INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

GYMNASIEELEVERS OG LÆRERSTUDERENDES VIDEN OM RATIONALE TAL

Maria Hørlyk Møller Kongshavn
Kandidatspeciale

Juli 2016

IND's studenterserie nr. 49

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

1. Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
2. Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
3. Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
4. Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
5. Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
6. Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge i gymnasiet (2007)
7. Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
8. Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
9. Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)
10. Britta Hansen: Didaktik på tværs af matematik og historie (2009)
11. Nadja Ussingkær: En didaktisk undersøgelse af brudte lineære funktioner i rammerne af tysk fritidsmatematik (2009)
12. Thomas Thrane: Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse
13. Flemming Munch Hansen: Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik (2009)
14. Hasan Ademovski og Hatice Ademovski: Proportionalitet på mellemtrinnet - Design af didaktiske situationer baseret på stofdidaktisk analyse (2009)
15. Philipp Lorenzen: Hvem er de nye studenter? Baggrund, interesse & uddannelsesstrategi (2010)
16. Signe Ougaard: Logiske strukturer i matematisk analyse på gymnasieniveau. Et forløb om kvantorer og ε-δ-definition af grænseværdi (2010)
17. Jesper Winther Sørensen: Abstrakt algebra i gymnasiet - design, udførelse og analyse af undervisning i gruppeteori (2010)
18. Sofie Stoustrup: En analyse af differentialligninger på A-niveau i STX ud fra den antropologiske didaktiske teori (2010)
19. Jan Henrik Egballe Heinze: Eksponentialfunktioner i STX (2010)
20. Mette Beier Jensen: Virtuelgalathea3.dk i biologiundervisningen i gymnasiet (2010)
21. Servet Dönmez: Tosprogede elever og matematik i gymnasiet (2011)
22. Therese Røndum Frederiksen: Designing and implementing an engaging learning experience about the electric sense of sharks for the visitors at Danmarks Akvarium (2011)
23. Sarah Elisabeth Klein: Using touch-tables and inquiry methods to attract and engage visitors (2011)
24. Line Kabell Nissen: Matematik for Sjov – Studie- og forskningsforløb i en eksperimentel kontekst (2011)
25. Jonathan Barrett: Trigonometriske Funktioner i en Gymnasial Kontekst – en epistemologisk referencemodel (2011)
26. Rune Skalborg Hansen: Et studie i læringsopfattelse og -udbytte – Om fysik C kursister på Københavns VUC (2011)
27. Astrid Camilus: Valideringssituationer i undervisningsforløb om differentialligninger og radioaktivitet (2012)
28. Niven Adel Atie: Didaktiske situationer for fuldstændiggørelse af kvadratet i andengradsligningen (2013)
29. Morten C. B. Persson: Kvantekemi i gymnasiet - Tilrettelæggelse, udførelse og evaluering af et undervisningsforløb (2013)
30. Sofie Birch Jensen: Køn, evaluering og The Force Concept Inventory (2013)
31. Simone Gravlund Nielsen: Når børn forsker i matematik (2013)
32. Henrik Egholm Wessel: Smartphones as Scientific Instruments in Inquiry Based Science Education (2013)
33. Nicole Koefoed: Et didaktisk design om definition, eksistens og eksakt værdi af bestemt integral (2013)
34. Trine Louise Brøndt Nielsen: From Master's programme to labour market – A study on physics graduates' experience of the transition to the labour market (2013**)**
35. Rie Hjørnegaard Malm: Becoming a Geologist – Identity negotiations among first year geology students (2013)
36. Mariam Babrakzai Zadran: Gymnasiealgebra I et historisk perspektiv – Matematiske organisationer I gymnasiealgebra (2014)
37. Marie Lohmann-Jensen: Flipped Classroom – andet end blot en strukturel ændring af undervisningen? (2014)
38. Jeppe Willads Petersen: Talent – Why do we do it? (2014)
39. Jeanette Kjølbæk: One-dimensional regression in high school (2015)
40. Anders Wolfsberg: A praxeological investigation of divergence – Exploring challenges of teaching and learning math-in-physics (2015)
41. Asger Brix Jensen: Number tricks as a didactical tool for teaching elementary algebra (2015)
42. Katrine Frovin Gravesen: Forskningslignende situationer på et førsteårskursus I matematisk analyse (2015)
43. Lene Eriksen: Studie og forskningsforløb om modellering med variabelsammenhænge (2015)
44. Caroline Sofie Poulsen: Basic Algebra in the transition from lower secondary school to high school
45. Rasmus Olsen Svensson: Komparativ undersøgelse af deduktiv og induktiv matematikundervisning
46. Leonora Simony: Teaching authentic cutting-edge science to high school students(2016)
47. Lotte Nørtoft: The Trigonometric Functions - The transition from geometric tools to functions (2016)
48. Aske Henriksen: Pattern Analysis as Entrance to Algebraic Proof Situations at C-level (2016)
49. Maria Hørlyk Møller Kongshavn: Gymnasieelevers og Lærerstuderendes Viden Om Rationale Tal (2016)

Abstract

Many mathematic teachers see it as a limitation for learning in high school that students do not master basic knowledge of rational numbers.

The Thesis examines high school students practical knowledge of rational numbers. The theoretical background is the anthropological theory of didactics (ATD). A praxeological reference model is constructed and it identifies which techniques high school students are expected to know about. Based on the reference model an empirical study is made which is a written test given to two comparable high school classes (1.year and 3.year) with maths at A level. The high school students had problems with several different techniques, especially multiplication and division of rational numbers. This indicates that they normally use calculators to do such operations. They answered correctly on only three-fourth parts of the tasks. Surprisingly the 1.year students performed best, however, there was no significant difference. It suggests that students' knowledge of rational numbers do not improve in high school, which can be a problem for higher education. The thesis has examined teacher students technical knowledge of rational numbers through group interviews of 1.year students studying mathematics. It turned out as expected that their performance did not differ significantly from the high school students.

It is surprising that the basic knowledge of rational numbers do not improve through the work with more advanced mathematics in high school. If secondary schools must prepare students for higher education, you may have to rethink high school mathematics or explore what it takes to give students the basic knowledge of rational numbers with them from ground school.

IND's studenterserie *består af kandidatspecialer og bachelorprojekter skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der har interesse også uden for universitetets mure. De publiceres derfor i elektronisk form, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det er tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*

Se hele serien på: www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/

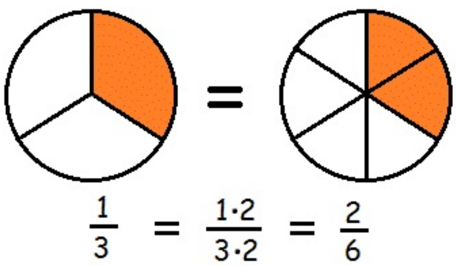
DET NATUR- OG BIOVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

KANDIDATSPECIALE

GYMNASIEELEVERS OG LÆRERSTUDERENDES VIDEN OM RATIONALE TAL

MARIA HØRLYK MØLLER KONGSHAVN

Vejleder: Carl Winsløw
18.juli 2016



Speciale for cand.scient-graden i matematik. Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Thesis for the Master degree in Mathematics. Department of Science Education, University of Copenhagen

Maria Hørlyk Møller Kongshavn:
Gymnasieelevers og lærerstuderendes viden om Rationale tal

English title: *A study of upper secondary students' and mathematics teacher students' knowledge about rational numbers*

Thesis for the Master degree in Mathematics. Department of Science Education,
University of Copenhagen, Speciale for cand.scient-graden i matematik. Institut for Naturfagenes Didaktik,
Københavns Universitet

Vejleder: Carl Winsløw

RESUMÉ

Mange matematiklærere oplever det som en begrænsning for læringen i gymnasiet, at eleverne ikke mestrer grundlæggende viden om rationale tal.

Specialet undersøger, hvilken praktisk viden gymnasieelever har om rationale tal. Med udgangspunkt i den antropologiske teori om det didaktiske (ATD) konstrueres en prakseologisk referencemodel (PRM), hvor det kortlægges, hvilke teknikker gymnasieelever forventes at kende til. På baggrund af referencemodellen er lavet en empirisk skriftlig undersøgelse af to sammenlignelige gymnasieklasser (1.g og 3.g) med matematik på A-niveau. Gymnasieeleverne havde problemer med flere forskellige teknikker, herunder især multiplikation og division af rationale tal, hvilket kan skyldes, at de er vandt til at bruge lommeregnere. De svarede gennemsnitligt korrekt på kun tre-fjederdele af opgaverne. Det viste sig overraskende, at 1.g'erne klarede sig bedst, dog var der ingen markant forskel. Det tyder på, at elevernes viden om rationale tal ikke forbedres i gymnasiet, hvilket kan være et problem for de videregående uddannelser. Specialet har også undersøgt lærerstuderendes tekniske viden om rationale tal gennem gruppeinterview af førsteårsstuderende som læser matematik. Det viste sig, som forventet, at deres præstation ikke afveg markant fra gymnasieeleverne.

Det er bemærkelsesværdigt, at den grundlæggende viden om rationale tal ikke forbedres i arbejdet med mere avanceret matematik i gymnasiet. Hvis gymnasieundervisningen skal forberede eleverne til videregående uddannelser, er man måske nødt til at nytænke gymnasiematematikken eller undersøge, hvad der skal til for, at eleverne får den grundlæggende viden om rationale tal med sig fra folkeskolen.

ABSTRACT

Many mathematic teachers see it as a limitation for learning in high school that students do not master basic knowledge of rational numbers.

The Thesis examines high school students practical knowledge of rational numbers. The theoretical background is the anthropological theory of didactics (ATD). A praxeological reference model is constructed and it identifies which techniques high school students are expected to know about. Based on the reference model an empirical study is made which is a written test given to two comparable high school classes (1.year and 3.year) with maths at A level. The high school students had problems with several different techniques, especially multiplication and division of rational numbers. This indicates that they normally use calculators to do such operations. They answered correctly on only three-fourth parts of the tasks. Surprisingly the 1.year students performed best, however, there was no significant difference. It suggests that students' knowledge of rational numbers do not improve in high school, which can be a problem for higher education. The thesis has examined teacher students technical knowledge of rational numbers through group interviews of 1.year students studying mathematics. It turned out as expected that their performance did not differ significantly from the high school students.

It is surprising that the basic knowledge of rational numbers do not improve through the work with more advanced mathematics in high school. If secondary schools must prepare students for higher education, you may have to rethink high school mathematics or explore what it takes to give students the basic knowledge of rational numbers with them from ground school.

INDHOLD

FIGURER

TABELLER

ACRONYMS

ATD Antropologisk Teori om det Didaktiske

CAS Computer Algebra System

GT Gymnasietest

HLO Hypotetiske Lærer Opgaver

MO Matematisk Organisation

PRM Prakseologisk Reference Model

Del I

SELVE OPGAVEN

1 INTRODUKTION

1.1 MOTIVATION OG FORSKNINGSPØRGSMÅL

"Problemet er, at de lærer for lidt i folkeskolen. I 1.g skal jeg forklare, at $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ ikke giver $\frac{2}{7}$."

(**berlingske:2016**)

Dette er et citat fra en kronik i Berlingske, der relaterer til debatten om matematiks rolle i den nye gymnasieform, der blev formet i løbet af foråret 2016.

Citatet udtrykker en frustration over gymnasieelevernes manglende viden om grundlæggende matematik, herunder især brøkregneregler. Denne frustration er ikke blot en enkelt matematiklæreres behov for at komme ud med frustrationer. Det er et problem som jeg fornemmer at mange andre gymnasielærere kan nikke genkendende til. Det kommer fx til udtryk gennem diskussion med fagkollegaer og debat på facebook-matematikfaggruppen.

Da jeg selv har oplevet det som en stor hæmsko i matematikundervisningen, at gymnasieeleverne ikke mestrer brøkregnereglerne, har det motiveret mig til at vælge rationale tal som fokuspunkt i specialet.

Ifølge den fornævnte artikel i Berlingske, er det et problem, at gymnasieeleverne efter studentereksamen ikke har den tilstrækkelige matematiske viden, som især de tekniske uddannelser efterspørger. Problemet kan skyldes, som kronikken skriver, at gymnasieeleverne ikke har fået et tilstrækkeligt grundlag med fra folkeskolen, da *»det er hele det grundlag, gymnasiets matematikundervisning bygger på, der mangler«* (**berlingske:2016**).

Men kan det virkelig passe, at gymnasieelevernes viden om rationale er så mangelfuld? Og er den stadig så mangelfuld efter endt studentereksamen, at de videregående uddannelser kan opleve det som et problem? Kunne man ikke tænke sig, at gymnasieeleverne trods alt nok skal komme efter det i løbet af gymnasiet?

Jeg kan ikke selv svare på disse spørgsmål uden at have et grundlag at bygge det på. Derfor har jeg valgt at undersøge, hvilken viden gymnasieelever faktisk har om rationale tal. Jeg har valgt at fokusere på den praktiske viden og vil bl.a. undersøge hvilke teknikker gymnasieeleverne kan anvende. For at undersøge, om der er sket en ændring af elevernes viden om rationale tal i gymnasiet, vil jeg lave en empirisk undersøgelse af både en 1.g-klasse og en 3.g-klasse.

Da jeg fokuserer på at undersøge, hvad gymnasieeleverne rent faktisk ved, så er formålet ikke at komme med en løsning på, hvordan det manglende grundlag fra folkeskolen kan forbedres. Det håber jeg at andre vil forsøge at undersøge. I stedet vil jeg undersøge, hvad det er for teknikker de rent faktisk kan mestre, for at få et større indblik i, hvor det er, at gymnasieeleverne har problemer i forbindelse med rationale tal. Forhåbentlig kan dette bruges af andre til at overveje, hvordan man griber ind over for elevernes manglende viden.

Jeg har valgt at arbejde ud fra følgende forskningsspørgsmål:

1. Hvilke didaktiske udfordringer vedrørende rationale tal er kendt fra bl.a. forskningslitteraturen?
2. Hvilke typer af opgaver om/med rationale tal forventes det, at gymnasieelever (og dermed også lærerstuerende) kan håndtere?

3. Hvilken praktisk viden har gymnasieelever og lærerstuderende faktisk om rationale tal?

Første spørgsmål vil bl.a. blive besvaret ved at få et overblik over forskningslitteraturen inden for rationale tal. Andet spørgsmål vil blive besvaret ved at undersøge matematisk, hvad rationale tal er, og efterfølgende konstruere en prakseologisk referencemodel PRM der baseres på de teknikker og opgavetyper som det ifølge gymnasiebøgerne forventes at gymnasieelever kender til. Denne PRM vil efterfølgende blive brugt til at besvare det sidste forskningsspørgsmål ved at designe en skriftlig test, udføre en empirisk undersøgelse af gymnasieelevernes tekniske viden og efterfølgende analysere, hvilken viden gymnasieeleverne faktsik har om rationale tal.

Lærerstuderendes viden om rationale tal undersøges også i det sidste forskningsspørgmål. Dette gøres gennem en empirisk undersøgelse, hvor en række førsteårslærerstuderende interviewes i grupper om forskellige cases vedrørende undervisning af rationale tal.

1.1.1 *Sammenhæng mellem gymnasieelever og lærerstuderende*

Som det ses af både overskriften og forskningsspørgsmålene, så vil jeg også inddrage lærerstuderendes viden om rationale tal i specialet. Dette er der flere årsager til.

For det første og vigtigst af alt, så fik jeg mulighed for at indgå i et fagligt samarbejde med Putra (**zetra:2016**), som arbjeder på en PHD om lærerstuderendes matematiske og didaktiske viden om rationale tal. Dette gav os begge mulighed for at kunne sparre med hinanden og udveksle tanker og ideér, da vi arbejder med det samme matematisk tekniske område. Dette samarbejde har på mange måde været med til at inspirere mig i arbejdet med specialet og Putra (**zetra:2016**) har givet mig flere materialer, som jeg har bygget mit teoretiske grundlag på.

For det andet så synes jeg at Putra har fat i et vigtigt projekt. For selvom jeg ikke ønsker at pege fingre eller finde løsninger på gymnasieelevernes manglende viden om rationale tal, så kan der alligevel være en sammenhæng mellem den viden som de lærerstuderende har med sig fra gymnasiet, og den viden der bliver formidlet i folkeskolen. For det hænger jo netop sammen.

Hvis gymnasieeleverne efter endt studentereksamen ikke har den tilstrækkelige viden om rationale tal, så vil de lærerstuderende også have en mangelfuld viden om rationale tal. Hvis denne viden stadig er mangelfuld når de er færdiguddannede lærere, så har de ikke et godt nok grundlag til at undervise folkeskoleeleverne om rationale tal på en sådan måde, at de opnår en tilstrækkelig viden inden gymnasiet.

For det tredje, så undersøges der kun på førsteårsstuderende på læreruddannelsen. Det betyder, at den matematiske viden som de lærerstuderende må forventes at have på dette tidspunkt ikke afviger væsenligt fra den viden som gymnasielever har i 3.g. Derfor er en sammenligning mulig.

1.2 OPGAVENS OPBYGNING

I kapitel 2 vil jeg undersøge nogle af de didaktiske udfordringer, der kan være ved de rationale tal. Dette gøres bl.a. ved at give et kort overblik over forksningslitteraturen på området.

I kapitel 3 vil jeg starte med at præsentere den videnskabelige matematiske teori om de rationale tal i afsnit 3.1. Derefter vil jeg i afsnit 3.2 præsentere den teoretiske baggrund for specialet og tilslut vil jeg i afsnit 3.3 præsentere min konstruerede PRM.

I kapitel 4 vil jeg præsentere metodologien for specialet i forhold til besvarelse af forskningsspørgsmålene, valg af materialer, design og udførelse af bl.a. den konstruerede PRM og de empiriske undersøgelser.

I kapitel 5 ses den empiriske undersøgelse og analyse af gymnasieelever. Herunder en a priori-analyse og præsentation af den test som datamaterialet er samlet ud fra. Kapitlet afsluttes med en a posteriori-analyse af elevernes skriftlige besvarelser af den designede test.

I kapitel 6 ses en kort a priorianalyse og a posteriorianalyse af interviwene med de lærerstuderende. Kapitlet slutter af med afsnit 6.3, som er en sammenligning af gymnasieelever og lærerstuderendes viden om rationale tal. Da de to empiriske undersøgelser ikke har samme fokus på den tekniske viden, er sammenligningsgrundlaget ikke så stort.

Specialet afsluttes i kapitel 7 med en konklusion på de forskningsspørgsmål som blev præsenteret i introduktionen.

1.3 SAMMENHÆNG MED FORFATTER OG REFERENCER

Bemærk, at jeg har haft store problemer med at få forfatterreferencerne til at virke. Det er desværre ikke lykkkedes her i den endelige version af specialet. Det betyder, at alle henvisninger til kilder er skrevet ud fra nogle betegnelser, som jeg selv har angivet. Disse angivelser er valgt, så jeg nemt kunne huske, hvilken kilde jeg refererede til. Det er altså ikke alle steder valgt ud fra fx forfatternavn. Derfor er det nødvendigt sammenhængen mellem henvisning og forfatter. Aller bagerst i specialet har jeg placeret bibliografien, hvor det uddybes hvilke bøger det faktisk drejer sig om.

(**ab1:2005**): Carstensen, Jens, Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens
(**aquinas:2008**): D'Onofrio, Sandro R.
(**basic:2005**): Cohn, P.M
(**barbe:2005**): Barbé, Joaqium, Bosch, Marianna, Espinoza, Lorena and Gascón, Josep
(**berlingske:2016**): Andersen, Leif H.
(**bosch:2006**): Bosch, Marianna and Gascón, Josep
(**brousseau:2014**): Broussou, Guy and Broussou, Nadine and Warfield, Virginia
(**caroline:2015**): Poulsen, Caroline
(**dis:2013**)
Lützen, Jesper
(**dummit:2004**): Dummit, David S. and Foote, Richard M., 2004,
(**foundation:1965**): Pervin, William J.
(**gyldendal:2005**): Clausen, Flemming and Schomacker, Gert and Tolnø, Jesper
(**gymnasie:2006**): Damberg, Erik and Dolin, Jens and Ingerslev, Gitte
(**hungerford:2000**): Hungerford, Thomas W.
(**kongshavn:2015**): Kongshavn, Maria
(**mata1:2005**): Carstensen, Jens and Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens
(**model:2010**): Durand-Guerrier, Viviane and Winsløw, Carl and yoshida, Hiroaki
(**ord:2016**): Dansk Synonymordbog
(**pinilla:2007**): Pinilla, Martha I. F.
(**prediger:2006**): Prediger, Susanne
(**set:1994**): Moschovakis, Yannis N.
citepstx:2012: Jørgen Dejgaard
(**taylor:1997**): Munkres, James R.

(**top:2000**): Taylor, John R.
(**uvmat:2014**): Sultan, Alan and Artzt, Alice F.
(**uvm:2013**): Undervisningsministeriet
(**webmatematik:2016**): Webmatematik
(**wu:2014**): Wu, Hung Hsi
(**zetra:2016**): Putra, Zetra Hainul

2 RATIONALE TAL OG DIDAKTISKE UDFORDRINGER

Jeg vil undersøge nogle af de didaktiske udfordringer, der kan være ved de rationale tal, så jeg senere kan bruge denne viden i min undersøgelse af lærerstuderendes og gymnasieelevers viden om rationale tal.

2.1 DIDAKTISKE UDFORDRINGER IFØLGE FORSKNINGEN DE SIDSTE 50 ÅR

Rationale tal og brøker er et meget omfangsrigt forskningsområder inden for matematikkens didaktik ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s.81**). Dette giver mange undersøgelser af, hvilke didaktiske udfordringer arbejdet med brøker og rationale tal kan give. Hun giver derfor en god gennemgang af en del af forskningen på området fra 1960'erne og op til idag.

Også Wu (**wu:2014**; **s.35**) kommer med en gennemgang af nogle relevante aspekter fra den didaktiske forskning om rationale tal. Det er dog knap så uddybende, da han kun fokuserer på, hvordan man kan forbedre undervisningen og formidle brøker i 5-7.klasse. Denne aldersgruppe er også særlig interessant for mig, da de færreste ifølge Wu (**wu:2014**; **s.3**) lærer mere om brøker end der læres på dette niveau. Så den viden gymnasieelever forventes at have om brøker og rationale, afviger ikke meget fra det man må forvente en 7.klasses elev har af viden.

Jeg vil prøve at opridse nogle af de gængse didaktiske udfordringer som forskningen har arbejdet med ifølge Pinilla (**pinilla:2007**). Også andre forskere i matematikkens didaktik vil blive inddraget undervejs, bl.a. vil jeg suplere med Wu's (**wu:2014**) opsummering af forskningen.

Pinillas's artikel er mest en overgangsartikel, der ønsker at opsummere, hvad forskningen har arbejdet med inden for rationale tal. Wu derimod er matematiker og ikke forsker. Han fokuserer på, hvordan man kunne tilrettelægge undervisningen så forhåbentlig færre elever falder fra. Hans tilgang er matematisk og handler om at fokusere på den rene matematik. Han skriver meget essaypræget, hvor hans egne meninger fylder meget, uden at han har et egentlig empirisk grundlag at bygge det på. Wu's egen tekst er et bud på, hvordan man i praksis kunne præsentere eleverne for rationale tal på en stringent matematisk måde. Wu's tekst er ikke en forskningsartikel, men en rapport, hvor han forsøger at overbevise andre om hans egne holdninger.

Forskningen i perioden 1960-1980 fokuserede ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s.87**) på generelle spørgsmål om selve konceptet 'brøker' og på forskellige tolkninger af brøker, som fx forhold. Også operationer mellem brøker, især division, blev behandlet. Pinilla (**pinilla:2007**; **s.87**; **110**) nævner bl.a. at didaktikken omkring brøkbegrebet er mere kompleks end man troede, da der er så mange forskellige tolkninger (se tabel 2).

I løbet af 1980'erne bliver der udført mange grundige studier af udfordringer ved didaktikken omkring de rationale tal. Ud over et stort forskningsarbejde inden for læring generelt set, fokuserer forskningen i denne periode ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s.88**) på sammenligningen af værdien af brøker og decimaltal. Herunder også udfordringer ved at udvide de naturlige tal til brøker og decimaler, og udfordringer i forbindelse med de mange fortolkninger af begrebet brøker.

Det interessante ved denne periode er, ifølge Pinilla, især Guy Brousseaus artikler fra starten af 80'erne om decimaltal som en udvidelse af de naturlige tal, hvorefter de rationale tal kunne baseres på en udvidelse af decimaltallene (læs mere om dette i afsnit 2.3.3). Disse og andre artikler fra denne periode er med til at starte og udvikle den moderne forskning i matematikkens didaktik som vi kender idag, herunder udviklingen af **TDS!** og senere ATD. Men selvom Brousseau gav et nyt perspektiv til didaktikken omkring rationale tal, så var der stadig mange aspekter omkring problematikken ved de rationale tal som manglede at blive behandlet.

Der blev i denne periode også forsket videre i selve didaktikken om, hvordan operationer mellem brøker læres, der kom dog ikke yderligere relevante bidrag om division af brøker. I slutningen af denne periode blev desuden opstartet et længerevarende projekt om de rationale tal (**pinilla:2007**; **s.89**), hvor forskningen hidtil ellers havde fokuseret mere på selve brøkerne.

Ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s. 90-94**) er forskningen indenfor brøker, decimaltal og introduktionen af rationale tal fra 1990'erne til idag blevet meget omfangsrigt, og derfor sværere at kortlægge. 1990'ernes forskning handlede bl.a. om brøker i hverdagslivet, herunder foreslog nogen at bruge brøker som tal for mål af størrelser for at give brøker en konkret forståelse. Andre fokuserede på procentregningen som det centrale at lære i forhold til det virkelige liv. Flere dykkede ned i de udfordringer som studier fra 1980'ernes havde vist, at der var ved overgangen fra naturlige tal til brøker og decimaltal og foreslog bl.a. at bruge diagrammer til at håndtere de didaktiske udfordringer.

Noget nyt fra denne periode var også et stort fokus på enhedsbrøker som noget, man skulle bygge hele brøkforståelsen op på og hele tiden referere tilbage til. Der var bred uenighed om, hvor tidligt man skulle begynde at undervise om brøker. Nogle foreslog at begynde helt nede i børnehaveklassen.

I denne periode begyndte man også at arbejde med uklarheden om forskellen mellem division og brøker. Nogle arbejdede med udfordringen i at håndtere, hvornår brøker er lig med hinanden, mens andre fokuserede og analyserede de konkrete fejl som eleverne lavede når de arbejdede med brøker.

Noget jeg finder interessant er et fokus på at brøker og forhold er to begreber som burde præsenteres og udvikles samtidig. Det underbygger nogle af de tanker som jeg selv arbejdede med, da jeg skrev om den historiske udvikling af begreberne brøker og forhold (**kongshavn:2015**). Dette uddybes kort i afsnit 2.4.

I følge Pinilla (**pinilla:2007**; **s. 94-96**) begyndte der efter årtusindeskiftet diskussioner om konceptuelle problemer ved at lære brøker, mens studier i forhold og proportioner fortsatte med fokus på at forhold er en bestemt ordbetydning af brøker. Der blev også mere fokus på de didaktiske problemer ved selve repræsentationen af brøker, og man forsøgte at finde en mere effektiv repræsentation som eleverne lettere kan håndtere.

Pinilla (**pinilla:2007**; **s.101**) opridser nogle af de udfordringer, som forskningslitteraturen har pointere, at der kan være ved læringen af brøker. Oversigten kan ses i tabel 1. Den opsummerer nogle af de typiske udfordringer som elever verden over kæmper med.

Noget af det som Wu (**wu:2014**) finder problematisk i forskningen, er den manglende klarhed om, hvor vigtigt det er at undervise matematik præcist, og at se brøker som en del af selve matematikken. Han kritiserer (**wu:2014**; **s.35**) bl.a. noget af forskningen fra midt 90'erne, hvor eleverne gennem story-telling opnår eksperimental og informal viden. da han ikke mener at det giver stort nok fokus på matematisk viden.

Wu (**wu:2014**; **s.37**) fortæller om forskning fra midt 90'erne, som behandler matematikdidaktikkens kamp med at håndtere brøkregnereglerne, så det handler altså ikke kun om

NR.	UDFORDRINGER VED LÆRINGEN AF BRØKER
1.	Ordne brøker og decimaltal
2.	Operationer mellem brøker
3.	Håndtere ordene "lig med"
4.	Reducere brøker
5.	Håndtere ikke-standard-figurer
6.	Gå fra brøker til enheden
7.	Håndtere diagrammer, figurer og modeller

Tabel 1: Listen er et uddrag fra en liste fundet hos (**pinilla:2007**; **s.101**) hvor hun opremser en række udfordringer ved læringen af brøker som forskningslitteraturen har behandlet.

elevernes kamp med at håndtere viden om rationale tal, men også om de didaktiske udfordringer ved at undervise i denne viden. Han kommer også ind på forskning, som arbejder med kognitive sammenhænge mellem brøkernes forskellige "personligheder". Her kritiserer Wu (**wu:2014**; **s.37**) igen forskningen for, at den ikke har arbendet med hvordan en logisk matematisk præsentation af brøker kan give en bedre baggrund for disse "personligheder". Hans egen forskning er nærmest en modreaktion mod al den forskningslitteratur som påstår at en sådan matematisk logisk baggrund ikke findes. Det er vigtigt at huske på at Wu har et rent matematisk udgangspunkt og altså intet erfaringsgrundlag. Hans motivation er at justere matematikundervisningen så færre elever falder fra.

Wu's (**wu:2014**; **s. 39**) tilgang til forskningen er i det hele taget meget kritisk, da han mener at forskningen grundlæggende har grebet didaktikken omkring brøker forkert an, når fokus ikke har været at gøre matetikken central. Han kommer derfor også med flere gode forslag til fremtidens forskning, som han mener den bør dykke mere ned i, bl.a. for at eftervise om hans egne påstande holder stik. På den måde er han godt klar over, at hans nye matematiske vinkel på didaktikken omkring rationale tal ikke er mere gyldig, end at der er brug for grundig forskning og analyse af de effekter det giver på elevernes viden om brøker og rationale tal. Da Wu altså ikke selv arbejder empirisk, opfordrer han andre til at undersøge hans arbejde empirisk for at eftervise, om det har den ønskede effekt - nemlig at færre elever falder fra i undervisningen om rationale tal.

2.2 HVAD SKYLDES MANGLEN PÅ SUCCES?

Der har gennem tiden været mange bud på, hvad det er, der gør didaktikken omkring brøker og rationale tal så svært. Pinilla (**pinilla:2007**; **s.81**) mener, at manglen på succes i undervisningen af brøker ikke skyldes en ringe motivation blandt lærere og elever men i stedet skyldes måden brøker bliver præsenteret og undervist på.

Wu (**wu:2014**; **s.33**) er enig i at mange af de didaktiske udfordringer ikke skyldes elevernes manglende viden om brøker, men de bunder i selve undervisningen af brøker. Han kommer derfor med sit bud på, hvordan indførelsen af de rationale tal gennem matematisk korrekte instruktioner i 5-7.klasse kan forøge elevernes viden om brøker.

Så begge mener altså at det er selve måden brøker bliver undervist på, der er problemet, dvs. hele den tilgang man har haft til didaktikken indtil nu. Som nævnt tidligere mener Wu netop at forskningen har haft et forkert fokus, fordi de slet ikke har været klar over, at man godt kan undervise 5-7.klasseselever om rationale tal, brøkregneregler og decimaltal på en

NR.	BETYDNINGER OG REPRÆSENTATIONER AF BRØKER
1.	"Del-af-en-hel", fx del af pizza eller del af mængde
2.	Kvotient $\frac{a}{b}$, dvs. division $a : b$ som ikke er udregnet
3.	Forhold (ratio), dvs. et forhold mellem størrelser
4.	Operator
5.	Repræsenterer sandsynlighed
6.	Odds
7.	Rationale tal
8.	Tal på en tallinje
9.	Mål for længden af størrelser - især repræsenteret som decimaltal
10.	Kombinatorik
11.	Procent
12.	Hverdagssprog - fx "10 % stigning", eller "kvart i 4"

Tabel 2: Listen ses hos (**pinilla:2007**; **s.97**) og viser en lang række repræsentationer af de rationale tal

god og stringent matematisk måde. Dette er dog blot Wu's egen mening.

Wu (**wu:2014**; **s. 37-38**) fokuserer på at eleverne skal lære korrekt matematik, før de kan håndtere læreprocessen. Derfor skal matematikken være det primære i stedet for det pædagogiske eller kognitive, som mange andre forskere ellers har fokuseret på.

For eksempel bør decimaltal kobles direkte op på brøker så der ikke behøves en ny kognitiv viden om disse "nye" tal som en helt ny slags tal. Han skriver at decimaltal også historisk set blev introduceret via brøker. Ved på den måde at koble brøker og decimaltal direkte op på matematikken, bliver hele didaktikken og den viden der skal læres meget nemmere at gå til ifølge Wu. Problemet for forskningen har været at holde styr på de mange facetter, personligheder og repræsentantioner som eleverne støder på når de møder brøker. Så det Wu i virkeligheden ønsker, er at gøre det simpelt og få matematikken tilbage i fokus. Han har dog ingen evidens for effekten af sine idéer i praksis.

Ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s.96**) skyldes udfordringerne ved didaktikken omkring rationale tal og brøker de mange fortolkninger af brøker der opstår ud fra en tilsyneladende intuitiv definition af brøker. De mange betydninger som forskningslitteraturen har pointeret kan ses i tabel 2.

Pinilla kommenterer til de forskellige repræsentationsformer, at fx betydningen af brøker som rationale tal er en viden, der ikke kommer som en selvfølge. Når brøker ses som procentregning opnås en anden karakteristik af begrebet brøker. Når brøker placeres på en tallinje, taber de deres oprindelige betydning. I afsnit 2.3.1 ses det, at Wu er uenig i dette, da han mener, det er vigtigt at lære brøkernes placering på en tallinje for at give dem den matematisk logiske baggrund han ønsker. Dette afspejler forskellen mellem Wu's matematiske udgangspunkt og Pinilla der ønsker at sammenfatte forskningslitteraturens konklusioner.

Ifølge Pinilla er brøkernes betydning fra vores hverdagssprog langt fra den matematiske ide om, hvad brøker er. Der er mange facetter af brøker og disse mange betydninger er med til at gøre hele didaktikken omkring brøker mere kompliceret, da man ikke bare kan nøjes med at tage ét udgangspunkt men er nødt til at forholde sig til mange repræsentationsformer.

For Pinilla (**pinilla:2007**; **s. 98**) er konceptuel læring første skridt i matematisk læring og derfor skal begrebet brøker ikke kun konceptualiseres gennem én af dens betydninger. I stedet skal de forskellige betydninger af brøker undersøges og sættes i forhold til hinanden, så eleverne forstår forskellen og ligheden mellem de forskellige repræsentationsformer.

Wu (**wu:1999**; **1**) derimod kritiserer opdelingen af matematisk viden i matematiske færdigheder vs konceptuel forståelse, for de to ting kan ikke skilles ad. Man kan ikke lære et koncept uden at mestre den bagvedliggende teknik. Historisk set kunne de heller ikke udvikle koncepter uden at have teknikkerne på plads. Konceptuel tilgang bliver hurtigt overfladisk hvis man ikke lærer den basale metode. Hvis man fx har styr på sin gangetabel så giver det mere overskud til at lære mere avanceret matematik. Og hvis eleverne ikke lærer andet end det, der kan visualiseres, så får de svært ved at bevæge sig op på et højere abstraktionsniveau senere hen.

Ifølge Wu (**wu:1999**; **s.3**) kan didaktikken omkring brøker give udfordringer, hvis man fx ønsker at give en konceptuel forståelse af division mellem brøker så det ikke blot bliver udenadslære. Problemet er, at denne konceptuelle forståelse gives gennem simple brøker, og de kan derfor ikke tage deres forståelse med videre til mere komplicerede tilfælde. Derfor bør det understreges over for eleverne, at de mere komplicerede brøker ikke er anderledes, bare fordi de ikke kan visualiseres på samme måde som de simple brøker.

Division mellem brøker burde måske i virkeligheden defineres som multiplikation mellem brøker - se mere om dette i afsnit 2.3, så det understreges at division er det omvendte af multiplikation, for det kan være et problem for didaktikken omkring brøker, hvis deres viden om division er mangelfuld.

Ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s. 99**) er det et problem ved didaktikken omkring brøker, hvis læreren tror, at eleven kan lære konceptet om begrebet brøker ved blot at lære at manipulere med dens forskellige repræsentationsformer. Men det er en illusion, hvis læreren tror at det har medført en egentlig læring af begrebet brøker. Læreren er i stedet nødt til at blive bevidst om forskellen mellem erkendelse og betydning af ord.

Matematiske begreber er ikke fysisk til stede så vi kan kun repræsentere dem gennem forskellige ord og ordbetydninger. Hvis vi arbejder med brøker som del af en kage, så har vi ikke arbejdet med "brøker"men kun med "brøkdele af kagen". Vi kan overføre det til en anden repræsentationsform, fx rektangler, men det bidrager ikke til en grundigere viden om, hvad brøker er. Når brøkerne senere hen tages op på et mere abstrakt plan, er det et problem, hvis selve begrebet brøker er forankret i de konkrete repræsentationsformer. Så Pinilla er inde på lidt af det samme her som Wu, da hun også ser problematikken om at føre begrebet brøker videre på et mere abstrakt niveau, hvis den viden om brøker de har har opnået i det simple tilfælde ikke bygger på grundlæggende færdigheder men kun på situationsbestemt viden.

Ifølge Pinilla (**pinilla:2007**; **s.2**) skyldes de didaktiske udfordringer ikke kun selve matematikken omkring begrebet brøker. Der kan nemlig også være nogle didaktiske udfordringer som fx bunder i at eleverne ønsker at "please" læreren og dermed undlader at få uddybet deres viden om brøker ved at lade være med at tale om det, de er i tvivl om.

Det kan også være, at eleverne i mødet med de mere abstrakte brøker bliver så overvældede af det nye abstraktionsniveau, at de straks føler det som nederlag. Da kan de ifølge Wu (**wu:2014**; **s. 3**) begynde at frygte brøker, fordi de mangler et naturligt referencepunkt. Han foreslår, at præcise definitioner og tankegange kan forebygge fiasko i mødet med det mere abstrakte. Frygten for brøker findes ikke i de små klasser, men opstår netop i mødet med det abstrakte, og det kan være svært for lærere senere hen at komme denne frygt til livs.

NR.	SPØRGSMÅL OM MULTIPLIKATION MELLEM BRØKER
1.	Løs følgende opgave (skriv dine udregninger ned, tak): $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} =$
2.	Kryds af hvilket udsagn der er korrekt:
	Når jeg ganger to brøker er resultatet
	[i] altid større end de to brøker
	[ii] altid mindre end de to brøker
	[iii] nogle gange større, nogle gange mindre end de to brøker
3.	Find et ord-problem som kan løses ved hjælp af
	følgende udregning: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Tabel 3: Spørgsmålene stilles til 81 elever i 7.klasse for at undersøge, hvor mange der fejlagtigt tror at "multiplikation gør større", og hvordan denne viden påvirker deres evne til at arbejde med multiplikation af brøker (**prediger:2006**; **s. 7**)

.

Det er problematisk, hvis undervisningen i brøker ikke bliver grebet rigtigt an fra starten af. Et tidligt indtryk af brøker fx gennem ideen om "del-af-en-hel" kan gå fra at være et førstehåndsindtryk til at være selve elevernes model for, hvad en brøk er. Dette problem kan opstå, hvis læreren ikke får udfordret eleverne i deres viden om brøker gennem en løbende udvidelse af konceptet. Hvis en forkert model er blevet selve elevens udgangspunkt for, hvad en brøk er, så kan de få svært ved at slippe billedet om, at en brøk ikke kan være det hele eller større end det hele. Eller tilsvarende, hvis man kun arbejder med cirkler eller rektangler, så får de svært ved at føre deres viden med videre til andre figurer senere hen, fordi de har bundet hele konceptet om brøker op på en bestemt model.

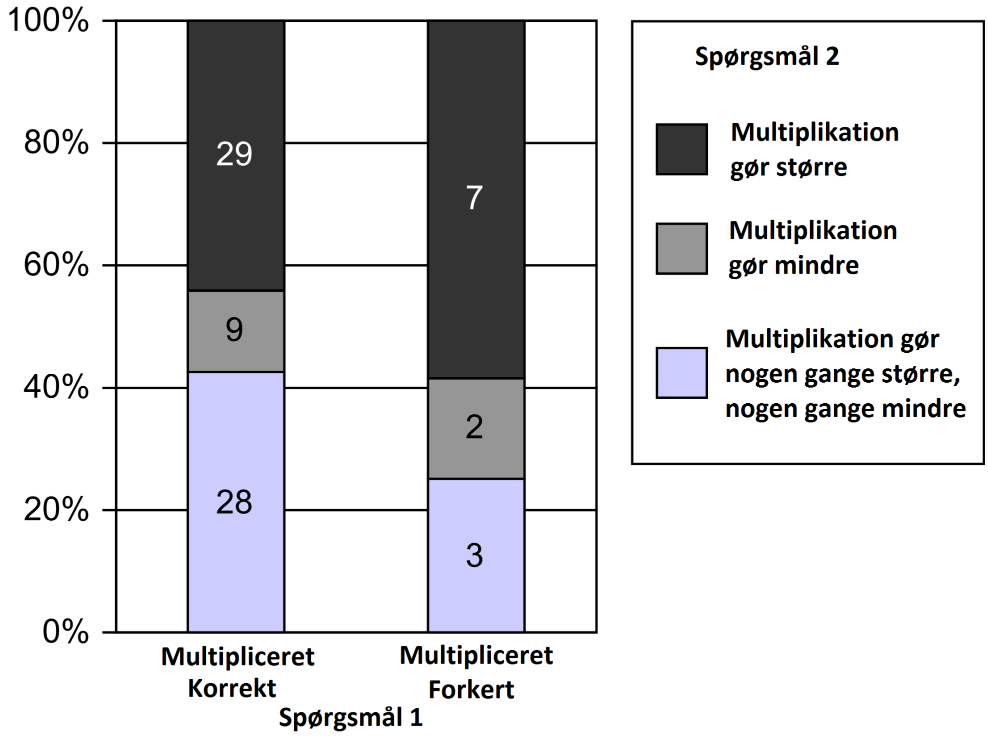
Prediger (**prediger:2006**) baserer i modsætning til Pinilla og Wu sit arbejde på empirisk analyse. Hun har ikke blot en mening om didaktiske forhindringer ved rationale tal, men også empiriske undersøgelser, der underbygger hendes konklusioner. Disse er opsamlet gennem observationer af undervisning.

Prediger har et godt eksempel på, hvordan et første indtryk af multiplikation kan gøre det svært for eleverne at håndtere den nye viden om brøker. Mange elever tror fejlagtigt at "multiplikation giver et større tal"og denne viden tager de med sig ind i brøkregningen. Det svære er transitionen fra naturlige tal til brøker. Der er et stort spring mellem deres viden om algoritmen for multiplikation og deres viden om, hvilken betydning brøker og decimaltal har.

Her skelner Prediger mellem elevernes viden om de matematiske regler, som fx at "multiplikation gør tal større"og deres viden om, hvad multiplikation betyder, fx "multiplikation er gentagen addition".

Prediger laver en interessant undersøgelse af 81 elever fra fire tyske 7.klasser, hvor de skal svare på spørgsmålene som ses i tabel 3. Hun ønsker med undersøgelsen at finde ud af, om elevernes opfattelse af, hvad multiplikation er, påvirker deres viden om, hvordan man ganger to brøker sammen. I figur 1 ses resultatet af undersøgelsen, hvor der er lavet en sammenligning af de to første spørgsmål.

Det interessante i figur 1 er, at selvom $\frac{68}{81} \approx 84\%$ faktisk var i stand til at multiplicere korrekt i spørgsmål 1, så var det kun $\frac{28}{68} \approx 41\%$ af dem, der svarede rigtigt, som var klar over at



Figur 1: Diagrammet viser sammenhængen mellem de to første spørgsmål i undersøgelsen fra tabel 3, dvs. mellem misforståelsen "multiplikation gør større"og evnen til at udføre multiplikation mellem brøker. Tallene i boksene er antallet af elever. Der var 81 elever i undersøgelsen, heraf svarede to elever ikke på spørgsmål 2, men korrekt på spørgsmål 1, og er derfor ikke inkluderet i diagrammet.
(**prediger:2006; s. 8**)

multiplikaton både kan gøre større og mindre. De har lige udregnt et regnestykke, hvor resultatet blev mindre, og alligevel svarer $\frac{29}{68} \approx 43\%$ at multiplikation altid gør større. Dette kan skyldes, at de, udover ikke at vide, hvad multiplikation betyder, heller ikke har tilstrækkelig viden om, hvordan man sammenligner brøkers orden. Derfor har de ikke reflekteret over, at de faktisk fik et mindre resultat end de oprindelige brøker som de gangede sammen.

Der tegner sig også et tydeligt mønster på figur 1, når man ser på dem der regnede spørgsmål 1 forkert. En større del af dem, nemlig $\frac{7}{12} \approx 58\%$, forventede at multiplikation altid gør større, mens kun $\frac{3}{12} \approx 25\%$ af dem svarede rigtigt på spørgsmål 2. Så det ses, at dem der har svært ved at udføre multiplikation faktisk også har mere begrænset viden om, hvad multiplikation gør.

Det skal bemærkes, at undersøgelsen kun er lavet i lille skala, men det kan give et indblik i de didaktiske udfordringer man kan møde i arbejdet med brøker. Desuden har en lignende israelsk undersøgelse (**prediger:2006**; **s.8**) fået et tilsvarende resultat, hvor kun 40% af dem der kunne udføre multiplikation korrekt havde en matematisk korrekt viden om hvad brøker er. Dette skal sammenlignes med Prediger's 41%, så de to uafhængige empiriske undersøgelser stemmer godt overens.

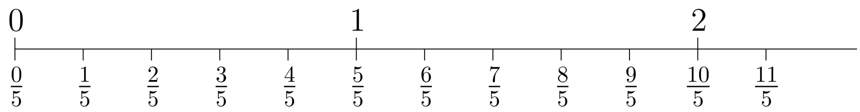
Didaktisk kan man sige, at det ikke er nok at lære dem selve formlen for fx at multiplicere en brøk. De har også brug for at få forøget deres viden om, hvad multiplikation er, da de kan have nogle forkerte forestillinger med sig fra de mindre klasser. Ifølge Prediger (**prediger:2006**; **s.6**)er problemet for de elever, der ikke vidste at multiplikation både kan gøre større og mindre, at de er låst fast i tankegangen om at multiplikation er "gentagen addition".

I spørgsmål 3 i tabel 3 undersøger Prediger også elevernes evne til at formulere ord-problemer, der kan løses ved hjælp af multiplikation mellem brøker. Dette har mange af eleverne også svært ved. Faktisk var det kun $\frac{12}{81} \approx 15\%$ som var i stand til at lave en fuldstændig korrekt model, hvoraf hele $\frac{38}{81} \approx 47\%$ ikke svarede meningsfyldt på opgaven. Heraf kan man bl.a. konkludere, at eleverne måske slet ikke forstod, hvad der mentes med en "ord-opgave". Men, det viste sig også, at jo bedre modeller eleverne lavede, des flere havde forstået, at multiplikation gør både større og mindre, så igen viser det, at det hele hænger sammen. En bedre viden om hvad multiplikation er, gør det også nemmere for eleven at anvende reglen om at multiplicere brøker. Prediger mener, at det er godt for eleverne at skulle formulere virkelige modeller, hvor multiplikation bruges, hvis de skal indse, at "multiplikation ikke gør større hver gang".

Gennem interview (**prediger:2006**; **s. 11**) viste det sig, at dem der så brøker som "en-del-af-en-hel" havde svært ved at anvende multiplikation, fordi de så to forskellige pizzaer for sig og de kunne derfor ikke se, hvordan man kan gange pizzaer sammen. Tilsvarende gav det heller ikke mening for dem som så multiplikation som gentagen addition, for man kan jo ikke lægge en brøk sammen med sig selv en tredjedel gange.

Dette viser, hvordan et førstehåndsindtryk af fx multiplikation går direkte ind og bliver en forhindring i at tilegne sig korrekt viden om brøker. Man skal altså være opmærksom på den didaktiske udfordring der ligger i at få afdækket og fornyet elevernes viden.

En anden problematik er, som Pinilla (**pinilla:2007**; **s.89**) skriver, at skolen er langsom til at assimilere den viden forskningen fremlæggger. Så selvom forskningen gennem tiden også har haft nogle gode pointer undervejs og bl.a. har indset udfordringerne omkring brøker og decimaltal i forhold til naturlige tal, og har indset behovet for at håndtere forhold og brøker sideløbende, så er der altså meget langt fra forskningen og ud i klasselokalet.



Figur 2: Tallinjen kan ifølge Wu (**wu:2014**) nemt opdeles i bestemte brøkdele, som fx femte-dele som her, hvorefter brøkers placering kan aflæses direkte, fx findes nu nemt placeringen af $\frac{7}{5}$. (**wu:2014**; **s. 6**)

Det betyder også, at selvom Wu mener at have fundet en god didaktisk vinkel på undervisningen af brøker og rationale tal, så går der stadig mange år før forskningen er færdig med dette område og før disse tanker er blevet implementeret i læreruddannelserne og i skolebøgerne.

2.3 EN DIDAKTISK VINKEL PÅ RATIONALE TAL SOM LOGISK BAGGRUND FOR BRØKER

I afsnit 3.1 kommer jeg mere ind på selve den matematiske baggrund for de rationale tal. I dette afsnit vil jeg i stedet komme ind på et par tanker om, hvordan man didaktisk kan bruge de rationale tal som fundament for den viden om brøker, som elevernes skal tilegne sig.

2.3.1 *Wu's tilgang*

Ideen i Wu's (**wu:2014**; **s.4**) tilgang til didaktikken omkring brøker er at koble brøker op på de rationale tal for at føre brøker op på et højere abstraktionsniveau på en måde, hvor der tages direkte afsæt i den stringente matematik.

Wu's baggrund er som nævnt tidligere rent matematisk. Det kan være hans styrke, at han har gjort sig nogle mere epistemologiske overvejelser, men samtidig skal man huske på, at han ikke er en del af den didaktiske forskningsverden og ikke bygger sin viden på empiriske undersøgelser.

I tabel 4 kan ses et overblik over Wu's generelle tilgang til undervisningen af brøker. Tabellen giver et godt indblik i, hvad han mener er relevant at lære eleverne i 5.-7.klasse og dermed også, hvad gymnasieelever burde vide.

Først definerer han begreberne og beviser brøkerne og deres regneregler matematisk stringent i A-J. Derefter kobler han i K) brøkerne på begreber som procent, forhold og rater, hvilket er nogle af de andre repræsentationsformer som man kan møde, når man arbejder med brøker. Hele tiden forsøger han at have matematikken og dens logiske opbygning i fokus gennem præcise definitioner og beviser. Efterfølgende gennemgår han det hele så at sige forfra i L-Q, hvor han i stedet har indført de rationale tal ved at udvide brøkerne med negative tal. Igen guider han igennem en præcis og konsistent gennemgang af rationale tal og deres opbygning og regneregler.

Han ønsker (**wu:2014**; **s. 4**) også at koble brøkerne til tallinjen for at give eleverne et naturligt referencepunkt, som kan tilsvare vores fingre som referencepunkt til at tælle naturlige tal. Gennem tallinjen kan koblingen mellem decimaltal og brøker bedre ses. Tallinjen har også den fordel, at den som repræsentationsform kan håndtere alle slags brøker, hvorimod fx en pizza-model begrænser sig til brøker mindre end 1 og i det hele taget fungerer bedst med simple brøker.

En brøk kan enkelt placeres på tallinjen ved at dele tallinjen op i det pågældende antal brøkdele. Fx som på figur 2 kan alle femte-dele lokaliseres hvis tallinjen deles op i femte-dele,

A) Definition af brøker på tallinjen som antallet af delstykker, tallinjen er inddelt i, herunder definition af decimaltal som brøker med nævner 10^p. (**wu:2014; s.4**)

B) Bevis for ens brøker ud fra definitionen af brøker på en tallinje, herunder forlængning, forkortning og den logiske konsekvens, at brøker kan opnå fælles nævner. (**wu:2014; s.7**)

C) Bevis for at brøker er division mellem to tal, herunder at det er længden af et delstykke på tallinjen. (**wu:2014; s.9**)

D) Addition af brøker, herunder addition af decimaltal som addition af længder på tallinjen og addition af blandede brøker. (**wu:2014; s.10**)

E) Sammenligning af brøker og decimaltal (**wu:2014; s.13**)

F) Subtraktion af brøker og blandede brøker (**wu:2014; s.14**)

G) Multiplikation af brøker, herunder sammenligning med hverdagen hvor vi drikker en bestemt del af en brikjuice eller udregner arealer (**wu:2014; s.15**)

H) Præsentation af division af brøker som det omvendte af gange og som en konsekvens af en præcis definition af division, herunder også division af decimaltal. (**wu:2014; s.17**)

J) Udvider til komplicerede brøker som indeholder decimaltal (dette vigtige skridt udelades ofte af andre). (**wu:2014; s.19**)

K) Procent, forhold og rater relateres direkte til brøker gennem præcise definitioner. (**wu:2014; s.21**)

L) Negative tal defineres matematiske og stringent og talbegrebet udvides matematisk korrekt til de rationale tal, herunder vises de rationale tals orden. (**wu:2014; s.23**)

M) Addition af rationale tal defineres matematisk stringent og kobles til vektorer på en tallinje. (**wu:2014; s.25**)

N) Multiplikation af de rationale tal defineres matematisk stringent, herunder eftervises hvorfor minus gange minus giver plus. (**wu:2014; s.28**)

P) Division af rationale tal bevises tilsvarende punkt H) ved at behandle det som det modsvarende til multiplikation, herunder placering af minussymbolet i brøker (**wu:2014; s.30**)

Q) Sammenligne rationale tal, herunder defineres ulighedstegnet (**wu:2014; s.31**)

Tabel 4: Overblik over Wu's generelle tilgang til undervisningen af brøker i 5-7.klasse for så kan man nemt og intuitivt derudfra tælle antal femte-dele, indtil man fx kommer til $\frac{7}{5}$. Dermed får man ideen om brøkers orden koblet til tallinjen, da man efterfølgende kan placere andre brøker ved at dele tallinjen op i nye dele.

Det er vigtig for Wu (**wu:2014**; **s. 35-36**) at præsentere brøker i lyset af den stringente matematik. Han mener, at vi svigter eleverne, hvis vi lukker øjnene for det abstraktionsniveau, som brøkerne kan hjælpe med at bringe eleverne op på. Vi kan ikke nøjes med at give dem konkrete figurer, men er også nødt til at forklare formlerne bag brøkregningen, for at de lærer at mestre disse færdigheder uden at blive skræmte, når de kommer til multiplikation og division af brøker. Hvis de blot lærer, hvordan man multiplicerer, men ikke lærer hvad multiplikation er, kan de ikke forstå "ord-opgaver, men det er nyt for skolematematikken at multiplikation kan forklares i en matematisk stringent kontekst.

Wu's (**wu:2014**; **s.17-18**) tilgang til division mellem brøker er at vende tilbage til definitionen af division som det modsatte af gange. Det demonstrer ret godt hans fokus på hele tiden at være matematisk stringent og bygge direkte oven på matematikken.

Først definerer han divisionen af a med $b \neq 0$, i symboler $\frac{a}{b}$ hvor a er et multiplum af b, som det hele tal c der opfylder at $c \cdot b = a$, så divisionen er altså blevet til en multiplikation.

På samme måde definerer han så for brøker at divisionen mellem to brøker A og $B \neq 0$ netop er brøken C som opfylder at $A = C \cdot B$. Igen, for at være stringent, beviser han både, at denne brøk C findes, og at den er unik. Selve beviset er ikke svært, da han blot bruger forlængelse af brøker og reglerne for multiplikation mellem brøker.

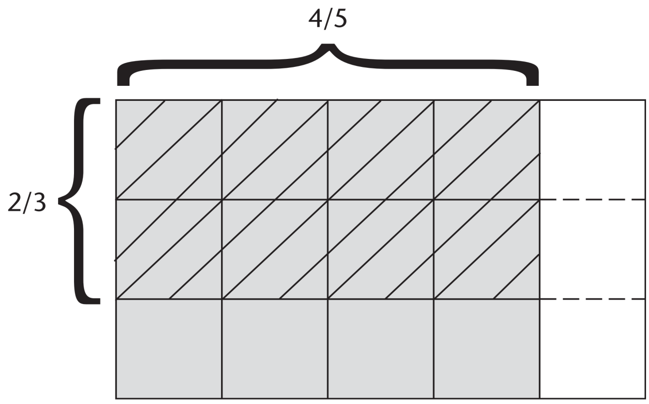
Så mødet med disse simple beviser er ikke kun med til at forøge elevernes viden om brøker men også at gøre dem trygge ved matematiske beviser, så de er forberedte på det abstraktionsniveau der møder dem senere hen.

2.3.2 *Sultan and Artzt's tilgang*

Sultan and Artzt's bog (**uvmat:2014**) bliver bl.a. brugt på Københavns Universitet i kurset "Matematik i undervisningsmæssig sammenhæng (UvMat)"og mønter sig især på kommende gymnasielærere og de didaktiske udfordringer de vil møde i et fremtidigt job.

Sultan and Artzt's (**uvmat:2014**) pointerer, at mange matematiklærer i gymnasiet oplever det som en stor hæmsko for læringen af algebra, at eleverne er så forvirrede over deres viden om brøker. Problemet er især, at brøkregnereglerne ikke giver mening for dem. Det bliver især problematisk, hvis gymnasielærerne ikke engang selv ved, hvordan de skal forklare eleverne hvorfor regnereglerne gælder, fx hvorfor man må gange med den omvendte: $\frac{1/2}{3/5} = 1/2 \cdot 5/3$.

Bogens tilgang er, at begynde med at illustrere operationerne visuelt i et rektangel og vise at fx multiplikationen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ er det samme som at tage $\frac{2}{3}$ "af" $\frac{4}{5}$ af et rektangel og herefter se, hvor stor en del af hele rektanglet man har, jvf. figur3. Men det er vigtigt, at reglerne efterfølgende defineres for generelle brøker og udvides til at gælde for alle rationale tal. De definerer også brøker som en kvotient af irrationale tal, men denne definition af brøker vil jeg ikke arbejde med her i opgaven. De grundlæggende egenskaber ved tallene som fx distributive og associative love bevises også. Så bogen starter altså ud med at tage udgangspunkt i en visuel præsentation, som eleverne kan følge. I modsætning til Wu vælger de dog rektangler i stedet for tallinjer, men efterfølgende forsøger bogen, ligesom Wu , at give eleverne en dybere viden om brøker, ved at vise hvordan brøkreglerne er fremkommet og efterfølgende koble det op på de rationale tal.



Figur 3: Multiplikation af brøker kan illustreres i et rektangel ved at sige at man tager en bestem brøkdel "af"en anden brøkdel af rektanglet og så ser på hvor stor en brøkdel det nye område udgør af hele rektanglet.
(**uvmat:2014**; **s. 225**)

Division mellem brøker vises på flere måder, bl.a. (**uvmat:2014**; **s. 227**) ud fra "den gyldne regel" om, at man kan forlænge og forkorte en brøk. En anden måde det vises på, er ved at se brøker som det modsatte af multiplikation, ligesom Wu gør. Ved at se division som gentagen subtraktion, ligesom multiplikation er gentagen addition, så formår de også at give en forklaring på, hvorfor man ikke kan dividere med 0, for der findes ikke noget svar på, hvor mange gange man kan trække 0 fra 15 for at få 0. De medtager dette, da nogle elever kan have svært ved at acceptere hvorfor division med nul er så bandlyst i matematikken.

Det er især i bogens hypotetiske læreropgaver HLO, at man får et ordentligt indblik i de didaktiske udfordringer man kan stå med som gymnasielærer.

Én af de didaktiske udfordringer som opgaverne (**uvmat:2014**; **s.230**) hiver fat i, er elevernes viden om, hvordan man forkorter en brøk. Fx tror flere fejlagtigt at $\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{x^2}{x} + \frac{-25}{-5} = x+5$. Den største didaktiske udfordring her er, at få eleven til at indse sin fejl, da metoden i sådanne tilfælde desværre giver det rigtige svar

En anden udfordring som bogen (**uvmat:2014**; **s.231**) tager op, er spørgsmålet om, hvor mange rationale tal vi kan finde mellem 0 og $1/2$. Her introduceres tallinjen som ideel til at visualisere tætheden af rationale og irrationale tal. Bogens tilgang er at arbejde med elevernes viden om reelle tal.

Også spørgsmålet om, hvorfor minus gange minus giver plus tages op. Der gives i første omgang ikke noget direkte bud på, hvordan det skal gøres, men bogen lægger op til at lærerne selv reflekterer over, hvordan dette kan præsenteres. Senere præsenteres en matematisk forklaring baseret på distributive, kommutative og associative love. Wu har også tænkt denne didaktiske problemstilling med ind i sit materiale, da han vælger at sætte tid af til at bevise dette for eleverne jvf. punkt N i tabel 4.

I det hele taget lægger Sultan and Artzt (**uvmat:2014**; **s. 253**) vægt på, at den matematiske bevisførelse kan bruges didaktisk til at håndtere elevernes behov for at "forstå" brøkreglerne. Wu har samme fokus på bevisførelsen, men forskellen er, at Wu ser sit materiale som et forslag til pensumgennemgang af brøkregningen i 5.-7.klasse, mens Sultan and Artzt fokuserer på gymnasielærerne og den viden de har brug for, for at kunne formidle viden om brøker og rationale tal videre til gymnasieelever. Men alt i alt er det meget samme fokus og indhold de arbejder med, hvilket understreger det som Wu siger, nemlig at viden om brøker ikke forøges væsentligt fra 7.klasse og fremefter, da der ikke er meget mere pensum der skal fyldes på.

2.3.3 *Brousseau's tilgang*

Som nævnt i afsnit **??** var Brousseau's forskning fra start 80'erne om decimaltal og brøker med til at starte hele den moderne matematikdidaktik. Brousseau's arbejde fra dengang og hans videre arbejde med brøker og decimaltal er senere hen udkommet i en bog (**brousseau:2014**), og det er denne bog jeg vil tage udgangspunkt i her.

Brousseau har en eksperimentiel tilgang til matematikken og den didaktiske forskning. Han arbejder ikke med henblik på ideel undervisning men med fokus på at afprøve og observere didaktiske ideer, herunder især undervisningsforsøg med at teste hans idé om **TDS!**. Hans ideer er blevet udført i praksis af lærere på den forskningsskole i Frankrig han har været med til at stifte, og undervisningen er blevet observeret af forskere. Materialet om decimaltal og brøker var centralt i forskningen omkring testningen af TDS (**brousseau:2014**; **s. 6**) og hans pensum er blevet udført i 5.klasser i over 20 år, dog med små revisioner fra lærerne undervejs.

Brousseau er i tvivl om rationale tal bør være en del af undervisningen, men det er en del af det nationale pensum i Frankrig, så han kan ikke bare fjerne det fra pensum. Derfor undersøger han, hvordan rationale tal og decimaler kan blive ordentlig konstrueret for eleverne. Herigennem har han også undersøgt, hvordan der er blevet undervist i rationale tal og decimaltal i forskellige historiske kontekster og kulturer.

En væsentlig årsag til udfordringer ved didaktikken omkring rationale tal er, at selvom rationale tal bruges på mange forskellige måder, fx måling, proportioner, operationer, osv. så undervises der som om, alle betydninger er det samme. Der er altså meget lidt fokus på forskellen mellem de forskellige karakteristika som hver repræsentationsfrom har. Dermed tvinges eleverne til at acceptere lærernes påstande uden at få en sammenhængende viden om konceptet. Denne problematik har inspireret Brousseau's (**brousseau:2014**; **s.5**) valg af pensum i gennemgangen af decimaltal og rationale tal.

Studiet af rationale tal og decimaltal giver eleverne mulighed for at forberede sig på den mere reflektive og formelle matematik som de møder senere hen, når de skal arbejde med symboler, algebra og analyse. Dette er også hvad Wu og andre har været inde på.

Ofte tilrettelægges undervisningen så progressionen i timen ikke er for stor for at eleverne kan "følge med", men det har vist sig, at det nogle gange kan være mere effektivt at bevæge sig op på et mere komplekst plan, når der skal arbejdes med dybere og mere specifik viden (**brousseau:2014**; **s. 8**). Undervisningsforløbet i sig selv er bygget op af moduler, som yderligere er inddelt i undervisningslektioner. I appendix **??** har jeg lavet en kortere gennemgang af hvert modul, men her vil jeg blot komme med et oprids af Brousseaus tanker.

Hele formålet med dette pensum har været at få regnereglerne til at give mening for eleverne, så de ikke bare bliver til hovedløse algoritmer. Dette er gjort ved bl.a. at anvende brøkregnereglerne på virkelige situationer. Fx skal eleverne arbejde med sammenhængen mellem antal papirark og tykkelsen af et enkelt ark papir for derved igennem at arbejde med forhold. Eleverne skulle senere prøve at skalere et puslespil korrekt op.

Eleverne skulle efter den praktiske øvelse anvende 'pile'-diagrammer til at beskrive den bagvedliggende udregning. Gennem en lang række moduler som langsomt blev bygget op, blev eleverne mødt med mere og mere abstrakt matematik og de var selv med til at udvikle brugbare brøkregneregler.

Baggrunden for Brousseaus valg er konstruktivistisk. Viden er noget vi konstruerer i hjernen, nærmere end det er noget vi absorberer i hjernen. Derfor har eleverne selv været med til at konstrurere deres viden og indse hvilke regneregler der giver korrekte svar.

Brousseau (**brousseau:2014**; **s.132**) ser det som meget misvisende, hvis man kun tester eleverne for den konkrete, bevidste viden, kaldet referenceviden (savoirs) som de kan lire af sig. For også den generelle viden (connaissances), som består af deres indtryk, føling og overblik over en viden har afgørende betydning for den viden de rent faktisk sidder med. Og dén viden kan være svær at teste i en almindelig test. Det kan i stedet gøres i arbejdet med situationer, hvor mange flere aspekter af deres viden kommer i brug.

Undervisning er en balancegang ifølge Brousseau (**brousseau:2014**; **s.140**), hvor det er vigtigt, at man ikke institutionaliserer for hurtigt, da mange elever i så fald ikke når at forstå den viden de møder, hvorved det blot bliver en algoritme. Samtidig skal man heller ikke vente for længe, så elevernes viden bliver for grundfæstet i deres egne forestillinger og "forkerte"modeller som kan opstå jvf. Prediger.

2.4 GENERELLE UDFORDRINGER

Ifølge Sultan and Artzt (**uvmat:2014**; **s. 224**) bliver elevernes udfordringer ved de rationale tal til store begrænsninger i mødet med algebra.

Ifølge Poulsen (**caroline:2015**; **s.10-11**) er der store udfordringer i overgangen fra folkeskolen til gymnasiet, hvor eleverne oplever at tærsklen er for stor og gymnasielærerne oplever, at eleverne slet ikke er klar til at håndtere det højere abstraktionsniveau der inkluderer beviser og forståelse af opgaver. Eleverne har altså svært ved at bevæge sig op på et højere niveau end blot direkte udregning af opgaver. Dette højere abstraktionsniveau er som nævnt tidligere noget, som flere mener, at arbejdet med de rationale tal kunne have trænet eleverne i i folkeskolen, hvis de var blevet undervist mere matematisk stringent i de rationale tal og deres regneregler og tilhørende beviser.

Ud over det højere abstraktionsniveau i arbejdet med algebra, er det også vigtigt i det hele taget at kunne mestre teknikkerne fra de rationale tal, for at kunne håndtere manipulation af bogstavudtryk. Og dér er det igen problematisk, at eleverne ikke mestrer disse teknikker fra folkekolen korrekt, når man tænker på hvor mange andre teknikker de også skal lære at mestre inden for algebra.

Wu (**wu:2014**; **s.39**) mener at en gradvis forøgelse af symboler i diskussionen om rationale tal kan forbedre tilgangen til algebra. Sultan and Artzt er enig i dette, jvf. afsnit 2.3.2. Denne symbolisering kan de fx møde gennem beviser for brøkregnereglerne, hvor der er mange muligheder for at præsentere brøker med bogstaver i stedet for tal. På den måde bliver introduktionen til algebra blot generaliseret aritmetik.

Nogle mener, at denne tilgang blander algebra for meget sammen med aritmetik, så derfor efterspørges der mere forskning på området, da disse matematiske synspunkter ikke har fået nok opmærksomhed i forskningslitteraturen. Selv mener Wu (**wu:2014**; **s.40-42**) at man gennem brugen af symboler kan lære at skelne mellem variabler og konstanter, hvilket giver en klar fordel i mødet med algebra. Han ser aritmetik som grundlæggende for algebra da en simpel ligning ikke kan løses uden brug af regneoperationerne. I virkeligheden behandler man "de ubekendte"som tal og dermed kan aritmetikken bruges.

Gennem denne tilgang (**wu:2014**; **s.3**) til division bliver brøkreglen om at "gange med den omvendte" ikke bare til en hovedløs metode de skal udføre, men de får samtidig også en dybere viden om hvordan denne regel skal forstås.

Sultan and Artzt (**uvmat:20014; s. 235-241**) vælger at lade en intuitiv og stringent gennemgang af brøker og rationale tal blive efterfulgt af mere abstrakt gennemgang af distributive, kommutative og assoicative love for efterfølgende at kunne bevise mange af de underliggende spørgsmål som mange elever kæmper med inden for grundlæggende algeba, som fx at $x + x \neq x^2$ (**uvmat:20014; s. 240**). Herigennem bliver det at føre brøker op på et mere abstrakt niveau netop døråbneren ind til algebra.

2.4.1 *Udfordringer knyttet til den historiske udvikling*

Idag ser vi forhold og brøker som repræsentationer for det samme - nemlig rationale tal. Brousseau (**brousseau:2014**) lod elevernes første møde med brøker være gennem arbejdet med forhold mellem antallet af ark papir og tykkelsen af stakken.

Hvis man læser Euklids "Elementer", vil man opdage, at de antikke grækere havde en tydelig skelnen mellem forhold, tal og størrelser. Jeg har tidligere skrevet et historisk projekt (**kongshavn:2015**) om, hvordan disse begreber siden dengang har udviklet sig til idag at være repræsentationsformer for det samme begreb. Den historiske udvikling er interessant, hvis man vil blive klogere på nogle af de didaktiske udfordringer vi møder ved de rationale tal idag. Derfor vil jeg her give en opsummering af de vigtigste pointer fra den historiske udvikling.

Hos Euklid kan egenskaber ved tal ikke overføres til størrelser og omvendt. Et forhold er en sammenligning, hvor størrelser eller tal kan være større end, mindre end eller lig hinanden. Han definerer kun forhold mellem størrelser af samme slags, så man kunne ikke sammenligne fx tider og strækninger, eller antal ark og tykkelser.

Euklids største anvendelse af begrebet forhold mellem størrelser er i geometrien, men forhold bliver på dette tidspunkt absolut ikke set som tal i sig selv. Derfor kan man ikke bruge de operationer på forhold som man kan på tal, og man kunne altså heller ikke tale om regneregler for forhold. På trods af dette havde Euklid stadig en masse sætninger hvis indhold minder om de brøkregneregler vi kender idag.

I middelalderen begyndte den tydelige skelnen mellem tal og størrelser at blive mere udflydende, da man identificerede en størrelses mål med et tal. Fx kunne længden af en linje identificeres med et tal som angav den faktiske målbare længde.

Man begyndte også at udføre "compounding" mellem forhold, hvilket er en tidlig form for multiplikation. Metoden baserede sig i virkeligheden på en sætning hos Euklid, men i middelalderen er det mere blevet til en regneregel man må udføre mellem forhold.

Man begyndte også at relatere forhold med en "denomination", som var et tilhørende tal som repræsenterede forholdet uden dog at være det samme som forholdet. Denomination svarer til det vi idag vil kalde uforkortelige brøker, dvs. det var et tal som repræsenterede forholdet i dets kortest mulige form. Fordelen ved denomination var nu, at man kunne afgøre lighed mellem forhold ved at afgøre lighed mellem deres tilhørende denominationer. Man kunne også udføre fx compounding mellem forhold ved at udregne multiplikation mellem denominationer.

I middelalderen var de stadig forsigtige med at snakke om forhold mellem forskellige størrelser, men i takt med at de udviklede begrebet hastighed blev deres håndtering af forhold også ændret.

I renæssancen kom det virkelige gennembrud inden for teorien om proportioner. Størrelser blev relateret direkte til deres værdi, så forskellen mellem størrelser og tal forsvandt. Det betyder, at forhold ikke længere var noget man fandt mellem størrelser men mellem tal.

Forhold mellem størrelser/tal blev relateret til deres numeriske værdi og ikke blot repræsenteret som en denomination. Det betyder, at man begyndte at have et reelt brøkbegreb, hvor man faktisk så brøker som tal man kunne operere med, selvom begrebet på dette tidspunkt ikke var færdigudviklet. Forhold begynder altså at blive identificeret mere med brøker i løbet af renæssancen og var ikke længere blot et matematisk objekt.

Galilei vendte tilbage til Euklids notation i stedet for den mere algebraiske notation som var blevet udviklet gennem renæssancen. I hans tilgang til fx det frie fald og hastigheder ser man, at det ikke længere er et problem at håndtere forhold mellem forskellige størrelser.

Newton derimod genoptog den algebraiske notation og i løbet af det 17.århundrede begyndte man at arbejde med forhold mellem funktionelle udtryk. Med udviklingen af funktionsbegrebet i det 18.århundrede blev teorien om proportioner udviklet til at minde mere om det vi kender idag.

Indtil da var forhold noget som havde samme relation som den tilsvarende brøk, men man var endnu ikke begyndt at identificere brøker fuldstændigt med forhold. Men mere og mere begynder at man at se forhold og brøker som det samme.

De første tegn på denne identificering er, at man begynder at bruge samme notation for både brøker og forhold.

Senere ser man hos Euler tre begreber: kvotient, brøk og forhold. En kvotient er resultatet af division mellem tal, og brøker og forhold defineres efterfølgende blot som kvotienter. Selvom man her vil tænke, at han ser de tre begreber som det samme, er der dog en lille forskel, da han bruger ordene i forskellige sammenhænge. Han definerer brøker som netop de kvotienter der ikke giver et helt tal og indfører den brøknotation som vi kender idag. Han definerer geometriske forhold som en relation mellem to størrelser. Dette forhold findes ved at dividere de to størrelser. Da er kvotienten resultatet af divisionen og det udtrykker forholdet, som han kræver skal skrives som en uforkortelig brøk. Forskellen på fx brøker og forhold er dog, at forhold godt kan være irrationale, hvorimod en brøk ikke kan være det. Et forhold er netop irrationalt når det IKKE kan udtrykkes med en brøk, så forhold og brøker kan ikke helt ses som det samme.

Proportionalitet hos Euler er blot det samme som lighed mellem brøker, hvorimod det hos Euklid ses som en anden form for lighed end den sædvanlige lighed mellem tal.

Det var først ved konstruktionen af de reelle tal, og hermed også de rationale tal, i det 19.århundrede, at forhold og brøker endelig blev set som repræsentanter for præcis det samme, nemlig de rationale tal.

Det er altså vigtigt i undervisningen af de rationale tal at huske på, at sammenhængen mellem forhold og brøker kan være svær at gennemskue for eleverne, da de ikke er blevet præsenteret for konstruktionen af de rationale tal.

Ofte bliver der ikke brugt meget tid på at snakke om, hvorfor brøker og forhold repræsenterer det samme, men historisk har man været længe om at koble dem sammen. Derfor skal det også være tilladt eleverne at undre sig over, hvorfor de kan kobles, og der skal måske bruges tid på at tage dikussionen med dem om, hvorfor de repræsenterer det samme. Og om hvad det i det hele taget vil sige at repræsentere rationale tal.

3 STOFDIDAKTISK ANALYSE

Jeg vil i dette afsnit først komme med en kortere gennemgang af den matematiske konstruktion af de rationale tal. Dette baseres især på den algebraiske teori om ringe og legemer.

Derefter vil jeg præsentere den didaktiske teori ATD og dens didaktiske anvendelsesmuligheder .

Til sidst vil jeg bruge den opnåede viden fra de to første afsnit til at skabe en Prakseologisk Reference Model (PRM) for de rationale tal, som jeg kan bruge i det videre arbejde med specialet. Især under designet og analysen af mine tests bliver en god referencemodel vigtig at have.

3.1 RATIONALE TAL MATEMATISK SET

Dette afsnit bygger især på UvMat's (**uvmat:2014**; **kap.6**) opbygning af det reelle talsystem og på Hungerford's (**hungerford:2000**; **kap. 3**) beskrivelse af ringe og legemer.

Normalt ser vi de rationale tal som mængden $\mathbb{Q} = \{a/b | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, men for at forstå denne mængde og dens egenskaber, er det interessant at se på, hvordan den egentlig er konstrueret.

Matematisk kan man konstruere mængden af de rationale tal $\mathbb{Q}$ ud fra mængden af de hele tal $\mathbb{Z}$ og de hele tal er konstrueret ud fra de naturlige tal $\mathbb{N}$. De naturlige tal er vores oprindelige mængde og udgangspunkt. Jeg vil dog kun fokusere på selve konstruktionen af de rationale tal.

Matematisk set kan man generalisere konceptet i konstruktionen af de rationale tal $\mathbb{Q}$, så man kan konstruere kvotientringe ud fra enhver kommutativ ring, og hvis mængderne opfylder de rigtige betingelser, bliver kvotientringene til brøklegemer.
Dette er netop hvad Hungerford (**hungerford:2000**; **s.142-144**) gør og jeg vil også prøve at lave konstruktionen på en sådan måde, at den kan generaliseres til mængder, der opfylder de samme betingelser.

Når de rationale tal konstrueres ud fra de hele tal, og de hele tal ud fra de naturlige tal, så slipper man for at bekymre sig om hele aksiomsystemet og dets konsistens ifølge Lützen (**dis:2013**; **s.235-236**). I stedet er grundlaget kun mængdelærens aksiomsystem, og ifølge Osrams ragekniv, som er et filosofisk princip, bør videnskab opbygges på det mindste antal hypoteser.

Fordelen ved at konsturere de rationale tal succesivt ud fra de naturlige tal er, at det også er denne måde talbegrebet blev udviklet historisk set.

3.1.1 *Konstruktion af de rationale tal*

Brøklegemet bestående af de rationale tal $\mathbb{Q}$ konstrueres som en kvotientring ud fra den kommutative ring $\mathbb{Z}$.
Kvotientringen bliver i dette tilfælde til et legeme, da den konstrueres ud fra de hele tal $\mathbb{Z}$, som ikke har nul-divisorer, og ud fra den multiplikative delmængde $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ af de hele tal,

som netop udgør alle elementer forskellige fra nul.

Man kan se de rationale tal $\mathbb{Q}$ som en legemsudvidelse af de hele tal $\mathbb{Z}$. Udvidelsen giver i sig selv ikke noget nyt, men udvider blot på en sådan måde, at der opnås et legeme. Udvidelsen fra de naturlige tal til de hele tal skaber en mængde med additiv invers og udvidelsen fra de hele tal til de rationale tal skaber en mængde med multiplikativ invers.

Et legeme er en kommutativ ring, med multiplikativ identitet forskellig fra nul, hvor alle elementer er enheder, dvs. har en invers.

En kommutativ ring R er en mængde R udstyret med to binære operationer, fx addition og multiplikation, som opfylder følgende betingelser for begge operationer:

- kommutativ: $ab = ba$ og $a + b = b + a$
- associativ: $a(bc) = (ab)c$ og $a + (b + c) = (a + b) + c$
- den distributive lov: $a(b + c) = ab + bc$ og $(a + b)c = ac + bc$

Derudover skal der for addition også gælde, at der findes en (tosidet) identitet, fx 0 og at alle elementer har en (tosidet) invers, fx $-a$. Hvis der også findes identitet og invers for multiplikation, har man, som nævnt ovenfor, netop et legeme.

De hele tal $\mathbb{Z}$ er et integritetsområde, da det er en kommutativ ring med multiplikativ identitet 1 og uden nul-divisorere, dvs.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0 \text{ for } a, b \in \mathbb{Z}$$

Mængden af alle elementer forskellige fra nul i et integritetsområde udgør en multiplikativ delmængde, dvs. $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ er en multiplikativ delmængde af de hele tal $\mathbb{Z}$. Det er netop valget af denne delmængde der er med til at sikre at de rationale tal $\mathbb{Q}$ bliver til et legeme.

3.1.1.1 *Konstruktion af brøklegemet* $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$

Vi har, at S er en multiplikativ delmængde af den kommutative ring $\mathbb{Z}$. Da vi yderligere ved, at $\mathbb{Z}$ ikke har nuldivisorer og at $0 \notin S$, så defineres en ækvivalensrelation på mængden $\mathbb{Z} \times S$ ved:

$$(z, s) \sim (z', s') \Leftrightarrow zs' = z's \qquad z, z' \in \mathbb{Z}, s, s' \in S$$

Det kan nemt indses og vises, at dette faktisk er en ækvivalensrelation, da den er:
- Refleksiv: $(z, s) \sim (z, s)$ dvs. $zs = zs$
- Symmetrisk: $(z, s) \sim (z', s') \leftrightarrow (z', s') \sim (z, s)$ så $zs' = z's \leftrightarrow z's = zs'$
- Transitiv: $(z, s) \sim (z', s')$ og $(z', s') \sim (z'', s'') \to (z, s) \sim (z'', s'')$
dvs. $zs' = z's$ og $z's'' = z''s' \to zs'' = z''s$.

Da relationen er en ækvivalensrelation, kan man tale om ækvivalensklasser. For nemheds skyld noteres ækvivalensklassen for $(z, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{S}$ fremover som z/s i stedet.

Mængden af alle ækvivalensklasser noteres $S^{-1}\mathbb{Z}$. Denne mængde er netop det brøklegeme, som vi kalder $\mathbb{Q}$, dvs. de rationale tal, og mængdens elementer kaldes for brøker.

Det betyder, at når jeg her i specialet henviser til brøker, så mener jeg ækvivalensklassen repræsenteret ved z/s, hvor $z, s \in \mathbb{Z}$ og $s \neq 0$. I brøker kaldes z for tælleren og s for nævneren.

Det kan vises, at ækvivalensklasserne i mængden $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ opfylder følgende betingelser:

i) $z/s = z'/s' \Leftrightarrow z/s - z'/s' = 0$

ii) $tz/ts = z/s$ for alle $z \in \mathbb{Z}$ og $s, t \in S$.

Punkt ii) bliver ofte kaldt 'den gyldne regel' og dette understreger anvendeligheden af denne regel. Beviset for denne regel ses her:

$$tz/ts = z/s \leftrightarrow (tz, ts) \sim (z, s) \leftrightarrow tzs = tsz \leftrightarrow tzs = tzs$$

Den sidste omskrivning skyldes kommutativitet af de hele tal, og dermed opnås et sandt udtryk, hvormed beviset er færdigt.

3.1.1.2 *Regneregler for ækvivalensklasserne*

Mængden $\mathbb{Z} \times S$ arver egenskaberne fra de oprindelige mængder, som fx kommutativitet og ingen nuldivisorer pga. ækvivalensrelationen, men for at kunne eftervise dette, er mængden nødt til at være udstyret med to operationer: addition og multiplikation.

Det kan bevises, at addition og multiplikation mellem ækvivalensklasserne i brøklegemer som $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ kan defineres som:

$$z/s + z'/s' = (zs' + z's)/ss' \text{ og } (z/s)(z'/s') = zz'/ss'$$

Idéen i beviset for disse regneregler er, at man for det første skal vise, at addition og multiplikation er veldefinerede operationer mellem mængdens elementer.

Det betyder blandt andet, at det ikke skal være muligt ved hjælp af operationerne at opnå elementer uden for mængden. Det betyder også, at udregningen skal være uafhængig af valget af repræsentant for ækvivalensklassen, da elementer fra samme ækvivalensklasse ikke må give vidt forskellige resultater.

Da $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ er et legeme, vil det også sige, at man skal vise, at addition og multiplikation opfylder kommutative, associative og distributive love. Derudover skal det vises, at der findes neutralelementer og invers elementer, og at der ikke findes nul-divisorer.

Det kan bevises, at disse er opfyldt ved brug af bl.a. den gyldne regel, hvor det bruges, at $s/s = ss'/ss'$, og viden om at elementerne i den oprindelige mængde $\mathbb{Z}$ opfylder lovene. Fx kan den kommutative lov bevises ved:

$$z/s + z'/s' = (zs' + z's)/ss' = (z's + zs')/s's = z'/s' + z/s$$

$$z/s \cdot z'/s' = zz'/ss' = z'z/s's = z'/s' \cdot z/s$$

Dette bevis ses også hos UvMat (**uvmat:2014**; **th. 6.3**).

Den additive identitet bliver for alle $s, s' \in S$ til $0/s = 0/s'$, da

$$0/s' + z/s = (0 \cdot s + zs')/s's = zs'/s's = z/s$$

og tilsvarende hvis det blev lagt til fra den anden side.

Den additive inverse til z/s er $-z/s$, da

$$z/s + (-z/s) = (sz - sz)/ss = s(z - z)/ss = (z - z)/s = 0/s$$

Den multiplikative idenditet i $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ er $s/s = s'/s'$ for alle $s, s' \in S$. Heraf ses det, at ækvivalensklassen med $z = 0$, ikke kan have en multiplikativ invers. Dette er netop ækvivalensklassen for den additive identitet.
Den multiplikative invers for z/s, hvor $z \neq 0$, er s/z, da

$$z/s \cdot s/z = zs/sz = s/s = z/z$$

Bemærk, at da $z \neq 0$ vil $z \in S$ og dermed vil det inverse element $s/z \in S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

Det viser sig, at de hele tal $\mathbb{Z}$ kan ses som en delmængde af mængden $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$, da de kan indlejres i de rationale tal med en injektiv ringhomomorfi.

Når vi har en multiplikativ delmængde S af en kommutativ ring $\mathbb{Z}$, er afbildningen

$$\phi_s : \mathbb{Z} \to S^{-1}\mathbb{Z} \text{ givet ved } z \mapsto zs/s$$

en vel-defineret ringhomomorfi, hvor $\phi_s(s)$ er en enhed i $S^{-1}\mathbb{Z}$ for alle $s \in S$.

Da vi yderligere ved, at $0 \notin S$ og at S ikke har nogen nuldivisorer, ved vi at afbildningen er en monomorfi, dvs. den er injektiv. Så de hele tal $\mathbb{Z}$ kan altså indlejres i de rationale tal $\mathbb{Q}$ blot ved at skrive

$$z = zs/s = zs'/s' = (z \cdot 1)/1 = z/1$$

Det betyder, at de neutrale elementer kan skrives som heltal, da

$$s/s = (1 \cdot s)/s = 1 \text{ og } 0/s = (0 \cdot s)/s = 0$$

Bemærk at vi pga. af ækvivalensklassernes egenskaber kan skrive:

$$-z/s = (-z)/s = (-z)(-s)/s(-s) = -(-zs)/(-ss) = zs/(-ss) = z/(-s)$$

Det betyder altså, at minus-tegnet kan placeres hvor vi vil i brøken. På grund af denne egenskab kan man definere, at minus altid skal placeres i tællerne z. Det vil med andre ord sige, at nævneren kan defineres til kun at bestå af naturlige tal, mens tælleren består af hele tal. Dette har man dog ikke valgt at gøre i den generelle konstruktion. Man kan dog også vælge at placere det udenfor brøken for at indikere når der foregår en subtraktion.

Det interessante i definitionen af multiplikation og addition er, at subtraktion og division i sig selv ikke defineres som en separat operation. I stedet fremkommer disse operationer som det modsatte af addition og multiplikation når de inverse elementer skal findes.

Da division altså blot er den omvendte operation af multiplikation, betyder det, at division mellem brøker blot svarer til at finde den brøk vi skal gange med, for at opnå det neutrale element. Dvs. division defineres som det inverse element som opfylder, at :

$$z/s : z/s = s/s = zs/zs = z/s \cdot s/z$$

Husk her på at $z \neq 0$, ellers eksisterer der ikke et multiplikativt inverst element.

3.1.2 *Orden af de rationale tal*

Nu hvor de rationale tal er konstrueret, kan man gøre legemet $\mathbb{Q}$ til et lineært ordnet legeme ved at definere en ordensrelation på mængden.

En mængde er ifølge Lützen (**dis:2013; s. 171-182**) partielt ordnet, hvis der findes en ordensrelation mellem mængdens elementer, som er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Den sædvanlige ordensrelation som vi kender det fra de hele tal "$\leqslant$" kan også defineres som ordensrelation på de rationale tal. Dette uddybes nedenfor.

For at være en lineært ordnet mængde, eller som nogen kalder det, en totalt ordnet mængde, skal der gælde, at alle elementerne er sammenlignelige. Det betyder, at alle elementer har en relation i forhold til hinanden. Dvs. for alle elementer $a, b \in A$ skal der gælde, at $a \leqslant b$ og/eller $b \leqslant a$. Et element opfylder altså mindst ét af kravene. Hvis begge opfyldes, siges det, at $a = b$.

Ordet lineært ordnet indikerer netop at elementerne kan placeres på en lineær linje i forhold til hinanden.

Man kan illustrere en ordnet mængde med et Hasse-diagram, hvor elementerne er ordnet i forhold til hinanden. Hvis mængden er lineært ordnet bliver Hasse-diagrammet netop en lineær graf vendt på højkant. Dette skyldes at alle elementer har netop én ordning i forhold til hinanden, medmindre elementerne er lig hinanden, for da har de to ordninger.

En lineær graf for de rationale tal er blot det vi kender som en tallinje.

Det kan vises, at et legeme er lineært ordnet, hvis der eksisterer en delmængde $L_+ \subset L$ som opfylder et par krav (**dis:2013; s.221-229**).

For det første skal L_+ være lukket under addition og multiplikation, dvs. at det ikke er muligt ved hjælp af operationerne addition og multiplikation at opnå elementer som ligger uden for mængden L_+.

For det andet skal der for alle elementer $x \in L$ gælde præcis én af følgende muligheder

$$x \in L_+$$

$$x = 0$$

$$-x \in L_+$$

Så et ordnet legeme skal altså kunne opdeles i en positiv og en negativ delmængde og delmængden bestående af nul-elementet. Det ses om lidt, at dette sikrer en lineær ordning, fordi alle elementer igennem denne opdeling kan opnå en relation til hinanden.

I et sådant ordnet legeme defineres en lineær ordensrelation som relationen der opfylder, at der for $x, y \in L$ gælder, at $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in L_+ \cup \{0\}$. Det betyder også, at $y \leqslant x \Leftrightarrow x - y \in L_+ \cup \{0\}$. Hvis begge er opfyldt betyder det, at $x = y \leftrightarrow x - y = 0$.

Bemærk at dette faktisk er en ordensrelation, da det kan vises, at den både er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Derudover ses det tydeligt, at alle elementer i legemet L opnår en orden i forhold til hinanden, så det er en lineært ordnet mængde.

Man definerer en ordensrelation med symbolet $\leqslant$. Ofte mødes også notationen $x < y$ som blot betyder, at der gælder $x \leqslant y$ og at der IKKE gælder, at $y \leqslant x$, dvs. $x \neq y$. Man møder også ofte symbolet $\geqslant$ som betyder, at hvis $x \leqslant y$ så er $y \geqslant x$.

For elementerne i et lineært ordnet legeme gælder de sædvandlige fortegnsregler: (**dis:2013; s. 223**)

1. $x \in L_+ \leftrightarrow -x \in L_- = L \setminus \left(L_+ \cup \{0\}\right)$
2. $1 \in L_+$
3. $x, y \in L_- \leftrightarrow x \cdot y \in L_+$

4. $x, y \in L_- \leftrightarrow (x + y) \in L_-$
5. $x \in L_+ \wedge y \in L_- \leftrightarrow x \cdot y \in L_-$
6. $x \in L_+ \leftrightarrow x^{-1} \in L_+$

De rationale tal $\mathbb{Q}$ bliver netop et sådant lineært ordnet legeme, når mængden af positive rationale tal defineres ud fra den lineære orden på de hele tal, sådan at $\mathbb{Q}_+ = \{z/s \in \mathbb{Q} | z > 0 \wedge s > 0\}$. Husk her på, at $z/s = -(-z)/s = (-z)/(-s)$. Så pga. af ækvivalens er det ikke nødvendigt at tage højde for tilfældet, hvor $z < 0$ og $s < 0$.

Denne ordning opfylder de to ovennævnte krav for legemer.

For det første er det ikke muligt ved multiplikation eller addition inden for mængden $\mathbb{Q}_+$ at ramme elementer uden for mængden, da

$$z/s, z'/s' \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z/s + z'/s' = (zs' + sz')/ss' \in \mathbb{Q}_+$$

Det sidste følger af, at $z/s, z'/s' \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z, s, z', s' > 0$, og to positive hele tal lagt sammen kan ikke blive negative og det samme gælder for multiplikation mellem hele tal. Dermed ses også at

$$z/s, z'/s' \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z/s \cdot z'/s' = zz'/ss' \in \mathbb{Q}_+$$

For det andet gælder der, at alle elementer $z/s \in \mathbb{Q}$ opfylder:

$$z/s \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z > 0, s > 0 \vee z < 0, s < 0$$

$$z/s = 0 \leftrightarrow z = 0$$

$$-z/s \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z < 0, s > 0 \vee z > 0, s < 0$$

Det følger af ordenen på de hele tal, at disse elementer kun opfylder præcis én af ovenstående betingelser.

Dermed defineres den lineære ordensrelation som relationen der opfylder, at for $z/s, z'/s' \in \mathbb{Q}$ gælder $z/s \leqslant z'/s' \leftrightarrow z'/s' - z/s \in \mathbb{Q}_+$ og $z'/s' \leqslant z/s \leftrightarrow z/s - z'/s' \in \mathbb{Q}_+$. Vi genkender definitionen af ækvivalens mellem rationale tal når begge relationer er opfyldt, for da gælder, at $z/s = z'/s' \leftrightarrow z/s - z'/s' = 0$.

Det viser sig, at alle delmængder af lineært ordnede mængder medarver den lineære orden (**dis:2013**; **s. 172**). Da de hele tal $\mathbb{Z}$ netop er en delmængde af de rationale tal $\mathbb{Q}$, betyder det, at ordensrelationen også gælder for de hele tal. Det viser sig heldigvis at ordenen defineret på de rationale tal bliver til den sædvanlige orden på de hele tal. Det ses af, at $z/1 = z \in \mathbb{Q}$ og at

$$z/1 \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow z > 0$$

$$z/1 = 0 \leftrightarrow z = 0$$

$$-z/1 \in \mathbb{Q}_+ \leftrightarrow -z > 0$$

Nu har de rationale tal både fået givet en algebraisk struktur og er udstyret med en lineær ordning.

Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ og mængden af naturlige tal $\mathbb{N}$ er en uendelig mængde, følger det, at også de rationale tal $\mathbb{Q}$ må være en uendelig mængde.

Faktisk viser det sig ifølge Lützen (**dis:2013**; **s. 227**), at alle lineært ordnede legemer er uendelige, da de indeholder dellegemer som er isomorfe med $\mathbb{Q}$. Dermed indeholder de også delmængder som er isomorfe med $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$, da disse er delmængder af $\mathbb{Q}$.

Ideen i beviset er at vise, at der eksisterer en isomorfi til de naturlige tal $\mathbb{N}$. Derefter kan isomorfien udvides til de hele tal $\mathbb{Z}$ og til en ordensbevarende legemsisomorfi til de rationale tal $\mathbb{Q}$.

3.1.2.1 *Tætheden af rationale tal*

De rationale tal $\mathbb{Q}$ er en tæt delmængde af de reelle tal $\mathbb{R}$, hvilket i praksis betyder, at der imellem to forskellige reelle tal altid kan findes et rationalt tal.

Det er dog ikke denne egenskab som er interessant, når fokus er på de rationale tal. Det er mere interessant at se på det faktum, at de rationale tal $\mathbb{Q}$ er tæt-i-sig-selv. Det betyder tilsvarende, at der imellem to rationale tal $\mathbb{Q}$ altid kan findes et nyt rationalt tal. Det er ikke nødvendigvis en selvfølge, for de rationale tal $\mathbb{Q}$ er ikke et fuldstændigt ordnet legeme som de reelle tal $\mathbb{R}$, dvs. mængden $\mathbb{Q}$ har "huller" dér hvor de irrationale tal optræder.

Hvis man ser på de hele tal $\mathbb{Z}$, er det fx ikke muligt at finde et nyt heltal imellem 1 og 2. Men selvom der mellem de rationale tal findes irrationale tal, så opstår dilemmaet fra de hele tal ikke, fordi de rationale tal $\mathbb{Q}$ netop er "tæt-sig-selv". Så brøkerne ligger så tæt i mængden, at det ikke er muligt at konstruere en ægte åben mængde uden at mindst ét rationalt tal ligger i mængden. Det vil om lidt vise sig, at denne egenskab med den åbne mængde er årsagen til at de rationale tal er "tæt-i-sig-selv".

Fremover vil jeg bruge betegnelsen "tæt mængde"om en mængde som er tæt-i-sig-selv, hvilket ikke skal forveksles med den før nævnte egenskab at være "en tæt delmængde".

En lineært ordnet mængde kan ifølge bogen *Notes on Set Theory* (**set:1994**; **s. 219**) defineres som en tæt mængde, hvis den opfylder, at der for alle $x, y \in A$ gælder, at

$$x < y \Rightarrow \exists b \in A \text{ sådan at } x < b < y$$

Eller med andre ord, at en lineært ordnet mængde er en tæt mængde, hvis der mellem to vilkårlige elementer i mængden altid kan findes et nyt element i mængden. Det er netop denne egenskab som jeg henviste til i starten af dette afsnit. Dette er også den mest simple version af at være en tæt mængde.

Ifølge bogen *Basic Algebra* (**basic:2005**; **s. 274**) er ethvert lineært ordnet legeme L en tæt mængde, og dermed er de rationale tal også en tæt mængde.

For at vise dette, skal det vises, at man i ethvert lineært ordnet legeme L altid kan finde et nyt element imellem to eksisterende elementer. Hvis det kan vises, at man altid kan tage gennemsnittet mellem to elemenenter i et ordnet legeme, vil et nyt element imellem de to oprindelige elementer altid kunne findes, og derfor er mængden tæt.

Bemærk at det altid er muligt at finde mindst to forskellige elementer i et legeme, da legemer både skal indeholde additiv og multiplikativ identitet og alle kombinationer af disse med regneoperationerne og invers elementer til disse. Gennemsnittet af to forskellige elementer $x, y \in L$, hvor $x < y$ findes ved at udregne:

$$(x + y) : 2 \in L$$

Her er det brugt, at det at dividere med 2 svarer til at gange med den multiplikativt inverse til 2, hvilket kan noteres 2^{-1}. Husk på at alle lineært ordnede legemer indeholder en delmængde som er isomorfe med $\mathbb{Q}$, og dermed vil et element svarende til 2 altid ligge i mængden.

Elementet $(x+y):2$ ligger i legemet L, da x, y og 2 er elementer i L og addition og division er lovlige operationer på legemets elementer, og det er ikke muligt at opnå elementer uden for mængden ved hjælp af regneoperationerne.

Nu mangles det blot at vise, at det fundne element faktisk ligger imellem de to oprindelige elementer, hvor det antages at x er mindst:

$$x < (x+y):2 \Leftrightarrow x < (x+y)\cdot 2^{-1} \Leftrightarrow$$

$$(x+y)\cdot 2^{-1} - x = x\cdot 2^{-1} + y\cdot 2^{-1} - x = y\cdot 2^{-1} + x\cdot(2^{-1}-1) = y\cdot 2^{-1} - x\cdot 2^{-1} = (y-x)\cdot 2^{-1} \in L_+$$

Her er brugt, at den kommutative og distributive lov gælder i et legeme, derudover er de før nævnte fortegnsregler brugt og at der fra start var antaget en orden mellem elementerne, dvs.

$$x < y \leftrightarrow y - x \in L_+$$

Det er også brugt, at $2^{-1} - 1 = 1\cdot 2^{-1} - 2\cdot 2^{-1} = (1-2)\cdot 2^{-1} = -2^{-1}$
Tilsvarende argumentation for det andet element.

I en tæt mængde vil der imellem to forskellige elementer altid kunne findes uendelig mange nye elementer. Dette skyldes, at man succesivt kan blive ved med at konstrurere nye elementer mellem de fundne elementer.

Der findes flere definitioner af, hvad en tæt mængde er. Her vil jeg også præsentere den topologiske definition.

En delmængde A af et topologisk rum X kaldes tæt-i-sig-selv, dvs. A er en tæt mængde, hvis den ikke indeholder nogen isolerede punkter (**foundation:2014**; **s.62**). Et punkt x i et topoplogiske rum X kaldes isoleret i en delmængde A, hvis $x \in A \subset X$ og der eksisterer et naboområde af x som ikke indeholder andre punkter fra mængden A (**top:2000**; **s.96-97**). Et naboområde er en åbne mængde som indeholder x .

Et topologisk rum er en mængde X udstyret med en topologi. Man kan også sige, at et topologisk rum er en mængde X sammen med en samling af alle åbne delmængder af X, hvor også X og Ø anses for at være åbne delnængder, og foreningmængder og endelig fællesmængder af åbne mængder også er åbne (**top:2000**; **s. 76**).

Da mængden X kan ses som en åben delmængde af sig selv, er denne altså også en tæt mængde, hvis den ikke indeholder nogen isolerede punkter. Et punkt x kaldes isoleret i et topologisk rum X hvis ét-punkts-mængden x er åben i X (**top:2000**; **s. 176**).

For en lineært ordnet mængde findes en standard topologi som defineres ud fra ordensrelationen (**top:2000**). Denne topologi kaldes for ordens topologien. En mængde hvor en topologi er blevet defineret er netop et topologisk rum, så en lineært ordnet mængde kan altid gøres til et topologisk rum.

De rationale tal kan udstyres med ordenstopologien, så et topologisk rum er opnået. Dermed skal det altså blot vises, at de rationale tal ikke har nogen isolerede punkter. Det vil sige at der ikke findes nogen åbne én-punktsmængder. Da de rationale tal er et ordnet legeme, kan vi definere en åben mængde omkring et rationalt tal z/s som mængden

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid |z/s - x| < 1/N, N \in \mathbb{N}\}$$

Hvor $|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geqslant 0 \\ -a & \text{hvis } a \leqslant 0 \end{cases}$
er den klassiske definition af numerisk værdi i en ordnet ring (**basic:2005**; **s. 273**).

Da vi kan vælge vores tal $N \in \mathbb{N}$ uendelig stort, vil vi kunne opnå at $1/N$ er uendelig småt, så vores åbne mængde bliver altså uendelig lille, men indeholder stadig z/s. Tilbage er blot at vise, at denne åbne mængde også indeholder andre rationale tal, dvs. det er ikke en en-punkts-mængde, og dermed er z/s ikke et isoleret punkt, så de rationale tal har ingen isolerede punkter.

Det skal altså undersøges om der findes en anden brøk $z'/s' \in \mathbb{Q}$ som opfylder

$$z/s - z'/s' < 1/N \Leftrightarrow (zs' - z's)/ss' < 1/N \Leftrightarrow (zs' - z's)/1 \cdot 1/ss' < 1/N$$

Hvis man vælger s' sådan at $ss' > N$ vil $1/ss' < 1/N$. Dette er muligt da det blot er hele tal. Tilbage ønskes blot at finde et brugbart heltal z':

$$zs' - z's = 1 \Leftrightarrow z' = zs'/s$$

Da vi blot skal vælge s' stort nok, kan vi sagtens kan vælge s' som et multiplum af s, og dermed kan det opnås at z' bliver et heltal. Det betyder, at brøken z'/s' netop ligger i den åbne mængde, hvis den vælges som foreslået, da

$$z/s - z'/s' = (zs' - z's)/ss' = 1/ss' < 1/N$$

3.1.3 *Repræsentationsformer*

At repræsentere betyder "at træde i stedet for" og "være identisk med" ifølge dansk synonymordbog (**ord:2016**).

Filosoffen Thomas Aquinas (**aquinas:2008; s. 148-155**) definerede i middelalderen "repræsentation" som "genvisning". Det er altså en ny måde at vise det samme på.

Han mener ikke at forskellige repræsentationer gengiver den præcis samme form, dvs. eksakt, naturlig lighed, men at de i stedet gengiver den samme essens. Han ser lighed mellem forskellige repræsentationer som epistemologiske og ikke ontologiske ligheder. Vi kan erkende at to repræsentationsformer gengiver det samme, men vi kan ikke sige at de er en direkte fysisk kopi af det samme.

Der kan findes uendelig mange repræsentationer af det samme objekt, så længe de er "genvisninger" af det oprindelige objekt.

I matematik har man kun repræsentationerne, da man ikke kan stå med de matematiske objekter i hænderne. Objekterne er filosofiske begreber og de forskellige repræsentationer af det samme objekt er forskellige måde at "vise" det filosofiske begreb på.

Repræsentationerne "træder i stedet for" selve begrebet men forskellige repræsentationer er stadig "identiske" med det samme begreb, hvor identisk skal forstås i lyset at Thomas Aquinas forståelse af lighed.

De rationale tal er et eksempel på et matematisk filosofisk begreb som ikke eksisterer i sig selv. Det er en konstruktion der er baseret på mængdelærens aksiomer og de naturlige tal.

De rationale tal er ikke et fysisk objekt i sig selv og de er derfor nødt til at have forskellige repræsentationsformer, for at vi kan arbejde med dem. De forskellige repræsentationer "genviser" stadig det samme rationale, men hver repræsentation har alligevel sin egen fordel og karakteristika i forskellige sammenhænge.

Man skal altså se det samme objekt - det rationale tal - bag alle de forskellige repræsentationsformer og brøksymboler som man møder.

3.1.3.1 *Decimaltal*

De rationale tal repræsenteres matematisk oftere som brøker end som deciderede ækvivalensklasser, men decimaltal er også en meget anvendt repræsentationsform i fx folkeskolen.

Et decimaltal er et heltal efterfulgt af et komma og en endelig eller uendelig sekvens af cifre mellem 0 og 9.

Hvis alle cifre efter kommaet er 0, er tallet et heltal.

Hvis cifrene fra et vist punkt bliver periodiske, er tallet et rationalt tal.

Derudover er der en konvention for decimaltal der siger, at hvis der står 9 på alle pladser efter kommaet, så er det i virkeligheden $1,000\cdots$ større end det oprindelige heltal før kommaet. Så med andre ord er $1,999\cdots = 2,000\cdots$ pr. konvention.

Matematisk kan man udvide vores 10-talssystem med basen 10 til også at gælde decimaltal. Hvert ciffers placering har en bestemt værdi ud fra basen 10. Det betyder, at decimaltallet $a_2 a_1, d_1 d_2 d_3 \cdots$ er en repræsentation for summen

$$a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + \frac{d1}{10^1} + \frac{d2}{10^2} + \frac{d3}{10^3} \cdots$$

Men da decimaltal kan have uendeligt mange cifre er man nødt til at se dem som en sum af uendelige rækker ifølge Uvmat (**uvmat:2014**; **s.281**).

Ethvert decimaltal $0, d_1 d_2 d_3 \cdots$ kan defineres som repræsentant for en række med en endelig sum, dvs. en konvergent række. Så decimaltal er altså en uendelig sum af rationale tal.

Heraf ses, at konventionen fra før følger af viden om geometriske rækker:

$$0,9999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n} \right) - 9 = \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} - 9 = \frac{9}{9/10} - 9 = 1$$

Da rationale decimaltal er periodiske fra et vist punkt, er det muligt, at omskrive decimaltallet til en brøk. Dvs. det er muligt at skifte mellem repræsentationsformerne.

Decimaltallet $0,54321321\cdots$ har uendeligt mange decimaler, men det har en periode fra et vist punkt og derfor er decimaltallet rationalt. Man kan omskrive det til en brøk ved følgende metode:

$$0,54321321\cdots = 0,54 + 0,00321321\cdots = \frac{54}{100} + \frac{107}{33300} = \frac{18089}{33300}$$

Her er det brugt, at $N = 0,00321\overline{321} \Leftrightarrow 100.000N = 321,\overline{321}$ og $100N = 0,\overline{321}$ dvs.

$$100.000N - 100N = 99900N = 321 \Leftrightarrow N = \frac{321}{99900} = \frac{107}{33300}$$

Det ses altså, at alle rationale decimaltal også kan repræsenteres som en brøk. Tilsvarende kan alle brøker også repræsenteres som et rationalt decimaltal.

UvMat (**uvmat:2014**; **s.282-287**) præsenterer en generel metode til at omskrive brøker til decimaltal. Dog konkluderes, at den generelle metode giver samme resultat, som man får, hvis man udregner divisionen mellem tæller og nævner. Hvis resterne i divisionen begynder at gentage sig i et mønster, kan man stoppe divisionen derfra.

Dette virker fordi rationale decimaltal består af decimaltal med endelige perioder og det viser sig, at periodens længde maksimalt kan være lig nævnerens værdi, da det er det maksimale antal mulige rester der kan være ved division, selvom perioden oftest er kortere.

3.1.3.2 *Forskellige repræsentationsformer for de rationale tal*

Som nævnt kan alle rationale tal repræsenteres både som en brøk, der er repræsentant for ækvivalensklassen, og som et decimaltal, der er en uendelig sum af rationale tal.

Ækvivalens mellem brøker er noget helt andet end lighed mellem decimaltal, så man kan tale om to vidt forskellige repræsentationer af rationale tal. Den ene repræsentationsform er ikke mere rigtig end den anden, men de har hver især sine fordele i forskellige sammenhænge.

Inden for brøkerne og decimaltallene kan man også tale om forskellige repræsentationer af det samme rationale tal, da man via ækvivalens netop kan skrive brøken på flere måder, eller man kan sige, at $1 = 0,9999\overline{9}$.

En anden repræsentationsform som vi ofte møder i vores hverdag er procent. Det betyder en hundrededel og kan defineres ud fra decimaltallene ved at bruge at $1\% = 0,01$, dvs. man ganger decimaltallet med 100 for at få procenten. Fx er tallet

$$0,456 = 0,456 \cdot \frac{100}{100} = \frac{0,456 \cdot 100}{100} = 0,456 \cdot 100\% = 45,6\%$$

I folkeskolen mødes også blandede brøker, som er en blanding af repræsentationsformer. Det består af både et heltal og en brøk. Egentlig er det en variant af decimaltallene, hvor man først skriver heltallet og bagefter skriver cifrene efter kommaet som en brøk. Fx er

$$5,68 = 5\tfrac{68}{100} = 5\tfrac{17}{25}$$

Der findes også flere visuelle repræsentationsformer af de rationale tal.

Tallinjen er en placering af tallene på en linje ud fra deres orden i forhold til hinanden, en såkaldt lineær graf.

Man kan også repræsentere rationale tal i en figur, fx et rektangel eller en cirkel. Dette gøres ved at lave et passende antal inddelinger af figuren. For brøker vil det være nævneren man bruger som inddeling, for decimaltal skal man kende antallet af cifre n og lave 10^n inddelinger. Derefter skraveres det antal inddelinger som svarer til brøkens tæller eller til decimaltallets cifre.

Man kan også se brøker som et forhold mellem størrelser. Fx forholdet mellem længden af to sider i et rektangel.

Selvom et forhold opskrives som en brøk, så er det både historisk og praktisk en anden repræsentation end brøken, da tælleren og nævneren repræsenterer virkelige størrelser - længden af de to sider.

Man kan sige at udregning af forhold er det som rationale tal bliver brugt til i praksis.

Et forhold behøver ikke kun at være mellem størrelser af samme slags, men kan fx også være mellem tid og sted, hvilket giver en hastighed.

Et forhold kan ses som en anvendelse af rationale tal. En form for geometrisk repræsentation, hvor tallene ikke blot er tal, men repræsenterer virkelige størrelser.

3.1.4 *Stofdidaktiske udfordringer ved de rationale tal*

Der er mange stofdidaktiske udfordringer som eleverne kæmper med i mødet med de rationale tal. Jeg vil her prøve at komme ind på nogle af disse udfordringer i transpositionen af den matematiske viden.

3.1.4.1 *Selve begrebet rationale tal*

Husk på, at selve notationen for de rationale tal z/s blot er en notation man har valgt til at repræsentere ækvivalensklasserne. Selve notationen kan forvirre nogle elever, da de har svært ved at forstå at notationen repræsenterer et samlet tal.

Da brøker omskrives til decimaltal ved at udføre en division, kan det være forvirrende at brøkstregen både kan repræsentere et symbol for ækvivalensklassen og repræsentere operationen division.

I folkeskolen bliver eleverne ikke mødt med den matematiske konstruktion af et brøklegeme. Eleverne præsenteres derfor ikke for nogen ækvivalensklasser men blot for selve symbolet for en brøk og efterfølgende for omskrivningen til decimaltal.

I gymnasiet er brøker en mere anvendt repræsentation i matematikundervisningen end decimaltallene, hvis man ser på gymnasiebøgernes eksempler og opgaver eller på eksamensopgaverne (**stx:2012**).

Det kan skabe problemer i gymnasiet, når eleverne kommer med opfattelsen fra folkeskolen af, at alle resultater skal tastes ind på en lommeregner så man får et decimaltal, hvorimod gymnasielæreren forventer svaret repræsenteret som en brøk.

Selve transpositionen fra folkeskolen til gymnasiet lider altså under elevernes opfattelse af hvad et rationalt tal er, hvis de kun ser fx decimaltallene som den egentlig repræsentation.

Matematisk bliver de rationale tal konstrureret ud fra de naturlige tal og heltallene. Eleverne bliver, som nævnt, ikke direkte præsenteret for den matematisk succesive udvidelse, og slet ikke for de bagvedliggende aksiomer i mængdelæren.

Men selve det med, at starte med de naturlige tal og så udvide talbegrebet, er ikke så fjernt fra det de møder i folkeskolen. Først arbejdes der med de naturlige tal, som til at starte med kan tælles på fingrene. Derefter læres der om subtraktion, hvormed de hele tal indføres. Senere præsenteres de for brøkerne som en udvidelse af talbegrebet.

Der hvor det går galt i denne transposition er, når decimaltallene kommer ind og bliver selve udvidelsen af de hele tal. Dermed degraderes brøker til noget abstrakt og besværligt, som skal undgås, fordi man jo kan nøjes med at bruge decimaltallene.

Og dermed bliver brøker blot en symbolsk repræsentation af decimaltallene i stedet for at se decimaltal og brøker som en repræsentation af det samme rationale tal.

3.1.4.2 *Egenskaber ved de rationale tal*

Når de rationale tal $\mathbb{Q}$ repræsenteres som brøk, skrives de på formen a/b, hvor $a \in \mathbb{Z}$ og $b \in \mathbb{Z}/0 = S$, dvs. mængden

$$\{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} | b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Selve den matematiske konstruktionen af mængden $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ sikrer os, at vi aldrig dividerer med nul, da nævneren netop består af alle hele tal forskellige fra nul.

Denne detalje kan dog godt bliver overset af nogle elever, som ikke har forstået det matematisk forkerte i at dividere med nul.

Lighed mellem brøker præsenteres i folkeskolen som følgende betingelse der skal være opfyldt:

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = cb$$

Som det ses, er det samme betingelse vi møder i konstruktionen af brøklegemet, hvor ækvivalens mellem brøker defineres som dette. Matematisk set defineres de rationale tal $\mathbb{Q}$ som en mængde af ækvivalensklasser, og derfor står ækvivalens mellem rationale tal som noget helt centralt i selve konstruktionen af de rationale tal og generelle brøklegemer.

Men fordi eleverne ikke præsenteres direkte for denne ækvivalens, kan nogle have svært ved at forstå, hvorfor to brøker kan være ens, og hvorfor en brøk kan have så mange repræsentationsformer.

En brøk er ikke blot en brøk, men er repræsentant for alle brøker i ækvivalensklassen. Denne viden står ikke nødvendigvis klar for eleverne når de kommer i gymnasiet.

Selvom eleverne ikke er bevidste om selve de rationale tal som ækvivalensklasser, så er der dog alligevel mange af egenskaberne ved ækvivalensklasserne som eleverne bruger.

Egenskaberne ved ækvivalensrelationen, dvs. refleksiv, symmetrisk og transitiv, kender vi fra vores intuitive forståelse af rationale tal repræsenteret som brøker:
$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, og at $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ og $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ automatisk medfører, at $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. Med andre ord, at to brøker der er lig den samme brøk er også lig hinanden.

De to betingelser som ækvivalensklasserne opfylder ifølge afsnit 3.1.1 kendes også af eleverne når de arbejde med brøkrepræsentationen. To brøker er fx ens, hvis forskellen mellem dem er nul ($\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$), og man kan forkorte brøker med fælles divisor i tæller og nævner ($\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$), også kendt som den gyldne regel.

Brøkregnereglerne som eleverne kender dem er heldigvis de samme regneregler som blev defineret for de rationale tal

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ og } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Reglen om at division er det samme som at gange med den omvendte brøk er helt centralt i definitionen af hvad multiplikation, og herunder divison mellem brøker er. Alligevel giver brøkreglen for division mellem brøker ifølge mine erfaringer store problemer for eleverne.

Måske ligger problemet i præsentationen af brøkreglerne, hvor sammenhængen mellem multiplikation og divison ikke tydeliggøres nok, eller også ligger den helt tilbage ved elevernes viden om hvad division er. Hvis de ikke ser division som det omvendte af multiplikation inden de møder brøkregnereglerne, kan det være svært på dette tidspunkt at overbevise dem om sammenhængen mellem multiplikation og divison for brøker.

Nogle elever kan være forvirrede over, at man kan skrive et heltal som en brøk, og dette giver nogle didaktiske udfordringer, hvis det begrænser dem når de skal løse opgaver, der både indeholder heltal og brøker. Problemet for sådanne elever er, at de ikke ser heltal og tilhørende brøker som repræsentation for det samme rationale tal.

Den lineære orden af de rationale tal gør os i stand til at placere de rationale tal på en tallinje, da man kan tale om, at et element er større end et andet element og da hvert element kun har én placering, dog findes der mange brøker i samme ækvivalensklasse som har samme placering, dvs. er ækvivalente.

Ordensrelationen defineret på de rationale tal bliver i brøkrepræsentationen til

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{cb - ad}{db}$$

Hvis nævnerne $b, d \geqslant 0$ bliver udtrykket til: $ad \leqslant cb$.

Som nævnt i afsnit 3.1.1 kan man pga. af omplacering af minussymbolet vælge at definere brøker sådan, at der kun er naturlige tal i nævneren og hele tal i tælleren. Dette er dog ikke den generelle definition.

3.1.4.3 *Udfordringer og fordele ved forskellige repræsentationer*

De forskellige repræsentationsformer af de rationale tal kan have forskellige fordele. Fx kan addition og subtraktion mellem decimaltal være nem at forholde sig til, da man blot udfører operationen for et ciffer ad gangen, hvorimod brøker kræver fællesnævner.

Decimaltal er nemmere at forholde sig til hvis man skal vurdere tallets størrelse, hvorimod en stor og kompliceret brøk kan være meget svær at gennemskue, medmindre man omskriver til fx blandet brøk. Brøker anses dog især i gymnasiet for at være et mere eksakt svar, da decimaltallene ofte bliver afrundet

Brøker er meget praktiske når man skal dividere, da man blot ændrer division til en multiplikation med den omvendte brøk. Også multiplikation er smart da man kan nøjes med at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

Fordelen ved at repræsentere rationale tal på en tallinje er, at man visuelt kan overskue deres orden i forhold til hinanden. Også tætheden ved rationale tal kan fremhæves ved en tallinje jvf. afsnit 2.3.2. Ulempen ved tallinjen er, at det kan tage lang tid at lave passende inddelinger, i forhold til blot at udføre udregninger ved hjælp af regnereglerne for rationale tal.

Repræsentation af rationale tal i figurer bliver ligesom tallinjen brugt i folkeskolen, da det giver en visuel præsentation af de rationale tal i stedet for blot de mere abstrakte tal. Ulempen er, at det kan være svært at se logikken i, hvordan man ganger to figurer sammen - der er man nødt til at have den korrekte viden om, hvad det vil sige grafisk at multiplicere to rationale tal. Dvs. viden om fortolkningen af multiplikationen $\frac{a}{b} \cdot m$ som det, at man tager $\frac{a}{b}$ 'af' m.

Repræsentationen af rationale tal som procent er meget anvendeligt når man vil arbejde med hundrededele. Det bruges især i forbindelse med vækst. Ulempen er, at division og multiplikation nemt kan give problemer, hvis eleverne glemmer, hvad procent egentlig er, hvorimod addition og subtraktion er nemt med procenter.

3.2 DEN ANTROPOLOGISKE TEORI OM DET DIDAKTISKE

Specialet anvender den antropologiske teori om det didaktiske (ATD). Derfor kommer her en præsentation af de relevante aspekter. Afsnittet bygger på en artikel af Barbé, Bosch, Espinoza, og Gascón (**barbe:2006**). ATD er et nyere forskningsprogram inden for matematikkens didaktik og blev grundlagt af Yves Chevallard. Det bruges til at beskrive matematisk aktivitet som en menneskelig aktivitet, og et centralt ord er *prakseologi*.

ATD bygger på teorien om didaktisk transposition, som handler om, hvordan viden forandres når den bevæger sig mellem forskellige institutioner, hvor fx videnskabsfaget matematik omdannes til undervisningsfaget matematik. Viden om rationale tal har været igennem flere transpositioner fra den videnskabelige matematiske viden som præsenteres i afsnit 2.3 til den faktisk lærte viden i gymnasiet, som jeg undersøger i analysedelen kapitel 5.

For at kunne analysere den faktisk lærte viden, er jeg nødt til at have en referencemodel, som er uafhængig, men samtidig referer til de enkelte institutioner. Den er dynamisk, da man hele tiden er nødt til at revidere den, baseret på de analyser man fortager.

Derfor vil jeg i afsnit 3.3 konstruerede en Prakseologisk Reference Model (PRM) til at analysere, hvilken viden eleverne faktisk har. Baseret på denne analyse kunne man revidere den konstruerede PRM, dette er der dog ikke tid til i dette speciale, men andre kan bygge videre på den fundne model, så processen fortsætter med at være dynamisk.

3.2.1 *Prakseologi*

ATD arbejder med en generel model for menneskelig aktivitet, der lægger lige stor vægt på den teoretiske viden og den praktiske viden. En sådan generel model kaldes for en *prakseologi* og den behøver ikke kun at omhandle det matematiske og matematiske fænomener, men kan fx også omhandle det didaktiske. Det didaktiske behøver ikke kun at handle om undervisning, men er formidling i bred forstand.

Ordet prakseologi er en sammensætning af ordene *praksis*, den praktiske viden, og *logos*, den teoretiske viden. De to dele kan ikke bestå uden hinanden, for den praktiske viden er ikke brugbar, hvis man ikke har en forklaring på, hvor denne viden kommer fra, og den teoretiske viden kan blive meningsløs, hvis man ikke kan anvende den til noget i praksis.

Den praktiske del af prakseologien kan opdeles i *opgavertyper* T som skal udføres og tilhørende konkrete *teknikker* τ som skal bruges til at løse den givne opgavetype. Med opgavetype menes, at konkrete opgaver kan formuleres forskelligt, men overordnet set kan man samle dem i opgavetyper, som udtrykker, hvad opgaven egentlig går ud på. Det er den praktiske viden jeg vil undersøge i specialet.

Den teoretiske viden består af en *teknologi* θ, der skal forklare den diskurs, som kommer til udtryk i teknikkerne og en bagvedliggende *teori* Θ.

En prakseologi består altså af fire elementer $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Men hos Barbé, Bosch, Espinoza, og Gascón (**barbe:2006**; **s.245**) ses eksempler på, at den viden som faktisk bliver formidlet kan indeholde en mangelfuld prakseologi pga. den transpositionsprocess som den pågældende viden har været igennem. Det kan fx være, at den teoretiske blok er fraværende. Dermed mister den praktiske blok sit rationale.

Dette er tilfældet med den viden om rationale tal der skal formidles i gymnasiet, da den bagvedliggende videnskabelige teori nærmest er fraværende. Dette kan være en af de forhindringer, der gør, at det matematiske begreb 'rationale tal' kan være svært for gymnasieelever at forholde sig til.

Matematiske organisationer (MO), også kaldet matematiske prakseologiske organisationer, er en større samling af prakseologier, som omhandler matematiske aktiviteter. Den mest simple matematiske organisation er en *punktuel* MO som kun omhandler én opgavetype T og tilhørende teknikker τ, teknologi θ og teori Θ.

Man kan udvide en MO til at være *lokal*, hvis den omfatter en række punktuelle MO som alle deler samme teknologi θ, dvs. har samme teknologisike diskurs. Man kan på denne måde skabe forskellige lokale MO afhængig af, hvilken teknologi man samler dem under. Der er derfor ikke altid et entydigt svar på, hvordan man skal organisere den matematiske aktivitet.

Man kan også have *regionale* MO, som er en samling af lokale MO, der deler samme teori Θ. Igen kan man samle dem under forskellige teorier og på den måde skabe forskellige regionale MO, for det er ikke altid at kun én teori kan bruges til at beskrive den matematiske aktivitet.

Ved at organisere den matematiske viden i relevante MO kan man konstruere en Prakseologisk Reference Model (PRM) til at bruge som referencemodel i analysen af den matematiske viden.

NB! I specialet vil jeg tale om mange forskellige slags opgaver. Der er både *opgavetyper* T som beskriver overordnet, hvad en række konkrete opgaver går ud. Så er der konkrete *opgaver* som fx referer til opgaver fra gymnasiebøgerne. Derudover har jeg selv designet en test, hvor de enkelte opgaver vil blive benævnt som *spørgsmål*.

MO	RATIONALE TALS ARITMETIK OG STRUKTUR
MO1	Ækvivalens af rationale tal (tabel 6)
MO2	Omskrivning af rationale tal (tabel 7)
MO3	Rationale tals orden (tabel 8)
MO4	Tætheden af rationale (tabel 9)
MO5	Addition og subtraktion af rationale tal (tabel 10)
MO6	Multiplikation og division af rationale tal (tabel 11)
MO7	Forhold og proportioner (tabel 12)

Tabel 5: Her ses de 7 lokale MO.

3.3 PRAKSEOLOGISK REFERENCEMODEL

Jeg vil konstruere en Prakseologisk Reference Model (PRM) for de rationale tal og deres aritmetik. Konstruktionen er inspireret af Putra (**zetra:2016**)'s jvf. appendiks D.

Den videnskabelige teori for de rationale tal er netop teorien om, hvordan de er skabt, og hvilke egenskaber de har. Denne teori har jeg prøvet at opridse i afsnit 3.1. Jeg har fokuseret på den algebraiske del af de rationale tal som en mængde, men man kunne også behandle de rationale tal mere analytisk ved at komme ind på metrikker og epsilon-delta.

Men i det teoretiske niveau i gymnasiet om rationale tal er der ikke meget, der svarer til den videnskabelige matematiske teori om de rationale tal. Der er kun elementer af teorien som fx brøk og division.

Så den bagvedliggende teori Θ der knytter sig til gymnasieelevernes viden om de rationale tal er meget mangelfuld og kan næsten reducers til "de rationale tal er alle brøker". Brøker spiller altså her en rolle som en slags objekter, der bliver anderkendt som tal, men det er ikke en teori med sætninger og beviser.

Man kan tale om en række lokale MO med forskellige teknologiske diskurser, dvs. forskellige teknologier θ, som alle har samme mangelfuld bagvedliggende teori θ om de rationale tal. Det er dog ikke ikke den teoretiske blok men den praktiske blok jeg vil have mest fokus på i min konstruktion af en PRM.

I tabel 5 ses en oversigt over 7 lokale MO i min PRM, som jeg i de efterfølgende afsnit vil uddybe. Under de lokale MO findes en række punktuelle MO som deler samme teknologi, men har forskellige teknikker og opgavetyper. Jeg vil ikke udspecificere disse punktuelle MO men i stedet blot præsentere forskellige opgavetyper og tilhørende teknikker som man møder i fx gymnasiet eller folkeskolen.

Den overordnede idé i de tilhørende teknikker er netop med til at understrege den teknologiske diskurs, der hører til den lokale MO, som de er knyttet til.

Mange af de opgaver der refereres til, er taget fra AB1 (**ab1:2005**; **s. 11-14**), men der er også sammenlignet med opgaver fra Gyldendal (**gyldendal:2005**; **s. 38-40**).

Jeg vil ikke udspecificere, hvis opgaverne kommer fra disse, "oplagte" sider, som handler om brøker, da man selv kan slå dem op. Men jeg vil referere til opgaver, der kommer fra andre steder og andre sider i bøgerne. Når jeg henviser til eksamensopgaver generelt, er jeg inspireret af bogen *Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik*

MO1 ækvivalens af rationale	
	Generelt:
	Rationale tal er ækvivalente, hvis de repræsenterer samme ækvivalensklasse.
	Decimaltal er ækvivalente hvis de konvergerer mod samme sum.
$T_{1.1} =$	*Forkort brøken (mest muligt)/Omskriv til en uforkortelig brøk*
$\tau_{1.1} =$	Divider med en fælles divisor n i tæller og nævner, så $\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b}$. Gentag til der ikke findes flere fælles divisorer.
$\tau_{1.1'} =$	Opløs tæller og nævner i faktorer. Fjern fælles faktorer.
$T_{1.2} =$	*Forlæng brøken $\frac{a}{b}$ med k*
$\tau_{1.2} =$	Gang med samme tal k i tæller og nævner.
$\tau_{1.2'} =$	Hvis der for ukendt k gælder $b \cdot k = c$ opskrives $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ og x isoleres ved at gange med c, dvs. $x = \frac{a}{b} \cdot c$.
$T_{1.3} =$	*Undersøg om to brøker er ens/ækvivalente*
$\tau_{1.3} =$	To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er ækvivalente, hvis $a \cdot d = c \cdot b$ Specielt ved fællesnævner gælder, at $a = b$
$\tau_{1.3'} =$	To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er ækvivalente, hvis $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1$
$\tau_{1.3''} =$	To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er ækvivalente, hvis $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$
$\tau_{1.3'''} =$	Negative brøker kan skrives på flere måder: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
$T_{1.4} =$	*Hvornår er to decimaltal ens?*
$\tau_{1.4} =$	Alle cifre er ens, pånær efterstillede nuller.
$\tau_{1.4} =$	Hvis der kun er efterstillede 9-taller, er det lig heltallet større fx $2,0\overline{0} = 1,9\overline{9}$

Tabel 6: Her ses teknonolgi, teknikker og opgaver til den lokale MO1.

(**stx:2012**). Mange af teknikkerne er inspireret af Zetra (**zetra:2016**), MatA1 (**mata1:2005**; **kap. 1**) og Webmatematik (**webmatmeatik:2016**) .

3.3.1 MO1: *Ækvivalens af rationale tal*

De rationale tal konstrueres ud fra de hele tal som ækvivalensklasser i et brøklegeme. Derfor bliver ækvivalens mellem rationale tal meget centralt i viden om 'de rationale tal'.

I tabel 6 ses den første lokale MO der netop omhandler ækvivalens af rationale tal.

I gymnasiet snakker man ikke så direkte om ækvivalens mellem brøker, men det handler mere om forkortning og forlængning af brøker.

Men selve det at vide, hvornår to brøker er ækvivalente kan alligevel være nyttigt. Det kan fx være de bliver i tvivl, om de har forlænget eller forkortet rigtigt. Da kan det være meget brugbart at kende teknikker til at undersøge om to brøker faktisk er ens.

I starten møder de opgaver, der direkte handler om at forlænge eller forkorte. Senere hen får de brug for disse teknikker når de fx i arbejdet med ligninger, funktioner, vektorer mm. støder på brøker som ikke er uforkortelige i et resultat. Dér forventes det ofte i gymnasiet, at man som en selvfølge reducerer facit til en uforkortelig brøk.

Så selvom eleverne i gymnasiet ikke arbejdet direkte med ækvivalensen mellem brøker så bruger de alligevel ofte deres viden om at to brøker er ens.

Eleverne kan dog godt støde på opgaver som handler mere direkte om ækvivalens end om forkortning og forlængning. Fx har AB1 (**ab1:2005; s. 24**) en opgave som lyder "Undersøg ved, at gange over kors, hvilke af følgende ligninger der er korrekte: $a)\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$ osv.".

Så 'korsreglen' som læres i gymnasiet i forbindelse med ligningsløsning refererer i virkeligheden direkte til definitionen af ækvivalens mellem brøker, da den vil have eleverne til at tage stilling til om brøkerne er ækvivalente netop ved at gange over kors.

Især i folkeskolen kan man møde opgaver, hvor det er nødvendigt at vide at $0,5 = 0,50$, hvis man for eksempel skal sammenligne decimaltal, eller at $1 = 0,999\cdots$ hvis lommeregneren er brugt til en udregning. Der arbejdes knap så meget med decimaltal i gymnasiet, men det er alligevel en viden som de forudsættes at have med sig fra folkeskolen.

3.3.2 MO2: *Omskrivning af rationale tal*

Rationale tal kan både repræsenteres som brøker og som decimaltal. Derfor handler denne lokale MO om, hvordan man kan omskrive mellem de forskellige repræsentationsformer. I tabel 7 ses en uddybning af denne lokale MO.

Ofte kan det i gymnasiet være nødvendigt at kunne omskrive mellem brøker og decimaltal.

Jeg har selv erfaret, at nogle elever foretrækker at arbejde med decimaltal mest muligt frem for brøker. Decimaltal gør især arbejdet med addition og subtraktion nemmere, mens brøker gør arbejdet med multiplikation og division nemmere.

Man kan vælge at omskrive frem og tilbage, alt efter, hvad der gør udregninger mest praktiske. Spørgsmålet er om selve omskrivningen i sig selv kommer til at tage for meget tid, hvis den ikke er nødvendig for besvarelsen af opgaven.

Hvis man i et facit får en brøk, kan det være nødvendigt at omskrive til decimaltal, hvis facit repræsenterer noget virkeligt, som fx et areal eller en længde. Dette skyldes, at det kan være svært at se for sig, hvor stort et areal $\frac{55}{4}$ egentlig er, hvorimod decimalnotationen tydeligt viser "hvor stort" arealet er.

Det er især opgaver, som fx eksamensopgaver, hvor man skal kommentere på facit, at det kan være nødvendigt at forstå 'størrelsen'.

Derimod vil man i en 'ren' matematikopgave, hvor der ikke forventes en tolkning eller en praktisk betydning, ofte foretrække, at facit bliver repræsenteret som en brøk. Derfor kan det i nogle tilfælde være nødvendigt at omskrive den anden vej, dvs. fra decimaltal til brøk.

Brøker angiver ofte i gymnasiet et mere præcist facit, da mange decimaltal er blevet afrundet af eleverne og dermed ikke angiver det eksakte rationale tal.

Omskrivning kan især være brugbar, hvis man har brugt en simpel lommeregner til en udregning og derigennem fået et kommatal, men facitlisten angiver svaret i brøker. Da kan det være nødvendigt med omskrivning for at indse, om man har regnet rigtigt.

	MO2 OMSKRIVNING AF RATIONALE
	Generelt:
	Alle rationale tal kan repræsenteres både som brøker og som decimaltal med endelige perioder.
$T_{2.1} =$	*Omskriv decimaltal til brøk*
$\tau_{2.1} =$	Decimaltal med endeligt antal decimaler $a_1, d_1 d_2 \cdots d_n$ omskrives til brøken $\frac{a_1 d_1 d_2 \cdots d_n}{10^n}$
$\tau_{2.1'} =$	Hvis der er et endeligt antal decimaler, kan man gange med et stort nok tal m, så decimaltallet x bliver til et heltal. Opskriv så brøken $\frac{mx}{m}$.
$\tau_{2.1''} =$	Decimaltal med uendelig antal decimaler og periode n $a_1, d_1 d_2 \cdots d_n d_1 d_2 \cdots$ omskrives til $\frac{a_1 d_1 d_2 \cdots d_n}{10^n - 1}$
$\tau_{2.1'''} =$	Heltal omskrives ved at give dem nævner 1, så $a = \frac{a}{1}$
$T_{2.2} =$	*Omskriv brøken $\frac{a}{b}$ til decimaltal*
$\tau_{2.2} =$	Brug divisionsalgoritme til at udregne $a \div b$ (divider tæller med nævner).
$\tau_{2.2'} =$	Brug brøkregneregler til at omskrive til én eller flere brøker, hvor man kender decimalværdien af hver brøk, eller simpelt kan udregne den (fx blandede brøker).
$\tau_{2.2''} =$	Brug lommeregner til at udregne divisionen $a \div b$
$T_{2.3} =$	*Omskriv til procent*
$\tau_{2.3} =$	Forlæng/forkort brøken $\frac{a}{b}$ indtil der står 100 i nævneren ved at gange/dividere med passende tal i tæller og nævner. Da kan tælleren ses som procenten.
$\tau_{2.3'} =$	Gang decimaltallet med 100 for at få procenten.
$T_{2.4} =:$	*Omskriv fra procent*
$\tau_{2.4} =$	Omskriv $x\%$ til brøk ved at give procenten nævner 100, dvs. $\frac{x}{100}$. Reducer eller forlæng evt. brøken.
$\tau_{2.4'} =$	Divider procenten $x\%$ med 100 for at få decimaltal
$T_{2.4} =$	*Repræsenter et rationalt tal grafisk*
$\tau_{2.4} =$	Opdel tallinje eller figur i et passende antal enheder. Find derefter antallet af enheder der skal tælles med. Decimaltal: Enhed $= 10^n$, hvor n er antal decimaler. Enheder der tælles med = tallet uden komma. Brøker $\frac{a}{b}$: Enhed $= b$. Enheder der tælles med $= a$

Tabel 7: Her ses teknonolgi, teknikker og opgaver til den lokale MO2.

For at kunne lave operationer mellem rationale tal, skal de være repræsenteret på samme form. Det gælder uanset hvilke repræsentationsformer de rationale tal er opskrevet på.

En omskrivning som eleverne ofte får brug for, når de skal regne med brøker, er omskrivningen fra heltal til brøk, da mange regnestykker præsenterer en blanding af brøker og heltal. Man kan se heltal som decimaltal, der kun har cifrene 0 efter kommaet eller cifrene 9 efter kommaet. Derfor er omskrivningen af heltal til brøker placeret under omskrivningen af decimaltal til brøk. Tilsvarende er omskrivningen fra brøk til heltal blot det samme som at omskrive til decimaltal, da teknikken er at udregne divisionen mellem tæller og nævner, som giver et heltal, hvis nævneren går op i tælleren.

I hverdagen og folkeskolen møder man ofte også procent-notationen. I gymnasiet er det mest i arbejdet med statistik, vækst og eksponentielle udviklinger at procenter bliver anvendt i gymnasiet.

Fx hvis man skal angive vækstraten og man kender fremskrivningsfaktoren på $1{,}055$, eller omvendt, at man kender vækstraten på $5{,}5\%$ og skal angive fremskrivningsfaktoren. I statistik får man i forbindelse med $\mathcal{X}^2$-test en p-værdi på fx $0{,}07812$, men når man skal konludere på testen er det vigtigt, at man omskriver til procent $7{,}8\%$ og sammenligner med signifikansniveauet som oftest er på 5%. Hvis man skal udregne frekvensen, får man brug for at opstille brøken $\frac{\mathtt{hyppighed}}{\mathtt{ialt}}$ og omregne denne til procent.

3.3.3 MO3*: Rationale tals orden*

Rationale tal er ligesom de hele tal udstyret med den sædvanlige ordensrelation, der gør at de netop kan placeres på en tallinje.

Denne lokale MO handler om ordenen mellem rationale tal. En uddybning af teknologi, teknikker og opgavetyper ses i tabel 8.

Det kan i gymnasiet være meget brugbart at kunne sammenligne to brøker, når man skal vurdere om et resutlat er korrekt udregnet.

Det kan fx være når man skal trække to brøker fra hinanden, at en vurdering af hvilken brøk der er størst kan vise om det er realistisk at resultatet er positivt eller negativt.

Tilsvarende er det fx vigtigt at kunne vurdere, om fx resultatet af $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$ er større eller mindre end de oprindelige brøker $\frac{1}{2}$ og $\frac{4}{5}$. Her kræves selvfølgelig også viden om, hvorvidt sådan et produkt bør give et mindre resultat, når der ganges med brøker mindre end 1.

Det er vigtigt i gymnasiet at kunne vurdere om et matematisk resultat er realistisk. Både i forhold til eksamen hvor de skal kunne lave skriftlige konklusioner men også undervejs hvor de måske ikke får opdaget deres fejl, hvis de ikke lærer at se på resultatet og vurdere det når en opgave er løst.

Det kan også være nødvendigt at vurdere, om grundtallet a i en eksponentialfunktion a^x er større eller mindre end 1. Dette er nemlig afgørende for om funktionen er aftagende eller voksende. I figur 4 ses et eksempel på en opgave, hvor 8 forskellige grundtal skal sammenlignes i forhold til hinanden.

I AB1 (**ab1:2005**; **s. 37**) findes en opgave, hvor ordenen mellem brøker skal afgøres.

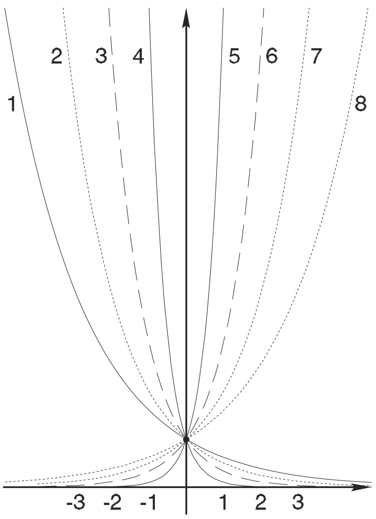
Opgaven lyder:

»For hvilke tocifrede tal med tværsum 12 er forholdet mellem det oprindelige tal, og det tal, der fremkommer ved ombytning af cifrene, mindre end $\frac{7}{8}$?«

Der er flere trin i denne opgave. Først kan man indse, at det drejer sig om tallene $39, 48, 57, 66$. Derefter skal man bruge teknikker om, hvordan man opstiller forholdet - disse kan ses i tabel

	MO3: RATIONALE TALS ORDEN
	Generelt:
	De rationale tal er udstyret med den sædvanlige lineære ordensrelation.
	Fælles teknikker:
$T_{3.0} =$	*Bestem orden mellem* x *og* y
	$\tau_{3.0} =$ Find fælles enhed og repræsenter tal på figur/tallinje.
	$\tau_{3.0'} =$ Divider x med $y > 0$. Hvis resultatet er større end 1, er $x > y$, ellers $y > x$. Omvendt hvis $y < 0$.
	$\tau_{3.0''} =$ træk x fra y. Hvis resultat er mindre end 0 er $x > y$, ellers $y < x$
	$\tau_{3.0'''} =$ Hvis $y > 0$ vil $x \cdot y > y \Leftrightarrow x > 1$ ellers $x < 1$ Omvendt hvis $y < 0$.
$T_{3.1} =$	*Bestem ordenen mellem* $\frac{a}{b}$ *og* $\frac{c}{d}$, *hvor* $b, d > 0$
$\tau_{3.1} =$	Gange over kors: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow ad > cb$
$\tau_{3.1'} =$	Forlænge til fællesnævner og sammenligne tæller: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{cb}{bd} \leftrightarrow ad > bc$
$\tau_{3.1''} =$	Omskriv til decimaltal og bestem derefter ordenen.
$\tau_{3.1'''} =$	Spejlvend brøkerne hvis de begge har samme fortegn: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c}$
$T_{3.2} =$	*Undersøg orden mellem to decimaltal*
$\tau_{3.2} =$	Endelig periode: Ændre decimaltallene til heltal ved at gange begge med samme passende 10'er potens. Undersøg nu orden mellem de to heltal.
$\tau_{3.2'} =$	Brug leksiografisk orden til at sammenligne hvert cifferpar - start fra venstre, indtil ordenen er bestemt. Hvis der kun er efterstillede 9-taller er det et heltal.

Tabel 8: Her ses alle teknikker tilhørende den lokale MO3.



"Grundtallene for otte eksponentialfunktioner er i vilkårlig rækkefølge: $\frac{5}{8}, 3, \frac{5}{8}, \frac{1}{10}, \frac{8}{5}, 10, 2, \frac{1}{3}$. Opskriv i rækkefølge forskrifter for funktionerne hvis grafer ses på figuren."

Figur 4: Eksempel på opgave, hvor ordenen mellem brøker skal sammenlignes (**ab1:2005**; **opg. 1011**).

12. Til sidst skal så vurderes ordenen mellem brøken $\frac{7}{8}$ og følgende brøker: $\frac{39}{93}, \frac{48}{84}, \frac{57}{75}, \frac{66}{66}$. Nogle af brøkerne er nemmere at vurdere end andre. Det er især brøken $\frac{57}{75}$ som kan være nødvendig at undersøge nærmere ved fx at anvende teknik $\tau_{3.1}$ om at gange over kors.

$$\frac{57}{75} < \frac{7}{8} \leftrightarrow 57 \cdot 8 < 75 \cdot 7 \leftrightarrow 456 < 525$$

Konklusionen må være, at forholdene $\frac{39}{93}, \frac{48}{84}, \frac{57}{75}$ alle er mindre end $\frac{7}{8}$.

Så selvom opgaven indeholder teknikker fra forskellige MO, så ses det heraf, at den også opfodrer eleven til at benytte teknikker fra MO3 om brøkers orden.

Eleverne kan i gymnasiet inden for de fleste emner komme ud for opgaver hvor de skal sammenligne to resultater, og hvis der er brøker i resultaterne, får de netop brug for viden om rationale tals orden. Det kan fx være de skal udregne to arealer mellem nogle grafer, og vurdere hvilket areal der er størst. Eller de skal vurdere i sandsynlighedsregning og statistik hvad der er størst sandsynlighed for. Det kan også være de skal sammenligne grafen for flere funktioner og har brug for viden om hvor stejl hver funktion er for at kunne lave en sammenligning.

Ofte i sådanne opgaver vil eleverne nok foretrække at omregne resultaterne til decimaltal og derefter sammenligne, men uden en lommeregner kan det være nødvendigt med viden om brøkers orden.

Andre opgaver hvor brøkers orden er relevant er, hvis eleverne skal lave en skitse af en funktion, hvor nogle af de kendte punkter indeholder brøker. Da er det vigtigt at kunne placere brøkerne korrekt på koordinatakserne, dvs. tallinjerne, for at få en meningsfuld skitse af den givne funktion.

I folkeskolen vil opgaver om brøkers orden typisk være mere simple og fx handle om at placere brøker og decimaltal på tallinjer. Der kan også være direkte opgaver som beder eleverne om at undersøge, hvilken af to brøker eller decimaltal der er størst. Det kan ligefrem være de bliver bedt om at skravere figurer for at vurdere, hvilken brøkdel der er størst.

Da decimaltal er knap så brugt i gymnasiet vil der ikke være så mange tilfælde, hvor eleverne direkte skal forholde sig til ordenen mellem decimaltal, men viden om dette kan alligevel være nyttig i forskellige sammenhænge når decimaltal alligevel optræder.

Det kan også være, at eleverne selv har omskrevet brøken til decimaltal for at gøre opgaven lettere at forholde sig til og der kan også optræde decimaltal i lignende opgaver som er nævnt omkring brøkers orden.

3.3.4 MO4: *Addition og subtraktion af rationale tal*

I gymnasiet er det vigtigt at mestre regnereglerne for rationale tal.

Denne lokale MO handler om, hvordan man lægger rationale tal sammen og trækker rationale tal fra hinanden. En uddybning af teknologi, teknikker og opgavetyper ses i tabel 9.

De typiske opgaver i gymnasiet vil til at starte med være formuleret som "angiv $\frac{3}{7} + \frac{2}{3}$ som en uforkortelig brøk". Man kan også godt møde opgaver til at starte med i gymnasiet som blot siger "udregn $\frac{4}{7} - \frac{5}{3}$", som minder mere om opgaverformuleringer fra folkeskolen.

I gymnasiet får opgaverne dog oftest dette tvist, hvor det kræves at brøkerne efter additionen også reduceres.

Teknikker til at reducere brøker er allerede blevet præsenteret under MO1 i tabel 6 og derfor vil jeg her kun fokusere på selve additionsdelen af opgaverne.

	MO4 ADDITION OG SUBTRAKTION AF RATIONALE TAL
	Generelt:
	Addition mellem to brøker er veldefineret og kræver fælles nævner. Subtraktion er det modsatte af addition. Decimaltal er reelle tal med de sædvanlige regneregler. De er rationale hvis de har endelig periode.
	Fælles teknikker for nedenstående opgaver:
$T_{4.0}$:	*Udregn* $x \pm y$
	$\tau_{4.0}$ = Brug lommeregner til at lave udregningen.
	$\tau_{4.0'}$ = Placer det ene tal på en tallinje. Læg/træk derefter det andet tal til/fra på tallinjen.
$T_{4.1}$:	*Udregn* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ *og* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
$\tau_{4.1}$ =	Forlæng til fællesnævner og læg tæller sammen eller træk dem fra hinanden.
$\tau_{4.1'}$ =	Brug formlen $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ eller $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
$\tau_{4.1''}$ =	Omskriv brøker til decimaltal og udfør udregningen.
$\tau_{4.1'''}$ =	Repræsenter brøkerne grafisk ved at skravere brøkdele i fx cirkler eller rektangler. Læg derefter brøkdelene sammen.
$\tau_{4.1''''}$	Ved subtraktion kan minus flyttes op i brøken, så subtraktionen bliver til addition. Addition af negative brøker laves tilsvarende til subtraktion.
$T_{4.2}$:	*Udregn decimaltallet* $a_1, d_1 d_2 \cdots \pm b_1 c_1 c_2 \cdots$
$\tau_{4.2}$ =	Træk/læg decimaltallene fra/til hinanden som almindelige tal uden at ændre på kommaets placering.
$\tau_{4.2'}$ =	Decimaltal med endeligt antal decimaler n ganges med et tal m, fx $m = 10^n$, så der opnås et heltal. Læg tal sammen/træk fra hinanden og divider med m.
$\tau_{4.2''}$ =	Tilføj efterstillede nuller så de får lige mange decimaler. Se bort fra komma og læg sammen/træk fra hinanden. Placer komma igen på samme placering.

Tabel 9: Her ses teknonolgi, teknikker og opgaver til den lokale MO4.

Der er også mere komplicerede opgaver med addition og subtraktion af brøker, hvor de også trænes i regningsarternes hiarki, fx opgaver som handler om at reducere udtryk som $\frac{5-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}+3}$.

I disse opgaver skal de også huske på, hvordan man omskriver heltal til brøker, jvf. teknik $\tau_{2.1'''}$ fra opgave $T_{2.1}$, så der er mange flere delopgaver indbygget i selve opgaven, da man stadig skal reducere til sidst også, jvf. opgave $T_{1.1}$.

Senere hen i gymnasiet kommer teknikkerne omkring addition og subtraktion til at være meget nyttige i arbejdet med bl.a. ligningsløsning og algebra, hvor de møder brøker med bogstaver og brøker ganget på bogstaver.

De første bogstaver møder de allerede i mødet med 'reducering', hvor de bl.a. kan møde opgaver som handler om at reducere udtryk som fx $\frac{1}{2a} - \frac{1}{5a}$.

Bogstaver i brøker kan gøre det svært for eleverne at forholde sig til dem. Måske fordi de ikke længere kan tillægge dem en bestemt værdi, eller placere dem på en tallinje?

Især i den bevisførelse de kan møde gennem hele gymnasiematematikken, kan det blive meget abstrakt for eleverne, men selve teknikkerne om at lægge brøker sammen og trække dem fra hinanden ændres ikke af at tallene er erstattet af bogstaver.

Som nævnt under MO2, kan det i forbindelse med addition nogle gange være nemmere med decimalnotation. Det er dog sjældent, at man i gymnasiet får brug for addition og subtraktion af decimaltal, medmindre man selv vælger at laver omskrivningen til decimaltal.

Et eksempel på opgaver med addition og subtraktion af decimaltal i gymnasiet kan være i arbejdet med logaritmer. Hvis man præsenterer eleverne for logaritmetabeller får de nemlig mulighed for at lægge en masse decimaltal sammen, hvis de skal udregne $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ uden brug af lommeregner.

Et andet eksempel er i trigonometri, hvor eleverne skal udregne $\cos^{-1}(v)$ for at finde vinklen, og denne udregning giver i de fleste tilfælde et decimaltal. Herefter skal de ofte bruge den fundne vinkel til at regne videre med, fx kan de udnytte at vinkelsummen er 180 til at finde den sidste vinkel, hvorved de får brug for subtraktion af decimaltal. Oftest vil eleverne dog blot bruge lommeregneren til en sådan udregning, da opgavetypen til eksamen er med hjælpemidler.

3.3.5 MO5: *Multiplikation og division af rationale tal*

I arbejdet med rationale tal skal man ikke kun kunne mestre operationerne addition og subtraktion men også multiplikation og division.

Denne lokale MO handler netop om, hvordan man multiplicerer og dividerer rationale tal med hinanden. En uddybning af teknologi, teknikker og opgavetyper ses i tabel 10.

De typiske opgaver vil også her være formuleret som "Angiv følgende som uforkortelig brøk". Efterfølgende gives en lang række variationer af udregninger, hvor de både skal håndtere brøker i forhold til brøker, fx $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ og heltal i forhold til brøker, fx $9 \cdot \frac{1}{6}$ og $\frac{21}{8} : 6$.

Det er også her, de bliver udfordret i forhold til 'minus'-tegnet i brøker, når de skal regne opgaver som fx $\frac{3}{5} : \left(\frac{-4}{5}\right)$.

Ligesom med addition og subtraktion af brøker bliver multiplikation og division af brøker meget nyttige redskaber hele vejen gennem gymnasiet. Først i forbindelse med ligningsløsning, hvor brøker kan optræde, og senere hen i forbindelse med fx funktioner, differentialregningen, integralregningen, statistikken osv. hvor brøker sagtens kan opstå i udregningerne.

Multiplikation mellem brøker og heltal er brugt meget i opgaver om forhold i ensvinklede trekanter. Disse opgavetyper er uddybet under MO7 i afsnit 3.3.7.

MO5 MULTIPLIKATION OG DIVISION AF RATIONALE TAL

Generelt:

Multiplikation mellem to brøker er veldefineret, så produktet er en ny brøk.
Division er det modsatte af multiplikation. Decimaltal er reelle tal.
De er rationale hvis endelig periode.

Fælles teknikker:

$\tau_{5.0}$ = Brug lommeregner til udregningen

$T_{5.1}$ = *Udregn brøkerne* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ *og* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

$\tau_{5.1}$ = Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$, forlæng evt. brøken $\frac{a}{b}$ først.

$\tau_{5.1'}$ = Division: Gang med den omvendte brøk $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$\tau_{5.1''}$ = Udregn trinvis: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = \frac{a \cdot c}{b} : d = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
og $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : \left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = \left(\frac{a}{b} : c\right) : \frac{1}{d} = \frac{a}{b \cdot c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$\tau_{5.1'''}$ = Præsenter multiplikation grafisk i rektangel. Brøkerne er rektanglets sider og multiplikationen er arealet.

$\tau_{5.1''''}$ = Division: find den brøk $\frac{m}{n}$, som opfylder $\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$

$\tau_{5.1'''''}$ = Division: Hvis en af tallene a, b, c, d er en brøk, så brug at brøkstregen kan ses som en division, fx $\frac{\frac{a_1}{a_2}}{b} = \frac{a_1}{a_2} : b$

$T_{5.2}$ = *Udregn produkt og kvotient mellem decimaltal* $a_1, d_1 d_2 \cdots$ *og* $b_1, c_1 c_2 \cdots$

$\tau_{5.2}$ = Brug multiplikation/divisionsalgoritmen for decimaltal og heltal.

$\tau_{5.2'}$ = Hvis decimaltallene begge har endeligt antal decimaler $n_1 > n_2$, ganges de begge med 10^{n_1}, så der opnås heltal. Udfør nu multiplikation/division
Ved multiplikation divideres resultatet med $10^{2 \cdot n_1}$

$\tau_{5.2''}$ = Multiplikation: Tæl samlet antal decimaler $n_1 + n_2$ i. Se bort fra komma og udfør multiplikation. Placer komma ved $n_1 + n_2$ decimaler. Division: Placer efterstillede nul så de har lige mange decimaler. Udnyt proportionalitet og se bort fra komma.

$\tau_{5.2'''}$ = Udnyt sammenhæng: $a \cdot b = c \leftrightarrow c : b = a$, fx er $8 \cdot 0,25 = 2$ så $2 : 0,25 = 8$

$T_{5.3}$ = *Udregn* $x\% \cdot y\%$ *og* $x\% : y\%$

$\tau_{5.3}$ = Brug formlen $x\% \cdot y\% = \frac{x \cdot y}{100}\%$

$\tau_{5.3'}$ = Brug formlen $\frac{x\%}{y\%} = \frac{x}{y}$

Tabel 10: Her ses alle teknikker tilhørende den lokale MO5.

Man kan se multiplikation af to brøker $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ som at tage $\frac{a}{b}$ af $\frac{c}{d}$.

Denne tolkning er nyttig i tekstopgaver, hvis man skal finde ud af hvor meget man har tilbage hvis man først drikker fx $\frac{1}{2}$ flaske cola og bagefter drikker $\frac{1}{3}$ af det der er tilbage, så har man netop drukket $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ af colaen.

Jeg har ikke fundet sådanne opgaver i gymnasiebøgerne. På trods af, at der ellers findes fx mange 'ord'-opgaver i forbindelse med ligningsløsning, så har man ikke valgt at bruge tid på 'ord'-opgaver i forbindelse med brøkregnereglerne.

I folkeskolen er der mere fokus på den grafiske tolkning af brøker, hvor der fx skraveres i et rektangel. Dette er ikke noget som opgaverne lægger op til i gymnasiet, da der er et mere abstrakt fokus på viden om rationale tal baseret direkte på notationen med brøker og ikke på den grafiske repræsentation.

I gymnasiet arbejder man ikke rigtig med division og multiplikation af decimaltal, da dette ofte gøres lettere i brøk-repræsentationen. Men det er stadig en teknik som det forventes at eleverne har lært i folkeskolen.

Man kommer heller ikke ofte ud for at skulle gange og dividere med procenter i gymnasiet, men det forventes stadig, at eleverne er i stand til at håndtere procenter.

Her er faren dog hvis eleven ikke tænker på den store forskel mellem multiplikation og division af procenter. Især er multiplikation drilsk, da man ikke blot kan gange procenttallene direkte sammen, men skal huske på hvor mange gange kommaet er flyttet for at få procent.

Det primære møde man har med procenter i gymnasiet handler i virkeligheden om vækst. For eksempel beskriver eksponentialfunktionen $f(x) = b \cdot (1+r)^x$ en vækst på r procent, eller at $f(x)$ bliver $1+r$ gange større for hver gang x stiger med 1.

Renteformlen er et andet eksempel på procentvis stigning og bliver brugt både i gymnasiet og folkeskolen.

Dog kan der godt inden for forskellige andre emner optræde opgaver med procent og decimaltal. Fx har AB1 (**ab1:2005**; **s.63**) under trigonometri en opgave som lyder:

"I ΔABC er A 60% af C og B er 150% af A. Hvor stor er den mindste vinkel?"

En sådan opgave skal netop løses ved multiplikation af procenter eller omskrivning af procent til decimaltal og efterfølgende multiplikation af decimaltal, for at man kan opstille ligningen:

$$180 = C + 60\% \cdot C + 150\% \cdot 60\% \cdot C \Leftrightarrow 180 = C + 0,6 \cdot C + 1,5 \cdot 0,6 \cdot C$$

Det interessante her er netop, at opgaven indeholder 'af'-tolkningen, dvs. tolkningen hvor det at taget noget 'af' noget andet netop repræsenterer multiplikation.

3.3.6 MO6: *Tætheden af rationale tal*

Tætheden ved de rationale tal er interessant, da det giver muligheden for at man altid kan finde et nyt rationalt tal imellem to forskellige rationale tal Denne lokale MO handler om tætheden af rationale tal. En uddybning af teknologi, teknikker og opgavetyper ses i tabel 11.

Selve tætheden af rationale tal er ikke noget der arbejdes direkte med i gymnasiet. Men det er en egenskab ved de rationale tal, som er vigtig for at vide, hvorfor man altid kan finde et nyt rationalt tal mellem to forskellige rationale tal.

Denne viden kan eleverne få brug for i forskellige opgaver, hvor de netop skal finde et sådant nyt ratioanlt tal. Fx i forbindelse med opgaver, hvor de har brug for at finde et intervalmidtpunkt, kan viden om rationale tals tæthed være med til at berettige at et sådant

	MO6: RATIONALE TALS TÆTHED
	Generelt:
	Der findes altid et nyt rationalt tal (dvs. uendeligt mange tal) mellem to forskellige rationale tal.
	Fælles teknikker:
$T_{6.0} =$	*Find et nyt tal imellem* x *og* y
	$\tau_6 =$ Der er uendeligt mange.
	$\tau_{6.0} =$ Omskriv til decimaltal eller brøk og derefter findes et nyt tal.
	$\tau_{6.0'} =$ Repræsenter tallene i en figur eller på en tallinje. Aflæs tal imellem.
$T_{6.1} =$	*Find en ny brøk imellem brøkerne* $\frac{a}{b}$ *og* $\frac{c}{d}$
$\tau_{6.1} =$	Brug formlen: $\frac{a+c}{b+d}$.
$\tau_{6.1'} =$	Brug formlen $\frac{ad+bc}{2bd}$ dvs. tag gennemsnittet.
$\tau_{6.1''} =$	Fællesnævner: vælg et tal x så $a < x < c$ dvs. $\frac{a}{b} < \frac{x}{b} < \frac{c}{b}$. Evt. forlænges brøkerne med et heltal $n > 1$ først.
$T_{6.2} =$	*Find nyt tal mellem* $m_1, c_1 c_2 \cdots$ *og* $n_1, d_1 d_2 \cdots$
$\tau_{6.2} =$	Find det første ciffer som adskiller dem, fx c_2 og d_2. Vælg nu et tal $m_1, c_1 k_2$ hvor $c_2 < k_2 < d_2$ og $m_1 = n_1, c_1 = d_1$. Hvis $d_2 = c_2 + 1$ vælges i stedet tallet $m_1, c_1 c_2 k_3$, hvor cifferet $k_3 > c_3$.
$\tau_{6.2'} =$	Tag gennemsnittet af tallene.

Tabel 11: Her ses alle teknikker tilhørende den lokale MO6.

intervalmidtpunkt er muligt at finde, ved blot at tage gennemsnittet af intervalmidtpunkterne. Det er altså vigtigt at vide at det faktisk er muligt at finde et nyt tal, for at en sådan opgave giver mening.

Hvis eleverne ikke har tilstrækkelig viden om tæthed af de rationale tal kan de måske få sværere ved at håndtere rationale tals placering på en tallinje.

Tætheden er også vigtig for senere hen at kunne forstå fx asymptoter, hvor man altid kan finde et mindre tal.

3.3.7 MO7: *Forhold og proportioner*

En brugt anvendelse af rationale tal er fx i geometriske sammenhænge, hvor man kan snakke om forhold og proportioner mellem størrelser. Denne lokale MO handler om, forhold og proportioner. En uddybning af teknologi, teknikker og opgavetyper ses i tabel 12.

I gymnasiet er Euklids geometri næsten et uddødt emne, som højest optræder som et valgfrit emne, eller i et tværfagligt projekt. Men Euklids geometri rummer som nævnt i afsnit 2.4 en stor anvendelse af de rationale tal, hvor de repræsenteres som et forhold mellem størrelser.

MO7: FORHOLD OG PROPORTIONER

Generelt:

Forholdet mellem to størrelser kan repræsenteres ved en brøk.
Proportionalitet er det samme som ækvivalens mellem brøker.

$T_{7.1}$ = *Find forholdet mellem to figurer som er ens, pånær størrelsen*

$\tau_{7.1}$ = Forholdet mellem to tilsvarende sider findes ved at dividere siderlængder n og m med hinanden. Da er $\frac{n}{m}$ og $\frac{m}{n}$ netop forholdene mellem figurerne.

$T_{7.2}$ = *Skalér en figur op/ned så en given side bliver n lang*

$\tau_{7.2}$ = Sidelængden m bliver n lang hvis den ganges med $\frac{n}{m}$.
De andre sider forlænges/forkortes med samme faktor.

$\tau_{7.2'}$ = Find forholdet mellem figurerne og gang alle sidelængder med dette forhold. NB! Hvis $\frac{m}{n} > 1$ skalerer det op. Dvs. $\frac{n}{m} < 1$ skalerer ned.

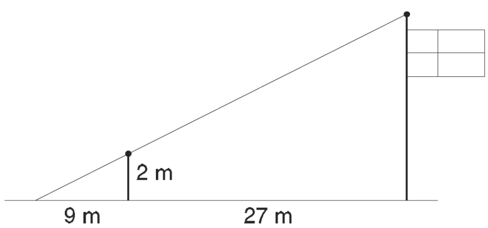
$T_{7.3}$ = *Undersøg om størrelserne x og y er proportionale*

$\tau_{7.3}$ = Proportional: Eksisterer et tal k så $\frac{x}{y} = k$ dvs. $y = k \cdot x$.
k kaldes proportionalitetsfaktoren.

$\tau_{7.3'}$ = Omvendt proportional: Eksisterer et tal k så $y \cdot x = k$ dvs. $y = \frac{k}{x}$.

$\tau_{7.3''}$ = Hvis ligningen beskriver linjer gennem $(0, 0)$ er x og y proportionale, da $y = ax$, hvor a er hældningen.

Tabel 12: Her ses alle teknikker tilhørende den lokale MO7.



Figur 5: En opgave fra gymnasiet (**ab1:2005; s. 47**), hvor forholdet mellem ensvinklede trekanter bruges til at bestemme højden af en flagstang.

x	4	8	10	30
y	2	4	5	15

Figur 6: Tabellen er fra en opgave (**ab1:2005; s. 106**), hvor det skal undersøges om variablerne x og y er proportionale.

Selvom Euklid ikke præsenteres for eleverne længere, så er der dog stadig en lille fremkomst af begrebet 'forhold' i gymnasiematematikken. Det er især i arbejdet ensvinklede trekanter under emnet trigonometri, at eleverne møder opgaver om 'forhold'.

Ensvinklede trekanter er figurer, som er identiske pånær størrelsen. Det betyder, at der findes et størrelsesforhold mellem alle figurens sider.

Typiske opgaver som gymnasieelever kan møde inden for dette emne (**ab1:2005**; **s. 47-48**) er variationer af opgaver som "find sidelængderne i de angivne ensvinklede trekanter"eller "find de resterende sider i de angivne ensvinklede trekanter".

Det kan også være, at der henvises til at en bestemt sidelængde skal findes. Der er dog altid givet mindst tre informationer om sidelængder, hvoraf de to af informationerne skal være to tilsvarende sider i de to ensvinklede trekanter, så forholdet mellem trekanterne kan findes, mens den sidste information er nødvendig for at kunne bruge det fundne forhold til at skalere sidelængerne op eller ned.

Også mere anvendelsesorinterede opgaver kan optræde, som fx opgaven i figur 5 hvor højden af en flagstang skal bestemmes ud fra oplysninger i en ensvinklet trekant.

I folkeskolen arbejder man også med forhold mellem andre størrelser end blot trekanter. Fx tror jeg, at idéen fra Brousseau's arbejde med decimaltal og brøker om at prøve at skalere et puslespil op, er en øvelse som mange har været igennem. Øvelsen udfordrer eleverne til at arbejde med figurer, der har anderledes former end blot de klassiske trekanter, firkanter og cirkler.

En anden måde at arbejde med forhold på er, at lade eleverne arbejde med målestoksforhold på fx landkort, eller at arbejde med skalering i et forstørrelsesglas eller en kikkert. Eller som Brousseau gør: at arbejde med forholdet mellem antallet af papirark og tykkelsen på papiret. Der findes et hav af praktiske anvendelser, hvor størrelesforhold er centrale.

I gymnasiet bruger man ikke så meget tid på disse direkte praktiske hverdagsanvendelser, men arbejder med mere abstrakte forhold som fx forholdet mellem to variable, fx x og y.

Dog møder man stadig praktiske anvendelser af matematikken når man fx snakker om forholdet mellem tid og sted, hvilket giver en hastighed eller forhold mellem svingningstid og snorlængde, disse eksempler er dog på grænsen til fysikkens verden. Tilsvarende kan findes forhold som anvendes i andre fag. Men det interessante er at forhold ikke behøver at være mellem størrelser af samme slags.

Typiske opgaver i gymnasiet omkring forhold mellem varible størrelser (**ab1:2005**; **s. 106-116**) vil være opgaver som "undersøg om x og y er proportionale og angiv i så fald proportionalitetsfaktoren". I figur 6 ses en tabel som eleverne kan møde i en sådan opgave. Der er tilsvarende formuleringer for opgaver, der handler om hvorvidt variablene er omvendt proportionale.

Opgaver om rette linjer handler i virkeligheden også om forhold, da hældningen på en linje netop udregnes som forholdet mellem forskellen i x og y-værdier. Hvis linjen går gennem origo, kan hældningen blot udregnes som forholdet mellem x og y-værdierne. I så fald er hældningen a netop proportionalitetsfaktoren.

Der optræder også modelleringsopgaver, hvor eleverne selv skal opstille matematiske sammenhænge ud fra en tekst. Fx skal de ud fra nogle informationer undersøge om sammenhængen mellem antal fotokopier og prisen for fotokopering er proportional.

Sådanne opgaver kan godt minde om opgaver fra folkeskolen, hvor forskellen blot er, at det i gymnasiet oftere er 'tænke'-opgaver, hvor folkeskoleeleverne, afhængig af klassetrin, måske selv skal prøve sig frem ved at arbejde med det i praksis. Fx hvis forholdet mellem hastighed og vejlængde skal undersøges, får eleverne måske lov til at cykle og måle og udregne forholdene.

4 METODOLOGI

Her vil jeg uddybe, hvilke valg jeg har taget undervejs og bl.a. komme ind på, hvordan jeg har forsøgt at besvare forskningsspørgsmålene og udføre mine empiriske undersøgelser .

Jeg har i kapitel 2 undersøgt, hvilke didaktiske udfordringer vedrørende rationale tal der er kendt fra bl.a. forskningslitteraturen (1.forskningsspørgsmål). Dette er gjort ved at undersøge, hvad der overordnet set er blevet forsket i, inden for rationale tal. Da det er et stort forksningsområde, er det kun muligt at få et overordnet overblik i dette speciale.

Jeg har igennem min konstruerede PRM forsøgt at få et overblik over, hvilke opgavetyper og teknikker det kan forventes, at gymnasieelever (og dermed også lærerstuerende) har viden om (2.forskningsspørgsmål).

Jeg har i valget af de lokale MO taget udgangspunkt i Putras oversigt fra figur 16 i appendiks D. Årsagen er, at Putra (**zetra:2016**) allerede har gjort et stort arbejde med at danne sig et overblik over de rationale tal, og derfor er det et godt udgangspunkt. Jeg har revideret Putras ideér på baggrund af den teori om de rationale tal, som jeg har arbejdet med i kapitel 2.3. Målet har været at forsøge at organisere viden om rationale tal i lokale MO ud fra forskellige teknologiske diskurser.

Jeg har i valget af de forskellige opgavetyper taget udgangspunkt i gymnasieopgavebogen 'AB1' fra Systime (**ab1:2005**), som er det bogsystem jeg selv har undervist de to pågældende gymnasieklasser ud fra. Derudover har jeg brugt gymnasieopgavebogen 'Gymnasiematematik' fra Gyldendal (**gyldendal:2005**) til at sammenligne med, for at få et bedre indblik i, hvad der er typiske opgaver og formuleringer for gymnasiet. Jeg har valgt at fokusere på bøger møntet til 1.g, da jeg netop har ønsket at teste 1.g'ere, så målet har været at fokusere på, hvilke opgavetyper de må forventes at have mødt i matematikundervisningen. Ifølge Poulsen (**poulsen:2015**) er disse to bogsystemer netop de to mest anvendte i gymnasiet, da disse var de første til at udkomme efter, at den nye reform trådte i kraft. Derfor kan de til sammen give et godt indblik i, hvilket materiale gymnasielærerne underviser ud fra, og dermed hvilken viden der bliver formidlet til gymnasieleverne.

Derudover har jeg også benyttet mig af hjemmesiden (**webmatematik:2016**) til at blive inspireret til konkrete teknikker. Årsagen er, at hjemmesiden mønter sig til både folkeskoleelever og gymnasieelever, så den dækker bl.a. den viden om rationale tal som det må forventes at eleverne har haft med sig fra folkeskolen. Et indtryk blandt mine egne gymnasielever er, at flere har brugt denne side i folkeskolen og forsætter med at bruge den som en form for formelsamling i gymnasiet.

For at undersøge hvilken praktisk viden gymnasieelever og lærerstuderende har om rationale tal (3.forskningsspørgsmål), så har jeg foretaget to empiriske undersøgelser.

Formålet har været at undersøge, hvad eleverne faktisk ved, da det på ingen måde kan forventes at være den samme viden som de er blevet undervist i, pga. den transposition som viden om rationale tal har gennemgået fra læreren formidler viden til eleverne modtager viden.

4.1 EMPIRISK UNDERSØGELSE AF GYMNASIEELEVER

Et af formålene med specialet er at undersøge, hvilken viden om rationale tal gymniseelever og lærerstuderende rent faktisk har. For at undersøge denne viden er jeg nødt til at evaluere dem.

Evaluering handler ifølge (**gymnasie:2006**) om at vurdere, om eleverne lever op til de krav der forventes af dem, ved systematisk at indsamle information. Som mål for hvad der forventes af dem, tager jeg udgangspunkt i min konstruerede PRM.

En intuitiv vurdering er fx, når jeg gennem min undervisning som gymnasielærer og gennem dialog med andre gymnasielærere fornemmer, at eleverne ikke lever op til de forventede krav til viden om rationale tal i gymnasiet.

Men da vurderingen bygger på fornemmelser og skøn, har jeg netop her i specialet valgt at undersøge dette nærmere ved at lave en vurdering som er forankret i nogle bestemte mål og metoder.

Specialet arbejder primært med den praktiske viden. Derfor har jeg i gymnasiedelen valgt en summativ evaulering, hvor jeg udarbejder en test GT som gymnasieeleverne skal svare på. På den måde kan jeg evaulere om eleverne kan løse typiske opgaver og anvende relevante teknikker eller om de ikke mestrer dem. Det kan svært at lokalisere teknikker ud fra en skriftlig besvarelse, hvis der ikke er passende mellemregninger med. Derfor har jeg i designet af spørgsmålene også fokuseret på at formulere dem sådan, at eleverne opfordres til at vise deres mellemregninger og teknikker.

Efterfølgende vil jeg igennem interviews af enkelte gymnasieeleverne yderligere evaluere dem. Jeg giver dem mulighed for at uddybe deres svar fra testen. På den måde får jeg et bedre indblik i elevernes teknikker og håndtering den viden, som de har.

Det blev sagt tydeligt til gymnasieeleverne inden testen blev udleveret, at formålet med testen er at undersøge, hvordan de rent faktisk løser opgaverne, og derfor er mellemregninger og forklaringer vigtigere, end hvorvidt de løser opgaven korrekt. Med det menes, at jeg også er interesseret i at vide, hvilke forkerte teknikker de bruger. Så i modsætning til andre test som de kender fra gymnasiet, er det vigtigste ikke at fokusere på, hvor godt de klarer testen men blot på, at de forsøger at svare på spørgsmålene. Samtidig har jeg dog også valgt at gøre det klart for gymnasieeleverne, at jeg hellere vil have, at de undlader at svare end at de kommer med et vildt gæt. For det kan være svært at analysere deres faktiske viden, hvis de blot gætter fordi man "skal"svare et eller andet.

For 3.g'erne havde testen ingen betydning for karakteren, da den blev udleveret dagen før offentliggørelsen af eksamensplanen, hvilket var EFTER karaktergivningen. Fordelen er, at de dermed bedre kan fokusere på, hvad de faktisk ved, end på at de skal præstere. Ulempen ved at karakterpresset forsvinder er, at noget af motivationen til at gennemføre testen grundigt forsvinder. Mit indtryk er dog, at klassen generelt ønskede at gøre en indsats for at hjælpe mig med specialet.

1.g'erne fik derimod at vide, at testen i sig selv ikke var en del af årskarakteren, men at resultatet af testen ikke kunne undgå at påvirke mit indtryk af elevernes generelle præstation i matematik. Formålet med denne besked var at tage noget af presset fra testen. På den måde kan eleverne bedre slappe af, hvis de har svært ved at håndtere et stort pres. Samtidig kan nogle elever have rigtig godt af at vide, at der stadig er et vist pres, så derfor valgte jeg på denne måde at sige, at testen havde betydning for årskarakteren, men ikke stor betydning.

Jeg har baseret mit design af Gymnasietest (GT) på den konstruerede Prakseologisk Reference

Model (PRM). På den måde undersøges, om eleverne har den forventede viden om rationale tal. Den forventede viden er folkeskolepensum, og elever der vælger matematik på A-niveau må forventes at kunne lide matematik og at have præsteret godt i matematik i folkeskolen. Gymnasiet forventer, at eleverne har styr på det grundlæggende fra folkeskolen. Det betyder, at elever med matematik på A-niveau generelt skal kunne løse testen uden store problemer, hvis de skal leve op til gymnasiets forventinger.

Gymnasieelevernes viden om rationale tal er ikke blevet væsentligt udvidet siden 7.klasse, bortset fra mere rutine. Derfor vil flere af opgaverne omhandle fx decimaltal, selvom de er knap så anvendte i gymnasiet. Det er nemlig interessant at få en generel vurdering af elevernes viden om rationale tal og ikke blot om deres viden om brøker, for brøker er blot én repræsentation af de rationale tal.

Jeg har som en del af designprocessen lavet en a priori-analyse af GT, for at undersøge, hvilke teknikker og svar jeg forventer fra eleverne. Denne analyse har efterfølgende dannet grundlag for min a posteriori-analyse af elevernes besvarelse af GT. Dette er for at kunne vurdere, hvorvidt eleverne har den forventede viden om rationale tal.

GT er lavet som en test uden hjælpemidler, da jeg ikke er interesseret i at vide, hvor gode de er til at bruge en lommeregner, men ønsker at undersøge, hvad de rent faktisk har af praktisk viden om rationale tal. Opgaverne er bevidst lavet enkle, så de bliver testet i opgavetyper og konkrete teknikker. Formuleringerne er forsøgt valgt sådan, at de giver mindst mulig grund til forvirring. Dette er fx gjort ved at lade formuleringer minde om opgaver fra gymnasiet.

Jeg har baseret GT på min PRM på en sådan måde, at jeg har forsøgt at komme rundt om hele emnet om de rationale tal ved at komme ind omkring alle 7 lokale MO. Jeg har også valgt at inddrage mange af spørgsmålene til de lærerstuderende (HLO) i GT. Nogle dog i en modificeret udgave, så de passer bedre til gymnasieelevernes matematiske niveau. Årsagen er, at Putra på forhånd har sat sig ind i, hvilke opgavetyper der kan være problematiske for folkeskoleelever. Derfor er det interessant at undersøge, om opgavetyperne også er problematiske for gymnasieelever. Samtidig gør inddragelsen af HLO, at en sammenligning mellem gymnasieelever og seminariestuderende bliver lettere. Selvom sammenligning dog er svær, da de ikke er blevet testet på samme måde. Selvom gymnasieeleverne og de lærerstuderene er blevet testet inden for nogle af de samme tekniske områder, så har gymnasietesten haft et langt større fokus på den tekniske viden og variationen af denne.

Jeg har desuden valgt, at designe nogle ekstraopgaver, for at undgå, at en stor del af klassen bliver for hurtigt færdige og forlader lokalet tidligt. Problemet ved denne adfærd er, hvis de resterende elevere bliver stressede over at se kammeraterne værre færdige med testen.

4.1.1 *Udførelse af GT*

Gymnasietest (GT) blev givet til to gymnasieklasser - én 1.g-klasse og én 3.g-klasse. De pågældende klasser er meget sammenlignelige, da det er to klasser på det Kristne Gymnasium i Ringkøbing, som begge er blevet undervist af mig. Dog har 3.g'erne kun haft mig som lærer i de to sidste år. Desuden har begge klasser de samme studieretninger - matematik A + Fysik B og Matematik A + Samfundsfag B. De er altså begge klasser med flere studieretninger.

Formålet med at give to sammenlignelige klasser den samme test, er for at undersøge, om elevernes viden om rationale tal har ændret sig fra 1.g til 3.g. Det kunne have været interessant også at teste elever, der lige var begyndt i gymnasiet, for at undersøge hvilke forudsætninger gymnasieelever har med sig fra folkeskolen. Dette har dog ikke været muligt pga. tidspunktet specialet er lavet på, nemlig om foråret. Testen blev først givet til eleverne lige før læseferien. Dette skyldtes, at jeg var nødt til at have PRM på plads før en konstruktion af GT og a priori-analysen af GT kunne blive udført. A priori-analysen var vigtig at have på plads, da denne var med til at finjustere spørgsmålene så de var mere målrettede dét jeg faktisk ville undersøge.

Man kunne også have undersøgt flere klasser, der havde forskelligt matematikniveau. Da den grundlæggende viden om rationale tal er noget eleverne bør have lært i folkeskolen, burde der i princippet ikke være forskel på den viden eleverne har på matematik C, B og A -niveau. Dog må man forvente, at de elever der fra starten har valgt en studieretning på A-niveau generelt præsterede bedre i matematik i folkeskolen end de der har valgt C-niveau. Derfor kunnne der også være en tendens til, at elever med matematik på A-niveau vil præstere bedre når det handler om rationale tal. Dette kan dog ikke vurderes i dette speciale, da der kun er testet på klasser med matematik A-niveau.

Det var svært at vide, hvor langt tid eleverne skulle bruge til at løse GT. Da formålet ikke var at teste dem i, hvor godt de arbejder under pres, men blot at undersøge hvad de egentlig ved om rationale tal, så valgte jeg at vurdere tiden, de skulle have ud fra, hvor hurtigt de fik løst opgaven.

For 3.g'ernes vedkommende begyndte flere at være færdig med ekstraopgverne efter blot 25 minutter og efter 35 minutter var alle pånær meget få færdige med selve testen. Eleverne fik derfor lov til at forlade lokalet, hvilket resulterede i, at de resterende få elever også valgte at stoppe og aflevere deres resultat. Man skal huske på, at det drejer sig om elever der en uge senere skulle til skriftlig eksamen, så de er på dette tidspunkt trænede i at arbejde hurtigt og under press.

Derimod var der kun to 1.g'ere som ønskede at forlade lokalet før tid, de resterende elever blev siddende hele 45 minutter og alligevel var enkelte elever ikke blevet færdige da lektionen sluttede. Man skal her huske på, at 1.g'erne er knap så rutinerede i prøver og i at arbejde under pres.

For sammenlignelighedens skyld kan det være problematisk at eleverne ikke fik samme tid, men samtidig fik de lige vilkår, da prøven ikke sluttede før størstedelen af eleverne var færdige.

Da interviewene skulle udføres, havde jeg først forsøgt at danne mig et overblik over elevernes besvarelser og derigennem hvilke elever det kunne være interessant at få en uddybene dialog med. Problemet var dog, at jeg pga. sommerferiens snarlige komme havde svært ved at få fat i eleverne, som ikke alle tjekkede deres onlinebeskeder i kommunikationssystemt lectio den sidste uge af skoleåret.

Derfor blev eleverne til interview udvalgt efter, hvem jeg kunne finde på skolen og som havde tid til et kort interview. Interviewene varede mellem 8 og 18 minutter afhængig af, hvor meget relevant der skulle uddybes ved hver elev. Ingen af de adspurgte elever havde noget imod at deltag i et interview, men de få elever som alligevel takkede nej havde rigeligt andet at se til, og havde derfor ikke tid til et interview. Nogle var fx blevet studenter den pågældende dag og skulle selvfølgelig fejre det med familien.

Interviewene af gymnasieeleverne blev kun optaget med diktafon og ikke video. Fravalget af video skyldtes manglen på kameramand og dermed risikoen for tekniske problemer. Den største frygt var risikoen for, at videoen slet ikke optog noget. Fordelen ved diktafon på mobilen var, at det var nemt at starte og holde øje med optagelsen undervejs. Ulempen er, at man ikke kan koble det sagte sammen med fx armbevægelser og forskellige skriverier som eleverne lavede på udlevere blanke A4-ark, der fungerede som 'tavler' under interviewene.

4.2 EMPIRISK UNDERSØGELSE AF LÆRERSTUDERENDE

I samarbejde med Zetra Putra (**zetra:2016**) har jeg også lavet interview af nogle lærerstuderende. Årsagen til at koble de lærerstuderende til specialet var for at drage fordel af, at Putra og jeg arbejdede med det samme matematiske begreb rationale tal. På denne måde kunne vi altså inspirere hinanden i vores arbejde. Da lærerstuderende på 1.år må forventes at have cirka samme viden om rationale tal som gymnasieelever, er det muligt at lave denne kobling.

Den empiriske undersøgelse blev lavet på førsteårslærerstuderende, der var blevet undervist i matematik i et halvt års tid. De studerende gik på læreruddannelsen på Metropol beliggende på Frederiksberg. To tredjedele af de interviewede havde haft matematik på A-niveau og de resterende havde haft matemematik på B-niveau. Deres skriftlige karakterer i matematik i gymnasiet varierer fra 4 til 12, dog flest i den høje ende. Det er ikke typisk for lærerstuderende der vælger matematik som linjefag, at have matematik på så højt niveau, så det viser, at Metropol er en skole, som tiltrækker studerende som generelt præsterer godt i matematik.

Lærerstuderende der vælger matematik må generelt forventes at have matematik på mindst B-niveau. Dog er det muligt at få dispensation, hvis man kun har haft matematik på C-niveau, så det er langt fra alle i landet der har haft mindst B-niveau. Uanset hvad, må det stadig forventes, at deres viden om rationale tal er sammenlignelig med gymnasieelever der har haft matematik i mindst ét år i gymnasiet. Dette skyldes, som nævnt tidligere, at viden om rationale tal er noget, der burde være lært i folkeskolen.

Putra (**zetra:2016**) havde på forhånd designet nogle Hypotetiske Lærer Opgaver (HLO), hvor de lærerstuderende skulle tage stilling til, hvordan de ville håndtere nogle hypotetiske lærersituationer. Designet af disse HLO er baseret på lignende design og analyse som ses hos Durand-Guerrier, Winsløw og Yoshida (**model:2010**) og bygger på ATD. Selve indholdet i de forskellige HLO er inspireret af forskellig didaktsik forskning om de rationale tal og de tilhørende udfordringer i folkeskolen.

Interviewene var i virkeligheden en dialog imellem de lærerstuderende. Der blev interviewet fem grupper med to personer i hver. Grupperne var valgt ud fra, at eleverne i forvejen var vandt til at arbejde sammen i gruppen. Dette var for at sikre at de studerende kunne arbejde sammen og få en meningsfyldt dialog. Man kunne også have valgt at lave grupperne selv, så de ikke havde medbestemmelse, og man kunne have valgt, at der skulle være en ligelig kønsfordeling. Men det er altså blevet vægtet højere, at grupperne var trygge ved hinanden og dermed kunne diskutere meningsfuldt.

Én enkelt gruppe var en 3-mands gruppe, som ikke ønskede at splitte sig op. Det viste sig dog, at det var svært efterfølgende at transkribere samtalen, da det er sværere at skelne, når tre personer snakker i munden på hinanden. Dialogen i 3-mandsgruppen bar også præg af, at det tog for lang tid, at de alle tre skulle bekræfte hinanden. Derved nåede de ikke lige så langt omkring som nogle af de andre grupper. På trods af, at de ellers var flere personer til at komme med ideér.

Interviewene forgik ved, at de studerende ankom i grupperne og startede med at underskrive en forside med generelle informationer om fx matematikniveau i gymnsaiet. Derefter blev de instrueret i, hvad det hele gik ud på og fik at vide, at de meget gerne måtte bruge papiret som en tavle i diskussionsdelen til at tegne og udregne mens de diskuterede. Derefter fik de udleveret de forskellige HLO ét af gangen uden yderligere indblanding. Der kom dog alligevel en anelse dialog, når de studerende blev i tvivl om, hvad de skulle. Formålet var at observere de studerendes dialog uden for meget indblanding udefra, derfor blev diskussionsdelen filmet og papirerne de skrev på undervejs blev indsamlet.

De studerende skulle først svare på en skriftlig opgave hver for sig i ca. 4 minutter. Denne individuelle del var til for at sikre sig, at de alle havde tid til selv at tænke over matematikken inden dialogen. Deres skriftlige del kunne efterfølgende fungere som et springbræt når de skulle diskutere i ca.5 minutter om en hypotetisk lærersituation, hvor de skulle tage stilling til, hvordan de ville formidle noget viden til nogle folkeskoleelever.

Grupperne fik ikke opgaverne i samme rækkefølge, så nummereringen er kun til for at kunne referere til opgaverne. Årsagen til forskellen i rækkefølge var for at undgå, at rækkefølgen påvirkede resultatet. Det kunne tænkes, at de studerende lige skulle vænne sig til interview-formen og at det kunne påvirke interviewene.

Jeg vil her i specialet fokusere på den matematiske praktiske viden de studerende har om rationale tal i stedet for deres didaktiske viden.

I desginet af Hypotetiske Lærer Opgaver (HLO) er der angivet tid ved hvert delspørgsmål, for at de lærerstuderende ved, hvor meget tid der skal bruges på hver del og for at interviewene ikke trækker ud og alle interviewene får lige vilkår. Tiden er vurderet ud fra, at hvert spørgsmål skal vare ca. 9 minutter og så er der 1 minuts buffer imellem hvert spørgsmål til at indsamle og uddele de næste spørgsmål. På denne måde vil hvert interview vare ca. 50 minutter, hvilket giver 10 minutters buffer til efterfølgende at udspørge de studerende om deres oplevelse af spørgsmålene. Årsagen til dette var, at interviewene var et pilostudie for Zetra Putra, som havde brug for evaluering af spørgsmålene og intverview-formen for at kunne optimere dem til sine videre undersøgelser i større skala.

5 GYMNASIEELEVERS VIDEN OM RATIONALE TAL

For at undersøge gymnasieelevers viden om rationale tal, har jeg lavet en Gymnasietest (GT), som her i kapitlet blive analyseret og gennemgået spørgsmål for spørgsmål. En oversigt over den samlede test som eleverne fik udleveret ses i tabel 33 i bilag B.7.

Jeg har i kapitel 2 været inde på nogle af de didaktiske udfordringer som forskningen har påpeget ved de rationale tal. I kapitel 3 har jeg præsenteret en Prakseologisk Reference Model (PRM) for de rationale tal. Med baggrund i dette har jeg designet testen.

Spørgsmålene i gymnasietesten (GT) er forsøgt udvalgt ud fra, at de skal opfylde mindst én af følgende kriterier:

R) Særlig relevant for gymnasiet

P) Særlig problematiske for eleverne

Når det skal afgøres om noget er problematisk, henvises der bl.a. til tabel 1 fra kapitel **??** som opremser en række typiske udfordringer ved de rationale tal.

Derudover er der to parametre mere som særligt har haft indflydelse på designet af spørgmålene i GT.

Det først er, at spørgmålene tilsammen skal dække alle MO fra den konstruerede PRM om rationale tal. Dette er for at teste eleverne så bredt som muligt.

Den sidste parameter er, at spørgmålene som de lærerstuderende jvf. kapitel 6 fik (HLO) til en vis grad også skal medtages i GT, da det vil gøre en eventuel sammenligning lettere. Desuden er de forskellige HLO også designet ud fra, hvad der ifølge forskningen kan forventes at være problematiske.

I tabel 13 ses en oversigt over, hvordan de forskellige spørgsmål i GT opfylder de nævnte parametre. Under a priori analysen er argumentationen for valget og designet af de forskellige spørgsmål uddybet. Som det ses følger spørgsmålenes samme rækkefølge som de tilhørende MO i den konstruerede PRM. Dette skyldes at den valgte rækkefølge netop er valgt fordi det følger en naturlige progression og opbygning i viden om de rationale tal.

5.1 A PRIORI ANALYSE AF GT

Gennem en a priori analyse af GT vil jeg undersøge, hvilke teknikker jeg forventer vil blive brugt til spørgsmålene. Dermed får jeg kortlagt med det samme om spørgsmålene er designet til at opnå det jeg ønsker.

I tabel 14 ses en tabel over, hvilke teknikker jeg forventer og IKKE forventer vil blive brugt i gymnasieelevernes besvarelse af GT. Jeg har også medtaget eventuelle forkerte teknikker som eleverne kunne finde på at anvende. Bemærk, at alle teknikker og opgaver som optræder i konstruktionen af PRM er medtaget i tabellen. Dermed er det nemt at overskue, hvor stor en del af den prakseologiske referencemodel der forhåbentlig bliver dækket i GT.

Nogle teknikker og opgavetyper er som nævnt ikke medtaget i GT. Årsagen deles op i om de er for svære (S), for lette (L), ukendte for eleverne (U) eller for irrelevante (IG) i gymnasiesammenhænge. En teknik kan også være irrelevant (IK) i forhold til det konkrete spørgsmål uden at være irrelevant i gymnasiesammenhænge. Nogle teknikker handler også

Spørgsmål (GT)	**MO**	**HLO**	**Kriterie**	**Tabel 1**
1. *Ens brøker*				
a) "Lig"	MO1	HLO1	P	pkt. 3
b) Reducer	MO1		R, P	pkt. 4
2. *Omskrivning af tal*				
a) Decimaltal til brøk	MO2	(HLO5)	P	
b) Brøk til decimaltal	MO2	(HLO3)	P	
c) Brøk til procent	MO2		R	
d) Procent til decimaltal	MO2		R	
3. *Sammenligning af tal*				
a) Decimaltal	MO3	HLO2		pkt. 1
b) Brøker	MO3		R, P	pkt. 1
4. *Regne med brøker*				
a) Addition	MO4	HLO4	R, P	pkt. 2
b) Subtraktion	MO4	HLO4	R, P	pkt. 2
c) Multiplikation	MO5		R, P	pkt. 2
d) Division	MO5		R, P	pkt. 2
e) Multiplikation	MO3	HLO5	P	
5. *Regne med decimaltal*				
a) Addition	MO4		R	
b) Subtraktion	MO4		R	
c) Multiplikation	MO5	HLO5	P	
d) Division	MO5	HLO5	P	
6. *Hvor mange tal*				
a) Brøker	MO6	HLO3	P	
b) Decimaltal	MO6	HLO3	P	
7. *Forhold ml. størrelser*				
a) Kvadrater	MO7		R, P	
b) Formel	MO7		R, P	

Tabel 13: Spørgsmålene i GT vælges ud fra flere parametre:
1) Alle MO (tabel 5, 6-12) bruges
2) Alle HLO (tabel 26-30) bruges
3) Mindst ét kriterie opfyldt: R=Relevant, P=Problematisk
Det er også medtaget hvis opgavetypen er med i tabel 1 over typiske udfordringer ved de rationale tal.

GT	Opgave	Forventet teknik	Forkert teknik	Usandsynlig/Udeladt teknik
1.a)	$T_{1.2}, T_{1.3}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.2}}}}, \tau_{1.3}, \tau_{1.3'}, \tau_{1.3''}$	$\tau_{1.2*}, \boldsymbol{\tau_{1.2**}}, \tau_{1.3*}$	$\tau_{1.2'}$(IK)
1.b)	$T_{1.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.1}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.1'}}}}, \tau_{1.3'''}$	$\tau_{1.1*}, \boldsymbol{\tau_{1.1**}}$	
÷	$T_{1.4}$			$\tau_{1.4}$(L), $\tau'_{1.4}$(L)
2.a)	$T_{2.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.1}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.1'}}}}$	$\boldsymbol{\tau_{2.1*}}, \boldsymbol{\tau_{2.1**}}$	$\tau_{2.1''}$ (U/IK), $\tau_{2.1'''}$ (IK)
2.b)	$T_{2.2}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.2}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.2'}}}}$	$\boldsymbol{\tau_{2.2*}}$	$\tau_{2.2''}$ (C)
2.c)	$T_{2.3}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.3'}}}}$	$\tau_{2.3*}$	$\tau_{2.3}$ (IG)
2.d)	$T_{2.4}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{2.4'}}}}$	$\tau_{2.4*}$	$\tau_{2.4}$ (IG)
3.a)	$T_{3.2}$	$\boldsymbol{\tau_{3.2}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{3.2'}}}}, \tau_{3.0}, \boldsymbol{\tau_{3.0''}}$	$\tau_{3.2*}, \tau_{3.2**}$	$\tau_{3.0'}$ (IK), $\tau_{3.0'''}$ (IK
3.b)	$T_{3.1}$	$\tau_{3.1}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{3.1'}}}}, \boldsymbol{\tau_{3.0}}, \boldsymbol{\tau_{3.0''}}, \tau_{3.1'''}$	$\tau_{3.1*}, \tau_{3.1**}$	$\tau_{3.0'}$ (IK), $\tau_{3.0'''}$ (IK)
4.a + b)	$T_{4.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{4.1}}}}, \tau_{4.1'}, \tau_{4.1''}, \tau_{4.1''''}$	$\tau_{4.1*}$	$\tau_{4.1'''}$(IG), $\tau_{4.0}$(C), $\tau_{4.0'}$(IG)
4.c)	$T_{5.1}, T_{1.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{5.1}}}}, \tau_{5.1''}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.1}}}}, \tau_{1.1'}$	$\boldsymbol{\tau_{5.1*}}, \boldsymbol{\tau_{5.1**}}$	$\tau_{5.1'''}$(IG), $\tau_{5.0'}$(C)
4.d)	$T_{5.1}, T_{1.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{5.1'}}}}, \tau_{5.1''}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.1}}}}, \boldsymbol{\tau_{1.1'}}$	$\tau_{5.1**}$	$\boldsymbol{\tau_{5.1}}$ (U), $\tau_{5.1'''}$ (S), $\tau_{5.1'''''}$ (IK)
4.e)	$T_{3.1}$, 4.c)	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{3.0'''}}}}, \boldsymbol{\tau_{3.0'}}, \tau_{3.1}, \tau_{3.1'}, \tau_{2.1'''}$	$\tau_{3.1***}$ $\tau_{3.1****}$	
5.a + b)	$T_{4.2}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{4.2}}}}, \boldsymbol{\tau_{4.2'}}, \tau_{4.2''}$	$\boldsymbol{\tau_{4.2*}}$	$\tau_{4.0}$ (C), $\tau_{4.0'}$ (IG)
5.c + d)	$T_{5.2}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{5.2}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{5.2'}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{5.2''}}}}, \boldsymbol{\tau_{2.1}}$	$\boldsymbol{\tau_{5.2*}}$	$\tau_{5.2'''}$ (S), $\tau_{5.0}$ (C)
÷	$T_{5.3}$			$\tau_{5.3}$ (IG), $\tau_{5.3'}$ (IG)
6.a)	$T_{6.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{6}}}}, \tau_{6.1}, \tau_{6.1'}, \tau_{6.1''}, \tau_{6.0}$	$\boldsymbol{\tau_{6.1*}}$	$\tau_{6.0'}$ (IK)
6.b)	$T_{6.2}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{6}}}}, \boldsymbol{\tau_{6.2}}, \tau_{6.2'}, \tau_{6.0'}$	$\boldsymbol{\tau_{6.2*}}$	
7.a)	$T_{7.1}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{7.1}}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{1.1}}}}, \tau_{1.1'}$	$\boldsymbol{\tau_{7.1*}}$	
7.b)	$T_{7.3}$	$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau_{7.3}}}}$		$\tau_{7.3'}$ (IK), $\boldsymbol{\tau_{7.3''}}$ (IK)
÷	$T_{7.2}$			$\tau_{7.2}$ (IG), $\tau_{7.2'}$ (IG)

Tabel 14: Oversigt over alle de teknikker og opgaver fra PRM i kapitel 3.3.
De kategoriseres efter hvilke teknikker det forventes at eleverne bruger i besvarelsen af GT og hvilke der ikke forventes at komme i spil. Teknikker defineres som usandsynlige eller er udeladt i designet af testen pga. følgende årsager:
IG=Irrelevant i Gym, IK=Irrelevant i Konkret spørgsmål, L=Let, S=Svær, C=CAS, U=Ukendt.
Forkerte teknikker kan ses i tabel 24 og er noteret med $*$. Lilla teknikker blev faktisk anvendt af eleverne. Understregede teknikker er de forventede primære teknikker , mens dobbeltunderstregede er dem som rent faktisk blev anvendt som primære. I tabel 25 ses hvilke andre teknikker der blev anvendt.

om at bruge CAS, men disse er irrelevante i denne sammenhæng, da Gymnasietest (GT) er uden hjælpemidler. Disse noteres (C).

Spørgsmålene er designet på en sådan måde at de ikke dækker over for mange opgavetyper på én gang. Dette er for at teste dem i, hvordan de mestrer de forskellige teknikker. Jeg tester dem altså ikke I hvor gode de er til at sætte en lang række af teknikker sammen i fx komplicerede reduceringsopgaver.

Bemærk, at alle forkerte teknikker som bliver nævnt i a priori-analysen er samlet i tabel 24 i afsnit 5.2 som bl.a. er en samlet oversigt over alle forkerte og nye teknikker som jeg kommer ind omkring (ud over dem som allerede er opskrevet under de forskellige MO i kapitel 3.3).

1. spørgsmål i GT

GT1: Ens brøker
a) Find andre brøker som er lig med $\frac{3}{4}$. Argumenter for dit svar.
b) Reducer brøken $\frac{-68}{12}$ mest muligt.

Tabel 15: Her ses GT1: Ens brøker

Spørgsmålet dækker over den matematiske organisation "MO1: Ækvivalens af rationale tal" fra tabel 6. Det er placeret som det første spørgsmål, da teknikkerne bag er relevant for flere af de efterfølgende spørgsmål, da man ofte kan få brug for at reducere et facit.

Der bliver ikke testet i, hvornår to decimaltal er ens ($T_{1.4}$), da dette ikke er noget elever-ne møder så meget i gymnasiet. Dog kan nogle elever mangle viden om, at man definerer $0,\overline{9} = 1$.

Det første delspørgsmål (1.a) er med i HLO1 fra tabel 26. Derudover er det ifølge tabel 1 punkt 3 en typisk udfordring for eleverne at håndtere ordene "lig med". Altså selve det at forstå hvad det vil sige at to brøker er lig med hinanden. Spørgsmålet er altså medtaget pga. kriteriet "P" om at være problematisk for eleverne. Det kategoriseres ikke som særlig relevant, da eleverne sjældent møder spørgsmål der direkte berører dette, selvom de i mange sammen-hænge stadig har brug for at have viden om, hvad det vil sige at brøker er lig hinanden.

Opgavetypen er $T_{1.2}$, og jeg forventer, at de vil bruge teknikken $\tau_{1.2}$ til at forlænge med samme tal i tæller og nævner:

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Hvis de glemmer den korrekte teknik, kan det være, at de bruger de forkerte teknikker $\tau_{1.2*}$, $\tau_{1.2**}$ eller $\tau_{1.3*}$. Teknikkerne er opskrevet i tabel 24. NB! Symbolet $*$ henviser til at det er en misforstået teknik.

Opgaven der efterfølgende skal løses er, at de skal argumentere for deres svar. Det svarer til opgave $T_{1.3}$ om, hvornår brøker er ækvivalente. De kan vælge at argumentere for deres svar ved at anvende teknik $\tau_{1.3}$, $\tau'_{1.3}$ eller $\tau''_{1.3}$. $\tau_{1.3}$ handler om at gange over kors:

"De er ens da $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$"

Eleverne er som nævnt i afsnit 3.3.1 ikke vandt til at arbejde direkte med ækvivalens i gym-nasiet og kan have problemer med selve ordet 'ens'. Derfor forventer jeg at mange elever ikke sætter ordentligt ord på, hvorfor de er ens, men lader selve mellemregningen i forbindelse med teknik $\tau_{1.2}$ være argument nok i sig selv.

Det andet delspørgsmål (1.b) handler om reducering af brøker. De tilhørende teknikkerne er relevante i næsten alle typer af opgaver, hvor brøker indgår. Dette skyldes, at et facit helst skal angives i den mest reducerede form. Spørgsmålet er altså medtaget pga. kriteret "R" om at være meget relevant for gymnasieelever. Derudover er der i punkt 4 tabel 1 nævnt, at det, at reducere brøker er en typisk udfordring for eleverne. Så spørgsmålet opfylder også kriteret "P" om at være problematisk.

Det bliver interessant at se, hvor mange elever der rent faktisk vil bruge tid på at reducere facit fra de forskellige spørgsmål i testen, hvis det ikke står explicit i opgaveteksten at det skal gøres. Nogle vil enten være dovne eller ikke bevidste om, at det vil være godt at reducere.

Opgaven der skal løses er $T_{1.1}$. Jeg forventer at mange elever vil anvende $\tau_{1.1'}$ og evt. ændring af minustegn med $\tau_{1.3'''}$:

$$\frac{-68}{12} = -\frac{2 \cdot 34}{4 \cdot 3} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 17}{4 \cdot 3} = -\frac{17}{3}$$

Med den valgte teknik opløses tæller og nævner i faktorer. Her er det gjort trinvist, da jeg tror mange har svært ved at overskue med det samme at $4 \cdot 17 = 68$.

En anden teknik som er lige så oplagt at de vælger er $\tau_{1.1}$ om at dividere med en fælles divisor. Trinene er næsten de samme, borset fra at de nok vil dividere med 2 først og bagefter med 2 igen, da det er nemt at se at man altid kan forkorte lige tal med 2.

Forkerte teknikker kan være: $\tau_{1.1*}$ og $\tau_{1.1**}$.

Minus er valgt at have med i spørgsmålet for også at teste dem i, om de kan håntere minus og dens placering.

2. spørgsmål i GT

GT2: Omskrivning af tal
a) Omskriv $1,453$ til en brøk idet du forklarer din metode eller viser dine mellemregninger.
b) Omskriv $\frac{15}{4}$ til decimaltal idet du forklarer din metode eller viser dine mellemregninger.
c) Omskriv $0,0345$ til procent idet du forklarer din metode eller viser dine mellemregninger.
d) Omskriv $3,8\%$ til decimaltal idet du forklarer din metode eller viser dine mellemregninger.

Tabel 16: Her ses GT2

Spørgsmålet dækker over MO2 fra tabel 7 om at omskrive rationale tal.

I gymnasiet er der ikke mange opgaver hvor eleverne er nødt til at omskrive frem og tilbage mellem decimaltal og brøker. Alligevel er mit indtryk at nogle eleverne ofte omskriver brøker til decimaltal. Der er tilfælde, hvor den ene notation er nemmere at håndtere end den anden, men jeg vil ikke kalde det relevant, da eleverne sjældent er 'tvunget' til at lave disse omskrivninger. Det kan godt være problematisk (P) for eleverne at omskrive fra brøk til decimaltal og omvendt, hvis eleverne ikke er vandt til at lave disse omskrivninger.

Omskrivning mellem decimaltal og procent er mere relevant (R), da de ofte møder opgaver hvor de rent faktisk skal lave denne omskrivning. Jeg har valgt ikke at medtage et spørgsmål om omskrivning mellem procent og brøk, da dette sjældent er nødvendigt i opgaver i gymnasiet. Jeg forventer desuden, at mange elever vil omskrive brøken til decimaltal først, så det er altså hverken relevant eller særlig problematisk i sig selv.

Første delspørgsmål (2.a) svarer til opgave $T_{2.1}$ og har en lille relation til HLO i tabel 30, hvor der skal udføres operationer på decimaltallet $0,25$. Opgaven bliver nemmere hvis der omskrives til brøken $\frac{1}{4}$.

Opgave 2.a kan løses med teknik $\tau_{2.1'}$. En anden lige så brugbar og forventet teknik er $\tau_{2.1}$, hvor der divideres med passende ti'er potens for endelige decimaltal:

$$1,453 = \frac{1453}{10^3} = \frac{1453}{1000}$$

Teknik $\tau_{2.1''}$ for uendelige brøker er irrelevant (IK) i det konkrete spørgsmål men også ukendt (U) for eleverne, da jeg ikke har set den præsenteret i gymnasiebøger før. $\tau_{2.1'''}$ er irrelevant (IK) i det konkrete spørgsmål, men vil være brugbar i spørgsmål 4.e.

En forkert teknik kunne være $\tau_{2.1*}$ eller $\tau_{2.1**}$.

Andet delspørgsmål (2.b) svarer til opgavetype $T_{2.2}$ og har en lille relation til HLO i tabel 28, da tætheden er nemmere at vurdere hvis fx $\frac{2}{5}$ omskrives til $0,4$.

En brugbar teknik er $\tau_{2.2}$ om, at man kan omskrive brøk til decimaltal ved at dividere tæller med nævner. En anden og lige så sandsynlig teknik er $\tau_{2.2'}$ om at omskrive til brøker som man kender decimalværdien af. Denne teknik har fordelen, at eleverne ikke behøver at anvende en egentlig divisionsalgoritme:

$$\frac{15}{4} = 15:4 = (15:2):2 = 7,5:2 = 3,75$$

$$\text{Eller: } \frac{15}{4} = 15:4 = (12+3):4 = 12:4+3:4 = 3+3:4 = 3,75$$

Bemærk her, at spørgsmålet kan løses helt uden brug af klassisk divisionsalgoritme. Dette er bevidst valgt, da jeg i dette konkrete spørgsmål er mere interesseret i at undersøge, om de ved, hvad det vil sige at omskrive fra brøk til decimaltal.

En forkert teknik kan være $\tau_{2.2*}$.

Det tredje delspørgsmål (2.c) svarer til $T_{2.3}$ og kan løses med teknik $\tau_{2.3'}$, hvor decimaltallet ganges med 100 for at få procentdelen:

$$0,0345 = (0,0345 \cdot 100)\% = 3,45\%$$

Det er bevidst valgt at vælge et tal der er mindre end 10%, da dette kan give eleverne problemer, hvis de bruger den forkerte teknik $\tau_{2.3*}$.

Det fjerde delspørgsmål (2.d) svarer til $T_{2.4}$ og kan løses med teknik $\tau_{2.4'}$, hvor procentdelen divideres med 100:

$$3,80\% = 3,80:100 = 0,0380$$

Igen er det interessant, hvordan eleverne håndterer procendele mindre end 10%. Husker de at sætte et nul ind før kommaet? Ellers bruges måske den forkerte teknik: $\tau_{2.4*}$.

3. spørgsmål i GT

GT3: Sammenligning af tal

a) Hvilket tal er størst: $0,45$ eller $0,445$? Forklar dit svar!

b) Hvilken brøk er størst: $\frac{7}{11}$ eller $\frac{4}{7}$? Forklar dit svar!

Tabel 17: Her ses GT3

Spørgsmålet dækker over MO3 fra tabel 8 om rationale tals orden. Orden mellem brøker og decimaltal er ifølge punkt 1 i tabel 1 en typisk udfordring ved de rationale tal.

Den generelle teknik $\tau_{3.0''}$ om at trække tallene fra hinanden og se om resultatet er negativt, er en effektiv måde at undersøge ordenen mellem rationale tal på, dog kræver det viden om regneregler for differens. Deruover kan det hurtigt tage tid at udregne differensen, derfor tror jeg ikke teknikken vil være så anvendt.

Teknikken $\tau_{3.0}$ om at repræsentere tallene grafisk i en figur eller en tallinje er også en mulighed. Her vil figurer som fx cirkler nok være mere anvendt ved brøker, og tallinjen ved decimaltal. Men det er ikke typiske teknikker for gymnasiet.

Derimod er teknikken $\tau_{3.0'}$ ikke relevant i disse konkrete spørgsmål (IK), da division er en mere kompliceret udregning som næppe vil blive brugt her. Og $\tau_{3.0'''}$ handler om ordenen efter multiplikation, og er derfor ikke relevant her (IK), men bliver det i delspørgsmål 4.e).

Det første delspørgsmål (3.a) handler om at sammenligne decimaltal. Spørgsmålet minder om HLO2, dog er tallene der skal sammenlignes gjort en anelse sværere, for at få et bedre indblik i, hvilke teknikker de faktisk bruger.

Jeg forventer ikke, at det vil være så problematisk for gymnasieelever at sammenligne decimaltal, da det blot er at bruge lexiografisk orden. Det er heller ikke meget relevant i gymnasiet, da de sjældent møder opgaver, hvor de skal sammenligne decimaltal.

Opgaven som skal løses er $T_{3.2}$ om orden mellem decimaltal. Det er et endeligt decimaltal, så en relevant teknik vil være $\tau_{3.2}$ om at forlænge til heltal. En anden teknik er $\tau_{3.2'}$ om at bruge lexiografisk orden. Jeg tror den vil blive brugt af flere, da det er den klassiske måde elever lærer at håndtere decimaltals orden på:

$$0,45 > 0,445 \rightarrow 0,450 > 0,445 \rightarrow 0,45 > 0,44$$

Det problematiske her er, hvis eleverne sammenligner 45 og 445 og glemmer at tage højde for decimalernes placering efter kommaet. Decimaltallene er netop valgt for at undersøge, om denne problematik optræder.

Forkerte teknikker kunne fx være $\tau_{3.2*}$ eller $\tau_{3.2**}$.

Det andet delspørgsmål (3.b) handler om orden mellem brøker. Opgaven der skal løses, er opg. $T_{3.1}$. Den er relevant, da det i gymnasiet kan være nødvendigt at kende denne orden mellem brøkerne. Brøkerne er valgt for at vælge nogle brøker som de ikke intuitivt kan vurdere i forhold til hinanden. Dette tvinger dem til at bruge relevante teknikker.

En oplagt teknik er $\tau_{3.1'}$ om at forlænge brøkerne til fællesnævner og sammenligne tæller:

$$\frac{7}{11} > \frac{4}{7} \leftrightarrow \frac{49}{77} > \frac{44}{77} \leftrightarrow 49 > 44$$

$\tau_{3.1}$ om at gange brøkerne over kors og derefter sammenligne ordenen er også en mulighed, men jeg tror ikke så mange af eleverne kender denne teknik. På trods af at de har lært at gange over kors i fx ligningsløsning, så kan de have svært ved at anvende sådanne metoder i andre sammenhænge. Nogle elever benytter sig måske af at spejlvende brøkerne med $\tau_{3.1''''}$.

Teknik $\tau_{3.1''}$ er ikke relevant i det konkrete spørgsmål (IK), da begge brøker er mindre end 1, men den er relevant i gymnasiet, når de skal vurdere om en brøk er større/mindre end 1.

En teknik som jeg ikke forventer vil blive brugt er teknik $\tau_{3.1'''}$ (IK) om at omskrive til decimaltal og derefter sammenligne størrelsen. Mange ville gøre dette, hvis de havde en lommeregner til rådighed, men det er for besværligt at vælge metoden uden hjælpemidler, da det kræver en lang division med de valgte tal. Forkerte teknikker kunne være $\tau_{3.1***}$eller $\tau_{3.1****}$.

4. spørgsmål i GT

GT4: Regne med brøker a) Udregn $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ idet du viser dine mellemregninger. b) Udregn $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}$ idet du viser dine mellemregninger. c) Udregn $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}$, idet du viser dine mellemregninger. d) Udregn $\frac{2}{7}:\frac{26}{14}$, idet du viser dine mellemregninger. e) Kryds det korrekte udsagn af: *Når jeg ganger to brøker med hinanden er resultatet...* i) *...altid større end de to brøker* □ vii)*...altid mindre end de to brøker* □ iii) *...nogle gange større, nogle gange mindre end de to brøker* □ iv) Ved ikke □

Tabel 18: Her ses GT4

Dette spørgsmål handler om at regne med brøker, og dække over to matematiske organisationer. Her er det både MO4 i tabel 9 om addition og subtraktion af brøker og MO5 i tabel 10 om multiplikation og division af brøker som eleverne bliver testet i.

Operationer mellem brøker er som nævnt i afsnit 3.3 centrale i gymnasiet, da de hele vejen gennem gymnasiet møder brøker i både opgaver og teori, hvor det er nødvendigt at kunne regne videre med brøkerne, så spørgsmålet opfylder kriteriet "R" om at være relevant. Ifølge tabel 1 er operationer mellem brøker typiske udfordringer ved de rationale tal. Dermed opfylder spørgsmålet også kriteriet "P" om at være problematisk.

De bliver testet i alle fire regneoperationer, da de alle optræder hyppigt i gymnasiet.

De to første delspørgsmål (4.a og 4.b) optræder også i HLO4 i tabel 29. Det er altså en addition og subtraktion som 6.klasses elever også forventes at kunne. På trods af brøkernes simpelhed giver de stadig mulighed for at teste, hvilken teknik eleverne bruger.

Selve den opgave der bliver stillet er $T_{4.1}$ som handler om addition og subtraktion.

En mulig besvarelse af spørgsmålene kan findes ved at bruge den primært forventede teknik $\tau_{4.1}$ om at finde fælles nævner. Til dette skal også forlænges med teknik $\tau_{1.2}$:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}+\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{12}{21}-\frac{7}{21}=\frac{12-7}{21}=\frac{5}{21}$$

De kan også vælge at anvende teknikken $\tau_{4.1'}$, men det kræver dog at de kan huske en færdig formel.

Nogle elever vil måske foretrække at anvende teknikken $\tau_{4.1''}$, hvor de omskriver til decimaltal først. Dette er især nemt at gøre, hvis brøkerne er simple. Derfor vil nogen i spørgsmål a) måske vælge denne teknik, men i spørgsmål b) får de sværere ved at udregne $4/7$ som decimaltal.

Teknikkerne $\tau_{4.0'}$ og $\tau_{4.1'''}$ er irrelevant (IG) for gymnasiet, da man sjældent arbejder med at illustrere brøker i figurer og på tallinjer. Jeg tror eleverne er tilpas vant til at være i gymnasiet, og dermed vil de ikke vælge disse metoder. Det er også muligt at nogle anvender helt forkerte teknikker, som fx: $\tau_{4.1*}$.

Teknikkerne bag opgaverne om addition og subtraktion er næsten de samme, alligevel vælges der at teste i begge regneoperationer, da nogle elever kan have svært ved at finde ud af, hvordan de skal håndtere minus. Det kan være, at nogen anvender teknik $\tau_{4.1''''}$ om at flytte minus-tegnet op i brøken. Det kan dog blive et problem, hvis de ikke ved, hvordan de skal håndtere minus efter de har flyttet det, dvs. hvis de ikke mestrer teknikkerne $\tau_{1.1''}$ og $\tau_{1.1'''}$.

Tredje delspørgsmål (4.c) er taget fra tabel 3 punkt 1 og er designet til en 7.klasse.

Opgaven der skal løses er $T_{5.1}$. En mulig besvarelse af spørgsmålene kan findes ved at bruge den primært forventede teknik $\tau_{5.1}$ om at tæller og nævner skal ganges sammen og reduceres med $\tau_{1.1}$:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 3}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

Nogle elever kan dog godt have svært ved at huske denne teknik og kan derfor være mere tilbøjelige til at bruge teknik $\tau''_{5.1}$ om at udføre udregningen trinvis. Nogle forkerte teknikker kunne være $\tau_{5.1*}$ eller $\tau_{5.1**}$. $\tau_{5.1'''}$ om at udføre udregningen grafisk i et rektangel er igen irrelevant i gymnasiet (IG).

Når multiplikationen er udført, så opstår en ny opgave, der ikke eksplicit er med i selve spørgsmålet. Det er opgave $T_{1.1}$ om at forkorte brøken, hvor teknikkerne $\tau_{1.1}$ og $\tau_{1.1'}$ kan bruges. Den sidste af teknikkerne handler om at opløse tæller og nævner i faktorer og vil derfor være den mest oplagte teknik til dette spørgsmål. Dog forventer jeg, at mange elever vil udregne multiplikationerne først og bagefter tage stilling til, om brøken kan reduceres, og så er det den første teknik som skal bruges.

Det fjerde delspørgsmål (4.d) handler om division mellem brøker og er noget af det, som jeg fornemmer mine elever har det sværest med.

Opgaven der skal løses her er $T_{5.1}$. En mulig besvarelse af spørgsmålene kan findes ved at bruge $\tau_{5.1'}$ og reducere med $\tau_{1.1}$:

$$\frac{2}{7}:\frac{26}{14}=\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{26}=\frac{2\cdot 14}{7\cdot 26}=\frac{2\cdot 2\cdot 7}{7\cdot 2\cdot 13}=\frac{2}{13}$$

Nogle elever kan nok også finde på at bruge $\tau_{5.1''}$, som handler om at udregne det trinvist. Jeg tror det er de færreste der vil benytte sig af $\tau_{5.1}$ om at dividere tæller med tæller og nævner med nævner, da metoden ikke er så udbredt i gymnasiebøgerne som jeg har kigget i (**mata1:2005**), (**gyldendal:2005**). Så teknikken er nok ukendt (U) for eleverne.

Jeg tror heller ikke, at teknik $\tau_{5.1'''}$ vil blive anvendt, da det handler om at vende tilbage til definitionen af, hvad division er - nemlig det omvendte af multiplikation. Jeg ved ikke, hvor mange der er fuldt ud bevidste om denne sammenhæng i en sådan grad, at de anvender det til at løse et spørgsmål om division mellem brøker, så teknikken kategorieres som svær (S). Teknik $\tau_{5.1''''}$ er irrelevant (IK) i det konkrete spørgsmål, da den handler om en anden notation end den, der ses i spørgsmålet, men den er ikke irrelevant i gymnasiet, da den fx kan bruges til komplicerede reduceringsopgaver med brøker.

Ligesom ved multiplikation forventes det, at eleverne reducerer svaret til sidst. Her vil især teknikken $\tau_{1.1'}$ om at opløse i faktorer være oplagt, da eleverne ellers skal til at regne med lidt større tal. Jeg forventer ikke at mange elever har det matematiske overskud til at indse det smarte i dette, men at de i stedet bruger teknik $\tau_{1.1}$ om at forkorte. Jeg forventer også, at en større del opgiver at reducere fordi tallene er blevet så store, at de ikke kan overskue fx at udregne $7 \cdot 26$. Det kan få nogen til at levere svaret $\frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 26}$. Andre udregner måske multiplikationen, men orker ikke bagefter at reducere igen.

En forkert teknik kan igen være $\tau_{5.1**}$, da det er sandsynligt at nogle elever simpelthen bytter rundt på, hvad man skal gøre ved hhv. division og multiplikation.

Sidste delspørgsmål (4.e) handler om selve elevernes viden om, hvad multiplikation er. Den bygger til dels på lærer-delen af HLO5 i tabel 30, hvor der skal tages stilling til, hvordan man forklarer en elev hvorfor $0,25 \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 8$ giver et mindre tal. HLO5 handler dog mest om decimaltal, selvom essensen er viden om, at multiplikation kan gøre både større og mindre. Selve formuleringen er taget direkte fra tabel 3.

De fleste elever har en idé fra de hele tal om, at multiplikation altid gør større. Nu skal de vurdere om multiplikation også kan gøre mindre.

Det nemmeste er at anvende teknik $\tau_{3.0'''}$ om at multiplikationen gør større, hvis man ganger med noget som er større end 1, og mindre, hvis der ganges med noget som er mindre end 1 (og positivt). Denne teknik knytter sig til opgavetypen $T_{3.1}$ om at bestemme ordenen mellem to brøker - i dette tilfælde brøkerne før og efter multiplikationen.

Derefter kan man anvende $\tau_{3.0'}$ om, at brøker er større end 1, hvis tæller er større end nævner. Men det er ikke sikkert, at alle elever nævner dette specifikt. En anden mulighed er at anvende $\tau_{3.0'}$ på multiplikationen fra delspørgsmål 2.c ($\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$), for at afgøre i et konkret eksempel, om der blev ganget med noget som var større eller mindre end 1. Til dette kan anvendes teknikkerne $\tau_{3.1}$ og $\tau_{3.1'}$ om at gange over kors. Her er brugt $\tau_{3.1}$:

$$\frac{2}{3} > \frac{5}{9} \leftrightarrow 2 \cdot 9 > 3 \cdot 5 \leftrightarrow 18 > 15$$

$$\frac{5}{6} > \frac{5}{9} \leftrightarrow 5 \cdot 9 > 6 \cdot 5 \leftrightarrow 54 > 36$$

Dermed ses det, at multiplikation kan gøre mindre. Hvis nogen tror at deres intuition fra hele tal dermed er forkert når det gælder brøker og nu tolker at brøker altid gør mindre, vil de svare forkert.

Det bedste her vil være, hvis eleverne ved, at hele tal også kan ses som brøker og dermed at intuitionen fra hele tal også gælder for brøker. Hertil kan anvendes $\tau_{2.1'''}$, og dermed konkluderes at multiplikation også kan gøre resultatet større.

Forkerte teknikker kan være de forkerte teknikker nævnt under sammenliging af brøker eller $\tau_{3.1***}$ eller $\tau_{3.1****}$.

5. spørgsmål i GT

GT5: Regne med decimaltal
a) Udregn $0,3251 + 7,855$, idet du viser dine mellemregninger.
b) Udregn $6,7 - 0,4321$, idet du viser dine mellemregninger.
c) Udregn $0,2 \cdot 6,345$, idet du viser dine mellemregninger.
d) Udregn $8 : 0,24$, idet du viser dine mellemregninger.

Tabel 19: Her ses GT5

Spørgsmålet dækker over MO4 fra tabel 9 og MO5 fra tabel 10 om at regne med rationale tal.

Delspørgsmål 4.a) og 4.b) handler om subtraktion og addition af decimaltal og dermed er opgavetypen $T_{4.2}$. Selvom der arbejdes knap så meget med decimaltal i gymnasiet, er det alligevel relevant (R) at eleverne mestrer regnereglerne for disse, når de støder på dem.

Mulige teknikker er fx $\tau_{4.2'}$ om at omskrive til heltal, udføre operationen og omskrive tilbage igen. Denne teknik minder meget om $\tau_{4.2''}$ om at se bort fra kommaet under operationen og placere det igen på 'samme' sted bagefter. Den teknik jeg tror flest vil anvende er $\tau_{4.2}$ om at bruge teknikken fra hele tal direkte, uden at ændre på kommaet:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\quad 1\quad\;\;} \\ 0,3251 \\ +7,8550 \\ =8,1801 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 6 9 9\;\; 10} \\ 6,\cancel{7}\cancel{0}\cancel{0}0 \\ -0,4321 \\ =6,2679 \end{array}$$

Der er i både additions og subtraktionsstykket med vilje valgt tal med forskellige antal cifre for at se, hvordan eleverne håndterer dette. Samtidig er valgt nogle decimaltal der er tilpas store til, at eleverne rent faktisk er nødt til at bruge en passende algoritme.

En forkert teknik kunne være $\tau_{4.2*}$.

Delspørgsmål 5.c og 5.d handler om multiplikation og division af decimaltal, så det er opgavetype $T_{5.2}$. Det er sjældent man i gymnasiet skal mestre disse operationer mellem decimaltal - i hvert fald når man kigger i opgavebøger fra gymnasiet og i eksamensopgaver. Så det er knap så relevant. Til gengæld forventer jeg, at de kan være meget problematiske for elever, der ikke ved, hvordan de skal håndtere decimalerne, når de dividerer og multiplicerer. Desuden er det langt mere besværligt end division og multiplikation af brøker.

Spørgsmålene er taget fra HLO5 i tabel 30. