres ved $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ (se opgave 8 i den diagnostiske test). I dette stadie arbejdes der med simple bogstavudtryk, ligningsløsning (1.grad), algebraiske udtryk med særlig fokus på deres *forståelse* i en opgave.
Det sidste stadie svarer til en CP med flere argumenter i forbindelse med en algebraisk opgave. Her optræder ikke kun de ovennævnte algebraiske elementer, men også algebraiske opgaver med flere størrelser og variabler. Der kræves flere argumentationer og teknikker for at forklare og løse opgaverne. Dette stadie handler om at have indsigt i *formler*. At forstå og omforme formler i algebraiske undtryk, hvori der indgår variable kan ikke ses meget på de nuværende spanske gymnasier, mener Bosch (2012). Brugen af algebraiske teknikker med hensyn til formler er ikke udbredt udenfor emnerne som "lineær" og "kvadratisk" . Men de spiller en afgørende rolle i overgangen fra algebra til funktioner og differentialregning, en overgang, der i dag er helt svækket i gymnasiets matematik, skriver Bosch (2012). For

at illustrere bedre de tre ovennævnte stadier, gives der et eksempel[24] (s.6)

Eksempel. *Think of a number, multiply it by 4, add 10, divide the result by 2 and subtract the initial number, a process that we will represent by a CP:*$P(n) = (4n + 10)/2$*. A problem where we know that* $P(n) = 7$ *can be solved in the first stage, by first simplifying* $P(n)$ *and finding the equivalence* $P(n) \equiv n+5$*, which gives the result* $n = 2$*. If the problem is* $P(n) = 3n-7$*, the passage to the second stage seems more natural (even if we can always find complex techniques to solve it remaining in the first stage). If the CP is* $P(n,a) = (4n + a)/2$ *("Think of a number, multiply by 4, add another number, etc.") and the problem states that* $P(n,a) = 2n-a$*, the same type of techniques and theoretical environment enables to find a solution, which here appears as a relationship between n and a. The third stage corresponds to CP with more than 2 arguments, requiring new techniques to describe the relationships obtained, especially when we do not only work with linear equations.*

I det første stadie løses $P(n) = 7$ ved at simplificere $P(n)$ og finde ækvivalensen $P(n) \equiv n + 5$, som giver $n = 2$. Her lægger fokus på at udvikle elevernes forståelse af det matematiske lighedstegn (=). Mange elever har ofte en forståelse af, at = er den direkte vej til at skrive svaret på beregningerne på højre side. Lighedstegnet får derfor betydningen som "producerer" for eleverne i stedet for ækvivalent. I det andet stadie er teknikken lidt mere komplekst. Det sidste stadie er der behov for flere argumenter og nye teknikker for at løse opgaven. Her handler om at forstå relationen mellem "bogstaverne" og formlen.
I forbindelse med algebraiseringsproces af matematiske organisationer skriver Bolea et al. 2004 i artiklen [4], at undervisning i gymnasiealgebra bør indeholde matematiske opgaver, som inkluderer bl.a. følgende:

- Algebra skal kunne modellere matematiske praxeologier, specielt bør den give os mulighed for at stille og løse problemer i forskellige matematiske domæner (aritmetik, geometri, osv.), som ellers er vanskeligt at løse uden algebra som et værktøj.

- Algebraisk modellering skal kunne give svar på spørgsmålene i forbindelse med omfanget af pålidelighed og begrundelse af de matematiske aktiviteter, hvor den algebraiske model skal være i stand til at beskrive, generalisere og begrunde problemløsninger.

- Algebraisk modellering skal føres til en udvidelse og en ændring af det oprindelige undersøgte praxeologi mht. nye former, nye teknikker, nye fortolkninger, nye links til andre praxeologier (Bolea et al. 2004).

Samtidig, når man ser på algebra som et modelleringsværktøj og dens eksistens i en af de mest almindelige spanske lærebøger, kan det ses, at [4]:

- at mindre end 20 procent af opgaverne svarer til modelleringsaktiviteter. Den del af opgaveaktiviteten, hvor eleverne skal udføre, er ofte reduceret til løsningen af en ligning.

- Og halvdelen af elevernes opgaver svarer til en formel manipulation af algebraiske udtryk.

- Den sidste fase af modelleringsprocessen, altså fortolkningen af det opnåede resultater med henblik på at formulere nye problemer, eksisterer slet ikke.

Det ses, at algebra som modelleringsværktøj fremtræder meget svagt i de spanske gymnasier og det kalder Chevallard for "disalgebraisation", [4]. Og der er ikke fundet en løsning endnu til hvordan man integrerer algebra som modelleringsværktøj i det spanske gymnasiepensum. Man kunne forestille sig, at noget tilsvarende sker i danske gymnasier. Jeg vil på baggrund af de to perspektiver på nutidens gymnasiealgebra opstiller min referencemodel.

3.3 Epistemologisk referencemodel

Det matematiske stof, som bliver behandlet i dette speciale, er gymnasiealgebra vedrørende emnerne bogstavregning, algebraiske udtryk, modellering, ligningsløsning (1.grad). Modellering skal forstås som algebraisk notationer der modellerer for eksempel geometriske egenskaber, aritmetiske regninger ved brug af et symboludtryk (se teori kapitel). De algebraiske udtryk består af en endelig sæt af kombinationer af symboler for størrelser, konstanter og variable med operationerne addition, subtraktion, multiplikation og division. Ligningsløsning (problemsolving) menes her ligninger (1.gradsligning) bestående af et eller to af algebraiske udtryk.

På baggrund af Bosch (2012) i [5] og Bolea et al. 2004 i [4] bliver to forskellige lokale matematiske organisationer MO_1 og MO_2 præsenteret og eksemplificeret. Dette vil udgøre en epistemologisk referencemodel, som kan holdes op imod hver enkelt fase i den didaktiske transposition, som jeg ønsker at belyse, og det vil blive benyttet i den senere analyse af bl.a. en diagnostiske test.

Den første matematiske organisation MO_1 kalder jeg for *aritmetikregler som teoriblok*. Opgaverne i denne organisation handler om løse ligninger af førstegrad, at simplificere, forlænge, gange parenteserne af de algebraiske udtryk etc. Disse opgaver svarer til den klasse af opgaver hvor algebra betragtes som generalisering af aritmetik, ifølge Bosch (2012) (se evt. ovenfor). Opgaverne i organisationen aritmetikregler som teoriblok løses implicit ved brug af regneregler for tal (parenteser, brøker herunder reduktion og forlægning). Med de regneregler i denne organisation menes helt konkret manipulation af bogstaverne, parenteser, brøker som svarer til implicit brug af den kommutative, associative og distributive lov for tal. Disse regneregler svarer til teknikkerne, hvor teorien er baseret på alt hvad man må gøre med tal må man også med bogstaverne. Derfor har jeg valgt at kalde denne organisation for aritmetikregler som teoriblok. En opgavetype siges at ligge indenfor denne organisation er:

T_{11} Givet en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Løs $f(x) = 0$.

I dette tilfælde er funktionen $f(x)$ givet ved et algebraisk udtryk hvor teknikkerne er baseret på manipulation af det algebraiske udtryk (reducering, omskrivning, faktorisering, gange parenteserne osv.). Mere præcist kan disse teknikker fremlægges på følgende:

- Man må forlænge/forkorte brøker ved at gange/dividere med samme tal både i tæller og i nævner.

- I en ligning (førstegrad) må samme led lægges til/trækkes/gange/dividere fra på hver side af lighedstegnet.

- At gange ind i parentes: man ganger et tal ind i parentes ved at gange tallet med hvert led.

- At sætte uden for parentes: hvis to eller flere led har en fælles faktor, kan man sætte den uden for parentes.

- Et produkt er nul netop hvis mindst en af faktorerne er nul.

Den minimale teknologiske diskurs er nødvendigt for at forklare de algebraiske regneregler i MO_1.

θ_{11} For alle $a \in R$ har vi, $0 \cdot a = 0$.
θ_{12} For alle $a, b \in R$ har vi, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
θ_{13} For alle $a \in R$ har vi, $-(-a) = a$.

θ_{14} For alle $a, b \in R$ har vi, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Bemærk, at den sidts θ_{14} kaldes for *den mystiske lov*, hvor den bliver begrundet og vist nærmere senere i dette kapitel.

Jeg vil nu give nogle eksempler på de algebraiske opgaver, som ofte eleverne møder i gymnasiealgebra.

Eksempel. Løs $5x + 5 = 0$ mht. x. En teknik er "hvis to eller flere led har en fælles faktor, kan man sætte den uden for parentes. Altså $5x + 5 = 5(x + 1) = 0$. Her kan man vælge at sætte $x - 1 = 0$ eller "gætte" svaret, som i dette tilfælde er 1. Eller kan dette også løses ved at flytte tallet 5 på anden side af ligningen, således $5x = -5$. Teknikken til at gå fra 5 til -5 vil blive givet som "at lægge -5 på begge sider for at fjerne 5 i den venstre side af ligningen". Den teknik svarer til eksistensen af et additiv inverse som er faktisk dybt begravet her. Den benyttes ikke eksplicit.

Eksempel. Der er givet et udtryk som dette $4(5a + 3) + 4a$, hvor dette udtryk skal reduceres mest muligt. Ifølge teknikkerne "at gange ind i parentes" og "at sætte uden for parentes" fås $20a + 12 + 4a = 24a + 12 = 12(2a + 1)$. Dette er et eksempel på, hvor eleverne bliver bedt om at løse. Disse teknikker giver blot en opskrift på hvordan eleverne skal reducere udtrykket, men de forklarer og begrunder ikke for eksempel, at $12(2a + 1) = 12(a2 + 1)$. Eller hvornår er det tilladt at skrive $12(2a + 1)$ og ikke $12(a + 2)$.

Eksempel. For at løse udtrykket mht. x her $(5x+5)/(5x+5) = 5$ vil mange elever vælge teknikken "at gange på begge sider af lighedstegnet",Ḟor de er jo vant til fra aritmetik, at det er en "regel" og er tilladt her. Denne opgave er ikke triviel og hvornår en funktion er defineret, kender eleverne ikke til den "slags".

Eksempel. For at løse $\frac{2x+3}{2x} = 4 - \frac{2}{x}$ skal eleverne først "skaffe fællesnævner" her $2x$ som er en teknik. Det skal ganges på hvert led i udtrykket og herefter flyttes "x'erne på en side og tallene på den anden side". $2x + 3 = 8x - 4 \Longleftrightarrow -6x = -7$. Den sidste trin $-6x = -7$ hvor x skal isoleres ved at "dividere"-6 på begge sider af lighedstegn. Under hver eneste mellemregning skjules en regneregel, for eksempel det sidste trin svarer til at bruge regnereglen om multiplikative inverse hvilket er helt fjern i denne organisation.

Der kommer nogle situationer, når eleverne bruger regneregler forkert og laver fejl. Hvis eleverne møder en opgave som $7x = 0$, hvor de skal løse den med hensyn til x og det ses at 7 ikke er nul. Eleverne bruger den sædvanlige "at dividere med 7 på begge sider af lighedstegnet". Løsningen bliver $x = \frac{0}{7}$. Hvad skal eleverne i dette tilfælde? Hvilken regneregel skal de bruge, og hvorfor? Eller hvordan kan de begrunde udtrykket $x = \frac{0}{7}$? Eller må de skrive $\frac{0}{7}$? Der opstår mange spørgsmål, der kræver mere eller mindre formelt matematisk argumentationer frem for "sådan er det bare". Det er også en af pointen hos Bosch (2012), at eleverne bruger aritmetik til at løse algebraiske opgaver. Hvad kan en matematiklære gør for at eleverne ikke fokuserer på algebraiske bogstaver som tal, men de betragter dem som et algebraisk objekt for sig selv, noget der repræsenterer eller generaliserer. Hvis regnereglerne skal formaliseres eksplicit, da fås at vide, at ethvert ikke-nul element har et multiplikative inverse, dvs. 7^{-1}, af den associative lov $(ab)c = a(bc)$ fås, $x = 1x = (7 \cdot 7^{-1})x = 7^{-1}(7x) = 7^{-1}0 = 0$. Derfor da 7 ikke er nul så er $x = 0$.

De får ofte svært hvad de "må og ikke må". Derfor skal regneregler bruges eksplicit til at regne de forskellige trin eleverne møder. For eksemåel får mange elever svært ved at regne dette $24 + 5 \cdot 4 - 4$. Hvilken rækkefølge af operationer er tilladt her?

Eksempel. Løs ligningen $2(1 - 4x) = 0$. Teknikken som skal bruges er nulreglen, der siger, at "et produkt er nul netop hvis mindst en af faktorerne er nul"derfor er $2 = 0$ eller $1 - 4x = 0$.

Denne teknik, som er baseret på brugen af nulreglen, siger eksplicit, at: Hvis $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ eller $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies ab \neq 0$. Den forklares hellere ikke yderligere.

Som sagt er teknikkerne i denne organisation baseret på implicit brugen af algebraiske regler for tal, parenteser, brøker. Med implicit brugen af teknikker mener jeg i denne organisation, at regnereglerne begrundes og vises ikke. Disse regneregler bruges som et sæt af konventioner uden retfærdiggørelser og begrundelser. Denne organisation beskæftiger sig med algebraiske opgaver hvor teoriblokken er konventioner. Det betyder, at de algebraiske regneregler bruges uden fokus på forklaring/begrundelse af disse. Da regler ikke er formaliseret og heller ikke begrundet i forbindelse med de algebraiske opgaver da vil de blive løst ved brug af uformaliserede teknikker, hvor teknologien og teorien svarer til forklaringer af operationerne af tal. Det svarer til det førnævnte systematiseringsprogram (CP), som giver uformelle udregninger i forbindelse med bogstavregning.

Arbejdet med denne organisation er ikke tilstrækkeligt hvad algebra i gymnasiet skal være og hvad eleverne skal lære om at løse algebraiske opgaver uden teorien bag. Det giver nogle tekniske begrænsninger (for eksempel, når man forsøger at begrunde og bevise komplekse problemer). Eksempelvis opstår der vanskelighed, når det symbolske udtryk med operationer som addition og multiplikation, i forbindelse med simple aritmetiske opgaver som denne $2 + 9 * 7$, der skal løses. Problemet er ikke selve løsningen, men hvordan den skal løses, hvilken rækkefølge af operationer kommer først. Hvordan spiller operationer sammen for eksempel i den distributive lov. Her vil mange gymnasieelever får svært ved hvad de "må"og "ikke må". Her er behov for formalisering af algebraiske regneregler. Disse regneregler bliver derfor eksplicitte.

Udover det vil der også opstå nogle teoretiske spørgsmål om årsagerne og begrundelserne til nogle komplicerede algebraiske opgaver, samt til retfærdiggørelsen og fortolkningen af resultatet (se stadie 3). Dette fører til en udvidelse af denne praxeologi.

Det er derfor nyttigt at betragte en anden organisation, nemlig MO_2, som jeg kalder *teoretisk algebra*. Denne organisation beskæftiger sig med begrundelserne og retfærdiggørelserne af algebraiske opgaver ved brug af regnereglerne. Derfor er det nødvendigt at formalisere disse regneregler (se jv. nedenunder). Her gøres de algebraiske regneregler et objekt for sig selv. I denne organisation er fokus rettet på aksiomatisering af algebra i gymnasiet. Med aksiomatisering menes her, at den associative lov, kommutative og distributiv lov som svarer til algebraiske regneregler i MO_1 som skal formaliseres i CP. Med hensyn til opgaveregning opstår der behov for at formalisere disse teknikker og dermed teknologien for disse teknikker.

Opgaverne i denne lokale matematiske organisation er:

T_{21} Begrund T_{11}.

T_{22} Vis og begrund (θ_{11}-θ_{14}) for at forklare måden de algebraiske regneregler bruges.

Eksempel. Hvorfor er $(-2) \cdot (x - 3) = -2x + 6$.

θ^*: For ethvert reelt tal a, b vi har $(-a) \cdot (-b) = ab$
Θ^*: Aksimomatisk teori af reelle tal.

En teknik til at begrunde opgaven er baseret på brugen af den distributive lov, at "man ganger et tal ind i parentes ved at gange hvert led. Begrundel-

sen er $0 = 2 \cdot (3-3) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) = 6 + 2 \cdot (-3)$. Så $2 \cdot (-3) = -6$ og $0 = (2-2) \cdot (-3) = 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-3)$.
Det konkluderes heraf, at $6 = (-2) \cdot (-3)$.

Teknikker som skal løse de ovenstående opgaver, er baseret på algebraiske regneregler for tal med simple operationer $(+, *)$. Beviserne og begrundelserne for disse opgaver ved brug af disse regneregler er en del af denne organisation. Det er derfor nødvendigt at formalisere disse regneregler for at bruge dem eksplicit mht. opgaveregning.

Jeg starter med at se på de to ordinære operationer, addition og multiplikation, som kan udføres på mængden af alle heltal. For tre hele tal a, b og c (som ikke behøver at være forskellige) har vi, at:

- A1: $a + b = b + a$
- A2: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- A3: Der eksisterer 0 i $\mathbb{Z}$ så $0 + a = a + 0 = a$
- A4: Der eksisterer $-a$ i $\mathbb{Z}$ så $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- M1: $ab = ba$
- M2: $(ab)c = a(bc)$
- M3: Der eksisterer 1 i $\mathbb{Z}$ så $1a = a1 = a$
- D1: $a(b + c) = ab + ac$
- D2: $(a + b)c = ac + bc$

Disse ovennævnte egenskaber af hele tal er lukkede under addition og multiplikation. Jeg vil fremover kalde disse regneregler for grundlæggende aksiomer for hele tal. Det første aksiom, $A1$, kaldes den kommutative lov for addition. $M1$ er kommutativ lov for multiplikation. $A2$ og $M2$ er associative lov for addition og multiplikation hhv. Tallet 0 er neutralelement ved addition ($A3$) og ved tallet 1 multiplikation ($M3$). Ethvert heltal har et additiv inverse ($A4$). $D1$ og $D2$ er den distributive lov. Der er en kommutativ og en associativ lov for hver af de to regneoperatorer. Til gengæld er der kun en distributiv lov som knytter de to regneoperatorer sammen. Bemærk, at der ikke er multiplikative inverse i $\mathbb{Z}$ som er analogt til A3. Alle disse aksiomer gælder også bl.a. for reelle tal inklusiv dette: For alle $a \in \mathbb{R}$ der findes a^{-1}

så $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, når $a \neq 0$.

Så teknologien er her baseret på forklaring og diskurs af teknikker som for eksempel egenskaberne ved tallene, på den distributive og kommutative lov, additiv invers og neutralelement ved addition. Disse diskurser kan nu organiseres ved teorien om aksiomatisk teori om reelle tal. Den giver de teknikker og den teknologi som skal til for at give begrundelser, forklaringer og beviser for opgaverne i MO_2. Det betyder, at MO_2 fremstår som en tung teoriblok med begrundelsesopgaver. Og MO_1 fremstår som en tung praksisblok med opgaverne uden begrundelser og beviser. Beviserne for T_{21} giver teknikker og teknologien til løsning af opgaverne T_{11}. Derfor vil MO_1 være en del af praksisblokken for MO_2 og er delvist indeholdt i MO_2 og dermed er de ikke adskilt. Så MO_1 og MO_2 deler samme teori og teknologi om aksiomatisk teori om reelle tal, og ringteori og legemer. Jeg vil bruge viden om disse grundlæggende aksiomer og bygger videre på at introducere ringeteori i afsnit 5.5.

De grundlæggende aksiomer kan nu bruges til at vise, den mystiske lov ($(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$), som har lovet tidligere at blive begrundet og bevist. Først skal bevises et lemma[2](s.12-14).

Lemma 3.3.1. **i** *For alle* $c \in \mathbb{Z}$ *har vi,* $0 \cdot c = 0$

ii *For alle* $a, b \in \mathbb{Z}$ *har vi,* $(-a) \cdot b = -(ab)$

iii *For alle* $c \in \mathbb{Z}$ *har vi,* $-(-c) = c$

Bevis. (i) $0 + 0 = 0$ ved at sætte $a = 0$ og fra (A3). Ved at gange c på begge side $(0 + 0) \cdot c = 0 \cdot c$ (og af $x = y \Rightarrow xz = yz$). Af (D2) følger, at $0 \cdot c + 0 \cdot c = 0 \cdot c$. Ifølge (A4) eksisterer $-(0 \cdot c)$ som skal lægges på begge side af lighedstegnet. Fra den tidligere trin adderes $0 \cdot c + 0 \cdot c$ på den venstre side og (af $x = y \Rightarrow x + z = y + z$) fås, at:

$(0 \cdot c + 0 \cdot c) + (-(0 \cdot c)) = 0 \cdot c + (-(0 \cdot c))$

Af den associative lov på den venstre side følger, at $0 \cdot c + (0 \cdot c + (-(0 \cdot c))) = 0 \cdot c + (-(0 \cdot c))$ (A2). Ved at erstatte $0 \cdot c + (-(0 \cdot c))$ med 0 og ved brug af (A4) på hver side, fås $0 \cdot c + 0 = 0$ (Af A4 to gange). Af (A3) følges $0 \cdot c = 0$, hvilket skulle vises.

