INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Forskningslignende situationer på et første-årskursus i matematisk analyse

Katrine Frovin Gravesen

Kandidatspeciale

Juni 2015

IND's studenterserie nr. 42

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte – Om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2013)
29. Morten C. B. Persson: Kvantekemi i gymnasiet - Tilrettelæggelse, udførelse og evaluering af et undervisningsforløb (2013)
30. Sofie Birch Jensen: Køn, evaluering og The Force Concept Inventory (2013)
31. Simone Gravlund Nielsen: Når børn forsker i matematik (2013)
32. Henrik Egholm Wessel: Smartphones as Scientific Instruments in Inquiry Based Science Education (2013)
33. Nicole Koefoed: Et didaktisk design om definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral (2013)
34. Trine Louise Brøndt Nielsen: From Master's programme to labour market – A study on physics graduates' experience of the transition to the labour market (2013**)**
35. Rie Hjørnegaard Malm: Becoming a Geologist – Identity negotiations among first year geology students (2013)
36. Mariam Babrakzai Zadran: Gymnasiealgebra I et historisk perspektiv – Matematiske organisationer I gymnasiealgebra (2014)
37. Marie Lohmann-Jensen: Flipped Classroom – andet end blot en strukturel ændring af undervisningen? (2014)
38. Jeppe Willads Petersen: Talent – Why do we do it? (2014)
39. Jeanette Kjølbæk: One-dimensional regression in high school (2015)
40. Anders Wolfsberg: A praxeological investigation of divergence – Exploring challenges of teaching and learning math-in-physics (2015)
41. Asger Brix Jensen: Number tricks as a didactical tool for teaching elementary algebra (2015)
42. **Katrine Frovin Gravesen: Forskningslignende situationer på et førsteårskursus I matematisk analyse (2015)**

Abstract
This master thesis explores the idea of teaching activities of a research like nature on a first year course in mathematical analysis. Based on the theory of didactical situations this master thesis investigates what research like situations might look like. The master thesis creates a model to describe global attributes concerning research like situations and categorizes research like activities. While this model was developed, a new task design to be used in Analyse 0, a first year course in mathematics at University of Copenhagen, was created. The task design solves a design problem regarding the creation of tasks focusing on the theoretical bases of calculus in one and several variables. The purpose of the task design is to encourage the students to participate actively in the classroom, that the task design is relevant with respect to the examination of the course whilst also having the students perform activities, which can be described as research like.

***IND's studenterserie** består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*
Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

DET NATUR- OG BIOVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Kandidatspeciale

Forskningslignende situationer på et førsteårskursus i matematisk analyse

Katrine Frovin Gravesen

30. juni 2015
Vejleder: Carl Winsløw

Speciale for cand.scient-graden i matematik. Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Thesis for the Master degree in Mathematics. Department of Science Education University of Copenhagen

Resumé

I specialet udfoldes idéen om forskningslignende undervisningsaktiviteter på et førsteårskursus i matematisk analyse. Med udgangspunkt i teorien om didaktiske situationer undersøger specialet, hvad forskningslignende situationer kan være. I specialet udvikles en model, som beskriver globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter. Modellen er udviklet i vekselvirkning med produktionen af et nyt opgavedesign til brug på Analyse 0, der er et førsteårs matematikkursus ved Københavns Universitet. Opgavedesignet besvarer et designproblem vedrørende udformningen af opgaver, som fokuserer på teoretisk basis for analyse i en og flere variable. Formålet med opgavedesignet er, at de studerende deltager aktivt i undervisningen, at opgavedesignet er relevant i forhold til kursets eksamen, og at deltagerne udfører aktiviteter, som kan karakteriseres som forskningslignende.

Abstract

This master thesis explores the idea of teaching activties of a research like nature on a first year course in matematical analysis. Based on the theory of didactical situations this master thesis investigates what research like situations might look like. The master thesis creates a model to describe global attributes concerning research like situations and categorizes research like activties. While this model was developed, a new taskdesign to be used in Analyse 0, a first year course in mathematics at University of Copenhagen, was created. The taskdesign solves a designproblem regarding the creation of tasks focusing on the theoretical bases of calculus in one and several variables. The purpose of the taskdesign is to encourage the students to particpate actively in the classroom, that the taskdesign is relevant with respect to the examination of the course whilst also having the students perform activties, which can be described as research like.

Forord

Universitetet er både en forsknings- og undervisningsinstitution. Forskeren er ofte også den, som underviser i institutionen. Det betyder ikke, at der er en naturlig forbindelse mellem forsknings- og undervisningspraksis, særligt ikke for matematik. Institutionen har interesse i at introducere de studerende til forskningsmetoder, da det bestyrker deres viden om og inden for faget. Specialet opstiller en række aktiviteter, som kan karakteriseres som forskningslignende, og som studerende kan tænkes at udføre. I beskrivelsen af aktiviteterne fremhæves det, hvorfor de er forskningslignende, og hvilken del af forskningspraksissen de ligner. Specialet undersøger et designproblem, og resultatet er et nyt opgavedesign til brug på Analyse 0. Specialets analyse af fire udvalgte situationer dokumenterer, at de studerende kan udføre aktiviteter, som specialet kategoriserer som forskningslignende.

Da jeg undersøgte, hvad forskning i matematik er, blev jeg opmærksom på de mange facetter af forskerens arbejde, som er skjult for udenforstående. Jeg synes, at det er interessant at fokusere på de dele af praksissen, som kan efterlignes af studerende. De studerende konstruerer ikke ny matematik. De får indblik i processen eller i hvert fald dele af den. Jeg er gennem hele forløbet blevet motiveret og udfordret af kompleksiteten i spørgsmålet om, hvad forskningslignende aktiviteter kan være. Jeg vil gerne takke min vejleder, Carl Winsløw, for konstruktiv og inspirerende vejledning i forbindelse med udviklingen af specialets model samt for godt samarbejde gennem hele projektet.
Tak til instruktor, Anna Munk Ebbesen, for samarbejde i designprocessen. Tak til fokusgruppen, som har været behjælpelige med noter og deltaget i interviews. Tak til Kristian Olesen for hjælp til de tekniske opsætninger af specialet. Også tak til Rie Jensen, Anders Wolfsberg og Jacob Bahn for at læse og give kommentarer til specialet. Tak til Hans Henrik Andersen, der har læst korrektur på specialet. Sidst men ikke mindst tak til Annette Gravesen, Lasse Gravesen og Nikolaj Borum for at have været tålmodige og overbærende gennem hele specialeperioden. Jeres opbakning betyder alt!

Indhold

Indhold **1**

1 Introduktion **5**

2 TDS og teoretisk forskningsspørgsmål **9**
2.1 Det didaktiske miljø 10
2.2 Typer af situationer og deres karakteristik 11
2.3 Den didaktiske kontrakt 15
2.4 Opgavedesign og opgaver opfattet som situationer 18
2.5 Teoretisk forskningsspørgsmål og designproblem 21

3 Fire potentialer og to empiriske forskningsspørgsmål **23**
3.1 Adidaktisk potentiale 24
3.2 Stoflig sammenhængspotentiale 25
3.3 Fordybelsespotentiale 25
3.4 Forskningspotentiale 26
3.4.1 Model: Globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter 29
3.5 Empiriske forskningsspørgsmål 41

4 Metodologi **43**

5 Analyse af opgavedesign og fire udvalgte situationer **49**
5.1 F-opgaver 49
5.2 Ekstremalværdisætningen 50
5.2.1 Antagelser i Hovedsætning 1A 52
5.2.2 De fire potentialer 53
5.2.3 Mulige forhindringer 53
5.2.4 Udvikling af situationen 54
5.2.5 Realisering af potentialer 58
5.3 Afgørelse af differentiabilitet 61

5.3.1 Fire eksempler . . . 63
5.3.2 De fire potentialer . . . 69
5.3.3 Mulige forhindringer . . . 70
5.3.4 Udviklingen af situationen . . . 71
5.3.5 Realisering af potentialer . . . 87
5.4 Definition af kurveintegralet . . . 90
5.4.1 Entydighedsbeviset og definitionens form . . . 92
5.4.2 De fire potentialer . . . 94
5.4.3 Mulige forhindringer . . . 95
5.4.4 Udviklingen af situationen . . . 96
5.4.5 Realisering af potentialer . . . 103
5.5 Beviset for Greens formel . . . 105
5.5.1 Bevis for hvilke specialtilfælde? . . . 106
5.5.2 De fire potentialer . . . 111
5.5.3 Mulige forhindringer . . . 113
5.5.4 Udviklingen af situationen . . . 113
5.5.5 Realisering af potentialer . . . 121

6 Analyse af overordnede observationer 125

7 Konklusion 137
7.1 Perspektivering . . . 140

Litteratur 143

A Detaljeret kursusbeskrivelse 147

B Spørgeskema 155

C F-opgaver version 11 157
1 Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner . . . 159
2 Taylors formler i én variabel . . . 161
3 Riemannintegralet . . . 163
4 Stamfunktionsproblemet i én variabel . . . 165
5 Uafhængighed af differentiationsrækkefølge . . . 166
6 Differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$ . . . 168
7 Den generaliserede kæderegel . . . 169
8 Taylors formel i flere variable og analyse af stationære punkter 170
9 Kurvelængde . . . 171
10 Kurveintegral . . . 172
11 Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$ . . . 173
12 Greens Sætning . . . 174

D A priori analyse af opgavedesign **177**

E F-opgavehæfte til eksamensbrug **179**

F Interviews med fokusgruppe **193**

F.1 Interviews fra uge 9 193
F.1.1 Spørgeguide 1 193
F.1.2 Interview med I_1 og I_5 194
F.1.3 Interview med I_3 og I_6 206
F.1.4 Interview med I_2 og I_4 214
F.1.5 Interview med I_7 226
F.2 Interviews fra uge 18 og uge 19 238
F.2.1 Spørgeguide 2 238
F.2.2 Interview med I_1 og I_5 239
F.2.3 Interview med I_6 249
F.2.4 Interview med I_3 257
F.2.5 Interview med I_2 og I_4 261
F.2.6 Interview med I_7 271

Kapitel 1

Introduktion

Analyse 0 (herefter An0) er et obligatorisk kursus på bacheloruddannelserne i de matematiske fag ved Københavns Universitet. An0 er et førsteårskursus i matematisk analyse, og kursusindholdet er teoretisk. I målbeskrivelsen står, at deltagerne ved An0 skal opnå viden om blandt andet kontinuitet, differentiabilitet og Riemann-integrabilitet. Deltagerne skal opnå færdigheder i at analysere teoretiske objekter og begreber. Dette speciale beretter om et overgangsproblem. De faglige forudsætninger for An0 er *Introduktion til matematik* (herefter MatIntro) og *Lineær Algebra* (herefter LinAlg). Begge er obligatoriske kurser på bacheloruddannelserne i de matematiske fag, og begge kurser fokuserer på teknisk viden og færdigheder. Problemet opstår i overgangen fra kurser om teknisk viden til et kursus om teoretisk viden. Det at kurserne fokuserer på forskelligartet viden og færdigheder afspejles i eksamensformen. Deltagerne ved An0 evalueres ved en mundtlig eksamen, mens eksamen er skriftlig for både MatIntro og LinAlg. Overgangsproblemer er studeret og beskrevet af Gueudet (2008), Winsløw (2012) og Winsløw et al. (2014). Specialet præsenterer en metodologisk tilgang til at designe opgaver, som kan lette overgangen til at teoretisk kursus som An0.

Undervisningsformen i An0 er fire timers forelæsning og fem timers øvelser om ugen i syv uger. I specialet er øvelsestimen ved An0 den institutionelle kontekst. Til konteksten hører de betingelser og omstændigheder, der er ved denne undervisningsform. Det uddybes i det følgende.
Øvelsestimerne betegnes som teoretiske øvelser og forestås af en instruktor. Instruktorerne er kandidatstuderende, som alle har haft An0 i løbet af deres uddannelse. De studerende arbejder med et opgaveprogram ved øvelsestimerne. Tidligere bestod opgaveprogrammet til brug på An0 af et udvalg af opgaver fra Eilers et al. (2014) eller tidligere versioner. I den nye version, Eilers et al. (2015), som blev brugt ved An0 i år, er der ikke æn-

dret nævneværdigt i opgavematerialet. Opgaverne fra Eilers et al. (2015) er kendetegnet ved formuleringer som *"Gør rede for at ..."*, *"Vis at ..."* eller *"Slut heraf at ..."* og opgaveformuleringerne indeholder også i nogle tilfælde et vink til sætninger, uligheder eller formler fra noterne, som de studerende kan bruge til at løse opgaven.
Øvelsestimerne består af forskellige typer programsatte aktiviteter. Blandt andet opgavepræsentation, hvor de studerende præsenterer deres løsninger af opgaver. Ved et møde i efteråret 2014 (herefter det indledende møde) fremlagde en erfaren instruktor nogle oplevelser med opgaveprogrammet og dets funktion ved øvelsestimerne i An0. Det var instruktorens erfaring, at de studerende ikke var i stand til at løse opgaverne og efter få uger af kurset ikke engang forsøgte. Det betød, at de fem ugentlige øvelsestimer primært bestod af instruktorgennemgang af opgaver. Samtidig var det instruktorens oplevelse, at de studerende ikke fandt opgaveprogrammet relevant i forhold til eksamen.

Ved det indledende møde blev det besluttet at revidere opgaveprogrammet til brug på An0. En række randbetingelser for kurset bestemte, hvilke kursuselementer det var muligt at ændre. Eksamensformatet, eksamensspørgsmål og pensum kunne ikke ændres signifikant. Det skyldtes institutionelle forhold, som ikke uddybes yderligere i specialet. Revisionen af opgaveprogrammet bestod i praksis af produktionen af et nyt opgavedesign. Ambitionerne med kurset er *at styrke deltagernes evne til at argumentere matematisk* og *fremhæve det faglige samspil mellem de matematiske emner man støder på i MatIntro og dem man støder på i LinAlg* (se bilag A). Ambitionerne afspejles i det nye opgavedesign. Designet opfylder visse behov, der stiller sig i institutionen. Nogle behov er lokale i kurset, og andre behov er mere overordnede i institutionen. De lokale behov omfatter, at de studerende skal kunne arbejde selvstændigt med opgaverne i det nye design. Ydermere var An0 i år en del af projektet *Forskningsbaseret Uddannelse* (Pædagogisk Center for Samfundsvidenskab, 2015, projektbeskrivelse). Projektet er et såkaldt 2016-projekt, som er et uddannelsesinitiativ, hvor formålet er at *udvikle forskningslignende undervisningsaktiviteter på udvalgte uddannelser på SCIENCE.* Et mål for projektet er, at de studerende skal tage aktivt medejerskab i videnstilegnelse, og det skal ske gennem udvikling af undervisningsaktiviteter som eksempelvis det nye opgavedesign til brug på An0. Specialet benytter *forskning* som betegnelsen for *matematikerens arbejde, der sigter mod konstruktion af matematisk viden, som er ny i den forstand, at den ikke tidligere er udgivet, og som har interesse for det internationale forskningssamfund* (Winsløw, 2012, s. 869, egen oversættelse). Forskningslignende undervisningsaktiviteter er ikke et udtryk for, at de studerende

skal konstruere ny matematisk viden. Det er derfor, det er forskningslignende og ikke forskning. Opgaver fra det nye opgavedesign emulerer dele af forskningspraksissen ved at igangsætte aktiviteter, som kan kategoriseres som forskningslignende, og som de studerende kan tænkes at udføre. Det er praksis som at simplificere, generalisere, kombinere eller reformulere den hidtidige forskning. Guy Brousseau formulerer det på følgende måde: *80 percent of mathematics research consists in reorganizing, reformulating, and "problematizing" mathematics that has already been "done", by the researcher himself or by others* (Winsløw, 2012, s. 860). Forskeren bruger regneeksempler til at skabe intuition, arbejder med visualiseringer, opstiller hypoteser og beviser dem eller udforsker uløste problemstillinger i samarbejde med andre matematikere. Sådanne aktiviteter indgår alle i forskningspraksissen, og det er alle aktiviteter, som førsteårs studerende kan tænkes at udføre. Specialet undersøger, hvad forskningslignende aktiviteter kan være i forbindelse med et kursus som An0 og gør rede for, at aktiviteterne har epistemisk værdi.
Universitetet er både en forsknings- og en undervisningsintitution. Det betyder ikke, at der er en naturlig forbindelse mellem praksisserne. Et udvalg af studerende, som deltog i An0 i år, blev spurgt til deres forestilling om forskerens arbejde (se bilag B). Mange studerende sidestillede forskning i matematik med det at få geniale idéer. De studerendes besvarelser af spørgeskemaet giver få og ukonkrete forslag til praksis, som kan emuleres i undervisningssammenhæng. Udfoldningen af idéen om forskningslignende aktiviteter kan ikke alene baseres på forestillinger om forskning. Beskrivelsen af *forskningslignende situationer* må knyttes til litteraturen om forskningspraksis i matematik. Den teoretiske ramme for specialet er teorien om didaktiske situationer (herefter TDS). Udvalgte begreber fra teorien præsenteres i næste kapitel og begreberne tilpasses specialets kontekst.
Teorien tager udgangspunkt i situationer. Specialet tager som nævnt udgangspunkt i et nyt opgavedesign. I specialet beskrives forskningslignende situationer, *forskningslignende opgaver* og *forskningslignende aktiviteter*. Opgaver er en central komponent i en didaktisk situation, som det fremgår af afsnit 2.4, og opgaver giver et incitament til handling. Der er derfor en tæt forbindelse mellem situationer, opgaver og aktiviteter. De tre begreber præciseres i forbindelse med redegørelsen for brugen af TDS, som specialets teoretiske ramme. Ligesom forskningslignende situationer ikke kan defineres på basis af intuition om forskningspraksis, må der være en teoretisk kontrol af, hvilke aktiviteter forskningslignende opgaver igangsætter og hvilken læring det bibringer løseren. I specialet undersøges hvorledes fire potentialer for opgaver kan fungere som retningslinje og teoretisk kontrol for et nyt opgavedesign, som det specialet behandler.

Kapitel 2

TDS og teoretisk forskningsspørgsmål

TDS er blandt andet et værktøj til analyse og design af undervisning. TDS er udviklet gennem flere årtier af den franske matematikdidaktikker, Guy Brousseau (Brousseau, 1997), som er omtalt i kapitel 1. Specialet fokuserer på begreber fra TDS, som er relevante for specialets design og analyser.
TDS giver mulighed for at analysere *situationer*, og teorien behandler både abstrakte og realiserede situationer. En abstrakt situation er en måde at modellere viden på, og en realiseret situation er en hændelse. Brousseau (1997) omtaler situationerne som spil med elever, *miljø* og lærer som deltagere. Det didaktiske miljø er et af de begreber, som præsenteres i dette kapitel (se afsnit 2.1). Situationen er et system af forbindelser mellem elever, lærer og et miljø.
Brousseau (1997) baserer TDS på en række antagelser om læring og undervisning. Antagelserne kan med fordel formuleres i en spilmetafor, hvor to spil simultant er til stede: Elevens spil med miljøet og lærerens spil med elev-miljø-spillet. Læreren er deltager i spillet, og det antages, at det er lærerens intension at engagere eleverne i spillet med miljøet. Elevens spil med miljøet sigter mod en konkret *tilsigtet viden*. Denne viden udgør den bedste måde at få begreb om spillets regler og udvikle en vinderstrategi. Eleven er også deltager i spillet, og det antages, at eleven engagerer sig i spillet og accepterer det som sit eget. De to spil udgør, hvad der i TDS betegnes som *det didaktiske dobbeltspil* (se figur 2.1 s. 14). Beskrivelsen af antagelserne bag den didaktiske situation implicerer teoriens epistemologiske hypotese: At viden kan og skal konstrueres i situationer.

2.1 Det didaktiske miljø

Betingelser for, hvordan elever lærer og bruger matematisk viden, afhænger blandt andet af det matematiske emne samt materielle og didaktiske omgivelser for situationen (Warfield, 2014, s. 66). Omgivelserne for elevens læring udgør et didaktisk miljø, som i undervisningssammenhæng, ofte er etableret af læreren. Miljøet består af immaterielle ressourcer som eksempelvis elevens viden og interaktion med andre. Det er den subjektive dimension af det didaktiske miljø (Winsløw, 2006b, s. 57). I afsnit 2.3 redegøres for begrebet *didaktisk kontrakt*, som er et begreb fra TDS til at udforske de implicitte spilleregler, som indgår i den subjektive dimension af det didaktiske miljø. Miljøet består også af materielle ressourcer som opgaver, hjælpemidler eller matematiske repræsentanter. Det er den objektive dimension af det didaktiske miljø (Winsløw, 2006b, s. 57). Matematiske repræsentanter i miljøet er et begreb, som beskriver tegn og semiotiske værktøjer i matematik (Bloch, 2003). For funktionsbegrebet er matematiske repræsentanter (representatives) grafer, tabeller, formler mv. Repræsentanterne er en del af en ramme (settings). For funktionsbegrebet er der seks rammer: Numerisk, algebraisk, geometrisk, grafisk, formel og analytisk (Bloch, 2003, s. 8). Formelle repræsentanter gør det vanskeligt at arbejde intuitivt med objekter. Dertil er alternative rammer som en grafisk eller geometrisk mere hensigtsmæssig (Bloch, 2003). Repræsentanter fra andre rammer beriger et objektivt miljø ved at give et alternativt til den formelle repræsentant.

Det læreretablerede miljø er fokuseret på elevernes *personliggørelse* af viden; At eleven kan forholde sig personligt til viden. Personliggørelsen står modsat processen, *fællesgørelse*. En nødvendig del af læringsprocessen er, at viden gøres tilgængelig for andre. Personliggørelse og fællesgørelse relaterer sig til forskellige former for faglig viden, *personlig viden* og *fælles viden*. Personlig viden er individets uformelle implicitte forestillinger og fælles viden er den generaliserede eksplicitte viden repræsenteret i eksempelvis lærebøger (Winsløw, 2006a, s. 135). Personliggørelsen af fælles viden og fællesgørelsen af personlig viden samler sig i et epistemologisk udgangspunkt for TDS: De er begge nødvendige trin for at indvinde ny viden. Det epistemologiske udgangspunkt er det samme, hvad enten det er en elev i klasserummet eller en forsker, som tilegner sig viden. Forskeren må også fællesgøre sin personlige viden for, at viden kan blive anerkendt, og for at forskeren selv kan indvinde viden. Forskeren præsenterer viden i artikler mv. Brousseau (1997) påpeger, at det, som præsenteres i sådanne artikler ikke afspejler måden, hvorpå resultaterne er blevet til. Præsentationen skjuler forskerens proces. Fællesgørelsen betyder en formændring af viden til en dekontekstualiseret, depersonaliseret form, som gøres til genstand for kommunikation. Den viden, som forskeren præsenterer, gennemgår en rekontekstualisering og repersonalisering i lærerens arbejde. Traditionel undervisning i matematik isolerer på den måde begreberne i en særlig kontekst. I en undervisningssituation skal eleverne redekontekstualisere den tilsigtede viden (Brousseau, 1997, s. 227). Dette kaldes *den didaktiske transposition*. Specialet præsenterer en model for globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter (se afsnit 3.4.1). Modellen udfolder nogle mulige ligheder mellem forskningspraksis og elevens praksis i en undervisningssituation, som Brousseau introducerer (1997, s. 22)

2.2 Typer af situationer og deres karakteristik

TDS beskriver forskellige typer af didaktiske situationer. TDS skelner mellem situationstyperne på baggrund af blandt andet deltagernes roller i forskellige situationer af dobbeltspillet. Med udgangspunkt i *The Race to 20* beskrives i det følgende forskellige typer didaktiske situationer. Race to 20 er et spil, som går ud på, at to spillere kæmper om at sige 20. Spillet begynder med, at spiller X siger et tal, x_1, hvor x_1 er enten 1 eller 2, og modparten Y besvarer udspillet med et andet tal, y_1, som enten er summen $x_1 + 1$ eller $x_1 + 2$. Spiller X svarer igen med x_2, som enten er summen $y_1 + 1$ eller $y_1 + 2$ og såfremdeles. Den spiller som siger summen 20 har vundet. Den tilsigtede viden er, at division er operationen af gentagende substraktion. Det er tydeligere, hvis man tænker på et udvidet spil som eksempelvis Race to n for et naturligt tal n. x_1 kan antage værdi i $\{1, 2, \ldots m\}$ hvor $m < n$, y_1 værdi i $\{2, 3, \ldots 2m\}$ osv. (Sierpinska, 2000, Lecture 1, s. 6). Vinderstrategien er at sige tallene

$$a(k) = n - (m+1)k \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor n/(m+1) \rfloor$$

hvor $\lfloor r \rfloor$ betegner gulvfunktionen af et reelt tal r, som er det største heltal, der er mindre end eller lig med r.
Det er den bestemte struktur af spillet, der gør, at spillet er en situation og ikke en aktivitet (Warfield, 2014, s. 8). Brousseau (1997) identificerer følgende typer af situationer i forbindelse med spillet:

> **Devolution** Læreren introducerer eleverne for spillet. Læreren beskriver, hvor mange deltagere der er og reglerne for, hvilke svar en spiller må give til en modstanders udspil. Herefter spiller læreren et

spil med en elev. Undervejs overlader læreren sit spil til en anden elev, så to elever spiller spillet færdigt mod hinanden. Læreren devoluerer (overgiver) det didaktiske miljø til eleverne. Devolutionen er lærerens opgave og ansvar. Eleverne må dog sikre sig, at de har forstået problemstillingen og dens betingelser.

Handlingssituation Alle elever inddeles i par og skal i parrene spille mod hinanden. Eleverne spiller i alt fire runder mod hinanden. Hver gang skal eleverne skrive egne og modstanderens udspil ned. Læreren er tilbagetrukket. Hvis eleverne møder forhindringer i miljøet, kan læreren modificere miljøet. Eleverne kan i situationen opnå intuition om vinderstrategier. Eksempelvis, at hvis man er den spiller, der siger 17, så kan man vinde ved næste udspil. Eleverne handler i miljøet, og miljøet giver hele tiden tilbagemeldinger på elevernes handling. Elevernes strategier er implicitte i denne situationstype. Successionen af strategier gør en ny type situation mulig.

Formuleringssituation Eleverne inddeles i to grupper. Hver gruppe vælger en repræsentant for gruppen, som skal deltage i Race to 20 ved tavlen. Repræsentanterne spiller flere runder, og igen skriver eleverne udspillene ned. Denne gang på tavlen, så det er tydeligt for alle elever. Mellem runderne diskuterer hver gruppe indbyrdes deres strategier, men gruppen må ikke kommunikere med repræsentanten under selve spillet. Ved at kommunikere med andre i gruppen og formulere strategier, depersonaliserer eleverne den intuitive personlige viden. Eleverne gør den personlige viden eksplicit uden nødvendigvis at retfærdiggøre den. Successionen i handlingssituationen, både i spillet to og to og spillet ved tavlen, giver eleverne en mængde information, men eleverne kan først i en formuleringssituation kommunikere deres viden til andre. Eleverne udvikler deres viden og fremfører egne overbevisninger for de andre i gruppen. Læreren beder eleverne om at formulere deres strategier. Miljøet giver tilbagemeldinger i forhold til validiteten af elevernes formuleringer.

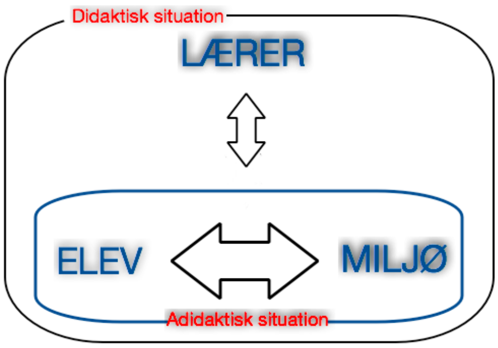
Valideringssituation En gruppes formuleringer af strategier valideres af modstanderholdet. I situationen er der et pointsystem, hvor der gives forskellige point, alt efter om en formulering er sand eller falsk. Læreren har i denne situation en vis kontrol. Sociale aspekter, som elevernes interne forhold til hinanden, må ikke overskygge den matematiske argumentation. Læreren kan, udover den systematiske organisering, også evaluere udsagn fremsat i diskussionen eller devoluere et modificeret miljø for at få eleverne til at deltage i evalueringen. Eksempelvis kan læreren få eleverne til at spille Race to 17.

Insitutionalisering Læreren præciserer produktet af valideringssituationen og præsenterer eleverne for den fælles viden, division som aritmetisk operation. Institutionaliseringen gør det muligt for eleverne at referere til begreber fra situationen i andre sammenhænge. Institutionaliseringen ændrer det didaktiske miljø.

Strukturen i Race to 20 er det, der gør spillet til en situation, men rækkefølgen af situationstyperne er ikke fasttømret for situationer i TDS.
Miljøets tilbagemeldinger, som indgår i situationerne, kaldes *feedback*. I spillet er der to systemer, som kommunikerer med hinanden: *Elevens kognitive system* og *spillet mellem elev og miljøet*. Informationen er spillernes udspil. Det kaldes *feed forward*, og som modsvar giver miljøet feedback. Spilsystemet i Race to 20 kan ses som mængden af mulige to søjler, som fremkommer ved at opskrive spillernes udspil (Sierpinska, 2000, Lecture 2, s. 3). Systemerne klassificeres ved, at spillet vindes af den spiller, som har skrevet 20 i en af de to søjler. Miljøets feedback på spillerens feed forward til spillet er, at spilleren taber eller vinder. Det er spillerens formål at vinde, og derfor forsøger spilleren at kontrollere spillet. Eleverne inddrages og bidrager i valideringssituationen ved, at grupperne afprøver hinandens hypoteser. Det er muligt, hvis miljøet giver feedback på elevernes handling og formulering. Et centralt begreb, som spillet giver anledning til at introducere, er *adidaktisk situation*. En situation i TDS kan karakteriseres som didaktisk eller adidaktisk. I en adidaktisk situation er det kun eleven og miljøet, som spiller mod hinanden. Læreren intervenerer ikke i elevens interaktionen med miljøet. I TDS er en *fundamental situation* en adidaktisk situation, som fører til personlig viden, der kan fællesgøres som den tilsigtede viden (Winsløw, 2006a, s. 144). Karakteriseringen af en didaktisk situation har i praksis betydning for miljøets struktur. Det ovennævnte didaktiske dobbeltspil består af vekslen mellem didaktiske og adidaktiske situationer. Det er illustreret i figur 2.1.

I en adidaktisk situation er lærerinterventionen ikke til stede, og også lærerintensionen er skjult for eleverne. Den adidaktiske situation er, som nævnt, betinget af, at eleven er i stand til at handle i miljøet (Måsøval, 2011, s. 48). Læreren må samtidig give plads til at lade eleverne spille på egen hånd med miljøet.

Tabellen (se s. 14) illustrerer elev- og lærerrollen, miljøets struktur samt karakteristikken af den didaktiske situation for hver af de fem typer situa-



Figur 2.1: Det didaktiske dobbeltspil

tioner i klasseundervisning som Race to 20. Tabellen er en tillempning af Winsløw (2006a, s. 140).

Type	Lærerens rolle	Elevernes rolle	Miljø	Situation
Devolution	Igangsætte, afklare	Modtage og forstå opgave	Etableres	Didaktisk
Handling	Reflektere, observere	Handle, reflektere	Udforskningsfelt, problemfelt	Adidaktisk
Formulering	Organisere, spørge	Formulere, præcisere	Åben diskussion	Adidaktisk eller didaktisk
Validering	Lytte, evaluere	Reflektere, argumentere	Bedømmelse, styret diskussion	Normalt didaktisk
Institutionalisering	Præsentere, forklare	Lytte, reflektere	Institutionel viden	Didaktisk

Det didaktiske dobbeltspil har et uformelt kodeks, som specificerer deltagernes gensidige forpligtelser i spillet. Kodekset er ikke eksplicit, som spillereglerne for et brætspil er det, men kodekset forklarer, hvordan spillet vindes. Både lærer og elever vinder, hvis eleverne lærer.

2.3 Den didaktiske kontrakt

Brousseaus (1997) begreb, *didaktisk kontrakt* er betegnelsen for det uformelle kodeks for elever og lærer i didaktiske situationer. Kontrakten er et implicit komplekst sæt af forventninger spillerne imellem, som er specifikt for den tilsigtede viden. Det er vanskeligt at give en fyldestgørende beskrivelse af de gensidige forventninger, som oftere studeres i situationer hvor kontrakten brydes. Et eksempel er Brousseaus (1997) studie af eleven Gaël. Det interessante er, at Gaël udviser, hvad man kalder, kontraktadfærd. Gaël forholder sig passivt til læring. I stedet lader han det hovedsagligt være op til læreren at give svar på spørgsmålene, som læreren selv har stillet, så Gaël ikke oplever nederlag (Warfield, 2014, s. 15-17). De svar, som Gaël selv kommer med, baserer sig ofte på gæt. Det er elevens måde at opfylde kontrakten på. En del af antagelserne bag den didaktiske situation er, at både elev og lærer accepterer ansvar i situationen. Eleven må acceptere ansvaret for løsning af en række problemer, hvor der ikke på forhånd er redegjort for intentionen bag problemstillingen. Eleven er klar over, at læreren, som har stillet problemet, selv kender til løsningen. Det er en del af kontrakten, at læreren ikke løser problemet for eleven. Eleven må acceptere det didaktiske forhold, betragte forholdet som midlertidigt og i sit arbejde med problemerne forsøge at afvise forholdet. Der er et paradoksalt påbud i, at eleven opfylder kontrakten: Eleven accepterer, at kontrakten eksisterer, og samtidig at kontrakten ikke er eksplicit. Der er et lignende paradoksalt påbud for læreren: Læreren kan ikke sigte på målet, da han så fratager eleverne muligheden for selv at lære den tilsigtede viden.
Disse påbud er ikke det eneste paradoksale ved den didaktiske kontrakt: Hvis kontrakten skal opfyldes, skal den forsvinde (Winsløw, 2006a, s. 146). Eleverne kan ikke tage del i ansvaret, hvis de er fokuserede på at opfylde kontrakten. Elevernes tilegnelse af kontrakten kan i nogle tilfælde være så dominerende, at refleksionen over problemet helt udebliver, eller at problemer som ikke umiddelbart er løselige for eleven opleves som brud på kontrakten.
Den didaktiske kontrakt kan have nogle uhensigstmæssige effektter. Specialet fokuserer på to:

> **Topaze-effekten** opstår, hvis læreren forsøger at undgå, at eleven lider nederlag i spillet ved gradvist at reducere opgavens krav. Læreren overtager til sidst ansvaret for løsningen. Læreren kan reducere kravene ved eksempelvis at stille ledende spørgsmål. Det kan have den konsekvens, at svaret på det oprindelige problem er oplagt for eleverne.

> **Jourdain-effekten** opstår, hvis lærerens iver (bevidst eller ubevidst) for at konstatere faglig indsigt hos eleverne overskygger, at eleverne blot følger lærerens anvisninger.

De uheldige effekter kan have forskellige indpakninger. Den didaktiske kontrakt er, også med disse effekter taget i betragtning, en *uomgængelig forudsætning* for undervisningen (Winsløw, 2006a, s. 150). Som analyseværktøj er den didaktiske kontrakt særdeles nyttigt. Strukturen af den didaktiske kontrakt er beskrevet af Hersant & Perrin-Glorian (2005). Specialet anvender samme strukturering.

En didaktisk kontrakt har fire afhængige dimensioner. I nedenstående angives, hvad dimensionerne hver især forholder sig til, og hvilken betydning dimensionerne har.

1. **Det matematiske domæne:** Det matematiske domæne synes i sammenligning med de øvrige dimensioner relativ global. Det kan være en algebraisk, formel eller grafisk kontrakt. Dimensionen har også betydning på lokalt plan eksempelvis ved ændring af den matematiske kontekst. Læreren kan ændre det matematiske domæne. Domænet betyder, at bestemte teknikker vil være naturlige, og andre vil være uhensigtsmæssige at bruge til at løse et problem fra domænet.

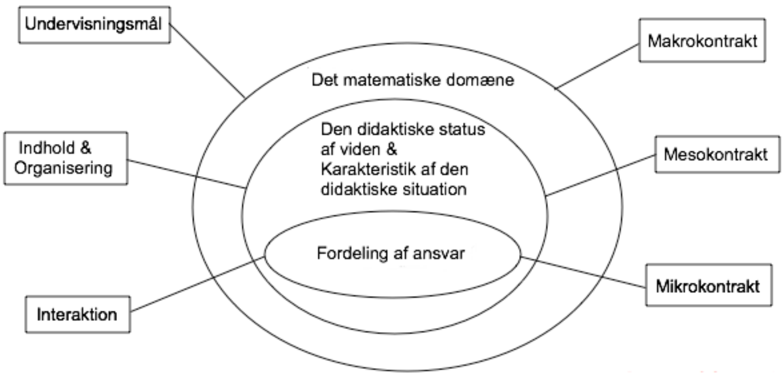
2. **Den didaktiske status af viden:** Viden kan have didaktisk status som gammel viden, viden under udvikling og ny viden.

3. **Fordeling af ansvar:** Fordelingen af ansvar har forbindelse til 2. dimension. Læreren afgiver generelt mere ansvar, når status af viden er gammel viden. Dimensionen er specificeret, fordi læreren kan uddelegere ansvar til eleverne samtidig med, at læreren bibeholder ansvaret for validering.

4. **Karakteristik af den didaktiske situation:** Læreren giver ansvaret i spørgsmål om ny viden i situationer, hvor miljøet kan give feedback til elevernes handling og formulering. Karakteristikken af den didaktiske situation har betydning for de tre øvrige dimensioner. Derfor er den en dimension i sig selv.

Strukturen af den didaktiske kontrakt har tre niveauer: Makro-, meso- og mikro-niveau. Hvert niveau svarer til forskellige tidsperspektiver og didaktiske målsætninger (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 119). I specialet er

mikrokontrakten i fokus. Specialets analyse af fire situationer behandler interaktioner på mikro-niveau mellem studerende og instuktor.
Mikrokontrakten beskriver ansvarsfordelingen i en *episode*, som omhandler et konkret spørgsmål. Både lærer og elever deltager i diskussioner på mikroniveau. I interaktionen styrer læreren diskussionen og alt afhængig af, om spørgsmålet omhandler gammel, ny eller viden under udvikling hos eleverne, afgiver læreren ansvar i en mikrokontrakt. Læreren har forhåndsviden om elevernes arbejde (både forudindtaget og observeret). Den viden har betydning for lærerens afgivelse af ansvar i en episode. Læreren uddelegerer ansvar på to måder: Hvis viden er tilgængelig for de fleste elever, er der tale om en mikrokontrakt af *kollektiv produktion*, hvor der kan indgå *individuel produktion*. Hvis ikke viden er tilgængelig for de fleste, er der tale om en mikrokontrakt af *tilslutning*, hvor få elever taler for andre. Det er ikke en forhandling mellem lærer og elev. Eleverne, som tager part i kontrakten, tilslutter sig en formulering som læreren giver. Inddelingen i episoder, som beskrevet oven for, sker inde for en *fase*. Fasen relaterer sig til matematisk indhold og klasserummets organisering og er i sig selv dele af en *sekvens*. Dimensionerne, niveauerne samt inddelingen i episoder, faser og sekvenser beskriver strukturen af den didaktiske kontrakt. Denne er illustreret i figur 2.2.



Figur 2.2: Strukturen af den didaktiske kontrakt – figur tillempet fra Hersant & Perrin-Glorian (2005)

Miljøet påvirker den didaktiske kontrakt, og det samme gør tiden. Den *didaktiske tid* er en faktor, der påvirker den didaktiske kontrakt på flere niveauer. Triplen *mesogenesis*, *topogenesis* og *chronogenesis* er et værktøj til analyse af miljøet, den didaktiske kontrakt og tiden i en situation (Sensevy et al., 2005, s. 7). Den didaktiske tid går på tværs af den didaktiske kontrakt forstået på den måde, at tiden påvirker lærerens valg på alle niveauer. Eksempelvis påvirker tiden lærerens valg i forhold til at afgive ansvar til eleverne i en episode. Læreren beslutter også, hvor meget tid der skal bruges på hver episode og fase. Der er en implicit forventning om, at læreren har overblik over faserne og sørger for fremdrift i situationen. Tiden er ikke en dimension af den didaktiske kontrakt, men den didaktiske tid påvirker kontrakten, fordi den påvirker læreren.

2.4 Opgavedesign og opgaver opfattet som situationer

Brousseau (1997) tager udgangspunkt i situationer (abstrakte og realiserede), mens specialet tager udgangspunkt i det didaktiske arbejde, der ligger i at designe et sæt af opgaver. Dette afsnit gør rede for brugen af TDS i forbindelse med produktionen og evalueringen af et nyt opgavedesign, som studerende, der deltager ved An0, arbejder med.
Opgaver er en del af miljøet og derfor en central komponent i en didaktisk situation. Til situationen hører også, som det fremgår af ovenstående, didaktiske komponenter. Nedenstående definerer opgaver og særligt, hvordan opgaver i specialets kontekst kan opfattes som didaktiske situationer.

Specialet benytter *opgave* som betegnelse for *det arbejde, som læreren beder eleverne lave* (Joubert, 2013, s. 71, egen oversættelse). Opgaver kan på den måde opfattes som abstrakte situationer. En opgave fra det nye opgavedesign, som specialet behandler, opfattes som en central komponent i en abstrakt situation. I forbindelse med designet af opgaver er der gjort begrundede antagelser om de didaktiske komponenter i den abstrakte situation. Det fremgår af afsnit 4, hvori der redegøres for designmetodologien for opgavedesignet.
Målet med en opgave er, at de studerende giver svar til opgaven. Derfor er det nødvendigt, at der bag opgavedesignet er en bevidst, systematisk og målrettet redegørelse for den viden, som opgaven kan bibringe løseren. Bemærk, at det i praksis er sjældent, at et opgavedesign baseres på en sådan redegørelse. Et opgavedesign inkluderer således et rationale for, hvorfor den tilsigtede viden kan tilegnes af studerende, der løser opgaven (Joubert, 2013). Et rationale for, hvorfor den tilsigtede viden kan tilegnes af opgaveløseren, opstår blandt andet ved at identificere og indføre forhindringer i designet, som de studerende skal overvinde for at tilegne sig den tilsigtede viden. Sådanne forhindringer kaldes **epistemologiske forhindringer**. Disse relaterer sig til det matematiske objekt og er uafhængige af eleven og

læreren. Epistemologiske forhindringer kan eksempelvis være forhindringer, der er indbygget i sproget. Eksempelvis, at division bliver i daglige tale synonymt med det at dele og derved også at gøre noget mindre. De epistemologiske forhindringer indføres i designet, da de er *nøglen til at designe 'gode' opgaver* (Joubert, 2013, s. 74). En anden type forhindring er **didaktiske forhindringer**. Det er misforståelser, som er opstået i forbindelse med undervisning. Disse skal, modsat de epistemologiske forhindringer, ikke arrangeres i opgaver. Det er dog stadig væsentligt at forholde sig til dem i et opgavedesign.
En redegørelse for, at opgaven kan bibringe løseren den tilsigtede viden, fremhæver både de epistemologisk og didaktiske forhindringer. Det forbedrer et opgavedesign, da der på denne måde kan tages højde for uhensigtsmæssige forhindringer.
Joubert fremsætter to implikationer for opgavedesign: Opgaver i et opgavedesign skal igangsætte handlings, formulerings- og valideringssituationer, og specielt er valideringen vigtigt. Ydermere skal elever eller studerende, der arbejder med opgaver fra et opgavedesign, bevæge sig mellem pragmatiske/empiriske og systematiske rammer for at nå den viden, som opgaven tilsigter (Joubert, 2013, s. 77).

Opgavedesign, som inkluderer et rationale som nævnt ovenfor, gør op med forestillingen om, at elever og studerende lærer matematik blot ved at løse opgaver. Opgavedesign er et didaktisk designproblem, og specialets opgavedesign er en case i problemet, som fokuserer på de studerendes bevægelse mellem en heuristisk og en formel ramme. Sidstnævnte er i fokus ved An0, hvor sætninger og beviser præsenteres i en formel ramme i Eilers et al. (2015).
Det nye opgavedesign baseres på et rationale for, hvorfor den tilsigtede viden kan tilegnes af de studerende, som arbejder med og løser opgaver fra designet. I designprocessen blev der taget højde for det didaktiske designproblem, som er nævnt ovenfor, ved at processen foregik i rotation mellem processens involverede parter (se afsnit 4). I processen er trin 2 med til at sikre, at opgaverne sigter på teoretisk viden, og at opgaverne er til at løse for de studerende. På dette trin af processen identificeres den viden, som bibringes løseren. Denne forestilling om løsningen til en opgave er basis for at beskrive de aktiviteter, som opgaven igangsætter hos løseren. I specialet defineres aktiviteter i relation til opgaver: Aktiviteter er handling, som opgaven giver incitament til at igangsætte.

Specialets kontekst stiller krav til opgaveformuleringerne i designet, da konteksten er anderledes i forhold til skolens klasserum, som er den institutionelle kontekst for TDS. Forskellen er blandt andet opgavernes rolle og iscenesættelse i konteksten. Brugen af TDS i forhold til opgaver i en anden institutionel kontekst fordrer en tilpasning af nogle begreber fra teorien. Opgaver er i universitetskonteksten iscenesat på en anden måde end situationer i skolens klasserum. På universitetet spiller begrebet didaktisk tid en anderledes rolle. De studerende skal tilegne sig viden på kortere tid. Det gør det sværere at realisere muligheden for fundamentale situationer. Det faglige indhold og opgaver er ofte tekniske, og der er krav om skriftlighed. Derfor er en almindelig praksis i universitetskonteksten, at de studerende får stillet opgaver, som de skal løse i deres hjemmeforberedelse. I de studerendes hjemmeforberedelse af opgaver fra det nye opgavedesign, består miljøet primært af opgaveformuleringer fra opgavedesignet og Eilers et al. (2015). Instruktorens skriftlige formuleringer på tavlen er en del af miljøet ved øvelsestimen. Den didaktiske kontrakt og dens struktur giver, også i universitetskonteksten, et værktøj til analyse af situationer med udgangspunkt i en konkret opgave (González-Martín et al., 2014, s. 122).

Betingelserne, som kurset sætter for øvelsestimen, har betydning for hvilke typer af didaktiske situationer det kan forventes, der vil finde sted i forbindelse med de studerendes arbejde med en opgave. Specialet fokuserer på følgende typer af situationer i henhold til en konkret opgave:

Devolution Opgaveformuleringen overgiver miljøet til de studerende. Devolutionen er opgaveformuleringen samt eventuelle instruktioner om, hvordan de studerende kan angribe opgaven. Både forelæseren og instruktorer kan give instruktioner.

Adidaktisk handlings- og formuleringsituation De studerende arbejder med løsning af en opgave hjemme eller ved øvelsestimen, uden at instruktoren instruerer eller guider de studerende til en løsning.

Adidaktisk valideringssituation De studerende godtgør deres løsning af en opgave uden at få instruktioner fra instruktoren eller opgaveformuleringen.

Didaktisk formulerings- og valideringssituation De studerende præsenterer deres løsning og godtgørelsen af den i interaktion med instruktoren.

Institutionalisering Instruktoren præsenterer selv en løsning eller reformulerer en studerendes løsning af en opgave. Situationen kan finde sted ved øvelsestimen (mundtligt med skriftlig besvarelse på tavlen) eller som et hand-out af løsningen (skriftlig standardbesvarelse). Efter institutionaliseringen bliver viden tilgængelig som ressource til brug i fremtidige situationer.

Det forventes ikke, at alle situationstyperne finder sted i alle situationer. Organiseringen af didaktiske formulerings- og valideringssituationer baseres på antagelsen om, at ikke alle studerende vil være i stand til selvstændigt at løse alle opgaver. Om didaktiske eller adidaktiske handlings- og formuleringssituationer finder sted, vedrører opgavedesignet. Specialet behandler fire potentialer for opgaver i det nye opgavedesign, hvoraf muligheden for adidaktiske situationer er et udtryk for et potentiale i selve opgaven.

Specialet besvarer nedenstående teoretiske forskningsspørgsmål med det formål at give en teoretisk baggrund for løse at det didaktiske designproblem, som opstod af beslutningen om at revidere opgaveprogrammet for An0.

2.5 Teoretisk forskningsspørgsmål og designproblem

Beskrivelsen af matematisk forskningspraksis fra et udvalg af kilder (se afsnit 3.4) danner basis for at udfolde idéen om forskningslignende situationer i forbindelse med kurset An0. Specialet undersøger et teoretisk forskningsspørgsmål:

$\mathbf{RQ_T}$ Hvad kan forskningslignende situationer være?

Situationerne er abstrakte situationer. I specialet er det opgaver fra et nyt opgavedesign, som opfattes som abstrakte didaktiske situationer jvf. afsnit 2.4. Specialet indkredser væsentlige matematikholdige aktiviteter, som studerende på An0 kan tænkes at udføre, og som indgår i akademisk forskningspraksis. Specialet undersøger det teoretiske forskningsspørgsmål på basis af udvalgt litteratur samt egne hypoteser om forskningslignende situationer. Hypoteserne opstod i forbindelse med udfoldningen af idéen om forskningslignende situationer. Udfoldningen af idéen om forskningslignende situationer har til formål at give en metodologisk tilgang til at løse et didaktisk designproblem. Specialet undersøger følgende designproblem:

DP Hvordan kan forskningslignende opgaver udformes i et opgavdesign til brug på et førsteårskursus i matematisk analyse, som fokuserer på teoretisk basis for analyse i en og flere variable?

Forskningslignende opgaver forstås, som det vil blive defineret, når $\mathbf{RQ_T}$ besvares. Designproblemet løses ud fra randbetingelserne om An0 og ud fra de metoder, som blev forestillet og udført i forbindelse designprocessen. I kapitel 4 redegøres for designmetodologien. For at imødekomme lokale behov til opgavedesignet er det udformet således, at også potentialer inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng og fordybelse har teoretisk værdi. Disse tre potentialer beskrives i kapitel 3.

Kapitel 3

Fire potentialer og to empiriske forskningsspørgsmål

Opgaver i det nye opgavedesign skal opfylde visse behov: Det er hensigten, at de studerende kan løse opgaverne, at opgaverne har forbindelse til viden, som de studerende har fra andre kurser, og at opgaverne er relevante i eksamenssammenhæng. Sidst men ikke mindst er det målet, at opgaverne lader de studerende arbejde forskningslignende. Designet som helhed forsøger at tilgodese disse behov. Opgaverne igangsætter forskellige aktiviteter hos de studerende, som arbejder med dem. Specialet fokuserer på fire potentialer for opgaver, opfattet som didaktiske situationer (se afsnit 2.4). De fire potentialer er valgt på baggrund af formålene med det nye opgavedesign. De er:

Adidaktisk potentiale

Stoflig sammenhængspotentiale

Fordybelsespotentiale

Forskningspotentiale

De fire potentialer beskrives i dette kapitel. Specialet fokuserer på forskningslignende aktiviteter, og derfor lægges særligt vægt på udfoldningen af partielle egenskaber ved forskningslignende situationer og forskningslignende aktiviteter.

Hvert af de fire potentialer har to værdier – teoretisk og observeret værdi. Et potentiales teoretiske værdi afhænger af den tilsigtede viden for opgaven og aktiviteten, som opgaven har mulighed for at igangsætte hos de studerende. Et potentiales observerede værdi afhænger af de forhindringer, som

de studerende møder i arbejdet med opgaven og i specialets kontekst også af instruktorens afgivelse af ansvar i situationens episoder. I specialets a priori og a posteriori analyse beskrives og diskuteres potentialernes værdier for en given opgave (se kapitel 5).
Potentialerne inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng og fordybelse er på sin vis forudsætninger for, at forskningspotentialet kan have teoretisk såvel som observeret værdi. Det fremgår af specialets model for forskningslignende situationer (se afsnit 3.4.1). Specialets beskrivelse af adidaktisk, stoflig sammenhængs- og fordybelsespotentiale er kursorisk. Alle tre er væsentlige for senere at kunne vurdere, om det nye opgavedesign opfylder både lokale og institutionelle behov.

3.1 Adidaktisk potentiale

I dette speciale defineres adidaktisk potentiale som en opgaves mulighed for at *lade de studerende arbejde selvstændigt med og løse en opgave*. Adidaktisitet er et centralt og vanskeligt begreb i TDS. Specialets beskrivelse af adidaktisk potentiale for situationer baseres på analysen hos Hersant & Perrin-Glorian (2005) af dialogkurser i to casestudier på grundskoleniveau.

De adidaktiske situationer i klasserummet omhandler et spil mellem elever og miljøet (se afsnit 2.2). Lærerens interventionen er ikke nødvendig, da miljøet giver den feedback til elevernes handling, som er nødvendig for, at eleverne kan tilegne sig den tilsigtede viden. En egenskab ved det objektive miljø er mulighederne for, at eleverne spiller med mijøet uden intervention fra læreren. Egenskaben ved det didaktiske miljø kaldes det *adidaktiske potentiale* (Winsløw, 2006a, s. 140). En didaktisk situation har adidaktisk potentiale, hvis der i situationen er et miljø, som giver feedback til elevernes handling i og med miljøet, men at feedbacken ikke nødvendigvis er tilstrækkelig til, at eleverne selvstændigt kan tilegne sig ny viden (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 117). Det kan være nødvendigt, at læreren modificerer miljøet. Det er et potentiale, da læreren, bevidst eller ubevidst, kan ignorere muligheden for en adidaktisk situation ved eksempelvis ikke at give eleverne den behørige tid til at reagere på miljøets feedback.
I TDS udgør problemerne scenen for interaktionen mellem de studerende og miljøet, og i devolutionen overgives problemerne til de studerende. I specialets kontekst er det opgaver fra et nyt opgavedesign, som opfattes som didaktiske situationer med udgangspunkt i et problem, og devolutionen er, som nævnt, begrænset til opgaveformuleringen (se afsnit 2.4). De studerendes hjemmeforberedelse af opgaveløsning betinges af, om de studerende kan trække på elementer fra miljøet såsom gammel viden, interaktionen

med medstuderende og tilgængelige ressourcer som Eilers et al. (2015). Det betyder, at opgaveformuleringen er afgørende for, om det er muligt for de studerende at arbejde selvstændigt med en opgave. Specialet behandler det adidaktiske potentiale for opgaver i det nye opgavedesign. Det er væsentligt, at det adidaktiske potentiale ikke kun afhænger af de studerendes mulighed for at komme i gang med en opgave, men også af de studerendes mulighed for at løse opgaven.

3.2 Stoflig sammenhængspotentiale

I dette speciale defineres stoflig sammenhængspotentiale som en opgaves mulighed for at *skabe stoflig sammenhæng mellem gammel og ny viden* hos de studerende, som arbejder med opgaven. Deltagere ved An0 oplever en overgang (se afsnit 1). Overgangen fra kurser med fokus på teknikker til et kursus med fokus på teori betyder, at opgavedesignet skal tage højde for, at gammel viden for de studerende er af en helt anden karakter end den viden, opgaven sigter mod. En opgave fra det nye design har potentiale inden for stoflig sammenhæng, hvis de studerende kan trække på viden fra tidligere kurser som MatIntro og LinAlg, når de arbejder med opgaven. Et af formålene med det nye opgavedesign er at skabe en forbindelse mellem viden fra MatIntro og LinAlg til ny viden fra An0. Potentialet inden for stoflig sammenhæng har forbindelse til en opgaves adidaktiske potentiale, da en opgave med stoflig sammenhængspotentiale giver de studerende mulighed for at gøre brug af gammel viden i stedet for viden under udvikling (Hersant & Perrin-Glorian, 2005, s. 119). Samtidig skal de studerende kunne handle i miljøet, hvis de skal have mulighed for at tilpasse gammel viden til det.

3.3 Fordybelsespotentiale

I dette speciale defineres fordybelsespotentiale som en opgaves mulighed for at *udvikle en dybere viden om teoretiske begreber, metoder og resultater* hos de studerende, som arbejder med opgaven. En opgave med fordybelsespotentiale tillader de studerende at udvikle deres viden om teoretiske egenskaber eller forhold og finde forbindelse til andre metoder eller resultater. Opgaverne med potentiale inden for fordybelse skaber forbindelser i det teoretiske felt, som opgavens problem omhandler; Det er forbindelser mellem de studerendes viden under udvikling og problemet.
Det er vanskeligt at give fordybelsespotentiale en indgående teoretisk beskrivelse, da det er begrænset, hvad der på nuværende tidspunkt er af litteratur

om opgavers mulighed for at give dybere viden om teoretiske begreber. Et af formålene med det nye opgavedesign er, at opgaver er relevante i eksamenssammenhæng. Hvis opgaverne skal være brugbare i forhold til den mundtlige eksamen, skal opgaverne give de studerende mulighed for at arbejde dybere med teoretiske forhold, metoder og egenskaber, da det som udgangspunkt er eksamens hovedsigte. I specialets begrænsede tidsramme er det ikke muligt at udfolde idéen om fordybelsespotentialet. Specialet opfordrer i stedet til forskning inden for dette område.

3.4 Forskningspotentiale

I dette speciale defineres forskningspotentiale som en opgaves mulighed for at *igangsætte forskningslignende aktiviteter* hos de studerende, som arbejder med opgaven. Dette afsnit præsenterer en model for globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter. Situationerne er abstrakte situationer med opgaver fra det nye design, som centrale komponenter. Opgaverne er problemer, formuleret som tekst, som de studerende kan tænkes at løse. Opgaverne giver incitament til at gøre noget med problemerne og igangsætter forskellige aktiviteter. I beskrivelsen af, hvad forskningslignende situationer kan være, tages således udgangspunkt i opgaver, opfattet som didaktiske situationer jvf. afsnit 2.4. De omtales også som situationer i det følgende.

Begrundelsen for, at opgaver i det nye opgavedesign skal have forskningspotentiale er et overordnet behov i institutionen. 2016-projektet (se kapitel 1) tager *afsæt i den centrale udfordring, det er for mange matematikstuderende at sætte sig ind i matematiske emner, som de ikke har nogen forhåndsindsigt i* (Pædagogisk Center for Samfundsvidenskab, 2015, projektbeskrivelse). Forskningslignende aktiviteter har ikke kun institutionelle værdier, men også epistemiske værdier. Specialet beretter som nævnt om et overgangsproblem, og for deltagerne på An0 er den viden, som de skal sættes sig ind i, af en anden karakter, end den viden de har fra tidligere kurset. Forskere i matematik forholder sig generelt selvstændigt og kritisk til ny viden. Et sådant forhold til viden er en del af paradigmet *questioning the world*, som Yves Chevallard beskriver (Chevallard, 2012). I dette paradigme er holdningen til viden *prokognitiv*. Det betyder, at viden opsøges, for at opsøgeren kan forholde sig til et spørgsmål, som ønskes besvaret. Det er et fremadrettet (knowing forwards) forhold til viden. Paradigmet *visiting monuments* er modsat. I dette er holdningen til viden retrokognitiv. Det betyder, at viden betragtes som noget, der skal reproduceres ved at prøve at huske og se tilbage på viden, som allerede er kendt. Man besøger monumenter af viden og sætter ikke idéer eller spørgsmål ind i en større sammenhæng. Det er et tilbageskuende (knowing backwards) forhold til viden (Chevallard, 2012, s. 6). Forskningen i matematik undersøger spørgsmål, som forskeren ikke kender svaret på. Det kræver, faktisk er det uundgåeligt, at forskeren undersøger og vurderer relevant viden (Chevallard, 2012). En hjælp til, at de studerende sætter sig ind i emner, som de ikke har kendskab til på forhånd, er at skabe forskningslignende undervisningssituationer. For overgangsproblemer, som det specialet beretter om, er det særlig vigtigt, at forholde sig prokognitivt til viden. De studerende kan ikke kun forholde sig retrokognitivt til den nye teoretiske viden, da den gamle viden er af teknisk karakter. Teoretisk viden må i stedet opsøges og tilpasses den eksisterende tekniske viden. Forskningslignende undervisningssituationer fokuseres på de studerendes autonomi og kreativitet. Igangsættelsen af forskningslignende aktiviteter er et insitutionelt ønske, og begrundelsen er, at et undervisningsdesign, som eksempelvis et opgavedesign med potentiale inden for forskning, har epistemisk værdi.

Dette afsnit præsenterer en model, som udfolder partielle egenskaber ved forskningslignende situationer. Modellen er inddelt i fem globale egenskaber ved forskningslignende situationer og ti kategorier af forskningslignende aktiviteter (se figur 3.1). I betegnelsen er et autensitetskrav; Aktiviteterne skal ligne forskning. På grund af konteksten er det ikke alle globale egenskaber, der inkorporeres i den model for forskningslignende aktiviteter, som opgavedesignet baseres på.

Modellen er en udfoldning af idéen om forskningslignende situationer på et introduktionskursus i matematisk analyse på universitetet. Modellens globale egenskaber og kategorier af aktiviteter kan indgå i andre modeller for forskningslignende situationer på kurser om eksempelvis diskret matematik, men andre modeller kan også indeholde andre globale egenskaber og kategorier af aktiviteter. Modellen er, som den fremstår, gyldig for matematisk analyse, men modellen er ikke en udtømmende liste af kategorier.
Modellens udfoldningen baseres på en række forskellige kilder. Leone Burtons interviewundersøgelse (2004), Mikkel Willum Johansen & Mortens Misfeldts studie af forskningspraksis (2014), Denise Greniers beskrivelse af *routine researcher activities* (2012) samt Cécile Ouvrier-Buffets analyse af matematikerens definitionsproces (2011; 2014). I det følgende beskrives disse kilders forudsætninger, formål og fremgangsmåde.

Burton har produceret en model til at beskrive *the process of coming to know in mathematics* inden for fem interagerende kategorier (Burton, 2004, s. 11). Burton baserer sin model på litteratur fra matematik, matematikdidaktik, sociologi, filosofi mv., og hun verificerer modellen gennem sit studie,

som baseres på 70 interviews med matematikere fra Storbritanien og Irland. Verificeringen af modellen baserer Burton (2004) således på matematikernes egne fremstillinger af deres praksis.
Johansen & Misfeldt (2014) baserer deres interviewstudie på en tilsvarende videnskabssociologisk metodologi. Studiet består af 13 interviews med aktive matematikere ansat på danske universiteter. Johansen & Misfeldt (2014) har fokus på forskeren som person og det samfund, forskeren indgår i. De beskriver forskningspraksissen ud fra en analyse af forskernes egne forklaringer af egen praksis. Undersøgelsen af forskningspraksissen fokuseres på kognitive strategier og semiotiske repræsentationsformer og deres betydning for matematisk virksomhed. Johansen & Misfeldt (2014) kommenterer på, hvordan elever skal arbejde med problemer og repræsentanter i matematik.
Grenier (2012) beskriver det, hun kalder *routine researcher activities*, med det formål at udvikle den såkaldte SiRC-model. En referencemodel til *Research Situation for Classroom*. Grenier behandler situationer med udgangspunkt i diskret matematik.
Cécile Ouvrier-Buffet har udviklet en referencenmodel om definitionsprocessen i matematik (Ouvrier-Buffet 2011; 2014). Modellen har en epistemologisk baggrund og suppleres af et studie bestående af otte interviews med matematikere ansat på franske universiteter, der arbejder med forskellige områder af matematik. Situationerne, som Ouvrier-Buffet (2014) baserer sin model på, omhandler, ligesom hos Grenier (2012), diskret matematik. Ouvrier-Buffet (2014) studerer dialektikken mellem definition og bevis og er inspireret af blandt andet Imre Lakatos' teori om *Proofs and Refutations* (Ouvrier-Buffet, 2011).

Kilderne afspejler diversiteten inden for forskningen i matematikforskningens praksis og forbindelsen til undervisningspraksis. Burtons interviewstudie (Burton, 2004) er, ifølge Johansen & Misfeldt (2014, s. 45), den største og mest indflydelsesrige undersøgelse af matematikforskernes egne opfattelser af deres arbejde. Burtons hypoteser om forskning i matematik (Burton, 2004) danner den overordnede ramme for modellens udfoldning af idéen om forskningslignende situationer. Det danske studie (Johansen & Misfeldt, 2014) konkretiserer *elementer* fra forskningspraksissen. Elementer er forfatternes betegnelse for forskellige adskilte dele af forskningen i matematisk (Johansen & Misfeldt, 2014, s. 46). Modellens ti kategorier af forskningslignende aktiviteter emulerer til en vis grad de ni elementer. Studiet præsenteret i Johansen & Misfeldt (2014) er deskriptivt. Johansen & Misfeldt (2014) har studeret Burtons resultater og fremhæver dele af Burtons beskrivelser som utilstrækkelige løsninger (Johansen & Misfeldt, 2014, s. 53). Johansen & Misfeldt (2014) tillægger blandt andet en undersøgelse af forskernes

kognitive strategier, brugen af IT-værktøjer og forskernes problemvalg til Burtons (2004) beskrivelse af forskningspraksissen.
I specialet suppleres Burtons verificeringer (Burton, 2004) og Johansen og Misfeldts elementer (Johansen & Misfeldt, 2014) af Grenier (2012) og Ouvrier-Buffet (2011, 2014), der eksemplificerer, hvorledes forskningspraksissen kan gøres til genstand for modeller til design af undervisningssituationer. Begge studier tager udgangspunkt i diskret matematik. Den institutionelle kontekst for Ouvrier-Buffet (2014) er universitetet, som det også er for specialet. Specialets model tager højde for forskellene mellem forskningspraksis i diskret matematik og matematisk analyse ved at komplettere udfoldningen af kategorier af forskningslignende aktiviteter inden for matematisk analyse af Grønbæk & Winsløw (2007). Dette studie undersøger, hvorledes såkaldte temaprojekter kan benyttes til at indlede *advanced student work* på et andetårskursus om matematisk analyse. Temaprojekterne havde en anden rolle på kurset *2AN* (som ikke længere findes), end opgaverne i det nye opgavedesign har på An0. Opgaverne i det nye design er et supplement til de studerendes arbejde med definitioner, sætninger og beviser fra Eilers et al. (2015), hvor temaprojekterne var det primære for den mundtlige eksamen i 2AN.

3.4.1 Model: Globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter

Forskningslignende situationer er kendetegnet ved en række globale egenskaber. I modellen betegnes de globale egenskaber **G1-G5**. Disse er globale egenskaber ved forskningspraksissen, som kan efterlignes i et opgavedesign som det til brug på An0. Opgaver i det nye opgavedesign med forskningspotentiale er kendetegnet ved nogle af disse globale egenskaber. Herunder følger to globale egenskaber **G1** og **G2**, som ikke inkorporeres i modellens kategorier for forskningslignende aktiviteter.

G1: Opgaver om et uløst problem
En basal egenskab ved forskningspraksissen er, at praksissen omhandler noget, som er uløst. Grenier kalder det for et *rigtigt problem* (Grenier, 2012, s. 3). Matematik er en vertikal disciplin (Madsen & Winsløw, 2009, s. 758), og derfor er mange rigtige problemer (for at blive i den terminologi) utilgængelige for størstedelen af de førsteårsstuderende. Inden for diskret matematik, som både Grenier (2012) og Ouvrier-Buffet (2011) beskæftiger sig med, er der eksempler på uløste eller nyligt løste problemer, som førsteårs stu-

derende kan få begreb om og arbejde med som *Erdös–Straus formodningen* (Weisstein, 2015):

> For alle heltal $n \geq 2$ kan det rationale tal $\frac{4}{n}$ udtrykkes som en sum af tre stambrøker:
>
> $$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Der findes også eksempler på uløste problemer fra matematisk analyse, som kan introduceres til førsteårs studerende såsom *Criterion for boundedness of power series* (Rüdinger, 2009):

> Giv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for (a_n), så rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er begrænset for alle $x \in \mathbb{R}$.

Andre eksempler på uløste problemer om matematisk analyse er uden for de studerendes rækkevidde. Årsagen til, at **G1** ikke inkorporeres i den model, som er udgangspunktet for det nye opgavedesign, er, at An0 fokuserer på opgaveløsning ved øvelsestimerne og ikke på arbejde om uløste problemstillinger, som er mere tidskrævende. Hovedsigtet i An0 er sætninger og beviser i Eilers et al. (2015), og derfor er uløste problemstillinger fravalgt.
Egenskaben indebærer det element af forskningspraksissen, som betegnes *frustration og venten* af Johansen & Misfeldt (2014). Det er et element, at forskeren accepterer at sidde fast med et problem. Forskeren forsøger at undgå, at frustrationen tager over ved at arbejde simultant med flere problemer. Det element af praksissen inkorporeres heller ikke i modellen; En opgave løses ved øvelsestimen, førend en ny påbegyndes. Der er intet til hinder for, at de studerende benytter sig af denne praksis i deres hjemmeforberedelse.

G2: Problemvalg eller senere ændre et givent problem
Johansen & Misfeldt (2015) beskriver problemvalget som et element i forskningspraksissen. De studerende har ingen erfaring med at vælge problemer, og det indgår ikke i kursets formål at udvikle de studerendes kendskab til problemvalgets facetter. Derfor inkorporeres den globale egenskab ikke i specialets model for forskningslignende aktiviteter.
Problemvalget rummer metakognition og er noget, som kræver erfaring (Johansen & Misfeldt, 2014, s. 46). Som udgangspunkt er der ikke noget, der forhindrer de studerende i at ændre et givent problem fra en opgave. Grenier (2012) kalder det for en *forskningsvariabel* i situationen, som overlades

til de studerende. Konteksten fordrer ikke denne aktivitet, da opgaverne, som de er formuleret i designet, er udgangspunktet for øvelsestimen.

Det er rimeligt, at **G1** og **G2** ikke inkorporeres i den model af forskningslignende aktiviteter, som er udgangspunktet for det nye opgavedesign, da konteksten, som nævnt, er et førsteårskursus i matematisk analyse med et andet fokus.
Specialets model udfolder tre globale egenskaber ved forskningslignende situationer, som inkorporeres i modellens kategorier af forskningslignende aktiviter, der er udgangspunktet for opgavedesignet. I modellens udfoldning af tre globale egenskaber ved forskningslignende situationer samt kategorier af forskningslignende aktiviteter henvises til opgaver fra det nye opgavedesign. Afsnit 5.1 præsenterer en kort analyse af designet, og bilag D præsenterer en a priori analyse af opgaverne.

G3: Ingen direkte eller indlysende svar
En løsning til en opgave må ikke være indlysende eller givet direkte af opgaveformuleringen (Grenier, 2012, s. 3). En rekonfiguration er eksempelvis en formulering, som *"Gælder det, at..."* i stedet for *"Vis, at..."*. Opgaveformuleringen er åben i den forstand, at der er usikkerhed omkring svaret. Forskningens accept af, at forhindringer er en naturlig del af arbejdsprocessen (Johansen & Misfeldt, 2014, s. 50) inkorporeres i det nye design med opgaver uden indlysende svar. Et eksempel er første delopgave i F5.3 (se bilag C):

1. Gælder det, at
$$D_1D_2D_3f = D_3D_2D_1f \ ?$$

Opgaven omhandler uafhængighed af differentiationsrækkefølgen (eksamensspørgsmål 5), og selvom svaret er enten ja eller nej, så er det væsentlige, at svaret ikke gives. Opgaven er at foretage en afgørelse og ikke at eftervise noget kendt.

G4: Begyndelsesstrategier er tilgængelige
De studerende kan ved brug af kendte teknikker eller andre strategier angribe problemstillingen i en opgave, men teknikkerne er ikke nok til at kunne løse opgaven. Et eksempel er opgave F6.1 (se bilag C). De studerende skal afgøre, om konkrete funktioner af flere variable er differentiable. I afsnit 5.3.1 præsenteres en a priori analyse af denne opgave. De studerende er bekendte med metoder til at afgøre differentiabilitet i tilfældet med funktioner af en variabel. Den teoretiske generalisering til tilfældet af flere variable præsenteres i Eilers et al. (2015). En begyndelsesstrategi kan være at beregne de

partielle afledte og undersøge, om disse er kontinuerte (se afsnit 5.3). Den globale egenskab har forbindelse til det adidaktiske potentiale for opgaven.

G5: Muligt at vælge forskellige strategier
Opgaveformuerlingen henviser ikke til, hvorledes de studerende kan løse en opgave. Samtidig skal det være muligt for de studerende at angribe opgaven med flere strategier. Usikkerheden omkring løsningsstrategien er en global egenskab ved forskningspraksis og også ved forskningslignende situationer. Der kan være mange løsningstrategier i henhold til den enkelte opgave, og arbejdet kan foregå i forskellige rammer (se afsnit 2.1). Litteratursøgning (som i konteksten er begrænset til Eilers et al. (2015) og eventuelt internettet), begrebsafklaring eller mere intuitivt arbejde med visualiseringer, kan bruges til at foretage undersøgelser i forbindelse med løsning af en opgave. De studerende kan basere valget af strategi på egne tankemønstre, gammel viden eller viden under udvikling. Egenskaben indgår som en del af SiRC-modellen hos Grenier (2012), og egenskaben genfindes i Burtons (2004) kategorisering af heterogeniteten for matematik som del af sin model.

De tre globale egenskaber, **G3**-**G5**, inkorporeres og operationaliseres i modellens ti kategorier af forskningslignende aktiviteter. I modellen betegnes de ti kategorier af forskningslignende aktiviteter **A1**-**A10**. Aktiviteterne emulerer forskellige dele er forskningspraksissen. På grund af (blandt andet) fravalget af de globale egenskaber, **G1** og **G2**, er der ikke tale om forskning. Modellens kategorier af aktiviteter er ikke en udtømmende liste. I andre sammenhænge kan en model for forskningslignende aktiviteter inkorporere andre globale egenskaber og også andre kategorier af aktiviteter. Man kunne eksempelvis inkorporere den globale egenskab **G2** og lade de studerende selv vælge et analytisk problem. Den globale egenskab **G1** kunne også inkorporeres, hvis konteksten indbød til det, eksempelvis et kursus om diskret matematik, hvor denne globale egenskab er en velegnet forskningsgestus. Det er kontekstens begrænsninger omkring design af nye opgaver (se afsnit 1), der begrunder valget af fokus til **G3**-**G5** samt **A1**-**A10** i specialets model. I de følgende afsnit beskrives de ti kategorier af forskningsligende aktiviteter.

A1: Undersøge et givent specialtilfælde og udlede generelle egenskaber for objekter, fx. en klasse af funktioner
De studerende undersøger et specialtilfælde, som gives via opgaveformulerlingen, gerne i forskellige rammer som grafisk, algebraisk eller formel. De studerendes valg af strategi afhænger af miljøet og kan være mere eller mindre systematisk. Bemærk, at de studerende kan vælge, da **G5** er inkorporeret i modellen. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne

aktiviteter, er ovennævnte F6.1 (se bilag C), idet de studerende får givet fire funktioner og skal afgøre, om disse er differentiable. Deres undersøgelser giver mulighed for at udlede generelle egenskaber om differentiabilitetsbegrebet i $\mathbb{R}^k$.
Kategorien emulerer elementet *meningsskabende og intuitiv behandling* fra Johansen & Misfeldt (2014). Forskeren bruger i sit arbejde regneeksempler som indledning til at fremsætte en formodning. Specialtilfældene i F6.1 gives til de studerende gennem opgaveformuleringen, og derfor er der tale om en forskningslignende aktivitet og ikke et forskningselement. Kategorien indgår i en model for forskningslignende situationer, da opgaven, betraget som didaktisk situation, har til formål, at de studerende fordyber sig i en teoretisk egenskab. Kategorien har fællestræk med nedenstående kategori. De er separerede, da de indbyder til forskellige aktiviteter.

A2: Konstruere specialtilfælde til at undersøge generelle egenskaber for objekter, fx. en klasse af funktioner
De studerende konstruerer et eksempel på en funktion, en figur mv., som opfylder visse betingelser for at udlede generelle egenskaber for et objekt. Funktioner kan konstrueres i forskellige rammer, ligesom også inspirationssøgning er en mulighed. Konstruktionen kan være systematisk eller mere tilfældig. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F3.2 (se bilag C):

- Angiv en funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, som opfylder de tre nedenstående betingelser:
    1. f har præcis tre diskontinuitetspunkter
    2. f er strengt voksende på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ og strengt aftagende på $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
    3. f er integrabel og $\int_0^1 f(t)\partial t = 1$
- Kan det lade sig gøre at finde en funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, som opfylder 1. og 2., men som ikke er Riemann integrabel?

I dette eksempel er objektet klassen af Riemann-integrable funktioner.
Kategorien emulerer elementet *eksperimenter og naive tests* fra Johansen & Misfeldt (2014). De studerende fremsætter ganske vist ikke en formodning, som testes, men formodningen gives indirekte af opgaveformuleringen gennem den mulige forbindelse mellem stykvist monotone og Riemann-integrable funktioner. Derfor er aktiviteten forskningslignende og ikke et element fra forskningspraksissen. Opgave F3.2 giver også mulighed for videre diskussion af mere kvalitativ karakter: Hvad kan eksemplet epistemisk?

Hvad er et godt eksempel? De kvalitative træk er et kendetegn for forskningspraksis jvf. Burton (2004), som behandler æstestikken som drivkraft for forskningen i matematik.

A3: Læse og rekontekstualisere et bevis
De studerende følger og uddyber et logisk ræsonnement, som fremsættes i et bevis fra Eilers et al. (2015). Særligt er der fokus på det implicitte. De studerende skal følge argumentationen og bidrage med opklarende bemærkninger eller udregninger til *krumspring* i beviset (Eilers et al., 2015, s. 151). Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F4.4 (se bilag C):

> Uddyb, hvad der sker ved uligheden på nederste linje s. 150 i beviset for Sætning 5.28.
> Uddyb, hvilke overvejelser man skal gøre sig, hvis x_1 ligger henholdsvis til højre eller venstre for x i beviset.

Rationalet følges af de studerende, da beviserne fra Eilers et al. (2015) er eksamens hovedsigte. Det er forskningslignende, da aktiviteten tager udgangspunk i et allerede fremsat argument, og formålet med aktiviteten er at uddybe et ræsonnement snarere end at udvikle nye metoder eller bruge ræsonnementet i andre sammenhænge. De studerende skal ikke selv producere nyt materiale, men udforske et givent. De studerende følger i rekontekstualiseringen et ræsonnement og den tankegang, som ligger bag bevisets tilblivelse. Denne tilpasning af aktiviteten til de studerendes viden og erfaring går igen i flere kategorier.
Kategorien kan også omfatte en aktivitet, hvor de studerende dissekerer et bevis. Det kan eksempelvis være i forbindelse med at identificere, hvor antagelserne for en sætning bruges i beviset for sætningen.
Kategorien baseres på Burtons behandling af korrekthed (Burton, 2004, s. 147-148), som tegner et billede af en social og kulturel konstrueret egenskab ved matematik; Forskerne antager, at matematikken, som præsenteres i artikler, er korrekt. Det er en bekymrende egenskab, som Burtons studie verificerer. I det nye opgavedesign angribes den konstruktivt med opgaver som igangsætter aktiviteter fra denne kategori. De studerende må ikke antage korrekthed, men skal selv godtgøre den ved at følge og uddybe det logiske ræsonnement. Kategorien har forbindelse til potentialet inden for fordybelse, da de studerende, som dissekerer et bevis, bliver gjort opmærksomme på bevisernes implicitte dele og sammenhængen mellem sætninger og beviser.

A4: Formulere sætninger i specialtilfælde
De studerende formulerer en sætning fra Eilers et al. (2015) i et givent specialtilfælde. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F8.2 (se bilag C):

> Hvad siger Sætning 6.24 for $k = 1$? Angiv et resultat fra noterne som siger det samme.

De studerende bestyrker deres indsigt i det nye abstrakte resultat, sætningen, ved at få indblik i, at resultatet kan sammenlignes med noget velkendt. Kategorien har forbindelse til potentialet inden for stoflig sammenhæng. Opgave F8.2 er en simpel opgave i denne kategori. Andre variationer af opgaver kan være, at nogle forudsætninger er antaget, og de studerende skal formulere sætningen i dette tilfælde, eller at de studerende selv skal vælge et specialtilfælde at formulere sætningen i. De studerende bliver fortrolige med de abstrakte objekter ved, at de studerende instantierer et udsagn og undersøger forbindelsen mellem den nye viden eller det nye spørgsmål og gammel viden eller viden under udvikling.
Kategorien emulerer elementet *meningsskabende og intuitiv behandling* fra Johansen & Misfeldt (2014). De studerende fortolker det generelle tilfælde i et konkret specialtilfælde for at blive fortrolige med objektet og den nye viden.

A5: Give analoge beviser
De studerende giver et bevis, som er analogt til et bevis fra Eilers et al. (2015). Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F12.2 (se bilag C):

- Vis, at Sætning 9.6 også gælder for specialtilfældet

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Hvordan parametriseres γ i dette tilfælde?

Det er ikke ualmindeligt, at sætninger kun bevises delvist, og derefter følges beviset af en bemærkning om, at det er muligt at vise de(t) resterende tilfælde analogt.
Kategorien ligner elementet *kontrol og formalisering* fra Johansen & Misfeldt (2014). Grenier (2012) betegner også ræssonement som en del af forskningspraksis. Der tages højde for de studerendes manglende erfaring med

matematisk formalisering ved at lade dem føre analoge beviser. På den måde skal de ikke selvstændigt producere nye bevisstrategier, men kan følge en given struktur. Aktiviteten er tilpasset de studerendes viden og erfaring.

A6: Bruge alternative eller uformelle rammer til at udforske og løse et problem
De studerende bruger repræsentanter fra mere uformelle rammer til at støtte deres intuition gennem visualiseringer. Kategorien vil oftest kombineres med aktiviteter fra andre af modellens øvrige ni kategorier. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F12.3 (se bilag C):

> Når vi beviser Sætning 9.6 kigger vi på E'er, der opfylder
>
> **a)** $E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \mu(x) \leq y \leq \nu(x)\}$ og
> **b)** $E = \{(x, y) \mid y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$.
>
> - Tegn 3 mængder, der opfylder både **a)** og **b)**.
> - Tegn én mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** og tegn derefter én mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)**.
>
> ⋆ Gør rede for, at en variation af (9.12) også gælder for
>
> $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$
>
> selvom E hverken opfylder **a)** eller **b)**.

Kategorien emulerer elementet *meningsskabende og intuitiv behandling* fra Johansen & Misfeldt (2014), som beskriver, at forskeren bruger visualiseringer som repræsentanter for et fænomen fra den abstrakte matematik. Burton (2004) identificerer et visuelt tankemønster hos nogle matematikere. Begge studier konkluderer, at mange forskere i matematik opfatter visualiseringer som metaforer.
Det er tidligere beskrevet, at den grafiske ramme er en hensigtsmæssig ramme for at skabe intuition omkring generelle egenskaber for objekter (se afsnit 2.1). Eksempelvis, at differentiable funktioner repræsenteres ved en glat graf. Visualiseringer er et heuristisk værktøj, som de studerende ikke nødvendigvis anser som et legitimt eller gavnligt værktøj til at løse opgaver i An0-konteksten. Ikke desto mindre beriger alternative rammer miljøet og kan være en måde at få begreb om de teoretiske objekter. Interviewstudiet hos Johansen & Misfeldt (2014) fremstiller ikke et entydigt billede af det legitime i brugen af visualiseringer i forbindelse med et formelt argument. Bemærk, at kategorien ikke nødvendigvis ekspliciteres i opgaveformuleringen. Aktiviteten kan indgå som strategi på de studerendes eget initiativ.

A7: Formulere hypoteser
De studerende skal på baggrund af foregående undersøgelse af specialtilfælde fremsætte formodninger eller formulere hypoteser omkring en teoretisk egenskab for et objekt. Hypoteserne er generaliseringer af specialtilfældene. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er første og anden delopgave af F5.3 (se bilag C):

1. Gælder det, at
$$D_1 D_2 D_3 f = D_3 D_2 D_1 f \ ?$$
2. Brug dit svar på 1. til at formulere en mere generel hypotese om højereordens partielle afledte for f. Kan du bevise din hypotese?

I karakterisering af forskningspraksis indgår det at *fremsætte en formodning* hos Grenier (2012). Kategorien emulerer denne del af karakteriseringen.

A8: Opsøge og vurdere relevant viden
De studerende opsøger, på eget initiativ eller på opfordring fra opgaveformuleringen, relevant viden. En del af aktiviteten er at vurdere litteraturens kvalitet. Aktiviteten kan også være mere uformel, hvor relevant viden om en problemstilling eller et begreb opsøges gennem kommunikation med andre. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er tredje delopgave af F8.4 (se bilag C):

> Lad $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, hvor $n \geq 2$ og mindst to af x-værdierne er forskellige.
>
> 1. Vis at funktionen
> $$f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$
> har ét stationært punkt.
> 2. Afgør om det stationære punkt er et minimum, sadelpunkt eller maksimum.
> 3. Hvad har opgaven at gøre med lineær regression?

De studerende kan undersøge sammenhængen ved at søge på internettet, kigge i andet litteatur eller tale med andre studerende og instruktorer om det. Burton (2004) verificerer ved sit studie, at matematik skabes i sociale og kulturelle relationer. Johansen & Misfeldt (2014) beskriver elementerne *litteratursøgning* og *inspiration fra andre*. Kommunikationen eller samarbejdet med andre er både motiverende og inspirerende.

A9: Undersøge forbindelser til andre resultater eller områder
De studerende sammenligner et resultat eller en metode med andre matematiske resultater eller metoder. Resultater kan være sætninger, og metoder kan være beviser. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter, er F1.4 (se bilag C):

> Undersøg på internettet hvad *Bisection method* går ud på. Forklar hvad denne metode har med Hovedsætning 2A at gøre. Benyt Hovedsætning 2A gentagne gange til at bestemme en approksimation til løsningen for $x^2 = 2$ med 3 decimaler.

Bemærk, at bisektionsmetoden er ikke en del af målbeskrivelsen for An0. Opgaven skaber forbindelse mellem viden under udvikling om Hovedsætning 2A (Eilers et al., 2015, s. 77) og ny viden om bisektionsmetoden. Hensigten er, at undersøgelsen af forbindelsen skal styrke den viden, der er under udvikling hos de studerende. Kategorien inkorporeres på basis af Burtons beskrivelser af matematikkens æstetik (Burton, 2004), hvor forbindelser spiller en rolle.

A10: Producere eller validere definitioner
De studerende skal producere og/eller validere en definition af et matematisk objekt. Et eksempel på en opgave, som igangsætter sådanne aktiviteter er F8.3 (se bilag C):

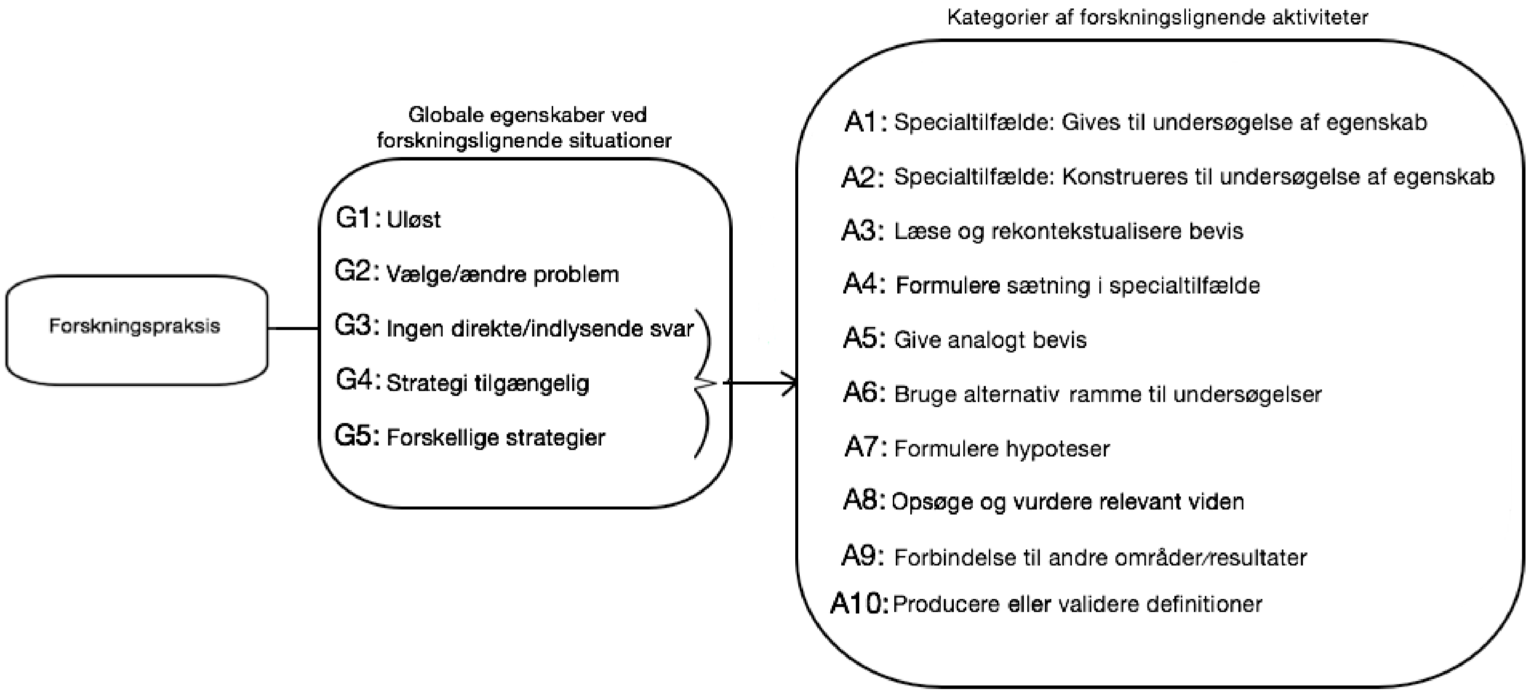
> Definér på passende vis, hvad man bør mene med Taylorpolynomiet af 1. orden for en C^2-funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.
>
> Hvad bliver 1. ordens Taylorpolynomiet til $f + g$, hvor både f, g er C^2-funktioner fra Ω til $\mathbb{R}$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er åben.

Kategorien emulerer dele af definitionsprocessen, som beskrives af Ouvrier-Buffet (2014). Definitionen af et objekt fungerer forskelligt i forskellige *momenter* af definitionsprocessen. Definitionen kan fungere som et redskab til at opnå viden om et begreb eller som et objekt i sig selv. Ofte vil de studerende ikke producere en definition, men i stedet validere eller forfine en fra Eilers et al. (2015). Et eksempel på en opgave, som igangsætter denne aktivitet, er F10.4 (se bilag C). De studerende viser, at kurveintegralet er entydigt og derved veldefineret. I afsnit 5.4.1 præsenteres en a priori analyse af opgaven.

Kategorien ligner momentet *formalisering* fra Ouvrier-Buffet (2014). Formaliseringen er definitionsprocessens sidste moment. Det er en stigning i abstraktionsniveau, hvor definitionen er et objekt i sig selv. Valideringen af en definition kan ske på forskellige måder: En definition valideres i forbindelse med et konkret eksempel, hvor anvendelsen af velkendte teknikker kan bruges til at afgøre, om definitionen er korrekt. En definition kan også valideres, hvis den har styrke under matematiske transformationer eller i forskellige rammer (Ouvrier-Buffet, 2014, s. 6). På denne måde kan arbejdet med definitioner være et heuristisk værktøj i matematikkens praksis (Ouvrier-Buffet, 2011).

Modellens udfoldning af globale egenskaber ved forskningslignende situationer og kategorier af forskningslignende aktiviteter er illustreret i figur 3.1. Beskrivelsen af de ti kategorier gør det muligt at præciseres definitionen af forskningspotentialet: I dette speciale defineres forskningspotentialet som en opgaves mulighed for at igangsætte aktiviteter fra **A1**-**A10**.

Revisionen af opgaveprogrammet resulterede som nævnt i et nyt opgavedesign med potentialer inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng, fordybelse og forskning. I afsnit 4 redegøres for designmetodologien. Specialets analyser baseres på værktøjer fra TDS samt modellen om forskningslignende situationer. Det er baggrunden for at besvare specialets empiriske forskningsspørgsmål, som præsenteres i det følgende.



Forskningspraksis
Globale egenskaber ved forskningslignende situationer
G1: Uløst
G2: Vælge/ændre problem
G3: Ingen direkte/indlysende svar
G4: Strategi tilgængelig
G5: Forskellige strategier
Kategorier af forskningslignende aktiviteter
A1: Specialtilfælde: Gives til undersøgelse af egenskab
A2: Specialtilfælde: Konstrueres til undersøgelse af egenskab
A3: Læse og rekontekstualisere bevis
A4: Formulere sætning i specialtilfælde
A5: Give analogt bevis
A6: Bruge alternativ ramme til undersøgelser
A7: Formulere hypoteser
A8: Opsøge og vurdere relevant viden
A9: Forbindelse til andre områder/resultater
A10: Producere eller validere definitioner

Figur 3.1

3.5 Empiriske forskningsspørgsmål

Specialet behandler et nyt opgavedesign til An0. Det nye opgavedesign opfylder visse behov i institutionen. Udformningen af designet tager udgangspunkt i kursets teoretiske hovedsigte og behovene til det reviderede opgaveprogram. Det kommer til udtryk som fire potentialer for opgaver: Potentiale inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng, fordybelse og forskning. De fire potentialer for opgaver er en teoretisk kontrol af, hvad opgaverne i det nye opgavedesign bidrager til af aktiviteter hos de studerende som arbejder med opgaverne. Specialet behandler to empiriske forskningsspørgsmål:

$\mathbf{RQ_1}$ Hvilke realiseringer af de fire potentialer blev observeret i praksis?

$\mathbf{RQ_2}$ Hvilke forklaringer kan der være på eventuelle forskelle mellem teoretiske og observerede værdier for de fire potentialer?

Potentialernes teoretiske værdier for opgaver baseres på en a priori analyse af opgaverne og har forbindelse til **DP**. Specialet undersøger og besvarer de empiriske forskningsspørgsmål på baggrund af empirisk data. Kapitel 4 præsenterer en redegørelse for specialets forskningsmetodologi.

Kapitel 4

Metodologi

I dette kapitel redegøres for designprocessen og fremgangsmåden, hvormed specialet undersøger de to empiriske forskningsspørgsmål (se kapitel 3.5).

Det nye opgavedesign er produceret i en rotationsproces. Designprocessen for det nye opgavedesign fulgte en fast struktur. Fem personer var involveret i processen: Søren Eilers (kursusansvarlig), Anna Munk Ebbesen (instruktor i An0), Katrine Gravesen (specialestuderende), Niels Grønbæk og Carl Winsløw (begge forskere i matematikdidaktik og matematisk analyse). Strukturen var som følger:

1. Første udkast af opgaver til et givent eksamensspørgsmål blev udarbejdet i samarbejdet mellem Anna Munk Ebbesen og Niels Grønbæk. Udkastet baseredes på relevant materiale fra Eilers et al. (2015) og havde fokus på at imødekomme lokale behov for det nye opgavedesign (se afsnit 1).

2. Opgaverne blev løst af Katrine Gravesen. I denne del af processen lagdes vægt på opgavernes adidaktiske potentiale samt muligheden for at etablere forskningslignende aktiviteter i henhold til opgaverne.

3. Opgaverne blev revideret i samarbejde mellem Katrine Gravesen og Carl Winsløw i henhold til formålene for det nye opgavedesign. I nogle tilfælde blev der tilføjet ekstra (del)opgaver.

4. De reviderede opgaver blev endvidere revideret af Søren Eilers. I nogle tilfælde blev opgaver taget ud, og i andre tilfælde var der tale om rettelser.

Processen forløb samlet set over ti uger, og strukturen var den samme for alle 12 eksamensspørgsmål. Designproblemet undersøges og løses i designprocessen. Designmetodologien var betinget af kontekstens begrænsninger. Pensum for An0 var fastlagt og offentliggjort på kursushjemmesiden (Institut for Matematisk Fag, 2014, An0 kursushjemmeside). Det var muligt at lave justeringer i forhold til delelementer af eksamen, men eksamensformen var ikke mulig at ændre. Det nye opgavedesign skulle have forbindelse til de 12 eksamensspørgsmål. Derfor er titlen på hvert af de 12 sæt også titlen på et eksamensspørgsmål.
En a priori analyse af opgaver fra trin 1 påbegyndtes i trin 2. Specielt blev opgavens adidaktiske potentiale vurderet ud fra oplevelsen af at arbejde med opgaven i trin 2. En del af formålene var, at opgaverne skulle være løselige for de studerende (se afsnit 1). Konstruktionen af opgaverne involverer implicitte antagelser om det objektive miljøs sammensætning og om de studerendes viden, selvom de studerendes viden ikke antages at være lig den tilgængelige viden på trin 2. Alle fire potentialer for en opgave blev vurderet i trin 3. Fordybelsespotentialet blev forfulgt ved at formulere opgaver, som tillader de studerende at reflektere over detaljer i et bevis eller strukturen af det. Beviserne er eksamens hovedsigte. Potentialet for stoflig sammenhæng blev forfulgt ved at formulere opgaver, som tillader de studerende at finde sammenhænge mellem sætninger, defintioner eller beviser fra An0 og viden fra tidligere kurser eller fra gymnasiet. Forskningspotentialet blev forfulgt ved at formulere opgaver, som igangsætter aktiviteter der ligner dele af forskningspraksissen. Specialets model for globale egenskaber ved forskningslignende situationer (**G3-G5**) og kategorier af forskningslignende aktiviteter (**A1-A10**) er udviklet i vekselvirkning med produktionen af opgavedesignet. Designmetodologien har betydning for, hvordan det endelig hæfte af F-opgaver ser ud. Hæftet er et resultat af de metoder, som blev forestillet og udført i designprocessen.

Fire situationer blev udvalgt til analyse med henblik på at besvare $\mathbf{RQ_1}$: Opgaverne, F1.2, F6.1, F10.4 og F12.3 (se bilag C), opfattedes som didaktiske situationer og blev analyseret med udgangspunkt i interaktioner mellem instruktor og studerende i episoder. Valget af de fire situationer skete efter kursets afvikling (én blev valgt inden eksamen). Situationerne valgtes på baggrund af flere parametre:

- Opgaverne igangsætter aktiviteter fra forskellige kategorier i modellen for forskningslignende aktiviteter.
- Udviklingen af situationen giver i et vist omfang mulighed for at analysere realiseringen af potentialer for opgaven. Det betyder blandt an-

det, at instruktoren i episoder afgiver ansvar for produktion af viden til de studerende.

- Analyse af situationerne giver samlet set mulighed for at diskutere eventuelle forskelle mellem teoretiske og observerede værdier af potentialer.

De fire situationer har alle forskningspotentiale. Opgaverne igangsætter aktiviteter fra forskellige kategorier af aktiviteter, **A1**-**A10** (se bilag D). Samlet set har situationerne teoretisk værdi inde for alle kategorier. Ydermere skal valget af situationer afspejle en eventuel udvikling i forhold til de studerendes arbejde med F-opgaverne. Derfor blev en situation programsat i kursets anden uge, en i den femte uge og to i den syvende uge udvalgt til analyse. For hver situation blev det stofdidaktiske indhold, den tilsigtede viden, miljøet og mulige forhindringer ved opgaven analyseret. Formålet er at analysere opgavens potentialer. A priori analyse af opgaver i det nye design med hensyn til potentialer, som kan realiseres findes i bilag D.
A priori analysen gik forud for a posteriori analyser af de fire udvalgte F-opgaver, som er basis for at besvare $\mathbf{RQ_1}$. A posteriori analysens empiriske grundlag er data i form af:

Noter fra hjemmeforberedelse til F-opgaver fra en udvalgt fokusgruppe. Hensigten er at kunne vurdere realiseringen af det adidaktiske potentiale for opgaven og aktiviteter fra kategorierne **A1**-**A10**, som ikke observeres ved øvelsestimen.

Videooptagelser af øvelsestimer for et udvalgt øvelseshold. Her er aktiviteter angående løsning af F-opgaver ved tavlen samt studerendes og instruktorens stemmer i fokus.

Uddrag af videooptagelserne blev senere transskriberet. I a posteriori analysen identificeredes sekvenser, faser og episoder i en didaktisk situation jvf. afsnit 2.3. Analysen af videooptagelserne illustrerer ansvarsfordelingen i en episode mellem studerende og instruktor.
Fokusgruppen blev udvalgt på baggrund af flere kriterier. Eksempelvis, at studerende i fokusgruppen var

- Behjælpelige med skriftlige noter fra deres hjemmeforberedelse og være villige til at deltage ved to interviews.

- Deltagende på samme øvelseshold.

Ved en observationstime (i uge 6) blev 12 studerende spurgt, om de ville deltage i projektet. De studerende fik at vide, at deres primære opgave var at gøre, som de plejede. De skulle ikke forberede sig mere end normalt eller gøre en ekstra indsats på andre områder. Syv studerende takkede ja. De syv studerende blev vurderet i forhold til aktiv deltagelse ved observationstimen. Ønsket var, at fokusgruppen bestod af studerende, som studerer ren matematik, da det blev antaget, at denne population ville have størst incitament for at indgå i aktiviteter af forskningslignende karakter. Det dominerende kriterie var, at de studerende indvilligede i at være med i projektet og var tilknyttet samme øvelseshold. To studerende fra fokusgruppen er aktuarstuderende, og en studerende fra fokusgruppen er tilvalgsstuderende med hovedfag i engelsk. De studerende i fokusgruppen klarer sig generelt godt på deres studie.
De studerende fra fokusgruppen er lovet anonymitet. I specialet henvises til de studerende ved nummereringen I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 og I_7, der refererer til fokusgruppen som *informanter*.
Valget af skriftlige noter som datagrundlag, til fordel for eksempelvis videooptagelser af studerendes forberedelse, skyldes specialets i forvejen omfangsrige empiriske materiale. De skriftlige noter er et supplement til videooptagelserne af øvelsestimerne, som er specialets primære empiriske grundlag. For at afklare hvordan studerende fra fokusgruppen forberedte besvarelse af F-opgaver, blev de spurgt om deres hjemmeforberedelse ved

> **Interviews afholdt halvvejs i kurset** (i uge 9). Hensigten var at afklare vanskelige forhold ved konkrete opgaver, en mere generel vurdering af F-opgaverne som type og en afklaring af observationer fra øvelsestimen.

A priori analysens fremstilling af teoretiske værdier for de fire potentialer sammenholdes med a posteriori analysens fremstilling af observerede værdier for de fire potentialer. Besvarelse af $\mathbf{RQ_2}$ baseres på en diskussion af realiseringer af potentialer i de fire udvalgte situationer.

I alle kursets syv uger blev det samme øvelseshold filmet. Holdet var generelt et aktivt hold, hvor mange studerende deltager i diskussionerne. Overvejelserne om at filme det samme hold gennem hele forløbet var, at ved at filme det samme hold var der mulighed for dybtegående analyse af udvalgte studerende. Fokus på et øvelseshold gør det vanskeligt at lave en generel vurdering af, hvorvidt opgavedesignet opfylder institutionens på baggrund af situationsanalyserne. En del af specialets forskningsmetodologi er at supplere med data, som er mere overordnede observationer. Det er data som er mere løst forbundet til $\mathbf{RQ_1}$. Det består af:

Observationer fra eksamen (i uge 13 og 15). Hensigten var at undersøge implicit eller eksplicit effekt af F-opgaverne i eksamenskonteksten. Eksaminerne blev ikke videofilmet. Eksamen blev observeret hos forskellige eksaminatorer.

Interviews afholdt efter eksamen (i uge 18 og 19) med studerende fra fokusgruppen. Hensigten var at få oplysninger om fokusgruppens oplevelser fra eksamen og særligt brugen af F-opgaverne i forberedelsen til og ved selve eksamen.

Deltagelse ved instruktormøder, som blev afholdt hver mandag i kursets syv uger. Møderne styredes af Søren Eilers.

De studerendes besvarelser af to evalueringsskemaer, hvoraf et skema evaluerer An0 og et skema evaluerer F-opgaverne.

De overordnede observationer er sekundære i forhold til at vurdere realiseringen af fire potentialer ved episoder fra øvelsestimerne, men observationer er som nævnt stadig forbundet til $\mathbf{RQ_1}$ og $\mathbf{RQ_2}$. Der blev observeret i alt 32 eksaminationer. Antallet af observerede eksaminationer fordelte sig således på hvert eksamensspørgsmål:

Eksamensspørgsmål	Antal	Eksamensspørgsmål	Antal
1	3	7	1
2	4	8	2
3	3	9	2
4	2	10	2
5	4	11	3
6	1	12	5
		I alt:	32

Bemærk, at der er forskel på det F-opgavehæfte som kaldes version 11 som blev brugt ved øvelsestimerne (se bilag C) og det F-opgavehæfte som blev brugt ved eksamen (se bilag E). Specialets analyser omhandler ikke opgaver, som kun indgår i version 11. Den mest markante forskel mellem de to udgaver er markeringen af nogle opgaver med "†", som indikerer, at opgaven ikke vil inddrages ved eksamen med mindre eksaminanden selv tager initiativ til det. Det drejer sig om fem opgaver: F1.4, F3.5, F4.2, F4.3 og F8.4 (se bilag E).

Øvelsestimerne, eksamen og instruktormøderne blev observeret. Beslutninger taget i forbindelse med afviklingen af de tre kursuselementer er uden for specialets rækkevidde. Alle involverede studerende og instruktorer blev orienteret om projektet og sikret anonymitet. Derfor optræder de studerende under pseudonym i de transkiberede uddrag, som specialets analyse inddrager. Instruktoren benævnes **Inst.**, og i de transkriberede interviews med fokusgruppen er brug af instruktorens navn ændret til *instruktor* (se bilag F).

En forudsætning for at en studerende er eksamensberettiget i An0 er, at den studerende får godkendt mindst to ud af tre obligatoriske afleveringer. Specialet fokuserer ikke på disse afleveringer. Forskningsspørgsmålene retter sig mod hvilke af de fire potentialer for opgaver i det nye design, som blev observeret i en række udvalgte situationer. Ved det indledende møde blev det gjort klart, at opgavematerialet var et kursuselement, der var muligt at ændre. Den første aflevering blev dog ændret af Søren Eilers. Ydermere blev en række pencasts lagt på internettet. Pencasts er et interaktivt dokument, som viser en optagelse af noter og tale til en gennemgang af et bevis. Det er vanskeligt at vurdere betydningen af pencasts og den ændrede aflevering for eksamensresultater og de studerendes evaluering af kurset.

Kapitel 5

Analyse af opgavedesign og fire udvalgte situationer

Specialet undersøger et designproblem. Designprocessen resulterede i et nyt opgavedesign til brug på An0. Nedenstående afsnit redegør kort for nogle træk ved opgavedesignet.

5.1 F-opgaver

Opgavedesignet består af i alt 57 opgaver, som omtales som *F-opgaver* i kurset. Det refererer til institutionens ønske om, at opgavedesignet skal igangsætte forskningslignende aktiviteter. Alle opgaverne har forskningspotentiale og igangsætter aktiviteter fra en eller flere af kategorierne **A1-A10** (se bilag D). Bemærk, at alle opgaver også har et adidaktisk potentiale. Hver opgaveformulering er en del af et objektivt miljø, som giver de studerende mulighed for at trække på gammel viden eller viden under udvikling, når de arbejder med en F-opgave. Det betyder samtidig, at alle F-opgaverne har potentiale inden for enten stoflig sammenhæng eller fordybelse.
Nogle aktiviteter fra **A1-A10** igangsættes oftere end andre af opgaver i det nye design. Af bilag D fremgår det, at aktiviteter fra **A3** igangsættes oftere end aktiviteter fra nogen anden kategori. Det er et valg, som er truffet i forbindelse med designprocessen. Beviserne fra Eilers et al. (2015) er som nævnt hovedsigtet ved den mundtlige eksamen. Derfor igangsætter mange opgaver i det nye opgavedesign, at de studerende læser og dissekerer beviser fra noterne.
Nogle F-opgaver er markeret med "$\star$". Det betyder, at opgaven er lidt sværere at løse end de øvrige opgaver. Størstedelen af opgaver med denne markering er opgaver med potentiale inden for fordybelse. Flertallet af opgaver

med flere delopgaver har først en mere teknisk delopgave og efterfølgende et teoretisk spørgsmål. I sådanne opgaver er den sidste delopgave markeret med stjerne. Denne udformning af opgaver er en måde at forfølge det adidaktiske potentiale på. De tekniske delopgaver, som har potentiale inden for stoflig sammenhæng, er med til at berige det didaktiske miljø for de delopgaver med potentiale inden for fordybelse.

Analysen af fire udvalgte situationer er basis for at besvare specialets empiriske forskningsspørgsmål. Analysen baseres først og fremmest på udviklingen af situationen ved øvelsestimen og fokusgruppens noter fra hjemmeforberedelsen. Et kendetegn for instruktoren på det øvelseshold, som blev observeret, er, at hun skriver alt på tavlen. Desuden er det sjældent, at andre end instruktoren skriver på tavlen. Det har betydning for, hvordan data fra videooptagelserne kan bruges i analysen. De studerendes bidrag ved øvelsestimen, som skal give indblik potentialernes realisering, er udelukkende mundtlige fremstillinger. Det vil fremgå af analyserne.

5.2 Ekstremalværdisætningen

Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner er en samling af ni sætninger inddelt i tre temaer. Ekstremalværdisætningen, hovedsætningen om sammenhængende variation og hovedsætningen om uniform kontinuitet formuleres hver i tre tilfælde, som skelnes ud fra sætningernes forudsætninger. Sætning 3.20 (se s. 51) er ekstremalværdisætningen for kontinuerte funktioner $f : N \to \mathbb{R}$, hvor $N \subseteq \mathbb{R}$ er afsluttet og begrænset. Det er den *simple formulering* af ekstremalværdisætningen, som kan generaliseres til flere dimensioner (Eilers et al., 2015, s. 74)

I dette afsnit præsenteres en a priori analyse af opgave F1.2, opfattet som didaktisk situation, og senere en a posteriori analyse af udviklingen af situationen. Det stofdidaktiske relaterer sig til eksamensspørgsmål 1 om hovedsætningerne om kontinuerte funktioner. Det er valgfrit, hvilken af hovedsætningerne de studerende præsenterer ved den mundtlige eksamen. Analysen af udviklingen af situationen dokumenterer, at instruktoren institutionaliserer den tilsigtede viden tidligt i udviklingen af situationen, og de studerende bruger alternative rammer i deres undersøgelser. Flere potentialer realiseres i udviklingen af situationen.

De reelle tal er grundlaget for analyse, som præsenteres på An0, og fuldstændighedsaksiomet er afgørende (Eilers et al., 2015, s. 68):

> *Lad $A \subset \mathbb{R}$ være en ikke-tom, opad begrænset mængde. Der fin-*

des da et overtal for A, der er mindre end alle andre overtal for A. Dette specifikke overtal kaldes **supremum** *for A, og skrives* $\sup A$

Ruse-lemmaet (Eilers et al., 2015, s. 69) bruges også i forbindelse med hovedsætningerne om kontinuerte funktioner:

Lemma 3.18 (Ruse-lemmaet). *Lad $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$ være en følge af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}$ med den egenskab at*

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}$$

Der findes præcist ét tal $\xi \in \mathbb{R}$ med den egenskab at $\xi \in [a_n, b_n]$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Ruse-lemmaet er en variation af *the nested interval theorem* (Pahikkala, 2013): Hvis $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$ er en følge af afsluttede intervaller i $\mathbb{R}$, så gælder, at $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. Følgende er et korrolar til sætningen: Hvis $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, så består $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ af ét punkt. Det er vigtigt, at $[a_n, b_n]$ er begrænsede. Betragt $A_n = [n, \infty)$ for $n \in \mathbb{N}$. Da gælder $\bigcap A_n = \emptyset$.

Første hovedsætning (Eilers et al., 2015, s. 71) lyder som følger:

Sætning 3.20 (Hovedsætning 1A). *Enhver kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ defineret på et afsluttet, begrænset interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, er begrænset og har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi.*

Beviset for Sætning 3.20 er delt i to: Ønsket er at finde et $\xi \in [a, b]$ med den egenskab, at (Eilers et al., 2015, s. 72):

$$f(x) \leq f(\xi) \text{ for alle } x \in [a, b] \tag{3.8}$$

og tilsvarende et $\eta \in [a, b]$ med den egenskab, at

$$f(\eta) \leq f(x) \text{ for alle } x \in [a, b] \tag{3.9}$$

Beviserne for eksistensen af ξ og η med de ønskede egenskaber forløber analogt. Eilers et al. (2015) præsenterer et bevis for eksistensen af et ξ. Betydning af (3.8) er netop, at f antager sin størsteværdi i ξ, som ligger i intervallet $[a, b]$. Sætningen forudsætter, at f er kontinuert og defineret på et afsluttet, begrænset interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hvor antagelsen bruges i beviset, undersøges i F1.2. Udviklingen af situationen omkring F1.2 behandles i det følgende.

5.2.1 Antagelser i Hovedsætning 1A

Opgave F1.2 (se bilag C) lyder som følger:

> Gå beviset for Hovedsætning 1A igennem og afgør, hvor antagelsen om, at f skal være defineret på et afsluttet og begrænset interval bruges (NB: Det er ikke sikkert, at det står eksplicit i selve beviset).

Det erklærede læringsmål for F1.2 er identifikation af, hvor antagelsen om, at intervallet $[a, b]$ er afsluttet og begrænset, bruges i beviset for sætningen. Den tilsigtede viden inkluderer indsigt i det implicitte i det matematiske bevis.

Det objektive miljø består af opgaveformuleringen, beviset for Sætning 3.20 og andre resultater fra Eilers et al. (2015, afsnit 3.2-3.3), som er viden under udvikling for de studerende. En del af miljøet er bemærkningen i parentes. Det antages, at de studerende, i kursets anden uge, har begrænset erfaring med at læse beviser og følge logiske ræsonnementer. Derfor får de et hint til at løse opgaven.
Til miljøet hører også et eksempel, som instruktoren introducerede ved den foregående øvelsestime. Dette gælder således kun for det pågældende øvelseshold. I forbindelse med, at en studerende gennemgik beviset for Ruse-lemmaet, påpegede instruktoren, at intervallerne i følgen er nødt til at være afsluttede og begrænsede. Man kunne forestille sig en følge af intervaller $(a_1, b_1) \supset (a_1, b_2) \supset (a_1, b_3) \supset \cdots$, hvor $\bigcap(a_i, b_i) = a_1$, som altså ikke ligger i intervallet (a_1, b_1). Instruktoren inddrog en figur i forbindelse med eksemplet. Figuren illustreres ikke her på grund af dårlig billedkvalitet af optagelsen. Eksemplet er viden under udvikling for de studerende.

I beviset for Sætning 3.20 bruges antagelsen om, at intervallet $[a, b]$ er afsluttet og begrænset til at konkludere, at der findes ét ξ med egenskaben, at $\xi \in [a_n, b_n]$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Intervallerne i rusen, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, er afsluttede, og der gælder, at

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}$$

I denne del af beviset bruges fuldstændigheden for $\mathbb{R}$. Rusen konstrueres ved at halvere intervallerne og vælge det delinterval, hvor $\sup\{f(x)\}$ er størst for $x \in [a_n, b_n]$. Ved Ruse-lemmaet findes kun ét ξ med den egenskab, at $\xi \in [a_n, b_n]$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

5.2.2 De fire potentialer

Den tilsigtede viden for F1.2 er som nævnt identifikation af, hvor antagelsen bruges i beviset for Hovedsætning 1A. Af bilag D fremgår en identifikation af potentialer for opgaven. Det uddybes i det følgende.

Adidaktisk potentiale: Beviset for Sætning 3.20, opgaveformuleringen og eksemplet, som instruktoren introducerede ved foregående øvelsestime udgør et objektivt miljø for opgaven. De studerende kan i arbejdet med F1.2 trække på viden under udvikling om fuldstændighedsaksiomet og Ruse-lemmaet. Det giver opgaven et adidaktisk potentiale. Opgaveformuleringen henviser til, at brugen af Ruse-lemmaet er implicit angivet i beviset. Det øger den teoretiske værdi af potentialet.

Potentiale inden for stoflig sammenhæng: Det antages, at de studerende ikke har stor erfaring med at læse og dissekere et bevis. Derfor er opgavens potentiale inden for stoflig sammenhæng begrænset.

Fordybelsespotentiale: Opgaven giver de studerende indsigt i antagelsernes brug i beviset og viden om bevisets implicitte dele. De studerende løser opgaven ved at trække på viden under udvikling om Ruse-lemmaet. Fordybelsespotentialet er det primære for opgavens udformning. Ved eksamen kan de studerende vælge at præsentere beviset for Hovedsætning 1A, og indsigten i bevisets brug af antagelser giver de studerende viden om det teoretiske hovedsigte for eksamen.

Forskningspotentiale: Opgaven igangsætter aktiviteter, som indgår i kategorien **A3**. De studerende uddyber, hvorfor det er muligt at bruge Ruse-lemmaet under de givne antagelser. De studerende følger det logiske ræsonnement for at identificere bevisets implicitte dele. Opgaven kan igangsætte aktiviteter fra **A8**, hvis de studerende oplever forhindringer ved at dissekere beviset fra Eilers et al. (2015), eller hvis de sammenligner deres dissekering af beviset med andres. De studerende kan også lade sig inspirere af andet litteratur, som fører andre beviser for ekstremalværdisætningen. Denne del af potentialet afhænger af de studerendes opfattelse af miljøet. Opgaveformuleringen henviser direkte til Eilers et al. (2015). De studerende kan modificere miljøet ved at opsøge viden andre steder. Det kræver, at de studerende har den opfattelse, at de kan og må berige miljøet med denne aktivitet.

5.2.3 Mulige forhindringer

I beviser fra matematisk analyse er nogle dele af ræsonnementet implicit. Det er en del af forhindringen i opgaven at bevidstgøre de studerende om det implicitte. En anden del af forhindringen er, at forholdet mellem sætninger og beviser indebærer, at hvis en sætning indeholder antagelser, så skal antagelserne bruges i beviset. Det omvendte skal også opfyldes: Beviset må ikke gøre brug af antagelser, som ikke indgår i sætningen. De studerende skal overvinde forhindringen for at tilegne sig den tilsigtede viden. De skal være bevidste om, at der i beviset ikke bruges en formulering som: *Her bruges antagelsen om, at intervallet er afsluttet og begrænset*, hvis de skal løse opgaven. Samtidig skal de bevidstgøres om, at antagelsen er gjort, fordi den bruges i beviset.

Med udgangspunkt i ovenstående a priori analyse, opstilles følgende hypotese om realiseringen af de fire potentialer på baggrund af de studerendes viden under udvikling.

> **De studerende** dissekerer beviset for Hovedsætning 1A og afgør, at antagelsen om, at intervallet $[a, b]$ er afsluttet og begrænset, bruges i forbindelse med brugen af Ruse-lemmaet.

5.2.4 Udvikling af situationen

Diskussionen af opgaven udfolder sig i to faser, som det fremgår af følgende tabel:

Fase	Titel	Episoder	Varighed
1	Studerende arbejder selvstændigt med beviset for Sætning 3.20	1a	4 min.
2	Identifikation af hvor antagelsen bruges i beviset for Sætning 3.20	2a-2d	6 min.

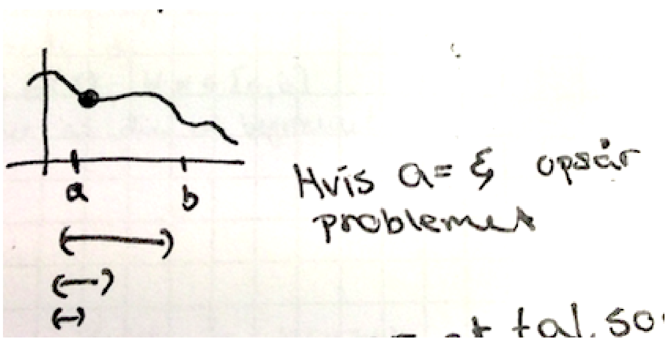
Analysen fokuserer på *fase 2*. Det mest bemærkelsesværdige ved udviklingen af *fase 1* er, at meget få studerende indgår i dialog med andre studerende og meget få læser i bogen. De fleste studerende kigger ud af vinduet eller taler om andre ting. Aktiviteten fra **A8** realiseres kun i aktiviteten hos ganske få studerende.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 2: Ved den pågældende øvelsestime afleverede seks ud af syv studerende fra fokusgruppen noter (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 og I_6). Fem studerende har besvaret opgave F1.2.

I_1 opstiller argumentet, at hvis ikke antagelsen blev gjort, kunne man risikere at lave en fejlslutning. Den studerende skriver:

> *Hvis f ikke var defineret på et lukket, begrænset interval kunne vi ikke danne en ruse af lukkede intervaller og ikke bruge ruselemmaet til at finde ξ. Man ville så at sige kunne forestille sig, at $\sup\{f(x)\}$ lå i et af de åbne endepunkter, $x \in (a, b)$ og så ville vi aldrig kunne indfange det med ruserne.*

Den studerende henviser til det eksempel, som instruktoren introducerede ved foregående øvelsestime (se afsnit 5.2.2).
I_4 bruger samme argumentation som I_1. I_4 er samtidig den studerende, som gennemgik Ruse-lemmaet den foregående øvelsestime. I_4 skriver: *Hvis f var defineret på et åbent interval, var det ikke sikkert, at maksimum lå i intervallet idet det ikke er sikkert vi kan fange den i en Ruse.* I_4 argumenterer ved at illustrere en figur (se figur 5.1). Illustrationen gengiver instruktorens repræsentant fra den foregående time. Den studerende bruger figuren til at



Figur 5.1

illustrere sætningens resultat og beviset i et. På figuren illustreres, hvordan rusen konstrueres ved at halvere intervallerne og samtidig, at rusen ikke fanger $\sup_{x\in(a,b)} f(x)$, som ikke ligger i intervallet. Den studerende gør brug af en alternativ ramme til at validere sin besvarelse. Repræsentanten giver I_4 mulighed for at godtgøre bevisets implicitte brug af antagelserne.

I_2 opstiller to forskellige muligheder for, hvor antagelsen bruges. Der er spørgsmålstegn ved den første mulighed, selvom besvarelsen er korrekt. Det tyder på, at den studerende ikke kan foretage validering:

> *Antagelsen ... bruges, hvor* $m = \frac{a+b}{2}$*, da man ikke kan finde midtpunktet af et ubegrænset interval? Med mindre for* $(-\infty, \infty)$ *er defineret til at være 0?*

En anden mulighed er ifølge I_2: *Der hvor Ruse-lemmaet kommer på banen.* I_2 bruger ligeledes en figur, som er tilsvarende den I_4 har illustreret, til at argumentere for, at antagelsen bruges i beviset for Ruse-lemmaet og derfor også i beviset for ekstremalværdisætningen. Figuren i noterne er meget lille, og derfor illustreres den ikke her. I_2 bruger den alternative ramme i valideringen.
I_6 og I_5 er begge meget kortfattede i deres besvarelser. I_6 skriver, at Ruse-lemmaet kræver, at intervallerne er afsluttede. Der er ingen kommentarer til antagelsen om, at intervallet er begrænset. I_5 skriver: *Ved brug af Ruse-lemmaet bruges afsluttet interval og dermed også begrænset*, som er korrekt, hvis den studerende bruger betegnelsen afsluttet i ikke-topologisk forstand.

De fem studerende identificerer alle, hvor antagelsen om, at f er defineret på et afsluttet, begrænset interval, bruges i beviset. Det er forskelligt, hvordan de studerende argumenterer, og hvilke rammer de godtgører løsningerne i.

Udvikling af fase 2 ved øvelsestimen: Fasen er kollektiv og inddelt i fire episoder (se tabel s. 60). Analysen fokuserer på episode 2a, som omhandler brugen af Ruse-lemmaet i beviset for Sætning 3.20. Episoden omhandler viden under udvikling hos de studerende. En del af miljøet for episoden er løsningen af opgave F1.1, som instruktoren tidligere ved øvelsestimen har skrevet på tavlen. I den forbindelse har instruktoren tilføjet tre grafiske repræsentanter til miljøet. Det er grafiske repræsentanter for funktionerne:

$$f(x) = x \text{ for } x \in (0,1)$$

$$g(x) = \log(x) \text{ for } x \in (0,17)$$

$$h(x) = \cos(x) \text{ for } x \in (0,2\pi)$$

Instruktoren *overgiver miljøet med udgangspunkt i beviset for Sætning 3.20* ved at spørge til et eksempel på, hvor antagelsen bruges. Produktionen foregår i en mikrokontrakt af individuel produktion:

Erik Jamen du bruger jo Ruse-lemmaet, og Ruse-lemmat er kun defineret for lukkede, begrænsede intervaller.

Inst. Lige præcis. [skriver] For at bruge Ruse-lemmaet så skal vi have lukket og begrænset interval. Lige præcis. Så det er et rigtig rigtig godt eksempel på, at nogle af de her antagelser faktisk bliver skjult i beviset. De bliver tit brugt hvor man siger, hov nu bruger jeg lige den her anden sætning, jeg har vist, og for at den var opfyldt, så skal alt det her være opfyldt. Det sker rigtig rigtig tit, at de sådan er gemt væk under det. Og i tirsdags snakkede vi jo om, hvorfor Ruse-lemmaet skal være på afsluttet og begrænset [interval].

Instruktoren tilføjer en illustration til miljøet. Det er en figur, som den I_2 og I_4 har illustreret i deres noter, og som instruktoren også selv illustrerede ved den foregående øvelsestime. Instruktoren instituationaliserer, at det er almideligt, at beviser ofte indeholder noget implicit. Instruktoren bruger en alternativ ramme til at validere, at Ruse-lemmaet bruger, at intervallet er aflsuttet og begrænset. Institutionaliseringen afslutter episoden.
I de øvrige episoder udfolder sig en langstrakt diskussion af, hvor det ellers kunne tænkes, at antageserne bliver brugt. Det mest bemærkelsesværdige er, at instruktoren vælger at bruge relativt meget tid på fasens tre sidste episoder. I diskussionen af episode 2d fremhæver instruktoren, at tegninger kan bruges som en metode til at undgå at lave fejlkonklusioner. Instruktoren institutionaliserer, at andre rammer og eksempler er nyttige, når man skal følge et logisk ræsonnement, og hun har også selv gjort brug af sådanne repræsentanter i sin argumentation. Fasen afsluttes med følgende:

Inst. Det er det, der ligesom er hele idéen. Så der er ikke flere steder. Der er kun det hemmelige sted i Ruse-lemmaet. Så dem skal man være lidt varsom på, og når man selv skal lave opgaver, så er det altså rigtig, rigtig vigtigt, at man får tjekket de her antagelser, for I kan se, at det går galt, hvis ikke tingene er opfyldt. Så kan vi komme til at snyde undervejs. Så jeg håber, når vi kommer igennem nogle af de her opgaver, at I indser, at det skal man altså virkelig huske.

Instruktoren institutionaliserer, at antagelsen om, at intervallet er afsluttet og begrænset, er nødvendig for brugen af Ruse-lemmaet i beviset, og at det at følge et logisk ræsonnement er vanskeligt, men nødvendigt for at sikre sig, at *man ikke snyder*.

Realisering af potentialer i fase 2: De studerende fra fokusgruppen har i deres hjemmeforberedelse identificeret, hvor antagelsen bruges i beviset, og det bekræfter hypotesen fra a priori analysen. Flere bruger alternative rammer til at validere deres besvarelse. Det adidaktiske potentiale har en observeret værdi, da de studerende er i stand til at trække på viden under udvikling. Potentialet inden for fordybelse har også en observeret værdi i noterne fra hjemmeforberedelsen. Ved øvelsestimen er det Erik, som identificerer, at antagelsen bruges i forbindelse med brugen af Ruse-lemmaet. Begge potentialer realiseres også i udviklingen af situationen, selvom det er begrænset, hvad instruktoren afgiver af ansvar i episoden. Instruktoren har ansvaret for valideringen og præsenterer de studerende for et eksempel, som er viden under udvikling for dem. Analysen af hjemmeforberedelsen illustrerer, at de studerende er i stand til at trække på denne viden, og derfor kunne instruktoren have afgivet mere ansvar i episoden. Alt andet lige er flere studerende aktive i diskussionen, og de handler adidaktisk i miljøet.
Aktiviteten, som opgaven har igangsat hos de studerende, indgår i kategorien **A3**, og forskningspotentialet har derfor en observeret værdi. De studerende udfører også akviteter fra **A6**. En alternativ ramme bruges som redskab til validering i fokusgruppens hjemmeforberedelse. Kun få studerende deltager i aktiviteter fra kategorien **A8** ved øvelsestimen. Instruktoren sætter endda tid af til, at de studerende kan tale sammen om opgaven, men, som nævnt, er det meget få, der udnytter potentialet. I fokusgruppens noter er der ingen indikation af, at potentialet realiseres.

5.2.5 Realisering af potentialer

Det er interessant, at forskellige kategorier af forskningsligende aktiviteter realiseres i den didaktiske situation. Kategorien **A3** har en teoretisk værdi og realiseres i situationen. Kategorien **A6** har ikke tilsvarende teoretisk værdi. Det objektive miljø består som udgangspunkt af selve beviset, som føres i en formel ramme. Det er interessant, at flere i fokusgruppen på eget initiativ inddrager repræsentanter fra andre rammer i deres argumentation. Det skyldes, at instruktoren har brugt samme illustration ved den foregående øvelsestime. De studerende trækker på viden under udvikling i deres arbejde med miljøet og bruger den alternative ramme til at validere deres besvarelse.
De studerende får indsigt i det konkrete bevis' brug af antagelser fra sætningen. Kun instruktoren kommenterer på forholdet mellem sætninger og beviser mere generelt. Der bliver ikke lagt op til, at de studerende skal indgå i denne diskussion. Det er første gang, at de studerende stifter bekendskab med opgaver, som igangsætter aktiviteter fra **A3**. Det formodes, at des me-

re erfaring de studerende får med opgaver som igangsætter aktiviteter fra denne kategori, des mere opmærksomhed skabes der om forholdet mellem antagelser og bevis, samt at beviserne indeholder implicitte dele.

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
1a	Individuel undersøgelse af bevis. Adidaktisk handlings- og formuleringssituation	De studerende		
2a	Brugen af Ruselemmaet i beviset	Inst. og en studerende	Individuel produktion	Forskning (**A3**, **A6**), adidaktisk, fordybelse
2b	Kontinuitet af f i ξ.	Inst. og I_3	Tilslutning	Forskning (**A3**)
2c	Hvis $x \in (a, b)$ et åbent interval, så er $(f(a), f(b))$ også et åbent interval	Inst. og I_4	Tilslutning	Forskning (**A6**)
2d	Antagelserne bruges for at sikre, at M ligger i mængden	Inst. og I_1	Tilslutning	

5.3 Afgørelse af differentiabilitet

En del af det teoretiske indhold for An0 er generaliseringen af differentiabilitetsbegrebet til funktioner $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (Eilers et al., 2015, afsnit 6.2).

I dette afsnit præsenteres en a priori analyse af opgave F6.1, opfattet som didaktisk situation, og senere en a posteriori analyse af udviklingen af situationen. Det stofdidaktiske relaterer sig til eksamensspørgsmål 6 om differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$, hvor Sætning 6.11 er hovedsætningen (se s. 62). Analysen dokumenterer, at instruktoren afgiver ansvar ved konkrete spørgsmål omhandlende viden under udvikling, og det ændrer sig over tid hvor meget ansvar instruktoren afgiver. Analysen dokumenterer, at instruktoren institutionaliserer i vekslen og er fokuseret på den didaktiske tid. Flere potentialer observeres i udviklingen af situationen.

Eilers et al. (2015) angiver forskellige resultater til at afgøre, om en funktion af flere variable er differentiabel:

Påvisning af differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$
Som afsæt til at definere diffenrentiabilitet for funktioner af flere variable i et punkt fremhæves, at inspirationen er den *indirekte karakterisering i tilfældet med én variabel* (Eilers et al., 2015, s. 175). Definitionen af differentiabilitet lyder som følger:

Definition 6.5. *Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, defineret på en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, siges at være* ***differentiabel i et punkt a*** $\in \Omega$*, hvis der findes en vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$, således at*

$$\Delta f = \mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{x} + \varepsilon(\Delta \mathbf{x})\|\Delta \mathbf{x}\|$$

hvor ε er en epsilon-funktion i grænseovergange $\Delta \mathbf{x} \to 0$.

I simple tilfælde (eksempelvis konstante funktioner) kan definitionen anvendes direkte til at afgøre, om funktionen er differentiabel. Brugen af definitionen kræver en kandidat til vektoren $\mathbf{c}$. Det bliver senere i teksten påpeget, at vektoren $\mathbf{c}$ er entydig givet ved $\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{a})$ (Eilers et al., 2015, s. 175). Derfor er $\mathbf{c}$ lig med nulvektoren, hvis f er en konstant funktion. Specialets afsnit 5.3.1 indeholder et eksempel på brugen af Definition 6.5 til at afgøre differentiabilitet for en funktion af to variable.

Eksamensspørgsmålet om differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$ er fokuseret på nedenstående Sætning 6.11 (Eilers et al., 2015, s. 178). Der er eksempelvis lavet en pencast over beviset for sætningen.

Sætning 6.11. *Lad $f : \Omega \to \mathbb{R}$, hvor $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ er en åben mængde. Hvis f har partielle afledte efter hver af de k variable i hvert punkt af Ω* ***og*** *hvis de partielle afledede $D_1 f, \dots, D_k f$ alle er kontinuerte i punktet $\mathbf{a} \in \Omega$, så er f differentiabel i $\mathbf{a}$.*

Betingelsen i Sætning 6.11 er ikke en nødvendig betingelse. I analysen af F6.1 gives et eksempel på en funktion, som er differentiabel, men hvis partielle afledede er diskontinuerte (se afsnit 5.3). Hvis en undersøgelse viser, at en funktion har partielle afledte, som ikke er kontinuerte, bidrager undersøgelsen først og fremmest til den indsigt, at Sætning 6.11 ikke er brugbar til at drage konklusion om differentiabilitet af funktionen. Diskontinuerte partielle afledte giver givetvis bestyrket mistanke om, at funktionen ikke er differentiabel, men betingelsen er tilstrækkelig og som nævnt ikke nødvendig.

Afvisning af differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$

I Eilers et al. (2015, s. 176) angives to nødvendige betingelser for differentiabilitet for funktioner af flere variable:

Sætning 6.6. *Hvis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel i et punkt $\mathbf{a} \in \Omega$, så er f også kontinuert i $\mathbf{a}$.*

Sætning 6.7. *Hvis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel i et punkt $\mathbf{a} \in \Omega$ med afledt vektor $\mathbf{c}$, så har f retningsafledede i alle retninger i $\mathbf{a}$. Hvis $\mathbf{v}$ er en enhedsvektor, så er*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}.$$

I begge tilfælde er $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ en åben mængde. I praksis bruges de kontraponerede udsagn til at afvise differentiabilitet. Eksempelvis: *Hvis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ikke er kontinuert i $\mathbf{a} \in \Omega$, så er f ikke differentiabel i $\mathbf{a}$.* Betingelserne i Sætning 6.6 og Sætning 6.7 er ikke tilstrækkelige. Eilers et al. (2015) indeholder ikke et eksempel på, at det forholder sig sådan for betingelsen i Sætning 6.6. I tilfældet $k = 1$ er sætningens resultat gammel viden for de studerende. Det samme gør sig gældende for Definition 6.5. De studerende er antageligt også bekendte med eksempler på funktioner af en variabel, som er kontinuerte, men ikke er differentiable såsom $x \mapsto |x|$ for $x \in \mathbb{R}$. Behandlingen af Sætning 6.7 er anderledes. Eksempel 6.4 og Eksempel 6.10 (Eilers et al., 2015, s. 174 og 178) omhandler $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{hvis } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{hvis } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Funktionen har retningsafledede i alle retninger i $(0,0)$, men for hver retning $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ gælder

$$\nabla f(0,0) \cdot v = D_x f(0,0) \cos\theta + D_y f(0,0) \sin\theta = 0$$

Da der for $\sin\theta \neq 0$ gælder, at den retningsafledte i v's retning er givet ved $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ er betingelsen i Sætning 6.7 nødvendig, men ikke tilstrækkelig. Den retningsafledte bestemmes ved følgende:

$$\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} \xrightarrow{t\to 0} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

Sætning 6.7 er ikke en generalisering af et velkendt specialtilfælde og sætningen må betragtes som ny viden for de studerende. Det samme gør sig gældende for Sætning 6.11.
Resultateterne udgør forbindelse mellem gammel og ny viden og giver tilstrækkelige henholdsvis nødvendige betingelser for differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$. Resultaterne til på- og afvisning af differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$ er en måde at fremstille generelle egenskaber for differentiable funktioner af flere variable og deraf differentiabilitetsbegrebet i $\mathbb{R}^k$. Eilers et al. (2015) ekspliciterer ikke, hvordan resultaterne generelt kan bruges til at afgøre differentiabilitet. Udviklingen af situationen omkring F6.1 behandles i det følgende.

5.3.1 Fire eksempler

Opgave F6.1 (se bilag C) lyder som følger:

> Afgør om følgende funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiable:
>
> 1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
> 2. $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$
> 3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
> 4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
>
> Brug dine resultater til at kommentere på antagelserne i Sætning 6.11 og dennes resultat.
>
> Lav din egen opskrift til at afgøre hvorvidt en given funktion af to variable er differentiabel.

I analysen af situationen vil de fire funktioner nummereres: f_1, f_2, f_3 og f_4.

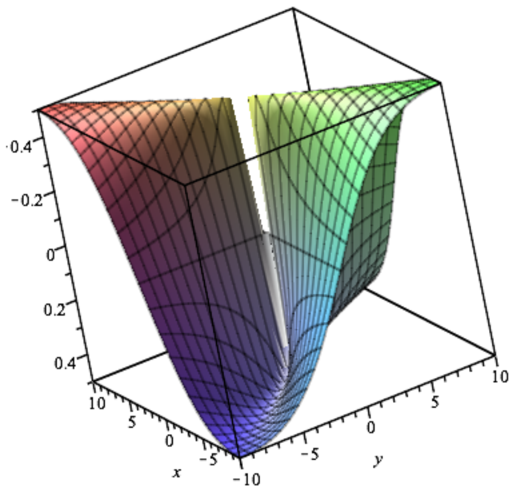
Det erklærede læringsmål for F6.1 er praktiske teknikker til at afgøre differentiabilitet for givne funktioner af flere variable og viden om nødvendige og tilstrækkelige betingelser for differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$.

Det objektive miljø består af opgaveformuleringen og Eilers et al. (2015, afsnit 6.2). Formuleringen indeholder fire konkrete funktionsudtryk. Som det fremgår af læringsmålet, er det for så vidt uinteressant om de fire pågældende funktioner er differentiable eller ej. Det er betingelserne for det, som er i fokus.

Funktionen

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er ikke kontinuert i $(0,0)$. Den grafiske repræsentant kan give en indikation af, at en problematisk grænseovergang mod $(0,0)$ er langs linjen $x = y$ (se figur 5.2). Stilbilledet af den grafiske repræsentant er lavet i Maple.



Figur 5.2

Det er muligt at manipulere med den grafiske ramme. Det kan af gode grunde ikke illustreres her. Det betyder ikke, at muligheden for at manipulere med den konkrete repræsentant ikke har betydning. De studerende er bekendte med Maple og illustration af funktioner af flere variable. Den grafiske ramme beriger miljøet og giver intuition om problematiske forhold.

Sådanne forhold undersøges også algebraisk:

$$f_1(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}$$

Da $f_1(x,x) \to \frac{1}{2} \neq 0$ er f_1 ikke kontinuert. Ved det kontraponerede udsagn af Sætning 6.6 er f_1 ikke differentiabel. Bemærk, at for $(x,y) \neq (0,0)$ er

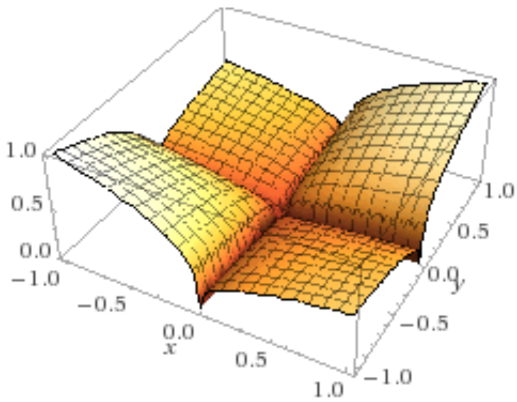
$$D_x f_1(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

Deraf ses, at $D_x f_1(0,y) = \frac{1}{y}$, som ikke er kontinuert for $y \to 0$. Sætning 6.11 kan derfor ikke bruges til at afgøre differentiabilitet for f_1.

Opgavens andet eksempel, funktionen

$$f_2(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$$

er kontinuert, da den er sammensat af kontinuerte funktioner. Grafen for f_2 er illustreret i figur 5.3. Der findes ikke retningsafledede i alle retninger for $\mathbf{a} = (0,0)$.



Figur 5.3

Betragt for $x = y$

$$x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$$

som ikke har retningsafledede for $x \to 0$. Ved det kontraponerede udsagn af Sætning 6.7 er f_2 ikke differentiabel.

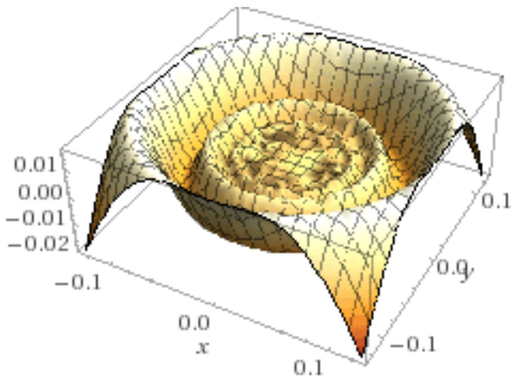
Funktionen

$$f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er opgavens tredje eksempel. Grafen for funktionen er illustreret i figur 5.4. f_3 er differentiabel for $(x,y) \neq (0,0)$. Det ses, at f_3 også er kontinuert for $(x,y) \to (0,0)$, da

$$-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq x^2+y^2$$

og $x^2+y^2 \to 0$ for $(x,y) \to (0,0)$ uanset hvilken retning grænseovergangen foretages.



Figur 5.4

For $(x,y) \neq (0,0)$ gælder:

$$D_x f_3(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

og

$$D_y f_3(x,y) = 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

For $x \neq 0$ gælder således, at

$$D_x f_3(x,0) = 2x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

Første led går mod nul nær $(0,0)$, mens andet led oscillerer vildere og vildere mellem -1 og 1 nær $(0,0)$. Da

$$\frac{f_3(x,0) - f_3(0,0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)}{x} = x \cdot \sin(|x|) \to 0 \text{ for } x \to 0$$

er den partielle afledte ikke kontinuert. Tilsvarende udregninger og konklusion kan foretages for $D_y f_3(0,y)$. Sætning 6.11 er derfor ikke brugbar til at afgøre differentiabilitet for f_3.

Den grafiske repræsentant kan give en formodning om, at funktionen er differentiabel. Fladen er glat og uden problematiske spidser eller knæk (se figur 5.4). Differenskvotienterne med hensyn til både x og y er beregnet, og det giver en kandidat til gradienten $\mathbf{c} = \nabla f(0,0) = (0,0)$. Definition 6.5 bruges til at afgøre, om f_3 er differentiabel. Da

$$\frac{|\Delta f - \mathbf{c} \cdot \Delta\mathbf{x}|}{|\Delta\mathbf{x}|} = \frac{|\Delta f|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} \leq \frac{|x^2 + y^2|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = \|\Delta x\| \to 0 \text{ for } \Delta x \to 0$$

er f_3 differentiabel på hele $\mathbb{R}^2$.

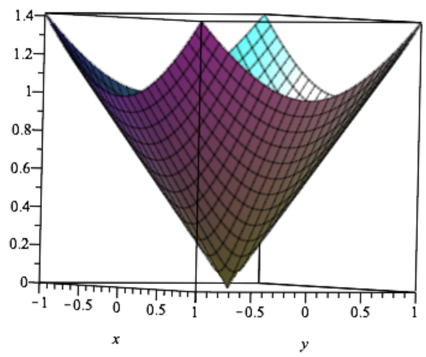
Det fjerde eksempel er funktionen

$$f_4(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Grafen for f_4 er illustreret i figur 5.5.

Funktionen har ikke retningsafledede for eksempelvis $x = y$ i retningen mod 0. Ved det kontraponerede udsagn af Sætning 6.7 er f_4 ikke differentiabel. Den grafiske ramme er en mulig forbindelse mellem gammel og ny viden. De studerende har antageligt set funktion $y \mapsto |y|$ afbilledet grafisk og ved, at funktionen ikke er differentiabel for $y = 0$. På repræsentanten ses det ved, at grafen ikke er glat i punktet. Generaliseringen fra én til flere variable er ikke kun mulig i en formel ramme, men også i den grafiske.

Antagelserne i Sætning 6.11 er, at funktionen skal være defineret på en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, at de partielle afledede eksisterer og er kontinuerte. Betingelsen er ikke nødvendig. Det er f_3 et eksempel på. Det følger ikke, at hvis de partielle afledede er diskontinuerte, så er funktionen ikke differentiable.



Figur 5.5

Det begrænser muligheden for at anvende resultatet til at afgøre differentiabilitet for konkrete funktioner. Faktisk kan Sætning 6.11 ikke bruges til at afgøre differentiabilitet for nogle af de fire eksempler i F6.1.
En opskrift til at afgøre differentiabilitet for funktioner af to variable kan med udgangspunkt i Eilers et al. (2015) se ud som følger:

1. Lav en grafisk illustration af funktionen. Er grafen glat? Hvis ja, er der begrundet mistanke om, at funktionen er differentiabel. Ellers: Kig efter spring, spidser eller andre problematiske forhold, som kan give intuition om lokale problematiske forhold for funktionen.

2. Undersøg, om funktionen er kontinuert i alle punkter i sin definitionsmængde. Hvis nej: Konkludér, at funktionen ikke er differentiabel ved brug af kontraponering af Sætning 6.6. Hvis ja: Gå til punkt 3.

3. Beregn de partielle afledede og undersøg, om disse er kontinuerte. Hvis ja: Benyt Sætning 6.11 til at konkludere, at funktionen er differentiabel. Hvis nej: Gå til punkt 4.

4. Brug din grafiske fremstilling til at identificere retninger, hvor de retningsafledte ikke eksisterer og giv efterfølgende et formelt argument for påstanden. Hvis problematiske retninger kan findes og eftervises algebraisk eller formelt: Brug kontraponeringen af Sætning 6.7 til at konkludere, at funktionen ikke er differentiabel. Hvis ikke kan findes: Gå til punkt 5.

5. Brug dine udregninger fra 3. til at finde en kandidat for $\mathbf{c} = \nabla f$ og brug Definition 6.5 til at afgøre, om funktionen er differentiabel.

5.3.2 De fire potentialer

Den tilsigtede viden for F6.1 er som nævnt praktiske teknikker og viden om nødvendige og tilstrækkelige betingelser for differentiabilitet. Opgavens første delopgave stiller fire eksempler, som muliggør, at de studerende handler i miljøet. Opgavens anden og tredje delopgave besvares med teoretiske formuleringer. Af bilag D fremgår en identifikation af potentialer for opgaven. Det uddybes i det følgende.

Adidaktisk potentiale: Beregning af partielle afledede og illustration af grafer er gammel viden for de studerende. De studerende er tidligere i kurset, eksempelvis i forbindelse med F1.2 (se afsnit 5.2.4), blevet gjort opmærksomme på, at alternative rammer er gavnlige for at skabe intuition om et objekt. De studerendes gamle viden kan hjælpe til at formulere hypoteser om de fire eksempler. Løsningen af første delopgave kræver formel argumentation, hvor de studerende trækker på viden under udvikling.
Opgaveformuleringen former en progression i opgaven. De studerendes undersøgelser af de fire eksempler kan hjælpe til udformningen af en generel opstilling af strategier tilgængelige fra Eilers et al. (2015). Opgaveformuleringen angiver et objektivt miljø, og progressionen et adidaktisk potentiale for anden og tredje delopgave. Besvarelsen af anden delopgave synes at kræve, at de studerende har forsøgt sig med Sætning 6.11 til at afgøre differentiabilitet for de fire funktioner. Det er en plausibel strategi for mange studerende, da kurset som nævnt fokuserer på denne sætning i temaet om differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$. Strategier er tilgængelige og de studerende vælger selv hvilke de vil bruge.

Potentiale inden for stoflig sammenhæng: Teknikker til at beregne partielle afledede for funktioner af to variable eller illustrere funktioner i en grafisk ramme er velkendte for de studerende, da teknikkerne er brugt ved tidligere kurser på universitetet. Da de studerende i deres løsning af første delopgave kan trække på gammel viden, har delopgaven potentiale inden for stoflig sammenhæng.

Fordybelsespotentiale: De studerende opnår viden om antagelserne i Sætning 6.11 og de øvrige resultater som tilstrækkelige henholdsvis nødvendige for differentiabilitet. Opgaven har potentiale inden for fordybelse, da de studerende ved deres undersøgelser eksperimenterer med forskellige metoder til at afgøre differentiabilitet, og derved får de indsigt i det generaliserede differentiabilitetsbegreb som det defineres i Definition 6.5. Beviset for Sætning 6.11 er hovedsigtet for eksamensspørgsmål 6 ved den mundtlige eksamen og opgaven omhandler beviser marginalt. Definitionen af differentiabilitet benyttes i beviset og opgaven understøtter det teoretiske indhold i definitionen. Potentialet har en teoretisk værdi i alle tre delopgaver. Potentialet er stærkest i anden og tredje delopgave.

Forskningspotentiale: Opgaven igangsætter aktiviteter, som indgår i kategorierne **A1**, **A6**, **A7** og **A9**. De studerende undersøger konkrete eksempler, formulerer hypoteser om differentiabilitet for funktionerne, bruger undersøgelserne til at undersøge egenskaber ved differentiabilitetsbegrebet og forbinder deres undersøgelser i en opskrift. Første delopgave igangsætter aktiviteter fra **A6** og **A7**, anden delopgave igangsætter aktiviteter fra **A1** og **A7** og tredje delopgave igangsætter aktiviteter fra **A9**. F6.1 har forskningspotentiale, da der er usikkerhed omkring differentiabiliteten for de fire eksempler og opgaveformuleringen ikke angiver en løsningsstrategi.

5.3.3 Mulige forhindringer

En forhindring er, at differentiabilitet sidestilles med, at funktionen kan differentieres. Det er en epistemologisk forhindring, at differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$ sidestilles med at partielle afledede kan beregnes. Forhindringen kan videreudvikles til, at differentiabilitet betyder eksistens og kontinuitet af partielle afledede, da de studerende kan have tendens til at fokusere på Sætning 6.11. A priori analysen klargjorde, at det ikke er muligt at bruge Sætning 6.11 til at afgøre, om de fire eksempler er differentiable eller ej. Det uhensigstmæssige fokus kan forhindre de studerendes undersøgelser af andre metoder.
De studerende kan trække på gammel viden i deres undersøgelser. Det er en forhindring, at kurset ikke fokuserer på grafiske repræsentanter som heuristisk værktøj til sådanne undersøgelser. Det forholder sig til den første dimension af den didaktiske kontrakt.

Med udgangspunkt i ovenstående a priori analyse, opstilles følgende hypoteser om realiseringen af de fire potentialer på baggrund af de studerendes gamle viden:

> **De studerende** foretager konkrete beregninger af partielle afledede ud fra en funktionsforskrift på lukket form.
>
> **De studerende** undersøger kontinuitet af funktioner og/eller partielle afledede.

De studerende forholder sig konstruktivt til resultaterne tilgængelige fra Eilers et al. (2015) og opnår viden om nødvendige henholdsvis tilstrækkelige betingelser for differentiabilitet for funktioner af flere variable.

De studerende formulerer en opskrift til at afgøre differentiabilitet for funktioner af flere variable.

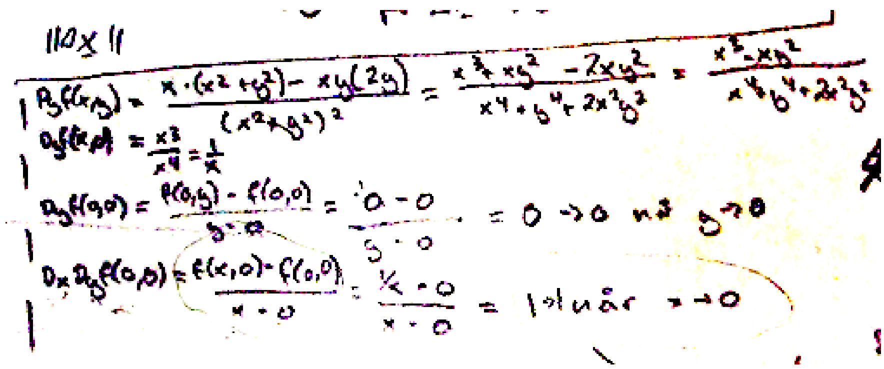
5.3.4 Udviklingen af situationen

Diskussionen af opgaven udfolder sig i seks faser, som det fremgår af følgende tabel:

Fase	Titel	Episoder	Varighed
1	Differentiabilitet af f_1	1a-1e	12,5 min.
2	Differentiabilitet af f_2	2a-2c	7 min.
3	Differentiabilitet af f_3	3a-3e	19 min.
4	Opsamling	4a	3 min.
5	Differentiabilitet af f_4	5a-5b	2 min.
6	Opskrift	6a	6,5 min.

I a posteriori analysen fokuseres på *fase 1* og *fase 3*, som begge spiller en rolle for opsamlingerne, der finder sted i *fase 4* og i *fase 6*. *Fase 2* og *fase 5* er ikke uvæsentlige for situationen. Ved øvelsestimen blev der brugt væsentlig længere tid på *fase 1* og *fase 3* og derfor fokuserer analysen på disse faser. *Fase 6* behandles også i analysen.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 1: Ved den pågældende øvelsestime afleverede fem ud af syv studerende fra fokusgruppen noter (I_1, I_2, I_4, I_5 og I_6). To studerende skriver, at f_1 er differentiabel, to skriver, at den ikke er det, og en skriver ingen konklusion.
I_2 beregner de partielle afledede, $D_x f(x,y)$ og $D_y f(x,y)$. I_2 undersøger efterfølgende $D_y f(x,0)$ og $D_y f(0,0)$ og tilsvarende $D_x f(0,y)$ og $D_x f(0,0)$ (se figur 5.6). Den studerende laver de nødvendige udregninger til at vise, at de partielle afledede ikke er kontinuerte og derved, at Sætning 6.11 ikke



Figur 5.6

kan bruges (se afsnit 5.3.1). I_2 laver ikke denne konklusion. I stedet undersøger den studerende $D_xD_yf(0,0)$ og $D_yD_xf(0,0)$. I_2 skriver: *men siden* $D_xD_y \vee D_yD_x \not\to 0$ *når* $(x,y) \to (0,0)$ *ikke kont. i* $(0,0)$. I_2 forsøger at tilpasse sin viden under udvikling til det nye miljø ved at bruge dobbelt partielle afledede, som er et tema der blev behandlet i forbindelse med løsning af opgave F5.4 (foregående øvelsestime). F5.4 behandler uafhængighed af differentiationsrækkefølge og har ikke sammenhæng til F6.1. Den studerende beregner partielle afledede, men forhindres af et irrelevant fokus på dobbelt partielle afledede. Noterne indikerer, at den studerende forbinder dette resultat med Sætning 6.11.

I_4 udregner ligeledes de partielle afledede, $D_xf(x,y)$ og $D_yf(x,y)$. I_4 skriver som en note reglen for differentiation af en brøk mellem to funktioner og skriver videre:

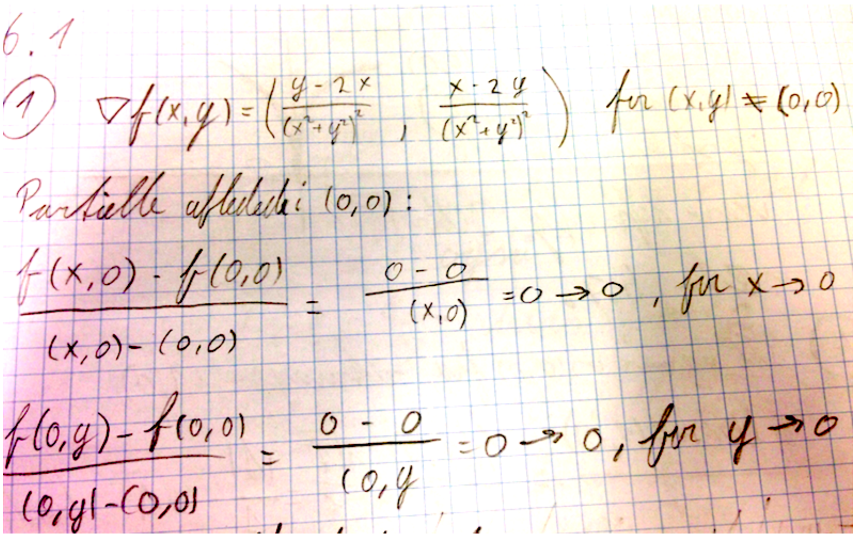
$$\begin{aligned} D_xf(x,y) &= \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)' = \frac{(x^2+y^2)\cdot y - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{x^4+y^4+2xy} = \frac{y^3+(1-2y)x^2}{(x^2+y^2)^2} \to 0 \end{aligned}$$

Tilsvarende udregninger er lavet for $D_yf(x,y)$, som I_4 også påstår går mod 0. Der er ingen kommentarer til, hvorfor det forholder sig sådan. Der er nogle regnefejl i udregningerne. Kvadratet i nævneren $(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$ og i tælleren bør x^2 sættes uden for parentesen $(y-2y) = -y$. For $x = 0$ giver det netop det problematiske forhold, som a priori analysen fremhævede (se afsnit 5.3.1). Konklusionen, som I_4 drager er: *Altså er de diff.* Der er ingen kommentarer eller henvisninger til, hvorfor den studerende finder det muligt at drage konklusionen. Den studerende fokuserer uhensigstmæssigt på Sætning 6.11 (se afsnit 5.3.3) og forhindres i at løse opgaven.

I_6 beregner også de partielle afledede med hensyn til både x og y og udregner $D_1 f(x, 0) = \frac{1}{x}$ og $D_2 f(0, y) = \frac{1}{y}$. Her stopper hjemmeforberedelsen. Der er ingen kommentarer til udregningerne eller andre noter. Den studerende kommer ikke med en konklusion, som tilsvarer a priori analysens (se afsnit 5.3.1). Den bratte afslutning på forberedelsen indikerer, at den studerende enten har oplevet det vanskeligt at konkludere på udregningerne eller at hun finder det unødvendigt at skrive mere detaljeret i egne noter.
De tre fokusstuderende, som er nævnt ovenfor, forsøger at bruge Sætning 6.11 i deres undersøgelse. De beregner alle partielle afledede og forbinder det med differentiabilitet af funktionen. De mødes af både didaktisk og epistemologisk forhindring, som a priori analysen fremhævede.
I_5 har valgt en anden strategi end I_2, I_4 og I_6. I stedet for at udregne de partielle afledede, er strategien, med den studerendes egne ord, at *undersøge grænseovergangen mod* $(0, 0)$ *langs linien* $x = y$. I_5 skriver:

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ for } (x, y) \to (0, 0)$$

Herefter konkluderer I_5, at dette er forskelligt fra $f(0, 0)$, så f er ikke kontinuert og derfor ikke differentiabel. Der er ingen henvisning til Sætning 6.6.
I_1 gør sig de samme overvejelser og har samme konklusion som I_5. Den studerende skriver, som det ses i figur 5.7.



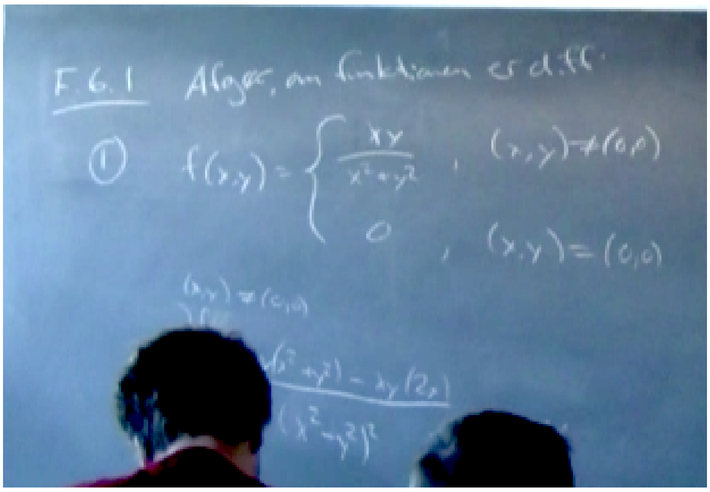
Figur 5.7

Fejlen i udregningen af gradienten har ikke betydning for den studerendes konklusion. Der er gjort en del udviskinger på papiret, og det tyder på, at denne studerende har prøvet forskellige strategier, som eksempelvis at beregne partielle afledede i $(0, 0)$, og den første konklusion er redigeret efterfølgende. Der er ingen forklaring af, hvad der får den studerende til at ændre fremstillingen. Det er heller ikke tydeligt, hvilken konklusion den studerende går væk fra. I_1 konkluderer, at funktionen ikke er kontinuert, og dette indses ved at *gå mod* $(0, 0)$ *gennem linjen* $y = x$. I_1 henviser til Sætning 6.6 for at konkludere, at funktionen ikke er differentiabel. Det indikerer, at I_1 og I_5 ikke har samarbejdet om udarbejdelsen af opgaveløsningen. Det bemærkes, at I_1 og I_5 ikke var til stede ved øvelsestimen. Denne dag var flere instruktorer fraværende, og de studerende måtte finde plads på de øvrige øvelseshold. Det vanskeliggjorde, at alle studerende kunne være i lokalet.

Udvikling af fase 1 ved øvelsestimen: Fasen er kollektiv og inddelt i fem episoder (se tabel på s. 88). Episode 1a omhandler viden under udvikling hos de studerende. Instruktoren griber ikke ind i produktionen af svar, men har ansvaret for valideringen af dem. Med udgangspunkt i de studerendes gamle viden *etablerer instruktoren et miljø for situationen med udgangspunkt i partielle afledede til differentiabilitetsafgørelse* og episoden baseres på mikrokontrakt af kollektiv produktion. Instruktoren etablerer med udgangspunkt i det berigede miljø en ny episode (1b), som omhandler kontinuiteten af de partielle afledede. Diskussionen styres af instruktoren, og to studerende deltager (hvoraf I_2 er den ene). Instruktoren beholder hele tiden ansvaret for valideringen af de studerendes bidrag til diskussionen. Der er tale om en mikrokontrakt af individuel produktion. Afgivelsen af ansvar skærpes i episoden. Instruktoren har forkus på den didaktiske tid og ønsker fremdrift. Hun veksler mellem ansvarsafgivelse ved spørgsmål omhandlende viden under udvikling og institutionaliering af teoretiske forhold for at skabe fremdrift. Følgende uddrag er et eksempel på *institutionalisering ved vekslen.* Figur 5.8 illustrerer tavlen fra episoden ved øvelsestimen. Tavlen er en del af miljøet for episoden.

I_2 Jamen jeg vil bare sige, er det så ikke dér, vi prøver at gøre det for den ene koordinat og så den anden? Fordi ellers ... Vi kan vel ikke bare sige det nu?

Inst. Nej, jeg kan overhovedet ikke sige det nu. Så skal vi nemlig præcis igennem det, vi også gjorde i tirsdags [ikke yderligere uddybning af, hvad der henvises til] og kigge



Figur 5.8: Tavle tilhørende uddrag for episode 1a-1b.
Nederst: $(x, y) \neq (0, 0)$: $D_x f(x, y) = \frac{x(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

på [skriver] $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$. Er der nogle, der har prøvet at gøre det? [få nikker] Går det godt? Bliver vi glade?

I_2 Nej. Øh.

Inst. Måske [griner] Har nogle et bud på, om det går godt?

Tim Umiddelbart, hvis du koordinatvis gør det, så går det godt.

Inst. Så det er det, der er hele problemet. Det går nemlig ikke godt.

Tim Nej, men hvis du bare først lader y gøre det, så får du nul i tælleren og noget, som er forskelligt fra nul i nævneren. Og så er det jo bare nul.

Inst. Hvorfor går det ikke godt?

Tim Fordi så lader du x gå mod ... narh det ...

Inst. Så, det er det, der er hele humlen. De her er så sindssygt svære at finde ud af, om de er differentiable. I det øjeblik vi går ind og kigger på ... Så det vil skulle kigge på var [skriver] netop, som I sagde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$, netop det her udtryk, så kræver det, at den er differentiabel i det her [peger på punktet $(x, 0)$], og det bør vi faktisk argumentere for, at den er, før vi begynder at differentiere.

Instruktorens fokus på fremdrift betyder, at hun ikke vælger at præcisere fejl, som kan tage længere tid. I_2's hjemmeforberedelse behandler, som nævnt, et forhold omkring uafhængighed af differentiationsrækkefølgen, og det er også det, som den studerende henviser til i uddragets første kommentar. Instruktoren griber ikke (bevidst eller ubevidst) muligheden for at korrigere den studerendes fejl. Den studerende Tim har ret i, at $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$. Instruktoren ønsker at klargøre, at Sætning 6.11 ikke kan anvendes, men henviser ikke til det problematiske ved $D_x f(0, y)$, som det fremgik af a priori analysen (se afsnit 5.3.1), selvom instruktoren har skrevet $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ på tavlen. Valideringen af, at Sætning 6.11 ikke kan bruges, baseres på et tilfælde, som faktisk ikke er det problematiske forhold, som instruktoren ønsker at fremhæve. Instruktoren henviser ikke til konkrete beregninger i sin validering. Tim er den eneste, der faktisk formulerer og forsøger at validere en besvarelse. Det er uvist om andre studerende får indsigt i, hvorfor instruktoren institutionaliserer. I stedet opstår en Topaze-effekt, og instruktoren etablerer en ny episode (1c). Det fremgår af følgende uddrag, der er en fortsættelse af ovenstående uddrag:

Inst. Lad os gå tilbage og kigge på vores funktion. [peger på funktionen] Hvad skal der til for, at denne her oppe er differentiabel? Allernemmeste kriterie for, at noget skal være differentiabel?

Hans C^1-kriteriet eller hvad?

Inst. Ja næsten, eller du har fat i den rigtige del. Kan noget være differentiabelt, hvis ikke det er kontinuert?

Bo Nej.

Miljøet, som instruktoren tidligere overgav, reduceres herved drastisk, og instruktoren overtager ansvaret for det konkrete spørgsmål. Instruktoren afgiver i det modificerede miljø ansvaret for at påvise, at f_1 ikke er kontinuert til de studerende. Dog stadig med instruktoransvar for valideringen af de studerendes bidrag. Ansvaret for svaret til episodens (1c) spørgsmål har instruktoren allerede taget. Der er tale om en mikrokontrakt af kollektiv produktion. Diskussionen af strategien styres konsekvent af instruktoren, som har det tilsigtede læringsmål for øje. Det fremgår af følgende uddrag:

Inst. Hvordan kan vi lade x og y gå mod 0 [for udtrykket $\frac{xy}{x^2+y^2}$]? Er det nok at kigge på, hvad der sker, hvis vi går den vej [markérer førsteaksen], og hvis vi går den vej [markérer anden aksen]?

I_6 Altså principielt skal vi vel kigge på, hvordan den opfører sig fra alle retninger, men vi kan jo starte med at sætte $x = 0$ og se, hvad der sker, når y går mod 0 og sætte $y = 0$ og så se, hvad der sker, når x går mod 0, og hvis det går galt [bliver afbrudt]

Inst. Så er man godt kørende. Så lad os prøve at gøre det. Det, der bliver sagt, er: Lad os først prøve det her [peger igen på akserne], og hvis en af dem går galt, så er vi glade. Hvis nu ikke en af dem går galt, så må vi se hvad der sker. Vi kan jo blive ved. Vi kan jo gå mod 0 på uendelig mange måder [tegner en spiral, som nærmer så origo]. Så hvordan får vi en idé om, om vi skal lede efter, at den er det [kontinuert], eller at den ikke er det? [Få sekunders pause]. Vi kan jo blive ved. I kan sige en retning hver, og så kan vi se, om den går mod 0. Leder vi efter, at den er kontinuert, eller leder vi efter, at den ikke er det?

Hans Vi leder efter, at den ikke er.

Inst. Det har jeg kraftigt antydet, men vi kunne blive ved med at lede. Så hvordan får vi os et overblik over, om vi tror, at den er kontinuert eller ikke? Den nemmeste måde at få et overblik?

I_2 Ved at se, hvad der sker i $(0, 0)$ ik?

Inst. Jo, så det er lidt et trickspørgsmål.

Bo Hvis den er sammensat af kontinuerte funktioner?

Inst. Det er i hvert fald en oplagt måde at se, om vi bliver glade. Er denne her det? [tegner pil mod nævneren, $x^2 + y^2$]

I_2 Nårh...

Inst. Vi er ikke så glade, hvis vi nævneren kan være 0, vel?

Tim Det er faktisk ikke så svært at se, at hvis du lader en af dem gå mod 0, så går det galt. Hvis, øh. Nej, det er vel ikke så oplagt, da den er 0 længe inden.

Inst. Så det er den helt store humle. Hvordan gætter jeg på, hvor det går galt?

Hans Hvis du sætter $x = y$, så kommer du i problemer.

Inst. Det skal ikke være nogen hemmelighed, at det er det jeg har valgt, men hvordan gennemskuer jeg, at det er det jeg har valgt?

Instruktoren vil gerne vise de studerende, at en grafisk repræsentant kan give en intuition om kontinuiteten og eventuelle problematiske forhold. Interaktionen forholder sig til 1. dimension af den didaktiske kontrakt og de studerende har svært ved at følge instruktorens ønske om, at de skal bevæge sig over i en anden ramme. Instruktoren siger, at man kan bruge Maple eller internettet til at *kigge på* sin funktion og *få en idé om, hvad vi leder efter*. Med instruktorens andensidste kommentar i uddraget etableres en ny episode (1d), som omhandler metoder til at afgøre kontinuitet. Selvom flere studerende deltager i diskussionen i episoden, så giver ingen studerende det svar, som instruktoren leder efter. Det er interessant, at instruktoren kun opfordrer til at tegne en graf. Hverken instruktoren eller de studerende tegner grafer ved den pågældende øvelsestime. Instruktoren fremhæver den grafiske ramme som et heuristisk værktøj, men hverken hun eller de studerende bruger værktøjet i den konkrete undersøgelse. Instruktoren modificerer derfor ikke det didaktiske miljø. Institutionaliseringen af metoder ved vekslen mellem spørgsmål og validering af svar sker i en mikrokontrakt af tilslutning. Bemærk, at instruktoren fremhæver bidraget fra I_6 som en løsningsstrategi, men strategien forsøges ikke i praksis. Instruktoren ved, at overgangen langs akserne ikke er et problematisk forhold for f_1, og derfor bruges der ikke tid på strategien.
Fasens afsluttende episode (1e) omhandler algebraisk verificering af kontinuiteten for f_1. En studerende har, som det fremgik af ovenstående uddrag, foreslået at undersøge tilfældet $x = y$, men derudover baseres episoden på instruktorens handling og validering. Der tale om en mikrokontrakt af tilslutning.
A posteriori analysen af episoderne tegner et billede af, at ansvarsfordelingen varierer med hensyn til den didaktiske status af viden og at instruktoren er fokuseret på den didaktiske tid, som sætter en ramme for interaktionerne i fasen.

Realisering af potentialer i fase 1: De studerende fra fokusgruppen beregner partielle afledede. Det bekræfter hypotesen fra a priori analysen. Det adidaktiske potentiale og potentialet inden for stoflig sammenhæng realiseres i fasen. Ikke alle studerende er i stand til afgøre, om de partielle afledede er kontinuerte. Det betyder også, at de studerende, som uhensigtsmæssigt fokuserer på Sætning 6.11, ikke foretager korrekt konklusion om differentiabilitet af f_1. Det adidaktiske potentiales observerede værdi består hovedsagligt af tilgængelige (begyndelses)strategier. Få studerende giver udtryk for, at de har foretaget yderligere i deres hjemmeforberedelse end beregning af partielle afledede. I_1 og I_5 var som nævnt ikke til stede ved den pågældende time. Ingen andre studerende kommenterer ved episode 1a og 1b på, at funktionen ikke er kontinuert og heller ikke på, at Sætning 6.11 ikke kan bruges, da de partielle afledede ikke er kontinuerte. Beregningen af partielle afledede er eneste aktivitet fra **A7**. Ingen studerende har brugt alternative rammer til deres undersøgelser, og instruktorens institutionalisering af strategien følger ikke en handling i situationen. Derfor realiseres **A6** ikke i fasen. Det er bemærkelsesværdigt, da aktiviteten tidligere er fremhævet som gavnlig i forbindelse med intuitivt og meningsskabende arbejde (se afsnit 5.2).

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 3: I_2 og I_4 udregner partielle afledede, men det er bemærkelsesværdigt, at de i forvejen sparsomme kommentarer bliver færre og færre. I_2 skriver enddog *Hmm....* i sine noter. Om dette skyldes det vanskelige arbejde i at differentiere f_3 eller det faktum, at I_2 udregner $D_x f(0, y)$, $D_x f(0, 0)$ og $D_x D_y f(0, 0)$, og for alle tre får resultatet 0, vides ikke. I_4 opgiver beregningen af partielle afledede. I_6 opskriver også kun funktionsudtrykket. I_1 og I_5 besvarer heller ikke denne delopgave.

Udvikling af fase 3 ved øvelsestimen: Fasen omhandler f_3 og er, ligesom *fase 1*, kollektiv og inddelt i fem episoder (se tabel s. 89). Den første episode (3a) involverer viden under udvikling hos de studerende, og instruktoren styrer i produktionen af viden. Hun indleder eksempelvis med spørgsmålet: *Er funktionen* [f_3] *kontinuert?* Et spørgsmål, som ikke indgår i opgaveformuleringen, men som instruktoren stiller på baggrund af situationens udvikling. Instruktoren modificerer miljøet, og *et nyt miljø overgives på baggrund af viden under udvikling hos de studerende om strategier til at afgøre differentiabilitet for funktioner af flere variable.* Der er tale om en mikrokontrakt af kollektiv produktion, da viden er tilgængelig for alle studerende. Flere studerende deltager i diskussionen omend kun i det begrænsede omfang, som instruktoren tillader. Instruktoren styrer diskussionen og veksler mellem afgivelse af ansvar (meget lokalt) og institutionalisering af ny viden. Kontinuiteten af f_3 begrundes algebraisk. I denne forbindelse afgiver instruktoren til dels ansvaret for valideringen til de studerende i en mikrokontrakt af kollektiv produktion gennem spørgsmålet: *Hvor mange tror, at vi er færdige?*. Den følgende episode (3b) behandler spørgsmålet om at finde de partielle afledede. Det er Hans, som foreslår denne strategi. I episode 3b er det udelukkende instruktoren, som handler. Det er ikke klart, hvorfor instruktoren ikke afgiver ansvar i episoden, som omhandler gammel viden hos de studerende. Episoden har adidaktisk potentiale, men bliver i stedet didaktisk. Det må formodes, at tiden er en faktor. Der afgives i næste episode (3c) igen ansvar. Følgende uddrag illustrerer hvordan *institutionalisering ved vekslen* sættes i forbindelse med *momentielle interaktioner*, som sikrer fremdrift i en mikrokontrakt af tilslutning. Det objektive miljø inkluderer på dette tidspunkt følgende udregning for $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{df}{dx} = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x\right)$$

og diskussionen er, om $D_x f_3(x, y)$ er kontinuert:

Tim Nej. Fordi, der hvor man bliver forvirret, det er det højre led. Så hvis man vurderer den højre faktor, så kunne den godt se ud som om, at den kunne gå galt. Hvis man ligesom får ganget sammen, så får vi et led [bliver afbrudt]

Inst. Så lad os prøve at forkorte det hele lidt, det er det, der bliver sagt. Så det første led, det kan vi godt gøre ligesom før, denne her [peger på $2x$] vinder over denne her [peger på $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$], hvis vi lader x og y gå mod 0. Så den bliver bare stående, det kan vi godt finde ud af at deale med. Så skal vi have fat i det her ovre [peger på andet led]. Vi må have minus en halv gange to, så det må bare give minus [skriver $-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$]. Så har vi denne her [peger på $(x^2 + y^2)$] og denne her [peger på $(x^2 + y^2)^{-3/2}$]. Så det må blive [skriver $(x^2 + y^2)^{-1/2}x$]. Hvad så med det? Så vi har stadig lidt ballade ik'? Denne her [peger på $(x^2 + y^2)^{-1/2}x$] er stadig opløftet i minus, så vi kommer stadigvæk til at dividere med nul, hvis vi lader dem begge to være lig med nul. Så det er ikke så godt, men kan denne her [peger på x] ligesom vindes over den? Det er lidt bøvlet at gennemskue.

Tim Den kan neutraliseres, hvis vi først lader y gå mod 0, men det er ikke rigtig til at gennemskue hvad der sker i de tidspunkter, hvor y ikke er 0. Hvis der bare stod gange xy eller gange $x + y$, så ville det stadig være lidt [tøver].

Inst. Så noget tyder på, at det har vi rigtig svært ved at vurdere. Så spørgsmålet er, er $D_x f$ kontinuert for $(x, y) = (0, 0)$? Jeg håber, at vi er enige om, at den er kontinuert, hvis ikke x og y er nul begge to? Alle andre steder må det gå godt. Så ganger vi bare kontinuerte ting sammen. Det må vi gerne. Eneste problem, vi har, det er denne her [peger på $(x, y) = (0, 0)$].

Instruktoren påpeger efterfølgende, at tilsvarende udregninger kunne være foretaget for $D_y f(x, y)$ og går videre:

Inst. Så vi skal finde ud af, om den er differentiabel i $(0, 0)$, og vi kan ikke rigtig finde ud af at vurdere, om denne her [peger på $D_x f$] er kontinuert. Så nu kommer vi til sagens kerne. Hvordan viser vi, at ting faktisk er differentiable? Vi ved det ikke. Så hvis vi skal undersøge, om et specifikt punkt er det, hvad gør vi?

$\mathbf{I_2}$ Kan du ikke gøre det der, vi gjorde sidste gang?

Inst. Som var hvad?

$\mathbf{I_2}$ Der så vi, altså vi lod hvert koordinat gå mod 0, og så til sidst så vi så også på den anden afledte i $(0, 0)$. Fordi, hvis denne fandtes og var kontinuert, så ville den første også være det. Og så ville den være differentiabel.

Inst. Lige præcis. Så vi lader som om, at vi finder de partielle afledte i $(0, 0)$, og hvordan gør vi det?

Instruktoren opskriver $D_x f(0, 0)$ og forklarer, at det ønskede er at betragte en grænseovergang for differenskvotienten og herefter benytte definitionen af differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$. Instruktoren fokuserer igen på fremdriften, og i femte kommentar i ovenstående uddrag *modificeres det etablerede miljø, som etablerer en ny episode* (3d). Modificeringen baserer sig på en ufuldstændig validering af den manglende kontinuitet af den partielle afledte, $D_x f_3(x, y)$ og deraf, at Sætning 6.11 ikke er brugbar, som a priori analysen klargjorde (se afsnit 5.3.1). En omskrivning af udtrykket for den partielle afledte kunne hjælpe verificeringen af kontinuiteten:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{(x^2+y^2)^{-3/2}2x}{2}\right) \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

For $x \neq 0$ og $y = 0$ er det ikke *bøvlet* at se, at denne ikke er kontinuert (se afsnit 5.3.1). Instruktoren har for sin vis ret i, at det ikke bidrager til at kunne afgøre differentiabilitet for f_3, men kontinuiteten af de partielle afledede kan afvises. Undersøgelsen kan give vished om, at Sætning 6.11 ikke kan bruges til at afgøre differentiabilitet af f_3 (se afsnit 5.3.1).
Den nye episode (3d) omhandler, som det fremgår, udregningen af differenskvotienter, og instruktoren fejlfortolker sidste kommentar fra I_2 i uddraget, som det også tidligere var tilfældet. Igen er det uvist om instruktoren bevidst eller ubevidst overser bemærkningen. I_2 henviser i sin kommentar til viden under udvikling om uafhængighed af differentiationsrækkefølgen. En sammenhæng, som I_2 også forsøger at benytte i sine noter (se figur 5.6). Instruktoren vælger i denne forbindelse at fremsætte ny viden gennem den følgende institutionalisering i stedet for at påpege fejlen. I_2 kommer ikke med yderligere kommentarer, og det er uvist, hvilken betydning udviklingen af episoden har for den studerende. Instruktoren afgiver ansvar i forbindelse med viden under udvikling, men ved den følgende beregning af differenkvotieneter tages ansvaret tilbage i spørgsmål omhandlende gammel viden. Instruktoren spørger, hvorfor $D_x f_3(0,0)$ og $D_y f_3(0,0)$ er udregnet og etablerer derved en ny episode (3e).

Instruktoren afgiver mindre ansvar i forbindelse med gammel viden som situationen udvikler sig. I de interaktioner, hvor der afgives ansvar, er det i forbindelse med viden under udvikling. Det har den konsekvens, at mikrokontrakten af tilslutning er dominerende jo længere hen i fasen diskussionen kommer. Samme billede tegnede sig for udviklingen af *fase 1*. Institutionaliseringen foregår stadig i vekslen, men med mindre grad af studenterbidrag. Instruktoren siger selv, at delopgaven om f_3 er mere vanskelig end de forrige. Det kan have betydning for instruktorens tilbøjelighed til at afgive ansvar. De studerende er mindre aktive, som fasen udvikler sig. Det har naturligvis forbindelse til instruktorens afgivelse af ansvar, men instruktoren kan antageligt fornemme, at de studerende finder opgaven vanskelig. Derfor er instruktoren opmærksomhed på den didaktiske tid. Mikrokontrakten af tilslutning er et værktøj hvormed instruktoren kan styre situationens udvikling og undgå at de studerende taber spillet med miljøet.

Realisering af potentialer i fase 3: Alle studerende fra fokusgruppen viser tegn på, at de har mødt uoverkommelige forhindringer i deres hjemmeforberedelse. Enten ved direkte kommentarer eller ved slet ikke at give en løsning til delopgaven. Det adidaktiske potentiale har i denne forbindelse ikke en observeret værdi i fasen. Ved øvelsestimen afgiver instruktoren ansvar i forbindelse med viden under udvikling i stedet for i forbindelse med gammel viden hos de studerende. I udviklingen af fasen er instruktorens modificering af miljøet (eksempelvis udregning af $\frac{df}{dx}$) den nødvendige intervention, der giver de studerende mulighed for at interagere med miljøet. I fasens sidste episode observeres potentiale inden for fordybelse. Definitionen af differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$ bruges på det konkrete tilfælde f_3 i $\mathbb{R}^2$, selvom interaktionen mellem instruktoren og den studerende Hans er begrænset. Potentialet observeres, men det er en konsekvens af instruktorens anvisninger. Instruktoren har fokus på den didaktiske tid. Det betyder, at der hele tiden er fremdrift i situationen og at instruktoren validerer besvarelser fra de studerende ved at omformulere dem og skrive dét på tavlen. Forhindringerne bliver hverken fremhævet eller angrebet i fasen.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 6: Én af de studerende fra fokusgruppen besvarer den tredje delopgave. I_1 skriver:

> *Hvis man kan vise, at alle partielt afledte er kont. er man færdig, men sætningen siger ikke noget om, hvis de partielt afledte ikke er kont.*
> *Hvis man vil vise, at en fkt. ikke er diff. kan det derfor være godt at kigge på de retningsafledede og hvis en af dem ikke findes er den ikke diff.*
> *Hvis man helt fra begyndelsen kan vise at fkt. ikke er kont. kan den heller ikke være diff.*

Besvarelsen indeholder de mulige metoder, som Eilers et al. (2015) angiver til at på- og afvise differentiabilitet for funktioner af flere variable. Det er værd at bemærke, at I_1 først nævner en strategi som udspringer fra Sætning 6.11, uden at denne strategi er gavnlig for nogle af de fire eksempler. I_1 har muligvis forsøgt sig med denne strategi, men det fremgår, som analysen illustrerer, ikke er noterne fra den studerendes hjemmeforberedelse. Indholdsmæssigt er besvarelsen meget lig a priori analysens opskrift (se afsnit 5.3.1). I_1 kommenterer ikke på hvordan man via andre rammer kan igangsætte intuituvt arbejde med problemet.

Udvikling af fase 6 ved øvelsestimen: Fasen har et andet formål end *fase 1* og *fase 3* har. Fokus er en generel beskrivelse af løsningsstrategierne, som er forsøgt i forbindelse med de foregående faser. Fasen er kollektiv og indeholder en episode (se tabel s. 89). *Fase 6* er fokuseret på opstillingen af en generel løsningsstrategi, der trækker på viden fra alle de foregående faser. Opgaveformuleringen betegner det som en *opskrift*, men instruktoren modificerer ved at kalde det en *huskeliste*. Herved *modificeres det objektive miljø med henblik på institutionalisering af viden under udvikling.* I denne fase fungerer instruktoren umiddelbart som en form for sekretær. Hun opskriver de studerendes foreslag til huskelisten. Der er tale om en mikrokontrakt af kollektiv produktion baseret på viden under udvikling hos de studerende. Instruktoren har dog ansvaret for valideringen af de studerendes besvarelser, og derfor gør hun andet end at være sekretær. Nedenstående uddrag illustrerer, at instruktoren validerer ved at omformulere de studerendes besvarelser:

Inst. Så hvad er det første vi gør?

Jens Tjek at den er kontinuert.

Inst. Tjekke om den er kontinuert. Det synes jeg er en rigtig rigtig god idé. Og hvad er vores yndlings måde at tjekke, om noget er kontinuert på?

$\mathbf{I_2}$ Tjek i $(0,0)$ og se hvad den laver i $(0,0)$.

Inst. [skriver] Tjek alle retninger mod, jeg kalder det, dårligt punkt. Oftest $(0,0)$, men det er jo ikke altid. Og det er jo ikke sikkert, at det er et dårligt punkt. Det kunne bare se ud som om, at der kunne ske ballade. Så jeg håber, at I ved hvad jeg mener. Nu skriver jeg lige, fordi jeg insisterer og jeg håber, at nogle af jer gør det, [skriver]: Tegn! Det er virkelig virkelig en god idé. Bare for at få en idé om hvor man er på vej hen. Det er meget rart at vide om man skal gå efter den besværlige vej fra start af eller om man skal gå efter en af de her [i gåseøjne] snyde veje, hvor vi kan stå af og sige bum, så er den ikke differentiabel.

Instruktoren institutionaliserer, at den grafiske ramme kan bruges til at få en intuition om funktionen er differentiabel eller ej og derved kan hjælpe til at vælge løsningsstrategi. I_2 trækker på viden under udvikling, men formår ikke at abstrahere fra de fire specialtilfælde. Instruktoren validerer ved at omformulere og sige, at det ikke altid er $(0, 0)$. Instruktoren reformulerer besvarelsen fra I_2 uden at konfrontere den didaktiske forhindring, som den studerende har mødt. I_2 oplever, at punktet $(0, 0)$ er problematisk for de fire eksempler og det er en forhindring for hende. Generaliseringen af undersøgelserne til huskelisten er ikke korrekt, da, som instruktoren også korrigerer, funktioner af flere variable kan være diskontinuerte i andre punkter. I fasen er der andre eksempler på, at instruktoren ikke konfronterer de forhindringer, som de studerende møder. Et eksempel er følgende uddrag, hvor diskussionen omhandler betingelsen i Sætning 6.11:

Inst. Jo, så har vi nemlig en sætning, den der hedder 6.11. Så er vi glade. Så er vi nemlig færdige. Så hvis nej? Hvis de ikke er kontinuerte de partielle afledte, hvad gør vi så?

Lars Gentager det.

Inst. Og hvad vil det sige?

Lars Øhm, altså du finder den anden partielle afledte.

Inst. Nej ikke helt.

Hans Du leder jo efter dårlige punkter der også.

Inst. Præcis. Så prøver vi at finde de partielle afledte til præcis de punkter.

Ib Er det hvis nej eller hvis vi ikke kan afgøre det?

Inst. Ja, hvis nej eller spørgsmålstegn.

Ib Er de ikke altid kontinuerte, hvis det er den er differentiabel?

Inst. Det forstår jeg ikke. Prøv at sig det igen.

Ib Jeg siger, hvis vi finder ud af, at de [partielle afledte] ikke er kontinuerte, det er det du skriver “hvis nej”, kan vi så ikke konkludere, at så er den ikke differentiabel?

Inst. Jo, jo, jo. Så det er ikke nej. Så hvis spørgsmålstegn. Hvis vi ikke kan finde ud af det. Rigtig god pointe. Så har vi fundet de partielle afledte til de her steder, hvor vi ikke kan afgøre det. Hvad så?

Interaktionen her illustrerer, at instruktoren ikke følger den studerendes rationale og derfor konkluderer, at betingelsen i Sætning 6.11 er nødvendig. Opgaveformuleringen henviser netop til, at de studerende skal sammenholde deres undersøgelser med sætningens antagelser. Det er selvfølgelig ikke hensigtsmæssigt, at instruktoren begår ovenstående fejl. Instruktoren har igen fokus på fremdriften og begår naturligt fejl, når det går for stærkt. Den studerende har mødt en epistemologisk forhindring som det tager tid at konfrontere og fjerne. Tid som instruktoren ikke tillader at bruge. Fejlen kunne angiveligt være undgået, hvis institutionaliseringen i *fase 3* havde været korrekt. Episoden afsluttes med følgende bemærkning, hvor instruktoren korrigerer for fejlen:

Inst. Er der nogle som har spørgsmål omkring differentiabilitet? Husk denne her sætning [peger på 6.11], som altså siger, at hvis de partielle afledte er kontinuerte så er funktionen differentiabel. Den siger desværre ikke, at hvis funktionen er differentiabel, så er de partielle afledte også kontinuerte. Det er altså kun en pil den ene vej. Ikke begge veje. Så den [sætningen] kan være nyttig, men vi har set mange eksempler på, hvor den ikke har været så behjælpelig. Så husk, at der også findes andre måder.

Instruktoren institutionaliserer, at betingelsen i Sætning 6.11 ikke er en nødvendig betingelse og at dette begrænser muligheden for i praksis at bruge sætningen til at afgøre om en funktion af flere variable er differentiabel.

Potentialer realiseret i fase 6: De studerende deltager aktivt i udformningen af huskelisten. I alt deltager otte studerende i diskussionen. De studerendes bidrag baseres på udviklingen af den didaktiske situation ved øvelsestimen. Få studerende har forberedt en besvarelse (I_1 var ikke til stede), men mange kan alligevel interagere med miljøet i fasen. Det adidaktiske potentiale realiseres på baggrund af udviklingen af situationen. Potentialet inden for fordybelse har også en observeret værdi i fasen. De studerende bidrager til huskelisten, opstiller kriterier for differentiabilitet for funktioner af flere variable og laver forbindelser mellem resultaterne i Eilers et al. (2015) på baggrund af udviklingen af situationen. De studerendes aktivitet i *fase 6* indgår i **A1**, **A7** og **A9**. Specialtilfældene bruges til at undersøge differentiabilitetsbegrebet og I_1 formulerer hypoteser i huskelisten. I situationen er der en vis usikkerhed omkring betingelsen i Sætning 6.11. De studerende bruger deres undersøgelser til at formulere teoretiske løsninger og instruktoren validerer (afslutningsvist), at sætningen er tilstrækkelig, men ikke nødvendig. Instruktoren forsøger, som i tidligere faser i situationen, at fremhæve alternative rammer som strategi, men **A6** realiseres ikke ved instruktorens institutionalisering af det heuristiske værktøj.

5.3.5 Realisering af potentialer

Den tilsigtede viden om generalisering af differentiabilitetsbegrebet og metoder til at afgøre om konkrete funktioner af flere variable er differentiable, knytter sig blandt andet til potentialet inden for stoflig sammenhæng. De studerende kan i nogle episoder trække på gammel viden og stoflig sammenhængspotentiale realiseres ved flere episoder.

Få studerende er i stand til at afgøre om funktionerne er differentiable eller ej. Det adidaktiske potentiale observeredes for mange kun i forbindelse med tekniske strategier. Potentialet er for svagt for mange studerende. Eksemplerne er muligvis for svære at arbejde med for de studerende. Eksemplerne blev tilføjet i designprocessens trin 3 og det adidaktiske potentiale for den første delopgave er således ikke testet, som de øvrige opgaver i designet. Det er bemærkelsesværdigt, at de studerende har så stort fokus på Sætning 6.11. Opgaven kunne med fordel indeholde et eksempel, hvor det er muligt at bruge sætningens resultat. Et redesign af F6.1 kunne også inddrage et indledende spørgsmål, som øger det adidaktisk potentiale for opgaven. Det kan være en delopgave om at tegne graferne for de fire funktioner og bruge repræsentanterne til at gætte på, om funktionerne er differentiable.

Udviklingen af situationen i *fase 6* illustrerer en anden kvalitet ved opgaven som a priori analysens teoretiske udledning ikke fokuserede på. Det er interessant, at mange studerende bidrager i episoden, da få studerende har været i stand til at interagere med opgaven i det objektive miljø i deres hjemmeforberedelse. Opgaven igangsætter forskningslignende aktiviteter hos de studerende i en afsluttende fase af den didaktisk situation, som foregår i en kollektiv produktion på baggrund af udvikling af situationen og deraf de studerendes viden under udvikling. De foregående faser muliggør realiseringen af **A1**, **A7** og **A9**. Aktiviteterne igangsættes for mange studerende først i de modificerede miljøet, som instruktoren overgiver.

Det er en tendens i situationen, at instruktoren implicit validerer de studerendes besvarelser ved at reformulere eller ignorere dem. Instruktoren er hele tiden opmærksom på den didaktiske tid og ser ikke rationalet i de studerendes besvarelser. Besvarelserne er i nogle tilfælde i overensstemmelse med a priori analysen og i andre tilfælde ikke. For sidstnævnte er der tale om, at de studerende har mødt både epistemologiske og didaktiske forhindringer. Instruktoren bruger lang tid på situationen (50 min. i alt), men i nogle episoder bruges ikke tid på at fjerne forhindringerne.

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
1a	Beregne partielle afledede	Inst. og studerende	Kollektiv produktion	Stoflig sammenhæng, adidaktisk, forskning (**A7**)
1b	Afgøre om partielle afledte er kontinuerte	Inst., I_2 og Tim	Individuel produktion	Adidaktisk
1c	Afgøre om f_1 er kontinuert	Inst. og studerende	Kollektiv produktion	Stoflig sammenhæng, adidaktisk
1d	Metoder til at afgøre kontinuitet for funktioner af flere variable	Inst. og studerende	Tilslutning	
1e	Begrunde manglende kontinuitet ved algebraiske betragtninger	Inst. og Hans	Tilslutning	Adidaktisk
2a	Afgøre kontinuitet af f_2	Inst. og få studerende	Individuel produktion	
2b	Bestemmelse af problematiske retningsafledte	Inst. og få studerende	Tilslutning	
2c	Partielle afledte som specialtilfælde	Inst.		

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
3a	Afgøre kontinuitet af f_3 på foranledning af instruktor	Inst., Hans, Tim og Bo	Kollektiv produktion	Stoflig sammenhæng, adidaktisk
3b	Beregne partielle afledte	Inst.		
3c	Afgøre kontinuitet af partielle afledte	Inst. og Tim	Tilslutning	
3d	Udregning af differenskvotienter	Inst. og I_2	Tilslutning	
3e	Anvendelse af Definition 6.5	Inst. og Hans	Tilslutning	Fordybelse
4a	Opsamling af strategier til påvisning af differentiabilitet	Inst.		
5a	Udregning af retningsafledte i retning $x = y$	Inst. og studerende	Individuel produktion	
5b	Undersøgelse af differentiabilitet	Inst. og få studerende	Individuel produktion	
6a	Opstilling af huskeliste af strategier	Inst. og studerende	Kollektiv produktion	Fordybelse, adidaktisk, forskning (**A1**, **A7** og **A9**)

5.4 Definition af kurveintegralet

Kurveintegralet er en geometrisk størrelse og bruges blandt andet i forbindelse med stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$. Kurveintegralet af et vektorfelt langs en kurve er et tal med en særlig egenskab. Det fremgår af nedenstående.

I dette afsnit præsenteres en a priori analyse af opgave F10.4, opfattet som didaktisk situation, og senere en a posteriori analyse af udviklingen af situationen. Det stofdidaktiske relaterer sig til eksamensspørgsmål 10 om kurveintegralet, hvor Sætning 7.22 (se s. 91) er hovedsætningen. Analysen af udviklingen af situationen dokumenterer, at både instruktoren og de studerende har vanskeligt ved at forbinde den geometriske defintion af kurveintegralet med en mere algebraisk. Analysen dokumenterer desuden, at de studerende trækker på gammel viden og validerer definitionen af kurveintegralet. Flere potentialer realiseres i udviklingen af situationen.

Kurveintegralet defineres i Eilers et al. (2015, s. 230) som følger:

Definition 7.20. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ være givet. Lad $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ være et vektorfelt i Ω, og lad γ være en kontinuert kurve i Ω, givet ved en parameterfremstilling $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^k$. Vi siger at* ***kurveintegralet*** *af $\mathbf{V}$ langs γ eksisterer, hvis der findes et tal $I \in \mathbb{R}$ med følgende egenskab: For alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ sådan at det for enhver inddeling D af $[a, b]$ med $finhed(D) < \delta$ og for erhvert valg af mellempunkter gælder det at den tilhørende middelsum opfylder at*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \right| < \varepsilon$$

I påkommende tilfælde kaldes I for kurveintegralet af $\mathbf{V}$ langs γ, og betegnes $\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$.

I definitionen er

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \Delta\mathbf{r}_i$$

betegnelsen for en middelsum af en inddeling $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ af $[a, b]$, hvor $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})$, og de indskudte punkter $\tau_1, ..., \tau_n$ opfylder, at $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ for $i = 1, ..., n$. I det følgende betegnes en sådan middelsum M.
Ifølge kommentaren efter Definition 7.20 er det *let* at overbevise sig om, at der højst er et tal I med egenskaben omtalt i definitionen. En anden vigtig

bemærkning er, at tallet I er uafhængigt af parameteriseringen, $\mathbf{r}$. Kurveintegralet afhænger alene af vektorfeltet $\mathbf{V}$ og den geometriske kurve γ, som er en punktmængde med en retning. Efter Definition 7.20 bemærkes det da også: *Så det er naturligt at vi taler om kurveintegralet langs γ nærmere end 'kurveintegralet hørende til $\boldsymbol{r}$'* (Eilers et al., 2015, s. 230).

Definitionen er indirekte forstået på den måde, at der defineres en egenskab og et objekt i en og samme definition: Hvis en eller anden betingelse er opfyldt (egenskaben), defineres noget, der indgår i betingelsen som objektet. Formen er på sin vis kontraintuitiv, men ikke desto mindre velkendt for de studerende. Definitionen af Riemann-integralet (Eilers et al., 2015, Definition 5.1, s. 124) følger samme logiske form. I Eilers et al. (2015, s. 135) kommenteres på definitionsformen i forbindelse med definitionen af Riemann-integrabilitet: *Definitionen underforstår at man allerede ved hvad integralets værdi er, før man kan påvise at det eksisterer*. Formen er bemærkelsesværdig, da definitionen ikke er konstruktiv eller eksplicit ved en formel. Definitionen er eksplicit ved en egenskab, og i den forstand skildrer definitionen, hvad kurveintegralet er: Kurveintegralet er et tal med en særlig egenskab. Definitionens form er en speciel logisk definitionsform, som er kendetegnet for Eilers et al. (2015).

To sætninger fra Eilers et al. (2015, s. 230-232) omhandler henholdsvis eksistensen af kurveintegralet og et hovedresultat til at beregne kurveintegralet ved et sædvanligt Riemann-integral:

Sætning 7.21. *Hvis $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ er et kontinuert vektorfelt, og hvis γ er en rektificerbar kurve i Ω, så eksisterer kurveintegralet af $\mathbf{V}$ langs γ.*

Beviset behandles ikke i denne analyse. En kurve er rektificerbar, hvis kurvelængden

$$l = \sup\{l(D)|D \text{ endelig inddeling af } [a,b]\} < \infty$$

hvor D er en inddeling af $[a,b]$ med delepunkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ og $l(D) = \sum_{j=1}^{k} ||\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})||$.

Sætning 7.22. *Hvis $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ er et kontinuert vektorfelt, og hvis γ er en kurve i Ω der er stykkevist C^1, så er kurveintegralet af $\mathbf{V}$ langs γ givet ved*

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

hvor $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ er en C^1-paramterfremstilling for γ.

Kurveintegralet afhænger, som nævnt, ikke af parametriseringen, men det gør integralet $\int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$ tilsyneladende. Resultatet i Sætning 7.22 sætter den geometriske, topologiske definition, $\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ lig med en algebraisk, analytisk definition, $\int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$. Brugen af parametriseringen på begge sider af lighedstegnet kan give det indtryk, at kurveintegralet, som det er defineret i Eilers et al. (2015) (venstresiden), afhænger af den konkrete parametrisering.

Sammenhængen i temaet om kurveintegralet mellem definitionen ved en egenskab og hovedresultatet til beregning angribes af F10.3 og F10.4. Der er forskellige kvaliteter ved den abstrakte definition og det konkrete resultat. Definition 7.20 betinger, at kurven er kontinuert, mens Sætning 7.22 betinger, at kurven er C^1. Sætningen giver til gengæld en konkret metode til at udregne kurveintegralet, og som nævnt er det hovedsætningen i afsnittet om kurveintegralet. I andet litteratur, som Solovej (2001, s. 92), er variationer af resultatet fra Sætning 7.22 selve definitionen af kurveintegralet. Deltagerne ved An0 kan ved at søge på 'kurveintegral definition' på internettet finde tilsvarende definitioner af kurveintegralet. Forbindelsen mellem definition af og beregning af et objekt er ikke nyt for de studerende på An0. For Riemann-integralet er korrolaret til Infinitesimanregningens hovedsætning (Eilers et al., 2015, Korrolar 5.32, s. 152) en måde at beregne Riemann-integralet ved brug af stamfunktioner. Eilers et al. (2015) indeholder ingen kommentarer specifikt til definitionsformen for Definition 7.20. Det behandles i F10.4. Udviklingen af situationen omkring F10.4 behandles i det følgende.

5.4.1 Entydighedsbeviset og definitionens form

Opgave F10.4 (se bilag C) lyder som følger:

- Entydigheden af kurveintegralet kan man, ifølge noterne, *overbevise sig om* ud fra Definition 7.20. Brug Definition 7.20 til at vise, at der ikke findes forskellige I_1 og I_2 med den ønskede egenskab.
- Sammenlign med Opgave F.10.3 (2).
- ⋆ Læs kommentaren efter Definition 7.20 og uddyb hvorfor kurveintegralet er en geometrisk størrelse.

Det erklærede læringsmål for F10.4 er den teoretiske betydning og konsekvens af Definition 7.20 derunder, at højst et tal I kan have egenskaben, og at dette tal alene afhænger af vektorfeltet og kurven.

Det objektive miljø består af opgaveformuleringen (inkl. to vilkårlige tal I_1 og I_2) og Eilers et al. (2015, afsnit 7.4).

Lad I_1 og I_2 være to tal i $\mathbb{R}$, som begge har egenskaben i Definition 7.20 for et vektorfelt $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ defineret på $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ og en kontinuert kurve γ i Ω med parameterfremstilling $\mathbf{r}$. Da gælder, at for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta_1 > 0$ sådan, at for enhver inddeling D af $[a, b]$ med $finhed(D) < \delta_1$ og ethvert valg af mellempunkter er:

$$\left| I_1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \right| < \varepsilon$$

Ligeledes gælder, at for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta_2 > 0$ sådan, at for enhver inddeling D af $[a, b]$ med $finhed(D) < \delta_2$, og ethvert valg af mellempunkter er:

$$\left| I_2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \right| < \varepsilon$$

Vælg $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Lad M være en middelsum med $finhed(D) < \delta$. Da gælder ved brug af trekantsuligheden (Eilers et al., 2015, Sætning 1.4, s. 4), at

$$|I_1 - I_2| = |I_1 - M + M - I_2| \leq |I_1 - M| + |M - I_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, og deraf konkluderes, at $|I_1 - I_2| = 0$ ved brug af Korollar B.10 (Eilers et al., 2015, s. 368). Deraf er $I_1 = I_2$. Et tal, $I = \int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$, som opfylder egenskaben i Definition 7.20, er derfor entydigt bestemt. Kurveintegralet (som det er defineret i Definition 7.20) er veldefineret og eksisterer under visse betingelser, som nævnt i ovenstående.

Opgave F10.3 (se bilag C) lyder som følger:

> Lad $\mathbf{V}$ være et kontinuert vektorfelt.
>
> 1. Vis, at hvis $\widetilde{\mathbf{r}} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ er en retningsbevarende C^1-reparametrisering af $\mathbf{r}$, så er
>
> $$\int_c^d \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(t)\partial t = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\partial t.$$
>
> 2. Hvorfor betyder resultatet fra 1., at
>
> $$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot \partial\mathbf{r}$$
>
> er uafhængigt af parametriseringen?

Da vektorfeltet er kontinuert, og det antages, at $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ er en C^1-parameterfremstilling, gælder ved Sætning 7.22, at kurveintegralet er givet ved:

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Ved F10.3(1) (som vises ved at substitutiere $\phi(t) = u$, hvor $\phi : [c, d] \to [a, b]$ er en kontinuert og strengt voksende funktion) gælder for en retningsbevarende C^1-reparametrisering, $\widetilde{\mathbf{r}} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ af $\mathbf{r}$, at

$$\int_c^d \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(t) dt = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du$$

Derfor er

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(t) dt$$

Kurveintegralet, som kan udregnes ved et sædvanligt Riemann-integral af prikproduktet mellem vektorerne $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$ og $\mathbf{r}'(t)$, er derfor uafhængigt af parametriseringen og valg af mellempunkter. Bemærk, at kurven er antaget at være C^1. Så selvom F10.3(1) på sin vis omhandler entydigheden, så er beviset i F10.4 mere generelt og simpelt.

Kurveintegralet kunne, som det gøres i andet litteratur, defineres ved integralet $\int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ ved at tilføje betingelsen om, at kurven er C^1 til definitionen af objektet. F10.4(1) problematiserer, at hvis kurveintegralet findes, så er der højst ét, mens F10.3(1) beskriver, hvad kurveintegralet er: Kurveintegralet er et endeligt tal, som kun afhænger af vektorfeltet og kurven. De to resultater giver begge anledning til en definition af kurveintegralet omend dog med forskellige betingelser.
Der findes højst ét tal I, som opfylder betingelserne i Definition 7.20, og det er, uanset hvilken parameterfremstilling og hvilke mellempunkter i middelsummen der betragtes. Det trods, at parameterfremstillingen, en vilkårlig algebraisk beskrivelse af kurven, optræder i den abstrakte definition. Kurveintegralet afhænger af de geometriske objekter, vektorfeltet og kurven. Det betyder, at kurveintegralet er en geometrisk størrelse (Eilers et al., 2015, s. 215).

5.4.2 De fire potentialer

Den tilsigtede viden for F10.4 er som nævnt den teoretiske betydning af Definition 7.20 og herunder entydighed af kurveintegralet. Af bilag D fremgår en identifikation af potentialer for opgaven. Det uddybes i det følgende.

Adidaktisk potentiale: Formuleringen af den første delopgave angiver indirekte en metode til at vise, at kurveintegralet, hvis det findes, er entydigt. Angivelsen af forskellige I_1 og I_2, som begge opfylder egenskab fra Definition 7.20 og definitionen selv udgør et objektivt miljø. De studerende kan trække på gammel viden om lignende entydigshedsbevis fra Eilers et al. (2015), beviset for at Riemann-integralet er entydigt (Eilers et al., 2015, Lemma 5.4, s. 126). Første delopgave har derfor et adidaktisk potentiale.
Adidaktisk potentiale for anden og tredje delopgave afhænger af miljøerne fra den første delopgave og F10.3. Begge delopgaver er åbne spørgsmål, som både kan være en forhindring eller fremmende for potentialet.

Potentiale inden for stoflig sammenhæng: Første delopgaves potentiale inden for stoflig sammenhæng er begrænset. De studerende kan anvende en kendt teknik såsom trekantsuligheden, men entydighedsbevisets struktur er i analogi til et andet entydighedsbevis fra Eilers et al. (2015). Det uddybes i afsnittet om forskningspotentiale for F10.4. Potentialet inden for stoflig sammenhæng er også begrænset for anden og tredje delopgave.

Fordybelsespotentiale: Første delopgaven giver de studerende indsigt i, at kurveintegralet er veldefineret, mens anden og tredje delopgave giver indsigt i, at kurveintegralet er uafhængigt af parametriseringen. Derfor har opgaven potentiale inden for fordybelse. Fordybelsespotentialet er det primære for udformningen af anden og tredje delopgave. Ved eksamen er Sætning 7.22 hovedsigtet. Sætningen er viden under udvikling for de studerende, og beviset for sætningen har forbindelse til Definition 7.20.
Endvidere kan opgaven igangsætte en kvalitativ diskussion af definitionsformen i Eilers et al. (2015), som omhandler både egenskab og objekt. Det giver opgaven et potentiale inden for fordybelse, som dog afhænger af de studerendes indsigt i og håndtering af definitionen.

Forskningspotentiale: Første delopgave igangsætter aktiviteter som indgår i kategorierne **A5** og **A10**. De studerende validerer definitionen af kurveintegralet ved at vise, at hvis kurveintegralet eksisterer, så er det entydigt. Beviset er analogt til velkendt entydighedsbevise af Riemann-integralet, som er gammel viden for de studerende.

5.4.3 Mulige forhindringer

De studerendes erfaring med integraler som noget, der skal beregnes ved bestemte teknikker, er en forhindring i opgaven, ligesom det er tilfældet med differentiabilitetsbegrebet (se afsnit 5.3). Den specielle logiske definitionsform, der definerer egenskab og objekt i et, er ikke en beregningsalgoritme,

og integrabilitet afgøres ikke ved, om integralet kan beregnes. Den indirekte definition baseres på et $\varepsilon - \delta$-argument. Selvom det er velkendt notation for de studerende, er omvejen gennem en egenskab en forhindring for, at de studerende kan få begreb om, hvad kurveintegralet er. Sætning 7.22 kan bidrage til forhindringen ved, at de studerende fokuserer på dette resultat og ikke på selve definitionen.
Notationen for kurveintegralet, $I = \int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$, rummer en forhindring, da parametriseringen $\mathbf{r}$ er en del af symbolet, selvom kurveintegralet er en geometrisk størrelse. Uanset om det er det geometriske eller algebraisk udtryk for kurveintegralet (Definition 7.20 eller Sætning 7.22), bestemmer kun vektorfeltet og kurven kurveintegralet.

Med udgangspunkt i ovenstående a priori analyse, opstilles følgende hypoteser om realiseringen af de fire potentialer på baggrund af de studerendes gamle viden og viden under udvikling:

> **De studerende** fremfører et entydighedsbevis for kurveintegralet analogt til beviset for Lemma 5.4 (Eilers et al., 2015, s. 126) og viser, at kurveintegralet er veldefineret.
>
> **De studerende** forbinder definitionen af kurveintegralet i Definition 7.20 med måden at udregne kurveintegralet i Sætning 7.22 og får indsigt i, at kurveintegralet alene afhænger af vektorfeltet og kurven, og derved, at kurveintegralet er en geometrisk størrelse.

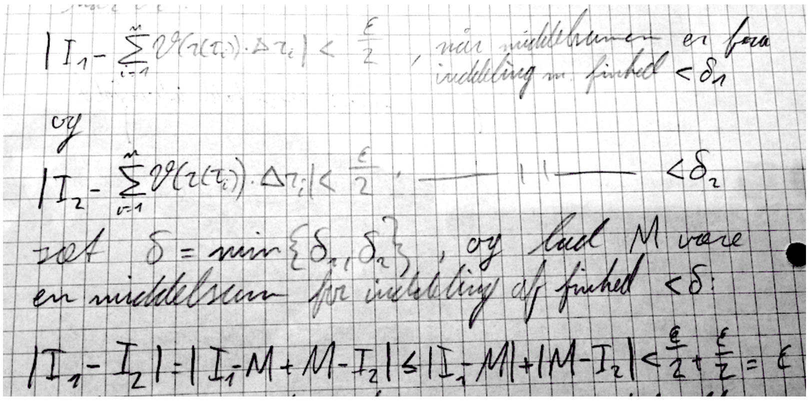
5.4.4 Udviklingen af situationen

Diskussionen af opgaven udfolder sig i tre faser, som det fremgår af følgende tabel:

Fase	Titel	Episoder	Varighed
1	Bevis for at kurveintegralet er veldefineret	1a-1c	8 min.
2	Sammenligning med F10.3	2a	1 min.
3	Kurveintegralet er en geometrisk størrelse	3a	0 min.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 1: Ved den pågældende øvelsestime afleverede tre ud af syv fra fokusgruppen noter (I_1, I_5 og I_6).

I_1 antager, at både I_1 og I_2 opfylder Definition 7.20 for inddelinger med finhed mindre end henholdsvis δ_1 og δ_2. Efterfølgende sættes δ til at være den mindste af de to og M til at være en middelsum for en inddeling med finhed mindre end δ. I_1 viser, at $|I_1 - I_2| < \varepsilon$ (se figur 5.9). I_1 henviser til Korrolar B.10 for at konkludere, at $I_1 - I_2 = 0 \Leftrightarrow I_1 = I_2$, da ovenstående gælder for alle $\varepsilon > 0$.

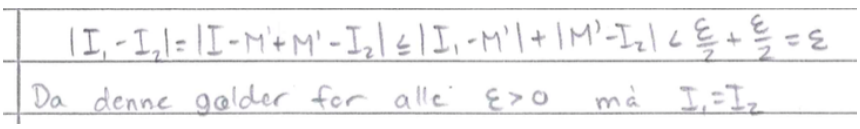


Figur 5.9

I_5 begynder med at vælge ét δ så $|I_1 - K| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $|I_2 - K| < \frac{\varepsilon}{2}$. Det formodes, at K er en middelsum. Den studerende skriver efterfølgende: *Da er*

$$|I_1 - I_2| = |I_1 + K - K - I_2| \leq |I_1 - K| + |I_2 - K| < \varepsilon$$

Der er ingen angivelser af, at det valgte δ ikke opfylder betingelserne for både I_1 og I_2, med mindre δ er valgt som minimum af et δ_1 og δ_2 jvf. a priori analysen (se afsnit 5.4.1).
I_6 betegner først middelsummen M og antager, at I_1 og I_2 begge opfylder betingelsen fra 7.20. I_6 skriver: *Dvs. givet* $\varepsilon > 0$ *findes et* δ_1 *så* $|I_1 - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ og tilsvarende for et δ_2 og et I_2. Efterfølgende står: *Lav konkret middelsum med finhed*$<$ *min*$\{\delta_1, \delta_2\}$, M'. Herefter bruger I_6 trekantsuligheden (se figur 5.10).



Figur 5.10

Ingen af de tre studerende henviser til analogien til beviset for Lemma 5.4. Alle tre studerende vurderer forskellen mellem en middelsum og hvert af tallene I_1 og I_2 mindre end $\varepsilon/2$. Det er samme fremgangsmåde som i beviset for Lemma 5.4. Vurderingerne adskiller sig fra vurderingen gjort i a priori analysen (se afsnit 5.4.1). Det vides ikke, i hvilket omfang analogien er en faktor for de studerendes løsninger af første delopgave.

Udviklingen af fase 1 ved øvelsestimen: Fasen er som udgangspunkt kollektiv og inddelt i tre episoder (se tabel s. 104). Episode 1a omhandler strategien ved et entydighedsbevis og involverer gammel viden hos de studerende. Instruktoren henviser til entydigheden af Riemann-integralet og *etablerer et miljø for situationen med udgangspunkt i de studerendes gamle viden* i en mikrokontrakt af kollektiv produktion:

Inst. Vi skal altså vise, at der ikke er forskellige I_1 og I_2, som opfylder den her definition. Vi skal altså vise, at der ikke findes forskellige. Hvordan gør vi det?

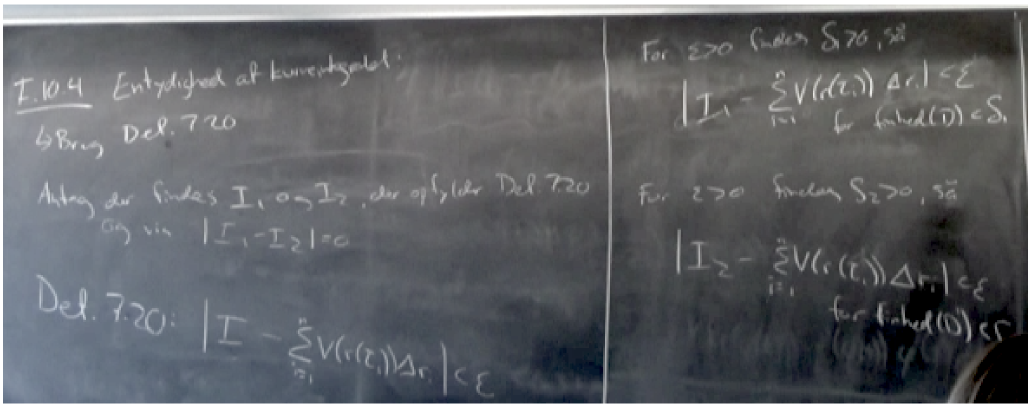
I$_5$ Antag, at der er to og viser, at afstanden imellem dem er mindre end ε.

Inst. Præcis. Helt klassisk entydighedsting.

Instruktorens validering af besvarelsen efterfølges af:

Inst. Det er standard måden at vise entydighed på. Det er: Antag der er to og vis, at så er de nødt til at være den samme. Så lad os prøve at gøre det.

Instruktoren omformulerer svaret, I$_5$ giver. Instruktorens instituationaliseringen af metoden er en tautologi, som ikke tilsvarer den metode, I$_5$ beskriver. Instruktoren skaber *et modificeret miljø med reformuleringen af metoden*, som desværre ikke er rigtig. Institutionaliseringen starter en ny episode. 1b omhandler formuleringen af egenskaben fra Definition 7.20. I denne episode er instruktoren eneste deltager. Hun forklarer, at for forskellige I_1 og I_2, må der findes δ_1 og δ_2, så begge tal opfylder betingelsen i definitionen. Instruktoren validerer, at δ_1 og δ_2 ikke nødvendigvis er den samme. I$_5$ er involveret i episode 1a, men optagelsen giver ingen oplysninger om, hvordan den studerende reagerer på instruktorens validering. Den studerende har ikke selv skelnet mellem forskellige δ'er i sin hjemmeforberedelse, og den studerendes fejl korrigeres ved instruktorens validering, men uden at instruktoren er opmærksom på, at den studerende har mødt en forhindring. Instruktoren afgiver ingen ansvar i episoden og gør det ikke muligt at opdage eventuelle forhindringer hos de studerende. En ny episode (1c) begynder med spørgsmålet: *Hvad gør vi så nu?* Ved denne episode udgøres miljøet af instruktorens opskrivninger på tavlen (se figur 5.11). I episode



Figur 5.11: Tavle tilhørende episode 1c. Nederste højre hjørne: $finhed(D) < \delta_2$

1c afgiver instruktoren igen ansvar til de studerende, og episoden foregår i en mikrokontrakt af individuel produktion. Følgende uddrag illustrerer, at den studerende Tim har overblik over strukturen af entydighedsbeviset, og instruktoren foretager de tekniske realiseringer af den studerendes idéer:

Tim Jamen et af δ'erne må være mindst. Så vi vælger bare δ til at være det mindste af de to.

Inst. Mmh, og hvad gør vi så?

Tim Jamen så ser vi, at en middelsum med finhed til vores nuværende, finhed mindre end vores nuværende δ må ligge, øh, kan vi vælge, såvidt det ligger $\varepsilon/2$ fra begge middelsummer.

Inst. Præcis.

Tim Så kan vi trække det fra og lægge den til, og bruge trekantsuligheden. Så får vi $\varepsilon/2 + \varepsilon/2$ som er ε.

Inst. Så hvis vi fra nu af kalder den her $[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \Delta \mathbf{r}_i]$ for M, bare så jeg slipper for at skrive det hele igen, så bliver der sagt [skriver] vælg δ lig minimum. Klassiske vi plejer. Vi har to, og vi vælger den mindste af dem. Så kan vi gøre det sådan, at [skriver] $|I_1 - M|$ er mindre end $\varepsilon/2$ og $|I_2 - M|$ er mindre end $\varepsilon/2$.

Instruktoren kommer med en bemærkning om, at hvis det gælder for alle ε, så gælder det specielt også for $\varepsilon/2$. I forbindelse med brugen af trekantsuligheden til at vise entydighed (se afsnit 5.4.1), involverer instruktoren sig også i konkrete udregninger. Instruktoren fortsætter:

Inst. Så [skriver] $|I_1 - I_2|$, hvordan siger vi noget om det? Bare fortsæt.

Tim Jamen du lægger, du trækker M fra og lægger M til. Derefter bruger du trekantsuligheden.

Inst. [skriver teknisk realisering af idéen] Trekantsuligheden sådan der. Hvad så?

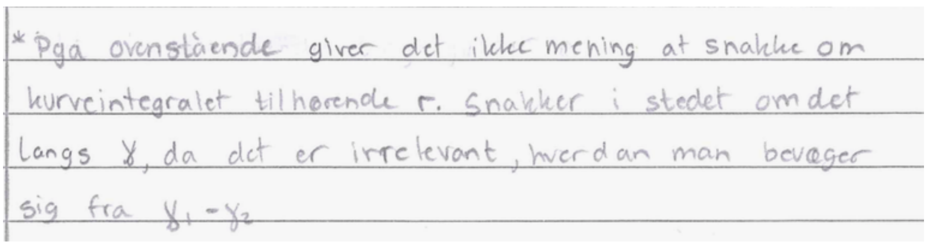
Tim Jamen vi har valgt vores δ, sådan så de to der $[|I_1 - M|$ og $|M - I_2|]$ begge to er mindre end $\varepsilon/2$. Så ser vi, at det er mindre end ε.

Inst. Præcis. Hvis det er mindre end ε for et eller andet fuldstændig vilkårligt $\varepsilon > 0$, så er afstanden mellem dem her [peger på I_1 og I_2] lig 0.

Instruktoren henviser ikke til Korollar B.10 i sin validering af, at afstanden mellem I_1 og I_2 er nul. Hun skriver $I_1 = I_2$. Instruktoren institutionaliserer bevisformen med bemærkningen: *Det her er et helt klassisk eksempel på et entydighedsbevis.*

Realisering af potentialer i fase 1: De studerende er i stand til at fremføre et entydighedsbevis med opgaveformuleringens præmisser (I_1 og I_2). Det bekræfter hypotesen fra a priori analysen. Det adidaktiske potentiale realiseres i både episode 1a og 1c, som er episoderne med interaktion. Det er, som det tidligere er nævnt, normal procedure for instruktoren, at hun alene skriver alle løsninger på tavlen. Ingen studerende kommenterer eksplicit på analogien til beviset for Lemma 5.4, men Tim vurderer afstanden mellem I_1 og middelsummen mindre end $\varepsilon/2$, præcis som de tre studerende fra fokusgruppen. Vurderingen tilsvarer vurderingerne i beviset for Lemma 5.4. De studerendes strategi antyder, at de forbinder gammel viden til ny viden, men som nævnt vides det ikke, hvilket omfang analogien har. Forskningspotentialet har en observeret værdi i fasen, da de studerendes aktivitet indgår i kategorierne **A5** og **A10**. De studerende fra fokusgruppen validerer Definition 7.20 i deres hjemmeforberedelse. Ved øvelsestimen bidrager nogle studerende til produktionen af viden og validerer Definition 7.20.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 2 og 3: I_1 besvarer anden delopgave med følgende formulering: *Det ville være en frygtelig modstrid, hvis kurveintegralet afhang af parametriseringen af* γ. I_1 skriver ikke, hvorfor det ville være en modstrid. Efterfølgende konkluderes det, at da kurveintegralet ikke afhænger af den valgte parametrisering, så er den en geometrisk størrelse (tredje delopgave). Den studerende formulerer adidaktisk, men den studerende validerer ikke sin løsning.
I_6 skriver meget korte bemærkninger til de to øvrige delopgaver. Sammenligningen med F10.3 (2) består af: *Kurveintegralet er entydigt og uafh. af parametriseringen.* Til den tredje delopgave kommenterer I_6, at man taler om kurveintegralet tilhørende γ og ikke parametriseringen (se figur 5.12). Bruget af ordet *bevæger* er misvisende i denne forbindelse. Det er ikke et



*Pga ovenstående giver det ikke mening at snakke om kurveintegralet tilhørende r. Snakker i stedet om det langs γ, da det er irrelevant, hvordan man bevæger sig fra $\gamma_1 - \gamma_2$

Figur 5.12

spørgsmål om hastigheden fra begyndelses- til slutpunkt (som formodes at være γ_1 henholdsvis γ_2 i den studerendes notation), men i stedet om parametriseringen har betydning for kurveintegralet.
I_5 kommenterer ikke på de to øvrige delopgaver i F10.4.

De tre fokusstuderende har vanskeligt ved at forbinde Definition 7.20 med Sætning 7.22. De fokuserer på, at kurveintegralet er en geometrisk størrelse.

Udvikling af fase 2 ved øvelsestimen: Kun instruktoren bidrager i denne fase. Episode 2a er ganske kort og består af følgende kommentar:

Inst. Er der nogle spørgsmål til det her? Alt kører? Perfekt. Og det er meget heldigt, fordi det vi har vist er altså, at der findes ét kurveintegral, og det definitionen også siger er altså, at hvis det der I det findes, det var det, jeg skrev her [peger på I], så er I'et lig med [skriver $\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$] med vores kurveintegral. Det passer rigtig godt med det, vi viste i opgaven lige før, at uanset hvilken parametrisering man laver, så er der kun et kurveintegral. Det er præcis det samme, vi viser her. Der findes ét, hver gang vi har en eller anden kurve.

Instruktoren stiller ingen spørgsmål undervejs og bryder med proceduren om, at alt skrives på tavlen. Det, at der findes ét kurveintegral, betyder, at hvis det findes, så er der højst et, som a priori analysen beskrev det (se afsnit 5.4.1). Det er svært at afgøre fra instruktorens kommentar, om det er den viden, hun ønsker at institutionalisere. Hendes kommentar: *Det er præcis det samme, vi viser her*, er ikke rigtig. Begge opgaver viser ganske vist en slags entydighedsegenskab, men problemet i de to opgaver, F10.3 og F10.4, er forskellige jvf. a priori analysen. Instruktoren igangsætter ikke en kvalitativ diskussion af kurveintegralet som en geometrisk størrelse, og instruktoren skriver ikke noget på tavlen. Hun sender signal om, at forbindelsen mellem de to opgaver og altså forbindelsen mellem Definition 7.20 og Sætning 7.22 ikke er værd at problematisere.

Realisering af potentialer i fase 2 og 3: Den uklare afslutning på *fase 2*, som udelukkende består af instruktorens bemærkning, betyder, at potentialet inden for fordybelse ikke realiseres ved øvelsestimen. Instruktoren synes at være den primære årsag til forskellen mellem den teoretiske og observerede værdi for potentialet i situationen. Instruktoren har ved overgangen til *fase 2* allerede fokus på øvelsestimens næste opgave, og den didaktiske tid påvirker den didaktiske kontrakt. Instruktoren afgiver ikke ansvar i faserne, da hun overvåger hele øvelsestimen og ikke kun denne situation. Hun vælger derfor at bruge tid på *fase 1*, hvor hun afgiver ansvar, og ikke på *fase 2* og *fase 3*. To fokusstuderende har skrevet bemærkninger til disse delopgaver og analysen af besvarelserne illustrerer, at realiseringen af potentialet inden for fordybelse kræver en didaktisk valideringssituation og institutionalisering, som ikke finder sted. Instruktoren er således ikke eneste årsag til, at potentialet ikke realiseres. Det er muligt, at anden og tredje delopgave er formuleret som for åbne problemstillinger til, at studerende kan handle i miljøet og tilegne sig den tilsigtede viden. Instruktorens valg i situationen vidner dog om, at hun heller ikke ser potentialet i de to delopgaver.

5.4.5 Realisering af potentialer

Valideringen af en definition som Definition 7.20 er en teknisk opgave, som de studerende løser (både i hjemmeforberedelsen og ved øvelsestimen). Opgavetypen kunne med fordel være brugt om andre objekter end kurveintegralet, da forskningspotentialet, og herunder kategorierne **A5** og **A10**, kan realiseres ved aktiviteter igangsat af opgavetypen. De studerende kan tilegne sig ny viden ved at trække på egenskaber ved miljøet, og den første delopgave styrker de studerendes viden under udvikling om tekniske forhold i Definition 7.20 og forbindelsen til gammel viden.
Opgaveformuleringen er givetvis for åben til, at potentialet inden for fordybelse har en observeret værdi, der tilsvarer den teoretiske. Betydningen af og rationalet bag definitionen og forbindelsen til Sætning 7.22 diskuteres ikke i situationen. Derfor realiseres fordybelsespotentialet for anden delopgave ikke i situationen. Definitionerne er en del af kursets teoretiske hovedsigte. Opgaver som F10.4 kan give de studerende indsigt i objektets form og dets forbindelse til andre resultater, hvis fordybelsespotentialet realiseres. Opgaven, som den er formuleret, kræver en didaktisk valideringssituation og institutionalisering. Det må der tages højde for i et eventuelt redesign ved enten at fokusere udviklingen af situationen ved øvelsestimen på anden og tredje delopgave eller gøre problemet mindre åbent. Det kunne eksempelvis være med en formulering som: *Sætning 7.22 er en alternativt måde at definere kurveintegralet på. Hvorfor tror du, at forfatterne har valgt en anden definition?* I dette redesign kunne F10.3 bruges som en opgave til at vise entydighed. I forbindelse med de mundtlige eksaminer blev det observeret, at de studerende havde vanskeligt ved at redegøre for definitioner fra Eilers et al. (2015). Det diskuteres i kapitel 6.

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
1a	Entydighedsbevisets struktur	Inst. og I_5	Kollektiv produktion	Adidaktisk, forskning (**A5**)
1b	Formulere egenskab fra Definition 7.20	Inst.		
1c	Bevis: Kurveintegralet er veldefineret	Inst. og Tim	Individuel produktion	Adidaktisk, forskning (**A5** og **A10**)
2a	Sammenligningen med F10.3	Inst.		
3a	Kurveintegralet er en geometrisk størrelse	I_1 og I_6 (i noter)		

5.5 Beviset for Greens formel

Plan- og rumintegraler er generaliseringer af Riemann-integralet til funktioner af flere variable. Figurer (herefter E) inddeles i delfigurer tilsvarende intervaller, der deles i delintervaller i tilfældet af en variabel. Planintegralet benyttes til at udtrykke et kurveintegral langs en lukket kurve for et vektorfelt i $\mathbb{R}^2$, som ikke har en stamfunktion. Dette er *Greens formel* (Eilers et al., 2015, s. 305).
I dette afsnit præsenteres en a priori analyse af opgave F12.3 opfattet som didaktisk situation, og senere en a posteriori analyse af udviklingen af situationen. Det stofdidaktiske relaterer sig til eksamensspørgsmål 12 om Greens formel, hvor Sætning 9.6 er hovedsætningen (se nedenfor). Analysen af udviklingen af situationen dokumenterer, at instruktoren fremhæver den tilsigtede viden i devolutionen og stiller nye spørgsmål i forbindelse med viden under udvikling hos de studerende.

Ligesom definitionen af Riemann-integralet (Eilers et al., 2015, s. 124) og definitionen af kurveintegralet (se afsnit 5.4), defineres planintegralet af f over E som et tal, $\int_E f(x,y)d(x,y)$ med en særlig egenskab. Planintegralet opfylder, at for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ sådan, at

$$\left|M - \int_E f(x,y)d(x,y)\right| < \varepsilon$$

for enhver middelsum M for funktionen f, der hører til en inddeling af E med finhed mindre end δ (Eilers et al., 2015, s. 296). En inddeling af en figur E er en samling af delfigurer, $E_1, ..., E_n$ med egenskaberne $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ og $E_i \cap E_j \subset \partial E_i \cup \partial E_j$ for $i \neq j$. Finheden af en inddeling forstås som $max\{diam(E_i) \mid i = 1, ..., n\}$. Definitionsformen er indirekte ligesom formen af Defintion 7.20 (se afsnit 5.4).

Greens formel er formuleret i (Eilers et al., 2015, s. 305) som følger :

Sætning 9.6. *Lad* $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *være et* C^1*-vektorfelt, defineret i en åben, enkeltsammenhængende mængde* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*. Lad* γ *være en stykkevist* C^1*-kurve, der er lukket og uden selvgennemskæringer. Hvis kurven gennemløbes i positiv omløbsretning gælder der at*

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_E \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y) \qquad (9.12)$$

hvor E *er det område i* Ω *der omkransens af* γ*.*

Enkeltsammenhængdende er betegnelsen for, at der i et område Ω i $\mathbb{R}^k$ findes en homotopi mellem kontinuerte kurver γ_0 og γ_1. Et område Ω i $\mathbb{R}^2$ er

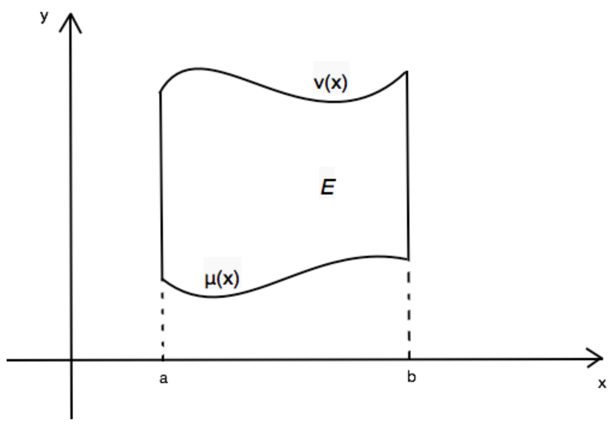
enkeltsammenhængende, hvis *det er et område uden huller* (Eilers et al., 2015, s. 244).
Greens formel bevises i et specialtilfælde: Vektorfeltet er parallelt med førsteaksen, så

$$\mathbf{V}(x,y) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for alle } (x,y) \in \Omega$$

og området E er på formen

$$E = \{(x,y)|x \in [a,b], \mu(x) \leq y \leq \nu(x)\}$$

for to stykkevist C^1-funktioner, μ og ν. Et eksempel på et sådant specialtilfældet er illustreret i figur 5.13.



Figur 5.13

Figurer af denne type er begrænsede, afsluttede mængder $E \subset \mathbb{R}^2$ hvor randen, ∂E har areal 0.

I beviset for Sætning 9.6 kommenteres på, at specialtilfældet ikke dækker alle mængder. Hvilke mængder, Greens formel bevises for, undersøges i F12.3. Udviklingen af situationen omkring F12.3 behandles i det følgende.

5.5.1 Bevis for hvilke specialtilfælde?

Opgave F12.3 (se bilag C) lyder som følger:

Når vi beviser Sætning 9.6 kigger vi på E'er, der opfylder

a) $E = \{(x,y) \mid x \in [a,b], \mu(x) \leq y \leq \nu(x)\}$ og
b) $E = \{(x,y) \mid y \in [c,d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$.

- Tegn 3 mængder, der opfylder både **a)** og **b)**.
- Tegn én mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** og tegn derefter én mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)**.
- ⋆ Gør rede for, at en variation af (9.12) også gælder for

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

selvom E hverken opfylder **a)** eller **b)**.

Det erklærede læringsmål for F12.3 er visualisering af specialtilfælde, som dækkes af beviset og specialtilfælde, som ikke gør samt en metode til at få en variation af resultatet i Sætning 9.6 til at gælde for mængder, som ikke opfylder hverken **a)** eller **b)**.

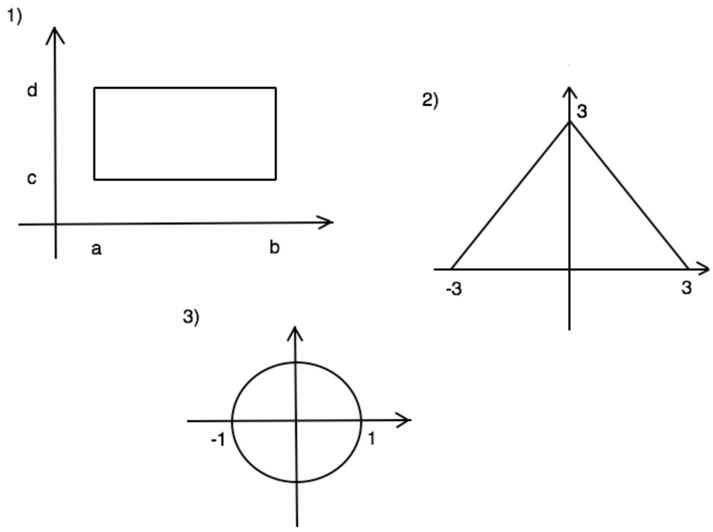
Det objektive miljø består af opgaveformuleringen (inkl. de to betingelser **a)** og **b)** samt mængden $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$) og Eilers et al. (2015, afsnit 9.1-9.2).

Tre mængder, som opfylder både **a)** og **b)**, er illustreret i figur 5.14. Bemærk, at det antages, at alle tre mængder befinder sig i et enkeltsammenhængende område, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. De tre mængder afgrænses alle af stykkevist kontinuerte kurver uden selvgennemskæringer.
Mængde 1 (figur 5.14) opfylder både **a)** og **b)**, da x er begrænset til et interval $[a,b]$ og y er begrænset af konstante funktioner $\mu(x) = c$ og $\nu(x) = d$. Omvendt gælder for $y \in [c,d]$, at x er begrænset af de konstante funktioner $\alpha(y) = a$ og $\beta(y) = b$.
Mængde 2 (figur 5.14) opfylder både **a)** og **b)** da for $x \in [-3,3]$, og y er begrænset af den konstante funktion $\mu(x) = 0$ og den stykkevist C^1-funktion

$$\nu(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{hvis } x \in [-3,0] \\ 3-x, & \text{hvis } x \in (0,3] \end{cases}$$

For $y \in [0,3]$ er x begrænset af de konstante funktioner $\alpha(y) = -3$ og $\beta(y) = 3$, som begge er C^1-funktioner med hensyn til y.
Mængde 3 (figur 5.14) opfylder både **a)** og **b)** da for $x \in [-1,1]$ er

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$



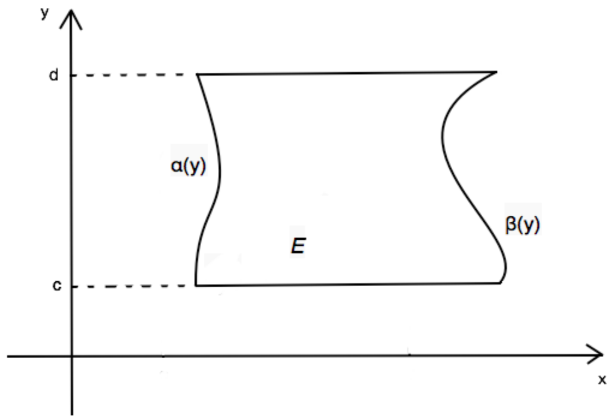
Figur 5.14

eller omvendt for $y \in [-1, 1]$ er

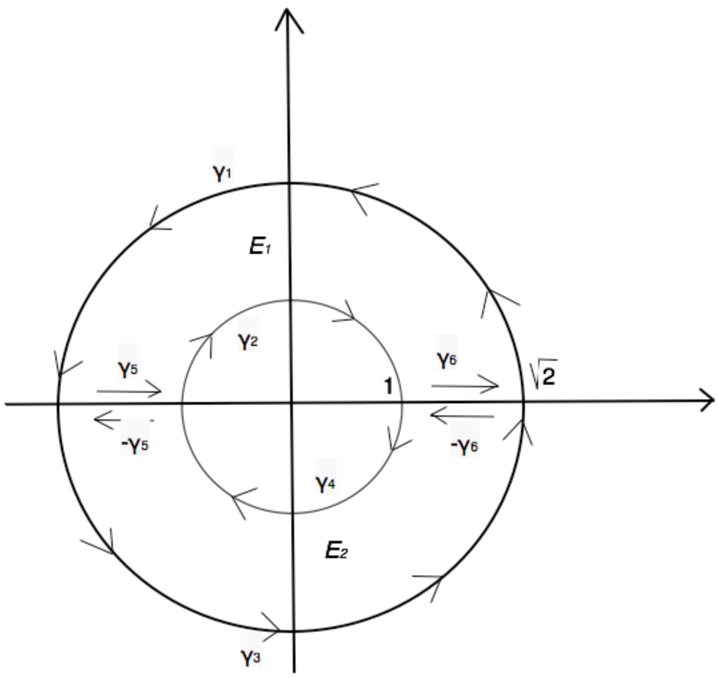
$$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

En mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** er illustreret i figur 5.13. Figuren opfylder **a)**, da for $x \in [a, b]$ er y begrænset af stykkevist C^1-funktioner, μ og ν. Figuren opfylder ikke **b)**, da ν ikke er en funktion med hensyn til variablen y.
En mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)** er illustreret i figur 5.15. Figuren opfylder **b)**, da for $y \in [c, d]$ er x begrænset af stykkevist C^1-funktioner, α og β. Figuren opfylder ikke **a)**, da β ikke er en funktion med hensyn til variablen x.

Tilfældet $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ er ikke omfattet af Sætning 9.6, da mængden $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, med $E \in \Omega$, ikke er enkeltsammenhængende og E ikke kan omkranses af en lukket kurve uden selvgennemskæringer. En variation af (9.12) gælder for E. Ved at opdele figuren i to dele opnås to enkeltsammenhængende mængder, E_1 og E_2, som hver opfylder betingelserne i Sætning 9.6 (se figur 5.16). En opdeling af E resulterer i fire nye kurvestykker, som tilføjes til de kurver, der omkranser delene, E_1 og E_2. Det antages, at kurverne der omkranser henholdsvis E_1 og E_2, gennemløbes i positiv omløbsretning i forhold til figuren. De overlappende rande af E_1 og



Figur 5.15



Figur 5.16

E_2 gennemløbes af kurver i modsat retning (se figur 5.16). Derfor gælder, at

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + (-\gamma_5) + \gamma_6 + (-\gamma_6) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

En variation af Sætning 9.6 gælder for E ved at opdele figuren i mindre dele, som omløbes i positiv omløbsretning:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{E_1} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y) \\ + \int_{E_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y)\end{aligned}$$

Denne konklusion baseres på indskudsreglen for Riemann-integraler (Eilers et al., 2015, s. 131), som generaliseres til en *dybsindig version*, der gælder for planintegraler (Eilers et al., 2015, s. 297). En variation af (9.12) gælder således for mængder, som ikke er enkeltsammenhængende.

Bemærk, at hver del af E, E_1 og E_2, som illustreret i figur 5.16, ikke opfylder **a)** og **b)** efter samme argumentation som mængderne i figur 5.13 og figur 5.15. Hvis E skal opfylde betingelserne, er det nødvendigt at opdele E i $E_1, ..., E_4$ som illustreret i figur 5.17. Her betegner γ_1 og γ_2 de kurver, der omkranser E_1 og E_2, som er de dele af disken, der befinder sig i henholdsvis første og anden kvadrant. Hver kurve er stykkevist C^1, og de fire delfigurer opfylder både **a)** og **b)**. Betragt eksempelvis E_1. Denne mængde kan skrives på formen:

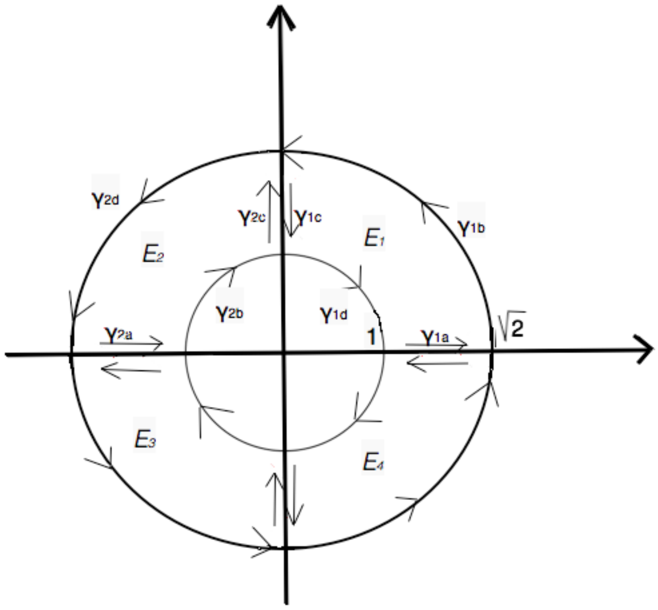
$$E_1 = \{(x,y) \mid x \in [0, \sqrt{2}], \mu(x) \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\}$$

hvor

$$\mu(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{hvis } x \in [0,1] \\ 0, & \text{hvis } x \in (1, \sqrt{2}] \end{cases}$$

og tilsvarende for $y \in [0, \sqrt{2}]$ er x også begrænset af stykkevist C^1-funktioner. Tilmed ses det, som tilfældet hvor E var delt i to dele, at de dele af randene, som er i fællesmængden, $E_1 \cap E_2$, gemmenmsløbes to gange. Kurverne, γ_1 og γ_2, der omkranser E_1 og E_2, er sammensat af flere C^1-kurver $\gamma_{1a}, \gamma_{1b}, \gamma_{1c}, \gamma_{1d}$ og tilsvarende for γ_2. Herved gælder, at for E_1 er $\gamma_1 = \gamma_{1a} + \gamma_{1b} + \gamma_{1c} + \gamma_{1d}$ og tilsvarende for E_2 er $\gamma_2 = \gamma_{2a} + \gamma_{2b} + \gamma_{2c} + \gamma_{2d}$. På figuren ses det, at $\gamma_{1c} = -\gamma_{2c}$ og derfor er $\gamma_1 = \gamma_{1a} + \gamma_{1b} + (-\gamma_{2c}) + \gamma_{1d}$. Derved gælder, at

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_2 &= \gamma_{1a} + \gamma_{1b} + (-\gamma_{2c}) + \gamma_{1d} + \gamma_{2a} + \gamma_{2b} + \gamma_{2c} + \gamma_{2d} \\ &= \gamma_{1a} + \gamma_{1b} + \gamma_{1d} + \gamma_{2a} + \gamma_{2b} + \gamma_{2d}\end{aligned}$$



Figur 5.17

Det tilsvarende gør sig gældende for de øvrige samlinger mellem de fire dele $E_1, ..., E_4$, der afgrænses af lukkede kurver uden selvgennemskæringer, $\gamma_1, ..., \gamma_4$. En opdeling af E i fire mindre dele, giver figurer som opfylder både **a)** og **b)**. Beviset for Sætning 9.6 dækker hver af delfigurerne og således også figuren E. Igen er indskudsreglen for planintegralet benyttet for at foretage konklusionen.

5.5.2 De fire potentialer

Den tilsigtede viden for F12.3 er som nævnt visualisering af mængder, som beviset for Sætning 9.6 dækker, og at det er muligt at udvide til andre specialtilfælde. Af bilag D fremgår en identifikation af potentialer for opgaven. Det uddybes i det følgende.

Adidaktisk potentiale: Opgaven præsenterer to betingelser, som begge indgår i beviset for Sætning 9.6 i Eilers et al. (2015). Det angiver et objektivt miljø for opgaven. Desuden er mængder, der opfylder den ene eller anden betingelse, også illustreret i Eilers et al. (2015, s. 298). Opgaven har adidaktisk potentiale, da de studerende kan foretage uformelle undersøgelser i det objektive miljø. Opgaven appelerer til en alternativ ramme, og de studerende kan trække på gammel viden om punktmængder i planen. For sidste delopgave kan de studerende trække på gammel viden om indskudsreglen for Riemann-integraler.

Potentiale inden for stoflig sammenhæng: De studerende kan trække på gammel viden om punktmængder i planen. De to første delopgaver har derfor potentiale inden for stoflig sammenhæng. De studerende er bekendte med indskudsreglen for Riemann-integraler, som nævnt oven for. Opgavens sidste delopgave har derfor også potentiale inden for stoflig sammenhæng, da de studerende kan bruge deres gamle viden til foretage redegørelsen af, at en opdeling af specialtilfældet E gør at (9.12) også gælder for dette tilfælde. Der er en forbindelse mellem potentialet inden for adidaktisitet og stoflig sammenhæng for opgaven.

Fordybelsespotentiale: De studerende illustrerer mængder, som dækkes af beviset for Sætning 9.6 og får indblik i, at der er forskel på sætningens generelle formulering og valg af bevis for specialtilfælde. Forbindelsen mellem første og anden delopgave har et potentiale inden for fordybelse. Denne del af potentialet afhænger af, hvorvidt de studerende trækker på viden under udvikling om Sætning 9.6 og beviset, som en del af det objektive miljø. Opgavens tredje delopgave har potentiale inden for fordybelse, da de studerende kan trække på viden under udvikling om Sætning 9.6 og udvikle deres viden om resultatet og muligheden for at bruge den på eksempler, der ikke opfylder betingelserne i definitionen.

Forskningspotentiale: Opgaven igangsætter aktiviteter, som indgår i kategorierne **A1**, **A2**, **A4**, **A6** og **A9**. De studerende tegner i første og anden delopgave forskellige mængder, og opgaveformuleringen appelerer til en geometrisk ramme og igangsætter aktiviteter fra **A6**. Den uformelle konstruktion er en aktivitet, som indgår i kategorien **A2**. I forbindelse med udviklingen af modellen blev det påpeget, at aktiviteter kategoriseret i **A6** kan indgå i forbindelse med aktiviteter fra andre kategorier. De geometriske undersøgelser problematiserer, at beviset for Sætning 9.6 er gjort i et specialtilfælde.
De uformelle undersøgelser sættes i forbindelse med et specialtilfælde af en ikke-enkeltsammenhængende mængde i den tredje delopgave. Denne aktivitet tilhører kategorierne **A1** og **A9**. De studerende redegører for, at (9.12) også gælder for dette specialtilfælde ved at trække på gammel viden om Riemann-integraler og derved forbinde gammel og ny viden. Med specialtilfældet i tredje delopgave får de studerende lejlighed til at undersøge muligheden for udvide andelen af mængder, der dækkes af beviset. Aktivi-

teten tilhører **A4**. De studerende får givet et specialtilfælde, og problemet er at redegøre for, at (9.12) også gælder for specialtilfældet. En af sætningens forudsætninger er ikke opfyldt, og de studerende undersøger, hvordan det er muligt at komme uden om dette problem. Denne del af potentialet opfylder ikke den globale egenskab, **G3**. Problemstillingen er ikke åben, da opgaveformuleringen angiver, at (9.12) gælder for specialtilfældet. Opgaveformuleringen er tilpasset de studerendes erfaring med temaet. Bemærk, at opgaveformuleringen ikke angiver en løsningsstrategi.

5.5.3 Mulige forhindringer

Sammenhængen mellem den generelle formulering i Sætning 9.6 og beviset for et specialtilfælde er en forhindring for de studerende. Beviset i Eilers et al. (2015) indeholder ingen argumentation for, at mængder, som opfylder **a)** og/eller **b)**, er enkeltsammenhængende, og det er også en forhindring, som de studerende må overvinde for at løse opgaven.
Opgaveformuleringen appelerer til intuitiv argumentation med udgangspunkt i en alternativ ramme i forhold til den formelle. Det er en didaktisk forhindring i opgaven, at rammen, som er udgangspunktet for ræsonnementer, er en anden end kursets hovedsigte. Rammen bruges ikke kun til at skabe intuition, men også som grundlag for argumentation. Instruktoren har i andre situationer fremhævet alternative rammer, som gavnlige for et intuitivt arbejde (se afsnit 5.2 og 5.3), og det giver incitament til, at de studerende kan overvinde forhindringen.

Med udgangspunkt i ovenstående a priori analyse opstilles følgende hypoteser om realiseringen af de fire potentialer på baggrund af de studerendes gamle viden:

> **De studerende** tegner tre mængder, der opfylder **a)** og **b)** og fremsætter argumenter for hvorfor mængderne opfylder betingelserne.
>
> **De studerende** forbinder de uformelle konstruktioner med beviset for Sætning 9.6.
>
> **De studerende** udvider deres undersøgelser til et specialtilfælde, som i udgangspunktet ikke opfylder **a)** eller **b)**.

5.5.4 Udviklingen af situationen

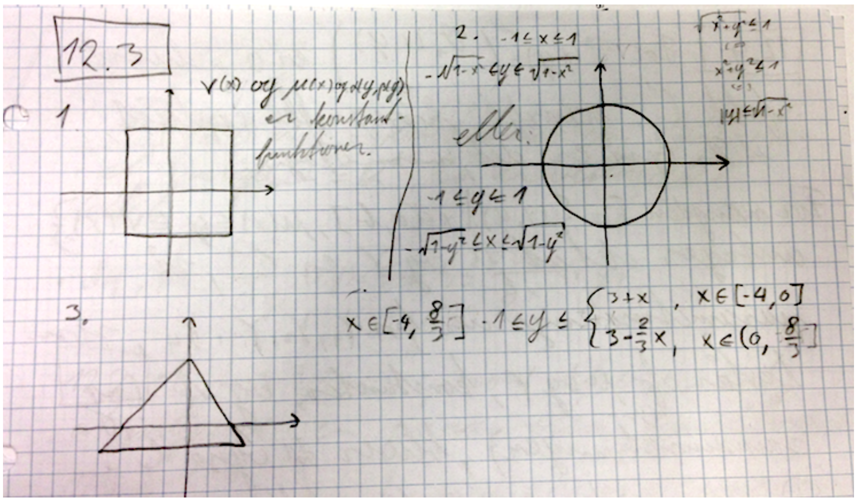
Diskussionen af opgaven udfolder sig i tre faser, som det fremgår af følgende tabel:

Fase	Titel	Episoder	Varighed
1	Tegne tre mængder, som opfylder **a)** og **b)**	1a-1e	6,5 min.
2	Tegne en mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** og en mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)**	2a	0 min.
3	Redegørelse for, at Greens formel kan anvendes i forbindelse med specialtilfælde, som ikke opfylder alle antagelser i sætningen	3a-3e	13 min.

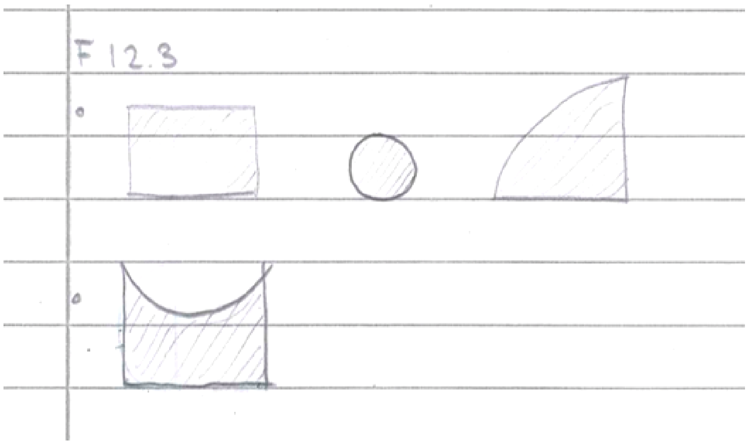
Det er kun *fase 3*, som omhandler teoretisk indhold fra An0. Analysen fokuserer på denne fase. *Fase 1* og *fase 2* er væsentlige, da de giver grundlag for at besvare den tredje delopgave. Analysen behandler fokusgruppens forberedelse til *fase 1* og *fase 2* samt en kort udredning af væsentlige interaktioner fra øvelsestimen.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 1 og 2: Ved den pågældende øvelsestime afleverede fire ud af syv studerende fra fokusgruppen noter (I_1, I_2, I_4 og I_6). To har besvaret F12.3.
I_1 tegner tre mængder: En firkant, en trekant og en cirkel. For hver mængde kommenterer I_1 på, hvad funktionerne, der begrænser henholdsvis x og y, skal være (se figur 5.18). Eksempelvis skriver I_1, at den tredje mængde er begrænset af en konstant funktion og en stykvist C^1-funktion som i a priori analysen (se afsnit 5.5.1). I_1 kommenterer ikke på, om mængden opfylder **b)**. Den studerende har ikke besvaret den anden delopgave.
I_6 har skitseret tre mængder til *fase 1* og en til *fase 2* (se figur 5.19). Der er ingen kommentarer til tegningerne. De tre mængder tilhørende *fase 1* har ligheder til de tre eksempler, som a priori analysen behandlede (se afnist 5.5.1) og opfylder alle tre både **a)** og **b)**. Den sidste af de fire tegninger, som tilhører *fase 2*, illustrerer en mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)**, da funktionen $\nu(x)$, som begrænser y oppefra, ikke er en funktion med hensyn til y. Der er ingen figur, som opfylder **b)**, men ikke **a)**.

De to fokusstuderende illustrerer mængder, som opfylder betingelserne **a)** og **b)**. Besvarelsen af anden delopgave er mangelfuld hos begge studerende.



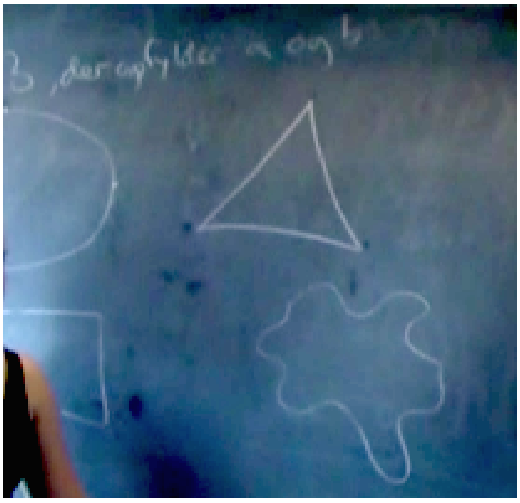
Figur 5.18



Figur 5.19

Udvikling af fase 1 ved øvelsestimen: Fasen er kollektiv og inddelt i fem episoder (se tabel s. 122). Instruktoren devoluerer miljøet og inddrager i den forbindelse den tilsigtede viden; Beviset for Sætning 9.6 i Eilers et al. (2015) dækker ikke alle enkeltsammenhængende mængder.

Instuktoren vurderer i hver episode, hvilke studerende der får ansvar for mere end at nævne en geometrisk figur, og derfor veksles mellem mikrokontrakt af individuel produktion og mikrokontrakt af tilslutning i de forskellige episoder. Instruktoren stiller, på eget initiativ, et nyt spørgsmål. Hun devoluerer et problem med udgangspunkt i miljøet, som inkluderer mængderne fra episode 1a-1c (se nederste højre hjørne af figur 5.20). I denne episode foregår produktionen i en mikrokontrakt af kollektiv produktion.



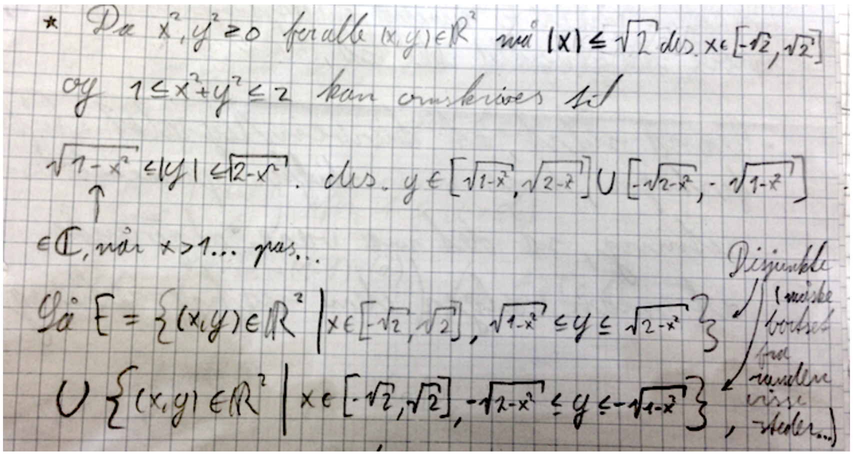
Figur 5.20: Tavle tilhørende episode 1e. Venstre side: En elipse og et rektangel

For første gang i fasen overlader instruktoren ansvaret for validering af, om en figur opfylder de to betingelser til alle studerende. Efter 15 sekunder, hvor ingen studerende har gjort antrak til at besvare det nye spørgsmål, begynder instruktoren selv at undersøge den nye figur. I episoden opstår en Topaze-effekt, da instruktoren vil undgå, at de studerende taber spillet med det berigede miljø. Instuktoren institutionaliserer, at figuren ikke opfylder **a)**. Institutionaliseringen følges op af en bemærkning om, at beviset for Sætning 9.6 gælder for *ret pæne* mængder, og det er en grov ting, at beviset kun føres for sådanne specialtilfælde.

Realisering af potentialer i fase 1 og 2: De studerende konstruerer figurer, der opfylder de to betingelser. I_1 validerer i sin hjemmeforberedelse, at figurerne opfylder betingelserne. Det adidaktisk potentiale har en observeret værdi i *fase 1*. Forskningspotentialet har også en observeret værdi. Undersøgelser i en geometrisk ramme er aktiviteter fra kategorierne **A2** og **A6**.
På instruktorens initiativ konstrueres et andet specialtilfælde, end opgaveformuleringen præsenterer, og ansvaret for valideringen af, hvorvidt figuren opfylder **a)** og **b)**, overlades i første omgang til de studerende. Den ekstra delopgave, som den nye figur indbyder til, har et adidaktisk potentiale grundet de foregående undersøgelser, der har beriget miljøet, og instruktorens

vekslende instituationaliseringer. Det adidaktiske potentiale for den nye delopgave realiseres i første omgang ikke. I et modificeret miljø bidrager I_5 til produktionen af en løsning.

Fokusgruppens hjemmeforberedelse til fase 3: I_1 er den eneste af de studerende i fokusgruppen, som har besvaret tredje delopgave. I_1 omskriver mængden E, så den har samme form som betingelse **a)** (se figur 5.21) og deler figuren i to. Den studerende argumenterer for, at de to nye dele opfylder **a)**.



Figur 5.21

Den studerende møder en forhindring i at bevæge sig fra den uformelle repræsentant til en formel ramme. For $x > 1$ fås komplekse funktionsværdier for funktionen $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. I_1 er ikke i stand til at overvinde forhindringen. Det er nødvendigt at begrænse y nedad af en stykvist C^1-funktion (se afsnit 5.5.1). I_1 bemærker, at de to mængder i foreningen opfylder **a)** (I_1 bruger formuleringen *er på form **a)***) og skriver: *og vi kan integrere ved Greens formel hver for sig, da fællesmægnden højst kan udgøres af randen af de to.* Det er korrekt, at opdelingen af figuren i to enkeltsammenhængende figurer gør det muligt at anvende Greens formel, som den er formuleret i Sætning 9.6 (se afsnit 5.5.1).

Udvikling af fase 3 ved øvelsestimen: Fasen er inddelt i fem episoder (se tabel s. 122). Instruktoren devoluerer et modificeret miljøet med en bemærkning om, at de studerende skal tegne mængden E. Den første episode (3a) omhandler illustrationen af E. I episoden er en studerende involveret i produktionen af viden, der foregår i en mikrokontrakt af individuel produktion. Erik fremhæver, at E ikke er enkeltsammenhængende og spørger, om det er det der menes med variation. Instruktoren instituationaliserer, at enkeltsammenhængende betyder: *At vi ret pænt kan gå fra et sted til et andet*, og at det ikke gælder for E, da der er et hul i midten. Instruktoren påpeger, at den umiddelbare konsekvens er, at Greens formel ikke gælder for specialtilfældet, men *det gør den bare alligevel* (citat fra instruktoren). Instruktoren stiller ikke et spørgsmål. Hun etablerer et miljø, som de studerende på eget initiativ interagerer med i episode 3b:

$\mathbf{I_2}$ Jamen, det kan du vel, hvis du deler den op, så den er enkeltsammenhængende sådan på stykkerne?

Inst. Så hvor skal vi dele op henne? Nu visker jeg lige linjerne [akserne] ud, så vi har lidt bedre begreb om det, når jeg laver nye linjer. Så hvor skal vi dele? Det er nemlig fuldstændig rigtigt. Det vi lader som om er, del den op i nogle stykker.

$\mathbf{I_2}$ Øhm.

$\mathbf{I_1}$ Fx. langs med x-aksen.

I_2 har ikke besvaret F12.3. Hun er alligevel i stand til at handle i miljøet. Produktionen i denne episode (3b) foregår i en mikrokontrakt af kollektiv produktion og baseres på de studerendes gamle viden.
I det modificerede miljø handler og formulerer Tim. Han besvarer instruktorens spørgsmål, om de to delfigurer af E opfylder begge betingelser:

Tim Det gør den jo ikke for y'erne.

Inst. Det gør den nemlig ikke.

Tim Men det kan du godt løse, hvis du også bare deler den op langs y-aksen.

Inst. Præcis. Nu fik vi klaret det med enkeltsammenhængende. Skide godt. Vi ved bare stadig ikke, vi har jo ikke vist, at det gælder for alle. Så skulle vi jo have, at tingene var på begge former [**a)** og **b)**]. Og så bliver der sagt, hey lad os prøve at sætte en streg her også [tegner lodrette streger på figuren ved y-aksen].

Instruktoren *etablerer med udgangspunkt i en af de fire dele af E et nyt miljø for situationen med henblik på at afgøre om delene opfylder betingelserne.* Episode (3c) omhandler argumentation for, at delene (kaldet $A_1, ..., A_4$) opfylder **a)** og **b)**. $A_1, ..., A_4$ tilsvarer a priori analysens $E_1, ..., E_4$. Episoden er som udgangspunkt kollektiv (instruktoren spørger: *Hvad tror vi?*), men produktionen sker i en mikrokontrakt af individuel produktion. Instruktoren afgiver i episoden ansvar i forbindelse med spørgsmål vedrørende de studerendes gamle viden. Instruktoren bibeholder ansvaret for valideringen og uddyber eksempelvis hvorfor, funktionen, der begrænser y nedad, er en stykkevist C^1-funktion (se afsnit 5.5.1). Overgangen til fasens sidste episoder sker med bemærkning om, at A_2, A_3 og A_4 er symmetriske til A_1. I den følgende episode er I_7 involveret i interaktionen. Instruktoren reformulerer, som det er tendens i flere situationer, den studerendes besvarelse:

Inst. Så har vi fire symmetriske, som vi må lægge sammen. Er det noget som helst ballade i det, vi har gang i?

$\mathbf{I_7}$ Ja og nej.

Inst. Ja og nej. Hvad er ja?

$\mathbf{I_7}$ Der er ligesom otte flader, som er ens, men fordi vi kommer forbi dem i omvendt omløbsretning, så går det ud med hinanden.

Inst. Lige præcis. Der er nogle sider, vi får med. Denne her vil vi jo ikke have med [peger på delingen mellem A_1 og A_4]. Vi var i gang med kun at tage hele den der donut, men nu får vi denne her side med to gange [delingen mellem A_1 og A_4] og denne her med to gange [delingen mellem A_1 og A_2] og hen her [delingen mellem A_2 og A_3]. Vi får simpelthen for meget med, men lad os kigge på mængden. For fuldstændig rigtig, som der bliver sagt, så har vi aftalt, at når vi bruger Greens, så går vi altid i positiv omløbsretning.

Det er bemærkelsesværdigt, at I_7 besvarer instruktorens spørgsmål. Denne studerende var involveret i episode 1a og nu igen i denne fase, og det selvom hun ikke har forberedt en løsning af F12.3. Hun er i stand til at påpege det mulige problematiske forhold ved at opdele en figur som E og kommentere på, hvorfor en variation af (9.12) gælder for E ved at opdele den. Kommentaren fra I_7 er mindre formel end a priori analysens bestemmelse af kurven, som omkranser de nye dele (se afsnit 5.5.1) og det forklarer, at instruktoren reformulerer besvarelsen. Reformuleringen baseres på den geometriske repræsentant. Den studerende har en intuition omkring løsningsstrategien og kan formulere og validere sin personlige viden og dermed gøre den fælles. Episoden omhandler viden under udvikling hos I_7, og produktionen sker i en mikrokontrakt af individuel produktion.

Instruktorens instituationaliseringen af, at man med metoden, som anvendt for specialtilfældet, kan udvide beviset til at gælde for mængder, som ikke i udgangspunktet opfylder **a)** og **b)** etablerer miljøet for en ny episode (3e). Instruktoren spørger, om man ville kunne gøre det samme for den fjerde figur (se figur 5.20). Tim svarer, at det er muligt, såfremt figuren kan opdeles i stykker, som opfylder både **a)** og **b)**, og dette må vurderes i det enkelte tilfælde. Produktionen sker i en mikrokontrakt af individuel produktion og omhandler viden under udvikling. Instruktoren institutionaliserer den tilsigtede viden; Strategien for mængder, som ikke opfylder **a)** og **b)**.

Realisering af potentialer i fase 3: I_1 løser den tredje delopgave. Potentialer inden for adidaktisitet og forskning har en observeret værdi i noterne fra I_1. Den studerende formulerer ikke (9.12) i specialtilfældet, men redegør for, at det er muligt. Aktiviteter indgår i kategorierne **A1**, **A4**, **A6** og **A9**. Erik udtrykker tvivl omkring fortolkningen af opgaveformuleringen og det adidaktiske potentiale har ikke den forventede observerede værdi sammenlignet med a priori analysen. Devolutionen er utilstrækkelig for den studerende. I situationen er der forskel på, hvorledes studerende og instruktor fortolker opgaveformuleringen. En redegørelse for, at E opfylder en variation af (9.12) fortolkes på to forskellige måder: Enten ved at redegøre for, at E kan deles i to enkeltsammenhængende mænder eller ved at redegøre for, at E kan deles i fire delfigurer, som alle opfylder **a)** og **b)**. Erik konkluderer, at E ikke er enkeltsammenhængende, og denne del af potentialet realiseres. I den efterfølgende episode har tre potentialer en observeret værdi. Opdelingen af E sker på initiativ fra I_2. Den observede værdi for det adidaktiske potentiale sættes i forbindelse med potentialet inden for stoflig sammenhæng. Potentialet for forskning realiseres også. De studerende undersøger, hvordan specialtilfældet kan sættes i forbindelse med (9.12) og aktiviteterne indgår i kategorierne **A1**, **A4**, **A6** og **A9**. Fortolkningen af en variation af (9.12) er i disse episoder som, at mængden E opdeles, så delfigurerne opfylder de to betingelser. Den afsluttende episode tager, som nævnt, udgangspunkt i et modificeret miljø. I det formuleres et nyt spørgsmål, som de studerende kan besvare på baggrund af deres viden under udvikling. I denne del af situationen observeres et potentiale inden for fordybelse. De studerende er i stand til at trække på viden under udvikling i forbindelse med nye specialtilfælde, som instruktoren introducerer. Potentialet inden for fordybelse har en observeret værdi i fasens afsluttende episode. De studerende benytter strategien i nye forbindelse.

5.5.5 Realisering af potentialer

Aktiviteter fra flere kategorier i modellen for forskningslignende situationer observeres i udviklingen af situationen. Den alternative ramme (**A6**) giver anledning til studenterundersøgelser både i hjemmeforberedelsen og ved øvelsestimen. I forbindelse med kategorien **A2** kan de geometriske repræsentanter bidrage til et meningsskabende arbejde, som kan danne grundlag for fordybelse, også for studerende som ikke har forberedt en løsning hjemmfra. Potentialet inden for stoflig sammenhæng og realiseringen af det i flere episoder har forbindelse til det adidaktiske potentiale. De studerende handler og formulerer adidaktisk, fordi de kan trække på gammel viden om punktmængder i planen. Samtidig muliggør undersøgelserne realiseringen af fordybelsespotentialet. Instruktoren introducerer nye figurer, og de studerende er i stand til at interagere med dette miljø på baggrund af viden under udvikling.

Forskningspotentialet realiseres også i forbindelse med specialtilfældet i den tredje delopgave. Aktiviteterne der observeres indgår i **A1**, **A6**, **A9** og afslutningsvist **A4**. Specialtilfældene i andre rammer giver de studerende mulighed for at problematisere beviset for Sætning 9.6, og hvorledes beviset kan føres for det generelle tilfælde. I et redesign er det interessant at sammenholde med mængderne fra første delopgave af F12.3 eller opgave F12.1 (se bilag C). Beviset for Sætning 9.6 kan føres med udgangspunkt i en figur som mængde 1 (se figur 5.13) og generaliseres ved samme argumentation som brugt i tredje delopgave. Et redesign kan indeholde en delopgave, der bevidstgør de studerende om denne sammenhæng og mulighed for at føre et alternativt bevis.

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
1a	Elipse der opfylder **a)** og **b)**	Inst. og en studerende	Tilslutning	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A2** og **A6**)
1b	Trekant der opfylder **a)** og **b)**	Inst. og Tim	Individuel produktion	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A2** og **A6**)
1c	Firkant der opfylder **a)** og **b)**	Inst. og I_7	Tilslutning	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A2** og **A6**)
1d	Nyt spørgsmål introduceres af instruktoren: Andet end geometriske figurer?	Inst. og flere studerende	Kollektiv produktion	Adidaktisk, forskning (**A1** og **A6**)
1e	Ny figur introduceres af instruktoren	Inst. og I_5	Individuel produktion	Adidaktisk, forskning (**A1** og **A6**), fordybelse
2a	Figurer, som opfylder enten **a)** eller **b)**	Inst.		

Episode	Titel	Fordeling af ansvar	Mikrokontrakt	Potentialer realiseret
3a	Tegne specialtilædet E og afgøre enkelt-sammenhængende	Inst. og Erik	Individuel produktion	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A1** og **A6**)
3b	Opdele E i to dele og se at disse er enkelt-sammenhængende	Inst., I_1, I_2 og Tim	Kollektiv produktion	Adidaktisk, stoflig sammenhæng og forskning (**A1**, **A6** og **A9**)
3c	Opdele E i fire dele og se at disse opfylder **a)** og **b)**	Inst. og få studerende	Individuel produktion	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A1**, **A6** og **A9**)
3d	Redegøre for, at (9.12) kan anvendes på hver af de fire dele	Inst. og I_7	Individuel produktion	Adidaktisk, stoflig sammenhæng, forskning (**A4** og **A9**)
3e	Opdele nye figurer introduceret af instruktoren	Inst. og flere studerende	Kollektiv produktion	Adidaktisk, fordybelse, forskning (**A1**, **A4** og **A6**)

Kapitel 6

Analyse af overordnede observationer

I specialet baseres besvarelsen af de empiriske forskningsspørgsmål primært på analyse af fire udvalgte situationer. Dette kapitel redegør for mere overordnede træk ved, hvordan F-opgaverne fungerede i den institutionelle kontekst. Denne del af analysen er løst forbundet til $\mathbf{RQ_1}$ og besvares på baggrund af data fra observationer fra eksamen, evalueringsskemaer, interviews med fokusgruppen samt observationer fra instruktormøder. Institutionen har en interesse i det overordnede billede af opgavedesignets funktion i kurset, og derfor behandler specialet også dette perspektiv.

De studerendes hjemmeforberedelse af F-opgaver

En af de problematikker, som instruktoren påpegede ved det indledende møde, var, at de studerende ikke forberedte sig, når kurset nåede sin anden eller tredje uge. Undersøgelse af fokusgruppens hjemmeforberedelse viser, at to ud af de syv studerende sjældent forberedte sig. I_3 og I_7 har begge afleveret noter fra hjemmeforberedelsen bare én gang. Antallet af studerende i fokusgruppen, som afleverede noter for hver øvelsesgang, er opgjort i nedenstående tabel:

Uge	Tirsdag	Torsdag
7		6
8	5	4
9	4	5
10	4	5
11	4	5
12	3	4

Tendensen er, at de studerende i fokusgruppen, som forberedte sig, gør det

konsekvent i hele kurset og gennemsnitligt afleverede 4,5 noter ved hver af de 11 øvelsestimer med F-opgaver på programmet. De to studerende, som afleverede noter én gang, blev spurgt ind til deres forberedelse i to interviews (se bilag F). Begge studerende henviste til, at der ikke var tid til at forberede løsninger til F-opgaver. I_7 mener desuden ikke, at hun fik noget ud af at forberede sig (se bilag F.2.6).
I evalueringsskemaet om F-opgaverne, besvarede 60 studerende følgende spørgsmål: *Hvis jeg ikke har løst en opgave inden øvelserne, skyldes det typisk*. 28 ud af de 60 er enige med I_7 i, at tid er en forklaringsfaktor i forhold til forberedelse af F-opgaver eller manglen på samme. Samtidig besvarede næsten halvdelen af de 82 studerende, at de arbejdede med F-opgaverne inden øvelsestimen. De studerende er tilbøjelige til at synes, at opgaverne var svære, og få var i stand til løse alle F-opgaverne (se tabel nedenfor).

Angiv i hvilken grad du er enig med følgende	Helt uenig	Uenig	Hverken enig eller uenig	Enig	Helt enig
Jeg forsøger normalt at løse F-opgaverne før øvelserne	8	15	25	28	6
Jeg har kunnet løse næsten alle F-opgaverne inden øvelserne	17	33	19	11	2

Det er uvist, om det er 41,5% af alle deltagere ved An0, som forberedte løsninger til F-opgaver. Undersøgelse af fokusgruppens hjemmeforberedelse og de studerendes besvarelse af evalueringsskemaet indikerer, at nogle studerende forberedte, sig og de der gjorde, gjorde det ikke kun de første par uger, men gennem hele kurset. Det er interessant, da det indikerer, at opgavedesignet har et adidaktisk potentiale. De studerende har kunnet arbejde med F-opgaverne, og nogle har kunnet løse dem alle sammen.

Forberedelsestid

De studerende, som besvarede evalueringsskemaet, har vurderet, hvor mange timer om ugen de har brugt på kurset. 46 ud af 88 studerende mener, at de har brugt 20 timer eller mindre om ugen på kurset. Det er under de ca. 23 timer, som kurset er normeret til ugentligt (Institut for Matematisk Fag, 2014, An0 kursusbeskrivelse).
I_1, I_2, I_4, I_5 og I_6 brugte 5-20 minutter på at forberede en F-opgave. Fokusgruppen mener at opgaver, som igangsætter aktiviteter fra **A2**, tog kortere tid at forberede end opgaver, som igangsætter aktiviteter fra **A3** eller **A5** (se bilag F). I opgavedesignet er der 12 opgaver, der igangsætter aktiviteter fra **A2** og 27 opgaver, der igangsætter aktiviteter fra **A3** eller **A5** (se

bilag D). Hvis man regner med en forberedelsestid på 20 minutter pr. opgave, giver det samlet set en maksimal forberedelsestid på 19 timer for de 57 F-opgaver. Arbejdsbelastningen for forberedelse er normeret til 112 timer for kursets syv uger. Forberedelsen inkluderer også løsning af 31 opgaver fra Eilers et al. (2015), tre afleveringsopgaver og læsestof fra Eilers et al. (2015). Hvis de studerende brugte tilsvarende tid på at forberede opgaver fra Eilers et al. (2015), efterlader det en resttid på 12 timer om ugen til afleveringsopgaver, hvoraf kun to skal bestås for at være eksamensberettiget, og læsestof. Bemærk, at estimatet er udregnet med den maksimale forberedelsestid og det er uvist om fokusgruppen har brugt tilsvarende tid på at forberede de 31 opgaver, som ikke er F-opgaver. Estimatet stemmer ikke overens med institutionens forventninger til de studerendes forberedelsestid. Det er uvist, hvor meget tid deltagerne på An0 generelt brugte på at forberede F-opgaver, da de i evalueringsskemaet spørges til, hvor meget tid de brugte på alle kursuselementer.
Der er en diskrepans mellem institutionens forestilling om de studerendes forberedelsestid, og den tid fokusgruppen og andre studerende faktisk brugte på at forberede sig.

De studerendes opfattelse af særlige træk ved F-opgaver
Alle studerende i fokusgruppen oplevede, at de ikke vidste, om de havde løst opgaver, som igangsætter aktivitet fra **A3**. I_2 mener, at det, at man reflekterede over en opgave gav idéer til løsningsstrategier. For denne studerende var det ikke nødvendigt at være sikker på, at man har løst opgaven (se bilag F.1.4). Modsat opgaveprogrammet fra Eilers et al. (2015) var F-opgaverne, ifølge I_6, *lettere at løse halvt* (se bilag F.1.3). Et indirekte træk fra beskrivelsen af forskningslignende situationer (se afsnit 3.4.1) er, at forskeren ikke altid bliver færdig med sit arbejde. De studerende har samme opfattelse af arbejdet med F-opgaverne. Ovenstående kommentarer indikerer, at studerende fra fokusgruppen betragter det som en kvalitet ved F-opgaverne, at designet har denne forskningslignende egenskab.

De studerendes opfattelse af at tale med andre om F-opgaver
I_4 fremhæver, at F-opgaverne gav mulighed for kvalitative diskussioner ved øvelsestimen. De studerende diskuterede blandt andet, hvad et godt eksempel er. F-opgaverne fungerede som oplæg til diskussion. De studerende kunne inden øvelsestimen kommunikere med andre studerende om løsning af en F-opgave, da opgaverne ikke er *facit-opgaver* (se bilag F). Forskningen i matematik skabes, ifølge Burton (2004), i sociale realtioner. De studerendes opfattelse af at kommunikere om F-opgaverne, indikerer, at forskningspotentialet er realiseret i større omfang, end observationerne fra øvelsestimerne illustrerede. Kategorien **A8** havde en værdi uden for øvelsestimen.

De studerendes opfattelse af F-opgavernes funktion i kurset og ved eksamen

I_7 giver udtryk for, at F-opgaverne lagde et pres i forhold til eksamen. Hun har ikke oplevelsen af, at opgaverne var en hjælp for hende, men i stedet en tilføjelse til pensum (se bilag F.2.6). Også I_3 påpeger, at brugen af opgaverne ved eksamen ikke må være en byrde for de studerende (se bilag F.2.4). De to studerende giver udtryk for et retrokognitivt forhold til viden (se afsnit 3.4). I_7 taler om at *lære udenad* og huske parametriseringer af kurver i forbindelse med eksamensspørgsmål 12 (se bilag F.2.6). Begge studerende arbejdede sjældent med F-opgaverne inden øvelsestimerne.
Nogle studerende har den opfattelse, at pensum (deriblandt F-opgaverne) var for omfangsrigt. 35 ud af 89 studerende tilkendegiver i evalueringen af An0, at arbejdsbyrden på kurset var stor eller for stor. Ikke alle studerende deler den opfattelse. De fem andre studerende i fokusgruppen havde en positiv oplevelse fra at arbejde med F-opgaverne. De har den opfattelse, at designet som helhed var afvekslende at arbejde med og gav overblik over kursets faglige indhold.

Alle fra fokusgruppen har den opfattelse, at i eksamenssammenhængen var de mest relevante opgaver dem om at læse og dissekere et bevis eller om at give analoge beviser. For I_5 var aktiviteter fra **A5** mere givende end aktiviteter fra **A3**, da *man skal tjekke op på interne henvisninger* (se bilag F.1.2). Fokusgruppen brugte F-opgaver som et redskab til at finde et fokus i teorien i forbindelse med forberedelsen af eksamensdispositioner, og de brugte dem som supplerende spørgsmål, de kunne stille hinanden (se bilag F.2). 63 ud af 82 studerende, som besvarede evalueringsskema om F-opgaver, er enige eller helt enige i, at F-opgaverne virkede relevante i forbold til eksamen. Ingen er helt uenige i dette udsagn.
Fokusgruppen er generelt enige om opgaver, som igangsætter aktiviteter fra **A3**, ikke kun var mest relevante i eksamenssammenhæng. Det var også de opgaver, som var mest interessante at diskutere ved øvelsestimen. Det er ikke underligt, at opgaver, der igangsætter aktiviteter fra **A3** og **A5**, opleves som de mest relevante i eksamenssammenhæng. Aktiviteterne fokuserer netop på eksamens hovedsigte, beviserne fra Eilers et al. (2015). Der er en forbindelse mellem disse kategorier og potentialet inden for fordybelse. De forskningslignende aktiviteter har, ifølge de studerendes udsagn, givet dem mulighed for udvikle en dybere viden om teoretiske objekter.

De studerendes opfattelse af F-opgaverne er, som det fremgår, blandet. En studerende skriver i evalueringen om F-opgaver:

> *De er fuldstændig overflødige. De virker som en dårlig lapning*

> *på KU's "undervisningen skal være forskningsrelevant". Men helt ærligt... Kurset er grundlæggende matematisk analyse og F-opgaverne er strengt overflødige. Den bredere indsigt de skulle føre om forståelsen af beviserne er allerede givet ved bare man har forstået beviset og løst en opgave med brug af sætningen. Jeg er dybt skeptisk over for F-opgaverne.*

Det uddybes ikke, hvad den studerende mener med: *bare man har forstået beviset*. Andre fremhæver, at de oplevede at *tænke matematisk*, når de arbejdede med F-opgaver. Flere så gerne, at der var flere F-opgaver, og at øvelsestimerne alene baseredes på diskussion af F-opgaver. Der er således forskel på de studerendes opfattelse af F-opgaverne. De forskellige opfattelser afspejler også ved, om de studerende fremhæver epistemologiske værdier af de forskningslignende aktiviteter, som F-opgaverne havde mulighed for at igangsætte.

De studerendes præsentationer ved eksamen

Ved en gennemgang af beviset for Sætning 6.23 (Eilers et al., 2015, s. 187) om uafhængighed af differentiationsrækkefølgen sagde en eksaminand: *Jeg skal huske at sige, at middelværdisætningen kan vi bruge, fordi det er på lukket og begrænset interval*. Eksaminanden inddrog noget i sin gennemgang, som ikke ekspliciteres i Eilers et al. (2015). Formuleringen er tilbageskuende. Eksaminanden henviser muligvis til opgave F5.1, men aktiviteten igangsat af **A3** er retrospektiv. Eksemplet er ikke enestående. Mange eksaminander brugte ordet *huske* flere gange i løbet af eksaminationen. Det indikerer, at de studerende i eksamenssammenhæng sjældent forholdte sig spørgende til viden. Betingelsen ved eksamen er dybereliggende i institutionen; De studerendes evalueres ikke ved, hvordan de forholder sig til viden. Eksamen udstiller på den måde, at der er forskel på institutionel og epistemisk værdi af en aktivitet. Eksaminanden nævnt ovenfor fik karakteren 7 ved eksamen. Det samme indikeres af, at nogle eksaminander præsenterede en bevisgennemgang som mere eller mindre var en kopi af en pencast af beviset. Eksemeplvis en gennemgang af Sætning 5.17 (Eilers et al., 2015, s. 138) i forbindelse med eksamensspørgsmål 3 om Riemann-integralet. Eksaminanden brugte en særlig notation, som ikke stammer fra Eilers et al. (2015), men derimod bruges i pencasten om sætningen: Her betyder $j \dashv i$, at $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$ for forskellige inddelinger D og D'. Kursets forelæser var eksaminator ved eksaminationen og genkendte naturligvis notationen og bevisstrukturen fra pencasten. Eksaminanden fra karakteren 10.

Nogle eksaminander inddrog specialtilfælde som perspektiverende eksempler efter bevisgennemgangen. Specielt to F-opgaver gav anledning til denne aktivitet ved eksamen. For spørgsmålet om Taylors formler i én variabel (eksamensspørgsmål 2) var det særligt opgave F2.1, som gav eksaminanden mulighed for at anvende teorien på et konkret eksempel ($f(x) = e^x$) og kommentere på Taylor polynomiers anvendelse. For spørgsmålet om Greens Sætning (eksamensspørgsmål 12) var det særligt F12.3, som de studerende brugte til at forklare, hvilke mængder beviset gælder for, og hvorledes en variation af Sætning 9.6 gælder for ikke-enkeltsammenhængende mængder (se afsnit 5.5.1). To studerende fra fokusgruppen blev eksamineret i eksamensspørgsmål 12. De to studerende bekræfter, at de brugte F12.3 som perspektiverende til spørgsmålet om, hvilke mængder beviset for Greens formel dækker. De bragte begge opgaven op ved eksamens afslutning (se bilag F.2.3 og F.2.5).

Observationer af eksaminationer i eksamensspørgsmål 4 om stamfunktionsproblemet i én variabel og i eksamensspørgsmål 8 om Taylors formel i flere variable og analyse af stationære punkter har en ting til fælles: I eksaminandernes gennemgang blev F-opgaverne i meget ringe grad inddraget. Opgave F4.4 igangsætter aktiviteter fra **A3** (se bilag D), og ifølge fokusgruppen er sådanne relevante i eksamenssammenhæng, men i praksis blev opgavens potentialer ikke realiseret ved eksamen. Bemærk, at denne konklusion foretages på baggrund af observation af to eksaminationer (se afsnit 4). De to eksaminander fik karakterne 4 og 12. Opgave F8.1 omhandler beviset for Sætning 6.24 (Eilers et al., 2015, s. 191), som var det bevis, de to eksaminander gennemgik i forbindelse med eksamensspørgsmål 8. Begge eksaminander udviste mangel på overblik over bevisets struktur og potentialerne for F8.1 realiseres ikke i eksamenskonteksten. De to eksaminander fik begge karakteren 02. Det er vanskeligt at konkludere, hvad F-opgaver har af betydning for de studerende på baggrund af de fire eksaminationer. Analysen af observationerne indikerer, at ikke alle studerende havde gavn af F-opgaverne i eksamenssammenhængen, og også at det afhang af hvilket eksamensspørgsmål, der blev eksamineret i.

De studerende, som ved eksamen fik karakterne -3, 00 eller 02, kommenterede sjældent på, hvor antagelserne for en sætning bruges i beviset og anvendte sjældent figurer i deres præsentation. En eksaminand blev i forbindelse med gennemgang af Sætning 6.11 (Eilers et al., 2015) spurgt til antagelserne for middelværdisætningen og svarede, at det *vel er noget med endepunkterne?*. Eksaminator svarede, at *der må være nogle egenskaber involveret som eksempelvis kontinuitet*. Eksaminanden svarede: *Jamen, så må det være kontinuitet* og efterfølgende: *Differentiabilitet så?* Der er ikke en F-opgave i designet, som igangsætter aktiviteter fra **A3** og direkte adresserer, hvorfor middelværdisætningen kan bruges i forbindelse med beviset for Sæt-

ning 6.11 (se bilag D). I udviklingen af situationen omkring F6.1 (se afsnit 5.3) ved øvelsestimen spillede Sætning 6.11 en rolle. Det selvom sætningen ikke er brugbar som løsningsstrategi. Eksaminanden var ikke deltager ved det pågældende øvelseshold og observationen fra eksamen indikerer, at potentialet inden for fordybelse ikke er realiseret for eksaminanden. Eksaminanden fik karakteren 02.
Eksaminander, som fik karakterne -3, 00 eller 02 var ofte ustrukturerede i deres bevisgennemgang og indikerede en vis grad af udenadslære, hvor eksaminanderne i løbet af gennemgangen sagde ord som *gætte*. Det er udtryk for et retrokognitivt forhold til viden, og i ovenstående eksempel minder eksaminandens adfærd om den kontraktadfærd, som eleven Gaël udviser (se afsnit 2.3). Eksaminator og censor spurgte sjældent denne gruppe eksaminander om problemstillinger fra F-opgaverne. I stedet blev der fokuseret på definitioner og begrebsafklaring.

De studerendes vanskeligheder ved at redegøre for definitioner
Ved eksamen havde flere studerende vanskeligt ved at definere teoretiske objekter. En eksaminand skulle definere kurvelængden i forbindelse med eksamensspørgsmål 9. Sætning 7.15 (Eilers et al., 2015, s. 223) giver en metode til at udregne kurvelængden ved et sædvanligt Riemann-integral, og denne sætning er hovedfokus i eksamensspørgsmålet. Definition 7.14 (Eilers et al., 2015, s. 223) definerer kurvelængden. Da eksaminanden blev spurgt til definitionen ved en eksaminationen, var svaret: *Definere det? Er det så ikke bare længderne?* Ved denne eksamination brugte eksaminator 10 minutter på at diskutere længden $\ell(D)$ (se s. 91).
I forbindelse med beskrivelsen af **A10** (se afsnit 3.4.1) blev det fremhævet, at definitionsprocessen er en kompleks proces, hvor definitionen fungerer forskelligt i forskellige momenter af definitionsprocessen. Der er flere F-opgaver, der behandler betydningen af definitionerne fra Eilers et al. (2015) i teorien (se bilag D). Forbindelsen mellem F10.3 og F10.4 (se afsnit 5.4.1) er et eksempel på opgaver, som tydeliggør definitioners rolle i teorien. Analysen af observationerne fra eksamen indikerer, at nogle studerende har vanskeligt ved at sætte defintionen i forbindelse med sætninger og/eller eksempler fra Eilers et al. (2015). Potentialerne inden for forskning og fordybelse har ikke observeret værdi i disse tilfælde.
Andre eksempler på definitioner, som eksaminanderne havde vanskeligt ved at redegøre for, er uniform kontinuitet (Eilers et al., 2015, Definition 3.36), finhed af en inddeling D i forbindelse med definitin af Riemann-integralet (Eilers et al., 2015, s. 121), og I_3 giver i et interview udtryk for, at hun ønsker en opgave, som diskuterer, *hvad en kurve egentlig er* (se bilag F.2.4). I_3 blev eksamineret i eksamensspørgsmål 10 (se bilag F.2.4).

Den del af forskningspraksissen, som **A10** emulerer er vigtig. De studerende kan både formulere og forfine definitioner, når de arbejder med et problem om eksempelvis et bevis. Fokus ved den mundtlige eksamen er ganske vist beviserne fra Eilers et al. (2015), men definitionsprocessen kan indgå i bevisprocessen, og de studerende kan udføre sådanne aktiviteter (Lakatos, 1964). De studerendes vanskeligheder ved at redegøre for definitioner fra Eilers et al. (2015) er specificeret i forhold til de studerende arbejde med F-opgaver og deres funktion ved eksamen, da det er et overordnet træk, som peger mod en mulig forbedring af opgavedesignet (se kapitel 7).

Præsentation af formålet med F-opgaver
For en studerende som I_7 er selve betegnelsen "F-opgaver" uhensigtsmæssig. Den studerende oplevede, at institutionen forventede, at hun arbejdede på måder, som hun ikke selv mener, at hun var parat til. Hun bruger analogien, at man skal kende *livshistorien*, førend man kan eksperimentere på egen hånd (se bilag F.2.6).
F-opgaverne blev introduceret til de studerende i den detaljerede kursusbeskrivelse (se bilag A) og ved den første forelæsning. I kursusbeskrivelsen fremhæves, at F-opgaverne var grundlag for eksamen. Beskrivelsen indeholder flere argumenter for revisionen af opgaveprogrammet for kurset:

> At tilpasse opgaveprogrammet bedre til kursets primære målsætninger
>
> At stille skarpt på centrale problemstillinger relateret til de 12 mundtlige eksamensspørgmål
>
> At forsøge at emulere sund forskningspraksis i teoretisk matematik ved at stille de spørgsmål, man som aktiv matematikbruger konstant bør stille sig selv, når man tilegner sig – eller opfinder – ny matematik
>
> At give deltagerne et effektivt supplement til lærebogen

Det fremhæves, at opgaverne ikke er noget nyt forstået på den måde, at de er en ekspliciteringaf spørgsmål, som altid har haft relevans. For I_7 er det en uoverkommelig forhindring, at den studerende skulle udføre aktiviteter, som ligner forskning. Forordet til det nye opgavedesign og opgavernes betegnelse spiller på en rolle, som er helt uafhængigt af opgaverne. Det er signalværdien, som en studerende som I_7 i første omgang reagerer på.

Problematiske betingelser for brug af F-opgaver
Instruktorerne oplevede udfordringer ved enkelte opgaver som F2.2 og F6.1. Begge blev diskuteret ved instruktormøderne.

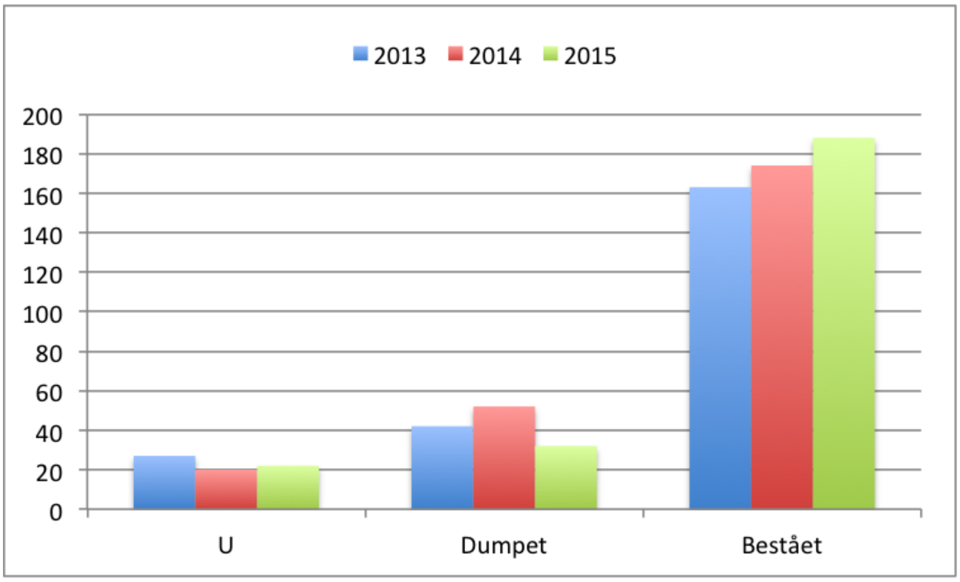
Flere instruktorer gav udtryk for, at de ikke fandt opgaver som F1.4 og F8.4 relevante for de studerende. Begge er perspektiverende i forhold til det teoretiske indhold fra Eilers et al. (2015). De samme instruktorer har givet udtryk for, at deltagerne på deres øvelseshold forholdt sig passive ved øvelsestimerne. Denne problematiske betingelse har forbindelse til de studerendes arbejde med F-opgaver (se afsnit s. 125). Fokusgruppen beskriver F-opgaverne som gode oplæg til diskussion. Kommunikationen er betinget af, at de studerende forbereder løsninger. Ellers bliver resultatet, at instruktoren forelæser for de studerende. Det er ikke hensigten med F-opgaverne. De to nævnte opgaver igangsætter begge aktiviteter fra **A8** og **A9** (se bilag D), og de studerende må aktivt opsøge, vurdere og forbinde viden, hvis forskningspotentialet skal realiseres. Det kommer igen tilbage til, at formålet med et nyt opgavedesign ikke opfyldes, hvis ikke de involverede parter er motiverede for at arbejde med dem.
30 ud af 82 studerende studerende skriver i evalueringen, at de ikke synes, at F-opgaverne var lette at komme i gang med. 25 er hverken enig eller uenig i dette. Nogle studerende har opfattelsen af at være udfordret i det adidaktiske arbejde med F-opgaverne. Samtidig skriver flere studerende, at årsagen til, at de i nogle tilfælde ikke har kunnet løse en opgave, var, at det *virker lidt uoverskueligt*. Ordet *overskue* bruges også jævnligt af de studerende fra fokusgruppen. Det indikerer, at nogle studerende har oplevelsen af, at hvis en opgave ikke kunne løses på få minutter, så var den for svær (Schoenfeld, 1992, s. 69).

Eksamensresultat

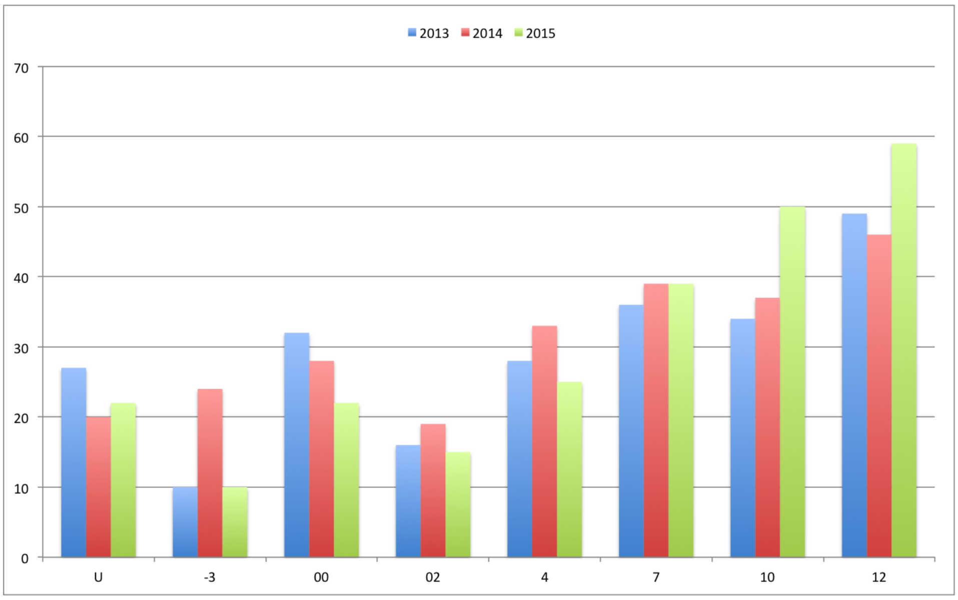
Eksamensresultater for An0 fra de senest tre år er illustreret i figur 6.1 og 6.2. Eksamensresultatet fra 2015 er forbedret i forhold til 2013 og 2014. Beståelsesprocenten var ca. 70% i både 2013 og 2014. 77,7% af deltagerne ved An0 i 2015 bestod eksamen. Resultatet for den betingede karakterfordeling blandt de beståede er også forbedret i 2015:

År	Betinget karakterfordeling blandt beståede
2013	8,12
2014	7,84
2015	8,57

Det betingede karaktergennemsnit blandt de beståede er interessant, da et af formålene med revisionen af opgaveprogrammet var, at opgaveregningen fokuserede på centrale problemstillinger vedrørende teoretisk indhold i de 12 eksamensspørgsmål. Den betingede karakterfordeling blandt de beståede indikerer, at de studerende i højere grad end de foregående år har demonstreret overblik over bevisernes logiske opbygning og naturligvis også det teoretiske indhold. Det er ikke muligt at afgøre, hvilken betydning F-opgaverne har for denne udvikling. Som tidligere nævnt er der andre nye tiltag ved An0 i 2015. Eksempelvis pencasts og ændring af et af eksamensspørgsmålene (se afsnit 4), som analysen af observationer fra eksamen indikerer, også havde en betydning. De studerende inddrog problemstillinger, som er angrebet i nogle F-opgaver. Det indikerer alt andet lige, at fordybelsespotentialet har en værdi for de F-opgaver, som de studerende fandt nyttige at bruge ved eksamen.



Figur 6.1



Figur 6.2

Kapitel 7

Konklusion

I dette kapitel gives nogle mulige forklaringer på forskelle mellem teoretiske og observerede værdier for de fire potentialer. I den forbindelse diskuteres andre muligheder for et redesign af F-opgaverne end dem, der allerede er foreslået i tilknytning til realisering af potentiale i de fire udvalgte situationer. Forskellene fremgår og er delvist forklaret i analyserne af de fire udvalgte situationer (se afsnit 5.2.5; 5.3.5; 5.4.5; 5.5.5) samt analysen af overordnede observationer (se kapitel 6).
Endvidere fremsættes en række perspektiver til specialets besvarelse af det teoretiske forsningsspørgsmål og designproblemet.

Randbetingelser for An0 og iscenesættelsen af F-opgaver
F-opgaverne igangsatte forskningslignende aktiviteter, og designet respekterede samtidig randbetingelserne for An0. En betingelse var øvelsestimens organisering og funktion i kurset. I alle fire situationer påvirkede den didaktiske tid instruktorens afgivelse af ansvar. En tendens var, at instruktoren reducerede opgaverne. Ved øvelsestimen syntes målet at være at nå alle opgaverne i opgaveprogrammet. Det baseredes på forventningen om, at de studerende og instruktoren vandt spillet, hvis de studerende havde *set* løsninger til alle opgaver. Samtidig var det kursets ambition, at de studerende deltog aktivt i diskussionerne ved øvelsestimen. De to forventninger stemmer ikke overens. Uoverensstemmelsen giver anledning til forskellige ændringsforslag til et redesign. De studerende var i stand til at løse mange tekniske delopgaver fra F-opgaver. En mulighed er at differentiere, hvilke delopgaver der stilles til hjemmearbejde og lade de studerende handle i dette miljø. Et sådant objektivt miljø har adidaktisk potentiale, da de studerende kan trække på gammel viden. Der er således en forbindelse til potentialet inden for stoflig sammenhæng. Det er en af årsagerne til, at det er væsentligt at skelne mellem de studerendes gamle viden og viden under udvikling.

De to former for viden har forskellige funktioner i overgangsproblemet. Opgaver med potentiale inden for stoflig sammenhæng skaber sammenhæng mellem teori og praksis, mens opgaver med potentiale inden for fordybelse udvikler og forfiner teoretisk viden. Arbejdet ved øvelsestimen kan i dette redesign fokuseres på de mere teoretiske opgaver som i situationen omkring F6.1, hvor de studerende deltog aktivt i *fase 6* (se afsnit 5.3.4). Et redesign med denne ændring kræver dog et stærkere design af den didaktiske situation ved øvelsestimen. En anden mulighed er at differentiere, hvad instruktoren skriver på tavlen, og hvad der i stedet kan diskuteres mundtlig ved øvelsestimen. Som nævnt indledningsvist i kapitel 5, skrev instruktoren som udgangspunkt alt på tavlen. Det var tidskrævende og havde den konsekvens, at instruktoren havde meget ansvar i faserne. Ved at reducere tiden, der bruges på, at instruktoren skriver opgaveløsninger på tavlen, frigives tid til adidaktiske studenteraktiviteter, tid til at fremhæve de studerendes forhindringer mv.

De studerende blev introduceret til opgavedesignet som en del af 2016-projekterne (se kapitel 1). I forskellige kursuselementer blev der givet flere argumenter for revisionen af kursets opgaveprogram, som fokuserede på institutionelle værdier af forskningslignende aktiviteter. Et muligt redesign er, at opgaverne omtales "H-opgaver", som refererer til, at opgaverne er en hjælp til at fokusere på væsentlige problemstillinger og forhold i teorien. Introduktionen til opgavdesignet kunne med fordel fokusere på den epistemiske værdi af aktiviteterne.
En anden mulighed for redesign er at give opgaveprogrammet en anden funktion i eksamenssammenhængen. Der kan eksempelvis stilles krav om, at de studerende inddrager en eller flere af opgaverne i bevisgennemgangen, hvis der er opgaver til det, eller at de studerende trækker en opgave, som de skal redegøre for løsningen af.

En betingelse var kursets fokus på teoretisk indhold, der præsenteres i en formel ramme. I nogle situationer skyldtes forskellen mellem teoretiske og observerede værdier af potentialer, at de studerende ikke brugte alternative rammer, som muliggør realiseringen af potentialerne. De studerende bevægede sig ikke naturligt mellem en heuristisk og en formel ramme, da kurset ikke fokuserede på bevægelsen mellem rammerne. Eksempelvis fokuserede kurset ikke på brugen af CAS-værktøj. Det betød, at de studerende var mindre tilbøjelige til at arbejde i alternative rammer. De studerende opsøgte sjældent viden om forbindelsen mellem kursets indhold og andre områder. Det skyldtes, at kurset ikke fokuserer på forbindelsen til andre områder såsom mekanik.

Svagt teoretisk potentiale inden for adidaktisitet i nogle situationer

F6.1 (se afsnit 5.3) er et eksempel på en opgave, hvor det adidaktiske potentiale ikke var stærkt nok. Et redesign med en delopgave som, ekspliciterer en løsningsstrategi (se afsnit 5.3.5), fratager de studerende muligheden for på eget initiativ at afprøve denne strategi eller prøve sig frem med andre begyndelsesstrategier. Årsagen til, at sådanne delopgaver ikke er en del af opgavedesignet, er inkorporeringen af **G3** i modellen for forskningslignende aktiviteter. Situationen fratages en del af potentialet inden for forskning ved at informere de studerende om en løsningsstrategi til opgaven. Andre situationer, som den omkring F1.2 (se afsnit 5.2), illustrerer, at de studerende var i stand til at bruge alternative rammer. Initiativet til strategien opstod primært, hvis de studerende var blevet opfordret eller inspireret til det ved, at instruktoren brugte strategien. Derfor er ændringen ikke nødvendigvis bundet til opgavedesignet; En mere aktiv brug af heuristiske rammer ved forelæsninger, i pencasts mv. kan have samme effekt. Den efterfølgende situation omkring F6.1 bekræfter, at opfordringen ikke kun skal komme fra instruktoren. Det adidaktiske potentiale er det mest fundamentale af de fire potentialer, og hvis ikke de studerende kan handle i miljøet, så kan de heller ikke udføre forskningslignende aktiviteter. De alternative rammer er en strategi, som de studerende kan benytte i forbindelse med opgaver fra designet, da det giver mulighed for at trække på gammel viden eller viden under udvikling. På baggrund af specialets analyser af udvalgte situationer konkluderes det, at for at realisere sådanne potentialer kræver det, at der opfordres til disse strategier. På den måde sættes den første dimension af den didaktiske kontrakt, det matematiske domæne, i spil. Uanset hvilke af disse designændringer et redesign måtte have, mindskes risikoen for, at alternative rammer er didaktiske forhindringer for de studerende jvf. Joubert (2013).

De studerendes investering af tid

F-opgaverne igangsatte forskningslignende aktiviteter hos de studerende, som arbejdede med opgaverne. Opgaverne opfylder naturligvis ikke institutionens behov, hvis ikke de studerende arbejder med dem. Det er bemærkelsesværdigt, at halvdelen – nogle gange mindre – af de studerende forbereder sig inden øvelsestimen. En forklaring er, at det adidaktiske potentiale er for svagt for nogle opgaver, men det forklarer ikke alt. Nogle studerende forsøger ikke at løse opgaverne, og det er ikke en tendens, der opstår i løbet af kurset; Den er der fra kursets første uge. Det er svært at afklare, hvor denne tendens og tilgang til opgaveløsning kommer fra. Nogle instruktorer har givet udtryk for, at de ikke selv løste opgaver, da de var deltagere ved

An0. Det er således ikke et nyt fænomen. De studerendes manglende investering af tid i hjemmeforberedelsen har den betydning, at et opgavedesign ikke kan opfylde institutionens behov. Problemet er antageligt dybere forankret i institutionen, og derfor må det løses her. Et nyt opgavedesign gør ikke forskel, hvis de studerende mangler motivation til at arbejde med det. Det er interessant at undersøge, hvordan denne studiekultur kan ændres. Opgaveprogrammets funktion i kurset gør, at passificeringen af de studerende ikke har konsekvenser for eksamensresultaterne. Incitamentet til at ændre kulturen må komme fra observationer og analyser af realisering af potentialer i forbindelse med udviklingen af situationer, hvor opgaven har et teoretisk potentiale som ikke realiseres.

7.1 Perspektivering

Det nye opgavedesign er et systematisk design af opgaver. Opgaverne blev designet i en særlig proces, som indebar, at opgaver blev redigeret og tilføjet. Rotationsprocessen gjorde det muligt at vurdere opgavernes potentialer inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng, fordybelse og forskning. Det er væsentligt, da institutionen havde både lokale og overordnede behov til opgavedesignet. Præciseringen af de fire potentialer gav teoretisk kontrol af, at opgavedesignet opfyldte behovene. Specialets model og det nye opgavedesign er redskaber til at designe opgaver til et førsteårskursus i matematisk analyse med fokus på forskningslignende aktiviteter. Opgaver med forskningspotentiale igangsætter en eller flere aktiviteter fra **A1-A10**. Kategorierne er alle beskrivelser af en vigtig forskningsgestus og emulerer dele af forskningsprakssien på en sådan måde, at førsteårs studerende kan udføre aktiviteterne. Modellens ti kategorier udgør en metodologisk tilgang til at designe opgaver med forskningspotentiale og som sigter mod teoretiske objekter og forbindelser, som en specifik bemærkning i en lærebog. Opgavedesignet indeholder eksempler på opgaveformuleringer, som igangsætter forskningslignende aktiviteter og som gør det muligt for studerende at arbejde i forskellige rammer.
Studerende, der arbejder med et opgavdesign med potentialer inden adidaktisitet, stoflig sammenhæng, fordybelse og forskning, deltager i forskellige aktiviteter med fokus på at argumentere matematisk og arbejde kreativt med opgaveløsning. De studerende undersøger problemstillinger med teoretisk indhold ved at trække på gammel viden i forbindelse med ny viden. Et opgavedesign med forskningspotentiale er en strategi til at angribe overgangsproblemer, som det specialet beretter om. Etablering af forskningslignende situationer på et førsteårskursus i matematisk analyse er ikke kun en

måde at tilgodese institutionelle behov, men også mere lokale behov, som at de studerende deltager aktivt i undervisningen og selvstændigt opsøger viden.

Det er, specialets analyser taget i betragtning, interesseant at fokusere på opgaver, der igangsætter aktiviteter fra **A10** i et redesign. Aktiviteterne i denne kategori giver de studerende mulighed for at se en definition i sammenhæng med en sætning eller et bevis. Dette perspektiv er knyttet til specialets analyser. Det er også interessant at undersøge, om et redesign kunne inkorporere **G1** eller **G2**. De studerende kan i denne forbindelse tænkes, at deltage aktivt også i valg af problemer.
I lyset af specialets løsning af designproblemet er det også interessant at undersøge muligheden for, at opgaver i et redesign igangsætter adidaktiske valideringssituationer. Det er et vanskeligt designproblem i forbindelse med et førsteårskursus i matematisk analyse, da det kræver et opgavedesign, hvor det objektive miljø kan yde feedback i forbindelse med de teoretiske problemstillinger . Undersøgelsen kan fokuseres på, at øvelsestimerne koncentrerer sig om validering af de studerendes besvarelser.
Specialet opfordrer til videreudvikling af modellen for forskningslignende situationer og muligheden for at lette overgangsproblemet med realiseringen af potentialer inden for adidaktisitet, stoflig sammenhæng, fordybelse og forskning for opgaver i et redesign. Modellens kategorier er som nævnt ikke en udtømmende liste. Kategorierne er et redskab til opgavedesign med fokus på forskningslignende aktiviteter, som førsteårsstuderende kan udføre.

Litteratur

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, Vol. 52*, side 3–28.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique de mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics.* Kluwer Academic Publisher.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *In S.J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, side 173–187. doi: 10.1007/978-3-319-12688-3-13.

Eilers, S., Hansen, E., & Madsen, T. G. (2014). *Indledende Matematisk Analyse.* Institut for Matematiske fag Københavns Universitet, 5. udgave.

Eilers, S., Hansen, E., & Madsen, T. G. (2015). *Indledende Matematisk Analyse.* Institut for Matematiske fag Københavns Universitet, 6. udgave.

González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & Maschiettod, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of calculus and proof. *Research in Mathematics Education Vol. 16, No. 2*, side 117–134. doi: 10.1080/14794802.2014.918347.

Grenier, D. (2012). Research situations to learn logic and various types of mathematical reasonings and proofs. *Cerme 8: Proceedings of the Eighth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education.*

Grønbæk, N. & Winsløw, C. (2007). Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics. *Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 27, No. 2*, side 187–220.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 67*, side 237–254.

Hersant, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 59, No. 1-3*, side 113–151. doi: 10.1007/s10649-005-2183-z.

Institut for Matematisk Fag, K. U. (2014). Analyse 0 (An0 kursusbeskrivelse). `http://kurser.ku.dk/course/nmaa09041u/2014-2015/`.

Johansen, M. W. & Misfeldt, M. (2014). Når matematikere undersøger matematik - og hvilken betydning det har for undersøgende matematikundervisning. *Mona. Matematik- og Naturfagsdidaktik - tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere*, side 42–59.

Johansen, M. W. & Misfeldt, M. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 89, No. 3*, side 357–373.

Joubert, M. (2013). Using computers in classroom mathematical tasks: revisiting theory to develop recommendations for the design of tasks. *In Margolinas, C. (Ed.): Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, Vol. 1*, side 71–79.

Lakatos, I. (1964). Proofs and refutations (iv). *The British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 14, No. 56*, side 296–342.

Madsen, L. M. & Winsløw, C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research-intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics, Education Vol. 7, No. 4*, side 741–763. doi: 10.1007/s10763-008-9134-y.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college (Ph.D. in mathematics education)*. University of Agder Faculty of Engineering and Science.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 76*, side 165–182.

Ouvrier-Buffet, C. (2014). A model of mathematicians' approach to the defining processes. *Cerme 9: Proceedings of the Ninth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education.*

Pahikkala, J. (2013). Nested interval theorem. `http://www.planetmath.org/nestedintervaltheorem/`.

Pædagogisk Center for Samfundsvidenskab, K. U. (2015). Work Package 4: Forskningsbaseret undervisning på store bacheloruddannelser på Science. `http://fbu.ku.dk/om/delprojekter/work-package4/`.

Rüdinger, A. (2009). Criterion for boundedness of power series. `http://www.openproblemgarden.org/op/criterion_for_boundedness_of_power_series/`.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M.-L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 59*, side 153–181.

Sierpinska, A. (2000). The 'Theory of Didactic Situations': Lecture notes for a graduate course with samples of students' work. `http://www.annasierpinska.rowebca.net/index.php?page=courses/`.

Solovej, J. P. (2001). *Supplement til Matematik 1GB.* Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 3. udgave.

Warfield, V. M. (2014). *Invitation to Didactique.* Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-8199-7.

Weisstein, E. W. (2015). Erdös-Straus Conjecture. From Mathworld. A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/Erdos-StrausConjecture.html/`.

Winsløw, C. (2006a). *Didaktiske elementer. En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik.* Forlaget biofolia, 1. udgave.

Winsløw, C. (2006b). Didaktiske miljøer for ligedannethed. *Mona. Matematik- og Naturfagsdidaktik - tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere*, side 47–62.

Winsløw, C. (2012). Mathematics at university: The anthropological approach. *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, side 859–875.

Winsløw, C., Barquero, B., Vleeshouwer, M. D., & Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics: from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education vol. 16, No. 2*, side 95–11. doi: 10.1080/14794802.2014.918345.

Bilag A

Detaljeret kursusbeskrivelse

Detaljeret kursusbeskrivelse for An0 2015:

Analyse 0
Detaljeret kursusbeskrivelse
Version 1, opdateret 18. februar 2015

1 Velkomst

Hjerteligt velkommen til kurset "Analyse 0" — AN0!

Kurset har ud over de mere specifikke faglige mål der kort kan beskrives ved lærebogens titel "Indledende matematisk analyse" to overordnede ambitioner:

- At styrke deltagernes evne til at argumentere matematisk
- At fremhæve det faglige samspil mellem de matematiske emner man støder på i *MatIntro* og dem man støder på i *LinAlg*.

For at kunne gøre dette starter vi på kurset ved at tager emner op der i nogen grad allerede er kendt fra gymnasiet eller *MatIntro* og gennemgår dem en gang til med fokus på beviserne. Senere i kurset kommer der helt nyt stof, især med fokus på kurver i planen. Vi fokuserer især på at forklare at det samspil mellem differentiation og integration som deltageren selvfølgelig allerede er bekendt med, dækker over en smuk og dybsindig teori hvori begrebet linearitet spiller en central rolle.

I år gennemfører vi, som en del af et af Københavns Universitets 2016-undervisningsudviklingsprojekter, en revision af opgaveprogrammet for at tilpasse det bedre til kursets primære målsætninger, jf. Afsnit 5.3. Ambitionen er at opgaveregningen mere direkte forbereder deltagerne til den mundtlige eksamen ved at stille skarpt på centrale problemstillinger relateret til de 12 mundtlige eksamensspørgmål. Vi håber at deltagerne vil bære over med de fejl vi måtte komme til at begå i dette regi, og have tålmodighed til hjælpe os med at evaluere projektet undervejs, så vi kan se om de mange nye ideer vi har på banen rent faktisk fungerer.

SØREN EILERS, 27. JANUAR 2015

2 Forudsætninger

Kurset forudsætter *MatIntro* og *LinAlg*.

3 Undervisning

An0 afholdes i skemagruppe A på først en kort dag (tirsdag formiddag), og siden en lang dag (torsdag).

3.1 Forelæsninger

Forelæsningerne finder sted to gange om ugen (tirsdage og torsdage 10:15-12:00) i auditorium 1 på H.C. Ørsted Insitutet, første gang tirsdag 03.02.15. Programmet udmeldes i god tid inden forelæsningen på kursushjemmesiden (jf. 7.1) og ugesedlerne (4.2).

3.2 Øvelsestimer

På den korte dag er der to timers øvelser (tirsdage 8:15-10:00 – første gang 03.02.15), på den lange dag er der tre (torsdage 13:15-16:00). Øvelserne forestås af en **instruktor**, der også er involveret i at rette deltagernes obligatoriske opgaver.

Der er typisk fem forskellige typer programsatte aktiviteter ved øvelserne

Opgavearbejde Deltagerne arbejder med udvalgte opgaver under ledelse af instruktoren, og vanskeligheder og løsningsmetoder diskuteres ved tavlen.

Teorigennemgang Instruktoren gennemgår udvalgt teori fra lærebog eller ugesedler i dialog med deltagerne.

Feedback Instruktoren evaluerer aspekter af materiale udarbejdet af de studerende (især de tre obligatoriske opgaver)

Opgavepræsentation Deltagerne præsenterer deres (eventuelt partielle) løsninger på opgaver stillet til hjemmearbejde.

Eksamensspørgsmålsgennemgang En deltager gennemgår, efter aftale indgået ugen inden, en del af et eksamensspørgmål for holdet.

Det forudsættes at deltagerne deltager aktivt i alle disse aktiviteter, fx med spørgsmål, at de forud for øvelserne har orienteret sig i dagens program og ikke mindst: **har prøvet at løse alle hjemmeopgaver**. Opgaverne kan i god tid findes på ugesedlerne og kursushjemmesiden.

Indplacering på øvelseshold sker automatisk i studievejledningens regi. Så længe der er plads, er man velkommen til at benytte sig af andre øvesestimer end dem man officielt er tilmedt.

3.3 Lektiecafé

Ved en „lektiecafé" tirsdag 16-19 og fredage 12-15 i HCØs kantine kan deltagerne få hjælp med opgaver og teori.

4 Undervisningsmateriale

4.1 Lærebøger

Vi benytter

> Søren Eilers, Ernst Hansen, Tage Gutmann Madsen
> Indledende Matematisk Analyse
> **Sjette udgave**, København 2015
> ISBN 978-87-70784-60-3

og henviser til denne lærebog som "IMA". Den kan købes i Polyteknisk Boghandel, Ole Maaløes Vej 5, 2200 København N.

4.2 Ugesedler

For hver uge udgives en ugeseddel der detaljeret beskriver ugens faglige program, og vigtige praktiske pointer. Ugesedlen udkommer onsdag i ugen før den skal benyttes.

4.3 Supplerende materiale

Supplerende materiale udkommer løbende efter behov på kursets side under Absalon. Kun udvalgt materiale uddeles i kopi ved forelæsninger eller øvelser.

4.4 Pencasts

Udvalgte argumenter fra forelæsningerne udkommer som pencasts som kan afspilles på deltagernes computer når de ønsker det. I modsætning til ved forelæsningerne kan man pause og spole i en pencast.

5 Bedømmelse

Kurset bedømmes efter 7-skalaen ud fra deltagernes standpunkt ved en mundtlig eksamen. For at kunne gå til eksamen skal hver deltager have godkendt to ud af tre skriftlige opgaver.

5.1 Vigtige datoer

Deltagerne bør med det samme notere følgende datoer:

17.02	Aflevering opgave 1
03.03	Aflevering opgave 2
03.03	Sidste frist for overførsel af opgaver fra 2014
17.03	Aflevering opgave 3
26.03-27.03	Mundtlig prøve
07.04-10.04	Mundtlig prøve

Der tages hensyn til deltagernes øvrige eksaminer ved fastlæggelse af eksamensdatoen. Deltagere der ønsker at komme op på eksamensdagene i marts kan rette henvendelse til `analyse0@math.ku.dk`.

5.2 Skriftlige opgaver

Der stilles undervejs i kurset 3 opgavesæt over centrale temaer i kurset. Opgaverne kan afleveres i grupper med op til tre deltagere.

Instruktorerne retter opgaverne og giver bedømmelsen "godkendt" eller "ikke godkendt". Hvis opgaven ikke kan godkendes, specificerer instruktoren hvad der må forbedres, og gruppen får lejlighed til at genaflevere efter én uge. Hvis en opgave ikke afleveres til tiden, er det stadigvæk muligt at træffe aftale om en genaflevering, men denne skal så godkendes i første forsøg.

Hvis man har fået godkendt 2 af 3 opgaver ved forløbet af AN0 i 2014, er det ikke nødvendigt at aflevere dem igen; man kan få dem godskrevet ved at henvende sig til `analyse0@math.ku.dk` inden afleveringsfristen for den anden skriftlige opgave. Man kan imidlertid **ikke** overføre en enkelt opgave fra 2014 til 2015; har man kun fået godkendt 1 af 3 i 2014 skal man starte forfra i 2015.

5.3 F-opgaver

Vi har til forløbet af AN0 i 2015 udviklet en ny opgavetype, **f-opgaverne**, der forsøger at emulere sund forskningspraksis i teoretisk matematik ved at stille de spørgsmål man som aktiv matematikbruger konstant bør stille sig selv når man tilegner sig – eller opfinder – ny matematik. Der er absolut intet nyt ved sådanne spørgsmål, men mens vi nok tidligere har forestillet os at studerende tilegnede sig evnen til at stille sig selv de rigtige spørgsmål ved en eller anden form for osmose, sætter vi det altså nu eksplicit på programmet.

Vi organiserer f-opgaverne omkring de 12 spørgsmål til den mundtlige eksamen, og stiller dem til øvelserne dels som hjemmeopgaver og dels som materiale til regning og diskussion ved øvelsestimerne. Alle de stillede f-opgaver vil være **grundlag for den mundtlige eksamination** i den forstand at såvel eksaminander som eksaminatorer kan inddrage dem til den mundtlige prøve. Det er vort håb at opgaverne giver deltagerne et effektivt supplement til lærebogen og forelæsningerne for deres arbejde med at forberede sig på den mundtlige prøve, samtidig med at de træner dem i at kunne formulere de rigtige spørgsmål til sig selv eller andre når de kommer videre i studiet og tættere på forskningsfronten.

F-opgaverne er nyudviklede og derfor udkommer de drypvis, i god tid inden de skal benyttes ved øvelserne. Ved kursets afslutning rettes opgaverne igennem for eventuelle uhensigtsmæssigheder, og et udvalg af de stillede opgaver udkommer i et trykt f-opgavehæfte der uddeles på kursets sidste undervisningsdag. Dette hæfte udleveres også til samtlige eksaminatorer og censorer inden eksamen.

5.4 Mundtlig prøve

Den mundtlige prøve tager udgangspunkt i spørgsmålene på listen

1. Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner
2. Taylors formler i én variabel
3. Riemannintegralet
4. Stamfunktionsproblemet i én variabel
5. Uafhængighed af differentiationsrækkefølge
6. Differentiabilitet i $\mathbb{R}^n$
7. Den generaliserede kæderegel
8. Taylors formel i flere variable og analyse af stationære punkter
9. Kurvelængde
10. Kurveintegral
11. Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$
12. Greens sætning

Prøven tager 25 minutter, og er med ekstern censur. Der gives 30 minutters forberedelsestid.

Ved eksamen trækker eksaminanden et spørgsmål, og bliver sidenhen installeret i et forberedelseslokale med tavle. Når forberedelsestiden er gået, føres eksaminanden til eksaminationslokalet, og giver der ved tavlen en gennemgang at de vigtigste pointer hørende til spørgsmålet. Undervejs kan relevante f-opgaver diskuteres på initiativ af såvel eksaminand som eksaminator. Ved forberedelsen må eksaminanden benytte alle skriftlige hjælpemidler inklusive egne notater, men kun notater nedskrevet i eksaminationslokalet (papir stilles til rådighed!) må medbringes til selve eksaminationen.

Der lægges ved bedømmelsen især vægt på at eksaminanden demonstrerer forståelse af den logiske opbygning af de beviser, der skal gennemgås. Eksaminator og censor kan støtte, korrigere og stille opklarende spørgsmål undervejs, men det er eksaminandens opgave at tilrettelægge sin præsentation så de vigtigste pointer berøres i løbet af eksaminationen. Efter 25 minutter voterer eksaminator og censor i enrum, og karakteren annonceres for den studerende.

5.5 Reeksamen

Reeksamen finder sted den 25. juni og har samme format som den mundtlige prøve. Hvis man ikke har fået godkendt 2 af 3 obligatoriske opgaver ved det ordinære forløb i 2014 eller i 2015 skal opgaverne afleveres per email til `analyse0@math.ku.dk` senest den 11. juni, og her godkendes i første forsøg.

Skulle det blive nødvendigt med flere eksamensforsøg, er beståelse af obligatoriske opgaver gyldig også ved ordinær eksamen og reeksamen i 2016.

6 Personer

6.1 De kursusansvarlige

Søren Eilers har det faglige ansvar for kurset og forestår forelæsningerne. I løbet af hele kurset står han til rådighed med svar på faglige spørgsmål om kurset, lettest per email på `eilers@math.ku.dk`.

Alle de praktiske aspekter for kurset arrangeres af Søren Eilers og Anna Munk i fællesskab. Henvendelser om sådanne forhold sker til `analyse0@math.ku.dk`.

6.2 Instruktorer

Studenterinstruktorerne styrer øvelserne i samråd med den kursusansvarlige og deltagerne, og her står de til rådighed for spørgsmål.

7 Kommunikation

7.1 Hjemmesiden

Al information om kurset findes på kursets side under Absalon. Al den praktiske information om programsatte aktiviteter findes udelukkende her.

7.2 Opgaveaflevering

Ved opgaveaflevering skal der benyttes en særlig forside, tilgængelig fra hjemmesiden, som alle gruppens medlemmer skal underskrive. Forsiden og opgavebesvarelsen skal enten sammenhæftes eller afleveres i charteque. Herudover stilles ingen særlige krav til hvordan skriftlige opgaver skal udformes, bare de er overskuelige og læselige.

Opgaverne afleveres til forelæseren ved tirsdagsforelæsningerne.

Bilag B

Spørgeskema

Spørgeskema om forskning i matematik udleveret på øvelseshold tirsdag i uge 6:

To spørgsmål om forskning i matematik

Som Søren fortalte jer i tirsdags, så vil en del af arbejdet i An0 have fokus på forskningslignende aktiviteter. Dette sker som led i et større udviklingsprojekt, som handler om forskningsbaseret undervisning på KU.

Vi vil gerne vide mere om, hvordan forskning opfattes fra matematikstuderendes perspektiv og vi vil derfor bede dig om at svare på nedst. to spørgsmål. Når du har besvaret de to spørgsmål, vil vi bede dig om at aflevere din besvarelse til din instruktor.

På forhånd tak for hjælpen fra: Søren Eilers, Katrine Gravesen, Niels Grønbæk og Carl Winsløw.

Hvordan forestiller du dig, at forskning inden for matematik foregår?

Hvad af ovenstående har du oplevet i din uddannelse?

Bilag C

F-opgaver version 11

Introduktion

Analyse 0 er i år tilknyttet et af universitetets 2016-undervisningsudviklingsprojekter med fokus på forskningsbasering: Det helt centrale princip for universiteterne at al undervisning tager afsæt i universitetets forskning. Det er noget man ser meget tydeligt på kandidatuddannelserne, men på et kursus som Analyse 0 kan man måske tillade sig at undre sig lidt over hvad det skal betyde. Forelæseren er aktiv forsker, ja, men han gentager næsten ordret det materiale han lærte da han selv var studerende, ikke nødvendigvis af dovenskab eller mangel på fantasi, men fordi det nu engang er cirka det samme man har brug for at lære om indledende matematisk analyse i 1990 og i 2015.

Udviklingsprojektet, der inddrager Institut for Naturfagenes Didaktik, fokuserer på opgaveregningen i kurset. Det er når man forsøger at knække en vanskelig opgave at man som matematikstuderende kommer tættest på at opføre sig som en færdiguddannet forskningsmatematiker, men i tidligere år har kursusansvarlige og instruktorer oplevet at deltagerne var uvillige til at lægge den nødvendige tid i opgaveregning, og deltagere har oplevet at opgaveregningen ikke var tilpasset til deres læringsbehov, så det er et helt naturligt sted at sætte ind. Vi har udviklet en ny opgavetype, **f-opgaverne**, der forsøger at emulere sund forskningspraksis i teoretisk matematik ved at stille de spørgsmål man som aktiv matematikbruger konstant bør stille sig selv når man tilegner sig – eller opfinder – ny matematik. Der er absolut intet nyt ved sådanne spørgsmål, men mens vi nok tidligere har forestillet os at studerende tilegnede sig evnen til at stille sig selv de rigtige spørgsmål ved en eller anden form for osmose, sætter vi det altså nu eksplicit på programmet.

Vi organiserer f-opgaverne omkring de 12 spørgsmål til den mundtlige eksamen, og stiller dem til øvelserne dels som hjemmeopgaver og dels som materiale til regning og diskussion ved øvelsestimerne. Alle de stillede f-opgaver vil være **grundlag for den mundtlige eksamination** i den forstand at såvel eksaminander som eksaminatorer kan inddrage dem til den mundtlige prøve. Det er vort håb at opgaverne giver deltagerne et effektivt supplement til lærebogen og forelæsningerne for deres arbejde med at forberede sig på den mundtlige prøve, samtidig med at de træner dem i at kunne formulere de rigtige spørgsmål til sig selv eller andre når de kommer videre i studiet og tættere på forskningsfronten.

F-opgaverne er nyudviklede og derfor udkommer de drypvis, i god tid inden de skal benyttes ved øvelserne. Ved kursets afslutning rettes opgaverne igennem for eventuelle uhensigtsmæssigheder, og et udvalg af de stillede opgaver udkommer i et f-opgavehæfte på kursets sidste undervisningsdag. Dette hæfte udleveres også til samtlige eksaminatorer og censorer inden eksamen.

Vi er naturligvis stærkt afhængige af deltagernes velvilje når det kommer til at evaluere effekten af disse ændringer, og vi tillader os at håbe på at alle kan se nødvendigheden af at give os feedback på projektets ide og udførelse. Specielt håber vi at en mindre gruppe af studerende vil stille sig til rådighed for at diskutere formatet i en fokusgruppe.

I hele hæftet vil $\star$ betegne opgaver, der er lidt sværere. Det kan både være hele opgaver, men det kan også kun være delopgaver.

1 Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner

1.1

Vis med et eksempel, at konklusionerne i Hovedsætning 1A ikke gælder for en funktion defineret på et åbent interval (a, b).

1.2

Gå beviset for Hovedsætning 1A igennem og afgør, hvor antagelsen om, at f skal være defineret på et afsluttet og begrænset interval bruges (NB: Det er ikke sikkert, at det står eksplicit i selve beviset).

1.3 $\star$

I beviset for Hovedsætning 1A skal man vise både (3.8) og (3.9), og selvom bogen kun viser tilfældet for (3.8), så følger (3.9), ifølge bogen, *analogt*.

- Gør rede for at ulighederne i (3.8) og (3.9) svarer til indholdet i Hovedsætning 1A.
- Gør rede for de forandringer, som beviset for (3.9) kræver.
- Overvej hvordan man kunne argumentere for (3.9) på basis af (3.8) ved at bruge $-f$.

1.4 $\bigoplus$

Undersøg på internettet hvad *Bisection method* går ud på. Forklar hvad denne metode har med Hovedsætning 2A at gøre.
Benyt Hovedsætning 2A gentagne gange til at bestemme en approksimation til løsningen for $x^2 = 2$ med 3 decimaler.

1.5

Forklar med en figur hvad det vil sige at være uniformt kontinuert.
Lav også figur, der viser, hvordan det adskiller sig fra at være kontinuert.

1.6

Find på en funktion (der ikke står i noterne og ikke er gennemgået til forelæsningerne), der for vilkårligt $a > 0$ ikke er uniformt kontinuert på $[a, \infty)$, men som er kontinuert på $[a, \infty)$.

1.7 $\star$

Vis, at hvis f er uniformt kontinuert på $[a, b]$, så er den det også på alle delintervaller af $[a, b]$.
Overvej om det omvendt også gælder, at hvis f er uniformt kontinuert på $[c, d] \subseteq (a, b)$, så er f også uniformt kontinuert på (a, b). Brug dette til at afgøre om følgende er sandt eller falsk:
Hvis f er uniformt kontinuert på alle $[a, b]$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$, så er f uniformt kontinuert på $\mathbb{R}$.

1.8 $\star$

En del af forudsætningerne for Hovedsætning 3A er, at funktionen f er defineret på et interval $[a, b]$ som er afsluttet og begrænset. Undersøg om antagelserne er nødvendige. Forklar dine undersøgelser.

2 Taylors formler i én variabel

2.1

- Hvad er Taylorpolynomiet af orden n for funktionen $f(x) = e^x$ i punktet a?

$\star$ Hvordan kan man bruge dette til at finde et udtryk for e?

2.2

Lad $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ og f, g er n gange differentiable funktioner. Lad $a \in I$ og lad P og Q være Taylorpolynomierne af orden n i a for henholdsvis f og g.

- Hvad er Taylorpolynomiet af orden n i a for $f + g$?

$\star \bigoplus$ Hvad er Taylorpolynomiet af orden n i a for $f \cdot g$? Her må det benyttes, at

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

hvor $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ er binomial-koefficienten.

2.3

Skitsér en graf for en funktion g, som opfylder (4.6):

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{n-1}(a) = g(b) = 0$$

- når $a = 0$, $b = 1$ og $n = 2$.
- når $a = 0$, $b = 1$ og $n = 3$.

2.4

Lad polynomiet P være givet ved $P(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m (x-a)^m$

- Vis, at $P'(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} m \cdot b_m (x-a)^{m-1}$

- Hvad er $P'(a)$?
- Find et udtryk for den k'te afledte for P.
- Hvad er $P^{(k)}(a)$?

⋆ Forklar, at P er entydigt bestemt af de første n afledte $P^{(k)}(a)$ for $k = 1, ..., n$.

⋆ En fagjargon lyder: *Et polynomium er sit eget Taylorpolynomium*. Forklar, hvad der menes med det.

⋆ Brug foregående spørgsmål til at forklare, hvad man mener med, at Taylorpolynomiet for en funktion i et punkt er *"entydige"*.

2.5

Sammenlign antagelserne for Sætning 4.20 (Taylors formel med restled) og Sætning 4.21 (Taylors grænseformel). Diskuter forskellen mellem dem, herunder sætningernes konklusion.

2.6

I beviset for Sætning 4.20 (Taylors formel med restled) indføres en passende hjælpefunktion g for en passende konstant K.
Forklar hvorfor vi vælger

$$K = \frac{f(b) - P_{n-1}(b)}{(b-a)^n}$$

og ikke blot betragter et vilkårligt K gennem hele beviset. Hvad gælder der om $g(b)$ for vilkårligt K?

3 Riemannintegralet

3.1 ⋆

I slutningen af beviset for Sætning 5.17, står der, at vi har vist, at Bolzano-egenskaben (5.8) er opfyldt. Uddyb hvorfor den er det.
Gennemgå beviset og lav ændringer, så vi faktisk ender med, at $|M - M'| < \varepsilon$.

3.2

- Angiv en funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, som opfylder de tre nedenstående betingelser:
    1. f har præcis tre diskontinuitetspunkter
    2. f er strengt voksende på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ og strengt aftagende på $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
    3. f er integrabel og $\int_0^1 f(t)\partial t = 1$
- Kan det lade sig gøre at finde en funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, som opfylder 1. og 2., men som ikke er Riemann integrabel?

3.3

I beviset for Lemma 5.4 produceres en konkret middelsum med finere inddeling end δ_1 og δ_2. Hvad bruges denne konkrete middelsum til i beviset? Kan du fremføre et bevis uden den?

3.4

- Gennemgå beviset for Lemma 5.5, hvor der bliver brugt et bestemt epsilon (nemlig $\varepsilon = 1$). Hvorfor lige $\varepsilon = 1$?
- Find tre eksempler på ubegrænsede funktioner på intervallet $[0, 1]$. Er de integrable? Er de kontinuerte? Begrund dine svar.
- Formulér et generelt resultat om Riemann integrabilitet af ubegrænsede funktioner og bevis det.

3.5 $\star$

1. Er funktionen
$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$
integrabel på $[0, 1]$? Giv et intuitivt argument ved hjælp af en figur.

2. Forklar hvorfor **1.** ikke kan afgøres ved simpel brug af sætninger fra kapitel 5, som giver kriterier for integrabilitet.

3. Argumentér for dit svar på **1.** ved hjælp af Bolzanoegenskaben (Vink: Se på $[0, \frac{\varepsilon}{4}]$ og $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ hver for sig).

4. Generalisér resultatet fra **3.** til en hel klasse af funktioner.

4 Stamfunktionsproblemet i én variabel

4.1

1. Vis ved brug af Middelværdisætningen (Sætning 4.16), at for alle kontinuerte funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gælder, at der findes et $c \in (a,b)$, så
$$\int_a^b f(y)\partial y = f(c)(b-a).$$
2. Middelværdien af en integrabel funktion over et interval $[a,b]$ defineres som integralet af funktionen divideret med intervallets længde:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\partial y$$
Hvorfor er det rimeligt?
3. Hvad siger det om resultatet i 1.?

4.2 $\star$

Kan man udvide Infinitesimalregningens hovedsætning (Sætning 5.30) til at gælde for
$$f\colon I \to \mathbb{R}^m$$
for $I \subseteq \mathbb{R}$ og $m > 1$? Hvordan ville sætningen i så fald lyde?

Hvilke forholdregler skal man tage, hvis man udvider sætningen til at gælde for stykkevist kontinuerte funktioner? Hvordan ville sætningen lyde?

4.3

Sammenlign præsentationen af det bestemte integral i noterne med den fremstilling, du blev præsenteret for i gymnasiet.

4.4

Uddyb, hvad der sker ved uligheden på nederste linje s. 150 i beviset for Sætning 5.28.
Uddyb, hvilke overvejelser man skal gøre sig, hvis x_1 ligger henholdsvis til højre eller venstre for x i beviset.

5 Uafhængighed af differentiationsrækkefølge

5.1

Hvilket kendt resultat bygger beviset for Sætning 6.23 på, og hvorfor er dets forudsætninger opfyldt?

5.2

Sammenlign beviset for Sætning 6.23 med det tilsvarende bevis, der står i *Funktioner af flere variable* af Tore August Kro i afsnit 2.5.3.
Gå på nettet og find endnu et bevis for sætningen. Undersøg om dette er anderledes end beviset i noterne og beviset hos Kro.

5.3

Lad $n \geq 3$ og lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde, og lad f være en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ med kontinuerte partielle afledte af alle ordner.

1. Gælder det, at
$$D_1 D_2 D_3 f = D_3 D_2 D_1 f \ ?$$

2. Brug dit svar på 1. til at formulere en mere generel hypotese om højereordens partielle afledte for f. Kan du bevise din hypotese?

3.⋆ Hvor mange forskellige partielle afledte af orden k har f? (Hint: Overvej først små værdier af k og n)

5.4 ⋆

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben. Angiv en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, der ikke opfylder, at $D_2 D_1 f(\mathbf{a}) = D_1 D_2 f(\mathbf{a})$ for et $\mathbf{a} \in \Omega$.
Hvordan forklares dette i lyset af Sætning 6.23?

5.5

Betragt beviset for Sætning 6.23. Hvad er det for en egenskab ved S, der gør, at argumentet for at finde η lykkes på samme måde som det for at finde ξ?

5.6

Forklar hvorfor Sætning 6.23 betyder, at Hesse-matricen for en C^2-funktion er diagonaliserbar.

6 Differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$

6.1

Afgør om følgende funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiable:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Brug dine resultater til at kommentere på antagelserne i Sætning 6.11 og dennes resultat.
Lav din egen opskrift til at afgøre hvorvidt en given funktion af to variable er differentiabel.

6.2 $\star$

I én variabel kunne vi kigge på halvtangenter, hvis vi ville bestemme differentiabilitet på et interval. I denne opgave skal du overveje om der kan gøres noget tilsvarende i $\mathbb{R}^k$ for $k \geq 2$.
Gå på nettet og find ud af, hvorledes differentiabilitet defineres i endepunkterne af et interval $[a,b]$, hvor en funktion f er defineret. Lav derefter en generalisering til tilfældet, hvor funktionen er defineret på en mængde $\Omega \in \mathbb{R}^k$. Hertil må du gerne bruge Definition 6.5 som inspiration.
Sammenlign din definition med en af dines medstuderendes og diskuter evt. forskelle.

6.3

Hvor ville beviset for Sætning 6.11 ændre sig, hvis vi kiggede på fx $k = 3$ i stedet? Specielt skal du lave tilsvarende figur, som den der er illustreret på s. 179.

7 Den generaliserede kæderegel

7.1

I beviset for Sætning 6.21 optræder følgende identiteter:

- $Dg(b)\varepsilon_f(\Delta u)\|\Delta u\| = \varepsilon_2(\Delta u)\|\Delta u\|$
- $\varepsilon_2(\Delta u)\|\Delta u\| + \varepsilon_1(\Delta u)\|\Delta u\| = \varepsilon(\Delta u)\|\Delta u\|$

Find disse identiteter i beviset og forklar, hvordan de opstår i sammenhængen. Redegør desuden for, at de er sande.

7.2

Lad f være en lineær afbildning, dvs. $f(x) = Ax$, hvor A er en $m \times n$-matrix og $x \in \mathbb{R}^n$. Hvad bliver funktionalmatricen for f?
Sammensæt to lineære afbildninger $f(x) = Ax$ og $g(x) = Bx$ ud fra de metoder, du har lært i lineær algebra. Hvordan passer resultatet med kædereglen?

7.3

Hvad siger Sætning 6.21 for $k = 1$ og $l = 1$? Find en sætning i noterne som siger det samme.

7.4

Find på konkrete eksempler på funktioner f og g defineret på $\mathbb{R}^2$. Udregn funktionalmatricen for $g \circ f$ for dine eksempler ved brug af sætning 6.21.
Prøv nu først at bestemme et udtryk for funktionen $g \circ f$ og herefter udføre differentationen på denne sammensatte funktion. Er der forskel på dine resultater?

8 Taylors formel i flere variable og analyse af stationære punkter

8.1

Del beviset for Sætning 6.24 op i trin og skriv til hvert trin en forklaring af hvilken fremgangsmåde der bruges, hvilke kendte resultater som anvendes og også hvilken funktion de enkelte trin har i det samlede bevis.

8.2

Hvad siger Sætning 6.24 for $k = 1$? Angiv et resultat fra noterne som siger det samme.

8.3 ⋆

Definér på passende vis, hvad man bør mene med Taylorpolynomiet af 1. orden for en C^2-funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Hvad bliver 1. ordens Taylorpolynomiet til $f + g$, hvor både f, g er C^2-funktioner fra Ω til $\mathbb{R}$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er åben.

8.4

Lad $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, hvor $n \geq 2$ og mindst to af x-værdierne er forskellige.

1. Vis at funktionen
$$f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$
har ét stationært punkt.
2. Afgør om det stationære punkt er et minimum, sadelpunkt eller maksimum.
3. Hvad har opgaven at gøre med lineær regression?

9 Kurvelængde

9.1

Tegn (fx. vha. Maple eller i hånden) kurverne der parametriseres som:

- $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\frac{1}{2} + \cos t, \frac{1}{2} + \sin t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}\right)$, $0 \le t \le 4\pi$

Kommentér ligheder og forskelle.

9.2

Opskriv en parametrisering for en virkårlig cirkel i $\mathbb{R}^2$, dvs. med centrum i (a, b) og radius R. Find buelængden af cirklen vha. Sætning 7.15. Er resultatet overraskende?

9.3

Lad $\widetilde{\mathbf{r}} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ være en reparametrisering af en C^1-kurve $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

1. Redegør for, at
$$\int_c^d \|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\| \partial t = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \partial t$$
2. Hvad ville der ske, hvis vi bruger en reparametrisering af $\mathbf{r}$ i beviset for Sætning 7.15 i stedet for $\mathbf{r}$ selv?

10 Kurveintegral

10.1

Hvad ville der ske med formel (7.9), hvis vi valgte en anden parametrisering, der byttede om på start- og slutpunkt for kurven (dvs. hvor kurven startede i b og sluttede i a)?

10.2

Hvor i beviset for Sætning 7.21 bruges antagelserne om, at γ er rektificerbar og $\mathbf{V}$ er et kontinuert vektorfelt? Sammenlign med beviset for Sætning 5.17.

10.3

Lad $\mathbf{V}$ være et kontinuert vektorfelt.

1. Vis, at hvis $\widetilde{\mathbf{r}} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ er en retningsbevarende C^1-reparametrisering af $\mathbf{r}$, så er

$$\int_c^d \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(t)\partial t = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\partial t.$$

2. Hvorfor betyder resultatet fra 1., at

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot \partial \mathbf{r}$$

er uafhængigt af parametriseringen?

10.4

- Entydigheden af kurveintegralet kan man, ifølge noterne, *overbevise sig om* ud fra Definition 7.20. Brug Definition 7.20 til at vise, at der ikke findes forskellige I_1 og I_2 med den ønskede egenskab.
- Sammenlign med Opgave F.10.3 (2).

⋆ Læs kommentaren efter Definition 7.20 og uddyb hvorfor kurveintegralet er en geometrisk størrelse.

11 Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$

11.1

I Sætning 7.30 står der "*en nødvendig og tilstrækkelig betingelse*". Hvad menes der med det? Hvordan afspejles det i beviset for sætningen?

11.2

Del beviset for Sætning 7.30 op i dele og lav en serie på 3-4 figurer, der viser, hvad der sker i hver del.

11.3

Hvorfor kan vi ud fra Sætning 7.24 konkludere, at kurveintegralet er "*uafhængigt af vejen*" og at en lukket kurve har kurveintegral lig 0?

11.4

- Omskriv Sætning 7.33 så den formuleres som: *Hvis ... så gælder ...* .
- Har vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y) = (3x^2 + y, 3x + y^2)$ en stamfunktion?

11.5

Gennemlæs metoden for at finde stamfunktioner som det er gjort i Eksempel 7.27.

- Find selv på et lukket vektorfelt, og kør opskriften fra før igennem for at tjekke, om det har en stamfunktion.

12 Greens Sætning

12.1

Hvis $E = [a, b] \times [c, d]$, hvordan ville Sætning 9.6 så lyde?

12.2

I beviset for Sætning 9.6 vises det, at (9.12) gælder for specialtilfældet

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} V_1(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Hvorfor opdeles γ i dette tilfælde i fire kurvestykker?
- Vis, at Sætning 9.6 også gælder for specialtilfældet

  $$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

  Hvordan parametriseres γ i dette tilfælde?

⋆ Overvej, hvad det betyder, at "(9.12) *er additivt med hensyn til vektorfeltet*". Kan du vise, at det er opfyldt?

12.3

Når vi beviser Sætning 9.6 kigger vi på E'er, der opfylder

a) $E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \mu(x) \leq y \leq \nu(x)\}$ og
b) $E = \{(x, y) \mid y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$.

- Tegn 3 mængder, der opfylder både **a)** og **b)**.
- Tegn én mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** og tegn derefter én mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)**.

⋆ Gør rede for, at en variation af (9.12) også gælder for

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

selvom E hverken opfylder **a)** eller **b)**.

12.4

I Sætning 9.6 er der en del antagelser. Overvej

- hvorfor antagelserne er opfyldt i de to specialtilfælde, som faktisk bevises.
- om det er vigtigt, at kurven gennemløbes i positiv omløbsretning.

Hvilke kendte resultater bruges i beviset for Sætning 9.6 og hvorfor er deres forudsætninger opfyldt?

12.5

Hvad siger Greens Sætning for et vektorfelt $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, som er lukket?

Bilag D

A priori analyse af opgavedesign

Opg	Adi.	Stof.Sam.	Fordyb.	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
F1.1	x	x	x		x				x		x		
F1.2	x		x			x					x		
F1.3*	x	x	x			x		x		x			
F1.4†	x	x	x	x							x	x	
F1.5	x		x		x				x				
F1.6	x	x	x		x				x		x		
F1.7*	x		x	x						x			
F1.8*	x		x		x	x			x		x		
F2.1*	x	x					x					x	
F2.2*†	x	x		x									
F2.3	x	x			x				x				
F2.4*	x	x	x	x								x	
F2.5	x		x			x						x	
F2.6	x		x			x							
F3.1*	x		x			x		x					
F3.2	x	x	x		x				x	x			
F3.3	x		x			x		x					
F3.4	x	x	x		x	x			x	x		x	
F3.5*	x		x	x					x	x			
F4.1	x	x	x										x
F4.2*	x		x				x			x			
F4.3	x	x	x									x	
F4.4	x		x			x	x						

Opg	Adi.	Stof.Sam.	Fordyb.	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
F5.1	x	x	x			x						x	
F5.2	x	x	x			x						x	
F5.3*	x	x	x	x						x			
F5.4*	x	x	x		x					x			
F5.5	x	x	x			x							
F5.6	x	x										x	
F6.1	x	x	x	x					x	x		x	
F6.2*	x	x									x		x
F6.3	x		x			x	x		x				
F7.1	x	x	x			x							
F7.2	x	x		x								x	
F7.3	x	x	x				x					x	
F7.4	x	x	x		x								
F8.1	x	x	x			x			x				
F8.2	x	x	x				x					x	
F8.3*	x	x	x										x
F8.4	x	x		x							x	x	
F9.1	x	x			x				x				
F9.2	x	x	x	x								x	
F9.3	x		x			x							
F10.1	x		x	x		x							
F10.2	x		x			x						x	
F10.3	x		x	x									x
F10.4*	x		x					x					x
F11.1	x	x	x			x							
F11.2	x		x			x			x				
F11.3	x		x	x									
F11.4	x	x	x	x			x			x			
F11.5	x	x	x		x								
F12.1	x		x				x						
F12.2*	x		x			x		x					
F12.3*	x	x	x	x	x		x		x			x	
F12.4	x	x	x			x						x	
F12.5	x		x				x						
I alt	57	35	49	15	12	22	10	5	14	10	7	18	5

Bilag E

F-opgavehæfte til eksamensbrug

F-opgaver til Analyse 0

18. marts 2015

Introduktion

I dette hæfte samles alle de **f-opgaver** der har været behandlet i 2015-forløbet af Analyse 0. Disse opgaver vil være grundlag for den mundtlige eksamination i den forstand at såvel eksaminander som eksaminatorer kan inddrage dem til den mundtlige prøve (bemærk dog symbolerne "$\star$" og "†" som beskrevet herunder). Diskussionen af opgaverne vil typisk finde sted i de sidste 5 minutter af eksaminationen, og vil fortrinsvis fokusere på de f-opgaver der er relaterede til det udtrukne hovedspørgsmål.

Symbolet † betegner opgaver med et videre sigte end hvad der med rimelighed kan rummes i en eksamination. Sådanne opgaver vil således ikke blive bragt op på initiativ af eksaminator eller censor, men udelukkende hvis eksaminanden selv vælger det.

Symbolet $\star$ betegner opgaver af højere sværhedsgrad. Sådanne opgaver vil kun blive bragt op på initiativ af eksaminator eller censor efter at eksaminanden har etableret at han eller hun har tilegnet sig stoffet i tilstrækkelig grad til at kunne gøre sig håb om karakteren 10 eller 12.

1 Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner

Opgave 1.1

Vis med et eksempel, at konklusionerne i Hovedsætning 1A ikke gælder for en funktion defineret på et åbent interval (a, b).

Opgave 1.2

Gå beviset for Hovedsætning 1A igennem og afgør, hvor antagelsen om, at f skal være defineret på et afsluttet og begrænset interval bruges (NB: Det er ikke sikkert, at det står eksplicit i selve beviset).

Opgave 1.3 $\star$

I beviset for Hovedsætning 1A skal man vise både (3.8) og (3.9), og selvom bogen kun viser tilfældet for (3.8), så følger (3.9), ifølge bogen, *analogt*.

- Gør rede for at ulighederne i (3.8) og (3.9) svarer til indholdet i Hovedsætning 1A.
- Gør rede for de forandringer, som beviset for (3.9) kræver.
- Overvej hvordan man kunne argumentere for (3.9) på basis af (3.8) ved at bruge $-f$.

Opgave 1.4 †

Undersøg på internettet hvad *Bisection method* går ud på. Forklar hvad denne metode har med Hovedsætning 2A at gøre.
Benyt Hovedsætning 2A gentagne gange til at bestemme en approksimation til løsningen for $x^2 = 2$ med 3 decimaler.

Opgave 1.5

Forklar med en figur hvad det vil sige at være uniformt kontinuert.
Lav også figur, der viser, hvordan det adskiller sig fra at være kontinuert.

Opgave 1.6

Find på en funktion (der ikke står i noterne og ikke er gennemgået til forelæsningerne), der for vilkårligt $a > 0$ ikke er uniformt kontinuert på $[a, \infty)$, men som er kontinuert på $[a, \infty)$.

Opgave 1.7 ⋆

Vis, at hvis f er uniformt kontinuert på $[a, b]$, så er den det også på alle delintervaller af $[a, b]$.
Overvej om det omvendt også gælder, at hvis f er uniformt kontinuert på $[c, d] \subseteq (a, b)$, så er f også uniformt kontinuert på (a, b). Brug dette til at afgøre om følgende er sandt eller falsk:
Hvis f er uniformt kontinuert på alle $[a, b]$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$, så er f uniformt kontinuert på $\mathbb{R}$.

Opgave 1.8 ⋆

En del af forudsætningerne for Hovedsætning 3A er, at funktionen f er defineret på et interval $[a, b]$ som er afsluttet og begrænset. Undersøg om antagelserne er nødvendige. Forklar dine undersøgelser.

2 Taylors formler i én variabel

Opgave 2.1

- Hvad er Taylorpolynomiet af orden n for funktionen $f(x) = e^x$ i punktet a?

$\star$ Hvordan kan man bruge dette til at finde et udtryk for e?

Opgave 2.2

Lad $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ og f, g er n gange differentiable funktioner. Lad $a \in I$ og lad P og Q være Taylorpolynomierne af orden n i a for henholdsvis f og g.

- Hvad er Taylorpolynomiet af orden n i a for $f + g$?

$\star\dagger$ Hvad er Taylorpolynomiet af orden n i a for $f \cdot g$? Her må det benyttes, at

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

hvor $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ er binomial-koefficienten.

Opgave 2.3

Skitsér en graf for en funktion g, som opfylder (4.6):

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{n-1}(a) = g(b) = 0$$

- når $a = 0$, $b = 1$ og $n = 2$.
- når $a = 0$, $b = 1$ og $n = 3$.

Opgave 2.4

Lad polynomiet P være givet ved $P(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m (x-a)^m$

- Vis, at $P'(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} m \cdot b_m (x-a)^{m-1}$
- Hvad er $P'(a)$?
- Find et udtryk for den k'te afledte for P.
- Hvad er $P^{(k)}(a)$?

- ⋆ Forklar, at P er entydigt bestemt af de første n afledte $P^{(k)}(a)$ for $k = 1, ..., n$.
- ⋆ En fagjargon lyder: *Et polynomium er sit eget Taylorpolynomium.* Forklar, hvad der menes med det.
- ⋆ Brug foregående spørgsmål til at forklare, hvad man mener med, at Taylorpolynomiet for en funktion i et punkt er *"entydige"*.

Opgave 2.5

Sammenlign antagelserne for Sætning 4.20 (Taylors formel med restled) og Sætning 4.21 (Taylors grænseformel). Diskuter forskellen mellem dem, herunder sætningernes konklusion.

Opgave 2.6

I beviset for Sætning 4.20 (Taylors formel med restled) indføres en passende hjælpefunktion g for en passende konstant K.
Forklar hvorfor vi vælger

$$K = \frac{f(b) - P_{n-1}(b)}{(b-a)^n}$$

og ikke blot betragter et vilkårligt K gennem hele beviset. Hvad gælder der om $g(b)$ for vilkårligt K?

3 Riemannintegralet

Opgave 3.1 ⋆

I slutningen af beviset for Sætning 5.17, står der, at vi har vist, at Bolzano-egenskaben (5.8) er opfyldt. Uddyb hvorfor den er det.
Gennemgå beviset og lav ændringer, så vi faktisk ender med, at $|M - M'| < \varepsilon$.

Opgave 3.2

- Angiv en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, som opfylder de tre nedenstående betingelser:
  1. f har præcis tre diskontinuitetspunkter
  2. f er strengt voksende på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ og strengt aftagende på $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
  3. f er integrabel og $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- Kan det lade sig gøre at finde en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, som opfylder 1. og 2., men som ikke er Riemann integrabel?

Opgave 3.3

I beviset for Lemma 5.4 produceres en konkret middelsum med finere inddeling end δ_1 og δ_2. Hvad bruges denne konkrete middelsum til i beviset? Kan du fremføre et bevis uden den?

Opgave 3.4

- Gennemgå beviset for Lemma 5.5, hvor der bliver brugt et bestemt epsilon (nemlig $\varepsilon = 1$). Hvorfor lige $\varepsilon = 1$?
- Find tre eksempler på ubegrænsede funktioner på intervallet $[0, 1]$. Er de integrable? Er de kontinuerte? Begrund dine svar.
- Formulér et generelt resultat om Riemann integrabilitet af ubegrænsede funktioner og bevis det.

Opgave 3.5 $\star$ †

1. Er funktionen
$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$
integrabel på $[0, 1]$? Giv et intuitivt argument ved hjælp af en figur.
2. Forklar hvorfor **1.** ikke kan afgøres ved simpel brug af sætninger fra kapitel 5, som giver kriterier for integrabilitet.
3. Argumentér for dit svar på **1.** ved hjælp af Bolzanoegenskaben (Vink: Se på $[0, \frac{\varepsilon}{4}]$ og $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ hver for sig).
4. Generalisér resultatet fra **3.** til en hel klasse af funktioner.

4 Stamfunktionsproblemet i én variabel

Opgave 4.1

1. Vis ved brug af Middelværdisætningen (Sætning 4.16), at for alle kontinuerte funktioner $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gælder, at der findes et $c \in (a, b)$, så
$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = f(c)(b - a).$$
2. Middelværdien af en integrabel funktion over et interval $[a, b]$ defineres som integralet af funktionen divideret med intervallets længde:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$$

Hvorfor er det rimeligt?

3. Hvad siger det om resultatet i 1.?

Opgave 4.2 $\star$ †

Kan man udvide Infinitesimalregningens hovedsætning (Sætning 5.30) til at gælde for

$$f\colon I \to \mathbb{R}^m$$

for $I \subseteq \mathbb{R}$ og $m > 1$? Hvordan ville sætningen i så fald lyde?

Hvilke forholdregler skal man tage, hvis man udvider sætningen til at gælde for stykkevist kontinuerte funktioner? Hvordan ville sætningen lyde?

Opgave 4.3 †

Sammenlign præsentationen af det bestemte integral i noterne med den fremstilling, du blev præsenteret for i gymnasiet.

Opgave 4.4

Uddyb, hvad der sker ved uligheden på nederste linje s. 150 i beviset for Sætning 5.28.
Uddyb, hvilke overvejelser man skal gøre sig, hvis x_1 ligger henholdsvis til højre eller venstre for x i beviset.

5 Uafhængighed af differentiationsrækkefølge

Opgave 5.1

Hvilket kendt resultat bygger beviset for Sætning 6.23 på, og hvorfor er dets forudsætninger opfyldt?

Opgave 5.2

Lad $n \geq 3$ og lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde, og lad f være en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ med kontinuerte partielle afledte af alle ordner.

1. Gælder det, at
$$D_1 D_2 D_3 f = D_3 D_2 D_1 f \ ?$$

2. Brug dit svar på 1. til at formulere en mere generel hypotese om højereordens partielle afledte for f. Kan du bevise din hypotese?

3.* † Hvor mange forskellige partielle afledte af orden k har f? (Hint: Overvej først små værdier af k og n)

Opgave 5.3 $\star$

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben. Angiv en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, der ikke opfylder, at $D_2D_1f(\mathbf{a}) = D_1D_2f(\mathbf{a})$ for et $\mathbf{a} \in \Omega$.
Hvordan forklares dette i lyset af Sætning 6.23?

Opgave 5.4

Betragt beviset for Sætning 6.23. Hvad er det for en egenskab ved S, der gør, at argumentet for at finde η lykkes på samme måde som det for at finde ξ?

6 Differentiabilitet i $\mathbb{R}^k$

Opgave 6.1

Afgør om følgende funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiable:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Brug dine resultater til at kommentere på antagelserne i Sætning 6.11 og dennes resultat.
Lav din egen opskrift til at afgøre hvorvidt en given funktion af to variable er differentiabel.

Opgave 6.2

Hvor ville beviset for Sætning 6.11 ændre sig, hvis vi kiggede på fx $k = 3$ i stedet? Specielt skal du lave tilsvarende figur, som den der er illustreret på s. 179.

7 Den generaliserede kæderegel

Opgave 7.1

I beviset for Sætning 6.21 optræder følgende identiteter:

- $Dg(b)\varepsilon_f(\Delta u)\|\Delta u\| = \varepsilon_2(\Delta u)\|\Delta u\|$

- $\varepsilon_2(\Delta u)\|\Delta u\| + \varepsilon_1(\Delta u)\|\Delta u\| = \varepsilon(\Delta u)\|\Delta u\|$

Find disse identiteter i beviset og forklar, hvordan de opstår i sammenhængen. Redegør desuden for, at de er sande.

Opgave 7.2

Lad f være en lineær afbildning, dvs. $f(x) = Ax$, hvor A er en $m \times n$-matrix og $x \in \mathbb{R}^n$. Hvad bliver funktionalmatricen for f?
Sammensæt to lineære afbildninger $f(x) = Ax$ og $g(x) = Bx$ ud fra de metoder, du har lært i lineær algebra. Hvordan passer resultatet med kædereglen?

8 Taylors formel i flere variable og analyse af stationære punkter

Opgave 8.1

Del beviset for Sætning 6.24 op i trin og skriv til hvert trin en forklaring af hvilken fremgangsmåde der bruges, hvilke kendte resultater som anvendes og også hvilken funktion de enkelte trin har i det samlede bevis.

Opgave 8.2

Hvad siger Sætning 6.24 for $k = 1$? Angiv et resultat fra noterne som siger det samme.

Opgave 8.3 $\star$

Definér på passende vis, hvad man bør mene med Taylorpolynomiet af 1. orden for en C^2-funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Hvad bliver 1. ordens Taylorpolynomiet til $f + g$, hvor både f, g er C^2-funktioner fra Ω til $\mathbb{R}$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er åben.

Opgave 8.4 †

Lad $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, hvor $n \geq 2$ og mindst to af x-værdierne er forskellige.

1. Vis at funktionen

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$

   har ét stationært punkt.

2. Afgør om det stationære punkt er et minimum, sadelpunkt eller maksimum.
3. Hvad har opgaven at gøre med lineær regression?

9 Kurvelængde

Opgave 9.1

Tegn (fx. vha. Maple eller i hånden) kurverne der parametriseres som:

- $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\frac{1}{2} + \cos t, \frac{1}{2} + \sin t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\left(\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}\right)$, $0 \le t \le 4\pi$

Kommentér ligheder og forskelle.

Opgave 9.2

Opskriv en parametrisering for en virkårlig cirkel i $\mathbb{R}^2$, dvs. med centrum i (a, b) og radius R. Find buelængden af cirklen vha. Sætning 7.15. Er resultatet overraskende?

Opgave 9.3

Lad $\widetilde{\mathbf{r}} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ være en reparametrisering af en C^1-kurve $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

1. Redegør for, at
$$\int_c^d \|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$$
2. Hvad ville der ske, hvis vi bruger en reparametrisering af $\mathbf{r}$ i beviset for Sætning 7.15 i stedet for $\mathbf{r}$ selv?

10 Kurveintegral

Opgave 10.1

Hvad ville der ske med formel (7.9), hvis vi valgte en anden parametrisering, der byttede om på start- og slutpunkt for kurven (dvs. hvor kurven startede i b og sluttede i a)?

Opgave 10.2

Hvor i beviset for Sætning 7.21 bruges antagelserne om, at γ er rektificerbar og $\mathbf{V}$ er et kontinuert vektorfelt? Sammenlign med beviset for Sætning 5.17.

Opgave 10.3

Lad $\mathbf{V}$ være et kontinuert vektorfelt.

1. Vis, at hvis $\widetilde{\mathbf{r}} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er en retningsbevarende C^1-reparametrisering af $\mathbf{r}$, så er

$$\int_c^d \mathbf{V}(\widetilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Hvorfor betyder resultatet fra 1., at

$$\int_\gamma \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

er uafhængigt af parametriseringen?

Opgave 10.4

- Entydigheden af kurveintegralet kan man, ifølge noterne, *overbevise sig om* ud fra Definition 7.20. Brug Definition 7.20 til at vise, at der ikke findes forskellige I_1 og I_2 med den ønskede egenskab.
- Sammenlign med Opgave F.10.3 (2).
- ⋆ Læs kommentaren efter Definition 7.20 og uddyb hvorfor kurveintegralet er en geometrisk størrelse.

11 Stamfunktionsproblemet i $\mathbb{R}^k$

Opgave 11.1

I Sætning 7.30 står der "*en nødvendig og tilstrækkelig betingelse*". Hvad menes der med det? Hvordan afspejles det i beviset for sætningen?

Opgave 11.2

Del beviset for Sætning 7.30 op i dele og lav en serie på 3-4 figurer, der viser, hvad der sker i hver del.

Opgave 11.3

Hvorfor kan vi ud fra Sætning 7.24 konkludere, at kurveintegralet er "*uafhængigt af vejen*" og at en lukket kurve har kurveintegral lig 0?

Opgave 11.4

- Omskriv Sætning 7.33 så den formuleres som: *Hvis … så gælder …* .
- Har vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y) = \big(3x^2 + y, 3x + y^2\big)$ en stamfunktion?

12 Greens Sætning

Opgave 12.1

Hvis $E = [a, b] \times [c, d]$, hvordan ville Sætning 9.6 så lyde?

Opgave 12.2

I beviset for Sætning 9.6 vises det, at (9.12) gælder for specialtilfældet

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} V_1(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Hvorfor opdeles γ i dette tilfælde i fire kurvestykker?
- Vis, at Sætning 9.6 også gælder for specialtilfældet

  $$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

  Hvordan parametriseres γ i dette tilfælde?

⋆ Overvej, hvad det betyder, at "(9.12) *er additivt med hensyn til vektorfeltet*". Kan du vise, at det er opfyldt?

Opgave 12.3

Når vi beviser Sætning 9.6 kigger vi på E'er, der opfylder

a) $E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \mu(x) \le y \le \nu(x)\}$ og
b) $E = \{(x, y) \mid y \in [c, d], \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$.

- Tegn 3 mængder, der opfylder både **a)** og **b)**.
- Tegn én mængde, som opfylder **a)**, men ikke **b)** og tegn derefter én mængde, som opfylder **b)**, men ikke **a)**.

⋆ Gør rede for, at en variation af (9.12) også gælder for

  $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\},$$

  selvom E hverken opfylder **a)** eller **b)**.

Opgave 12.4

I Sætning 9.6 er der en del antagelser. Overvej

- hvorfor antagelserne er opfyldt i de to specialtilfælde, som faktisk bevises.
- om det er vigtigt, at kurven gennemløbes i positiv omløbsretning.

Hvilke kendte resultater bruges i beviset for Sætning 9.6 og hvorfor er deres forudsætninger opfyldt?

Opgave 12.5

Hvad siger Greens Sætning for et vektorfelt $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, som er lukket?

Bilag F

Interviews med fokusgruppe

F.1 Interviews fra uge 9

F.1.1 Spørgeguide 1

Spørgeguide:

Generelt:

Navn: Studieretning: Årgang:

Arbejdet med F-opgaverne (15-20 min):

Vi skal tale om F-opgaverne.

- Lad os først tale om én af dem – én som I synes var nem.
  - (a) Fortæl om hvordan du gik i gang med at løse opgaven (*adidaktisitet, forbindelse og forskning)*
    - (i) Hvad gjorde du efter at have læst opgaveformuleringen?
    - (ii) Fortæl om din efterfølgende arbejdsproces
  - (b) Hvordan vidste du, om opgaven var løst? (*adidaktisitet)*
  - (c) Hvor lang tid brugte du på opgaven inden øvelserne?
  - (d) Hvad har du lært om [sætningen el. teoretisk begreb] ved at arbejde med opgaven? (*fordybelse)*

- Prøv i stedet at tænke på én opgave, som I synes var svær.
  - (a) Fortæl om hvordan du gik i gang med at løse opgaven
    - (i) Hvad gjorde du efter at have læst opgaveformuleringen?
    - (ii) Fortæl om din efterfølgende arbejdsproces
  - (b) Hvilke udfordringer havde du med at løse opgaven?
  - (c) Hvor lang tid brugte du på opgaven inden øvelserne?
  - (d) Hvad har du lært om [sætningen el. teoretisk begreb] ved at arbejde med opgaven?

F-opgaver med forskningspotentiale (5-10 min):

Vi skal også tale lidt om

- Hvordan forestiller du dig, at sætninger (forudsætninger) og beviser [som dem i noterne] bliver til?
  - (a) Hvad kommer først? Sætning eller bevis?
- Kan du pege på en opgave (F-opgave eller anden!), som vi har løst til øvelserne, som gave dig mulighed for at arbejde på en tilsvarende måde.
  - (b) Hvad er det præcist som gør, at det er tilsvarende?

F.1.2 Interview med I_1 og I_5

Int. Vi skal prøve at tale om én F-opgave. Så hvis I skal starte med at tænke på en F-opgave, som I synes var nem at løse.

I_1 Jeg tænker måske umiddelbart på nogle af de der, hvor man skal finde på en funktion. De er relativ overskuelige. Fordi, hvis alt sejler, så kan man bare sætte sig at tegne og bagefter overveje hvilken funktion man har tegnet og så er man et skridt på vejen.

I_5 Det er også umiddelbart dem jeg tænker på.

Int. Så hvis I nu skulle pege på en konkret opgave?

I_5 1.1 er et eksempel og der er også flere

I_1 Ja

I_5 Jeg synes generelt de der hvor man skal finde ét konkret eksempel, plejer ikke at være så svære igen.

I_1 Også 3.2 til i dag med en funktion der er diskontinuert.

Int. Hvis I skal fortælle om, hvordan I går i gang med at løse sådan en opgave, hvad gør I så?

I_1 For eksempel nu har jeg lige siddet her til morgen og prøvet at løse 3.2 og så var det, at jeg bare var sådan: Nårh ja, integraler det er jo det samme som arealer under grafer. Det har vi fra gymnasiet, så jeg prøvede at se om ikke jeg kunne tegne en figur til at starte med, en nem figur, hvis areal jeg vidste var 1, som der står man skal. Så jeg tegnede en trekant og så tænkte jeg: Den kan jeg jo godt lave som to afine funktioner og så kan jeg også sagtens lave diskontinuitetspunkter ved at lave en gaffelfunktion. Så det er det med, at man altid kan starte sådan meget intuitivt ved bare at tegne og så bagefter finde ud af, hvad man har tegnet.

Int. Så når du havde læst opgaveformuleringen, så prøver du dig frem?

I_1 Ja det er nok sådan jeg løser den type opgaver i hvert fald. Når det handler om at finde et eksempel. Det finder man jo ikke ved guddommelig inspiration. Man sidder bare og kvajer sig lidt og så kommer der et eller andet frem eller sådan.

Int. [henvendt til I_5] Hvad er din oplevelse med det?

I_5 Øh, altså, ja jeg tror også, at i de opgaver hvor man f.eks., altså mange af dem er jo hvor man skal finde eksempler på en funktion, som enten opfylder noget eller ikke opfylder noget, og der tror jeg også bare, at jeg så enten opstiller jeg et kriterie for den enten opfylder eller ikke opfylder og så prøver at visualisere nogle forskellige funktioner og så vælge ud fra det. Hvis nu man skal finde en funktion som ikke er uniformt kontinuert eller et eller andet, så kan man tænke: Ok, hvis ikke den skal være uniform kontinuert, så hvis jeg nu finder en som er ubegrænset og så tænker man på en som ikke er ubegrænset. Så man kan tage *log* fordi den går mod minus uendelig, når den går mod nul og så vælger jeg så den. Så det er ligesom også, at man visualisere nogle funktioner og så ligesom tager det derefter. Altså ikke nødvendigvis tegner dem.

Int. Jeg skulle lige til at spørge. Så hvis du skal uddybe, hvad det betyder at visualisere, hvad går det så ud på?

I_5 Så er det bare at forestille sig, hvordan grafen for den funktion ser ud. Ja altså, det er jo så de eksempler. Sådan nogle som $log(x)$, $\frac{1}{x}$ og e^x er sådan nogle ting som vi allerede nu i kurset har set rigtig mange gange, så der har man jo en god intuition om hvordan grafen ser ud og hvilke af de kriterier vi har gennemgået indtil nu, som de forskellige opfylder og ikke opfylder.

I_1 Ja det er klart, at man trækker også lidt sådan, altså nu kom jeg lige til at tænke på 1.7, hvor der også eksplicit står, at man skal finde på en funktion, som ikke står i noterne og som ikke er gennemgået til forelæsningen, men der vil man jo stadigvæk kunne tage udgangspunkt i de ting man har set til forelæsningerne og som står i noterne og så måske lige. Ej nu kan jeg faktisk huske, at specifikt med 1.7, så kom den lige efter den første aflevering, hvor vi jo også skulle finde på en funktion, som ikke var uniformt kontinuert, så jeg tog en der næsten lignede den vi lavede i afleveringen og så, ja eller i hvert fald fuldstændig samme princip. Vi havde noget med noget trigonometriske funktioner til noget der voksede eksponentielt eller sådan noget og så, var det det vi havde [henvendt til I_5]?

I_5 Ja

I_1 Og så lavede jeg noget lignende.

I_5 Ja altså i afleveringen skulle man selv finde på en funktion og så vise, at den ikke var uniformt kontinuert eller noget i den stil

I_1 Jeg tror også, vi lavede afleveringen sammen, så jeg tror også, at vi endte med samme funktion [som løsningen til 1.7]

I_5 Eller i hvert fald stort set det samme, men altså der valgte vi også begge to ligesom en funktion der af samme grunde, hvis man kan sige det, ikke opfylder uniform kontinuitet. Så det er ligesom den samme intuitive grund til at den ikke opfyldte uniformt kontinuitet, så det var derfor vi valgte den.

Int. Når I så har siddet og visualiseret eller arbejdet intuitivt, hvordan vidste I så, at I var færdige med at løse opgaven?

I_5 Hvad tænker du på?

I_1 Så er det nok, at man sætter sig ned og ligesom når man har fundet et eksempel, som man er temmelig sikker på duer, så afhængig af hvor meget overskud eller tid man har, så kan man jo sætte sig og vise det også. Det kan jeg huske, at jeg gjorde med den der 1.7 i hvert fald. Der satte jeg mig og gav et formelt argument for, hvorfor den funktion jeg havde fundet ikke var uniformt kontinuert.

I_5 Det gjorde jeg ikke.

Int. [henviendt til I_1] Hvordan viste du det?

I_1 På fuldstændig tilsvarende måde som i afleveringen. Noget med at finde ud af, at fordi det var en trigonometrisk funktion som ossilerede hurtigere og hurtigere, så uanset hvor lille et δ vi vælger, så kan vi finde funktionsværdier som er enten 1 eller -1 og så bum, så var det slut.

I_5 Ja i de fleste tilfælde, hvor man skal finde eksempler på funktioner der opfylder et eller andet, så plejer jeg bare at finde et eksempel og så stoppe der.

Int. Ok. Hvor lang tid brugte I på, hvis I nu tænker på, at I har nævnt nogle forskellige, hvis du (henvendt til I_1) nu tænker på den her 3.2, hvor lang tid har du brugt på at forberede dig?

I_1 Øhm, 3.2'eren brugte jeg nok ikke meget mere end 5-10 minutter på, men det er jo også typisk dem, som er lidt nemmere i det, så dem bruger jeg ikke så lang tid på.

Int. Hvad synes du, at du har lært om Riemann-integralet eller om sætninger om Riemann-integralet ved at løse den opgave?

I_1 Øh, ja men, f. eks. den der med, om det kan lade sig gøre at finde en funktion som ikke er Riemann-integrabel, men som opfylder 1. og 2., det svarede jeg vist nok nej på og så kan man jo henvise til de der sætninger som siger det og så er der jo nok nogle ting, som falder på plads. Det er sådan en, hvor man jo også godt kender svaret i det øjeblik man læser spørgsmålet. Umiddelbart. Eller jeg gør, jeg skal ikke sige man. Og så giver det jo stadig god mening, på samme måde som når man finder på funktioner, at man bagefter kan vise ægte, at den faktisk opfylder de ting den skal. Umiddelbart et svar og så skal jeg også lige bladre i bogen og så finde ud af, hvorfor det ikke er sådan. Men eksempelvis også opgave 3.5, som også er til i dag, den synes jeg også, specielt spørgsmål to, var meget perspektiverende for mig fordi det ikke går den anden vej. Eller man skal finde ud af, hvorfor vi ikke kan bruge vores sætninger på lige præcis denne her funktion. Så man jo ligesom også får fundet de begrænsninger som sætningerne har. Det gav jo faktisk også ret god mening i forhold til det at finde ud af hvad de kan bruges til og så finde ud af, hvad de ikke kan bruges til.

Int. Så lad os prøve at gøre det omvendt. Nu skal I prøve at finde en opgave, som I synes var svær.

I_1 Måske. Den første jeg tænkte på var den der 1.2, som vi lavede. Den var egentlig ikke svær at svare på som sådan, men jeg tror måske grunden til, at jeg synes, at den var svær, da vi lavede den var fordi, at da jeg så havde svaret, så var jeg absolut ikke overbevist om, at mit svar var særlig godt eller særlig fyldestgørende, men det er måske netop en del af konceptet med de her opgaver. De er måske lidt mindre konkrete end de opgaver der typisk står i bogen, hvilket jo så også gør, at de kan lægge mere op til diskussion. Det er jo egentlige meget godt, men...

Int. Så hvis du skal prøve at fortælle om, hvad I gjorde da I skulle løse den her opgave, hvad gjorde I så? Prøv at beskriv det.

I_5 1.2 eller hvad?

Int. Ja. Efter at I havde læst opgaveformuleringen, hvad gjorde I så?

I_5 Så slog jeg op i bogen og så læste jeg beviset igennem.

I_1 Ja.

I_5 Og så, altså hvor jeg ligesom var opmærksom på alle steder hvor man enten direkte eller indirekte kan bruge eller bruger det, at den er afsluttet og begrænset. Altså læste det grundigt igennem, hvor man så bemærker om der står noget om afsluttet og begrænset og hvilke henvisninger der er og så slå tilbage i bogen og se om der står noget om afsluttet og begrænset eller om der der også er flere henvisninger, så man derved går igennem beviset.

I_1 Blandt andet er det jo det med, at den baserer sig på ruselemmaet og ruselemmaet der siger, at vi altid kan finde det her ξ og så slog jeg tilbage på ruselemmaet fordi, nå ja det er sandt, det skal være på afsluttet og begrænset, så derfor kan man vel også kun bruge ruselemmaet i beviset for Hovedsætning 1 for afsluttet og begrænset, men hvorfor er det så sådan, at ruselemmaet kun gælder for afsluttet og begrænset og det var måske det jeg sådan syntes var lidt svære i det.

Int. Så hvis du skal sammenholde med det du siger nu med det du sagde før, at du havde svært ved at afgøre om dit svar var korrekt - kan du prøve at uddybe det?

I_1 Så var det nok fordi, så sagde jeg bare, at det var nok fordi, at det baserede sig på ruselemmaet og det synes jeg var lidt vagt, for så synes jeg også, at jeg burde gå tilbage og kigge på, hvorfor det også måtte være sådan for ruselemmaet og det er jo også det med, at det kan være to ting. Det kan være kig på og se om man kan overbevise sig selv om, hvorfor det nødvendigvis må gælde og så sætte sig ned og bare kigge i beviset: Hvilket argument, hvilket logisk skridt i beviset holder ikke hvis vi ikke har lukket intervaller og det er to ret forskellige ting. Jeg kunne godt se, hvorfor det nødvendigvis måtte være på lukket intervaller, men det var lidt svære at identificere hvor i beviset det aldrig nogensinde vil kunne være sandt, eller rettere ikke nødvendigvis var sandt er nok en bedre formuerling, hvis vi kun havde åbne intervaller.

Int. Så hvis I skal prøve at beskrive de udfordringer I havde med at løse den her opgave, hvad var det så?

I_1 Jamen så var det nok præcist, at jeg ikke helt var klar over, hvornår jeg var færdig. Skal jeg blive ved, skal jeg udpensle det endnu mere? Er der måske andre steder jeg har overset eller er jeg færdig nu og har jeg svaret fyldestgørende?

I_5 Der ved jeg ikke, om det bare er mig der ikke er helt lige så grundig, men altså da jeg havde fundet ruselemmaet og der var vist nok også en anden henvisning, det kan jeg ikke lige huske nu, men i hvert fald, da jeg havde læst det grundigt igennem to gange eller sådan noget og konkluderet, at der er en henvisning til ruselemmaet og det andet der, og jeg kunne ikke se mere, så tænkte jeg: Så er det nok det. Eller sådan fordi jeg tænkte, det er jo heller ikke fordi, at bare fordi man har det som forudsætning, at man bruger det i hvert skridt af et bevis. Så jeg tænkte, at hvis jeg havde fundet et eller to steder så synes jeg, at det virkede sandsynligt, at det ligesom også var de steder hvor det ligesom blev brugt. Især hvis jeg ikke synes, at det gav mening, at nogle af de andre ting umiddelbart virkede som om de brugte det. Jeg synes ikke, at jeg følte mig så usikker.

I_1 Usikker er måske heller ikke det rigtige ord. Altså jeg fandt det og så, gad vide om jeg er færdig, nå man det finder jeg ud af til øvelsestimerne. Altså så var det det.

I_5 Det er selvfølgelig rigtigt. Det har jeg også tænkt. Det er jo svært at vide om der er mere.

I_1 Men sådan er det jo måske altid, men sådan er det jo måske ikke med de lidt mere konkrete opgaver som står i bogen, hvor det var mere facit-spørgsmål. Så var det jo også meget fint, at til øvelsestimerne, hvor jeg kan huske, at instruktoren meget ledende spurgte: Er der andre steder og pointen er, at det er der ikke.

Int. Så hvis du skulle løse en tilsvarende opgave, ville du så tænke, at du har fået mere erfaring, så du ville være mere sikker på, at du havde løst opgaven rigtigt eller er sådan nogle her typer opgaver sådan nogle man altid kan være lidt i tvivl om?

I_1 Det synes jeg er svært at svare på, men ja, muligvis. Muligvis på den måde, at jeg så har set et konkret eksempel på, at der sagtens kan være et halvandet siders langt bevis, hvor man faktisk kun et eneste sted, et eneste skridt i argumentationen bruger antagelsen, men det er også nok til, at man bliver nødt til at antage det. Som rimgelig ny i faget, så kan det måske være meget godt at se, at de her antagelser ikke nødvendigvis er noget der gennemsyrer et helt bevis, men stadig er nødvendige forudsætninger. Men det har jeg ikke tænkt over før nu.

Int. Ligesom med den nemme opgave, hvor lang tid brugte I så på at forberede jer til 1.2?

I_1 Jamen nok i virkeligheden ikke så længe, for som jeg sagde så sad jeg og var i tvivl om, om jeg havde svaret udtømmende, men så tænkte jeg også hurtigt, at jeg kan ikke komme på mere, så det finder jeg ud af til øvelsestimen.

I_5 Nu kan jeg ikke lige huske, hvor lang tid jeg brugte på 1.2, men jeg tror generelt, at de opgaver hvor man har skulle sidde og gennemgå et bevis f.eks. den her 1.3 - det var jo også med at gøre rede for de forandringer som beviset for 3.9 kræver. Altså sådan nogle opgaver, har været dem som har taget længst tid at sidde og løse. Jeg kan huske, at jeg i hvert fald brugte lang tid på den her 1.3 fordi man netop skal være grundig for at sikre, at man ikke overser et eller andet og man skal ligesom danne sig et overblik over hvor præcis der bliver henvist til tidligere ting i beviset og sørge for, at det så også er på plads. Så jeg synes at den, ligesom som 1.2, hvor jeg så ikke kan huske hvor lang tid jeg brugte, men de der opgaver, hvor man skal sidde med fingrene nede i et bevis og ligesom blive helt sikker på, at alting passer som det skal eller sikre sig, at der ikke er nogle andre steder, hvor man henviser til et eller andet. Det er dem der tager lang tid, netop fordi man ikke på et eller andet tidspunkt kan konkludere, at nu er jeg færdig fordi der er muligheden for, at man kan overse noget og så bliver man jo nødt til at læse det igennem en gang mere indtil man føler sig rimelig overbevist om, at man ikke har overset noget.

I_1 Jeg tror også med 1.3, nu skal jeg passe på hvad jeg siger, fordi du har jo mine noter, men såvidt jeg husker, så endte det faktisk med, at jeg faktisk havde siddet og skrevet hele beviset for det analoge. Det skete nærmest af sig selv fordi jeg skulle sidde og lave alle de der smårettelser.

I_5 Det gjorde jeg ikke. Jeg skrev bare, hvor der skulle ændres ting i hele beviset. Jeg gad ikke sidde og skrive så meget.

Int. Så prøver jeg at spørge, som jeg også gjorde for den nemme opgave, hvis I skal prøve at sætte nogle ord på, hvad I har lært om Hovedsætning 1A ved at løse Opgave 1.2 hvad ville det så være?

I_5 Jeg har lært hvor man skal bruge, at det er et afsluttet og begrænset interval den er defineret på. Jeg synes måske, at 1.3 i forhold til 1A var mere givende fordi man ikke skulle læse det igennem for at finde en ting, men ligesom skulle læse det igennem og sørge for, at alting passede med noget andet. Så jeg tror også, at jeg brugte længere tid på 1.3, men jeg synes også, at jeg følte mig meget mere sikker i beviset for Hovedsætning 1A efter at have lavet 1.3. Det følte jeg, at jeg havde det rimelig godt inde under neglene, netop fordi man skulle i og for sig formulere et bevis der var fuldkommen analogt, men stadig anderledes og være sikker på, at man havde ændret de rigtige steder.

Int. Så hvis du skal uddybe, hvad du synes, at forskellen er på 1.2 og 1.3?

I_5 I 1.2 når man læser det igennem, så leder man meget specifikt efter brugen af et kriterie og selvom det nogle gange kan blive brugt indirekte, så er det stadig til at se om det på nogle måder har noget med det at gøre, og hvis det ikke har det, så skipper man måske lidt let hen over det. Hvor jeg synes nede i 1.3, der skulle du ligesom sørge for at læse alting igennem fordi at der i et bevis også bliver henvist meget tilbage til tidligere i beviset, hvor man definerer et M eller et eller andet og hver gang du så kommer til noget, hvor man bare snakker om et eller andet fra tidligere i beviset, så skal du også gå tilbage og sikre dig, at du også har fået ændret det så det passer med det nye. Så der er mange flere interne henvisninger, som man skal tjekke op på. Det synes jeg gjorde, at man fik det meget mere ind under neglene.

I_1 Jeg synes måske også, at 1.3 var den bedste øvelse i at forstå og lære om Hovedsætning 1A, hvor 1.2 var lidt mere generelt bare at lære at se kritisk på et bevis og undersøge om en eller anden forudsætning faktisk kan udlades for at gøre beviset eller sætningen stærkere. Pointen var selvfølgelig her, at det kunne det ikke, men...

Int. Ok. Så vil jeg prøve at spørge jer om lidt noget andet nu, som ikke i første omgang forholder sig til en konkret opgave. Som Søren har sagt, så er An0 med i det der kaldes 2016-projektet og derfor er det tanken, at I skal prøve at arbejde forskningslignende. Men hvis vi skal tale om det, så bliver jeg nødt til at vide, hvad I forstår ved at arbejde som en forsker. Så hvis nu I skal prøve med udgangspunkt i sætninger og beviser, hvordan forestiller I jer så, at forholdet mellem dem er, altså hvordan bliver de til når man forsker i matematik?

I_1 Jamen altså, jeg tænker, at det nok starter med en form for, hvad hedder det på dansk, notion. En Idé, hmm, muligvis er der noget her. Igen, det kommer nok ikke ved guddommelig inspiration forestiller jeg mig. Jeg tænker, at man ser et mønster på en eller anden måde, når man arbejder konkret med tingene og ser tingene blive anvendt og så kunne jeg næsten forestille mig, at beviset nogle gange kommer før sætningen i virkeligheden. Det er nok meget forskelligt.

I_5 Jeg tror meget, at jeg er præget af, at jeg synes, at flere steder i løbet af den tid vi har været her indtil nu, at forelæsere eller instruktorer eller sådan noget nogle gange prøver at give en idé om hvordan det foregår og der er det jo meget sådan med, at man så får nogle opgaver, som går ud på at finde nogle eksempler og så kan du se et mønster og hvad er mønsteret. Så formulerer man det og er det så rigtigt? Eller noget i den stil. Og så sidder man til øvelsestimerne og så siger instuktoreren, at det måske lidt mere sådan, at matematikken faktisk bliver lavet og ikke bare, at man har en sætning og så laver man lige et bevis. Så jeg er meget præget af det. Og så Søren Eilers, som til sidste forelæsning så også fortæller det der med, at man har en eller anden sætning som man tror på er rigtig formentlig gennem noget empirisk erfaring og så siger man ligesom, så nu vil jeg bevise den og så kan man ikke finde ud af noget i to uger og så tænker man: måske skulle jeg prøve at vise noget, som er lidt mere banalt end det og så kan man heller ikke finde ud det og så blive ved med at gå tilbage indtil man finder et eller andet, som man faktisk godt kan bevise og så kan man måske bruge det eller den måde man har vist det på til så at bygge oven på igen bagefter. Men det er jo noget som han direkte har fortalt. Den den idé jeg har er meget præget af det jeg har fået af vide af forelæsere og instruktorer. Så det er rimelig meget bare det de siger.

Int. Kan I pege på en F-opgave, som I synes, hvor I synes, at opgaven har fået jer til at arbejde på en tilsvarende måde?

I_1 Så skulle det være 2.4 tænker jeg. Fordi den starter med sådan et lidt mere generelt polynomium og at man bliver kastet ud i at skulle sige nogle ting om det her polynomiums egenskaber og så er det man ender med at være sådan, om man kan sige nogle generelle ting om det her særlige polynomium som bliver givet i opgaven og så ender med at finde ud af, at det var faktisk entydigt bestemt ved sine afledte og det må jo så være for at hvilket som helt polynomium og så hov, så var der noget med nogle afledte og et Taylorpolynomium osv osv. Det lugter da lidt af det, som I_5 sagde i hvert fald.

I_5 Jeg synes ... Jeg tror måske, at det er svært at stille en opgave, hvor man føler at man så laver noget forskningsagtigt fordi at man netop ved, at opgaven bliver stillet med det mål, at man skal finde et eller andet. Så selv når man læser en opgave som strukturelt er stillet op, som en forsker vil gå til værks, så er det stadig delt op i: "Vis det her", "vis det her". Og jeg tror, at en stor del af det at forske er først og fremmest at se, hov, er der en sammenhæng her? Jeg kan godt se, at hvis man har lagt mærke til at det her gælder hver gang, at man så gerne vil vise det, men jeg tænker bare, at en stor del af det at være forsker og som er rigtig svært at få med, når man stiller opgaver, det at opdage en eller anden sammenhæng. Det er svært at få gennem opgaver, for I kunne godt have stillet en opgave hvor man skulle lave fem forskellige afledede af nogle bestemte polynomier og så sige: Kan I se en sammenhæng? Men igen så vil det være sådan lidt efter to polynomier, så ville man jo godt vide, hvorfor der var fem polynomier, som man skulle finde den afledte af, så det er ikke fordi man ligesom selv sidder og opdager et eller andet. Og det er generelt svært at få med, når man stiller opgaver. Man kan ligesom vise strukturen igennem opgaverne, men jeg synes ikke, at man får fornemmelsen af, at man sidder og lægger mærke til at eller andet.

I_1 Man kan sige, at det at man stiller en opgave forudsætter nærmest at der findes et svar og allerede der forestiller jeg mig, at det er meget anderledes end forskningen fordi det er sjældent givet, at der faktisk er et svar til det spørgsmål man arbejder på. Så per definition kan opgaver aldrig stilles så det bliver super forskningsagtigt. Man kan selvfølgelig godt stille opgaver som følger lidt den samme arbejdsgang, men det bliver aldrig det samme.

Int. Det var de spørgsmål jeg havde. Tusinde tak for jeres hjælp.

F.1.3 Interview med I_3 og I_6

Int. Det første jeg vil spørge Jer om er, hvis I skulle pege på en konkret opgave af de her F-opgaver, som I synes har været nem for Jer.

I_6 Jeg synes faktisk generelt indtil videre, måske ikke lige dem som vi har haft til i dag eller sidste gang, men ellers synes jeg generelt dem til hovesætningerne og de fleste af dem til Taylors formel har været sådan relativt overskuelige at løse. Det er ikke sådan, at man har siddet sådan og kæmpet med det. De er ligesom også sådan, at de har fået en til at tænke lidt mere over, ja, hvad er det egentlig vi sidder og laver. Fx. sådan en som denne her opg. 2.3. Ligesom fået en til at sidde og tænke over, hvad det egentlig er de forskellige ting betyder, når man får tegnet den lidt og sådan noget.

Int. Så hvis du skal prøve at beskrive, da du skulle løse 2.3 derhjemme, hvad gjorde du så?

I_6 Jamen det er fordi, at jeg måske ikke altid er den mest grundige, når jeg sidder og læser, og jeg havde godt lige læst hen over, at vi så på den der funktion og differentierer den flere og flere gange, så vil den stadig være nul i det her punkt, men havde ikke helt overvejet, hvad det sådan rent visuelt når man tegner den kommer til at betyde. Så sad jeg ligesom og tænkte over, hvad er det så der sker, når den anden afledede også er nul og så ligesom da jeg fik det tegnet, altså så får man ligesom en bedre forståelse for, hvad det er tingene betyder og man begynder mere at overveje, hvad er det egentlig der står og hvad det er, altså, ja.

I_3 Jeg har godt kunne lide de opgaver, der handlede om beviserne. Fordi man netop ikke får dykket ned i det der måske kan være vigtigt, så giver de her, altså opgaverne lægger ligesom et fokus for hvad man skal kigge efter. Både i beviser og i antagelser.

I_6 Der var faktisk også, nu kan jeg ikke huske hvad det var for en opgave. Den der opgave hvor de i et eller andet bevis, ja denne her 3.4, hvade valgt at ε skulle være lig med 0, nej lig med 1, for der satte jeg mig ned og overvejede, hvorfor vælger de egentlig det? Der kom jeg ligesom også frem til, at det slet ikke gav mening, at de valgte det. Så man får ligesom en dybere forståelse og får overvejet de overvejelser der ligesom også blev gjort, da man først lavede beviset, bedre. Hvorfor har man valgt åbne intervaller, nogle gange er det lukkede intervaller.

I_3 Altså så man heller ikke bare stoler blindt på, at så sætter de ε til at være 1 [bliver afbrudt]

I_6 og så skal man gøre det. For det var jo egentlig fuldstændig overflødigt.

Int. Hvis I skal prøve at uddybe, hvordan, når I sidder derhjemme og får at vide at så er der de og de F-opgaver og så læser I opgaveformuleringen, så prøv at beskrive, hvad gør I så? Det kommer selvfølgelig an på hvad opgaven handler om, men I_6, du sagde 2.3, så hvad gjorde du så?

I_6 Så satte jeg mig ned, fordi jeg havde læst umiddelbart inden jeg satte mig ned og ville kigge på de opgaver vi havde for efterfølgende og så kunne jeg godt huske, at jeg havde læst noget om, hvor der ligesom blev nævnt denne her funktion og så satte jeg den frem og så satte jeg mig faktisk ned og læste en gang til, hvad det egentlig var de sagde om den og kom jo så relativt nemt frem til, at de bare sagde, at fx, jeg vidste jo godt, at hvis den første afledte var 0, så ville man have et ekstrema eller en vendetangent og så når der stod, at den anden afledte var 0, så ville det svare til, at man havde en vendetangent der gik den ene eller den anden vej og så umiddelbart ud fra det, fik jeg jo bare løst opgaven.

Int. Men via at tegne?

I_6 Ja ved tegne den. Ved at tænke over, hvordan den kunne komme til at se ud og så tegne den og så efterfølgende finde en funktion der ligesom lignede det. Øhm, men altså ja, nogle af dem der især handler om beviserne, der er det jo bare noget med at man så bare sætter sig ned og så bare meget meget grundigt læser beviset igennem og overvejer alle de ting der ligesom bliver antaget og bliver gjort. Og så, ja fx også nogle af de opgaver vi lavede i starten, de der hvor man så skulle se hvor de fx bruger, at den er kontinuert eller bruger et eller andet, så ligesom sætte sig ned og så prøve at køre det hele sådan igennem igen og igen, indtil man kan se hvor det er, at det bliver nødvendigt, at den er kontinuert. Og så synes jeg også, at mange af opgaverne lægger op til, fordi det jo tit er sådan, at vi har forelæsningen og så opgaverne vi skal løse til øvelsestimen efterfølgende, ligger jo så efter det vi har haft til forelæsningen. Tit så har Søren også været inde på nogle af de ting vi skal overveje og så ligesom med udgangspunkt i det han har sagt, så kan man ligesom godt selv se det.

Int. Nu har I prøvet at pege på nogle forskellige opgaver, hvordan vidste I at nu var I færdige med at løse opgaven?

I_3 Altså jeg bliver aldrig færdig med at løse opgaverne, men det er fordi jeg altid er sådan lidt for usikker, jeg tror bare sådan i min matematiske kunnen indtil nu. Jeg synes ligesom, at bare det, at man får nogle tanker, at man ligesom reflekterer over, at nårh ja, men det her, så jeg havde måske ikke lige opdaget, at $\varepsilon = 1$ var noget særligt eller forkert, men så fik jeg det overvejet lidt og så gav det jo mening. Jeg havde ikke løst den færdigt, da jeg kom over til øvelsestimen, men så havde jeg en intuition om, at der var et eller andet forkert der.

I_6 Der er nogle af opgaverne, som jeg sådan tænker er relativt overskuelige, hvor jeg sidder og godt er klar over hvornår jeg er færdig og godt er klar over, at jeg har fundet frem til det rigtige.

Int. Er det fx. 2.3?

I_6 Ja der var jeg godt klar over, at jeg havde fundet frem til det rigtige. Og hvis vi fx skulle sige for en eller anden hovedsætning hvornår, at ruselemmaet blev brugt, der var jeg også godt klar over, at jeg havde fundet det rigtige sted. Men jeg vil sige, at flere gange der har jeg det også bare sådan lidt, at jeg har læst opgaven og så har jeg overvejet det, fået en eller anden idé, men det er ikke fordi, at jeg er 110% sikker på, at det er præcis det, men jeg er overbevist om, at jeg er inde på noget af det rigtige. Og så kan man ligesom komme over til øvelsestimen og få bekræftet, at man var inde på det rigtige, men at man måske også lige skulle have overvejet det her eller et eller andet. Så det er meget godt til at [bliver afbrudt]

I_3 Det er super fed måde at arbejde på i virkeligheden [bliver afbrudt]

I_6 Ja man bliver ligesom hjulpet lidt på vej. Det jeg faktisk synes er godt ved de her F-opgaver i forhold til nogle af de opgaver der er i bogen, det er, at dem her de er lettere at løse måske halvt. For dem i bogen er sådan, enten så kører det eller også så sidder jeg og tænker, at jeg ikke aner hvad jeg skal gøre. Her har jeg aldrig sådan følt, at jeg var helt blank. Så har man kunne løse den halvt eller så har man i det mindste kunne sidde og overvejet det lidt derhjemme fra, så man ikke kommer og er helt bagud til timen.

Int. Hvor lang tid brugte i ca. på de opgaver, som I har talt om her?

I_3 Fx. 3.1. Jeg tror måske, at jeg brugte 10 min. på den. På at sidde og overveje hvor det egentligt var, at Bolzano var opfyldt, men med 3.1 er jeg ikke nået frem til et endeligt svar fordi der var nogle ting, som jeg blev i tvivl om lige pludseligt, men jeg har overvejet det.

I_6 Jeg synes, at det er meget forskelligt. Nogle af de der sådan lidt mere konkrete opgaver, det kan man klare relativt hurtigt. De andre der er det måske også sådan noget med, at jeg sidder og læser det og så prøver jeg at læse beviset igennem et par gange og kan måske ikke helt gennemskue det. Så lægger man det lidt fra sig og så lige pludselig, eller sådan har jeg det i hvert fald, at selvom jeg ikke går og tænker over tingene, så kan jeg lige pludselig sådan oppe i mit baghoved på en eller anden måde godt komme frem til det alligevel. Så kan det jo godt være, at det principielt har taget en hel dag, men det er jo ikke fordi, at jeg har siddet en hel dag og prøvet at løse den. Jeg har måske siddet i et kvarter og da det så ikke lykkedes, så har jeg, fordi ellers så kører man lidt sur i det, synes jeg i hvert fald.

Int. Oplever I tit det med F-opgaverne? At I kører surt i det?

I_6 Nej. Jeg oplever det mere med opgaverne i bogen.

I_3 3.1'eren kiggede jeg så på og så kom jeg ned til 3.2'eren og så synes jeg pludselig, at det var meget, jeg synes, at den var uoverskuelig af en eller anden grund. Jeg vidste ikke helt, hvordan jeg skulle gribe den an i hvert fald. Så tænkte jeg, så prøver jeg bare at gå videre og så synes jeg også, at 3.5'eren virkede uoverskuelig, så kørte jeg lidt surt i det i virkeligheden.

I_6 Jeg synes, at det der måske nogle gange kan gå lidt galt for en, det er, at man får gjort opgaven sværere end den egentlig er.

I_3 Ja fuldsætndig.

I_6 Tit når jeg har siddet hjemme og tænkt, at det var mega svært, og så kommer jeg over til timen og så når jeg hører svaret, så var det bare det. Nogle gange vil man bare gerne have, at det skal være sværere end det egentlig er.

I_3 Ja der var en af F-opgaverne hvor jeg sad og begyndte at bevise det, hvor det egentlig havde været et meget konkret eksempel jeg skulle finde, men jeg gik i gang med at det skulle være det helt store bevis, fordi jeg tænkte, at det var det den bad mig om.

Int. Lad os prøve at vende den om. Prøv at peg på en opgave, som I synes var svær af F-opgaver, som I har løst indtil videre. Du sagde [henvendt til I_3] 3.2, kan du prøve at beskrive, hvad det var for nogle vanskeligheder du havde?

I_3 Altid det første jeg tænker, når jeg skal løse en opgave er, hvis jeg ikke umiddelbart forstår det, så begynder jeg at tegne det. Jeg vidste ikke en gang hvor jeg skulle tegne en funktion der havde tre diskontinuitetspunkter, jeg anede slet ikke, jeg kunne ikke rigtig se det for mig.

Int. Når du så møder noget du synes der er svært, en forhindring, hvad så?

I_3 Her der sidder jeg så med min graf og så kigger jeg på min graf og så tænkte jeg, hvor kan jeg starte? Jeg kan da i hvert fald sige, at den går fra 0 til 1. Jeg vidste ikke det med den der diskont, det kan jeg slet ikke finde ud af at sige, nå man ok, så er den i hvert fald strengt voksende. Så det må næsten være en der er delt op i tre tænkte jeg, men kunne ikke helt få det ned på papir, da jeg så kom til, at den skulle være integrabel. Så blev det lidt for abstrakt og så gik jeg videre.

Int. Hvad med dig, I_6?

I_6 Altså jeg synes den der 3.5. Den synes jeg var svær, fordi så tegnede jeg en skitse af den der funktion. Det er jo sådan en funktion, at så går den helt amok inde omkring 0 og så skulle man give et intuitivt svar på, om man kunne integrere den. Og på den ene side så tænkte jeg, at det areal som er inde under grafen omkring 0, at det er så lille, at det ikke må have nogen indflydelse på det samlede, så jeg tænkte umiddelbart, at så måtte man godt kunne integrere den, men så havde jeg svært ved at forklare hvordan, altså så kunne jeg måske ikke bestemme de her middelsummer, fordi de vil variere så meget alt efter hvad jeg vælger mit ξ til, men da jeg så gik videre til den der opgave 3 [tredje delopgave], så vidste jeg ikke helt hvorfor, eller hvordan jeg skulle argumentere for mit svar på 1 [første delopgave]. Fordi så tænkte jeg, at det jeg ligesom havde antaget indtil videre det er, at det der ξ ligesom vil variere rigtig meget og så vil de jo ligesom komme til at blive meget forskellige fra hinanden og så synes jeg ligesom, at det hele begyndte at modsige alt det jeg havde tænkt indtil videre og så tænkte jeg, nå men så er det nok forkert og så orkede jeg ikke mere.

Int. Hvis I skal skyde på hvor lang tid I har siddet og tegnet og regnet?

I_3 Relativt kort tid i virkeligheden. Jeg kunne godt have lagt mere energi i det.

I_6 Jeg tror max et kvarter.

I_3 Jeg tror, at jeg brugte fem minutter. Fordi når jeg så først løber ind i noget, hvor jeg ikke en gang kan tegne det, ikke en gang kan se det for mig grafisk så ved jeg ikke [bliver afbrudt]

I_6 Jamen jeg havde det også sådan lidt med 3.2, at jeg forstår sagtens de der betingelser den skal have, men det der med, at man så skal kunne integrere den til 1, så synes jeg, at det blev lidt uoverskueligt at finde en funktion der integrere til 1. Så jeg endte også med at tegne en der var lig med $-x$ og så $+x$ og så bare med nogle punkter der var nogle andre steder. Jeg kan ikke helt overskue, hvordan jeg skal kunne finde på en funktion som så sådan nogenlunde pæn ud, men selvfølgelig uden at være kontinuert, som skulle integrere til 1. Det synes jeg blev lidt uoverskueligt. Så tænker man, at man kan lave nogle rette linjer, men så allerede i det, at den ene knækker, så bliver det jo mindre end $1/2$ og så er den anden også nødt til at knække og så har jeg fire punkter og ja.

Int. Ok godt. Nu vil jeg prøve at gå lidt væk fra de her F-opgaver igen og snakke om, hvad I tror det betyder at lave forskning i matematik. Så prøve at beskriv, hvordan tror I, at forholdet mellem sætninger og beviser er? Altså hvordan bliver de til? I hvilken rækkefølge og hvordan gør man?

I_3 Det er jo sådan noget med, at man sidder og så kaster man det ned, de tænker: Kunne der være et eller andet her? Og så kaster man det ned og så tager man det lidt op og så prøver man at gnidre lidt i det og måske rive det lidt fra hinanden. Prøve at rive det så meget fra hianden som muligt og så lige pludselig, wow, så var der en sammenhæng. Så prøver man at arbejde lidt videre med den sammenhæng og så var der en endnu større sammenhæng og så laver man en sætning.

I_6 Jeg tænker også, at det er noget med, at man har en intuition om, at der er en sammehæng mellem nogle ting og så prøver man at sidde og se på, hvad det var der skulle gøre, at det var denne her sammenhæng og ud fra det få lavet et bevis. Så kan det være, at man tager nogle antagelser undervejs og de kommer så også til at være antagelser for sætningen, for det kan være, at jeg tror, at der er en sammehæng, men det kræver, at en funktion er på et begrænset interval, så kommer det jo også til at blive en del af sætningen. Så man starter med en idé, så laver man beviset og så får man sætningen.

Int. Hvis du skulle prøve at uddybe, hvad det vil sige at kaste ned [henvendt til I_3]?

I_3 Jamen det er jo bare det der med, at man har nogle idéer og man har nogle tanker og nogle intuitioner om, hvordan det skal være og så arbejder man ud fra det. Lidt det samme som I_6 sagde. Bare det der med, at man har nogle idéer og så må man prøve at samle dem og organisere dem på en eller anden måde og så må man lave nogle antagelser, hvis de ligger lidt forskudt. Og så kan man få idéer og så kommer man måske frem til noget der hænger sammen på et tidspunkt.

I_6 Få samlet trådene op igen.

Int. Kan i pege på en F-opgave, hvor I synes, at I har arbejdet sådan?

I_3 Jeg synes, at den første opgave i afleveringen, hvor vi skulle finde fejlen. Fordi det blev sådan, at hvis man havde lavet et bevis eller havde haft en idé og kørt det igennem og så så, at der var måske noget der ikke helt passede og så gik tilbage og rettede i det. Så lidt ligesom det der med $\varepsilon = 1$ [bliver afbrudt]

I_6 Jamen jeg synes generelt, at de opgaver, hvor man går ind og ser på beviser og skal sige, hvorfor er det, at de siger, at vi skal være på et begrænset interval eller hvorfor er det de siger, at den skal være kontinuert, hvor man får brugt det. Altså hver gang vi studerer hvordan de her beviser egentlig kører igennem, der tænker jeg, at det er lidt i den samme retning man går. Man begynder, i stedet for bare sige at det bare er sådan det er, så begynder man og overveje, hvorfor det er, at man har valgt at gøre det. Fordi man laver jo ikke en antagelse i et bevis, med mindre der er en grund til det. Nu siger man så godt nok, at $\varepsilon = 1$ selvom man ikke behøver at gøre det, men som udgangspunkt så tænker man, at man ikke gør det, men så er det jo også fint nok, at der er et eksempel hvor de har valgt at sige, at $\varepsilon = 1$ uden det overhovedet var nødvendigt og man så kunne ind og overveje det.

I_3 Jeg synes det er fedt, for når jeg læser sådan en lærebog, så tænker jeg, at alt der står i den er rigtigt. Altså i gymnasiet var det jo sådan, at det var sandheden i matematik, hvor nu der er nogle ting hvor man i virkeligheden selv skal have hovedet med fordi der godt kan være nogle fejl eller [bliver afbrudt]

I_6 Ja det er sjovt det der med, at folk siger, at det de godt kan lide ved matematik er, at der altid er et endelig svar, det kommer man lidt væk fra igen. Nu begynder man godt at kunne gradbøje tingene lidt og så sige, at man måske ikke altid lige [bliver afbrudt]

I_3 men at man altid, eller måske kan gå ind og ændre i nogle af antagelserne og man selv kan modificere det på en eller anden måde.

Int. Ok. Det var de spørgsmål jeg havde. Tak for hjælpen. Det var pænt af jer.

F.1.4 Interview med I_2 og I_4

Int. Vi skal prøve at tale om F-opgaverne og jeg synes, at vi skal prøve at gøre det sådan, at I vælger en opgave ud, som I synes var nem. I behøves ikke vælge den samme.

I_2 Jeg tror for mig, så er det sådan med flere af dem, så er det sådan, at du på en måde kan gøre det meget nemt. Fx. F1.1. Vis med et eksempel, at konklusionerne i Hovedsætning 1A ikke gælder for en funktion defineret på et åbent interval. Det er jo ikke fordi det er vildt svært lige at finde et eller andet hvor her så gælder det ikke vel. Og så det der med at gå beviset igennem for 1A og finde ud af, hvor man bruger, at det skal være et afsluttet og begrænset interval, der sad vi bare, altså det var knap nok to sekunder vi talte om det. Det var sådan, nå det må være her og så var jeg sådan, at nu havde jeg set det og så lod jeg bare være med at gøre meget mere ud af det. Så det er sådan lidt, hvor svært jeg vælger at gøre det. Omvendt så var der nogen i dag, hvor lige først da vi fik stillet dem, så havde jeg først tænkt det, som instruktoren så skrev på tavlen selv sådan næsten helt automatisk og så fordi vi fik det der spørgsmål, så gjorde det det bare meget svære fordi jeg tænkte sådan, at jeg tror bare, at det er det her. Det giver bedst mening, men nu siger hun? Altså jeg misforstod bare det hun sagde for ligesom at hjælpe os på vej. Altså hvis du siger det der, så er det måske ikke det jeg bare har tænkt. Jeg synes bare ikke, at det giver mening, hvis det ikke er det.

Int. Hvad var det for en opgave?

I_2 Det var F4.4 om sætning 5.28. Det var fordi, at jeg havde selv kigget det bevis sådan rimelig grundigt igennem, så det der hvor vi skulle uddybe, hvad der sker i uligheden, da jeg læste det i bogen, så kunne jeg godt forstå hvorfor uligheden stod der. Først læste jeg det bare, men så gik jeg lige tilbage og hov, hvorfor må de bare lige gøre det der, så forstod jeg det. Så jeg kan godt forstå, at det godt at sørge for, at folk lige tænker over at stoppe op og lige forstå hvad der sker, men så fordi hun sagde, at vi skulle putte nogle flere mellemregninger på, så troede jeg, at hun ville have, at vi ligesom skulle gøre uligheden længere og det tænkte jeg, at det kan jeg da ikke. Så jeg vil sige, at F4.4 synes jeg var en nem opgave, indtil jeg misforstod den.

I_4 Ja det er sådan, at nogle af de nemme opgaver bliver svære fordi man tror, at der er mere i dem end der egentlig er. Men det er også ret fedt bare at få lov at overveje det. Det er meget fedt at man får lov at sidde at tænke over, at hvis der skulle være nogen andre mellemregninger hvad skulle det så være.

I_2 Det lærer man jo også en del af egentlig.

Int. Kan du pege på en, som du synes var nem?

I_4 Altså generelt så, altså nu var jeg jo den der beviste Ruselemmaet, så jeg synes, at det var ret nemt, da jeg ligesom havde læst det hele igennem. Jeg synes, at det er relativt nemt, når de spørger ind til beviser fordi det ligesom lidt står der og så skal man bare sådan lige overveje det en ekstra gang, hvorfor gælder det her. Så kan man ofte selv finde det. Hvor jeg synes sådan noget med eksempler, det er enten virkelig nemt eller også har man bare ikke lige idéen og så tager det vildt lang tid, hvor man skal sidde og overveje det. Det er sådan meget varierende, hvor hurtig jeg er til at få idéen. Det fra i dag var ret nemt. Det stod der og så var jeg sådan, ok så gør jeg bare sådan her, men det kommer lige an på, om man har idéen.

Int. Så som eksempel?

I_4 Så fx. F1.2.

Int. Hvis du ska prøve at beskrive, hvad du gør, når du skal løse sådan en opgave?

I_4 Det jeg typisk ville gøre var bare at læse spørgsmålet igennem og så siger den, afgør hvor antagelsen om at f skal være defineret på et afsluttet og begrænset interval bruges, så ville jeg egentlig bare slå op i bogen og så begynde at læse beviset igennem. Og så sige hov, her var der noget og så lige overveje bruger man det egentlig her og det gør man. Ligesom forsøge at se, hvor bruger man det her videre så man forstår det hele vejen igennem. Man det er bare forfra og så begynde at læse til jeg støder på noget.

Int. Hvad med den opgave du nævnte, I_2? Sådan en med at man skal give et eksempel. Hvordan løser du den?

I_2 Altså sådan en som den fra i dag?

Int. Ja fx.

I_2 Enten så begynder jeg at tænke sådan, hvad kender jeg, altså bare sådan gå ting i gennem hvor jeg ved, at det her ikke ville gælde. Eller også så ville jeg begynde at tegne det de siger. Så F1.1 der ville jeg nok begynde at tænke, hvilke funktioner kender jeg, hvor Hovedsætning 1A ikke kommer til at ske på et åbent interval? Og så den der fra i dag, hvor der var de der tre betingelser, der begyndte jeg sådan at tegne de tre betingelser og se sådan. hvad giver bedst mening. Hvad er det bedste, nemmeste eksempel. Men jeg har sådan en vane med at lave tingene for svære til mig selv eller for mig selv. Det kan lyde lidt dumt.

I_4 Jeg synes at det hjalp, at instruktoren en af de alle første gange sagde noget med, at det er en rigtig god idé at prøve at finde det mest simple overhovedet. Og det har gjort det 100 gange nemmere. Hvad kender jeg? Det kan måske være noget periodisk eller det kan være noget kontinuert der drillede her. Så begynder det bare hurtigt at blive meget nemmere, når man ved, at man ikke leder efter noget kompliceret. Men det er så måske også lidt snyd fordi man ved, at det er nemt det man leder efter.

Int. Det er jo en erfaring man gør sig og den må man jo gerne bruge.

I_2 Hurtig så går jeg bare igennem sådan, fx så tænkte jeg sådan først: Hvad betyder det, at den ikke er kontinuert i tre punkter? Dvs. der skal ske noget ala det her. Hvis den skal være strengt voksende og strengt aftagende og det der nede med, at arealet under skal være 1, så tænkte jeg, at hvis det skal være det, så det nemmeste jeg kan finde på det vil være en trekant. Lige først så prøvede jeg egentlig bare med 1 og 2 og så tegnede jeg nogle lidt underlige ting, med så var det ikke så nemt at finde ud af om det her giver 1. Så prøvede jeg at gå den modsatte vej og det var meget nemmere. Men tegning, det er altid godt med eksempler.

I_4 Specielt F-opgaverne er ret godt til sådan lige at snakke om mundtligt i stedet for at sidde og skrive. Det får man meget hurtigt noget ud af.

Int. Gør I tit det sammen?

I_2 Det gjorde vi primært i starten ikke? Eller det ved jeg ikke. De sidste to uger har vi begge to sådan [bliver afbrudt]

I_4 Vi har begge to nogle grupper, hvor vi er nogle stykker der mødes om mandagen, hvor der ligesom er to der gennemgår nogle beviser, som vi skal have i løbet af ugen og kan få til eksamen. Der er det tit, at vi, uden vi egentlig mener det, kommer ind på nogle af de her spørgsmål. Så man er lidt i tankegangen.

I_2 Og så plejer vi også at mødes torsdag morgen og der kan vi så sammenligne vores resultater til F-opgaverne. Jeg var væk to dage i sidste uge og to dage i denne her uge og så sker det bare ikke helt på samme måde som det har gjort de andre uger, men ellers så er det sådan noget som vi prøver på at gøre.

Int. Hvis vi skal prøve at tage fat i de eksempler i valgte igen. Fx. F1.2. Når I løser sådan en opgave, hvordan ved I så, om I har løst opgaven?

I_4 Det er jeg virkelig tit i tvivl om [griner]. Det er sådan noget vi meget tit diskuterer.

Int. Prøv at uddyb hvad det betyder.

I_4 Det er bare nogle gange lidt svært at overskue om man har taget alle tilfælde med eller om der er et eller andet specielt man skal være opmærksom på. Vi forsøger at sammenligne lidt og hvis vi bare ikke kan komme på mere, så må vi sige, at så er vi måske færdige nu. Håber vi. Så tager vi til timen og nogle gange er vi færdige og nogle gange er vi ikke.

I_2 Altså fx. F1.2. Der kan jeg huske, at jeg havde ligesom bare sådan, jeg tror næsten bare sat et par mærker i min bog og så ikke gjort mere ud af det. Jeg havde ikke skrevet noget yderligere ned. Jeg havde ligesom bare sagt sådan, at her og her vil der ske nogle ændringer, men heller ikke fuldstændigt gået den sådan totalt konsekvent igennem, sådan for at se hvor ændret det noget. Fordi jeg kan huske, at på en af vores første kurser, der var en der sagde til os, at i matematik der skal man være doven. Og så tror jeg bare, at jeg har fået det lidt ind nogle gange og tænker, at nu har jeg sådan set idéen og så er jeg måske ikke 100% færdig, men jeg er ved at være færdig og så er det okay. Så er der noget andet der er vigtigere at få lavet.

I_4 Ja plus der er jo meget at lave. Så det er nogle gange også lidt en prioritering. Vil jeg gå det her igennem slavisk, som jeg egentlig lidt har forstået og har lidt en idé om hvor ændrer sig, eller vil jeg lave nogle andre opgaver?

I_2 Præcis.

I_4 Så vælger man ofte de andre opgaver. Også så man når lidt bredere i overfladen i stedet for bare at kunne nå en ting sådan virkelig dybt.

I_2 Netop sådan noget med beviser og ændre nogle ting, så hvis det er et bevis, som man kun lige har hørt og man har egentlig forstået det, men det er alligevel ikke sådan, at jeg har fuldstændig fat i det endnu, så er det jo nogle gange lidt svært at overskue, om jeg nu har taget alle tilfældene med. Og også fordi, så begynder de at udlade flere ting i bogen og så ja. Hvor nogle af de andre opgaver, så ender du med, at du har vist det du skulle vise, så er jeg færdig. Eller det var så ikke en F-opgave, så det er lige meget. Nogle gange er det som om, fx. den her F1.4, så kan man sige: Undersøg Bisection Method, det er sådan rimelig nemt og man ved godt hvornår man undersøgt hvad det er. Og forklar hvad metoden har med Hovedsætning 2A at gøre, der kan man også godt sige sådan, at nu har jeg i hvert fald forklaret noget. Det kan godt være at jeg ikke har forklaret alt, men jeg ved i hvert fald sådan, ja. Og så når man benytter den til at approksimere $x^2 = 2$ med tre decimaler så er man på et tidspunkt færdig. Men der ved du bare bedre, at nu er jeg færdig fordi jeg har approksimeret med tre decimaler, hvor når du skal overveje et eller andet, så er det sådan, er jeg så færdig når jeg bare lige har tænkt det igennem eller er jeg færdig, når jeg har vist det mere slavisk?

Int. Lad os prøve at vende det om. Så nu skal I prøve at vælge en F-opgave, som I synes var svær.

I_2 Må jeg se den her? Ja den her. F2.2. Den var besværlig.

I_4 Første punkt var virkelig nem. Den der med bare at plusse dem samme det var ret overskueligt.

I_2 Fuldstændig.

I_4 Men så den der med at gange det sammen og det blev virkelig grimt og det var virkelig irriterende. Og man havde på fornemmelsen, at der var et eller andet man ikke havde forstået.

I_2 Ja, altså man kunne godt se sammenhængen, men lige at overskue hvordan man skulle få det kogt ned til noget pænt var bare besværligt. Jeg vidste ikke, hvad jeg skulle gøre. Jeg sad og kiggede og så prøvede jeg at lave den større og større og så forsøgte jeg at se nogle mønstre. Man kan egentlig godt se mønsteret, men lige at overskue, hvad man ser var bare sådan lidt.. Og så gør instruktoren bare lige det der på tavlen og man kan sagtens forstå det, men sådan lige at få sat det sidste på selv, det var, ja det har været noget af det sværeste.

I_4 Ja den var ret svær.

Int. Hvad var det I oplevede der var vanskeligt?

I_4 Det var mest det der med, at det blev virkelig grimt og virkelig uoverskueligt og man vidste godt, at man nok skulle få det til at blive noget pænt, men det var virkelig frustrerede det der med, at man ikke bare kunne få den til at give noget pænt. Jeg tror bare det var fordi det var så uoverskueligt fordi det blev meget grimt og meget stort. Indtil videre har det vi har arbejdet med været relativt pænt, så det var vildt frustrerende.

Int. Tænkte I, at det var noget, som opgaven ikke fortalte jer? Det vel lidt et dogme i matematik, at hvis ikke det givet noget pænt, så har man gjort noget galt?

I_4 Jeg beberejder generelt ikke opgaven. Jeg bebrejder bare, at jeg ikke har læst det ordentligt.

I_2 Jeg følte ikke, at jeg blev snydt. Der var endda sådan sat binomialkoefficienten ind. Det hele var egentlig sat frem, værsgo og brug det, men det var bare lige at få det gjort.

Og så tror jeg mest for mig selv, hvis der er noget der sådan, så er det også at sørge for, at jeg har tiden til det. Så når jeg at se, at der er et mønster. Så får jeg kigget på det og så fordi jeg ikke lige med det samme kan se hvad det er, så går jeg videre og lader den dæmre. Hvis jeg så ikke har tid til at gå tilbage, så får jeg bare ikke løst den. Det er jo ikke opgavens skyld.

I_4 Der skal jo også være opgaver der er sværere end andre. Det ville være virkelig deprimerende, hvis man kunne løse det hele bare sådan her.

Int. Hvor lang tid brugte I på at løse F2.2?

I_4 Jeg vil tro, at vi sad et kvarter til en halv time og så gik vi videre.

I_2 Jeg tror, at jeg sad med I_5 i et kvarter til 20 minutter. Men så går man videre. Så er den der stadig [bliver afbrudt]

I_4 Så nåede man bare ikke tilbage.

I_2 Min hjerne arbejder ofte stadig med dem. Så kan det godt være, at jeg ikke rigtig når at gå tilbage, men den arbejder stadig lidt med det.

I_4 Vi snakkede lidt om den inden timen.

Int. Da instruktoren så havde givet jer sin løsning, hvad tænkte I så?

I_2 Så tænkte jeg bare, at det var fedt [griner].

I_4 Det var super irriterende, at man ikke selv kunne se det.

I_2 Ja det er rigtigt.

Int. Hvad var det der manglede?

I_4 Idéen tror jeg.

I_2 Ja eller. Jeg har sådan en vane med at tænke, at hvis nu jeg havde siddet længe nok, så skulle jeg nok have fået idéen og det tror jeg måske også, at det ville være sket på et tidspunkt.

Int. Hvad betyder det at få en god idé? Hvordan gør man?

I_4 Jeg er stor fan af bare at prøve ting og tænke, at nu prøver jeg at differentiere det og finde ud af, at det går overhovedet ikke. Nå men så integrerer jeg det, og det går overhovedet ikke, nå man så lægger jeg et eller andet til og det går heller ikke. Og så lige så stille blive klogere og klogere på funktionen og så kan man se, at hvis nu jeg gør det her, så bliver den måske en lille smule pænere. Så minder det mig om noget osv. Nogle gange kommer jeg frem til noget og nogle gange kommer jeg frem til Pascals trekant [griner]. Det er lidt fjollet, men sådan er det. Jeg er stor fan bare at prøve ting og se om jeg kan finde ud af det. Eller bladre lidt frem og tilbage i bogen og se om vi har noget der ligner eller minder om.

I_2 Jeg tror også ofte, at det jeg gør er sådan noget ligner/minder om eller når frem til noget, hvor jeg kan tænke i mønster. Kan jeg se et mønster eller en eller anden sammenhæng. Hvad betyder det? Hvad er det for en sammenhæng jeg kan se? Noget jeg har fundet ud af, der hjælper mig rigtig meget til at få en idé at sætte mig ned og helt konsekvent finde ud af, hvad ved jeg og hvad får jeg at vide at der gælder. Hov, når den siger det her og det her, så ringer der en klokke. Det gælder også i det her tilfælde, så kunne det være, at det havde noget med hinanden at gøre. Jeg har bemærket, at hvis jeg bare går i gang med det samme, så bliver jeg i tvivl om, hvad det egentlig er jeg laver. Så har jeg gået for hurtig frem. For mig hjælper det bare at skrive noget og så kan jeg komme videre. Nogle gange når man skriver ned, så begynder man at få idéerne. Mønstre og sørge for at man ved det man ved.

I_4 Ja altså lige at få styr på, at jeg ved det her og jeg skal frem til det her og hvad betyder det egentlig.

I_2 Hvad ved jeg om det jeg skal frem til og hvad ved jeg om det jeg har. Hov, det kunne være, at jeg skulle gå den her vej.

I_4 Hvad ved jeg om andre ting i det her emne.

Int. Nu springer jeg lige lidt i det. An0 er jo med i det her 2016-projekt, som Søren har fortalt jer om. Så vi skal prøve at tale om, hvad I synes forskning er. Eksempelvis er bogen fyldt med sætninger og beviser. Hvordan bliver sådan nogle til?

I_4 Er vi så ikke ude i den gode gamle klassiske, at man har nogle aksiomer og så starter man der.

Int. Kan du uddybe det?

I_4 At man ligesom definerer nogle aksiomer og siger, at det her det er et punkt og det her er et punkt. Den direkte vej mellem dem er en streg. Så kan man have flere af dem og så har man noget mere. Og pludselig når man ligesom går ud fra det og kommer videre og videre så kommer man frem til nogle sætninger og noget. Men jeg ved ikke helt hvad forskning er. Man bliver nødt til at antage nogle ting og definere nogle ting og så ligesom tage de ting og udlede noget mere af dem. Hvordan kan man blive klogere ud fra de ting vi har defineret og antaget.

I_2 Jeg tror også, at jeg er meget på den her med, at vi har nogle ting vi ved og så kan vi sige noget med om det her. Noget af det her, som vi egentlig ikke ved noget om, kan vi måske finde ud af noget om det? Helt klart det med at gå ud fra aksiomerne. Vi ved at det her er sandt, så kan vi vise, at det her er sandt. Men hvordan man lige får idéen. Jeg sad lige og overvejede, hvorfor får man overhovedet lyst til at bevise alle de her ting? Fordi noget af det man ofte siger i matematik, det er jo at vi finder ud af alt muligt, som man ikke kan bruge til noget endnu. Og hvordan folk får idéer til at finde ud af noget, som man ikke behøver at bruge til noget endnu, det virker på en måde lidt underligt, men også vildt spændende. På en måde giver det mening, fordi man i matematik, eller jeg har en idé om, at man bevæger sig fra, ja, altså lidt ligesom et uudforsket område og så har man alle de ting man ved noget om og så udforsker man det uudforskede område med det man ved. Jeg mener at have hørt, at noget matematik også opstod fordi, altså sådan noget som de komplekse tal, noget som nogen simpelthen syntes at det havde man brug for at det kan ske, kan vi ikke definere som minder om og så lige pludselig havde man de komplekse tal fordi vi kan se, at hvis vi har det her i som er $\sqrt{-1}$, så opfører det sig som noget vi kender. Det er pænt nok og stikker ikke imod alle de regler vi har i forvejen. Så man får en idé om noget, som man godt kunne tænke sig gælder og så undersøger man ud fra det man ved gælder i forvejen, om det rent faktisk gælder for det nye.

I_4 Jeg har faktisk også undret mig over, at de kalder det her forskningsbaseret. Fordi det virker som sådan ret gammel forskning. Altså ting man har vidst ret længe.

Int. Men nu har i beskrevet en proces. Synes I, at der er nogle af opgaverne, som har fået jer til at arbejde sådan som I har beskrevet?

I_4 Altså når man laver beviser, så er det jo det her med, at man lidt ved nogle ting og forsøger at lære noget nyt. Så selvfølgelig det sådan lidt forskningsagtigt. Det føles bare ikke så nyskabende forskning, når man ved, at andre har vidst det i flere hundrede år ofte.

Int. Nej måske ikke resultatet, men hvis vi taler om processen?

I_2 Det vil jeg mene. Hver gang vi får en af de der opgaver, fx. var der en i dag, den der F3.5, hvor vi får en funktion og så siger vi, tror vi den er integrabel i det her lukkede interval og så giver man et intuitivt argument fordi ja. Og så har vi egentlig ikke nogle sætninger, der siger det vi godt kunne tænke os, at den skulle sige. Så kigger vi lidt mere på den og finder ud af, at af omveje kan vi sige noget om det alligevel og det viser sig, at det gælder for noget helt generelt. Og så har man jo faktisk skabt noget nyt. Jeg synes sådan en opgave som det her, det er ret sådan forskningsagtigt eller derhen af. Det jeg sådan tænker ville være forskningsagtigt. Fordi vi har nogle kontinuerte funktioner der er sat sammen. Det er noget vi kender alle sammen. Så er denne her funktion så lige lavet på en sådan måde, så den egentlig er diskontinuert, så derfor kan vi ikke bare bruge det vi egentlig ved, men det kan vi så alligevel fordi meget af funktionen er noget vi godt ved noget om. Det der med, at rigtig meget af opgaven er noget, som man egentlig ved en masse om i forvejen og så netop fordi der er noget man ved en masse om i forvejen kan man finde ud af noget nyt om noget andet. Giver det mening?

Int. Ja, jeg prøver at følge dig.

$\mathbf{I_4}$ Hvis nu der lå en opsrift til forskning, så var alle resultaterne jo nok også vist allerede. Det er jo ikke fordi vi får at vide, hvilken metode vi skal bruge. Vi er nødt til selv at tænke over vores metode.

$\mathbf{I_2}$ Ja der bliver givet hints, men så skal man finde ud af, hvad gør jeg så? Og det er den der hvad gør jeg så, det må også være det forskere sidder og gør. Jeg ved ikke om de nødvendigvis altid ved, hvad de vil vise? Men det giver bare ikke nogen mening for mig, hvis de ikke gør.

$\mathbf{I_4}$ De ved vel ikke nødvendigvis hvad de vil vise, men det kan være, at de har en eller anden idé. Man behøves ikke vide det specifikt.

$\mathbf{I_2}$ Bliver man ikke nødt til at vide hvor man vil hen?

$\mathbf{I_4}$ Det ved jeg ikke. Jeg synes, at det er ret sejt, hvis de ikke ved, hvor de vil hen.

$\mathbf{I_2}$ Men de har en idé om, at de gerne vil vide noget om det her. Jeg tænker, at du bliver nødt til at vide, hvad du vil vide noget om for du overhovedet kan gå i gang. Ellers så sidder du jo bare og der er alt det her matematik.

$\mathbf{I_4}$ Jo det bliver nødt til at være noget, som forholder sig til noget man kender.

Interviewet afbrydes af en anden studerende, som deltager i en videre diskussion, der er uformel. Denne del af derfor ikke transkiberet. I_4 forklarer i diskussionen, at hun bruger arme til at visualisere planer. I_2 forklarer, at det med at sige ting højt eller forklare til andre hjælper til at få overblik og afklaret begreber. Få det ind og gøre noget nyt ved det. Begge påpeger at det er i arbejdet med øvelser, at man bliver opmærksom på, om man har lært noget om begreberne. F-opgaverne tvinger en til at tænke teoretisk, giver et overline over, hvilke pointer der er vigtige og F-opgaver om beviser forbereder en til selv at lave beviser.

F.1.5 Interview med I_7

Int. Hvis vi starter med først at prøve og snakke om en konkret opgave som du synes var nem, og der er simpelthen frit valg, på alle hylder.

I_7 Var det en F opgave den der hvor man skulle omskrive... Det var nemlig noget jeg havde lavet før

Int. Jamen det er helt fint

I_7 De der hvor man skulle.. Altså, beviserne var udeladt i bogen, for +/- når du havde sammensatte funktioner, med et delta man skulle skrive selv.

Int. Ja... Det er ikke sådan én desværre. Men det kunne jo være der var en der mindede lidt om den, som du synes var nemmere.

I_7 Jeg kigger lige engang. Så meget har jeg slet ikke nået at kigge på dem.

Int. Hvad med når I taler om opgaverne her til øvelsestimerne? Kan du så pege på en bestemt som du synes har været bare nem?

I_7 Jeg vil sige at instruktorens måde at sige hvad der står i opgaven, faktisk er mere indlyssende end det der står i opgaven

Int. Ja, hvordan er der forskel synes du?

I_7 Jeg ved ikke, hun siger det bare på sådan en, hvad skal man sige normal måde. Jeg tror lidt det er der jeg går kold nogle gange. Når det sådan bliver *for* fagteknisk. For eksempel i vores første afleverings opgave, hvor vi var til lektiecafé og der var faktisk ikke rigtig nogen af dem der rendte rundt til lektiecafé der rigtig kunne svare på, hvad det var der faktisk blev spurgt om. Og når studerende der har afleveret opgaver - og nu ved jeg så godt nok ikke lige hvor langt tid de har gået her - den ene synes Taylor polynomiet var hans bitch, så bliver man lidt frustreret over at der sidder forskellig grader af ældre studerende - den ene er Dan - som ikke kan svare på hvad der faktisk bliver spurgt om. Så sidder man, okay, hvordan fanden skal jeg så vide det som første års studerende?

Int. Føler du det er det samme med F-opgaverne?

I_7 Nogle af dem ja,

Int. Kan du pege på en?

I_7 Så skal jeg jo forberede mig!

Int. Nej det behøves du ikke, det kunne godt være du bare lige kunne tænkte på en. Det skal du slet ikke være nervøs over. Du kan også bare sige nej.

I_7 Jamen, der er nogle af dem. Jeg kan ikke lige huske dem, men der var nogle hvor man sidder og det bare giver mere mening når instruktoren snakkede om dem, og så sidder man, nå var det bare det der blev spurgt om? Men jeg kan ikke huske hvad det lige var for en opgave.

Int. Hvad nu hvis vi bare prøver at kigge på en af dem, så kan vi jo se om det var sådan en af dem eller ej.

I_7 Ja

Int. Så hvis vi nu prøver at kigge på den her for eksempel: Opgave 1.3. Vil det også være sådan en hvor du tænker: jeg ved ikke hvad den beder mig om at løse?

I_7 Lidt ja, for den minder om den anden, sådan en "find fejlen"eller her er det så, "find hvor de ikke er ens"og så lave dem om. Og jeg føler måske lidt at det er lidt over hvad man føler man kan, fordi problemet med de her opgaver og den første afleveringsopgave, det er lidt - som instruktoren også siger rigtig rigtig tit - jeg skal nok forklare det senere hvordan jeg fik idéen, men vi får den her idé.

Int. Okay

I_7 Og det er det at få idéen der er svært, det er ikke udregningerne, det er ikke forstå hvorfor man gør alle de ting, men det er det at få idéen, og det var også derfor den første opgave var total røv! Den anden, altså den vi skal lave til næste uge, der sådan lidt mere regning i, og det er lidt mere åbenlyst hvad der skal ske. Vi har lige haft om middelværdi sætningen og vi har lige haft om Taylor og sådan nogle ting, så er det sgu nok der vi skal hen af. Hvorimod "find fejlen i det her bevis"og så er det at intervallet er for lille eller sådan noget, hvor man ender med at sidde og stirre sig blind på hvad det egentlig lige er der falder forkert. Og jo, jeg kan godt følge at noget af det vi skal lære er at man ikke skal tage ting for givet, men man føler også abre lidt, at der bliver spændt ben kun for at spænde ben

Int. Okay

I_7 Altså ikke fordi der faktisk kommer noget konstruktivt ud af det, andet end at man sidder og stirrer sig fuldstændig blind på det og sidde tre dage og glo på den samme opgave uden at komme nogen steder, fordi du ikke bare lige får den der epiphany. Så snart han har fået [i gåseøjne] Aha-oplevelsen så er al matematik jo nem. Men det at få aha-oplevelsen det mangler lidt. Og nogle af de her opgaver hjælper lidt til at man får den her "Aha-oplevelse"i hvorfor det nu lige var de gjorde sådan her i et bevis, men der er også nogle der gør det sværere end det egentlig var.

Int. Ja, hvad er det der gør, at nogle af dem giver dig Aha-oplevelsen og hvor det så er anderledes med de andre som ikke gør det?

I_7 Ja, men det er jo det der er svært, for vi tænker allesammen vildt forskelligt, og det er ikke det samme som giver mig Aha-oplevelsen som giver en anden Aha-oplevelsen

Int. Jamen hvis du så skal prøve at forklare hvad der giver dig Aha-oplevelsen

I_7 Så skal jeg prøve at finde et konkret eksempel, men så er det jo lige hvad det skal være for noget.

Int. Ja, du tager dig bare god tid

I_7 Jeg kigger lige i mine noter

Int. Det må du også gerne. Keine problem! Det kan også være svært at huske, det er jo langt tid siden med nogle af opgaverne

I_7 Ja hvad er det? 4 uger siden, men det føles bare som en evighed!

Int. Ja du skal nok lidt længere hen, for F-opgaverne kom først til uge 2

I_7 Lad mig se, den der hedder F1.2, der hvor vi skal bruge antagelsen om, at f er defineret på et lukket og begrænset interval. Det at skulle finde den, det var ikke fordi dét var en Aha-oplevelse det var mere sådan en "check antagelse for at undgå fejl", det er fint nok det skal vi jo selv ligesom gøre når vi kører men.. Altså det er en fin øvelse, men hvorfor gør vi det her? Jeg synes ikke altid det gør ting nemmere. Man skal forstå hvad man laver, men der er nogen gang i de der beviser hvor det er nemmere bare at huske jeg skal gøre det her, når det her sker og så kører det. Ting kan komme mere intuitivt når man forstår det, for så får man den der, nå! Men det har jeg set før. Lige som når Søren står og laver beviser så er det altid sådan: Nå ja, men det kan vi jo huske, men jeg føler bare at det er ikke er sådan et niveau man er på endnu. Nu er man stadig lidt på udenadslære og så kommer åbenbaringerne senere, men nogle af de her opgaver ligger lidt op til, at nu skal du få en åbenbaring. Og jeg har lidt forstået det sådan, at Analyse 0 er et kursus i at senere skal I bruge at få åbenbaringer. Men at det ligesom lidt er det vi lærer i løbet af kurset, og alligevel ligger nogen af opgaverne bare op til at det skal I kunne gøre nu.

Int. Okay,

I_7 Ligesom den der var det 1.3? Hvor at vi bliver spurgt, hvorfor er vi færdige når vi har vist det? Og hvorfor skal vi lave det om?

Int. Ja.

I_7 Nogle af dem var sådan lidt åbenlyse, den der med sup selvfølgelig skal du ændre alle de steder der står sup til inf ikke. Så det var sådan lidt åbenlyst, det var ikke rigtig fordi der var noget Aha-agtigt i måden det blev gjort på

Int. Var der en anden del af den der så var Aha?

I_7 Det var et eller andet.. Men jeg kan ikke lige huske hvad det var. For det meste af det var vist nogle uligheder husker jeg. Jeg synes nu ellers der var et eller andet ved den opgave der, men jeg kan ikke lige..

Int. Altså spørgsmålet er om man kan redegøre for at ulighederne faktisk svarer til indholdet i hovedsætningen, altså de der to man ønsker at vise. Den der og den der. 3.8 og 3.9, det var den første. Den er ligesom delt i tre. Så der to som er sådan: gør rede, gør rede, og så er der sådan en overvej.. til sidst. Hvad betyder det for dig når du får en opgave hvor der står gør rede for?

I_7 Forklar hvorfor du gør det.

Int. Ja, hvad tænker du om overvej

I_7 Det er sådan lidt mere abstrakt. Kunne man for eksempel lave beviset anderledes, end bare at vende det om. Og det er igen den der: Overvej hvordan man kunne argumentere omvendt, jamen så skal du have den der idé, og der er meget forskel på at få at vide, du kan gøre det her omvendt, hvad vil du gøre for at du kan gøre det omvendt? og så du kan gøre det på en anden måde? Altså der er forskel på at sige: Du kan gøre det her, hvordan vil du gøre det? og på at sige, kan du gøre det her? Også bare ved kan du gøre det her ved bare at vende den om? Jamen, det kan man godt hvis.. Så det er sådan lidt det der med, at du kan lave beviset omvendt hvis du gør sådan her, hvordan gør du det? På en eller anden måde får du lidt mere foræret på den måde end hvis spørgsmålet havde lydt: Kan man gøre det her? Fordi, så skal du først tænke, hvad skal kunne lade sig gøre, hvis det skal kunne lade sig gøre at gøre det her. Så er der mange overvejelser, før du overhovedet kommer frem til og skulle regne. Og om det så kunne lade sig gøre, så at skrive det om.

Int. Det er for at prøve og forstå, når du siger opgaver med Aha og opgaver uden Aha. Hvad det ligesom er der ville være forskellen på dem?

I_7 Jeg tror dem med Aha-oplevelsen, det er sådan nogle hvor, at der er en eller anden lille ting hvor man så lige har gennemskuet at så kan du faktisk gå hele vejen tilbage. Jeg tror det er nogen af de der hvor, at jamen det her beror på det her som beror på det her som beror på det her og så får man den der NÅRH!, så det er faktisk bare det vi gør. Nogle af de der hvor de siger, vi bruger den her, men man ikke lige kan se... Altså hvis du tager alle mellemregningerne med og ligesom skærer det ud i pap, jamen så kan man godt se hvor det kom fra. Og så giver det faktisk mere mening at det er sådan man gør. I stedet for at det bare er vi gøre sådan her. For mig er det mere, altså jeg har brug for mere af forklaringen omkring det i stedet for: Vi gør sådan her. Og sådan nogle kan du se at hvis vi gør sådan her så, det får jeg Aha-oplevelser af i stedet for sådan: Overvej det her, jamen okay, jeg kan godt sidde og overveje det og det kan man måske nok, men jeg skal ligesom kunne se hvor vi skal hen af. Jeg kan sidde og tænke på det her fra nu af og til juleaften, men der kommer ikke nødvendigvis noget ud af det, hvis ikke man lige får den der idé. Og nogle af de der beviser man skal sidde og kigge igennem i vores aflevering, der er rigtig mange linjer hvor du sidder jamen der kan godt være en fejl, når man har fået at vide at der er en fejl, så kan det jo være alt muligt. Det kan være der er en fortegnsfejl, der kan være vendt et π på hovedet skulle jeg til at sige. Altså det kan være hvad som helst! Man sidder og vender samtlige punktummer og kommaer hele vejen igennem. Og så er det et eller andet totalt åndsvagt, men fordi det er så åbenlyst, så får du ikke kigget på det. Altså man kan ikke se skoven for bare træer. Og det er lidt den følelse man lidt sidder med ved nogle af de der Overvej..-opaver. Fordi, der er alt for mange steder at starte. Så hvor er det ligesom at man, altså hvis man starter fra en ende af og så kører vi bare, men når man så er nået halvvejs og der stadig ikke er noget der sådan lige [springer i øjenene red.], fordi du har siddet og overvejet hver eneste type på hvert eneste bogstav og hvert eneste tal, og så sidder man, I må jo have spist søm, det er der da ikke. Kontra de der hvor du får at vide jamen du kan gøre det her, men hvordan? Fordi så overvejer jeg ting på en anden måde.

Int. Så lad mig prøve at spørge dig om noget helt andet. Fordi en del af Analyse 0 er, at kurset i år er med i det her 2016-projekt, som Søren også fortalte om, som er et kæmpe forskningsprojekt på Københavns Universitet. Og de midler man så har fået, har man fået til at prøve og udvilke opgaver som kan få jer til at arbejde som forskere. Og det kan lyde fjollet, fordi så sidder man og tænker – præcis som Søren sagde – at det kunne betyde man skulle udvilke ny matematik, og det kommer I ikke til. Men det kunne alligevel godt være at der kunne være nogle processer, eller nogle arbejdsgange eller sådan noget som kunne være de samme. Men for at jeg kan vide om du synes det vil sige at arbejde som en forsker?

I_7 Altså jeg vil sige, jeg synes det var meget at få kastet i hovedet. Jeg har jo ligesom den baggrund, at jeg har taget engelsk og sådan noget, og der er jo en grund til at man ligesom laver sit grundstudie først, igennem alle dine små opgaver og ligesom får en idé om, hvad er det jeg skal, når jeg skal ud og forske?, når jeg selv skal ud og skrive mine større opgaver og ligesom arbejde selvstændigt. At dem får man ligesom varmet op til. Og får respons på, at det her var ikke sådan helt og sådan noget hvor, at det her bliver lidt mere sådan: I skal kunne det her om tre år, men vi kaster jer ud i det nu! Altså, kast hunden ud og se om den kan svømme. Også definition af det som Søren stod og sagde: I skal bruge det her senere, hvis eller når I skal forske og det er måske ikke alle der skal ud og forske. Og har den tilbøjelighed eller hvad vi skal kalde den.. Jeg synes det er voldsomt.

Int. Ja, jeg tænker på din idé om, hvis man nu for eksempel kigger i den her bog, den er fyldt med sætninger og beviser. Så hvis du skulle give dit bud på hvordan de sætninger og beviser faktisk er kommet til verden, hvordan er det så sket?

I_7 Der er nogen der har fået en masse lyse idéer. Noget af den er jo historie også, så var der ham der, som fandt ham der og som, men det ligger egentlig til ham der og så blev de enige om, og så var der egentlig også lige den her måde at gøre det på men det var ikke særlig smart så derfor gør vi det her. Der er jo mange tusinde års trial and error.

Int. Synes du der er noget af det i de her øvelser, for dig?

I_7 Altså jeg kan godt se idéen i nogle af opgaverne at man må kunne, kunne det her men hvordan gør jeg det? Men der skal utrolig meget energi til, for det første at forstå hvad det er der foregår, altså forstå alle sætningerne og beviserne for dem og sådan noget, og så til at kunne gå ind og omskrive dem. Og pille ved dem, og sætte ting ind og ud og hvilke af to metoder der er den mest effektive eller sådan noget. Der er meget ekstra i, at man sådan får kastet sindssygt meget info i hovedet på ikke særlig meget tid, og du skal forstå det, du skal op til en mundtlig eksamen, stresse lidt over det. Og så til også at skulle, ikke bare forstå og kunne bruge det, men også ligesom skulle kunne modarbejde det på en eller anden måde. Der er bare sådan en ekstra dimension på, hvor en ting er at du skal have det ind og ligesom kunne bruge det. Men du skal også kunne ælte det igennem og spytte noget andet ud fordi at hey se hvad jeg lige, og nogen gange føler man bare lidt at hvis man var sådan en savant der sad og fik kastet et eller andet i hovedet, så ville man sidde: Hvorfor gør I det? I skal da gøre sådan her!-agtigt. Der er nogen der har den der intuition omrking det, og de skal lære at det ikke bare er nok at sige jamen altså.., man skal også ligesom kunne bevise det ikke. For sådan en gennemsnitsstuderende så er det meget, jeg føler lidt det er den forventning der ligger bag, at I skal kunne tage ting I har nu og så får man kastet i hovedet, jamen det er sådan man forsker. Ja, det er fint, men lige nu vil jeg bare gerne forstå det her matematik, eller forstå det her vi har taget for givet. Hvorfor det er sådan og hvorfor vi ikke må tage det for givet - man må aldrig tage noget for givet i matematik - selvom det hele er noget vi tager for givet. Meget filosofisk, at man så ligesom bliver forlangt den her ekstra ting som jeg i hvert fald føler ligger lidt for tidligt. Altså, man kommer med gymnasiebaggrund og alle de her ting, hvor man tager de her ting for givet, og jeg kan også huske, da jeg havde B-niveau der fik vi sådan en eller anden formel spyttet ud og jeg kan ikke engang husk hvad det var den gjorde, men, det var inde i gymnasiereformen, så det var egentlig en A-niveau og vi skulle kun op på B-niveau så det var helt vildt. Men vi fik bare givet, at den virker sådan her. Jeg tror han på et tidspunkt gennemgik beviset for den, men det var sådan, vi skulle ikke kunne beviset, men vi kunne bruge sætningen. At det sådan lidt er det, vi har en masse af de her ting, hvor vi ved hvordan man gør. Altså ligesom den vi nu gennemgik her, at det er åbenlyst at det er sådan, fordi det har vi fået at vide. Man har måske også set beviset engang, eller i hvert fald i kort træk hvad det nu er det gør og sådan noget. Og nu skal man ligepludslig forstå hele mekanikken bag det og samtidigt får man taget en bestem skrue ud og skal forklare hvorfor den skrue skal sidde lige der. Ikke nok med, at du prøver at forstå, at den her skrue ligesom sidder i hele det her urværk, så skal du også pille den her skrue ud og forklare hvorfor den skal sidde lige der. Og det er ikke altid det er lige åbenlyst. Nogle gange, så når man får at vide: Kig der, så får man den der Nåååå!, så er det man har den der ja okay, det giver egentlig meget god mening. Men andre gange så sidder man også bare, jeg kan godt se det er smart, men jeg kan ikke se hvorfor det er smart. Og selvom man får at vide at det er dér man skal kigge efter, så kan jeg simpelthen stadig ikke lige se hvorfor det er smart. Men spørg mig igen om halvandet år, så kan jeg godt fortælle dig hvorfor det var det var smart. Det er lidt ligesom når man har Øk-Intro og starter som ny studerende, og skal sidde og bruge partielt afledte og får at vide, at det lærer I om 7 uger i Mat-Intro, men vi skal bruge det nu. Så derfor så får de bare at vide, at I gør sådan her. Så forstår I det om 7 uger når I har læst Tore Krog, så forstår I hvad det er I gør, men lige nu skal I bare bruge det. Og det er så lidt for meget at forlange i den første uge, at du skal kunne forklare hvorfor det er du gør sådan her, men jeg har fået at vide at jeg skal gøre sådan her, jamen du skal forklare det. Kan du ikke bare spørge mig igen om 2 måneder, når jeg faktisk har forstået, hvorfor jeg gør sådan, og nogle gange er det nemmere at bruge noget først. Fordi man så ligesom – altså ligesom når man sidder og laver opgaveløsninger – nogen gange så forstår man de der kringlede formuleringer der nogen gange er lidt for kringlede, fordi, Nå! Det er bare det der står.

Int. Ja. Er der nogle af F-opgaverne, hvor du føler du har fået den der bruge det først og så prøve bagefter. Hvis nej så er det okay, det er ikke ment som et ledende spørgsmål.

I$_7$ Der var en specifik opgave, hvor at det er sådan et eller andet totalt åndsvagt. Altså der er nogle af dem der er sådan lidt, men det er også fint at få banket ind at Ruse-lemmaet er godt, men der er også nogle af dem der er sådan lidt, ja det var jo bare ikke? Men der er sådan nogle småting hvor der var en eller anden, men at man skulle svare på om et eller andet var sandt eller falsk. Hvor at, umiddelbart så kan jeg huske at jeg sad og tænkte jamen selvfølgelig er det det, men så var det at der var nogen der påpegede, at vi har også uendelig.

Int. Det kunne godt være den der 1.8

I$_7$ Ja jeg tror det var den. Hvor den virker den ene vej, men ikke den anden vej, fordi der er uendelig. Og hvis man ikke lige husker uendelig, så ja, så virker det jo fint. Men det er en af de der ting, hvor det er total oplagt, men fordi at så snart der er en der siger det så siger man: Nå ja! Altså ligesom den der med, at du kan blive ved med at vælge, at selvom du ligesom har tallet uendelig minus 1, ja men vi kan godt lige fordi, at vi tager bare sådan lige og det kan vi blive ved med. Det er sådan nogle af de der ting, hvor man ved det godt. Og man glemmer det nogle gange. Der var også en opgave hvor det var noget med rationelle skulle jeg til at sige, selvfølgelig irrationelle tal, hvor at det dur faktisk kun fordi at vi ikke bruger, det er sådan lidt nogle af dem, når der er en der lige påpeger det så nå ja.. Det er også rigtigt. Men det havde jeg ikke lige overvejet. Men man ved det jo godt, det er bare fordi det er sådan noget, det er så arh, jeg vil ikke sige banalt fordi der er ikke noget der er banalt, men det er alligevel så.. Det er ikke lige det man tænker på. Ligesom når der er en opgave der siger: Hvad er der galt her?, og så er det at intervallet er for lille. Altså, nå ja, hvor man har siddet og virkelig slavisk gået alle linjerne igennem og så er det noget i antagelsen. Hvor vi fik at vide for tre uger siden: check antagelserne før at resten ligesom kører ikke, så bliver man sådan lidt.. Ja.. Men man tager også bare nogle ting forgivet, fordi man er studerende og fordi man har ikke helt styr på nogle ting. Jeg synes der var en opgave hvor der var et eller andet, omregn noget.

Int. Ja det har der været nogle stykker af i hvert fald.

I_7 Men, mange af de der opgaver er sådan lidt intuitive og hvis man ikke lige har dem. Tegn en funktion for eksempel, men hvis du ikke lige kan ryste den der funktion ud af øret, så er de bare irriterende. Der var en af de der hvor man fik lov at lave et eller andet, og hvor at opgaven gik ud på så at forklare hvorfor det var man gjorde det.

Int. Altså nogle konkrete beregninger som så gjorde et eller andet?

I_7 Det er også svært, det var også et eller andet hvor de henviste til en dag hvor jeg ikke havde været her fordi jeg havde været syg. Så der var et eller andet der var åbenlyst for alle de andre, som jeg ikke synes var så nemt.

Int. Okay,

I_7 Altså den minder lidt om de andre, men jeg tror måske kunne det godt have været den.

Int. Hvad for en af dem?

I_7 1.9 [F1.8 i bilag C

Int. 1.9?

I_7 Ja en del af forudsætningerne der at man skulle undersøge om de er nødvendige. Det er lidt det samme som "Hvorfor bruger vi det her?". Men der var et eller andet i det som..

Int. Det er også i orden hvis du ikke kan huske det. Du skal have tak for hjælpen.

I_7 Hvis jeg lige finder det, så skal jeg nok sige til.

F.2 Interviews fra uge 18 og uge 19

F.2.1 Spørgeguide 2

Spørgeguide:

Generelt:

Navn: Studieretning: Årgang:

Brug af F-opgaver ved eksamen (15-20 min):

Vi skal tale om eksamen i An0.

- Lad os tale om din forberedelse til eksamen.
  - (a) Fortæl om hvordan du forberedte lavede dispositioner til eksamensspørgsmålene.
  - (b) Hvordan brugte du F-opgaverne til at lave dine dispositioner?
    - (i) Hvilke forskelle(hvis der var nogle) var der på at lave dispositionerne?
- Lad os nu tale om din oplevelse ved eksamen.
  - (a) Hvilket eksamensspørgsmål trak du?
  - (b) Fortæl om hvad du præsenterede ved eksamen.
  - (c) Hvilke spørgsmål stillede eksaminator og censor?
  - (d) Hvad var din oplevelse af, hvordan og hvor meget F-opgaverne blev brugt ved eksamen?

F-opgaver i et kursus med teoretisk hovedsigte (10 min):

Vi skal tale lidt om dit generelle indtryk af arbejdet med F-opgaverne.

- Lad os tale lidt om dit arbejde med F-opgaverne.
  - (a) Fortæl om ligheder og forskelle på F-opgaverne og opgaverne fra bogen.
  - (b) Hvordan fungerede F-opgaverne ved øvelsestimerne?
  - (c) I hvor høj grad har du løst eller forsøgt at løse F-opgaverne inden timerne? I givet fald, fik du så i timerne afklaret om din besvarelse var fyldestgørende?

F.2.2 Interview med I_1 og I_5

Int. Lad os prøve at tale om jeres forberedelse til eksamen. Prøv at fortæl om, hvordan I forberedte jeres dispositioner til eksamensspørgsmålene.

I_1 Vi mødtes jo os to og så I_2 sammen fordi vi alle sammen skulle op før påske og så gjorde vi egentligt det, at vi alle tre nåede og fremlægge alle eksamensspørgsmål mindst en gang for de to andre.

Int. Hvordan fremlagde i dem?

I_1 Vi havde en tavle og så gjorde vi bare, som vi ville gøre til eksamen. Bortset fra, at hvis der var en der gik over tid, så lod vi vedkommende gå over tid.

Int. Hvordan havde I udvalgt det som blev fremlagt?

I_5 Det gjorde vi individuelt. Altså vi snakkede om, hvad vi ville vælge og sådan noget, men der var fx. eksamensspørgsmål. hvor vi valgte forskellige sætninger, som vi ville vise. Vi gjorde det meget sådan, at vi satte os i en halv time eller en time måske og så sad vi alle sammen og skrev et bevis ned og så var vi færdige nogen lunde samtidig med det bevis, som vi så ville gå i gang med, og så havde vi så valgt nogle forskellige, sådan så vi ikke så det samme tre gange i træk. Og så fremlagde vi for hinanden og så satte vi os igen og skrev ned og så fremlagde vi og nogle af dage havde vi måske to eller tre beviser klar, når vi mødtes om morgen, som vi så havde siddet og skrevet om aftenen. Så brugte vi lidt tid på at kigge på det og så gik vi i gang.

Int. Hvilken rolle spillede F-opgaverne, da I lavede dispositioner?

I_1 De indgik ikke i mine dispositioner. Mine dispositioner var bare sådan, at jeg sørgede for at have notater til beviset på en A4-side og jeg havde ikke nogle dispositioner der fyldte mere end en enkelt side, hvor jeg egentlig kun havde notater og stikord til beviset. Men altså i de her fremlæggelser for hinanden, der diskuterede vi F-opgaverne hver eneste gang. Sådan så de to der hørte fremlæggelsen de stillede nogle F-opgave spørgsmål og så enten så svarede vedkommende eller også så snakkede vi i hvert fald om, hvordan man kunne besvare dem. Hvad det var man kunne være opmærksom på og sådan nogle ting. Det var sådan hver eneste fremlæggelse ligesom sluttede, men jeg skrev ikke nogen disposition som sådan til F-opgaverne. Jeg havde selvfølgelig et eksemplar med til forberedelsen af F-opgaverne.

I_5 Men altså man kan sige, at en del af F-opgaverne kom jo til indgå altså indirekte fordi mange af dem handlede om fx. hvordan kunne man lave beviset om eller hvordan kunne man få det her de bemærker til sidst er analogt og der i vores beviser alle tre, der tog vi det med automatisk med i mange af dem.

I_1 Ja det er rigtigt.

I_5 Så på den måde, så mange af F-opgaverne de kom til at indgå sådan automatisk og de andre F-opgaver nåede vi så at få snakket om i hvert fald tre gange fordi vi ligesom snakkede om det efter hver fremlæggelse. Så det havde man ligesom også nået at høre spørgsmålene og overveje dem tre gange inden man tog til eksamen.

Int. Hvilke forskelle, hvis der var nogle, synes I der var på at lave dispositionerne?

I_1 Altså forskel fra spørgsmål til spørgsmål?

Int. Ja.

I_5 Altså der var nogle spørgsmål, hvor man skulle gennemgå flere beviser.

Int. Tænker du på et specielt?

I_5 Øh, hvad var det? Stamfunktionsproblemet i en variabel. Der tror jeg, at der var der ikke rigtig nogle meget lange beviser, så der var det jo sådan noget med først og [bliver afbrudt]

I_1 Der er det jo at det giver mening lige at nævne analysens fundamental teorem, men det er jo i virkeligheden en sidebemærkning i forhold til den ægte. Så på en eller anden måde, så når man i hvert fald at gennemgå flere sætninger.

I$_5$ Ja nemlig og så også tage det der korollar med til sidst, der i virkeligheden er det man bruger mest i forhold til fundamentalsætningen. Det der med, at man bare kan tage stamfunktionen i endepunkterne og trække dem fra hinanden. Altså det var jo sådan en meget fed ting at have med, fordi det ligesom er det man bruger mest fra det eksamensspørgsmål andre steder. Så lige med den der blev der ligesom mange små sætninger. Og der skulle man jo også overveje ikke at bruge for lang tid på hvordan sætningerne lød og sådan noget fordi det fede jo ligesom var at lave beviserne.

Int. Så hvis der var lidt forskel i indhold, var der så også forskel på, hvordan man kunne bruge F-opgaverne til de enkelte eksamensspørgsmål?

I$_1$ Altså der var jo nogle af eksamensspørgsmålene hvor beviset i bogen jo ikke blev vist så generelt. Og så handlede F-opgaverne jo om, hvordan man så kunne generaliseres det til flere variable eller et eller andet i den stil.

Int. Kan du komme med et eksempel?

I$_1$ Øh

I$_5$ Der var jo Hovedsætning 1A fx. hvor et af F-spørgsmålene, altså der bliver der jo sagt i bogen bare, at for nedadtilbegrænset der er beviset analogt og der var der jo et F-opgavespørgsmål der gik på, at hvis nu man bare kigger på $-f$ hvordan kunne man så lave det bevis ved bare at kigge på den funktion? Nu havde jeg ikke valgt det spørgsmål, men der var en som havde taget det med som en del af beviset automatisk, at nu havde vi beviset det her og nu kigger vi så på $-f$ og så kan vi hurtigt bevise det andet.

I$_1$ Men også fx. med blandede partielle afledte. Det bliver vist for to variable, men kan lynhurtigt generaliseres videre og det var noget af det, som F-opgaverne også handlede om. Så der kom F-opgaverne i hvert fald meget direkte i spil i selve beviset.

Int. Hvordan fungerede det synes I?

I_1 Det fungerede godt.

I_5 Ja det synes jeg også.

I_1 Det var også de F-opgaver, synes jeg, der var de mest interessante at løse til øvelserne.

Int. Hvorfor?

I_1 Fordi når man læser beviset i bogen, så er man hurtig sådan fristet til at sige, nå men det kan jeg også godt se, når de siger, at det let kan generaliseres, så er man sådan lidt, jo det kan det og så kører man videre. Og så, ja, så var det faktisk også fint nok at gøre det.

I_5 I forhold til den eksamenstype vi havde med mundtlig eksamen og fremlægge bevis, der tror jeg måske, at det var nogle af de bedste af F-opgaverne, men jeg vil så også sige, at undervejs i forløbet, der var det nok også den type F-opgaver jeg sjældnest havde forberedt. Fordi så skal man til at sætte sig og så skal man virkelig læse beviset grundigt og det er ikke altid, at man lige gør det. Så er det nogle gange sjovere, når man forbereder sig at skulle sidde og regne nogle ting eller finde på nogle ting. Det andet det er tungt arbejde, men altså når man så ikke lige havde, så fik man dem måske gennemgået til øvelserne og så kunne man finde ud af at gøre det selv derhjemme, når man forberedte sig til eksamen. Sådan var det i hvert fald for mig en del gange, fordi jeg synes ikke nødvendigvis de var så mega sjove at sidde og forberede selvom de var rigtig givtige, men det fik man så med i eksamensforberedelsen eller det gjorde vi i hvert fald.

Int. Lad os prøve at tale om, hvad der skete ved eksamen. Jeg ved ikke om I synes, at det er ubehageligt at gøre det sammen? Nej, ok godt. Hvis vi starter med dig I_1. Hvad trak du?

I_1 Jeg trak Taylors formler i en variabel.

Int. Hvordan var din oplevelse ved eksamen? Hvad skete der?

I_1 Jamen det synes jeg var helt fint altså. Jeg har heller aldrig været eksamensangst på nogen måde, så der var i hvert fald ikke nogen problem. Og så viste jeg bare den sætning, som jeg ville bevise og det kørte meget fint. Jeg blev afbrudt en enkelt gang af Ernst fordi han lige skulle være helt sikkert på, at jeg faktisk godt vidste hvordan et Taylor-polynomium ser ud, så skrev jeg det op og så sagde han, at det var fint og jeg bare skulle fortsætte. Så gjorde jeg det. Og efter beviset, der havde jeg lidt forberedt mig på, at jeg skulle svare på nogle F-opgaver, men jeg blev faktisk spurgt om noget MatIntro pensum, som var noget med, at det der restled også kan skrives som et integral. Og det var meget langt væk for mig, men det var heldigvis lige så langt væk for eksaminator. Eller jeg tror, at han spurgte om jeg kunne huske, hvordan den så ud. Så sagde jeg, at det kunne jeg ikke og så sagde han: Det er noget pis, for det kan jeg heller ikke.

Int. [griner] Hvad skete der så?

I_1 Jamen så tror jeg, at vi snakkede lidt om det om, at det i hvert fald giver god mening, at det kan skrives som et integral fordi at noget med middelværdisætningen for integraler og så analysens fundamentalteorem og så tror jeg, at jeg slap meget godt ud af det alligevel, men vi endte ikke rigtig med sådan at få talt om nogle af de der F-opgaver. Måske ud over, at de indirekte indgik i mit bevis fordi det ligesom var nogle overvejelser jeg havde været igennem, men ellers gik det rigtig fint.

Int. Og du fik?

I_1 12.

Int. Tillykke.

I_1 Tak.

Int. Hvad med dig, I_5?

I_5 Det gik også godt.

Int. Hvad trak du?

I_5 Jeg trak den generaliserede kæderegel. Der fik jeg også nogle spørgsmål undervejs og nogle af de gange jeg fik spørgsmål, der var det egentlig til ting, som jeg ville komme ind på senere, så der sagde jeg, at det kommer jeg ind på lige om lidt. Så sagde de ok. Så var der også, altså vi havde forberedt det så mange gange, hvor vi også havde stillet spørgsmål til hinanden, så jeg synes faktisk man blev ret god til at have en forestilling om måske hvad der ville være oplagt at stille spørgsmål til. Så undervejs i beviset, der bruger man en ulighed og der havde jeg ligesom sat det sådan op, at jeg sagde nu bruger jeg denne her ulighed og jeg kan godt vise den, men nu starter jeg lige med at gøre beviset færdigt og så kan vi tage den bagefter, hvis I har lyst til at se den der. Så gjorde vi det og så bagefter tog vi uligheden. Så jeg blev heller ikke afbrudt særlig meget faktisk undervejs i beviset. Kun sådan meget korte ting.

Int. Hvad var din oplevelse af brugen af F-opgaver ved eksamen?

I_5 Jeg kan ikke huske direkte, altså vi havde forberedt og der havde vi tager F-opgaver direkte og gjort det til en del af de dispositioner vi havde lavet i høj grad, så jeg kan ikke rigtig huske at vi decideret har snakket om F-opgaver på den måde. Det har vi måske indirekte, men nu kan jeg heller ikke huske hvad F-opgaverne specifikt var til det spørgsmål. Jeg synes, at vi gjorde F-opgavespørgsmålene til en meget integreret del af vores oplæg [bliver afbrudt]

I_1 og vi tog dem i hvert fald meget meget seriøst under forberedelse også fordi, da Søren Eilers snakkede om eksamen ved den sidste forelæsning, der brugte han rigtig meget tid på at snakke om de der F-opgaver. Så dem tog vi rigtig seriøst under forberedelsen, så jeg tror egentlig bare, at de er kommet til at blive meget integreret i vores fremlæggelse i første omgang.

I_5 Ja.

Int. Så i forberedelsen fungerede de som supplerende spørgsmål til andres fremlæggelser?

I_1 Ja altså vi legede meget eksamen, så der var en der fremlagde beviset for de andre og når det så var slut, så sad de andre to med hele F-opgavesættet og så selvom vi gik lang tid over tid, så stillede vi bare alle F-opgaver, som vi synes kunne finde på at blive stillet.

I_5 Så blev det meget naturligt efter den første havde været oppe og ligesom havde fået stillet alle F-opgavespørgsmålene, så når jeg ligesom sad og forberedte mig, så inkorporerede jeg ligesom det eller fik det med som en bemærkning til sidst eller sådan. Så jeg synes i mange af vores dispositioner, så var det måske halvdelen af alle F-opgaverne til det spørgsmål, som allerede var en del af det og de andre var måske spørgsmål til en anden sætning eller sådan i den stil.

Int. Havde I oplevelsen af at der var F-opgaver nok og at de var fyldestgørende nok til at udfylde de huller, der eventuelt måtte være?

I_1 Umiddelbart ja.

I_5 Ja altså i udgangspunktet så betragtede jeg også F-opgaverne, som det der ligesom ville blive lagt vægt på ved spørgsmålene til eksamen og det var meget rart at have en idé om hvad man skulle være forberedt på og skulle klargøre for det. Det synes jeg var meget lækkert og altså, jeg ved ikke om der har været flere huller eller sådan ting der kunne fyldes ud, men det gik jeg ikke ud fra. Så gik jeg ud fra, at det var noget man ville tage, når man gennemgik det undervejs. Og det virkede som om, at de vigtigste ting og de største faldgrupper der kunne være, at det var dækket af F-opgaverne.

I_1 Ja absout. Der gav de en god retningssnor for hvad man skulle være opmærksom på af faldgrupper i sin argumentation.

Int. Så lad os prøve, når nu vi er kommet på den anden side af kurset at snakke om jeres arbejde med F-opgaverne.

Vi har talt om det tidligere, men jeg kunne godt tænke mig, at I prøver at sige noget om forskellige og ligheder mellem F-opgaver og opgaver fra bogen.

I_1 De opgaver der var i bogen i forvejen de var sådan lidt mere beregn-opgaver, hvor F-opgaverne, som vi har snakket om, var perspektiverende til beviset. Så de var mindre konkrete.

Int. Var der nogle ligheder mellem dem?

I_5 Hvis man skulle have nogle ligheder så, jeg kan ikke huske præcis hvordan opgaverne i bogen generelt var, men jeg tænker sådan noget med, at der var nogle F-opgaver som handlede om sådan noget med at man skulle finde et eksempel på et eller andet. Det tænker jeg også er sådan noget, der kunne være i bogen. Fordi bogen, synes jeg, der handlede det lige så meget om sådan noget med, at nu har vi set de her sætninger og beviser, nu skal vi ligesom forstå, hvad betyder det så? Enten bevise nogle ting som følger af de her sætninger eller få nogle eksempler på hvornår man kan bruge de her sætninger. F-opgaverne, der var også det der med at se nogle eksempler på hvad sætningerne betyder for konkrete tilfælde, men det handlede også rigtig meget om at gå tilbage og kigge på beviset og se det efter i sømmene, hvor at bogens opgaver måske mere handlede om, at nu har vi fået sætningen, hvordan kan vi så bruge den til at komme videre til noget andet eller se et eller andet eller bruge det på noget. F-opgaverne var mere sådan tilbageskuende eller sådan, nu har vi set det her bevis, men er vi nu helt på det rene med det og der mere man kan gøre?

Int. Hvordan synes I, at F-opgaverne fungerede ved øvelsestimen?

I_5 Det synes jeg fungerede ret godt.

I_1 Ja.

I_5 Netop fordi det handlede rigtig meget om lige at sørge for, at alle detaljer var med og det er sådan noget som man godt kunne forberede hjemmefra, men så lige at få en instruktor til at få det fuldkommen på plads eller lige få alle de detajler med. Altså nogle gange, så har man en idé om det, men kan ikke lige få det formaliseret eller nogle gange får man lige nogle af tingene med, men ikke det hele. Så det synes jeg fungerede rigtig godt. Også at have en der definitivt kunne få det hele med og så havde man ligesom hørt det en gang og så kunne man også huske meget af det, når man så kom hjem.

Int. Hvordan var I i jeres forberedelse bevidste om, om I havde løst opgaverne?

I$_5$ Det var forskelligt. Eller det kommer også lidt an på hvor engageret man gik til opgaven. Der kunne godt være forskel på hvor langt tid man brugte. Nogle gange så kiggede man lige på opgaverne og tænkte, at det må være noget med det der og så tog man til øvelsestimen og så fik man bekræftet det lidt, men fik det også gjort ordentlig og grundigt. Og nogle gange, så brugte man længere tid på det og fik det rent faktisk gjort, som instruktoren måske ville gøre det. Men det var lidt forskelligt.

Int. Kan du prøve at sige lidt om, hvad forskellen var på hvordan man havde forberedt sig og så den oplevelse man havde ved øvelsestimen?

I$_5$ Altså hvis man havde forberedt sig meget, så kunne man have hånden oppe hele tiden og svare på spørgsmål og derudover så, altså ja, jeg vil ikke sige, at det blev kedeligt at være til øvelsestimen, men så blev øvelsestimen i nogle tilfælde mere også bare at få bekræftet det arbejde man havde lavet hjemmefra. Og hvis man ikke havde forberedt sig meget, så kunne det måske mere være en oplevelse af bare at have gjort sig nogle tanker om noget, og så se at det var de rigtige tanker og hvis man havde fortsat ud af den tangent, så var man nået til noget godt og nogle gang se, hov, det kunne man faktisk slet ikke. Det havde man måske fundet ud af, hvis man havde brugt mere tid. Det her det fungerede overhovedet ikke. Man skulle have gjort et eller andet helt andet.

Int. Fik I afklaring på de spørgsmål havde fra forberedelsen, når I så kom til øvelsestimen?

I_1 Ja absolut.

I_5 Ja det synes jeg.

Int. Hvis nu F-opgaverne skal være en del af Analyse 0 næste år, har I så et godt råd?

I_1 Jeg synes i hvert fald afgjort, at det ville være en god idé, hvis de blev ved med at være med eller være en del af kurset.

I_5 Ja.

I_1 Jeg tror ikke lige, at jeg sådan på stående fod kan komme på nogle forbedringer.

I_5 Nej. Men jeg synes, at det har været rigtig positivt at have dem med i kurset, så jeg synes da det er en god idé. Og jeg synes de var velfungerede de opgaver og også afvekslende, så det ikke kun var: gå ind og gå beviset i sømmene, men der var også nogle hvor man skulle finde eksempler på et eller andet, så det synes jeg var ret fedt. Også fordi det er forskelligt, hvad man har lyst til at sidde og forberede. Nogle gange vil man gerne bare sidde og finde nogle eksempler og så må man tage til timen og så se instruktoren ligesom gå beviset i sømmene eller nogle af de andre elever. Og nogle gange så synes man, at man har tid og overskud til at sidde og bruge den tid på det. Så det var fedt, at de var sådan afvekslende. Generelt synes jeg, at de var rigtig velfungerende og det var nogle fede spørgsmål at kunne stille hinanden, når vi forberedte os til eksamen.

I_1 Ja der var de i hvert fald nyttige.

I_5 Ja der fik man snakket rigtig meget om dem. Så jeg vil sige, at det var også smart, så at sige, at Søren brugte den sidste time på lægge meget vægt på dem og at det var noget man skulle kunne og en del af pensum. Det gjorde, at man sørgede for at få dem kigget igennem. De var rigtig givtige i forhold til lige at forberede sine beviser lidt og få styr på nogle ting. Så det var meget fint, at han gjorde det.

Int. Godt. Tak skal I have. Tak for hjælpen.

I_5 fortalte efter interviewet, at han fik 12 ved eksamen.

F.2.3 Interview med I_6

Int. Vi skal tale lidt om eksamen. Prøv at fortæl om hvordan du forberedte dine dispositioner til eksamen.

I_6 Ja, det jeg gjorde var, at jeg satte mig ned sammen med tre andre. De der tre andre jeg har læst meget sammen med og så satte vi os ned og startede fra en ende af med ligesom at vurdere hvad for et bevis vil vi gerne gennemgå til det her spørgsmål. Så satte vi os ned først og læse beviserne rigtig grundtigt igennem og gennemgik dem for hinanden oppe på tavlen og det gjorde vi sådan så vi var sikre på, at der ikke var noget der var misforstået. Alt var diskuteret igennem og der blev sat spørgsmålstegn ved alt, som man kunne være den mindste smule i tvivl om. Derefter gik vi over til at se på F-opgaverne, være sikre på, at vi allesammen var med på, hvad svarene var og hvorfor det var svarene, sørgede for, at vi allesammen havde svar på de der opgaver, hvis der var nogle som vi ikke lige havde lavet og fik snakket dem igennem og så så vi ellers på, hvad man sådan, hvis man nu trak et eller andet emne, hvad man så ellers, hvis man nu kom hurtigt igennem beviset eller hvis man ville sige lidt inden, hvad der så kunne være relevant at bringe på banen. Og da vi så ligesom havde forberedt det, så lavede vi vores dispositioner ud fra det. Så holdte vi sådan nogle dage, hvor vi så legede, at nu trækker jeg et emne og så går jeg op og viser det.

Int. Hvordan var relationen mellem dispositioner og F-opgaver?

I_6 Altså med selve dispositionen, altså det jeg skrev ned, som jeg ville tage frem, når jeg kom ind og havde trukket mit emne, der havde jeg skrevet kort ned, de F-opgaver, som jeg selv følte, at jeg måske kunne bringe på banen, svarene på dem og eller så havde jeg bare noteret lidt, hvad de andre sådan overordnet handlede om. Sådan så hvis de spurgte til en af F-opgaver, at jeg så i hukommenlsen havde fremme hvad opgaverne handlede om. Der var jo en del af F-opgaverne, som havde noget med beviserne at gøre og det var især dem, som jeg havde tænkt, at det kunne man godt selv bringe på banen. Der var også nogle af dem, hvor der blevet stillet spørgsmåltegn ved den måde, som beviserne blev fremført på og så tænkte jeg, at det der blev nævnt, det kan jeg lige så godt selv bare sige idet jeg gennemgår beviset.

Int. Hvilke forskelle, hvis der var nogen, var der på at forberede de forskellige dispositioner?

I_6 Jeg synes der var nogle af spørgsmålene.. Det var meget varierende, hvor stor en del beviset udgjorde af det man skulle gennemgå. Der var nogle af spørgsmålene, hvor beviset nærmest var det hele. Så der kom ikke særlig meget F-opgave med. Fx. så den med Greens formel, det er et ret langt bevis, så det tager utrolig lang tid at komme igennem. Så derfor blev der egentlig ikke forberedt så meget andet. Og det var mest det der med, ok hvad for nogle mængder er det så, at man har vist det her for og alt det med antagelserne i starten. Og så var der andre, nu kan jeg ikke lige komme i tanke om et spørgsmål, men der var andre spørgsmål, hvor beviset var sådan noget man kom igennem på fem minutter og der lagde jeg måske mere vægt på også at have styr på de F-opgaver. For der var måske også lidt mindre F-opgaver til beviset, fordi det var et lidt tyndt bevis, hvor det måske mere var en regne opgave eller bare et eller andet som fx. hvordan kan man, fx den der med kædereglen, så var der noget med noget matricer, hvor det så sættes i relation til det for på en eller anden måde også at få talt lidt ud af bare det. Det var måske ikke det største bevis i bogen. Så det var nok den største variation, at der var nogle af dem, hvor jeg kun havde fokuseret på de F-opgaver der havde direkte med beviset at gøre og så var der andre, hvor jeg havde set, at det ligesom var nødvendigt, der var nødt til at være noget mere i min disposition, fordi at man som udgangspunkt helst ikke vil stille sig i en situation, hvor man så ikke har mere at sige.

Int. Lad os prøve at snakke om din oplevelse ved eksamen. Hvad trak du?

$\mathbf{I_6}$ Jeg trak Greens formel.

Int. Ja, hvordan præsenterede du så det ved eksamen?

$\mathbf{I_6}$ Da jeg kom ind, så fordi det var et af de beviser som jeg havde erkendt, at det var lidt langt at komme igennem, så jeg kom ind, fortalte meget kort i hvilke situationer man kan bruge Greens formel og så gik jeg ellers i gang med beviset. Og så havde jeg tænkt, at hvis jeg så blev færdig med det, så kunne man snakke lidt om den F-opgave der handlede om, hvordan det egentlig var, at man så udførte det til det generelle tilfælde. Det står lidt løst i bogen. Faktum var så, at da jeg skulle skrive sætningen op, der fik jeg skrevet, at kurven skulle være C^1 i stedet for stykvis C^1 og så når man har skrevet hele den der kæmpe lange sætning op og Ernst så siger: Er du helt sikker på, at det er rigtigt? Og så står man der. Så vi brugte ret lang tid på og snakke det igennem og snakke det der med, ja, kurven og i forhold tl Ω og hvor det hele var placeret i forhold til hianden, igennem. Så jeg nåede faktisk kun at blive færdig med beviset sådan som det står i bogen og så spurgte han meget hurtig ind til, hvad det så var for nogle mængder jeg havde vist det på. Så man kan sige, at der blev ikke, altså der var generelt, udover lige der i starten og så lige det spørgsmål til sidst, var der generelt ikke så mange spørgsmål i løbet af min eksamination. De få spørgsmål der var, handlede om noget der på sin vis havde med F-opgaverne at gøre i form af, hvad alle antagelserne i starten vil sige og så hvad for nogle mængder, som man havde vist beviset for.

Int. Så hvis du skal prøve at beskrive, om F-opgaverne var en hjælp for dig eller hvordan de fungerede?

$\mathbf{I_6}$ Jeg vil helt klart sige, fordi fx. det der med, hvad det er for nogle mængder man har vist det for, fordi man har jo faktisk ikke vist det for de mængder, der bliver nævnt i antagelserne, så der vil jeg sige, at hvis den F-opgave ikke havde været der fordi det hele er sådan lidt man ved ikke helt hvad der foregår fordi man på nogle måder er gået lidt ud over, hvad det egentlig er vi har lært om i det bevis, der synes jeg, at det har været rigtig rart, at der var blevet snakket på forhånd om, hvad det var for nogle mængder vi havde vi det for. Fx. da jeg startede med at skulle gennemgå beviset, så startede jeg med at sige, at nu vil jeg først starte med at vise det for en eller anden mængde og så tegnede jeg to lige streger og så en grim funktion i toppen og i bunden, men den mængde har jeg jo fx. ikke vist det for med mit bevis. Så derfor var det meget rart, at man ligesom på den måde havde fået overvejet det. Og så i forhold til det der med betingelserne til beviset, den måde vi gennemgik beviserne på, havde vi jo også fået diskuteret det igennem selvom det ikke havde været en F-opgave.

Int. Altså i bevisgennemgangen til øvelserne tænker du på?

I_6 Ja, altså fordi da vi forberedte os til eksamen, der spurgte vi også os selv om mange af de ting der var i beviset specielt de antagelser der var i starten fordi det jo selvfølgelig er rigtig vigtigt. Så det var vi jo nok kommet igennem. Men jeg kunne godt forestille mig, at det der med hvad det overhovedet egentlig er, at vi har vist fordi det var sådan lidt, at det måske var lidt flyvsk det hele.

Int. Hvad fik du?

I_6 Jeg fik 12.

Int. Flot. Ok, så lad os tale lidt om dit generelle indtryk af arbejdet med F-opgaverne. Prøv at fortæl lidt med ligheder, forskelle på F-opgaverne kontra de opgaver fra bogen.

I_6 Jeg vil sige, at jeg synes som udgangspunkt, at F-opgaverne var mere overskuelige at gå til. Jeg synes rigtig mange af de opgaver, som var i bogen, der satte jeg mig ned og så så jeg på dem og så tænkte jeg, at det ved jeg slet ikke, hvordan jeg skal løse. F-opgaverne, der var selvfølgelig nogle af dem der var svære, men så var det blevet markeret, at den her er svær. Så tænkte man, at det var ok, at jeg måske ikke helt kan finde ud af, at gøre det her færdigt. Så jeg synes, at de var nemmere at gå til. Så synes jeg også, at de var meget gode for nu er jeg ikke sådan helt vild med at læse og jeg synes, at de var meget gode til at få tvingt mig til at få læst de der beviser ordentligt igennem. For normalt, når jeg sidder og læser beviset, så sidder jeg bare og læser teksten og man forstår jo godt teksten, men det betyder ikke, at man har forstået beviset. Så derfor har jeg selv taget mig, altså jeg tager tit mig selv i bare at sidde og læse det igennem uden overhovedet at fatte hvad det er jeg læser. Så det synes jeg, at de var rigtig gode til, at man ligesom fik arbejdet sig mere ind i. Hvor nogle af opgaverne fra bogen, altså mere regneopgaver, ikke er så eksamensrelevante. Jeg har ikke det indtryk, at når jeg går op til en mundtlig eksamen, at jeg så bliver bedt om at regne noget ud. Det har jeg i hvert fald aldrig oplevet. Derfor tænker jeg, at de i forhold til eksamen var mere relevante. Man kan sige, at opgaverne i bogen, det der jo er, at nogle gange når man har forstået noget, det er jo fint nok, at man har forstået matematikken, men hvordan bruger man det så? Det er opgaverne i bogen mere henvendt til. Så derfor synes jeg egentlig, at det var meget godt, at de supplerede hinanden meget godt, hvor der var nogle der fokuserede mere på hvad det er vi læser og så nogle fokuserede på hvad det er vi skal gøre. Men der hvor F-opgaverne var bedre, var at de var mere overskuelige at løse og så var de ligesom sådan bygget op, så det første delspørgsmål det var meget basic og så vidste man ligesom godt, hvad retning man skulle gå. I stedet for, at du bare får en opgave og du ved slet ikke, hvor du skal starte.

Int. Hvordan synes du, at F-opgaverne fungerede ved øvelsestimen?

I$_6$ Der synes jeg egentlig også at de fungerede fint. Det kommer sikkert også an på, om man har forberdt dem hjemmefra fordi det er jo altid lettere at få noget ud af noget, hvis man ved hvad det er det handler om. Jeg prøvede om ikke andet at have læst dem, så kunne det godt være, at jeg ikke synes, at jeg kunne løse dem, men jeg havde ligesom overvejet hvor jeg synes, at problemerne var. Men jeg synes, at de blev gennemgået grundigt og sådan så man ikke var i tvivl efterfølgende. Det var ikke sådan, at man ikke forstod det.

Int. Hvordan oplevede du forskel på de gange, hvor du havde lavet en løsning selv og så de gange hvor du ikke havde?

I$_6$ Altså man lærer mere af det, synes jeg, når man har fået forberdt noget reelt fordi så kan du godt se, hvor det er, at du har begået fejl og hvor det er, at du har gjort det rigtig. Hvor man kan sige, at når der er nogle der allerede har løst opgaven, der står og viser det, så er det hele jo nemt, fordi de ikke begår nogle fejl idet de viser det. Når man sidder selv og arbejder med det, så laver man det forkert fire gange og så får man lavet det rigtig den femte. Altså man får jo overvejet det meget mere idet man selv har lavet fejlene og vurderet ligesom hvor det er, at det kan gå galt. I stedet for, at man har får præsenteret det rigtige svar i første hug.

Int. Du har som udgangspunkt forberedt [bliver afbrudt]

I$_6$ Jeg har som udgangspunkt forberedt eller forsøgt at forberede mig og så flere gange har jeg lavet det forkert eller kun lavet det halvt eller et eller andet, men man har trods alt forholdt sig til det og forholdt sig til, hvor man synes der er problemer for en for at gennemføre det.

Int. Har du så fået afklaring til øvelsestimen?

I$_6$ Ja, jeg vil sige, at der er ikke nogle af dem, hvor jeg efter øvelsestimen har været i tvivl. Så ville jeg godt selv kunne stille mig op og løse dem.

Int. Hvis nu F-opgaverne skal køre ved kurset næste år, har du så et godt råd til noget som skal laves om eller?

I$_6$ Jeg vil sige, at jeg synes helt klart, at det er de F-opgaver som handler om beviserne, som har hjulpet mig mest også fordi det har hjulpet en lidt ind i tanken, hvordan er det jeg som læser skal agere når jeg læser et bevis. Så jeg ikke bare tager alt for gode varer og hele tiden, fordi tit så kan man sige, han har skrevet at det er sådan, så er det bare sådan det er. Men det der med at forstå, hvorfor det er sådan det er. Så jeg synes helt klart, at det er dem man har fået mest ud af. Dem hvor man har gået i dybden med beviserne, hvor der er nogle af de andre, fordi jeg så måske også F-opgaverne som lidt en eksamenshjælp og der er jo også nogle af dem, der er sådan lidt regneopgaver, og der havde jeg det sådan lidt, at jeg synes ikke, at det var noget som var relevant at have med til eksamen og hvis man fx. kommer ind med den ambition om, at man egentlig godt vil have en god karakter og så trækker man et eller andet spørgsmål og så F-opgaverne til den der har en stjerne, det er et regnespørgsmål, det vil ikke være noget jeg ville tage op derinde. Og det vil som udgangspunkt heller ikke være noget jeg ville forvente, at de ville spørge mig om, men så bliver man sådan helt i tvivl. Kan de nu godt finde på at gøre det alligevel? Jeg synes, at mange af regneopgaverne var rigtig fine, men så ved jeg ikke om man skal dele dem ud på en eller anden måde. Så man tænker, det her har ikke noget med eksamen at gøre og så ligesom deler dem ud i to slags opgaver hvor den ene er regne på en anden måde end det der er i bogen og den anden er noget meget bevisorienteret eller noget det er oriteret til, at det her er relevant at komme ind på til eksamen.

Int. Hvordan var bevisopgaverne, som du kalder dem, at forberede hjemme?

$\mathbf{I_6}$ Fordi jeg har været så dårlig til at læse beviserne, har det jo været nogle af dem som har været svære at forberede. Fordi det der nemlig tit er, så er der sådan noget med, at så bliver der spurgt om, hvorfor vælger man ε til at være lig med 2? Og så sidder jeg og læser og læser og læser, og jeg kan ikke finde noget sted, hvor det er vigtigt at $\varepsilon = 2$ og det er så selvfølgelig fordi, at det er irrelevant, at $\varepsilon = 2$. Så de har nogle gange været sådan lidt svære, fordi jeg har fået tænkt for meget over det og i virkeligheden så var grunden til du spørger jo bare fordi, at det er fuldstændig ligegyldigt. Altså nogle af dem har været sværere at forberede sig på. Der er også nogle af dem, hvor det ligesom er blevet antydet til forelæsningen idet beviset er blevet gennemgået, at der er en eller anden situation, hvor man måske godt kunne se det på en anden måde. Så har de jo været nemme nok, for så har man ligesom været gjort opmærksom på hvor det er man skal kigge. Sådan noget med, at, jeg kan ikke huske hvad det var for et bevis, man så var der også et bevis, hvor man hele tiden gjorde rigtig meget ud af at sige hvordan x og et eller andet andet x var placeret i forhold til hinanden, men det var jo fuldstændig ligegyldigt fordi man så på det numerisk hele vejen igennem beviset. Det var sådan noget der indirekte blev antydet nede til forelæsningen og når man så sætter sig og får den der F-opgave, så kan man jo hurtigt se, at det jo bare er fordi, at det er numerisk. Det har været varierende hvor svært man har synes, at det har været. Enten har det været meget svært eller også har det været ret nemt. Så har der jo selvfølgelig været nogle, hvor så har man siddet og læst beviset et par gange og så kan man godt se, at det er derfor, men de fleste har det enten været, at svaret kom lige med det samme eller også har jeg virkelig skulle sidde og tænke for at finde det.

Int. Synes du, hvis du kigger på kurset samlet, at du kan se en udvikling i hvordan dit arbejde med F-opgaverne har været?

I_6 Jeg vil helt klart sige, at min evne til at sætte sig og se kritisk på beviserne er blevet meget bedre gennem kurset. Også fordi man fik en bedre forståelse for, hvad det er der skal ske i beviserne. Fordi egentlig er det rigtig meget det samme man gør igen og igen og så skal vi på en eller anden måde vise, at noget er mindre end ε. Og selvom man måske ikke kan hele beviset, så er man godt forberedt på, hvad de næste trin bliver. Så på den måde bliver man bedre til at læse beviserne og forstå dem hurtigere og så blev det også nemmere at løse F-opgaverne. Når jeg nu sidder nede ved Analyse 1 og mange af beviserne er meget simple, der er jeg allerede, bare de laver det første skridt, så tænker jeg, at nårh ja, det er bare det her de har tænkt sig at gøre for resten. Fordi så kan man bruge trekantsulighed og så kan man bruge et eller andet andet og så kommer det til at blive mindre, end det man gerne vil have. Jeg kan godt mærke, at jeg er blevet meget meget meget bedre til at sidde og læse det og jeg kan også mærke nu, at den der Kalkulus, den havde vi i MatIntro og da jeg sad og læste i den, der fattede jeg ikke en skid. Nu, og det vil jeg helt klart sige er på grund af hele det har Analyse 0 forløb, når jeg sidder og læser, så forstår jeg det hele. Jeg sidder lidt og tænker, hvad jeg dog har lavet, da vi havde MatIntro fordi jeg ikke kunne forstå det og det var så nemt.

Int. Fint. Det var de spørgsmål jeg havde. Tak for din tid.

F.2.4 Interview med I_3

Int. Vi skal tale lidt om eksamen i An0. Prøv at fortæl hvordan du lavede dine eksamensdispositioner.

I_3 Jeg tog meget udgangspunkt i beviserne. Hvilket bevis synes jeg hørte til og så gennemgik jeg beviserne og havde ligesom en dispostion der hed: Bevisgennemgang og så ekstra, hvor jeg selvfølgelig brugte F-opgaverne og hvad der ellers var i emnet.

Int. Hvordan brugte du F-opgaverne til at lave dine dispositioner?

I_3 Altså jeg brugte dem faktisk ikke så meget. Vi forberedte os sammen og så gennemgik vi, at vi havde besvaret alle F-opgaverne, men mest fordi vi ville være helgarderede til eksamen, hvis nu der skulle blive spurgt ind til F-opgaverne, som jo var en del af pensum. De var gode i forhold til beviserne. De F-opgaver der handlede om beviserne var ekstremt hjælpsomme fordi det ligesom var med til at sætte fokus på de ting der var vigtige ved beviserne.

Int. Var der forskel fra disposition til dispostition, hvor meget du kunne bruge F-opgaverne?

I_3 Øhm, ja.

Int. Hvordan?

I_3 Der var nogle F-opgaver, som var meget regneopgaver. Som vi ikke brugte, jeg brugte dem ikke så meget overhovedet. Ej det ligger så langt væk. Så var der nogle, hvor der ikke var så mange F-opgaver til. Jeg tror det var spørgsmål 8 var der ikke så mange.

Int. Hvordan oplevede du, at der var forskel på dem?

I_3 Jeg ved ikke. Jeg brugte dem ikke så meget, at jeg var afhængig af, at de skulle være der og jeg bemærkede, at de ikke var der.

Int. Lad os prøve at tale om selve eksamen. Hvad trak du?

I_3 Hvad trak jeg? Jeg tror det var spørgsmål 1, ej jeg kan faktisk ikke huske det [griner]. Jeg trak kurver. Kurveintegralet.

Int. Hvad skete der? Kan du huske det?

I_3 Altså jeg trak og så gik jeg ind og forberedte mig på beviset og kiggede lidt på F-opgaverne. Men det var egentlig ikke noget jeg brugte. Jeg havde faktisk savnet lidt et uddybende spørgsmål, altså i F-opgaverne, et uddybende spørgsmål omkring hvad er kurver egentlig. For stadigvæk nu har jeg egentlig ikke helt forstået, hvad kurver er. Så hvis der havde været en F-opgave, der havde lagt op til vi havde diskuteret i forberedelsen hvad kurver handlede om, det havde hjulpet mig i hvert fald til eksamen.

Int. Var det er problem til eksamen?

I_3 Ja, fordi jeg kan godt lide at præsentere, ligesom at vise, at jeg har forstået emnet og det kommer jeg i hvert fald til, når jeg skal til eksamen, og jeg fik ligesom rodet mig ud i at skulle forklare, hvad en kurve var og jeg synes, at det var så abstrakt, at jeg ikke fik sat ordentlig ord på det.

Int. Hvad for nogle spørgsmål blev du stilt ved eksamen?

I_3 Altså jeg blev ikke stilt nogle F-spørgsmål, så det var jo beviser det hele handlede om.

Int. Følte du, at du manglede hjælp til beviset?

I_3 Nej, beviset kørte. Det var mest sådan baggrund for beviset. Hvad er kurver egentlig.

Int. Var det dig selv, der lagde op til den diskussion?

I_3 Ja.

Int. Jeg kan mærke, at det er du ikke så tilfreds med?

I_3 Nej, altså det havde været fedt, hvis jeg rent faktisk havde forstået hvad kurver var. Altså det var ikke fordi jeg stillede mig op og begyndte at sige noget vås, men jeg fandt ud af, da jeg stod inde til eksamen og prøvede at forklare det, at jeg egentlig ikke helt havde forstået hvad kurver var.

Int. Det er måske overflødigt, men hvordan var din oplevelse af brugen af F-opgaverne ved eksamen?

I_3 De blev ikke brugt til min eksamen. Jeg var den sidste der var oppe af alle, så jeg tror, at alle var trætte. Så det var meget beviset.

Int. Hørte du noget fra nogle andre om F-opgaverne til eksamen?

I_3 De kom ud og sagde, at de spurgte til F-opgaverne nogle gange. Specielt Søren spurgte meget ind til dem. Men det var helt generelt, at de sagde: De spørger ind til F-opgaverne.

Int. Hvad fik du til eksamen?

I_3 Jeg fik 10.

Int. Tillykke. Lad os prøve, når vi nu er kommet et stykke forbi An0 at tale lidt om, hvad du synes om at arbejde med F-opgaverne. Prøv at beskriv forskelle eller ligheder på F-opgaver og så de opgaver I regnede fra bogen.

I_3 Jeg synes F-opgaverne var bedre at regne fordi de var mere målrettede på en eller anden måde. Ligesom jeg siger, så brugte jeg ikke F-opgave-regneopgaverne til eksamen fordi eksamen var møntet på noget andet. Så det var det der var godt ved F-opgaverne. Det var, at de fleste af dem var målrettede. Det var forståelsesopgaver langt mere end regneopgaver.

Int. Hvordan var de at forberede i forhold til de andre?

I_3 Det ved jeg ikke.

Int. Forberdte du dig meget eller lidt i forhold til om det var den ene type eller den anden type?

I_3 Jeg forbereder mig ikke så meget.

Int. Læser du opgaveformuleringen hjemmefra?

I_3 Mm. Men jeg skriver ikke noget ned.

Int. Hvordan har din oplevelse været til øvelserne, når du har forberedt dig som du har?

I_3 [tøver] udemærket. Altså jeg ville sikkert få mere ud af det, hvis jeg havde forberedt mig, men jeg føler, at jeg har kunne følge med undervejs.

Int. Hvordan synes du, at F-opgaverne fungerede ved øvelsestimen?

I_3 Altså godt. Altså jeg kan ikke rigtig huske det. Jeg kan næsten ikke huske, at vi regnede nogle af de andre opgaver. Det der fyldte meget var jo F-opgaverne. Jeg synes, at de var mere relevante.

Int. Hvis nu F-opagerne skal bruge på An0 næste år, har du så et godt råd til dem der skal planlægge kurset næste år om hvordan man skal bruge de her F-opgaver?

I_3 Jeg synes, at de var gode. Jeg synes faktisk, at de var rigtig gode. Nu ved jeg jo ikke hvordan det er uden F-opgaver, men jeg synes faktisk, at de var gode. Det var sådan lidt blandet, hvordan jeg synes min oplevelse var med det. Altså det blev måske lidt for eksamensminded, at de kunne spørge ind til F-opgaver, som blev, altså jeg så mere F-opgaverne som en del af min oplæsning frem for, at det var noget, som jeg skulle kunne svare på. Jeg synes, at de fungere godt.

Int. Men de skal ikke bruges til eksamen?

I_3 Det kommer an på hvordan de bliver brugt til eksamen. Hvis de bliver brugt som i: Nu stiller jeg dig et F-opgavespørgsmål, som er spørgsmål 1.2.d, eller jeg ved ikke, det var ikke sådan jeg havde brugt det i min forberedelse i hvert fald.

Int. Var det dit indtryk, at det var sådan til eksamen?

I_3 Altså jeg blev jo ikke spurgt, men folk kom bare ud og sagde, at de havde spurgt ind til F-opgaver, så jeg ved ikke hvordan jeg forestiller mig, at det så har været.

Int. Er der andre ting, du kan komme i tanke om?

I_3 Nej.

Int. Ok. Tak for din hjælp.

F.2.5 Interview med I_2 og I_4

Int Lad os tale lidt om eksamen. Hvis I prøver på skift at fortælle om, hvordan I forberedte jeg til eksamen. Prøv at fortæl om, hvordan I lavede jeres dispositioner.

I_2 Ja, vil du starte?

I_4 Du starter.

I_2 Ok, så vi havde arbejdet sammen i en gruppe på, øh, hvor mange personer var vi?

I_4 Seks tror jeg. Fem-seks stykker.

I_2 Fem-seks stykker og så havde vi sådan ligesom et emne hver, som vi havde fået tildelt til at skrive dispositioner om. Så det gjorde vi. Jeg må så indrømme, at til eksamen brugte jeg overhovedet ikke de der dispositioner vi havde lavet, men de var rare nok til at få et overblik over området eller emnet ik', altså eksamensspørgsmålet. Den måde jeg forberedte mig på var, at jeg satte mig sammen med to drenge fra vores hold, der også skulle op på samme dag som jeg skulle og så øvede vi simpelthen alle beviserne igennem på skift. Så vi nåede alle sammen at vise alle beviserne en gang hver og nogle af dem havde vi så vist i tidligere sammenhænge, så nogle af dem fik vi vist flere gange. Det vil sige, at vi så, ja i alt har vi siddet og kigget på sådan, ja kigget på 24 beviser og bevist 12 selv ik'? Så på den måde fik vi det virkelig godt ind bag hornhinden eller hvad man skal sige. Virkelig godt ind. Og så i min disposition bruge jeg faktisk bare de beviser, som jeg havde besluttet mig for at bevise, der havde jeg ligesom fået skrevet op, så jeg lige præcis vidste, at det ser sådan her og sådan her ud og det er det her det handler om. Jeg endte med slet ikke at behøve at kigge på mine noter fordi... Det var så også fordi da vi øvede os fandt vi ud af, at jeg er bare sindsygt dårlig til at have noter med fordi jeg kigger på dem og så forvirrer jeg mig selv og glemmer hvor det står der. Så jeg glemmer at tænke selv, så derfor havde vi trænet det med at jeg lagde dem væk, så jeg huskede bare at bruge min hjerne. Også da jeg var derinde [til eksamen]. Så det var mine dispositioner. Og så havde vi selvfølgelig til dem alle sammen lige, altså på de oprindelige dispositioner vi havde lavet, havde vi skrevet hvilke F-opgaver der hørte til hver. For ligesom at huske: Det er de her F-opgaver vi kan blive spurgt om eller vi selv kan få lyst til at komme ind på da vi forberedte os. Så efter hvert bevis var blevet fremført talte vi om F-opgaverne. Altså vi stillede ligesom en masse spørgsmål til den der lige havde været oppe. Som: Kan du huske det her og det her. Så på den måde fik vi inkorporeret F-opgaverne.

Int. Som supplerende spørgsmål eller som en del af dispositionen direkte?

I_2 Som supplerende spørgsmål.

Int. Hvad med dig [henvendt til I_4]?

I_4 Det lyder rigtig meget som den måde vi også gjorde det på. Rigtig rigtig meget.

Int. Sad du også i en gruppe bagefter?

I_4 Ja, jeg lavede mine egne dispositioner, men så viste vi dem ligesom for hinanden og snakkede om at sammenligne. Diskussionerne endte med at være ret ens fordi vi ligesom blev enige om hvilke punkter som var centrale og vigtige. Og så igen bruge vi F-opgaverne til at spørge ind til hinanden.

Int. Hvordan brugte I dem?

I_4 Altså sådan når man havde gennemgået et bevis eller i løbet af beviset, så stoppede folk lige en og spurgte til det eller bagefter, hvad med det her og hvad med det her? Og så forsøgte vi ligesom at stille hinanden kritiske spørgsmål bagefter.

Int. Er der forskel på F-opgaverne i forhold til hvor relevante de er i eksamensforberedelsen?

I_2 Ja. Det synes jeg. Der var nogle vi fokuserede mere på end andre. Der var også nogle som vi helt automatisk selv puttede ind i beviset, fordi de handlede om sådan noget med, er de her antagelser egentlig så vigtige eller kunne man have omdefineret ε, så man endte med at have ε og ikke ε over $2(b-a)$ stående? Og så gjorde man det jo bare med det samme, så. Altså man lavede bare sit bevis om og så var det ikke så relevant at spørge om bagefter. Det ved jeg ikke, om I gjorde det samme?

I_4 Øhm jo. Der var nogle der var meget involverede og nogle der sådan lidt kom ud af det blå bagefter, men jeg synes måske ikke at sådan decideret hjalp i dispositionen, men mere det sådan hjalp min generelle forståelse. Man ligesom lidt mere forstod, hvorfor var det egentlig jeg gjorde det her trin.

Int. Var der forskel på dispositionerne på hvor meget I kunne bruge F-opgaverne?

I_4 Ja det var der, men der var også meget forskel på hvor mange der var. Der var nogle emner hvor der kun var sådan en to-tre stykker og nogle hvor der var ti. Så det er jo nok meget naturligt, at der er nogle der er mere..

I_2 Fx. havde jeg til den med hovedsætningerne om kontinuerte funktioner, der havde jeg valgt, at jeg ville vise hovesætning 2 og den eneste F-opgave der var til den var sådan med the bisection method, så man kan sige, det kan man godt lige sige, at den kan bruge til, men altså så interessant er det måske heller ikke lige i den sammenhæng vel? Eller det tænkte jeg i hvert fald ikke selv. Og så var det netop, at jeg tænkte, at hvis jeg viste toerne, der er ikke så mange F-opgaver til, også kan jeg tale om F-opgaverne til 1 og 3 fordi, så får jeg vist, at jeg kan, eller så kan man nemmere komme på alle hovedsætningerne. Det havde jeg tænkt gav mening, men det ved jeg ikke helt om det gør?

Int. Valgte du 2 pga. F-opgaverne til de andre eller kom det

I_2 Det kom lidt som en følge. Jeg synes, at 1'eren var sådan.. Det var også lidt en følge af, at jeg talte med instruktoren om, at 1'eren var måske lidt nem, 3'eren der skulle man være fuldstændig sikker på, at man havde styr på det og 2'eren var sådan en dejlig mellemting. Så var jeg sådan: Jeg vælger 2.

I_4 Det var også fordi 2'eren var meget sådan oplagt fordi man sige, at vi gør sådan ligesom vi gør i 1'eren og så kan man lidt dække den ind samtidig med, at man kan perspektivere lidt til 3'eren og så også komme ind på ruses lemma. Så det er et ret godt bindingspunkt

Int. Jeg kunne godt tænke mig at tale om, hvad der skete til eksamen og hvis I ikke synes, at det er rart at sidde og snakke om det sammen, så deler vi det op?

I_2 og I_4 Griner

Int. Godt, så tager vi det lige en af gangen. Så vi starter med dig [I_4]. Hvad for et eksamensspørgsmål trak du?

I_4 Jeg trak det med kurvelængder og det skulle egentlige have været godt nok og jeg skulle have haft styr på det, men så sker der det, at jeg for at par år siden led rigtig meget af eksamensangst.

I_4 fortæller efterfølgende om sine oplevelser med eksamensangst, men påpeger, at det ved eksamen i An0 ikke var eksaminator og censor, som var skyld i, at den fokusstuderende, med egne ord, var helt blank. Sekvensen er ikke medtaget her, da det ikke har relevans for specialet. Det bemærkes dog, at I_4 bestod eksamen. Interviewet fortsætter:

I_4 Jeg kunne ikke definere en kurvelængde og det siger måske noget om, hvor jeg var henne. De sagde, at de kunne godt høre, at jeg havde styr på det, men at jeg havde fået gravet mig ned i et hul. Det er meget rigtigt. Det var også det, der skete.

Int. Stillede de spørgsmål, som du kunne genkende som F-opgaver?

I_4 Ja lidt tror jeg. Egentlig ikke så meget. Jeg tror mest, at jeg var i et stadie af panik. Jeg vil sige, at de var gode til forståelsen. Jeg tror, at de hjalp mig meget gennem kurset, og hvis jeg lige havde taget mig sammen, så havde det sikkert også hjulpet til eksamen.

Der tales igen om eksamensangst mere generelt.

Int. Hvad oplevede du til eksamen [I_2]?

I_2 Du var der jo. Haha. Så du ved jo godt hvordan det gik.

Int. [griner] Ja, jeg vil gerne høre din udlægning af det.

I_2 Min udlægning. Jeg havde generelt en rigtig god oplevelse. Specielt fordi jeg havde forberedt mig med to som bare havde ekstremt godt styr på det, så jeg synes ligesom, at jeg fik lært rigtig meget af at forberede mig med dem fordi jeg fik nogle spørgs, eller jeg fik bare en vildt god forståelse. Og så ja, så også bare det, at se det så mange gange, så var det lidt sådan.. Jeg følte, at jeg havde forberedt mig så godt som jeg kunne, så på den måde, da jeg kom, så havde jeg det ligesom sådan, nu må det bære eller briste agtigt. Jeg kan ikke gøre mere. Og så kommer jeg derind og får trukket det der Greens sætning og det var bare fedt. Og så ved jeg ikke, jeg kunne ret godt lide, at have Søren. Han fik mig ligesom sådan til at.. Jeg ved ikke rigtig, man kan ikke sige, at det var en joke, men sådan ligesom for at have en samtale, så allerede på vej ind i forberedelseslokalet så var han sådan: Nå men det er første gang, at jeg skal se det her bevis. Og så tænkte jeg, enten kan jeg vælge at blive nervøs over det eller også, at det er jo fedt og nu skal jeg vise jer. Så allerede der valgte jeg bare, at nu skal jeg bare føle mig ovenpå. Inde i forberedelsen synes jeg, at det hele gik fint. Jeg fik kigget nogle ting igennem og primært brugte jeg forberedelsen til, at jeg fik skrevet beviset af sådan som jeg havde skrevet og dobbelttjekkede lige hurtigt nogle ting. Og så gennemgik jeg også lige hurtigt de F-opgaver, som jeg tænkte, at de ville være fede at nå at få med. Kiggede mine noter til dem igennm og jeg tror måske, at jeg skrev nogle ting af, men det kan jeg ikke helt huske. Så kom jeg derind og lagde mine noter fra mig. Så kunne jeg lige mærke nervøsiteten lidt, så jeg greb dem igen, men så sagde Søren, at det skulle jeg ikke gøre. Så dem fik jeg lagt fra mig og så kørte jeg bare. Fordi Greens formel, den der er i bogen, det er sådan en, hvor der har du ikke vist den færdig så du bliver nødt til at have F-opgaverne i brug for at have vist hele sætningen. Så der gik jeg også selv ind på det. Også fordi han virkede som om, at han bare ville lade mig snakke, så jeg tænkte, at nu snakker jeg bare videre, så må du stoppe mig, hvis du har lyst. Han afbrød jo også et par gange og fortalte, at nu skal du male med den brede pensel, men det var først da jeg var i gang med F-opgaverne faktisk. Jeg synes specielt til det spørgsmål var F-opgaverne virkelig rare at have med og virkelig nemme at inkorperere fordi det simpelthen på en måde er en del af beviset. Eller bevise alle tilfælde af den. Det var primært der jeg tænkte, at der var det dejligt at have de der F-opgaver. Hvis jeg ikke havde haft F-opgaverne, så ved jeg ikke, så havde vi måske haft en eller anden form for øvelse med: Tænk lige over, men. Ja nu har jeg ikke prøvet ikke at have F-opgaverne, så jeg ved ikke, hvordan det ville have været, men specielt i forhold til det eksamensspørgsmål, der synes jeg, at de kom som en meget naturlig forlængelse af det andet.

Int. Så lad os prøve at snakke om F-opgaverne som opgavetype i et kursus som Analyse 0 som er meget teoretisk fokuseret i hvert fald i forhold til MatInto og LinAlg.

Hvis I skal prøve at beskrive forskelle og ligheder på F-opgaverne og så opgaverne som er i bogen i forvejen.

I_4 Forskellen er vel, at man i F-opgaverne får meget mere sådan et overblik og en bred viden og hvis man bare sidder og laver en opgave, så er det meget mere, at det her gælder bare for den her ene funktion og det er svært at overskue om det gælder for det hele. Jeg synes, at de hjælper med at give lidt mere teoretisk overblik i stedet for bare sådan.. Jeg synes de hjælper meget på forståelsen faktisk. Og man bliver opmærksom på hvilke punkter er det egentlig, at man lidt sådan bruger magi, men hvorfor er det, at det ikke er magi alligevel.

I_2 Det er jeg meget enig i faktisk.

Int. Er der nogle ligheder?

I_2 Jeg prøver lige at sidde og huske, hvad vi lavede i de andre.

I_4 Ligheder?

I_2 Var der ikke nogle gange hvor vi lidt sådan.. Men det er også fordi, at det kommer lidt an på eksamensspørgsmålet ik'? Men til nogle af dem, der synes jeg, at der var der nogle ligheder hvor det var sådan lidt: Prøv at udregn det her, prøv at udregn det her. Men til andre var det mere: Prøv at kig på beviset. Hvorfor det her? F-opgaverne var jo også sådan, at de skulle få en til at tænke lidt forskningsagtigt, så der var mere sådan noget, altså alle opgaverne var jo sådan tænk selv, men sådan mere: Prøv selv at udled det her eller prøv lige at overvej. Der synes jeg opgaverne i bogen var mere sådan prøv at udregn det her. Ej der var også meget sådan: Vis det her, vis det her, men som du sagde, så var det mere i specifikke tilfælde.

I_4 F-opgaverne var ikke så gode, hvis man skulle lære at regne som et håndværk. Der er de [i gåseøjne] normale opgaver de var lidt nemmere til at give en værktøjet, men for forståelsen giver det meget mere mening med en F-opgave fordi så skal man meget meget sådan se beviset.

I_2 Fx. i en af de første uger om alt det med kontinuitet, så var opgaverne i bogen som: Udregn denne her grænseværdi og sådan noget, hvor F-opgaverne var mere sådan: Tegn en figur der viser forskellen på kontinuitet og uniform kontinuitet.

Int. Hvad betyder det for dig i en sammenligning med den anden?

I_2 Jeg tror, at den anden giver mig mere sådan, som du også sagde, man får lært at bruge det man lige har læst og får husket nogle definitioner osv osv, hvor F-opgaven, der synes jeg specielt det der med tegn det her, gør det her, så giver det en en anden forståelse. Og jeg tror også. Altså jeg har tænkt på dig/F-opgaverne her i Analyse 1 fordi jeg er blevet meget bedre til, uden de overhovedet beder en om at tegne, så næsten med det samme prøver jeg lige at tegne og prøver at se hvad sker der og prøver ligesom at forstå det på en anden måde eller overveje det på en lidt anderledes måde. Jeg synes, at jeg kan mærke en forskel på en eller anden måde.

I_4 Man er lidt mere reflekteret på en eller anden måde. Hvorfor er det nu lige, at det her skal gælde i stedet for bare, det gælder.

I_2 Og har vi nu alle antagelserne? Behøver vi at antage det her? Vi diskuterer sådan noget lidt mere end vi gjorde før. Om det så er på grund af F-opgaverne eller mere sådan matematisk [i gåseøjne] modenhed, det ved jeg ikke.

Int. Hvordan synes I, at F-opgaverne fungerede ved øvelsestimerne?

I_4 Rigtig rigtig godt. Jeg tror, at det er meget vigtigt, at man har en instruktor med ind over ellers kunne vi meget nemt sidde og blive enige om nogle resultater. Så det er ret fedt at høre nogle andre sige, at det har I ret i eller nu har I misforstået verden fuldstændigt. Jeg synes de fungerede rigtig godt. I virkeligheden får man mere ud af at høre en instruktor gennemgå F-opgaverne end man gør af at se dem gennemgå en opgave fordi i en opgave, der har man tit bare brug for facit. Det kunne du jo bare få på papir.

I_2 Det er jeg enig i.

Int. Hvordan er det med F-opgaverne?

I_4 F-opgaverne vil man gerne høre en sige noget og så kan man sige: Det forstår jeg ikke. Der får man ret meget ud af, at de ligesom snakker og formulerer det.

I_2 I hvert fald med flere af F-opgave spørgsmålene. For der var nogle få af F-opgaverne som handlede om at udregne eller tegne og der er det igen sådan lidt facit-agtigt ik'? Der var nogle af dem, som vi gik rimelig hurtigt hen over fordi det kunne vi godt finde ud af, men det er stadig rart at have det gjort.

Int. Ok. Hvis I selv skal vurdere, og I må gerne være ærlige, i hvor høj grad har I så forsøgt at løse F-opgaverne inden øvelsestimerne?

I_2 og I_4 Griner.

I_4 Jeg tror primært, at vi har forsøgt at snakke om dem. Vi havde ugentlige møder, hvor vi mødtes og gennemgik et bevis og der talte vi oftest også lidt F-opgaverne igennem. For mig har det primært været mundtligt, at man gik rundt og snakkede med folk. Jeg har ikke sådan rent faktisk sat mig ned og skrevet det ned, selvom det nok havde været en god idé.

I_2 Hvis jeg skal være helt ærlig, så tror jeg også, at det var sjældent, at jeg havde løst opgaven fuldstændigt, men jeg havde ligesom skrevet nogle idéer ned eller tegnet nogle ting og sådan ligesom sørget for at have tænkt over det, men ikke skrevet det fuldstændigt ned. Og slet ikke til dem alle sammen.

Int. Fik du så til timen afklaret, hvad det var der manglede?

I_2 Ja og tog også selv del i timen, men jeg synes, at ofte, hvis jeg bare ligesom har tænkt de fleste af skridtene, så er det fint nok.

Int. Var det fordi du ikke havde tid, fordi gik i stå eller..

I_2 Nok en blanding. Så gik i stå og havde ikke tid til at fortsætte til jeg ikke var gået i stå længere.

I_4 Man ville gerne nå at lave både lidt regneopgaver og lidt F-opgaver og så havde vi to fag og så nogle gange negligerer man det lidt. Det er ikke fordi, at to fag er meget, men nogle gange prioriterer man bare lidt anderledes.

I_2 Altså jeg tror også, at vi er gode til at lave ting uden for studiet, så selvom der er folk der har tre fag og jeg ved ikke hvad, så...

I_4 Vi er måske begge to sådan lidt optimistiske med hvad vi kan nå.

I_2 Så der tror jeg bare også, at jeg prioriterede at have kigget lidt på alle opgaverne og have sådan en idé om hvordan jeg løser dem alle sammen og skriblet nogle ting ned, end at sørge for at have løst to opgaver helt vildt grundigt.

Int. Har I et godt råd, hvis F-opgaverne skal køre på kurset næste år.

I_4 Det skal de helt sikkert. Det ville være så ærgeligt ikke at bruge dem.

Int. Er der noget, som skal laves om?

I_2 Jeg synes helt klart, at de skal være der. Jeg synes at kunne mindes, at der var nogle af dem hvor jeg tænkte, det her er lidt fjollet.

I_4 Sådan nogle som at undersøge bisection method. Hvis vi skal være ærlige, så havde de fleste ikke undersøgt det og vi kommer ikke til at bruge det.

I_2 Jeg havde undersøgt det, men jeg havde ikke lavet den færdig fordi jeg havde forstået idéen og jeg kunne godt finde ud af at gøre det. Måske mest på grund af dovenskab og jeg vil hellere lave en opgave, som er lidt sjovere. Så gad man ikke fortsætte med udregningerne. Der var nogle andre også. Jeg kan ikke huske dem lige nu, men jeg kan bare huske, at der var mange der var helt vildt gode og så var der nogle som var.. ja.. ikke sådan fuldstændig trivielle, men bare sådan lidt, at måske behøvede vi ikke sidde og lave den her. Det gør selvfølgelig ikke noget, at der er nogle som er nemme. Det er stadig meget godt, lige at få tænkt over det.

I_4 Det kan også være, at bare fordi vi synes de er nemme, at alle ikke synes, at de er nemme.

I_2 Ja det kan godt være. Og nogle gange er sådan nogle ting som man føler er trivielle stadig svære at vise rigtigt eller et eller andet og på den måde er det jo meget godt.

I_4 Plus at det også nogle gange er lidt fedt at få en opgave man føler, at man kan løse uden problemer. Det giver muligvis lidt falsk selvtillid, men det er rart. Det skal man ikke undervurdere.

I_2 Jeg tror også. Ej det er lidt en blanding. Jeg har det som om, at jeg er blevet gladere og gladere for dem i nogle af de senere spørgsmål og jeg ved ikke helt om der er sket en udvikling med dem eller om de spørgsmål er anderledes eller om jeg bare havde mere brug for dem der?

I_4 Jeg tror måske faktisk, at de begyndte at give mening for mig i det øjeblik det sådan helt fuldstændig gik op for mig hvad $\varepsilon - \delta$-beviser var. Jeg troede i starten, at det var tal. Da det var på plads gav de pludselig meget mere mening. Indtil da var det lidt sort-snak. Men det skulle de jo også helst være kan man jo sige.

I_2 Det kan godt være, at det var det. At man bare havde fået en anden forståelse og så var man gladere for at lave F-opgaverne fordi man bedre kunne se meningen med at sidde og lave dem.

Int. Godt. Tak for jeres tid.

F.2.6 Interview med I_7

Int. Vi skal jo tale lidt om eksamen. Prøv at fortæl om, hvordan du lavede dine dispositioner til eksamensspørgsmålene.

I_7 Jeg tror bare, at jeg tog, øh, jeg kan ikke huske om jeg tog bogen og kørte eksamensspørgsmålene eller om jeg tog eksamensspørgsmålene og kørte bogen. Og så ligesom bare sad og kørte, ok hvad er relevant. Jeg prøvede at bruge de der F-spørgsmål og nogle af dem var rigtig gode og nogle af dem var ikke så gode.

Int. Hvordan brugte du F-opgaverne?

I_7 F-opgaverne var mere sådan, det lyder spændende, hvad har jeg skrevet i mine noter til det her. Altså der var nogle af dem, der kunne man godt mærke på F-opgaverne, at emnet var ret tyndt ud af de der 12 eksamensspørgsmål. Nogle af de der med, øh var det Taylor? Det var nogle af dem i midten, jeg kan ikke huske det præcist, men nogle af dem i midten af kursusbeskrivelsens oversigt. Eller jeg tror, at det blev rettet ind efter F-opgaverne, men der var i hvert fald nogle inde i midten, hvor man godt kunne se, også på F-opgaverne, at det bliver svært og du skal drage noget andet ind fordi ellers får du ikke 20 minutter til at gå.

Int. Så der var de en hjælp?

I_7 Nej, der var de nærmest demotiverende. Altså der var nogle af de der emner, de var bare så små kontra Greens og alt hvad der var om Greens var et emne og så var der de der, jeg kan ikke huske hvad det var, men dem i midten. Jeg tror i hvert fald, at den ene med Taylor der inde under hvor der var to beviser at vælge imellem, så jeg skal nok lave et af dem og hvad skal jeg sige. Hvordan får jeg tiden til at gå med det her? Der var F-opgaverne bare ikke understøttende nok, hvorimod fx. den med Green der var jo, altså dels er beviset jo dårligt, men hvad man så ligesom ud over det kunne tage fat på, der var sådan et overflødighedshorn af, altså der var nærmest så meget, at på halvanden time ville du ikke kunne nå at gennemgå det hele. Så fordeligen af dem var sådan meget ulige, men det bærer også lidt præg af, at emner er meget ulige. Det er lidt trælst. Fordi når man sidder og skal forberede sig, så halvdelen af emner, skal man ligesom vælge ud, nå men ok, velvidende, at du kunne risikere at blive spurgt til dem du ikke lige havde valgt at fokusere på. Hvorimod den anden halvdel af emnerne var sådan lidt, ok hvad kan jeg hive ind over her for at det fylder. Jeg tror, at de opgaver hvor der ikke var så meget, der ville man gerne trække mere på dem, men der var bare ikke noget.

Int. Hvordan hænger det sammen med F-opgaverne og emnet?

I$_7$ De emner hvor der ikke var så meget i bogen ud over et delkapitel og det skulle du få til at vare en halv time, altså to beviser, fx. Taylor som er to beviser der går ud på det samme og det skal du så have til at fylde, og det kunne du godt mærke på F-opgaverne. Det synes jeg var lidt stramt. Når man sidder og tænker, hvad fanden skal jeg sige og så kigger man i F-opgaverne og der var ikke rigtig noget af hente, hvor i nogle af de emner hvor der var meget, der hjalp det at have F-opgaverne fordi de gav en form for overblik, så man kunne vælge ud. Så det her ville være smart eller det her kunne jeg også godt.

Int. Så i de tilfælde, hvor du ikke følte, at det var nok, skulle der da have været flere eller skulle de have været anderledes?

I$_7$ Problemet er jo netop, at man kunne godt se hvorfor det var sådan. Fordi fordelingen af materialet ikke var rimelig. Det er svært at presse noget ind under et emne, når ikke det er der. Når der kun lige er sådan to sider i bogen om emnet, så er det svært at lave uddybende spørgsmål til, men det gør også bare, at man så ligesom sidder og tænker, hvad fanden gør jeg så?

Int. Var der nogle der var meget frustrerende at forberede.

I$_7$ Ja. Der var nogle af dem der var ret oplagte, at hvis vi gør sådan her, så er vi lige pludselig inde på Riemann-integraler og så kan man køre alt muligt mærkeligt. Og så var der nogle af dem, hvor man tænkte, at det vil jeg ikke trække for jeg ved ikke, hvad jeg skal sige. Det kunne man jo arbejde med netop fordi når nu der ikke er stof nok til en eksamination i det her emne, hvad vil så være oplagt og henvise til? Det kan godt være rigtig svært når man sidder og har alt det her inde i hovedet og læser op til eksamen og prøver på at få styr på sine noter og ting man har rundt omkring, hvad for nogle paralleller skal man så drage? Nogle gange sidder man og synes, at noget er oplagt og når man så kommer ind til eksamen og ikke må kigge på sit papir og Ernst bare sidder og kigger på en, så bliver det sådan lidt, ja du ved. Så der var nogle af dem, der var tanken ikke udnyttet godt nok. Jeg synes, at det var fint, at der var de der dødsopgaver, hvor censor må ikke bringe dem op, men hvis du bringer dem op og kan finde ud af det selvfølgelig så er det et plus. Ikke fordi jeg selv havde det, men det var fordi at hele der det om Green det hang sammen. Nogle af opgaverne kunne man godt forstå, at de havde fået stjerner og det fik bare lov at blive ved det det er. Jeg synes ikke, at det var lige fordelt. Nogle af de der dagger-opgaver var måske ikke så svære, at de burde være dagger-opgaver, hvor der så var nogle af de andre der måske burde være det. Jeg tror lidt det også hang sammen med eksamensrelevansen.

Int. Det er en god pointe, at markeringerne er vigtige.

I_7 Altså ligesom i An1, så dem med stjerne det er sådan lidt svære opgaver eller det er kursorisk og vil kun blive gennemgået til forelæsningerne. Det vil være godt at kunne, men det er ikke noget der kommer eksamensspørgsmål i. Netop fordi man så selv kan vurdere om man har overskud til at tage dem eller skal jeg bare fokusere på at overleve eksamen? Det er jo en eller anden form for undervisningsdifferentiering. Og det synes jeg var fint nok, at man ligesom kunne sidde og kigge på noget og tænke, at det er helt håbløst, men det er ok.

Int. Lad os prøve at tale om selve eksamen. Hvad trak du?

I_7 Greens. Og det var jeg egentlig ok tilfreds med.

Int. Hvad skete der?

I_7 På vej ind til forberedelsen, så siger Ernst, at jeg var en forsøgskanin fordi han havde ikke haft det emne før. Det er sådan lidt, øh ja. Jeg var oppe klokken et eller andet om eftermiddagen, så jeg havde jo siddet og hørt på alle dem der nu var oppe om formiddagen, at hvis ikke man lagde sit papir fra sig, så kom Ernst og hev det fra dig og han sad sådan mere eller mindre tæt på folk, hvis ikke han bare stillede sig ved tavlen. Hvis der gik mere end fem minutter før han stod oppe ved tavlen, så var der et eller andet galt. Så jeg havde prøvet at lave sådan en plan inde i forberedelsen ud fra det jeg nu havde forberedt hjemmefra. Jeg skal huske at sige de her ting og starte med, at jeg vil gerne nå at sige de her ting.

Int. Var der noget du valgte fra?

I_7 Det synes jeg ikke fordi dels så skulle jeg køre beviset og der tror jeg bare, at jeg kørte det fra bogen og ikke det alternative, men dels skal jeg huske det fra bogen, så er der det alternative og den med cirklen og der er sådan en ordentlig håndfuld ting man skal huske at sige og ligesom dække hvorfor er det vigtigt, at der ikke er huller i Ω og alle de der ting man så skulle huske og så de der reparametriseringer. Jeg havde skrevet dem ned på et papir og taget det med, men jeg prøvede at lade dem ligge. Så kørte jeg lidt død i de der parametriseringer fordi, ja det ved jeg ikke, så det brugte vi utrolig lang tid på. Fordi, ok må jeg kigge i mine papirer, så tager det to sekunder lige at skrive dem op og så kan vi komme videre? Det synes Ernst så, at vi skulle bruge tid på at stå og snakke om, hvordan man ligesom kom frem til de her parametriseringer. Det synes jeg var enormt frustrerende fordi vi snakker to sekunder, om noget der selvfølgelig har betydning, men som måske ikke lige er pointen i det her. Det er bare en detalje. Det er sådan noget hvor, hvis jeg havde brugt mere tid, så kunne jeg have kunnet dem udenad, men jeg havde en forventning om, da jeg sad og forberedte mig, at det her er ikke noget jeg skal kunne udenad. Det er sådan noget jeg lige kan skrive op. Jeg skal bare vide, hvad jeg skal bruge dem til og hvordan bruger dem og hvorfor de ser sådan ud. De skal bare lige lires af fra papiret. Så det var det jeg brugte min forberedelsestid på. Det var at sidde og prøve på at huske de her fordi jeg havde hørt det med at han tog papiret.

Int. Hvad stillede han af spørgsmål?

I_7 Jamen så kom vi igennem de der parametriseringer og begyndte at lave det de så ligesom skulle bruges til. Det var lidt pres. Da vi nåede til beviset, så sagde censor, at der var fem minutter tilbage. Så at prøve at presse 80% af det man egentlig gerne vil sige ind på de sidste fem minutter fordi der bare er blevet tærsket rundt i de der reparametriseringer, det er sådan lidt. Jeg føler lidt, og det var også noget af deres begrundelse for karakteren, at der blev tærsket lidt rundt i dem. Ja, men jeg kunne også bare have fået lov til lige at kigge i mine papirer og så komme videre. Fordi det er en eksamenssituation. Man er presset. Jeg havde lige fået smidt i hovedet, at nu blev jeg forsøgskanin og det er Ernst hallo.

Int. Hvad fik du?

I_7 4. Det irriterer mig bare at vide, at jeg havde faktisk styr på, hvad det var jeg gerne ville sige, men lige det som han så valgte at stå og bruge alt for meget tid på og vi fandt jo også frem til de rigtige ting. Det var ikke fordi han skrevet det ned for mig. Så jeg synes, at det var vildt unfair et eller andet sted. Jeg nåede faktisk at spytte alt det her info ud, som man egentlig skulle nå at sige og de må også have fået indtryk af, at jeg faktisk kunne finde ud af det og så bruge det som argument, at der blev brugt for meget tid på de her reparametriseringer og det var vi jo helt enige om, men jeg skulle bare have kigget i mine papirer og så kunne vi komme videre. Det synes jeg var enormt frustrerende.

Int. Hvad var din oplevese af, hvordan F-opgaverne blev brugt ved selve eksaminationen?

I_7 Jamen vi nåede jo faktisk ikke igennem beviset, så de nåede jo ikke rigtig at spørge ind til andet, så det var jo kun det jeg selv nåede at sige, at når du har den her ring-med hul i, så deler man den op og lægger dem sammen. Det nåede jeg at sige, men det var meget kaotisk. Jeg ved ikke, hvor meget af det de nåede at forstå. Og man står der og tænker, at jeg skal nå at sige det her fordi det skal jeg, det er meget pres.

Int. Ok. Det var eksamen. Lad os prøve at tale lidt generelt om F-opgaverne, når vi nu er kommet på den anden side af kurset. Prøv at fortæl om forskelle og ligheder på F-opgaver og de opgaver fra bogen.

I_7 Altså de var mere pædagogiske de der F-opgaver.

Int. Hvordan?

I_7 Nogle af dem var bare sådan mere forklarende.

Int. Hvad var forskellen eller lighederne, når du skulle forberede de forskellige opgaver?

I_7 Det synes jeg der var noget i formuleringerne. Der var nogle af opgaverne, som måske bar lidt for meget præg af, at det her skal du se frem til agtigt, at hvis du gerne vil videre, så skal du kunne det her. Det var måske lidt for ambitiøst.

Int. Tænker du på nogle specielt?

I_7 Der var bare nogle af de lidt uddybende opgaver, hvor man tænkte, at det var lige hidsigt nok på et førsteårskursus, hvor man forsøger at få styr på alle de her begreber. Så skal man også lige. Det var sådan nogle jeg sprang over til eksamensforberedelsen fordi der fik jeg lidt for meget følelsen af, at hvis man skal forske i matematik, så skal du gøre sådan her. Man kunne godt hjælpe, at hensigten var, at vi vil prøve på at hjælpe dig med at tænke matematisk, men det blev bare mere forvirrende end det hjalp. Jeg kan ikke lige komme på, hvad det var for nogle af dem. Nogle af F-opgaverne de var godt til at eksplicitere ting, hvor man så tænkte nårh og så var der nogle af dem, hvor man tænkte hvorfor har man valgt det her? Det hjalp ikke. Det var lige før, at det faktisk gjorde det værre.

Int. Var det nogle specielle typer?

I_7 Det har været nogle bestemte emner. Det kan sagtens bare have været mig der eller min forståelse af ting. Enten så var det sådan lidt dobbeltkonfekt i forhold til noget af det der var i bogens opgaver eller også så var det lidt for ambitiøst. Nogle af dem har nok været de der dagger-opgaver, hvor det også ligesom forsvarede, at det her det er til noget andet, så det er også fair nok ikke at kunne dem.

Int. Så daggeren skal komme før det sidste hæfte?

I_7 Ja. Ligesom det står i Kalkulus. Der er nogle opgaver, hvor der står, at det her er lidt mere kringlet.

Int. Hvordan synes du, at F-opgaverne fungerede ved øvelsestimen?

I_7 De lå forkert. Der var mange af dem, så stod de på til tirsdag og så skød vi de fordi vi gennemgik beviset torsdag. Eller også så lå de torsdag fordi det passede med pensum i den uge, men beviset var først på til ugen efter, så der var gange hvor vi skød opgaver. Fordi de er ret meget nemmere at tage op, når vi har beviset og lige har været det igennem. Der var også et par af dem, hvor dem der nu gennemgik bevis ved tavlen faktisk på den ene eller den anden måde kom ind over enten naturligt eller også fordi instruktoren lige prikkede lidt. Fx. sådan nogle som, hvorfor tror du, at de gør det her? Der var også en eller anden hvor der i bogen står: læg mærke til, at vi undgår at sige og så var F-opgaven: hvorfor tror du, at vi gør det. Og så var det sådan, jamen det er bare fordi der er numerisk tegn. Det var sådan et eller andet fuldstændig åndsvagt. Der var også en der spurgte Søren, hvorfor har du ikke skrevet numerisk tegn hele vejen i beviset og så sagde han, at rent pædagogisk burde jeg nok have lavet dem hele vejen hen, men når vi har med positive tal at gøre, så er det ligegyldigt. Det var lidt det samme man sad med der i bogen. Men det er der pædagogisk, så er der måske en masse, som ikke lige overvejer det og det var da sådan en opgave, som fik en til senere hen at overveje tegnsætningen rundt omkring og hvor har det betydning og hvor har det ikke betydning. Så et eller andet sted som pædagogisk værktøj fungerede den jo. Der var også en hvor man skulle gennemgå beviset for supremum og så hvor skulle man lave det om, så det virker for infimum fordi i bogen står der bare, at det er oplagt og det er ikke helt så oplagt. Det var en god øvelse. Du er nødt til faktisk at køre det igennem og tænke over, jamen hvor har det betydning om det er plus eller minus.

Int. Hvor meget har du forberedt dig derhjemme på F-opgaverne?

I_7 Det var meget sporadisk hvornår der var tid til det. Hvis jeg forberedte mig, så forberedte jeg det hele. Og mere end jeg sådan havde lyst til, så blev det ikke til vildt meget forberedelse.

Int. Hvordan forbereder du dig?

I_7 Det kommer meget an på kurserne og hvordan forelæseren er. Når vi bruger Kalkulus, så skriver jeg stort set alt ned fra forberedelsen, men det er fordi bogen er på norsk. Det er lige før jeg sidder og oversætter hele bogen. Jeg tog ikke rigtig noter til den der analysebog. Det er også svært at tage noter til beviser. Jeg tror kun, at jeg forberedte F-opgaver en gang eller to fordi man også skulle vurdere sin tid og i forhold til alle de tanker man når at gøre sig om opgaver man har derhjemme kontra at, jeg vil ikke sige at få foræret svaret, men i hvert fald få [i gåseøjen] prøv at kig her. Også hvis du har en afleveringsopgave, hvor der står hint. Så starter du jo der. Du kan jo starte 20 forskellige steder, men der er noget tidsøkonomisk i at prøve at kigge der man bliver foreslået i stedet for at gøre alle de 20 forskellige ting. Gider jeg bruge tid på at starte fra en ende af eller skal jeg vente til øvelsestimen i morgen og så få at vide, nå det er der og så lave det? Så venter jeg bare til øvelsestimen fordi pædagogisk, synes jeg i hvert fald, får man ikke noget ud af og sidde og, andet end at bruge en forfærdelig masse tid. Jeg synes ikke, at der er nogen læring i det for mig. Der er ikke nogen læringsproces i at sidde og tæske forskellige løsningsmetoder igennem.

Int. Fik du afklaring på opgaverne ved øvelsestimen?

I_7 Ja ja. De fleste i hvert fald.

Int. Hvis du skulle give et godt råd, fordi man jo kunne forestille sig, at de her F-opgaver skal bruge i An0 næste år, hvad skulle det så være? Du nævnte det med daggert i det første hæfte. Kunne der være andre ting?

I_7 Jeg synes, at man skal skrotte nogle af F-opgaverne. Idéen er fin fordi det er sådan lidt et morder-kursus, hvor gennemsnittet er nede omkring bestået/ikke bestået. Der foregår også så mange ting. Det er ikke kun ydre faktorer der spille ind på, at det er der folk falder fra. Jeg synes, at det er en fin idé ligesom at prøve at hjælpe folk lidt. Da jeg forberedte mig til eksamen, var det lidt det jeg fik ud af F-opgaverne. Hvor man tænker, at jeg kan starte 20 forskellige steder, men den siger sådan: prøv at kig derovre. I hvert fald dem af dem, som fungerede. Så sad man ikke og brugte krudt på en masse håbløst. Altså sådan forskning på sigt, så kan jeg sagtens se, at så skal du netop lave den der med at teste alle 20 forskellige ting af, men det er måske bare ikke lige det der er behov for nu. Jeg lærer mere af, at denne her type opgaver den løser vi sådan her og ikke det der med, at du kan løse den her opgave på de her fem måder, gæt. Der hjalp nogle af de der F-opgaver med at sige, prøv at kig her eller har du overvejet det her, hvor man havde tænkt, at det er da åbenlyst, at det er sådan og det er det så bare ikke. Jeg ville måske gøre dem lidt mindre ambitiøse eller også have den der advarselstegn med noget før. Fordi nogle af dem kunne man godt blive lidt demotiveret af. Men det pædagogiske bagved dem er en god idé, men alt afhængig af hvor forskningspræget det skal være, så var der mange af dem hvor jeg følte, at det var for tidligt. Selvfølgelig skal man lære at tænke selv og alle de her ting, men når man ikke er født med sådan en intuitiv eller har en far der er Gud, så kommer ting ligesom bare som erfaring. Matematik er ikke en død ting, men det er lidt som latin. Det er meget fast og det liv der ligesom er i det er meget begrænset. Der er noget, men du bliver nødt til først at have hele livshistorien med før du kan begynde på noget. Det tror jeg egentlig er en meget fn analogi. Jeg sad med den der, at vi er ved at forstå livshistorien og alligevel så bliver man skubbet derud og så springer vi resten over. Jeg tror, at nogle af dem man brækkede halen på, det var fordi, at det var lidt for stort et skub.

Int. Fint. Tak for hjælpen.

Efter interviewet fortsatte I_7 sine tanker om An0 i en uformel samtale på vej ud til cyklerne. Hun mente, at F-opgaverne måtte have været en udfordring for instruktorerne og påpegede også, at flere studerende var på banen ved øvelsestimen, når de arbejdede med F-opgaver fordi man kunne forudsige instruktorens spørgsmål bedre.