(ii) For givet a har vi,

$$\begin{aligned}
a + (-a) &= 0 \quad [(\mathrm{A4})] \\
(a + (-a)) \cdot b &= 0 \cdot b \\
a \cdot b + (-a) \cdot b &= 0 \quad [(\mathrm{D\ og\ (i)})] \\
a \cdot b + (-(a \cdot b)) &= 0 \quad [(\mathrm{A4})] \\
(-a) \cdot b &= -(a \cdot b) \quad [\text{da begge er additive inverse for } a \cdot b \text{ og ifølge A4}]
\end{aligned}$$

(iii) For givet $c \in Z$ har vi

$$\begin{aligned}
c + (-c) &= 0 \quad \text{og } (-c) + c = 0 \quad [\mathrm{A4}] \\
(-c) + c &= 0 \quad \text{og } c + (-c) = 0 \quad [\mathrm{A1}] \\
-(-c) &= c
\end{aligned}$$

Af (A4) er c er et additiv inverse for $-c$ og dette er entydigt. Således det entydige inverse af $-c$ er $-(-c)$, (da de entydige inverse af ethvert element, a, betegnes $-a$). Men c er et additiv inverse for $-c$. Derfor er $-(-c) = c$. □

Sætning 3.3.2. *For alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gælder $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.*

Bevis. 1:
Af Lemma (3.3.1)(ii) følger, at

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) \tag{3.1}$$

Men ifølge beviset for Lemma (3.3.1)(ii), er

$$(a \cdot (-b)) = -(a \cdot b) \tag{3.2}$$

Af (1) og (2) og af Lemma (3.3.1) (iii) følges, at $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, hvilket skulle vises. □

Eksempel. Begrund, at hvis $c \neq 0$ og $cx = 0$ så er $x = 0$.
Antag, at $cx = 0$. Hvis $c \neq 0$, da ethvert ikke-nul element har et multiplikativ invers, dvs. c^{-1}. Af den associative lov $(M2)$ fås, $x = 1x = (c^{-1}c)x = c^{-1}(cx) = c^{-1}0 = 0$.
Derfor hvis $c \neq 0$ så er $x = 0$.

Den teoretiske algebra fortæller om hvordan to operationer, for eksempel addition og multiplikation hænger sammen i en algebraisk problemløsning. Det er ikke praksis, men også teoretisk at operere med regnereglerne som udgangspunkt i aritmetik. Dybest set er det aritmetiske teknikker, som fremtræder som algebra med særlig fokus på begrundelse af reglerne. I princippet svarer disse aksiomer til aritmetiske operationer som eleverne er fortrolig med. De er dog ikke bevidst om, at den mystiske lov kan udelades af de grundlæggende aksiomer. Så opgaverne i denne organisation vil typisk være af typen "vise"eller "begrunde". Den mystiske lov, "produktet af to negative tal er positivt" $((-a) \cdot (-b) = a \cdot b)$ kan nu udledes som en konsekvens af disse aksiomer for tal.

Nødvendigheden i at introducere disse for eleverne er vigtig. For eleverne kan være i stand til at bruge aksiomer for at begrunde og retfærdiggøre en algebraisk opgave. Teknikken er ikke helt vanskelig og er nem at lære, hvis der var nok tid til rådighed til at introducere aksiomerne og deres konsekvenser grundigt.

Kapitel

4 Problemformulering

Forrige kapitel gav anledning til at undersøge hvilke MO'er der benyttes i de danske gymnasielærebøger og hvilke MO'er der forventes, at eleverne er i stand til at udføre. Jeg vil på baggrund af referencemodellen undersøge det algebraiske domæne i nutidens gymnasiers matematik for 1.g.

Matematik som et undervisningsfag har ligesom mange andre skolefag en tilknytning til et videnskabsfag, hvorfra det bl.a. henter sine emner. Videnskabsfaget algebra har været med til at danne basis for skolealgebra. Endvidere forholder det sig også sådan, at undervisningsfagene er tangerende til historiske skikkelse af videnskabsfaget. Derfor er det nyttigt at kaste et blik på det historiske perspektiv på algebra som et videnskabsfag for at studere videnskabsfagets udvikling med henblik på det algebraiske domæne i nutidens gymnasiets matematik.

En redegørelse alene af det historiske perspektiv er ikke tilstrækkeligt for at undersøge hvilke MO'er der findes i matematiklærebøger i dag. Jeg vil også undersøge hvilke MO'er der blev benyttet i de danske matematiklærebøger i 1970'erne.

Mere præcist vil jeg undersøge det algebraiske domæne i både gymnasiets matematik i 1970'erne og i nutidens gymnasiers matematik for at sammenligne og identificere hvilke matematiske organisationer (jf. ovenfor) som der benyttes i lærebøger og hvilke af dem, som det forventes, at eleverne skal kunne beherske.

På baggrund af referencemodellen skal der analyseres det historiske perspektiv på algebra for at undersøge hvilke sammenhænge der er mellem videnskabsfaget algebra og det algebraiske domæne i gymnasiets matematik (nu og i 1970). Dette gøres for at undersøge hvor meget af den videnskabelige viden der genfindes i gymnasiets matematik i dag og i 1970'erne.

Der er en række indflydelser i den eksterne didaktiske transposition der afgør hvordan det algebraiske domæne kommer til at se ud på gymnasierne i dag og i 1970'erne. Der udvælges den viden og teknikker fra videnskabsfaget algebra som der skal omformes til en undervisningsfaglig viden og praksis, som kommer til udtryk i de officielle tekster, der beskriver de pågældende domæner. De officielle tekster, som benyttes i dette speciale er følgende:

- læreplanen (1971),
- nuværende læreplan vedrørende matematikfaget i gymnasiet C niveau,
- to matematiklærebøger fra 1974 og 1975
- studentereksamensopgaver fra 1971-1993,
- en matematiklærebog fra gymnasiets matematik (1.g).

En generel men mere præcis formulering af det jeg gerne vil undersøge i specialet er:

- *på baggrund af den opstillede model analyseres videnskabsfaget algebra i et historisk perspektiv.*
- *at analysere det algebraiske domæne i den eksterne didaktiske transposition (læreplaner, studentereksamensopgaver og lærebøger jf. ovenfor) for at undersøge hvilke sammenhænge der er mellem videnskabsfaget algebra og det algebraiske domæne i gymnasiets matematik (nu og i 1970'erne).*
- *at gøre rede for i hvilket omfang (lokale) matematiske organisationer benyttes i to forskellige perioder, nemlig i 1970'er og i dag for at bestemme hvilke MO'er eleverne forventes at være i stand til at udøve i forbindelse med algebraiske opgaver.*
- *at analysere en diagnostisk test på baggrund af referencemodellen for at identificere, udvikle og afprøve elevernes beherskelse af teknikker og teknologier, de anvender i forbindelse med opgaveregning.*

Kapitel

5

Algebra som et videnskabsfag i et historisk perspketiv

På baggrund af min referencemodel vil jeg i dette kapitel analysere videnskabsfagets algebra i et historisk perspektiv ved at fokusere på de algebraiske elementer og deres udvikling som blev beskrevet i MO_1 og MO_2.

5.1 Den klassiske matematik

For mere end tre tusind år siden, beskæftigede babylonierne sig med matematiske problemer omhandlende løsning af lineære ligninger[1]. Ligninger af formen $ax = b$ blev løst ved at gange med $1/a$ på begge sider af ligningen [15](p.22). Babylonierne var fri for brug af bogstaver til at beskrive variable og ubekendte i moderne forstand, idet disse matematiske problemer blev løst verbale.
Teknikken, som babylonierne anvendte i forbindelse med ligningsløsning kaldes *false position*. De benyttede denne til at løse ikke kun lineære, men også andengradsligninger og to ligninger med to ubekendte. Den false position metode bygger på "gætning" af svaret. Mere præcist antager metoden først et bekvemt, men sandsynligvis forkert svar og derefter justeres det ved hjælp af proportionalitet, dvs. svarene gættes vha. proportionalitet (15 p.8). For at forklare teknikken nærmere, kan vi se på følgende eksempel:

Find a quantity such that when it is added to $\frac{1}{4}$ of itself the result is 15?
Opgaven kan oversættes til det moderne symbolsprog, således:

[1] Dette afsnit er baseret på [15]

Løs følgende: $x + (\frac{1}{4})x = 15$.

Ved brug af false position, vil det første gæt være 4, idet $\frac{1}{4}$ af 4 er et heltal og $4 + 1 = 5$. Så $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$. For at finde det korrekte svar, vil de datidens skriftlærde gange 4 med $\frac{15}{5}$, dvs. $x = 3 \cdot 4 = 12$.

Teknikken er, at man gætter den første løsning, og prøver at indsætte det i den oprindelige ligning og regner videre. Man gætter et tal og prøver at indsætte det i ligningen, og regner frem og tilbage for at få en korrekt løsning. Teknikken virker fint, men det vides ikke, hvordan denne algoritme er opfundet og hvorfor den virker som den gør.

Med hensyn til symboludvikling er det først i omkring midten af det tredje århundrede at den græske oldtidsmatematiker, Diofant fra Alexandria (ca 250 e.Kr.), indfører forkortede symboler i forskellige led i ligninger. Fra Diofants tid begyndte altså den såkaldte *synkoperede fase* i matematikken, hvor forkortelse af notationer og bogstaver blev introduceret(**??** p.62). For eksempel blev $1/x^2$ repræsenteret ved $\Delta\Upsilon_\chi$, og ζ stod for den ubekendte, så præsenteret ved $\Delta\Upsilon_\chi$, og ζ stod for den ubekendte, så bogstavsymboler repræsenterede ubekendte. I hans hovedværk *Arithmetica* arbejdede han med ligninger, der indeholdte kun de fire operationer $(+, -, *, /)$ og potensopløftning (x^3, x^4, x^6). Diofant fokuserede på løsning af ligning af formen $ax^n = bx^m$, hvor m, n ikke var højere end 2 i hans tre første bøger.

Generelt handlede matematik for babylonierne om at vælge og ændre en passende algoritme vedrørende ligningsløsninger. Derefter skulle de beherske de aritmetiske teknikker, som var nødvendige for at løse et nyt problem ([15] s. 27). Disse problemer svarer til "algebra" som handlede om ligningsløsning af første,- og andengradsligninger med false position som teknik.

"Algebra" vandrede fra Babylonien til antikkens Grækenland, hvorfra man kender *Euklids Elementer* fra ca. 300 f.Kr. og *Arithmetica* af Diofant. Indtil Diofants tid var algebra retorisk, hvor matematiske problemer og løsninger var beskrevet i et naturligt sprog (**??** p.62). Jeg vil springer den græske matematik over, og går direkte til den arabiske matematik (algebra) da det er irrelevant i forhold til min analyse i specialet.

5.2 Den arabiske algebra (ca. 700-1600)

Araberne har taget de eksisterende matematiske problemer omhandlende ligninger ("algebra") fra Babylon og kombineret dem med den græske "algebra" og dermed har de udviklet en ny algebra. Det er herfra, at algebra tager sit navn.

Den tidligste algebrabog er skrevet af al-Khwarizmi, og har titlen ”Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala”. Ordet ”algebra” stammer oprindeligt fra det arabiske "al-jabr". Al-Kwarizmi definerede al-jabr som ”genetablering” der refereres til operationen "transposing", dvs. at flytte om på den anden side af lighedstegnet. For eksempel kan al-jabr anvendes på udtrykket $3x + 2 = 4 - 2x$ som reduceres til $5x + 2 = 4$.
Der er seks typer af ligninger, som Al-Khwarizmi beskæftigede sig med. Disse er ([15] s.272):

1. Square are equal to roots ($ax^2 = bx$).
2. Squares are equal to numbers ($ax^2 = c$).
3. Roots are equal to numbers ($bx = c$).
4. Squares and roots are equal to numbers ($ax^2 + bx = c$).
5. Squares and numbers are equal to roots ($ax^2 + c = bx$).
6. Roots and numbers are equal to squares ($bx + c = ax^2$).

En af grundene til denne inddeling er, at araberne ikke arbejder med negative tal. Den ovenstående liste indeholder derfor kun positive løsninger. For eksempel giver ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ ikke mening for al-Khwarizmi.

Der gives nu et eksempel for at illustrere arabiske metode til at løse ligninger. Ligesom babylonierne løses de matematiske problemer verbalt.

Eksempel. *What must be the square which, when increased by ten of its own roots, amount to thirty-nine?* ([15] s.272).

Den verbale løsning til dette problem er:

- *you halve the number of roots, which in the present intance yields five.*
- *This you multiply by it self; the product is twenty-five.*

- *Add this to thirty-nine; the sum is sixty-four.*
- *Now take the root of this which is eight, and substract from it half the number og the root, which is five; the remainder is three.*

Opgaven kan oversættes til det moderne symbolsprog, således:
Løs følgende $x^2 + 10x = 39$

$$\frac{10}{2} = 5;$$
$$5 * 5 = 25;$$
$$25 + 39 = 64;$$
$$\sqrt{64} = 8;$$
$$8 - 5 = 3.$$

al-Khwarizmi forklarer verbalt, hvad der skal gøres i hvert trin i ligningen. Der indføres operationerne på tallene uden at der bliver givet en begrundelse. Løsningen består af de fire elementære operationer på tal, som faktisk svarer til CP fra referencemodellen. De fire regningsarter udføres enkeltvis. Teknikken svarer til den verbale aritmetiske "trin-for-trin" metode. De matematiske problemer i forbindelse med ligningsløsninger, som araberne arbejdede med, svarer til dem fra aritmetikregler som teoriblok MO_1.
Processen fra aritmetikken til algebra er påbegyndt af al-Khwarizmi og andre arabiske matematikere. De senere arabiske matematikere bidrog til at vise, at aritmetiske teknikker kunne anvendes på algebra, og omvendt ([15] s.279). Udover den aritmetiske metode, gav Al-Khwarizmi også geometriske argumenter for matematiske problemer. Han gav for eksempel geometriske begrundelser (benyttede geometriske figurer) for at vise ligningen $x^2+c = bx$ ([15] s.271).

5.3 Den abstrakte algebra

Den arabiske matematik (algebra) blomstrede frem til slutningen af 1400 tallet. Samtidig blev mange græske værker i midten af 1600-tallet oversat til latin og blev tilgængelig for mange europæiske matematikere [15] (p.384). Det betød, at matematikken blev til en af de vigtigste felt i Europa. Så udviklingen tog fart i 1500-tallet da bl.a. den italienske matematiker Gerolamo Cardano (1501 – 1575) leverede vigtige bidrag til udviklingen af algebra og ligningsløsninger[2] [15], (p401).

Disse fremskridt førte til øget forskning i matematik specielt i abstrakt retning. En af de stor matematikere, der havde en stor indflydelse på udviklingen af algebra og symboler er Francois Viete $(1540 - 1630)$. Viete er også en af de første, der udviklede symbolsprog i en ligning, hvor vokalerne står for ubekendte og konsonanterne for koefficienter. Det er gennem Vietes arbejde, at den *symbolske fase* startede.
Ud over Viete er det også gennem René Descartes' $(1596 - 1650)$ analytiske geometri algebraen fik en grafisk fremstilling af en lignings rødder, hvilket fremmede udviklingen ([15] s. 473). Han arbejdede også med at udvikle teorien for ligninger ([15] s. 468). Descartes ligningsløsning knyttede sig også i en vis forstand til geometri, men han tegnede ikke kvadratet[3].

Algebra i 1800 tallet

I 19. århundrede begyndte man at studere forskellige matematiske strukturer, som er mængder af elementer med veldefinerede operationer, der opfylder nogle aksiomer. I første halvdel af det nittende århundrede var det de britiske matematikere, der først anerkendte eksistensen af *algebraisk struktur*. Det er her, at algebra for alvor ligner den *abstrakte* algebra som vi kender i dag ([15] s. 710). Her er fokus på at formulere og forstå abstrakte begreber. Det betød, at matematik (algebra) som videnskabsfag ændrede karakter fra at være et videnskabsfag, der studerede geometriske objekter til den meget mere abstrakt matematik, der undersøgte strukturer.

I denne sammenhæng er en formel definition nødvendig for at afklare, hvad der menes med den algebraiske struktur [10] s.113):

Definition 5.3.1. An *operation* on a set S of elements is a *rule* that assigns to each ordered subset of n elements of S a uniquely defined element of the same set S; according to whether $n = 1, 2, 3, ..., n, ...$, the operation is said to be *unary, binary, ternary,..., n-ary,...*.

Med den algebraiske struktur forstås en mængde S, som er forsynet med en eller flere kompositioner, der opfylder visse aksiomer, som for eksempel den associative og kommutative regel. Mængden af naturlige tal udgør sammen med kompositionen $(+)$ en algebraisk struktur. Hvis en mængde S forsynes med kompositionen $*$, da betegnes den algebraiske struktur $(S, *)$.

[2]Løsning til ligninen af formen $x^3 + cx = d$, kaldet Cardanos formel

[3]J. Lützen (personlig kommunikation, den 23. januar 2013).

For at en regel kaldes en *n-ary* operation i en mængde S, skal der opfyldes tre kriterier. Først skal reglen definere et resultat for enhver ordnet delmængde af n elementer af S, eksempelvis er divisionen på mængden af alle reelle tal ikke en binær operation , idet $3/0$ ikke er defineret. For det andet skal resultatet altid være *entydigt*, således er løsning af ligningen $x^2 = a^2$ ikke en unær operation i mængden af reelle tal a, idet $x = a \vee x = -a$ begge er løsninger. Det sidste kriteriet er, at resultatet altid skal være et element af den *givne* mængde S, således er $\sqrt{a}$ ikke en unær operation i mængden af alle reelle tal, a, idet $\sqrt{a} \notin S$ i tilfælde $a = -1$. De to ordinære operationer, addition og multiplikation, kan udføres på mængden af positive heltal, og har basale egenskaber. For eksempel, hvis a, b, c betegner vilkårlige positive heltal, da har vi

1. $a + b = b + a$ den kommutative regel for addition
2. $a * b = b * a$ den kommutative regel for multiplikation
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ den associative regel for addition
4. $(a * b) * c = a * (b * c)$ den associative regel for multiplikation
5. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ den distributive regel for multiplikation over addition

Det ses, at algebra i begyndelsen af det nittende århundrede blev betragtet som symboliseret aritmetik, hvilket også gøres i mange gymnasier i dag [4], [10] s.114). I algebra blev de ovennævnte bogstaver benyttet for at repræsentere tal, og de fem egenskaber, hvor bogstaver repræsenterer positive heltal, holdt altid. Da disse fem egenskaber er skrevet med symboler, vil det være muligt at anvende dem på andre mængder end positive heltal. Eksempler er mængden af rationale eller reelle tal forsynet med addition og/eller multiplikation som opfylder de basale egenskaber. Dvs. de opfylder den associative og kommutative regel, samt den distributive lov.

De fem basale egenskaber kan altså betragtes som postulater, hvor sætninger kan udledes fra. Det ses, at algebra adskiller sig fra aritmetik og bliver til en ren hypotetisk-deduktiv metode, som svarer til den teoretiske algebra MO_2 [10] s.115).
I 1840 udgav Duncan F. Gregory $(1813 - 1844)$ et arbejde, der fremhævede den kommutative og distributive lov i algebra. Samtidig bevægede den britiske skole, hvor Augustus De Morgan $(1806 - 1871)$ var medlem, sig fremad ved at arbejde med ideen om algebraisk struktur (se Definition (5.3.1)). Ideen fra den britiske skole bredte sig hurtigt og nåede til bl.a. den irske

matematiker, William Rowan Hamilton (1805 – 1865) og den tyske matematiker Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877), som var med til at "befri" algebra og forme den moderne abstrakte algebra [10] s.116).

Algebra i 1900 tallet

I 1930 udkommer en bog *Moderne algebra* af B.L. van der Waerden (1903 – 1996), hvor han bl.a. arbejdede med ideer om grupper, ringe, legemer, vektorrum, idealer, algebraer osv. ([15] s. 900). I bogen behandler han den moderne aksiomatiske metode, hvor anvendelsen af denne metode betragtes som et væsentligt element i 20 århundrede.
I det 20.århundrede begyndte mange matematikere bl.a. E.V.Huntington at finde uafhængige mængder af aksiomer for legemer og grupper. Han var muligvis inspireret af Hilberts (1899) aksiomatisering af euklidiske-geometri ([2] s. xxiii). Den mest berømte abstrakt-aksiomatiske metode blev skrevet af E. Steinitz i 1910, hvor han startede med at give en abstrakt definition af legemer (se Definition (**??**)), ([2] s. 83).

Det historiske perspektiv på videnskabsfaget algebra viser, at algebra var et intenst forskningsområde specielt i perioden 1800 – 1930 hvor matematikere gradvist begyndte at indføre abstrakte matematiske begreber.

Eksempel: Lad S være mængden af alle lige positive heltal. Lad $+$ og $*$ betegne sædvanlig addition og multiplikation.

Dette eksempel handler om at bevise at mængden S opfylder de ovennævnte fem aksiomer. Den kan løses ved en teknik, hvor man først vælger to elementer fra den givne mængde S, og derefter viser, at de fem egenskaber er opfyldt.

Opsummering

Begrebet algebra blev oprindeligt (i babyloniernes og arabiske matematik) identificeret med ligningsteori. Ordet Algebra kommer fra lærebogen skrevet af den arabiske matematiker Muhammed Ibn Musa Al-Khwarizme, som betyder "forenkling"eller "genoprettelse".

Skønt den græske matematik var rettet mere mod geometri, så var der en matematiker Diofant fra Alexandria (ca. 250 e.Kr.) som arbejdede med ligninger og indførelsen af symboler.

Gennem araberne blev algebra smeltet sammen med den græske matematik og ført videre til Europa. Særligt til Italien, hvor mange italienske matematikere producerede fremragende resultater indenfor løsning af tredjegradsligning, som G. Cardano (1501-1575) først offentliggjorde det. Senere indførtes der algebraiske symboler, som bl.a. stammer fra den franske matematiker F. Viettes (1540-1630) arbejde. Han brugte a, b og c for kendte størrelser og x, y og z for ukendte, hvor det danner grundlag for betegnelsen *bogstavregning* for algebra som vi kender i dag.

Samtidig viste den norske matematiker N.H. Abel, at løsningen af ligningen af grad fem eller derover ikke kan løses. Dette gav anledning til at man i 1800 tallet begyndte at studere strukturer, grupper etc.

Dette førte til skabelsen af den abstrakte algebra hvor man begyndte at studere kompositionsregler, grupper, ringe og legemer.

Matematiske organisationer

På baggrund af referencemodellen vil jeg i dette afsnit beskrive de matematiske problemer, som jeg stødte på i redegørelsen af det historiske perspektiv på algebra som et videnskabsfag. Jeg starter med at definere de matematiske problemer.

Løs følgende: $ax + b = 0$.

Det er et typisk matematisk problem, som babylonierne arbejdede med. Teknikken, som de anvendte er det "false" positionssystem, som svarer til den aritmetiske tilgang til løsning af matematiske problemer. Babyloniernes ligningsløsning afspejler altså en teknik knyttet til en opgavetype, vi i dag ville kalde førstegradsligninger. Der gives ingen teoretisk forklaring på hvorfor man kan gøre således. Den eneste "begrundelse" er, at i nogle konkrete situationer, passer det første "gæt" godt i en ligningsløsning. Arbejdet med denne typeopgave udgør en specifik praxeologi med kun en teknik.

Ligesom babylonierne arbejdede den arabiske algebra også med ligningsløsning af bl.a. lineære ligninger, men primært med andengradsligninger. Her er et eksempel på et matematisk problem:

Løs følgende: $bx = c$

Teknikken er baseret på aritmetisk (trin for trin) metode med fire basale operationer $(+, -, /, \cdot)$. Den teknik og de opgaver minder på mange måder om de elementære aritmetiske opgaver i det beregningsprogram CP fra referencemodellen. Dog var der givet nogle geometriske begrundelser for løsning af andengradsligning, for Al-Khwarizmis interesserede sig mere for de geometriske argumenter.

Opgaverne i den klassiske og arabiske algebra skulle løses med aritmetiske metoder, hvor der ikke var en formel teori. Som anført før svarer disse opgaver kun til begyndelsesstadie af algebraiseringsproces dog uden formelle argumenter. Desuden er mange babylonske og arabiske algebraopgaver mere anvendelsesorienteret end teoretiske. Det gør, at fokus var mindre på teoretiske argumenter frem for praktiske. Opgaverne var ikke blevet løst med henblik på at give en begrundelse, men snarere at finde en algoritmisk metode til at løse komplicerede problemer. Her taler vi om en specifik praxeologi (med samme teknik, se 2), som blev benyttet af både babylonierne og araberne. Vi har altså en MO, der faktisk er analogt til MO_1, aritmetikregler som teoriblok. Hvorvidt opgaverne skulle begrundes og bevises, altså MO_2 teoretisk algebra, beskæftigede babylonierne og araberne sig ikke med.

Den sidste algebraiske opgave er taget fra den abstrakte algebras periode:

Givet en mængde A med visse egenskaber. Vis, at mængden S opfylder de ovennævnte fem aksiomer (fra den abstrakte algebra).

I modsætning til den klassiske og arabiske algebra, handler opgaverne i den abstrakte algebra om at give begrundelser og forklaringer ud fra et sæt af aksiomer. Her træder vi ind i den aksiomatiske tilgang til matematik (algebra), hvor fokus lægger på at vise hypoteser ud fra basale aksiomer. Det er derfor klart, at algebraiske problemer er mere teoretisk orienteret, idet den aksiomatiske tilgang havde en stor indflydelse på videnskabsfaget algebra. Her er teknologien og teorien baseret på den aksiomatiske teori. Det svarer til en lokal matematisk organisation, der er analogt til vores MO_2, teoretisk-algebra.

De to ovenstående (klassisk og arabisk) specifikke praxeologier, som handler om ligningsløsning er en del af en lokal praxeologi, nemlig MO_1 dog uden begrundelse og retfærdiggørelse. De to lokale matematiske organisationer (MO_1 og MO_2) er en del af en regional praxeologi med en fælles teori. Alle disse praxeologier kan begrundes og vises ud fra en samlet teori, aksiomatisk teori for reelle tal og ringteori. Jeg vil i næste afsnit fremlægge det.

5.4 Elementer af det nutidige videnskabsfag algebra

I dette afsnit vil jeg give et overblik over relevante dele af den videnskabelige matematiske viden. Jeg vil gennemgå de basale aksiomer for ringe og legemer. Til det benytter jeg lærebogen **Rings, Fields and Groups**[2] som må antages at give et nutidigt billede af hvordan man kan "nærme sig" videnskabsfaget algebra.

Som jeg har skrevet i referencemodellen MO_2, vil jeg nu i dette afsnit, ved brug af viden om mængden af hele tal og de grundlæggende aksiomer, præsentere teorien for ringe. De hele tal $\mathbb{Z}$ i kapitel 3 er et eksempel på en mængde med to operationer. Ringbegrebet generaliserer dette til nogle vilkårlige mængder med to operationer. Essensen i dette afsnit er, at introducere ringteorien som kan være med til at begrunde regnereglerne, hvis status i gymnasiets matematik er "sådan er det bare" eller "sådan er en regel" når man skal regne $(-1) \cdot a = -a$.

Den abstrakte definition af en ring

Mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal er en af modellerne for den abstrakte teori om ringe. Det er derfor ikke overraskende, at vi kommer til at bruge mange analogier til de aksiomer som blev angivet i det forrige kapitel (3). Det er her relevant at gentage listen af aksiomer med nogle ændringer i notationen (se senere) for at lægge vægt på, at der ikke længere kun arbejdes med tal. Dermed vil jeg i resten af afsnittet ofte være interesseret i mængder af elementer, for hvilke der er defineret to binære operationer, som i analogi med hovedeksemplet $\mathbb{Z}$ gives notationerne $+$ og $\cdot$, og som kaldes henholdsvis addition og multiplikation[4]. For en given mængde S kan operationerne $+$ og $\cdot$ på S enten opfylder ingen, nogle eller alle af følgende:

Aksiomer For tre elementer a, b og c i S (som ikke behøver at være for-

[4]Bemærk, at der til enhver talmængde er knyttet de to regningsarter, addition og multiplikation, men at jeg blot skriver $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{R}$

skellige) har vi:

A1 $a + b = b + a$
A2 $(a + b) + c = a + (b + c)$
A3 $\exists z \in S$ sådan at $z + a = a + z = a$
A4 For ethvert $a \in S, \exists a^* \in S$ sådan at $a + a^* = a^* + a = z$
M1 $a \cdot b = b \cdot a$
M2 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
M3 $\exists e \in S$ sådan at $e \cdot a = a \cdot e = a$
$M4$For ethvert $a \in S,$ sådan at $a \neq z, \exists a' \in S$ sådan at $a \cdot a' = a' \cdot a = e$
D $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ og $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
Z Hvis $a \cdot b = z$ så er $a = z$ eller $b = z$ (eller begge)

Aksiomerne går ofte under samme navn som i afsnit 3.3 i referencemodellen. For eksempel er M2 den **associative lov for multiplikation**. For at gøre notationen kortere bruger vi ordene **nul** og **enhed** (i stedet for additiv og multiplikativ identitet) for at beskrive henholdsvis z og e. Ethvert element s i S (også $s = z$), for hvilket der eksisterer et ikke-nul element t i S sådan, at $s \cdot t = z$ eller $t \cdot s = z$ kaldes en *nuldivisor*. Bemærk, at vi midlertidigt har erstattet symbolerne $0, 1, -a, a^{-1}$ med z (for ordet zero), e (for einheit - et tysk ord), a^* og a' for at sikre, at vi ikke ubevidst antager ubeviste egenskaber for vilkårlige ringelementer baseret på vores intuition om tallene $0, 1, -a$ og a^{-1}.

Definition 5.4.1. Lad R være en ikke-tom mængde udstyret med de to binære operationer $(+, \cdot)$.

	A1	A2	A3	A4	M2	D	M1	M3	M4	Z	3-tuplen $< R, +, \cdot >$ hedder en
1	x	x	x	x	x	x	-	-	-	-	**ring**
2	x	x	x	x	x	x	x	-	-	-	**kommutativ ring**
3	x	x	x	x	x	x	-	x	-	-	**ring med enhed**
4	x	x	x	x	x	x	-	-	-	x	**ring uden nul divisorer**
5	x	x	x	x	x	x	x	x	-	-	**kommutativ ring med enhed**
6	x	x	x	x	x	x	x	-	-	x	**kommutativ ring uden nul divisorer**
7	x	x	x	x	x	x	-	x	-	x	**ring med enhed uden nul divisorer**
8	x	x	x	x	x	x	x	x	-	x	**integritetsområde**
9	x	x	x	x	x	x	-	x	x	x	**skævlegeme**
10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	**legeme**

Figur 5.1: Tabellen angiver følgende definitioner

Bemærk, at opfylder $+$ og $\cdot$ aksiomerne A1 - Z. En *ring* er dermed en 3-tupel bestående af en mængde R og to binære operationer $+$ og $\cdot$ som opfylder de seks aksiomer angivet i tabellen. *En kommutativ ring* opfylder alle de seks aksiomer samt M1, dvs. at multiplikationen er kommutativ.

Af tabellen ses, at en kommutativ ring, hvor nulregelen $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ gælder, kaldes for et *integritetsområde.* Et *legeme* er et kommutativt skævlegeme og opfylder alle aksiomer (se tabellen xx). Alle legemer er ringe men ikke alle ringe er legemer.

Eksempel. $\mathbb{Z}$ er en kommutativ ring, idet aksiomerne (A1-D) er opfyldt (se tabellen). De reelle tal $\mathbb{R}$, og $\mathbb{Q}$ er legemer og regneregler for de rationale tal er præcis de samme som for de reelle tal (se 3). Polynomier i én variabel med reelle koefficienter udgør en ring, oftest betegnet $\mathbb{R}[x]$. Ethvert legeme er et integritetsområde. De hele tal $\mathbb{Z}$ udgør et integritetsområde, som ikke er et legeme. De komplekse tal $\mathbb{C}$ udgør også et legeme. Angående gymnasiealgebra, er der to slags ringe, som er vigtige, nemlig legemer ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) og integritetsområder ($\mathbb{Z}$, polynomier) (se tabellen).

Vi har indtil videre set, at de grundlæggende aksiomer for mængderne $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ er de samme som for et legeme, da $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$ er legemer. Ved brug af disse aksiomer vil jeg nu forklare de mest optrædende regneregler for reelle tal, som forekommer mest naturligt i gymnasiets matematikbøger, med statussen er som naturlov eller "sådan er det bare". Der er mange af sådanne regler, men jeg nøjes med at nævne følgende (fra referencemodellen):

- Den distributive lov.
- Faktorerens orden er ligegyldig.
- Nulreglen.
- Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte.

Nedenunder vil jeg vise nogle eksempler på, hvorledes disse ovennævnte regler kan nu udledes af de grundlæggende aksiomer. Ved hjælp af disse og kun disse aksiomer kan jeg nu udvikle de velkendte regneregler. Bemærk, at aksiomerne udtaler sig kun om *eksistensen* og ikke om *entydigheden.* Aksiomsystemet sikrer implicit entydigheden, hvilket bevises i det følgende.

Ringegenskaber som følger fra aksiomerne

Selvom vi tillader os at bruge vores intuition til at formulere sætninger og deres beviser, skal vi være forsigtige med at sikre, os at vores resultater er logisk opbygget. Det gør vi ved at bruge den aksiomatiske metode, hvor vi eksplicit angiver vores hypoteser i begyndelsen og hvor et bevis består af en sekvens af udsagn, som er logisk opnået fra hypoteserne. Som et første eksempel: Det er klart at alle de konkrete ringe, vi har undersøgt indtil videre har præcist et nulelement. Aksiom A3 giver, at der altid er mindst ét nulelement. Men hvorfor er der *præcist* et nulelement i enhver ring? Aksiomsystemet sikrer blot implicit entydighed, hvilket bevises i det følgende.

Sætning 5.4.2. *Lad* $< R, +, \cdot >$ *være en ring. Så indeholder* R *præcist et element som opfylder aksiom A3. Yderligere gælder at for hvert* $a \in R$*, findes præcist et tilsvarende element* a^* *som givet i A4.*

Bevis. Antag at z og z_1 er elementer i R som begge opfylder A3. [Dermed har vi at $z + a = a$ og $b + z_1 = b$ for alle a og b i R. Specielt ser vi at ved at sætte $a = z_1$ og $b = z$ at

$$z + z_1 = z_1 (\text{siden } z \text{ opfylder A3})$$

og

$$z + z_1 = z (\text{siden } z_1 \text{ opfylder A3})$$

Det følger, at $z_1 = z$ hvilket skulle vises.

For den anden påstand bemærker vi først at R har mindst et element af den nødvendige type ifølge hypotesen. Antag nu, givet $a \in R$, at a^* og a_1^* er elementer af R som opfylder A4. [Vi begynder med ligheden $(a^* + a) + a_1^* = a^* + (a + a_1^*)$ hvilket er sandt ifølge A2.] Nu gælder at

$$\begin{aligned}(a^* + a) + a_1^* &= z + a_1^* \text{ (siden } a^* \text{ opfylder A4)}\\ &= a_1^* \text{ (siden } z \text{ opfylder A3)}\end{aligned}$$

Ligeledes

$$\begin{aligned}a^* + (a + a_1^*) &= a^* + z \text{ (siden } a_1^* \text{ opfylder A4)}\\ &= a^* \text{ (siden } z \text{ opfylder A3)}\end{aligned}$$

Dermed ser vi at $a^* = a_1^*$ hvilket skulle vises.

□

Dette viser, at R højst har et nulelement, derfor har R netop et nulelementet. I det første trin i beviset starter jeg med at *antage* to elementer i en ring. Jeg begynder at operere med disse elementer, hvor jeg erstatter dem med a og b og regner videre. Den ovenstående sætning viser, at kun aksiomerne A3 og A4 er tilstrækkeligt til at vise sætningen. Jeg vil uden yderligere motivation give nu følgende videre konsekvenser af aksiomerne.

Sætning 5.4.3. *Lad* $< R, +, \cdot >$ *være en ring. Så gælder for ethvert* $a, b \in R$*:*
(i) $z \cdot a = a \cdot z = z$
(ii) $(a^*)^* = a$
(iii) $a^* \cdot b = a \cdot b^* = (a \cdot b)^*$
(iv) $a^* \cdot b^* = a \cdot b$
Hvis det yderligere gælder at R *har et enhedselement,* e*, så er*
(v) $e^* \cdot b = b \cdot e^* = b^*$
(vi) $e^* \cdot e^* = e$.

Selvom vores elementer ikke nødvendigvis er tal - faktisk behøver deres natur ikke specificeres overhovedet - vi erstatter z, e og a^* notationen med symbolerne 0, 1 og $-a$. Med denne notation bliver sætningerne (i) til (iii) til

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;
(ii) $-(-a) = a$;
(iii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$;
mens (vi) bliver til
(vi) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Beviserne i en ring er analogt til beviset i referencemodellen 3.3.2 og 3.3.1. Jeg vil derfor ikke gennemgå det, men blot pointere, at regnereglerne i ovenstående sætning gælder i enhver ring, altså også $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$.

Den distributive lov, viser en sammenhæng mellem addition og multiplikation. Loven Det kan direkte udvides til en regel for multiplikation af et tal med en sum af flere end to tal, for eksempel $x(a+b+c) = x(a+b)+xc = xa+xb+xc$. Af den distributive lov og egenskaberne ved addition (A2-A4) følger, at $0 \cdot c = 0$, $(-a) \cdot b = -(ab)$ og $(-1) \cdot a = -a$. Det svarer til de regneregler, som blev beskrevet i referencemodellen. Beviset for de to første kan ses i lemma 3.3.1 i referencemodellen.

Det kan nu vises og begrundes at $(-1) \cdot a = -a$.

Sætning 5.4.4. *I et vilkårligt legeme* $(L, +, \cdot)$ *gælder regnereglen: for alle* $a, b \in L$*:*
$(-1) \cdot a = -a$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
& a + (-1)\cdot \\
& = a + a \cdot (-1) \\
& = a \cdot 1 + a \cdot (-1) \\
& = a \cdot (1 + (-1)) \\
& = a \cdot 0 \\
& = 0
\end{aligned}
$$

M1, M4, D, A4 (hvor -1 er det inverse element til 1). Det sidste trin i beviset (ii) fås fra lemma3.3.1 □

Dette illustrerer, hvordan viden om $\mathbb{Z}$ kan bruges i den teoretiske algebra i modellen (MO_2) til at give sætningerne og beviserne i 5.5.3. Sætningerne 5.5.4 og 5.5.2 er ikke kun medtaget for at vise beviserne, men også for at illustrere, at man er i stand til at genskabe de sædvanlige regneregler ud fra de grundlæggende aksiomer. Ligeledes kan der ud fra aksiomerne også vises andre regneregler som for eksempel formlen for kvadratet på en toleddet størrelse. Det er næppe interessant at se beviset for, idet pointen med dette afsnit ikke er at gengive beviserne, men snarere at vise, at den aksiomatiske tilgang kan udlede bestemte regler (se jf.) såsom denne mystiske lov på trods af de minimale forudsætninger. Det er overraskende, at kun de første seks aksiomer er tilstrækkelige og nødvendige (se tabellen). De regneregler som er begrundet og vist i ovenstående sætning gælder i et vilkårligt legeme. Ved at bevise at de få aksiomer gælder i en algebraisk struktur har man samtidig bevist, at alle regnereglerne gælder. Regning med symboler inden for de algebraiske strukturer minder meget om regning med tal. Aksiomer inden for ringteori og legemer er alle opfyldt af mange talmængder. Disse aksiomer indeholder kun to elementære operationer, addition og multiplikation, som er hentet fra aritmetik. Derfor er det helt naturligt at anskue algebra som en generel version af aritmetiske operationer, som udføres på tal.

Den aksiomatiske metode i den moderne algebra som et videnskabsfag giver en dybere forståelse for hvordan tallene i algebra hænger sammen. En introduktion af de minimale aksiomer i gymnasiet vil ikke skabe undren over $(-1)\cdot(-1) = 1$ eller $(-1)\cdot a = -a$, men snarere giver indsigt i tallene. Med minimael mener jeg de første seks aksiomer. En tilgang, der gør det muligt for eleverne at få en dybere viden om tallene og deres natur.

Kapitel

6 Læreplaner og Lærebogsmateriale

Dette kapitel vil beskæftige sig med det andet trin af den didaktiske transposition. Jeg vil i dette afsnit starte med at give en kort redegørelse for to læreplaner, nemlig den nuværende læreplan for gymnasiets matematik og læreplanen fra 1971, samt en sammenligning heraf [1]. Derefter gennemgår jeg, på baggrund af referencemodellen, en analyse af lærebøgerne i de to forskellige perioder (nu og 1970'erne).

6.1 Læreplan i 1971

Ifølge bekendtgørelsens læreplan (1971) for matematisk linje, har undervisningen til formål:

> *at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegang og metoder, at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegang og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder, at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform, at udvikle fantasi og opfindsomhed samt en forståelse og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder* ([21] s.265).

[1] I 1971 var gymnasiet delt i to linjer, den sproglige og den matematiske linje. De to linjer blev igen delt i fagspecifikke grene som for eksempel den matematisk-fysiske gren og den matematisk-naturfaglige gren[21] (s.232). I specialet er det kun den matematiske linje med den matematisk-fysiske gren, som er relevant.

Og dette skulle på den matematisk-fysiske gren opnås ved undervisning inden for emneområderne, specielt inden for algebra:

- almen mængdelære
- ækvivalensrelation
- afbildning
- invers og sammensat afbilning
- komposition
- gruppe
- isomorfi

Emnerne mængdelære og algebra er under et emne. Og der var ikke tale om en flugt fra abstrakt algebra, for der skulle stadig undervises i kompositionsregel og begreberne gruppe, undergruppe og isomorfi. Dog udgik emnerne ringe og legemer i denne læreplan ([21] s.265).

I læreplanen (1971) for matematisk-fysisk linje er det emneområde, der relaterer sig til det algebraiske domæne i gymnasiet i 1970'erne, gjort klart i forbindelse med hvilke algebraiske emner der skal fremkomme i matematiklærebøgerne, hvilket svarer til en tilgang til den abstrakte algebra set ud fra det historiske perspektiv. I modsætning til Boschs (2012) beskrivelse af algebra som indgår som et redskab for andre matematiske domæner er algebra her som et selvstændigt domæne. Her er mere fokus på den teoretiske og abstrakte algebra, hvor der er minimal behov for indførelsen af algebraisering og modellering. Ud fra emnerne kan det forventes at algebraiske opgaver vil være mere præget af begrundelse, beviser og retfærdiggørelse. Det svarer til en matematisk organisation som lægger mest vægt på den teoretiske side af algebra, hvilket er analogt til den teoretiske algebra MO_2 i referencemodellen.

Bemærk, at emnerne mængdelære og komposition fremkommer i forbindelse med en senere analyse af lærebøger og eksamensopgaver fra 1971-1991. Jeg vælger derfor ikke at gå i detaljer med beskrivelse af andre emner end disse to. Dette gøres for at indsnævre det faglige område for det algebraiske domæne i gymnasiets matematik i 1970'erne. Derudover gælder læreplanen for gymnasieelever der slutter, et tre års gymnasiestudie med en prøve (studentereksamen) ([21] s.234), hvilket vil sige, at studentereksamensopgaver svarer til gymnasiets matematik A-niveau. Jeg vil nu se på den nuværende læreplan for at identificere hvilke algebraiske elementer, der optræder i gymnasiets matematik for 1.g.

6.2 Læreplan (2010)

I forhold til den ældre læreplan (1971) er den nye læreplan præget af vejledning og den frihed som en enkelt underviser har med hensyn til undervisningsmetoder og de emner, vedrører algebradomænet. Ser vi på kernestoffet for matematik C, er emnerne de følgende:

- *regningsarternes hierarki, ligningsløsning med grafiske og simple analytiske metoder, procent- og renteregning samt absolut og relativ ændring.*
- *formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable*
- *simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, simple empiriske statistiske diskriptorer*
- *forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter*
- *xy - plot af datamateriale samt karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge, anvendelse af regression* [22]

For at indsnævre det faglige mål i specialet vælger jeg kun at se på regningsarternes hierarki og ligningsløsning selvom algebra også indgår i alle de andre emner.

De ovenstående emner tydeliggør Boschs (2012) beskrivelse af algebra i de spanske gymnasier. Algebra er bestemt ikke et domæne for sig selv men et "skjult" redskab eller en modelleringsværktøj for andre matematiske domæner. For eksempel kan en underviser ifølge, vejledning[23] 2010 sætte fokus på emnerne *regningsarternes hierarki* i forbindelse med opgaver vedrørende lineære udtryk, *formelhåndtering og løsning af ligninger* i forbindelse med geometriske opgaver (arealer, Pythagoras'sætning) og variabelsammenhænge. Her optræder algebra som et modelleringsværktøj for geometri.

Med hensyn til *løsning af ligninger* skriver vejledning (2010), at *gennem arbejdet med et righoldigt eksempelmateriale skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger og have opbygget en indsigt i, at at løsninger opnås gennem gentagne anvendelser af omvendte operationer* [23] (s.14).

Eleverne skal ifølge de faglige mål for matematik C-niveau kunne:

1 *håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold*

2 *gennemføre simple matematiske ræsonnementer*

3 *anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig reflekterende til disse samt til rækkevidde af modellerne*

4 *anvende simple statistiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale, kunne stille spørgsmål ud fra modellen, have blik over, hvilke svar der kan forventes, og være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog*

5 *redegøre for foreliggende geometriske modeller og løse geometriske problemer*

6 *demonstrere viden og matematiske metoder, matematikanvendelse samt eksempler på matematikkens samspil med den øvrige videnskabelige og kulturhistoriske udvikling*

7 *anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer*

[22].

Med hensyn til algebradomænet i nutidens gymnasie, er de faglige mål formuleret bredt. De algebraiske elementer indgår i hver af disse, og det er derfor ikke muligt at gennemføre et forløb, om for eksempel geometri eller statistik, uden at inddrage algebra. Det er heller ikke realistisk at stille algebraiske opgaver uden hjælpemidler som it- eller CAS-værktøjer. Dette vender jeg tilbage til i afsnittet diskussion ([?]). Med hensyn til matematiske organisationer, har nutidens læreplan gjort det tydeligt, hvilken side af "algebra", der stilles krav til, at lærerne skal undervise i. Det svarer netop til den MO1 fra referencemodellen. Af den grund vil det ikke være overraskende hvis nutidens matematiklærebøger, ligesom de spanske, lægger fokus på den klasse af opgaver, som beskriver algebra som en generalisering af aritmetik (se kapitel3).

6.3 Lærebøgernes tilgang

På baggrund af referencemodellen vil jeg i dette afsnit beskrive, hvordan den matematiske viden i matematiklærebøgerne er designet til at blive undervist (det andet trin i den didaktiske transposition). Jeg benytter matematiklærebøgerne (**Matematik 1, 1975**), (**Matematik 2.2, 1974**) og (**Hvad er matematik C, 2012**) for at eksemplificere og identificere hvilke matematiske praxeologier, der anvendes inden for algebraiske opgaver (nu og i 1970'erne).

Lærebogen Matematik 1, 1975

Lærebogen Matematik 1 er beregnet til matematikundervisning på gymnasiets første år. Lærebogssystemet består af bøgerne $1, 2.1, 2.2$ og 3, hvor 2.1 og 3 er beregnettil alle grenene i $2-3$.g, mens bog 2.2 kun er til den matematisk-fysiske gren i $2-3$.g. Da studentereksamensopgaverne er for den matematisk-fysiske gren, vælger jeg at benytte både bog 1 og 2.2 med særlg fokus på emnerne mængdelære og komposition. Bemærk, at ifølge læreplanen (1971) er mængdelære og algebra under samme emne.

Der er ni kapitler i lærebogen Matematik 1, og det første er *Mængder, delmængder* som de andre otte bygger videre på.

Lærebogens forfatter introducerer begrebet *mængdelære* ved at give eksempler fra virkelighedens, bl.a. *Med et ord som f.eks "lærerkollegiet"sammenfatter man alle de personer, der er knyttede som lærer til en given skole.* Derefter vender forfatteren tilbage til matematikkens verden, hvor ordet *mængder* introduceres ved at skrive *når vi i matematikken foretager sådanne sammenfatninger....* Tilsvarende introduceres elementerne ved at *...den mængde, der betegnes "lærerkollegiet" ved N.N. gymnasium har som elementer de personer, der er lærer ved den pågældende skole..*

De første ekempler, som lærebogen Matematik 1 vælger, er mængden af hele tal, rationale tal og reelle tal. Derefter karakteriseres mængderne ved de elementer, de indeholder. *Hvis a betegner et objekt, der er element i M,* *skriver vi* $a \in M$. Dette kan læses *"a er et element i M eller a tilhører M*. Heraf kommer flere eksempler og forklaringer på hvad en mængde kan indeholde og hvordan den kan beskrives ved brug af matematiske symboler. For eksempel *Af og til kan man klargøre opregningen ved at antyde en, efter hvilken mængdens elementer kan bestemmes. Således betegner symbolerne,* $2, 4, ..., 2n, ...$ og $2, 4, ..., 2^n, ...$ *henholdsvis mængden af positive lige tal og mængden af potenser af 2.*([16] s.2).

Den første eksplicitte definition, der viser sig, er definitionen på en *delmængde.*

Definition 6.3.1. En mængde A siges at være en *delmængde* til mængden B, hvis ethvert element i A også er element i B. At A er en delmængde til B, angiver vi ved at skrive $A \subseteq B$ eller $B \supseteq A$.

Definitionen fortsættes med at definere hvad en *ægte delmængde* er og derefter forklares "tegningen" $\subseteq$. Lærebogen illustrerer forhold vedrørende mængder ved brug af tegninger (geometrisk opfattelse af mængder).

Eksempel[2]:

> *Når* $A = \{2, 3, 4\}$ *og* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *er* $A \subseteq B$, *thi ethvert element i* A *er element i* B. *Der gælder endda, at* $A \subset B$, *thi f.eks. tallet 5 er element i* B *men ikke i* A.

Her er den valgte teknik til at vise, at A er en ægte delmængde til B, og det er *f.eks. tallet 5 er element i B men ikke i A*. Teknikken bruges ved hjælp af et eksempel, hvor teorien bygger på den ovenstående definition.
Efter dette eksempel skriver lærebogsforfatteren, at *Når man skal beskrive en bestemt delmængde A til en given mængde M, gør man det ofte ved at angive en egenskab, som netop elementerne i A besidder.*. Mængden af $\mathbb{Q}_+$ der er en delmængde af $\mathbb{Q}$ beskrives som *mængden af de elementer x i Q, for hvilke* $x > 0$.
Eksempel[3]:

> *Mængden* $\{\, x \in \mathbb{Z} | x \geqq 10\}$ *består af alle tal fra og med 10 og opefter. Denne mængde kan angives ved* $\{\, x \in \mathbb{Z}_+ | x \; skrives \; med \; mindst \; to \; cifre\}$ og ved $\{10, 11, ..., n + 9, ...\}$

[2]([16] s.3)
[3]([16] s.4)

Ofte er der en forklaring af det matematiske sprog (de algebraiske symboler) på hvordan en mængde skal defineres. Det er teknologien som forklarer teknikken ved brug af algebraiske symboler. Det er disse teknikker viser sig at være meget anvendelig i forbindelse med mængdelærens problemer. Symbolerne bliver i høj grad præciseret og brugt i forbindelse med forklaring af opgaver. Matematiske begreber forklares ved brug af eksemplerne som relaterer sig til virkeligheden og samtidig oversættes de til et algebraisk symbolsprog. Definitionerne spiller en væsentlig rolle i forbindelse med opgaveløsning og de benyttes som en "slags" teori. Resten af dette kapitel handler om brug af mængdelære i forbindelse forskellige problemer indenfor emnet udsagn. Desuden benyttes emnet mængdelære også senere bl.a. i forbindelse med et kapitel om reelle tal og afbildninger. I kapitlet om reelle tal angives der de grundlæggende egenskaber for de reelle tal, som er i overensstemmelse med de algebraiske regler for tal i MO_2 i referencemodellen (se kapitel 3. Opgaverne i dette kapitel handler hovedsageligt om at lære bevismetoder.

Eksempel [4]

> *At løse uligheden $3x - 7 < x + 8$ betyder at give den simplestet mulige beskrivelse af talmængden $M = \{x \mid 3x - 7 < x + 8\}$*

Mængdelære kommer i brug i forbindelse med uligheden, hvor det bidrager med en præcis formulering af problemstillingen. For at løse dette eksempel refererer lærebogen til tre regneregler. Her kommer disse regneregler som en teknik til at løse opgaven. $3x - 7 < x + 8 \Leftrightarrow 3x < x + 15$ hvor dette trin henviser til en regneregel som siger, at for vilkårlige tal a, b og c, har vi således formlerne $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$. Fra regnereglen $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$ fås $3x < x + 15 \Leftrightarrow 2x < 15 \Leftrightarrow x < 7\frac{1}{2}$ ifølge reglen, som siger, at hvis $k > 0$ er $a > b \Leftrightarrow \frac{a}{k} > \frac{b}{k}$ for vilkårlige tal a, b og k. Altså er $M = \{x \mid x < 7\frac{1}{2}\}$. Lærebogen beskæftiger sig med rent algebraiske praxeologier, hvor både praksis- og teoriblok er algebraisk i den forstand at algebraiske opgaver løses ved hjælp af de algebraiske regneregler. Disse regneregler er givet som en slags teori med efterfølgende beviser.

Lærebogen Matematik 2.2, 1974

Lærebogen Matematik 2.2 indeholder otte kapitler, hvor algebra er et kapitel for sig selv med følgende emner: komposition, den associative lov, den kommutative lov, neutralt element, inverst element, homomorfi og isomorfi,

[4][16], s.31

grupper, matrixgrupper, komplekse tal, grupper af affine afbildninger og endelige grupper. Af disse emner vælger jeg, som skrevet tidligere, kun at gå i dybden med det første emne, hvilket også er relevant i forhold til specialet[5].

Afsnittet om komposition starter med en definition på en *komposition* i en mængde.

Definition 6.3.2. Ved en komposition i en given mængde M forstås en forskrift, der til ethvert ordnet par af elementer fra M knytter et element fra M.

Ofte benytter man et "regnetegn" f.eks. $*$ *for kompostionen, og man betegner da det element der knyttes til elementparret* (a, b) *med* $a * b$.. Lærebogen giver dermed en masse eksempler på kompositioner, for eksempel addition og subtraktion er kompositioner i Z. For at vise det, vælger bogen at skrive *thi når a og b er vilkårlige hele tal, er også* $a+b$ *og* $a-b$ *hele tal.*

Inden der gives definition på den associative, kommutative lov, vælger lærebogen at give en forklaring på hvad en algebraisk struktur er. Den skriver *en mængde forsynet med en eller flere kompositioner kaldes en algebraisk struktut.*. Der gives eksempler, som $(M, *)$, hvor der menes en mængde M forsynet med kompositionen $*$.

Definition 6.3.3. En komposition $*$ i en mængde M siges at være associativ, når det for vilkårlige elementer a, b og c i M gælder, at $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Definition 6.3.4. En komposition $*$ i en mængde M siges at være kommutativ, når det for vilkårlige elementer a og b i M gælder, at $a * b = b * a$.

Definition 6.3.5. Et element e i en algebraisk struktur $(M, *)$ siges at være neutralt, hvis det for ethvert element x i M gælder, at $x * e = e * x = x$.

Eksempel. *Vi vil vise, at kompositionen er associativ i* $a * b = a + b - ab$, *hvor a, b og c er reelle tal.*

For at vise det, vælger lærebogen den ovenstående definiton af associativitet, nemlig $(a * b) * c = a * (b * c)$. Teknikken til at løse opgaven er baseret på den aksiomatiske metode. Først vises den ene side, $(a * b) * c = (a * b) + c - (a + b - ab)c = a + b + c - ab - ac - bc + abc$. Den anden side regnes på tilsvarende måde som $= a * (b * c) = a + (b * c) - a(b * c) =$

[5]Dette afsnit er baseret på[17]s. 133-140

$a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = a + b + c - ab - ac - bc + abc$. Da de to sider er ens, er kompositionen i det ovenstående udtryk associativ.

De fleste eksempler og næsten alle opgaver i lærebogen Matematik 2.2 handler om at *vise, undersøge* eller *godtgøre* ved brug af konkrete regler (aksiomer). Der gives sætninger og beviser, som skal bruges til at løse opgaverne. Lærebogen giver alle definitioner som en slags generalisering af tal med regneregler for addition og multiplikation. Opgaverne her handler om brugen af abstrakte kompositioner, hvor kompositioner betragtes som objekter for sig selv. Lærebogen Matematik 2.2 lægger op til at bruge definitionerne som en teknik og som en eksplicit teori til løsning af opgaver som denne:

$T_{M2.2}$: Givet en definition af $a * b = f(a, b)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vis, at $a * b$ er kommutativ og associativ for et konkret valg for a_0, b_0 af a, b.

Jeg vil i næste afsnit analysere nogle studentereksamensopgaver for at illustrere hvilke "standard" opgaver, i MO_2', det forventes at eleverne kunne regne.

Skriftlige studentereksamensopgaver fra 1970-1984

Som illustration af en skriftlig studentereksamen for den matematisk-fysiske linje (Matematik II), vises nogle opgaver, som eleverne skulle regne ved skriftlig eksamen. Da studentereksamensopgaver består af mange underspørgsmål, vælger jeg at præcisere dem i elementære opgaver (tasks) t_i hvor $i = 1, 2, 3....$

I Studentereksamen 1971, Matematik-Fysik Gren, Opgavesæt I, Opgave 3a er der stillet en opgave omhandlende algebra (kompositioner).
I mængden M af ikke-negative reelle tal er kompositionen $*$ bestemt ved

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab}$$

1. *Bevis, at kompositionen er kommutativ og associativ*

2. *Bevis, at der findes et neutralt element i $(M, *)$*

3. *Bevis, at kun tallet* 0 *har et invers element i $(M, *)$*

4. *Løs inden for M hver af ligningerne*
   $x * 3 = 2$
   $x * x = x$

$x * 1 = 1$
$x * 2 = 3$

Det er en opgave bestående af tre elementære opgaver, $t_{s_{1,1}}$, $t_{s_{1,2}}$ og $t_{s_{1,3}}$ hvor de to første tilhører $T_{M2.2}$ fra lærebogen Matematik 2.2, hvor der bruges den samme teknik, altså definitionerne 6.3.3, 6.3.4, og 6.3.5. Den sidste $t_{s_{1,3}}$ tilhører en opgave af type T_{s1}: Givet definitionen af $a * b = f(a, b), f : R \longrightarrow R$. Beregn $a * b$ for et konkret valg a_0, b_0 af a, b.

For at vise, at kompositionen er kommutativ og associativ benyttes definitionerne 6.3.3 og 6.3.4, ligesom i eksemplet ovenfor (6.3).

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b * a$$

Hvis $\mathbb{R}_+$ er kommutativ. Mellemregninger er en rent algebraisk manipulation af bogstaver, som repræsenterer elementerne i de ikke-negative reelle tal. Tilsvarende vises ved hjælp af den associative lov, at

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Når eleverne skal vise den associative lov, skal de godt nok være opmærksom på de mange mellemregninger, som indeholder andre algebraiske regneregler for brøkker, parenteser osv.

$$(a * b) * c = \frac{a+b}{1+ab} * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab} * c} = \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{1 + \frac{ac+bc}{1+ab}} \Updownarrow$$

$$\frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+ab}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} \tag{6.1}$$

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{1+bc} = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a\frac{b+c}{1+bc}} = \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+bc}}{1 + \frac{ab+ac}{1+bc}} \Updownarrow$$

$$\frac{\frac{a+b+c+abc}{1+bc}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+bc}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} \tag{6.2}$$

$$\frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

Det ses, at, (6.1) og (6.2) er ens, derfor er kompositionen associativ.

- Tilsvarende løses den næste opgave ved brug af definitionen 6.3.5:

$$\frac{a+e}{1+ae}=a \Longleftrightarrow a+e=a+a^2e \Longleftrightarrow e=a^2e \Longleftrightarrow e(a^2-1)=0$$

dvs. $e=0$. Ved at indsætte $e=0$ i ligningen $a*e=a$ fås:

$$a*0=\frac{a+0}{1+a0}=\frac{a}{1}=a$$

Da 0 er et neutralt element (6.3.5) kan denne regnes som følgende: $x*x^{-1}=0$. Dvs.

$$\frac{x+x^{-1}}{1+xx^{-1}}=0 \Longleftrightarrow \frac{x+x^{-1}}{1+0}=0 \Longleftrightarrow x+x^{-1}=0 \Longleftrightarrow x^{-1}=x.$$

Så $x=0$ er eneste element, der er et neutralt element, idet vi er i $\mathbb{R}_+$.

$$x*3=2 \Longleftrightarrow \frac{x+3}{1+3x}=2 \Longleftrightarrow x+3=2+6x \Longleftrightarrow x=\frac{1}{5}. \tag{6.3}$$

$$x*x=x \Longleftrightarrow \frac{x+x}{1+xx}=x \Longleftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}=x \Longleftrightarrow 2x=x+x^3 \Longleftrightarrow x^3-x=0 \tag{6.4}$$

Her krævedes det, at man skulle regne et tredjegradspolynomium $x^3-x=0$ ved hjælp af nulreglen ??. Så

$$x=1 \vee x=0 \vee x=-1.$$

Da vi har med $\mathbb{R}_+$ at gøre, er løsningen $x=0$ og $x=1$, idet $-1 \notin \mathbb{R}_+$.

$$x*1=1 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{1+x}=1 \Longleftrightarrow 1=1 \tag{6.5}$$

Så for alle $x \in \mathbb{R}_+$ løses denne ligning.

$$x*2=3 \Longleftrightarrow \frac{x+2}{1+x2}=3 \Longleftrightarrow x+2=3+6x \Longleftrightarrow -1=5x \tag{6.6}$$

Når man kommer til slutningen af regnestykket, skal eleverne huske på at de opererer med positive reelle tal, for at begrunde hvor mange løsninger der er. Denne ligning har ingen løsning i $\mathbb{R}_+$, idet $x=\frac{-1}{5}$.

Den benyttede teknik gives som følgende opskrift på hvordan man løser $T_{M2.2}$ og T_{s1}:

- Benyt definitionerne 6.3.3 og 6.3.4. For $a, b \in (M, *)$ er $a * b = b * a$ og $(a * b) * c = a * (b * c)$ eller $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, som svarer til aksiomerne A1 og A2 (se afsnit 5.5
- Benyt 6.3.5. Indsæt $a * e = a$ ind i udtrykket $a * b$, hvor e er et neutralt element.
- Indsæt (a_0, b_0) ind i udtryk $a * b$.

I $T_{M2.2}$ og T_{s1} er det ikke nødvendigt at give andre teknikker, end de nævnte. Derfor forventes eleverne at have et godt kendskab til bl.a. den aksiomatiske metode samt definitioner (se jf.) for at løse disse opgaver.

Den anden skriftlig eksamensopgave er fra *Eksamensopgave til HF fællesfag fra 1975, Opgave 5, fra maj-juni eksamen*[6]

*I mængden af reelle tal er en komposition * fastlagt ved*

$$a * b = a^2 + b^2 - 2ab$$

Beregn $13 * 14$, $15 * 15$ *og* $7 * (6 * 5)$.
Bevis, at kompositionen ikke er associativ
Løs ligningen $x * 3 = 2$

tilhører T_{s1} og $T_{M2.2}$ ved brug af den samme teknik.

Løsning til $t_{s_{3,1}}$ er på følgende måde, hvor man indsætter tallene $13 * 14$, $15 * 15$ og $7 * (6 * 5)$ i udtrykket $a * b$ som er det samme som $(a - b)^2$. Efterfølgende regnes det som på en sædvanlig aritmetisk måde, således at $a * b = (a - b)^2$. Da er $13 * 14 = (13 - 14)^2 = 1$, $15 * 15 = (15 - 15)^2 = 0$, og $7 * (6 * 5) = 7 * (6 - 5)^2 = 7 * 1 = (7 - 1)^2 = 36$.

For at begrunde eller bevise, at kompositionen ikke er associativ, skal eleverne benytte definitionen 6.3.3 for at vise, at $a * (b * c) \neq (a * b) * c$.

$$a * (b * c) = a * (b - c)^2 = a * (b^2 + c^2 - 2bc) = (a - (b^2 + c^2 - 2bc)) \quad (6.7)$$

$$(a * b) * c = (a - b)^2 * c = (a^2 + b^2 - 2ab) * c = ((a^2 + b^2 - 2ab) - c) \quad (6.8)$$

[6] I 1966 blev indført Højere Forberedelseseksamen (HF), og skulle give adgang til flere videregående uddannelser.

de to ligninger(1.4) og (1.5) er ikke ens, derfor er kompositionen ikke associativ. For at begrunde, at kompositionen ikke er associativ, er det også muligt at nogle elever vælger at give et eksempel,

$$1 * (-1 * 0) = 0$$
$$(1 * -1) * 0 = 16$$

Men det kan næppe tælle som et tilstrækkeligt svar i forhold hvad eleverne blev bedt om. For at løse ligningen $x * 3 = 2$ skal eleverne indsætte ligningen i det givne udtryk og regne det som en andengradsligning. Således har vi, at $(x-3)^2 = 2$, $(x^2 + 3^2 - 6x) = 2$ og dermed at $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Sammendrag

De to lærebøger Matematik 1 og 2.2 lægger i høj grad op til at eleverne bruger den aksiomatiske metode til løsning af eksamensopgaverne (og selvfølgelig definitioner og sætninger). I begge lærebøger illustrerer eksemplerne også en teknik, som eleverne kan benytte i forbindelse med opgaveregning. Men teknikkerne i eksemplerne refererer igen til de regler, som er formaliseret og præciseret. De matematiske organisationer som eleverne forventes at kunne beherske i begge bøger, beskæftiger sig i stort omfang med den teoretiske side af algebra i gymnasiets matematik, også kaldet MO_2', som i stort omfang svarer til MO_2 i referencemodellen. De algebraiske regneregler i begge lærebøger er formaliseret så de bruges som teknikker til at løse opgaverne. Målet med studenteropgaverne er at undersøge hvilke matematiske organisationer eleverne forventes at være i stand til at udøve i forbindelse med algebraiske opgaver. Analysen af opgaverne viser, at eleverne forventes at udøve algebraiske opgaver på et niveau svarende til (MO_2), da studentereksamensopgaver beskæftiger sig med opgaver, der handler om begrundelse og beviser. Eleverne er derfor i stand til at begrunde og bevise opgaverne i de matematiske organisationer der er analogt til (MO_2).

Hvad er matematik, 2012

For at undersøge hvilke MO'er der benyttes i de matematiklærebøger, benytter jeg lærebogen Hvad er matematik - C for gymnasiets matematik 1.g[7]. Denne lærebogen opfylder de krav, læreplanerne stiller til gymnasiets C-niveau i matematik. Desuden indeholder den en opgavebog, hvor eksemplerne bliver hentet herfra.Denne lærebog indeholder ni kapitler for eksempel

[7]Dette afsnit er baseret på ([12] s.238-261).

Variabelsammenhænge og lineære funktioner, *Beskrivende statistik*, *Geometri*, *Det matematiske sprog - Tal og ligninger* osv. hovedsageligt kapitlet *Det matematiske sprog - Tal og ligninger* er interessant og relevant i forhold til specialet, idet det indeholder de algebraiske elementer, der svarer til de beskrevne algebraiske elementer i referencemodellen. Dette kapitel er delt i følgende afsnit, som er:

- Tal
- Regning med tal
- Talmængderne (især for A niveau)
- Ligninger

Afsnittet om *Tal* starter med en kort historisk baggrund for tal, talord, talsans og talsymboler. Afsnittet beskriver hvordan tallene og symbolerne har udviklet sig med tiden med nogle eksempler heraf. Går vi til det næste afsnit om Regning med tal, kan det ses, at under titlen *"Sådan regnes med tal og med parenteser"*, er der givet et regnestykke af $3+4\cdot 5 = 23$. Derefter skrives *gang 4 med 5, resultatet heraf er 20. Læg 3 til 20, det er lig med 23. Dette er resultatet.* Derefter angiver lærebogen reglerne for hvordan eleverne skal regne med fortegn og parenteser.

Eksempel. *Opgave 7.5*[8].

> *Udregn og forklar i ord hvordan følgende udtryk udregnes:*
>
> a) $20 - 5 \cdot 4$, d) $15 \cdot 3 + 4 \cdot 23$

Teknikken som eleverne skal bruge er *"Hvis et udtryk (uden parenteser) indeholder flere af regningsarterne, så udregnes gange* ($\cdot$) *og division* (:) *først, og derefter plus og minus"*. Disse regnestykker svarer til det beregningsprog (CP) som blev beskrevet referencemodellen (se 3). Hvorvidt der er mulighed for at udvide det, vides endnu ikke. Opgavebogen giver flere opgaver der handler om regning med tal, hvor der bliver bedt om at forklare i ord hvordan udtrykkene udregnes ved brug af reglerne fra tabellen (se figur 6.1).

Afsnittet om *Talmængderne* starter med at beskrive, at tallene $1, 2, 3, ...$ i matematikken betegnes med symbolet $\mathbb{N}$. På samme måde gives der en

[8] [13](s.97)

Fortegnsregler:

$+ \cdot + = +$ $+ \cdot - = -$ $- \cdot + = -$ $- \cdot - = +$

Parentesregler:

Nr.	Regel	Eksempel
1	Hvis der er en parentes, der kan regnes ud, gøres det først.	$5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 10 = 50$
2	Hvis parentesen ikke kan regnes ud først, ganges den ud, eller den hæves.	$5 \cdot (7 + x) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot x = 35 + 5x$ $-3 \cdot (2x + 1) = -3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 = -6x - 3$ $4 - (2 - 8x) = 4 - 2 + 8x = 2 + 8x$ $9 + (6x - 5) = 9 + 6x - 5 = 4 + 6x$
3	Hvis to parenteser ganges sammen, så ganges alle led fra den ene parentes med alle led fra den anden parentes.	$(3 - 4x) \cdot (5 + 6y) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6y - 4x \cdot 5 - 4x \cdot 6y$ $= 15 + 18y - 20x - 24xy$
4	Hvis et udtryk (uden parenteser) indeholder flere af regningsarterne, så udregnes gange (·) og division (:) først, og derefter plus og minus.	Korrekt: $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$ Forkert: $2 + 3 \cdot 4 = (2 + 3) \cdot 12 = 5 \cdot 12 = 60$ Korrekt: $15 - 9 : 3 = 15 - 3 = 12$ Forkert: $15 - 9 : 3 = (15 - 9) : 3 = 6 : 3 = 2$

Figur 6.1: Regning med fortegn og parenteser.

"forklaring" på de hele tal *"Mængden af hele tal betegnes i matematik med symbolet $\mathbb{Z}$"* som fås *når vi udvider mængden af naturlige tal.*. Lærebogen forklarer talmængderne ved at give eksempler på forskellige "slags" tal. Bemærk at dette afsnit henvender sig til A-niveau, og er medtaget i denne bog fordi lærebogens forfatter skriver, at det er et godt emne bl.a. til supplerende stof.

Eksempel. *Opgave 7.14*[9].

> *De lige tal er alle hele tal, som 2 går op i:* $..., -4, 2, 0, 2, 4, ...$
> *Et lige tal kan skrives på formen af 2n, hvor n er et helt tal* a)
> Skriv tallene 20 og 30 på denne form.

Opgaven har allerede givet formen på lige tal, som svarer til den teknik eleverne skal bruge, når de skal skrive tallene 20 og 30 på denne form. Her skal eleverne tænke "algebraisk" og opstille en ligning, det svarer til $2n = 20$ eller $2n = 30$ "hvad skal 2 ganges med for at give 20". Denne opgave kunne godt svare til det andet stadie af algebraiseringsproces, hvis der blev sprugt om "at skrive de lige tal i en mere generel formel".

[9] [13](s.99)

Afsnittet *Ligninger* starter med titlen ***Formler - naturligt sprog og symbolsprog*** hvilket er i overensstemmelse med nr.1 i de faglige (se Læreplanen (2013). Der gives en kort historisk baggrund for anvendelsen af bogstaver a, b, c og x, y, z som gør det lettere at arbejde med. Desuden skriver lærebogens forfattere, at det er vigtigt at fortælle hvad bogstaverne står for. Eksempelvis siger Pythagoras' sætning med formelsprog, at *I en retvinklet trekant, hvor kateterne hedder a og b og hypotenusen c, gælder formlen:* $a^2 + b^2 = c^2$.

Lærebogen definerer en ligning som *en formel der udtrykker at to størrelser er ens fx* $7,3^2 = 5,1^2+b^2$ $1,7x-3,1 = 5,9x+2,8$. *En ligning udtrykker, at de to størrelser er i balance* også kaldet *balanceprincippet*, hvor man foretager de samme operationer på begge side. Efter dette angiver lærebogen regneregler for ligningsløsning:

Nr.	Regel	Reglen i praksis
1	I en ligning må samme led lægges til eller trækkes fra på hver side af lighedstegnet:	Når et led skifter side, skifter det også fortegn.
2	I en ligning må man gange eller dividere med samme tal på begge sider af lighedstegnet (blot ikke med tallet 0):	Når en faktor skifter side bliver gange til division. Når en nævner i en brøk skifter side bliver division til gange.

Figur 6.2: Regler for ligningsløsning.

Vi ser på et eksempel, hvor bogen vælger at løse en ligning ved hjælp af to måder: *ligningsløsning med regler* og *ligningsløsning i praksis.*

> **Eksempel**[10]: *Løses en simpel ligning som* $6x - 3 = 2x + 7$ *efter disse to regler ser det således ud:*

Ligningsløsning i praksis:

$6x - 3 = 2x + 7$
$6x = 2x + 10$
$4x = 10$

[10]([12] s.252).

$x = \frac{10}{4}x = 2,5.$

Ligningsløsning med regler:
$6x - 3 = 2x + 7$
$6x - 3 + 3 = 2x + 7 + 3$
$6x = 2x + 10$
$6x - 2x = 2x + 10 - 2x$
$4x = 10$
$\frac{4x}{4} = \frac{10}{4}$
$x = \frac{10}{4}$
$x = \frac{5}{2}.$

Lærebogen slutter af med at notere, at det ovenstående eksempel illustrerer, at ligningsløsning kan betragtes som en dynamisk proces, hvor man hele tiden anvender modsatte eller omvendte funktioner af det, der står i udtrykket, for eksempel:

- -3 ophæves af det modsatte tal $+3$
- $2x$ ophæves af det modsatte led $-2x$
- gange med 4 ophæves af den omvendte operation: division med 4

Den ovennævnte proces gælder generelt for ligninger (trigonometriske, logaritmiske osv.). Forskellen er her at løsning i praksis foregår uden at bruge balanceprincippet, mens den benyttes i den anden metode. Når man ser på måden lærebogen giver løsningen til hvert trin er løsningsmetoden ikke så fjern fra den arabiske "trin-for trin" metode. Disse tre punkter forklares ellers ikke yderligere. Afsnittet slutter af med at give en liste over de omvendte operationer, for eksempel er den omvendte operation af $+$ er $-$, af $\cdot$ er division (/) osv.

Resten af kapitlet beskæftiger sig med grafiske løsninger og formelregning. Der gives en tabel med regneregler for to ligninger med to ubekendte med nogle eksempler heraf.
De opgaver og eksampler som lærebogen Hvad er matematik, beskæftiger sig med, kan opsummeres på følgende måde:

- At manipulere algebraiske udtryk for at reducere eller omskrive dem til en bestemt form særlig at gange parenteser ud.
- At opskrive algebraiske udtryk hvor bogstaver repræsenterer ukendte tal. Særligt at løse ligninger (1.grads).

Disse opgaver svarer nøjagtig til de opgaver hvor algebra betragtes som en generalisering af aritmetik med den matematiske organisation som MO_1 fra referencemodellen. Vi står altså med en matematisk organisation, såkaldte MO'_1 der er analogt til MO_1 aritmetikregler som teoriblok, hvorvidt opgaverne skulle bevises eller begrundes (MO'_2 teoretisk algebra) beskæftiger dette kapitel inden for de fire ovennævnte "algebraiske emner" ikke med. Teknikkerne er givet i form af eksempler og få regneregler, uden begrundelser og beviser.

6.4 Diskussion

hvilke sammenhænge er der mellem videnskabsfaget algebra og det algebraiske domæne (nu og i 1970'erne)?

Der er to grunde til at algebra, som et videnskabsfag i det historiske perspektiv, blev introduceret:

- at det historiske perspektiv på algebra illustrerer hvilke sammenhænge der er mellem videnskabsfaget algebra og det algebraiske domæne i nutidens gymnasiematematik.
- at det historiske perspektiv på algebra illustrerer hvilke sammenhænge der er mellem videnskabsfaget algebra og det algebraiske domæne i gymnasiets matematik i 1970'erne.

Angående det første, må man fastslå, at der er få forbindelseslinjer mellem nutidens gymnasial matematikundervisning (algebra domænet) og forskningen i algebra ved universiteterne i dag [25]. Dette skyldes primært flere institutionelle begrænsninger (se kapitel 2). Selvom gymnasielærernes uddannelse foregår ved universiteterne, er det ikke sådan, at de møder "levende matematik" i universitetsverdenen, som de efterfølgende kan undervise i på gymnasiet[25]. Gymnasielærere får klarere retningslinjer (målbeskrivelser) fra ministeriet for hvad der skal undervises i. Nutidens læreplaners formulering om algebra som et domæne i gymnasiets matematik er implicit og faktisk meget bred. Algebra indgår ikke som et selvstændigt domæne, men den indgår som en hjælper i hvert enkelt domæne af matematik. Den beskrivelse er i overensstemmelse med Boschs (2012) beskrivelse om algebra i det spanske gymnasiums matematik (se referencemodellen kapitel 3). Desuden giver læreplanen en stor frihed for lærerne til hvordan de vil tilrettelægge matematikundervisningen. Det vil sige, at en lærer har en stor frihed til hvordan de vil gennemføre et forløb om et emne, der inkluderer "algebra" som et løbende element i et andet matematisk domæne. Det er desværre ikke alle lærere, der udnytter denne frihed på en "fornuftig" måde. Eleverne gives ikke det bedste læringsmæssige forløb om algebra, da kun enkelte lærere vil bryde mønstre og komme med nye idéer og tilgange til matematikundervisningen. Tværtimod fastholder mange den didaktiske tradition om hvad der blev undervist i tidligere og bruger denen plan som en slags "kogebog" til at tilrettelægge undervisningen. Vender vi tilbage til hvilke sammenhænge der reelt er mellem videnskabsfaget og det algebraiske domæne, kan det siges, at den abstrakte algebra såsom videnskabsfaget fra 1800 og 1900-tallet er helt fraværende i nutidens gymnasiers matematik. Den nye læreplan(2010) stiller andre krav og er skrevet på baggrund af KOM rapporten[11]. Kravet til den teoretiske side af matematikken vedrørende algebradomænet, er meget mindre set ud fra læreplanen *regningsarternes hierarki, ligningsløsning m, håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold*. Derfor er det heller ikke uventet hvis nutidens lærebogsforfattere etablerer de matematiske organisationer som svarer til MO_1.

Ser vi på det historiske perspektiv for videnskabsfaget algebra, kan det konstateres, at den klassiske algebra indgår mere eksplicit end den abstrakte i nutidens læreplan for matematik.

Den matematiske viden som babylonierne og araberne dyrkede, afspejler faktisk den algebraiske ligningsløsning som eleverne kender i dag. Udover det så svarer den arabiske algebra og deres metode "trin-for-trin" til beskrivelsen af den matematiske organisation MO_1 aritmetik som teoriblok fra referencemodellen.

En sammenhæng, som jeg finder mellem videnskabsfagets algebra og det algebraiske domæne i 1970'erne er følgende. Den klassiske algebra havde i sin tid en stor betydning i videnskabsfagets udvikling. Mange daværende matematikere forsøgte at transformere hverdagsproblemer til ligninger (algebra i daværende forstand) og generalisere deres løsninger. Det historiske perspektiv på den klassiske algebra viser, at mange matematikere forsøgte at finde en generel formel for løsning af polynomier af grad n, $n = 2, 3, 4....$ Først efter mange forsøg på at udvikle forskellige teknikker i forbindelse med algebraiske ligninger, lykkedes det for nogle matematikere at finde en gruppeteoretisk begrundelse for, at det ikke er muligt at angive udtryk for

[11] I rapporten Kompetencer og matematiklæring identificere forfatterne otte kompetencer[19]

rødderne i et polynomium af grad større end fem (Galoisteori). Efterfølgende tager algebra en helt anden rolle end ligningsteorier og vokser helt i den abstrakte retning, som ses i det algebraiske domæne i gymnasiets matematik i 1970'erne. Afstanden mellem den videnskabelige viden (algebra) og det algebraiske domæne i gymnasiets matematik i 1970'erne er bestemt tættere end i dag ifølge analysen af læreplanen (1971) og lærebøger (Matematik 1, 2.2). Dette skyldes 1970'ernes forsøg på at modernisere skolematematikken med mere forskningsmatematik, specielt mængdelærens grundlag[25]. På grund af den nye reform i 1958, blev der vedtaget en ny lov om gymnasieskolerne, hvor gymnasiet blev mere specialiseret. Den sproglige og matematiske linje blev delt i fagspecifikke grene som for eksempel den matematisk-fysiske gren, den matematisk - naturfaglige gren og den matematisk - samfundsfaglige gren [12].
Den store revolutionerende udvikling inden for naturvidenskab og teknik, hvor relativitetsteori, kvantemekanik og atomteori blev udviklet i løbet af århundredets første halvdel. Mange matematikere producerede banebrydende resultater inden for ren og anvendt matematik ([21] s.231). Udover de produktive resultater inden for naturvidenskaben, var der også sociale og samfundsmæssige ændringer, der var med til at medvirke gymnasiereformen. Der var et samfund, hvor politik, økonomi og teknologi skulle operere på den internationale scene ([21] s.231). I 1957 lykkedes det for Sovjetunionen at sende den første satellit (Sputnik) i kredsløb om jorden.

I Danmark skulle matematikundervisningen ændres til "den nye matematik", hvor både folkeskolen, gymnasiet og universitetet skulle have nye bøger. Matematikundervisning blev på alle niveauer prioriteret højt, og det blev indset, at matematisk kunnen var en grundlæggende forudsætning for den tekniske videnskabelige udvikling. I 1962 udkom den første matematikbog til det nye pensum (efter 1958-loven) *Matematik I* skrevet af E. Kristensen og O. Rindung, og året efter fulgte *Matematik II.* Disse bøger fik på den matematiske linje en meget dominerende placering, og reviderede udgaver af disse bøger blev *normdannede for de næste ca. 20 år*[14](s.611). Lærebogsforfatteren O. Rindung var meget inspireret af videnskabsfaget matematik og var også medlem af læseplansudvalgets pensum for gymnasieskolerne[20]. Den enorme tekniske udvikling spillede en afgørende rolle for det ændrede pensum og formålet var, *at give den videregående undervisning et indhold, der svarer til nutidens behov*[9] (s.16). Den nye matematik skal give eleverne en uddannelse som skal tilpasse al højere uddannelse og give alle den samme mulighed for at gennemføre en højere uddannelse for eksempel: *Dels er det en betingelse for erhvervslivets, teknikkens og videnskabens fortsatte udvik-*

[12]Dette afsnit er baseret på [21]

ling[9] (s.16). Vedrørende læseplanen for matematik har udvalget foretaget emnevalget: *Med optagelsen på emnelisten af en række almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra...* sådan som at skabe *en udvikling hen imod en nærmere kontakt imellem den undervisning, der gives i skolen og den form, hvori nutidens matematik fremtræder*[9] (s.46).

Forsøget på modernisering af gymnasiets matematik med videnskaben viste sig ikke at være en stor succes. Et af problemerne med det nye forhold mellem videnskaben og undervisningsfaget matematik i 1970'erne var, at der var for lidt undervisningstid. Således skriver lektor Jacob Jensen *Da vi nående til oktober, kunne jeg se, at hvis jeg skulle gennemgå bogen på en efter mit eget skøn tilfredsstillende måde, ville I g's pensum tage 12-13 måneder, og skoleåret er ved arbejdsmæssigt på ca- 9 måneder* [14] (s.616).

6.5 Den didaktiske organisation i gymnasiets matematik

På baggrund af analysen af lærebøger og læreplaner vil jeg nu diskutere den didaktiske organisation, som har til hensigt at etablere den regionale matematiske organisation som referencemodellen beskriver (se kapitel 3).

De matematiske organisationer, der indgår i lærebøgerne *Matematik 1, 2.2* (af Kristensen og Rindung 1974,75) svarer naturligvis til den matematiske organisation MO_2 teoretiske algebra. I forbindelse med introduktionen til de algebraiske emner (mængdelære og komposition) i gymnasiets matematik i 70'erne og måden hvorpå disse emner er blevet introduceret, kan jeg kun sige, at lærebogsforfatterne opfylder kravene, som læseplanen stiller med hensyn til hvilke emner, der skal medtages: *følgende nye områder medtaget: en række almene begreber fra mængdelære og algebra* [9](s.46).

Tilgangen til emnerne mængdelære og komposition foregår ved at lærebogsforfatterne giver mange eksempler med efterfølgende definitioner og sætninger. Disse eksempler og definitioner forklares både med et naturligt,- og matematisk sprog som svarer til teknikkerne og teknologien hhv. Diskurserne omkring disse teknikker og eksempler fra denne organisation indgår mere præcist og eksplicit. Lærebogen *Matematik 1* er opbygget sådan at det første emne der bliver introduceret for eleverne er mængdelæren, hvor de andre kapitler bygger videre på det. Lærebogen *Matematik 2.2's* opbygning foregår sådan, at kapitlerne også bygges videre på mængdelæren, for eksempel emnerne komposition eller afbildning, som ikke kan alene behandles uden at introducere mængdelæren. Denne kronologiske opbygning gør, at det vil være mest oplagt for en lærer at følge denne didaktiske organisation, som lærebogsforfatterne lægger op til. Den didaktiske organisation i begge lærebøger etablerer to forskellige matematiske organisationer, med hensyn til algebra domænet, som kan integreres i den regionale organisation fra referencemodellen.

Med hensyn til nutidens lærebog *Hvad er matematik* er de matematiske organisationer, der indgår i den didaktiske organisation, dele af den matematiske organisation, aritmetik som teoriblok MO_1. Den didaktiske organisation som undervisningsministeriet gennem nutidens læreplan har etableret de matematiske organisationer, som ligger mindre vægt på den teoretiske side af algebraiske, som er faktisk analogt til MO_1. Måden de algebraiske regneregler bliver introduceret og anvendt i forbindelse med eksemplerne, ser jeg som et tegn på, at lærebogsforfatterne lægger vægt på det praksisniveau frem for det teoretiske niveau. Kapitlet om *Tal, regning med tal og ligninger* behandles på en sådan måde, at det er medtaget for at opfylde kravene til kernestoffet i læreplanen (2010). Dette kapitel kommer først efter seks andre kapitler i lærebogen, hvilket betyder, at emnerne *talsymboler, regning med tal, regler for løsning af ligninger osv.* behandles uafhængigt. Man kunne forestille sig, at en matematiklærebog starter med et kapitel om introduktion til *tal, talsymboler osv.* som resten af bogen kan bygge videre på. Men her er det omvendt. Introduktion til regneregler til løsning af ligninger eller brøker kommer først senere i denne lærebog. Lærebogsforfatterne lægger op til at disse regneregler "godt" kan undgås for eksempel i forbindelse med emnet *Variabelsammenhænge og lineære funktioner* eller *Geometri.* Disse regneregler svarer til teknikkerne som eleverne må bruge i forbindelse med opgaveregning. For at genopfriske reglerne henviser lærebogsforfatterne til en *hjemmesiden* hvor eleverne kan finde træningsopgaver.

Udover disse teknikker må eleverne ifølge nutidens læreplan også *anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.* Hvis eleverne støder på de komplekse algebraiske opgaver som

$$\frac{1+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$$

vil der være andre teknikker end "blyant og papir" teknikken. Den teknik som er til rådighed for eleverne i dag er anvendelsen af lommeregner (CAS værktøj), *anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.*

Dog skal man være opmærksom på at anvendelsen af lommeregner i forbindelse med algebradomænet (regningsarternes hierarki) må benyttes til besværlige udregninger, eksempelvis reducering af komplicerede udtryk, hvor eleverne til fordel må benytte ommeregneren for at tjekke deres resultat. Ulempen ved at benytte lommeregner er, at den ikke giver mellemregninger, kun det endelige resultat. For eksempel kan lommeregneren være med til at hjælpe eleverne til at tjekke om de ovenstående udtryk er ens. Dog er det op til de enkelte elever om de vil tjekke mellemregningerne i hånden eller springe dem over, for lommeregneren giver kun facittet. Konsekvensen af brugen af CAS i forbindelse med algebraiske opgaver, er at vanskeligheder med bogstavregning bliver begravet i CAS. Anvendelsen af CAS skjuler desværre begrundelserne vedrørende mellemregninger, hvilket fører til at den teoretiske algebra, altså MO_2 fylder mindre og mindre i dag. I større perspektiv vil vanskelighederne opstå, når eleverne skal søge ind på de naturvidenskabelige uddannelser (fysik, matematikt, nanoteknologi, ingeniør osv.) hvor de vil have en meget begrænset teoretisk matematikviden herunder algebra.

Dette perspektiv på algebra i nuværende læreplan svarer netop til at betragte algebra som generalisering af aritmetik, som blev beskrevet i kapitel (3).

Kapitel

7 Den diagnostiske test

For at belyse problemstillingen om, hvilke matematiske organisationer eleverne forventes at kunne beherske i forbindelse med nutidens algebra i gymnasiets matematik, har jeg lavet en diagnostisk test for at identificere, udvikle og afprøve elevernes beherskelse af teknikker og teknologier, som de anvender i forbindelse med opgaveregning. Analysen af testen foregår på baggrund af referencemodellen.

Praktiske forhold

De diagnostiske opgaver er designet til og anvendt i 1. g med matematisk-fysisk retning på Sorø Akademiet. Inden for denne studieretning har eleverne matematik på A niveau, samt fysik og kemi på B niveau. Inden for denne retning skal elever arbejde med matematiske teorier og beviser, som de også skal anvende på DTU og Københavns Universitet[1]. Her vil man kunne forvente, at eleverne enten har en større interesse for matematik eller, at de skal anvende faget i deres videregående uddannelser, eftersom de har valgt denne retning.
Der er 28 elever på holdet, hvoraf 27 besvarede testen. Eleverne fik ikke lov til at bruge hjælpemidler til testen. De havde 2×50 min til at besvare testen.

[1] http://www.soroe-akademi.dk/dk/undervisning/studieretninger/mat-fys-kemi-udvidet/.

Analysen af nutidens matematiklærebog har vist, hvilke MO'er eleverne forventes at være i stand til at udøve i forbindelse med algebraiske opgaver. Den diagnostiske test har til hensigt at identificere elevernes fakstiske beherskelse af teknikker og teknologier, som de anvender i forbindelse med opgaveregning.

Disse opgaver danner ikke grundlag for eksamen og skal ikke sammenblandes med evaluering af eleven [26]. Testen er en god måde at undersøge de teknikker og teknologier, eleverne omdanner i forbindelse med algebraiske opgaver. Analysen af testen foregår på baggrund af referencemodellen.

For at undlade teknikken angående CAS-værktøj har jeg valgt, at opgaverne skal løses uden hjælpemidler. Dette betyder, at opgaverne udelukkende løses med de teknikker, eleverne forhåbetligt har lært i matematikundervisnnigen.

Faglige forudsætninger for opgaverne

Da jeg desværre ikke selv har haft mulighed for at observere klassens faglige forudsætninger, har jeg kontaktet klassens lærer i matematik Charlotte G. H. for at høre om eleverne og deres forudsætninger.

Efter at have snakket med Charlotte G. H., fik jeg at vide, at klassen har haft et lille forløb om "algebra" (bogstaveregning, regneregler), hvor en smule modellering er inddraget. Ifølge læreren har eleverne set de fleste regler, i forbindelse med andre matematiske domæner, i det omfang det er nødvendigt. De faglige forudsætninger er derfor ikke så høje, idet det drejer sig om en 1.g klasse, hvor de fleste direkte er kommet fra folkeskolen.

7.1 A priori analyse af den diagnostiske test

På baggrund af referencemodellen vil jeg i dette afsnit fremsætte mine hypoteser om opgaverne og hvad jeg forventer af eleverne, når de skal regne opgaver i den diagnostiske test.

Opgaverne 1, 3, 4 og 9 er stillet på baggrund af Boschs (2012) perspektiv på algebra som generalisering af aritmetik (se kapitel 3). Jeg har tidligere beskrevet en klasse af opgaver som falder under dette perspektiv. I disse opgaver skal eleverne opstille en ligning ud fra de givne data. Jeg vil teste, om eleverne er i stand til at oversætte en problemstilling, som er formuleret i et naturligt sprog til en matematisk ligning (algebraisk udtryk) og omvendt. Eleverne skal gennem den opstillede ligning finde det tal (ubekendt), som repræsenterer den ubekendte i ligningen. Jeg forventer i opgave 1 (a), at eleverne laver alle mulige forkerte kombinationer af tallene 10 og 18. Når de endeligt finder frem til den ønskede ligningen, så er det ikke vanskeligt at indsætte tallet 5 i den ønskede ligning $18 + 10x$.

En anden teknik i opgave 1 a og b kunne også være, at nogle elever vælger at tegne en graf og finder svaret. Jeg kan forestille mig, at nogle muligvis vil lave en tænkt afstand og derudfra gætte sig til ligningen gennem et eksempel.
Opgave 9 er placeret næsten til sidst på grund af dens mange underspørgsmål, som nok vil tage mere tid. Denne opgave vil næppe give problemer, idet den ikke forudsætter kendskab til lineære ligninger og almindelige regneoperationer som opgave 1. Desuden har eleverne allerede stiftet bekendtskab med denne type opgave (opgave 1). Opgaven er nem i starten og bliver gradvis sværere. Derfor vil det formentlig kun være det sidste spørgsmål, som giver en del problemer hos eleverne, idet der forventes at opstille en ligning ud fra forrige beregninger (a-c), altså at angive en forskrift.

Jeg vil med opgave 2 teste om eleverne ved brug af de algebraiske notationer eller bogstaver kan modellere den geometriske egenskab, der er givet. Denne opgave er stillet på baggrund af algebra som et modelleringsværktøj fra Boschs (2012) perspektiv (se kapitel 3). I denne opgave vil det formentlig kræve lidt mere algebraisk tænkning for at opstille en ligning, som skal bestemme arealet af den givne figur. Specielt kræver $2b$ en særlig opmærksomhed, idet opgaven spørger efter arealet af det skraverede kvadrat, hvilket kan være svært for eleverne at bestemme. Der er givet et hint som en lille hjælp til teknikken, hvis eleverne ikke kan huske, hvordan man kan beregne arealet af et kvadrat. Jeg forventer, at de fleste elever bruger denne hintteknik til at opstille en ligning med multiplikationen af bogstaver og ikke adderer dem sammen.

Med opgave 4 vil jeg teste, om eleverne er i stand til at opstille to ligninger med to ubekendte ud fra et udsagn, som er formuleret i et naturligt sprog. Opgave 3 kommer også i denne klasse, hvor forskellen er, at jeg har givet ligningerne på forhånd, og eleverne skal vælge den korrekte og løse den mht. den ubekendte. Jeg har skrevet *tilsammen* i opgave 3, hvilket betyder, at eleverne formentlig vil gætte sig til den første ligning, der indeholder addition. Derfor vil jeg forvente, at de fleste elever foretrækker ligningen med addition fremfor substraktion.

Opgave 5 er stillet for at afprøve, hvorledes eleverne reducerer disse udtryk $5a + 3b - 2a + b$ og $1/6q - 1/5p + 1/5q$. Jeg forventer, at eleverne bruger teknikken "man kan godt trække sammen ved led af samme type" i det første spørgsmål, hvor de deler leddene op efter a og b. De tænker næppe videre over, hvad a og b egentlig kunne være. De tænker nok mere som to adskilte regnestykker og ignorerer a og b. Jeg forventer, at de først regner for $5 - 2$ og bagefter sætter bogstavet a på. Det andet $3b + b$ vil nok være svær fordi det ikke nødvendigvis er indlysende at $b = 1b$, idet de ikke bruger regnereglerne eksplicit.

I spørgsmål b vil eleverne formentlig få svært ved at reducere flere brøker. En teknik, som de kender fra lærebogen er "skaffe fællesnævner".

Opgaven vil forhåbentlig ikke give problemer, idet det forventes, at eleverne har et godt kendskab til reduktion af algebraiske udtryk, ifølge læreplanen 2010. Der vil dog være nogle få stykker, som vil vælge at reducere udtrykket fra $5a + 3b - 2a + b$ til $7a + 2b$ eller til $8ab - 2ab$. Jeg har stillet denne opgave på baggrund af den opfattelse af algebra som generalisering af aritmetik.

Opgaver 1, 3, 4 og 5 svarer til opgaverne fra den matematiske organisation MO_1 aritmetikregler for teoriblok, hvor teknikkerne er oplagt implicit anvendelsen af de beskrevne regneregler (se kapitel 3). Ud fra analysen af opgaverne fra lærebogen *Hvad er matematik*, viser at opgaverne 1, 3, 4 og 5 ligner dem fra bogen.

Opgave 6 er stillet på baggrund af de tre stadier i den algebraiseringsproces, der blev beskrevet i kapitel3. Det er en ualmindelig opgave og vil formodentlig vække interesse hos nogle elever med større interesse i matematikfaget. Opgaven har til hensigt at vise eleverne, at udtrykket $\frac{(3x+15)2}{6} - x = 5$, uanset hvilket tal der sættes ind på x'ets plads(i dette tilfælde skal tallet være mindre end 8). Mange vil særligt få problemer med spørgsmål b, idet det kræver, at man argumenterer "matematisk" hvorfor udtrykket altid giver 5, som svarer til det tredje stadie af algebraiseringsproces. Dette vil formentlig give en del problemer, alene af den grund, at eleverne er relativt uvante med denne type opgaver, som heller ikke forekommer hyppigt i matematiklærebøgerne.

I opgaverne 7, 8 vil jeg teste om eleverne er i stand til at bruge "algebra" som igen et værktøj til løsning af "geometriske" problemer (mønstre). Her skal eleverne ud fra et givet geometrisk mønster opstille en ligning ud fra de observerede fakta (i dette tilfælde konkrete bogstaver). Disse opgaver indeholder også modellering, altså at modellere et algebraisk udtryk ved brug af geometriske mønstre (se kapitel 3). Opgaven er stillet på baggrund af det andet stadie af algebraiseringsprocessen, hvor eleverne skal udlede et algebraisk udtryk, der kan gælde for alle tal. For eksempel i opgave 8 er, $1^2 = 1 * 1 = 1$, $2^2 = 2 * 2 = 4$, $3^2 = 3 * 3 = 9$ etc. som kan modelleres ved det generelle udtryk n^2, hvor n er et naturligt tal. Her vil jeg forvente at mange elever formentlig får problemer med spørgsmålet om "finde et generelt udtryk".

I opgave 10 ønsker jeg at teste om eleverne er i stand til at udøve deres matematiske argumentation. Her ligger fokus mere på begrundelse og retfærdiggørelse af opgaven snarere end aritmetisk beregning (ligningsløsning). Jeg vil a priori tro, at de fleste elever får svært ved at begrunde svaret. I denne opgave 10 vil en stor del af eleverne formodentlig mangle matematiske argumenter for spørgsmålet "hvornår kan vi slutte, at $b = c$". Dog vil det næppe være svært for eleverne at slutte fra $ab = ac$ til $b = c$. Her vil det forventes, at en del af eleverne vælger at reducere udtrykket $ab = ac$ til $b = c$ direkte uden at tage hensyn til at a ikke må være 0. Mens nogle andre vil mene, at det er en svær opgave, idet de mangler forudsætninger for at give forklaringer på "forklar dit svar". Eksistensen af denne type af opgaver er ikke så almindelige i nutidens matematiklærebog, som de var i lærebøgerne fra 1974 og 1975 *Matematik 1, 2.2* (se kapitel 6). Derfor vil det ikke være overraskende, hvis eleverne ikke argumenterer tilstrækkeligt i opgaven, idet det er en opgave af T_{21} i den teoretiske algebra MO_2, hvor eleverne mangler den teoretiske algebra.

Jeg vil i det følgende arbejde med a posteriori analysen af den diagnostiske test, fokusere på de 27 elever, der har afleveret og besvaret alle opgaverne i testen.

7.2 A posteriori analyse

Da hypotesen om opgaverne $1, 3$, 4 og 9 er sammenfaldende, vælger jeg at kigge på elevernes besvarelse af disse opgaver.

Alle elever har svaret korrekt på både spørgsmål a og b i opgave 1. Det er tilsyneladende på grund af dens almindelighed, som mange elever havde stiftet bekendtskab med før. Med korrekt mener jeg, at eleverne var i stand til at opstille en ligning ud fra en sprogformuleret opgave. Set ud fra elevernes besvarelse havde kun en enkelt elev byttet om på den afhængige og uafhængige variabel ved at skrive $x = y \cdot 10 + 18$.

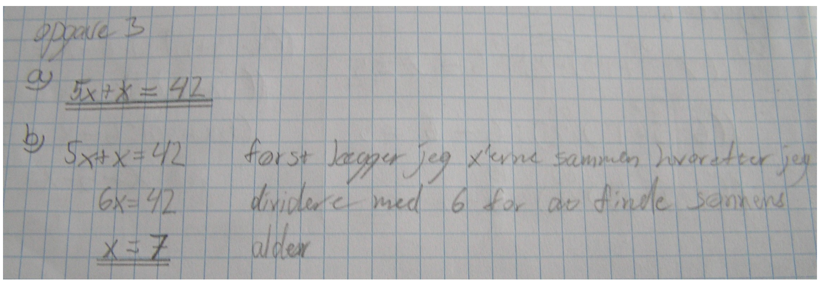
De fleste elever har skrevet en direkte opskrift for den ønskede ligning og dermed besvaret spørgsmål b ved at indsætte 5 i ligningen $f(5) = 10 \cdot$

$5+18 = 68$. Der vides ikke, hvilken teknik de har anvendt i forbindelse med opgave 1a og ab. Der er dog nogle enkelte, der skriver, at

> *startgebyren er skæringen med y-aksen altså b værdien og a værdien er hvad der koster at kører en km, derfor $f(x) = 10x + 18$.*

Jeg fortolker det som det er en teknologi til at forklare, hvordan de opstiller ligningen. To elever skriver i 1a, at $f(x) = 10x + 18$ *hvor a= pris pr. km og b= startpris* og $f(x) = ax + b$ *for eksempel* $f(x) = a5 + 18kr$. Det svarer til, at eleverne har fået lært om forskriften $f(x) = ax + b$ uden at vide, hvad bogstaverne a og b kan repræsentere. Udover det har de ikke kendskab til hvordan forskriften skal bruges og til hvilket formål, den skal bruges. Her tolker jeg, som eleverne har fået forskriften uden at have en dybere forståelse for a og b.
I opgave $3a$ blev der bedt om at vælge en af to givne ligninger $x + 5x = 42$ og $5x - x = 42$, som skulle stemme overens med det givne udsagn. Som forventet, havde en stor del af eleverne (24 elever), ikke problemer med at vælge den korrekte ligning, mens kun 2 valgte den forkerte ligning (se tabellen nedenunder). Jeg er heller ikke overrasket, idet de fleste elever har nem ved at operere med addition fremfor substraktion. Desuden skriver jeg *En far og en søn er tilsammen 42* og de fleste kan godt gætte sig frem til den første ligning $x + 5x = 42$.

Resultatet viser, at de fleste elever havde valgt den korrekte ligning i $3a$. Om dette er elevernes gætværk, eller om de har forstået udsagen korrekt, kan dog ikke vides med sikkerhed. I 3b skulle de løse den korrekte ligning og finde personernes alder. Teknikken, som de fleste elever har valgt i 3b er følgende $x + 5x = 42 \Leftrightarrow 6x = 42 \Leftrightarrow x = \frac{42}{6} \Leftrightarrow x = 7$.



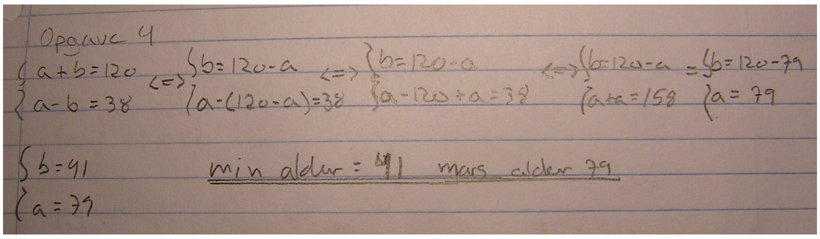
Figur 7.1: En elevs besvarelse af opgave 3ab.

Nogle enkelte elever forklarer teknikken ved at skrive en lille note om, hvordan de isolerer den ubekendte (x) i ligningen, for eksemepel:

"først lægger jeg x'erne sammen hvorefter jeg dividere med 6 *for at finde sønnens alder"* se figur 7.1.

Det svarer til den teknologi, som forklarer teknikken, de anvender og svarer til en af de beskrevne teknikker i aritmetikregler som teoriblok MO_1 fra referencemodellen.

Den tilsvarende teknik bruges i opgave 4, hvor 14 elever har kunne opstille to ligninger med to ubekendte. I figur 7.2 ses, hvordan en elev besvarer opgave 4.



Figur 7.2: En korrekt besvarelse af opgave 4 af en elev.

Elevernes besvarelse viser, at de benytter teknikken "at lægge x'erne sammen og herefter dividerer med..." i dette tilfælde at lægge a'erne sammen. Den løsningsmetode, de fleste elever benytter i deres opgavebesvarelse, svarer til den "ligningsløsnings i praksis" fra lærebogen *Hvad er matematik* (se tabellen 6.2). Den teknik bruger eleverne også i opgave løsning 3. Elevernes besvarelse viser ikke hvordan de opstiller to ligninger, men det viser, at de har kendskab til to ligninger med to ubekendte.

Mange af elever opstiller faktisk to ligninger med to ubekendte som: $M + J = 120$ *og* $M - J = 38$ men de kan ikke rigtig gå videre. Nogle trækker de to tal fra hinanden og får de 82, og jeg formoder, at mange har forsøgt at lægge de to tal sammen, altså $120+38$, men da resultatet har vist til at være 158 har eleverne forkastet det (idet et menneske ikke kan være 158 år gammel, tænker de). Her ser jeg det som et forsøg på at modellere til algebraisk notation uden at de kender til hvordan de skal løse det. De mangler igen den teoretiske baggrund for, hvordan de skal opstille og løse ligninger og hvad bogstaverne betyder på et teoretisk niveau.

Ligesom i opgave 1a har de fleste elever valgt at skrive forskriften i opgave 9d, og i andre spørgsmålene har de kun angivet facitet, som opgaven har bedt om. Jeg havde ønsket at se, hvordan eleverne ville opstille det (teknikken og teknologien).

Der er kun få elever, der forklarer sin opstillede ligning, for eksempel en elev skriver *for hvert trin der bygger på skal man bruge 3 tandstikker så for 4 trin skal der bruge 14*. Dette svarer til teknologien, og teknikken giver han med et eksempel og dernæst en ligning, eksempel $y = 3(111) + 2$, $y = 333 + 2$, $y = 335$, og $y = 3x + 2$, hvor eleven skriver, at *x=antal trin, 2=de to første "stolper" i starten.*

En anden elev skriver i opgave 9d, at $y = x \cdot 3 + 2$, *x=antal trin, 3 - det kræver at lave et trin undtagen det første og sidste*. Efterfølgende giver denne elev et eksempel $y = 111 \cdot 3 + 2 = 335$ hvor han skriver videre, at *2 - da det tager 2 tændstikker at lave det første trin eller sidste*. Eleven benytter et eksempel som en teknik, hvor han senere forklarer, hvordan han anvender det (teknologi). Samtidig skriver eleven i opgave 9c, at *Det tager 3 tændstikker for at lave 1 nyt trin her*, hvilket svarer til hans teknik til at svare 9c.

Generelt havde størstedelen af eleverne ikke vanskeligt ved at svare på spørgsmålene 9*b* og 9*c*, fordi de havde den geometriske figur (at tegne flere tandstikker og tælle trinene) som en hjælpe-teknik til at besvare spørgsmålene. Kun det sidste 9*d*, hvor der blev bedt om at opstille en ligning, dvs. at generalisere fra $a - c$ til det generelle tilfælde, havde kun 12 elever opstillet en ligning.

I opgave 2 ville jeg teste om eleverne er i stand til at benytte den geometriske egenskab, altså produktet af længden og bredden og algebraisere det. Det er en modelleringsopgave. På baggrund af elevernes besvarelse af opgave 2 kan det udledes, at over halvdelen af eleverne godt kunne modellere ud fra en given geometrisk figur (spørgsmål a), samt at 14 elever havde vanskeligt ved spørgsmål b. Ud fra elevers besvarelse ses, at langt de fleste har svært ved bogstaverne og deres betydning i et udsagn siden de ikke kunne betemme arealet af figurerne. Jeg gætter på, at mange elever kunne bestemme arealet af det skraverede rektangel, hvis der var givet tal i stedet for bogstaver. Ser vi på de fleste elevers besvarelser, kan jeg nu gengive dem som følgende:

1. $AX + BY$
2. $(A \cdot X) + (B \cdot Y)$

i 2b

1. BY
2. $B(X - Y)$
3. $x(a + b) - (a \cdot x + b \cdot y)$

4. $[(A+B)\cdot x]-[y\cdot B]$

5. $(2\cdot B)\cdot(2\cdot y)$

Flere elever forklarer, hvordan de bestemmer arealet af et kvadrat *for at finde arealet skal man gange længden med bredden og det gør jeg både på den lille del af figuren og den store del forefter jeg lægger dem sammen for at få hele figurens areal.* Det svarer til den korrekte teknologi, eleverne bruger her. Men når de skal bruge denne til at opstille en ligning i $2b$, så går det galt for de fleste. Dels kender de ikke til "parentesregler" og dels kender ikke om regningsoperationerne. Med førstnævnte vanskelighed mener jeg, at nogle af elever skriver et udtryk i 2b som det sidste (nr 5), hvor de indsætter en parentes, men ved ikke, at $(2B)(2Y)=4BY$. Mens andre forveksler multiplikation og addition og skriver $2b\cdot 2y$ i stedet for $2b+2y$. Det svarer til en af de beskrevne situationer, som blev beskrevet i referencemodellen i MO_1. Det er en konsekvens af brugen af regneregler (fra MO_1) som eleverne ikke kender til deres begrundelser.

Det er teknikken, som eleverne ikke kan bruge korrekt altså hvordan man går fra den geometriske til den algebraiske model. Det passer fint med den forventede antagelse om, at nogle af eleverne havde et for kort forløb om modelleringsopgaver. Det er Boschs (2012) point om, at algebra er begravet dybt og man skal derfor bruge den allerede eksisterende "algebra" som et redskab til at løse andre matematiske problemer.

Af 27 elever havde 25 svaret korrekt på spørgsmål $5a$, og kun en enkelt har skrevet udtrykket forkert, hvor svaret stadig er korrekt, hvilket er i overenstemmelse med den forventede antagelse. Det betyder, at næsten alle elever kender til regnereglen om reducering. Således regner stort set alle elever som følgende: $5a+3b-2a+b=5a-2a+3b+b=3a+4b$. Den metode bruger de fleste hvor de i den første deler det op efter a og b og regner videre på det. Mange af dem skriver, at *Jeg har lægger a'erne sammen og b'erne sammen*, som svarer til teknologien her. De tænker næppe videre over hvad a og b egentlig kunne være. De tænker nok mere som to adskilte regnestykker og ignorerer a og b så siger de $5-2$ og sætter bagefter a på. Der er desværre en elev, der ikke kunne reducere udtykket $5a+3b-2a+b$ hvor han får $7a-4b$.

I 5b bruger stort set alle elever teknikken "at finde fællesnævner" og derefter regner de som $\frac{5}{30}q+\frac{6}{30}q-\frac{1}{5}p$. I 5b ser vi, at en elev skriver:)$1/6q-1/5p+1/5q=\frac{5}{30}q-\frac{6}{30}p+\frac{6}{30}q=\frac{11}{30}q-\frac{1}{5}p$, og videre skriver eleven, at *Jeg kan ikke reducere mere da man ikke kan trække p fra q.* Eleven finder fællesnævner til leddet $-6/30p$ men i hans sidste sætning, indser han, at det er unødvendigt og derfor skriver han igen $-1/5p$. En anden elev regner 5b på samme måde for til sidst får han $\frac{11}{30}q - \frac{6}{30}p$. Videre skriver han *forlænger brøkerne så nævneren bliver 30 ganger derfor med 5 eller 6.* Denne forklaring svarer til teknologien til den anvendte teknik. Eleven regner opgaven, som om alle led er tal, og han ser bort fra bogstaverne og finder også en fælles nævner til det $-1/5p$. Det er tydeligt, at disse elever kun kender til teknikken "at finde fællesnævner" og ikke til hvordan, og hvornår denne skal anvendes.

Da denne opgave er fra MO_1, svarer teknikkerne til de forventede teknikker, som mange elever har brugt. Derfor er det heller ikke uventet, at eleverne reducerer udtrykkene som om de er tal (alt hvad man må med tal må man også med bogstaver som svarer til teorien i MO_1).

Med hensyn til opgave 6, har eleverne opstillet mange forskellige udtryk, og jeg nøjes med at vise nogle som de fleste opstillede i 6ab:

1. $(x3 + 15) \cdot 2 : 6 - x \Leftrightarrow (6x + 30) : 6 - x \Leftrightarrow x + 5 - x \Leftrightarrow 5$, og i 6b skriver eleven *fordi man fjerner "x" undervejs og* $15 \cdot 2 : 6$ *er altid 5.*
2. $x \cdot 3 + 15 \cdot 2 : 6 - x = 5$ mens i 6b skriver eleven, *Vi starter ud med x og grunden til at vi altid får 5 er fordi vi minusser med x til sidst. Det er simpelthen kombinationen af regnestykker der gør at det bliver 5 hver gang.*
3. $(x \cdot 3 + 15) \cdot 2) \div 6 - x = 5$
4. $x - \frac{(((x \cdot 3)+15) \cdot 2)}{6} = 5$, og i 6b skriver eleven *fordi vi altid få* $x = 5$ *hvis vi regner ligningen ud.*
5. $x - 2 \cdot \frac{(x3+15)}{6}$

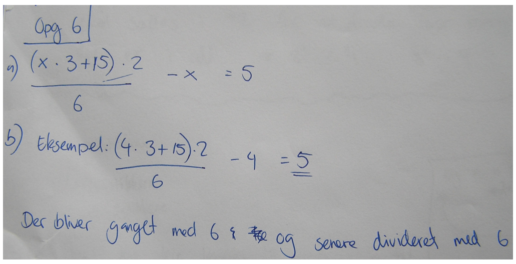
I den første besvarelse foretager eleven en række omformninger af udtrykket for at finde en løsning vba. biimplikationssymbolet. Eleven indser, at på den venstre side af $x + 5 - x \Leftrightarrow 5$ fås 5 tilbage, derfor $5 \Leftrightarrow 5$. Hans forklaring på det er, at "x fjernes undervejs" derfor giver det altid 5. Ud fra hans besvarelse ses, at eleven er ikke i stand at oversætte dette *Træk det totale resultat fra det oprindelige tal* til matematik. Besvarelsen viser, at eleven opstiller regnestykket på en lige linje. For ham er det opstillede udtryk korrekt, for han trækker det hele med x. Han ser ikke på hele udtrykket som en helhedsproces, der svarer til det første stadie af CP (se 3).

kan ikke oversætte

Hvad angår den anden og tredje besvarelse, vil jeg fortolke det som en direkte oversættelse af sproget til en ligning. Her overvejer eleverne næppe at tænke på bogstaverne, parentser og hvilket formål de har i et algebraisk udtryk. Når en elev skriver at det er en "kombination af regnestykker" fortolker jeg det som, at der gøres nogle flere ting med regnestykket som eleven ikke selv kan se og ikke i stand til at begrunde. Ud fra mange elevers besvarelse af opgave 6a ses, at mange har svært ved at sætte parentes i ligningen, og eleverne tænker nok, at opgaven beder jo ikke om det. Det svarer igen til det første stadie af CP. Jeg tvivler stærkt på, at hvis eleverne havde fået en opgave hvor de skulle regne et regnestykke som dette $3 + 15 \cdot 2 : 6 - 5$, da vil de næppe vide hvilken, rækkefølge de skal starte med. Dette svarer til en af de situationer, som eleverne møder i forbindelse med en opgaveregning.

Besvarelserne 4 og 5 viser, at eleverne ikke har forstået nr. 6 i opgave 5 *6. Træk det totale resultat fra det oprindelige tal (1).* Eleverne forklarer 5b ved at angive eksempler, som viser at det ikke passer til situationen beskrevet i opgave 5, dvs. når de indsætter et tal i stedet for x i udtrykket er resultatet ikke altid fem.

I figur 7.3 ses, en elevs besvarelse af opgave 6. Eleven er ikke i stand til at indse udtrykket i hans a) er ens, dvs. $(3x + 15) \cdot 6 \cdot 2 = 5 \cdot 6$. Han skriver, at*der bliver ganget med* 6. Her mener han nok, at tallet 6 ganges med x og med 5, ergo er svaret altid fem.



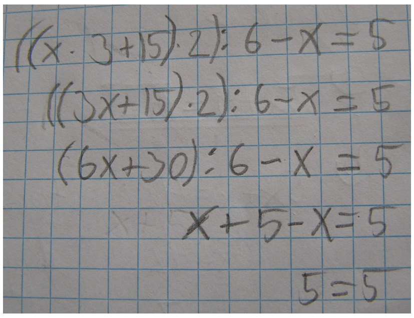
Figur 7.3: En eleves besvarelse af opgave 6ab.

En anden elev skriver i 6b, at *fordi at jo større et tal man sætter ind i ligningen jo større et tal trækker man fra til sidst og derefter vil det altid ende på 5.*

Samtidig havde nogle elever argumenteret for spørgsmålet b således:

> *fordi man altid trækker x fra, derfor kan man proppe alle tal igennem og det vil altid give* 5.

Mens nogle andre har skrevet, at *fordi alle under 8 er primtal*, her mener de, at alle tal, der er under x er primtal, og derfor giver udtrykket $\frac{(3x+15)2}{6} - x = 5$ altid fem.



Figur 7.4: En eleves besvarelse af opgave 6*b*.

Når jeg ser på elevernes besvarelser, kan jeg se at alle elever, undtaget en, starter med at skrive $x \cdot 3$. Det tyder på, at de ikke kender forskel mellem $3x$ og $x3$. Det er en af de situationer, hvor det er nødvendigt at regneregler skal præciseres for at lære eleverne at $3x = x3$.
Generelt var elevernes besvarelser af opgave 6 i overensstemmelse med den forventede antagelse om, at eleverne er relative uvante med modelleringsopgaver, især med spørgsmålet *b*, hvilket passer med Boschs (2012) klage over, at der mere fokus på løsning af ligninger (problemsolving) fremfor algebraiseringsopgaver (se kapitel 3). Resultatet for spørgsmål *b* ser generelt skuffende ud, da kun fire elever var i stand til at argumentere næsten[2] "matematisk" korrekt (se tabellen) og 7.4. Af 27 elever er der 13 elever, der kunne opstille en ligning, hvor de sætter parentesen korrekt se figur 7.3. Derfor ser jeg behovet for formalisering af regneregler for bl.a. parenteser, kommutative lov er større i sådanne opgaver (situationer, som eleverne møder, se referencemodellen, MO_1).

I forbindelse med opgave 7 har langt de fleste elever besvaret både 7a og 7b. Over halvdelen af eleverne besvarer opgave 7a ved at skrive $10 + 3$

[2]Med "næsten" mener jeg, at nogle elever havde fortegnsfejl i deres besvarelse i spørgsmål *b*, men argumentet var stadig korrekt.

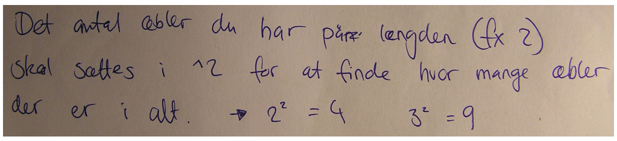
og den totale er 13. I 7b skriver de $13 + 3$ og den totale er 13, hvor eleverne også har tegnet et geometrisk mønster.

Der er nogle elever, som besvarede opgave 7b ved at skrive $(k + t) = kt$ under den totale kolone. Denne elev har svaret korrekt i 7a, men når han vælger at angive et lighedstegn mellem de to udtryk, antyder det at eleven ikke har forstand på de to operationer, eller han ved ikke, hvad bogstaver repræsenterer.

En anden elev skriver $1+3\cdot(n-1)+3 \Leftrightarrow 1+3n$ i opgave 7b. Eleven tænker her abstrakt og er i stand til at generalisere et udtryk, som gælder for alle tal. Denne opgave er en modelleringsopgave, hvor eleverne skal algebraisere et aritmetisk regnstykke til et algebraisk udtryk. Mere end halvdelen af eleverne var desværre ikke i stand til at modellere, på trods af der var givet en geometrisk figur, som kunne understøtte elevernes besvarelse.

Tilsvarende kunne mange elever i opgave 8 ikke finde den generelle formel, som der blev spurgt om, mens 5 valgte ikke at svare på spørgsmålet, hvor de har skrevet et spørgsmåltegn i opgaven. Mens nogle andre elever har valgt at besvare opgave 8 på følgende måde:

1. $f(x) = a^x$
2. x^2
3. *Det antal æbler der har på længden (fx 2) skal sættes i* ^{2} *for at finde hvor mange æbler der er i alt* $\rightarrow 2^2 = 4, 3^2 = 9$ (se figur 7.5).
4. *kvadratroden af 1 2 3 4 osv,* $\sqrt{y}y = x$, y= vilkårligt antal granatæbler, x= generelt udtryk.



Figur 7.5: En elevs besvarelse af opgave 8.

Den første besvarelse ligner jo langt fra det ønskede udtryk, måske tænker eleven her, at den eksponentialfunktion faktisk er det ønskede svar uden at han er klar over, hvad a og x står for. Igen ved eleven ikke hvad disse bogstaver repræsenterer. Den anden besvarelse er fra en elev, hvor han tegner x og y på det givne mønster, hvor $x =$ længden og $y =$ bredde skriver eleven. Her bruger han den givne figur inklusive arealformel som en teknik til at komme frem til det generelle udtryk.

Den tredje besvarelse (nr.3) svarer faktisk til teknologien, hvor eleven kommer frem til $2^2 = 4, 3^2 = 9$. Herfra kan eleven desværre ikke slutte sig til det generelle udtryk. Men han er godt på vej og bruger den korrekte teknik og teknlogien her.

Den sidste besvarelse er uklar omkring, hvilken teknik eleven har tænkt sig at bruge her. Eleven har muligvis byttet om på y^2 og $\sqrt{y}y$ eller han vil prøve at komme til det generelle, men er ikke klar over, hvad disse udtryk repræsenterer.

Ser vi på en anden elevs besvarelse, kan vi se, at eleven forklarer at *Antal æbler pr. række* $^2 =$ *antal æbler pr. bunke.* der svarer til teknologien her hvor han skriver 2^2 se figur 7.5. Eleven mangler kun at skrive det med et algebraisk udtryk.

Én elevs besvarelse er ikke medtaget i tabellen, og svaret antages heller ikke forkert, idet eleven skriver:

> *han (grønthandleren) danner en firkant ud af de æbler som han har, de æbler som ikke kan være en del af kvadrattet ligger han oven i når han har ganget to sider på kvadrattet sammen.*

En anden elev besvarer spørgsmålet ved at skrive, at længden (l) af kvadrattet gange med bredden (b), dvs. $l \cdot b$. Her ses igen, at den geometriske figur er en stor hjælpteknik til elevens besvarelse (at konstruere et algebraisk udtryk), altså eleven går fra den geometriske model til den algebraiske model.

Generelt ser resultatet for antallet af de rigtige svar i opgave 8 overraskende positiv ud, da der blev forventet, at elever ville få problemer med at komme frem til det generelle udtryk (10 rigtige), for eleverne kun har haft lidt om modellering.

Med hensyn til den sidste opgave, ser resultatet ikke overraskende ud, idet eleverne er uvante med den slags opgave, som handler om at forklare og begrunde sit svar. Nedenunder angiver de besvarelser i opgave 10, som de fleste elever har forsøgt at komme frem til:

1. $ab = ac \Leftrightarrow ab/a = c \Leftrightarrow b = c.$

2. $ab = ac \Leftrightarrow b = c$

3. $\frac{ab}{a} = \frac{ac}{a} \Leftrightarrow b = c.$

De fleste elever har regnet opgaven som en almindelig ligningløsning, for eksempel: $ab = ac \Leftrightarrow ab/a = c \Leftrightarrow b = c$, hvor teknikken er at finde fællesnævner. Efter udregningen, skriver de, at *Hvis man flytter a over, skal der divivderes med a. Derefter går a'erne sammen og b står tilbage.* hvilket svarer til teknologien, ved at forklare teknikkerne i hvert trin. I den anden og tredje besvarelse skriver eleverne, at *de to a'ere går ud med hinanden* og *ved at isolere b eller dividere med a for man* $b = c$. Det er den mest brugte teknologi og teknik de fleste elever benytter i opgave 10, som svarer til de teknikker fra aritmetik som teoriblok MO_1. Hvorefter de fleste angiver et eksempel for at bekræfte teknikken, for eksempel skriver en elev, at *"hvis a fx = 5, så skal* $b = c$ *for at ligningen går op, hvis den ikke er det, ville det se sjovt ud fx* $5 \cdot 5 = 5 \cdot 6 =$ *false statement derimod ville* $5 \cdot 6 = 5 \cdot 6 =$ *true statement.*

Ser vi på en anden elev, der skriver, at $a = 1$ *hvis vi ganger alt med* 1*, bliver det samme*, som svarer til teknologien hvor teknikken er at sætte $a = 1$. Samtidig skriver en anden elev, at: *Hvis du sætter tallene til at være det samme vil det altid være (=) hinanden.* Her bruger eleven en teknik uanset hvilket tal man sætter ind i udtrykket $ab = ac$ får man det samme. Ti elever har valgt ikke at besvare opgaven, idet nogle skriver, at opgaven er svært eller *"dårligt formuleret"*. Dette fortæller, at eleverne er ret uvante med den slags opgave, og de ses heller ikke hyppigt i matematiklærebøgerne. Kun en elevs besvarelse er regnet for at være "korrekt" besvaret, idet eleven skriver $ab = ac, b = c$, så længe $a > 0$. Eleven sætter to streger under det sidste udsagn (under $a > 0$). Eleven begrunder, at så længe a er positiv, gælder udsagnet $b = c$, men dog er eleven ikke klar over, at a også kan være negativ.

Ud fra elevernes besvarelse kan det ses, at opgaven har vækket interesse hos nogle elever, der forsøgte at løse den. Der blev selvfølgelig ikke forventet, at eleverne skulle begrunde opgaven, idet det forventedes, at mange ville finde det vanskeligt, da eleverne manglede de matematiske forudsætninger, som denne slags opgaver kræver. Dette er i overenstemmelse med den forventede antagelse om, at eleverne mangler den teoretiske side af algebra, som blev beskrevet i MO_2 i referencemodellen. Bemærk, at ikke alle elevernes besvarelser er medtaget i tabellen, idet nogle (11 elever) har regnet opgaven som en sædvanlig ligning (isolere a).

Nedenstående tabel viser elevernes resultater for den diagnostiske test.

Opg/Svar	Rigtige	Forkerte	Intet svar	Forkert skrevet	Svaret med eksempler
1a	27				
1b	27				
2a	23	5			
2b	12	14	1		
3a	24	2	1		
3b	24	2	1		
4	14	8	5		
5a	25	1		1	
5b	21	3		3	
6a	13	12			2
6b	4	12	7		4
7a	26		1		
7b	1	26			
8	10	11	5		
9a	27				
9b	23	4			
9c	25	2			
9d	12	11	4		
10	1		10		

7.3 Diskussion

- af analysen af den diagnostiske test

Ud fra ovenstående analyse af elevernes besvarelse er det nu muligt at fremlægge de teknikker og teknologier eleverne anvendte i forbindelse med opgaveregning,

1. Man må lægge det samme tal til, trække det samme tal fra, gange med det samme tal og dividere med det samme tal på begge sider af lighedstegnet i en ligning.
2. For at forkorte en brøk skal man dividere tæller og nævner med samme tal.
3. Man ganger et tal ind i parentes ved at gange tallet med hvert led.
4. Eksempler på tal.

5. Man kan gange over kors hvis højre og venstre side af lighedstegnet er brøker $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Det er disse teknikker som eleverne har benyttet i forbindelse med opgaveregning i den diagnostiske test. Teknikkerne ligger ikke fjernt fra dem som blev beskrevet i MO_1 i referencemodellen. Og det er heller ikke uventet, at eleverne benytter disse idet analysen af lærebogen *Hvad er matematik* lægger op til at bruge disse teknikker. Det svarer netop til de krav, læreplanen (2010) stiller *regningsarternes hierarki* og eleverne skal opnå en *grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger* som svarer til den første teknik. Den nuværende læreplan udtaler sig om, at eleverne skal kunne *håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold*. Det svarer til, at elevernes besvarelser af opgaver 1, 3, 4 og 9 som viser, at langt de fleste elever godt kunne opstille en ligning ud fra en tekst, dvs. de er i stand til at skifte mellem en geometrisk og sprogformuleret opgave til den algebraiske model, med teknik som den første.

Stort set alle elever brugte den anden og femte teknik i forbindelse med opgave 5. Som anført tidligere havde ingen elever problemer med at benytte reduceringsreglen (nr.2). Det er også en af de typiske opgaver som de fleste elever møder i en matematikundervisning hvilket stemmer overens med et af de eksempler i MO_1 i referencemodellen. For at udvikle elevernes teknik og dermed teknologi i denne opgave, kan en lærer, for eksempel, vælge at introducere flere af den slags opgaver, og beder eleverne om at begrunde sit svar for hvorfor er $5a + 3b - 2a + b = 3a + 4b = 4b + 3a$. Her kan eleverne danne et bedre grundlag for forståelsen af bogstaverne og operationerne mellem disse.

Overraskende er, at kun 13 elever ud af 27 godt kunne konstruere et algebraisk udtryk i opgave 6, men til gengæld er der ikke mange der kunne argumentere for 6b. Denne opgave svarer til de forskellige stadier af algebraiseringsprocessen, som Bosch(2012) foreslår. Da resultatet af både opgaver 7 og 8 ser skuffende ud, er jeg heller ikke overrasket, idet eleverne er uvante med algebraiserings- og modelleringsopgaver. En konsekvens er, at når elever vælger at oversætte et matematisk sprog direkte til bogstaver, så forsvinder rationaliteten af opgaven. For eksempel skriver en elev i opgave 6a $x3 + 15 \cdot 2 \div 6 - x \Leftrightarrow 5$. Beder vi dem om at regne denne opgave, som sagt før, vil de næppe kunne regne, idet de ikke ved, hvor de skal starte og hvornår de skal indsætte en parentes og hvorfor.

Opgaver $7b$, og 8 svarer det andet stadie af algebraiseringsproces som viser, at fleste elever havde også vanskeligt ved at slutte til det generelle udtryk. Specielt ses det i opgave $7b$, hvor kun en elev kunne slutte til det generelle udtryk. Teknikken, som de fleste elever benytter i opgave 8 er baseret på eksempler og forklaringer af dem (teknik nr 4). Generelt kan langt de fleste elever ikke generalisere fra et enkelt tilfælde til det generelle, hvilket stemmer overens med den forventede antagelse.

Med hensyn til den sidste opgave, viser elevernes besvarelserne, at de ikke ikke er i stand til at argumentere matematisk for opgaven. Kun en enkelt elev, skriver, at for $a > 0$ kan man slutte fra $ab = ac$ til $b = c$. Resten har regnet denne opgave med den teknik 1 uden at begrunde svaret.
For at udvikle og styrke elevernes teknikker og teknologi kan en lærer vælge at forklare opgaven 10 ved at sige, at hvis a er forskellig fra 0 kan vi dividere med a på begge sider af lighedstegnet og få $b = c$. Så når a ikke er lig med 0 kan vi slutte $b = c$. (Det kan vi ikke slutte når $a = 0$).
Man kunne også vælge at introducere eleverne for et aksiom (se kapitel 5.5, der siger, at man godt må dividere med a på begge sider, hvis $a \neq 0$.

Alternativt kan man vælge at forklare med det, at vi kan slutte, at $b = c$ hvis a ikke er lig nul, siden a så har (multiplikativt) invers element. $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot c \Longrightarrow b = c$. Vi kan kun tage a^{-1} hvis a ikke er lig nul fordi man ikke kan dividere med 0. Man kunne vælge at skrive a^{-1} som $1/a$ så det er nemmere at se hvad der foregår.

For at udvikle elevernes teknikker til at løse algebraiseringsopgaver er der behov for at da er noget at algebraisere. Der skal stilles flere opgaver som fremhæver den algebraiske side med henblik på symbolerne og bogstaver for at styrke elevernes teknikker og dermed teknologi. Ligesom Boch (2012) pointerer, at man skal bruge den allerede eksisterende algebra til at modellere andre matematiske problemer. At indføre en klasse af opgave, svarer til modelleringsproces af algebra (se afsnit 3) vil det hjælpe eleverne med at udvikle teknikker mht. løsning af algebraiske opgaver. De fleste besvarelser svarer faktisk til det første og andet stadie algebraiseringsproces.

Udover at indføre algebraisering viser analysen af besvarelserne, at der stort behov for at formalisere regneregler for at forhindre elevernes forkerte konstruktion af algebraiske modeller som for eksempelt $x3 = 3x$, eller at $ax + ay \neq (ax) \cdot (ay)$ eller $5a + 3b - 2a + b \neq 7a + 4b$ osv.

KAPITEL

8 Konklusion

8.1 Konklusion

I specialet har jeg studeret algebra som et videnskabsfag i et historisk perspektiv og det algebraiske domæne i både nutidens gymnasie og i 1970'erne. På baggrund af referencemodellen kan jeg nu sige, at de matematiske organisationer, der indgår i den klassiske og arabiske algebra svarer mere eller mindre til aritmetikregler som teoriblok, MO_1. Samtidig ligner matematiske organisationer fra den abstrakte algebra mere den teoretiske algebra MO_2.

Babyloniernes ligningsløsning afspejler en teknik, teknologi og også teori knyttet til en opgavetype, vi i dag vil kalde førstegradsligninger. Mens den aksiomatiske metode fra den abstrakte algebra har afspejlet det algebraiske domæne i 1970'erne.

Analysen af den nutidige lærebog viser, at algebraiske regneregler fremstilles på et praksisniveau, hvor teorien svarer til at, "man må gøre hvad med symbolerne, som man også må med tal". Nutidens lærebog lægger mere vægt på anvendelse i matematik frem for begrundelse og retfærdiggørelse. Regnereglerne forekommer som naturlov, altså uden begrundelse og forklaringer. De bruges som et sæt af konventioner som faktisk er svarende til de teknikker fra aritmetik som teoriblok MO_1. MO'er i lærebogen er i analogt til MO_1, hvor opgaverne er mere af T_{11}. Det er disse opgaver med følgende teknikker, der forventes at eleverne skal kunne beherske, når de skal regne algebraiske opgaver.

Analysen af det algebraiske domæne i 1970'erne viser, at det algebraiske domæne er tættere på videnskabsfaget algebra end i dag. Med hensyn til lærebøgerne *Matematik 1, 2.2* så beskæftigede de sig eksplicit med algebraiske opgaver omhandlende begrundelse. Regnereglerne er formaliseret og givet eksplicit. Disse bøger starter med at introducere mængdelæren hvorpå andre kapitler bygger videre på det. De matematiske organisationer som benyttes i disse to bøger svarer helt klart til den teoretiske algebra MO_2.

I afsnit 5.5 viste jeg, at de regneregler med statussen er som "sådan er det bare" eller der betragtes som naturlov i nutidens gymnasier, kan begrundes og forklares ud fra den aksiomatiske tilgang. Derfor er det muligt at integrere MO_1 og MO_2 til en regional matematisk organisation, således at den kommer til at præcisere regnereglerne som danner grundlag for forståelse af tallene og deres natur med en fælles teori om ringe.
Analysen af den diagnostiske test viser, at eleverne er stand til at benytte de teknikker og teknologi, som den nutidige lærebog lægger op til. Elevernes teknikker og teknologier svarer til dem som er beskrevet i MO_1. I forbindelse med den sidste opgave som handler om at begrunde svaret, har mange elever haft vanskeligheder. Dette er ikke overraskende idet de er uvante med den type af opgaver fra MO_2, hvilket er i overensstemmelse med analysen om at nutidens matematiklærebøger lægger mest vægt på praksisniveauet, hvor teorien bliver undertrykt. De nuværende elever mangler den teoretiske algebra sammenlignet med eleverne fra 1970'erne.

For at udvikle elevernes beherskelse af teknikker og teknologier i forbindelse med algebraiske opgaver, er det værd at undersøge hvilke muligheder der er for at introducere den teoretiske side af algebra fra MO_2. En mulighed er først og fremmest at nedtrappe CAS teknikken i matematikundervisningen. De algebraiske opgaver i gymnasiealgebra løses stort set med CAS (ifølge nutidens læreplan). Rationaliteten af den allerede eksisterende "algebra" forsvinder desværre, hvis det hele er overladt til CAS. Som en kommende gymnasielærer ser jeg et potentiale ved at undervise i de elementære regneregler (aksiomer). Det er vigtigt at konkretisere regnereglerne og gøre dem mere "synlige" og tilgængelige for eleverne. Dette er nemmere sagt end gjort. I virkelighedens verden er det ret komplekst at realisere mulighederne. Her er mange niveauer der har indflydelse på måden en matematisk organisation skal udfolde sig. Ligesom i afsnittet 6.6 blev der redegjort for hvordan samfundet havde bl.a. påvirket den måde de matematiske organisationer der blev etableret i lærebøgerne *Matematik 1, 2.2*. På samme måde har det pædagogiske og matematiske niveauer i et større perspektiv en særdeles indflydelse på udviklingen af de ønskede matematiske organisationer. Det vil være en udfordrende opgave at undersøge dette nærmere såfremt man havde mere tid til rådighed til dette.

Litteratur

[1] Artigue M., & Winsløw C. (2010) International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Reseaches en Didactique des Mathématiques*, 31(1)pp.47-82.

[2] Allenby R.B.J.T.(1991). *Rings, Fields and groups* (An Introduction to Abstract Algebra) (pp.10-14; 84-86, 91-94). London: R B J T Allenby.

[3] Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions in Spanish high schools *Educational Studies in Mathematics* 59 no. 1-3, 235-268.

[4] Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica* 14, 125-133.

[5] Bosch M. (2012). Doing Research Within The Anthropological Theory Of The Didactic: The Case Of School Algebra. *Regular lecture at ICME 12, Seoul, 2012.*

[6] Bosch, M. and Gascón, J. (2006) Twenty five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-65.

[7] Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascon, J. (2005). Science or magic? the use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education WG 11*, p. 1256–1257.

[8] Carstensen J., Frandsen J. og Studsgaard J. (2007) *MAT A1 stx*, Aarhus: Systime A/S.

[9] Dybdal B., Goldschmidt E (1960). *Det nye gymnasium.* Betænkning NR. 269. Statens trykningskontor. Un 00-160 bet.

[10] Eves H. (1997). *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (pp.113-119). New Yourk: Dover Publications, INC.

[11] García, F.J., Higueras, L.R., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 226-246.

[12] Grøn B., Felsager B., Bruun B., Lyndrup O. (2012). *Hvad er matematik? C.* København: L &R Uddannelse.

[13] Grøn B., Felsager B., Bruun B., Lyndrup O. (2012). *Hvad er matematik? OPGAVEBOG.* København: L &R Uddannelse.

[14] Hansen H. C., Haahr O., Jensen H.N., Wedege T., Jacobsen I.T., Thybo C., Munkholm E.S., Antonius S., Madsen T.G., Jørsboe O.G. (2008). *Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet.* (s.587-628). Forfatterne og Syddansk Universitetsforlag.

[15] Katz V. (2009). *A History of Mathematics.*(pp.7-8, 22- 28, 176-178, 271-275, 279, 468, 710) Boston: Pearson Education Inc.

[16] Kristensen E., Rindung O. (1975). *MATEMATIK 1.* København: G.E.C.Gads.

[17] Kristensen E., Rindung O. (1975). *MATEMATIK 2.2.*København: G.E.C.Gads.

[18] Måsøval H. S. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college.* Doctoral Dissertation. University of Agder, Kristiandsand, Norway.

[19] Niss M., Jensen H.T.,(sek.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Undervisningsministeriet.

[20] Rindung O. 1965 (1965). The new mathematics program in the Danish gymnasium. *National Council of Teachers of Mathematics.* The Mathematics Teacher, Vol.58, No.2 pp.150-155. New York

[21] Palle B. P. og Vagner S. (2003). *Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991.* Esbjerg: Matematiklærerforeningen.

[22] STX bekendtgørelsen (2010). *Bek nr 741, Bilag 37 Matematik C.* Lokaliseret den dato 2012 på https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132647#B37.

[23] STX vejledning (2010). For matematik C-Stx. Lokaliseret den dato 2012 på

(http://www.uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Studieretninger-og-fag/Studentereksamen-%28stx%29/Fag-paa stx/~/media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF10/Vejledninger %20til%20laereplaner/Stx/100806_vejl_matematik_C_stx.ashx).

[24] Ruiz-Munzón N., Bosch M & Gascón J (2014). Comparing approaches through a reference epistemological model: The Case Of School Algebra. *Escola Universitària del Maresme (Spain), Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Ramon Llull (Spain)* (pp. 2870-2879).

[25] Weng P. and Wahl M. (Eds) (2012). Matematik som videnskabsfag og som undervisningsfag. *Håndbog for matematiklærere*, under udg.

[26] Winsløw C. (2006). *Didaktiske Elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Frederiksberg: Biofolia.

[27] Winsløw C., Durand-Guerrier V., Yoshida H. (2010). A model of mathematics teacher knowledge and a comparative study in Denmark, France and Japan. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 15*, 141-166.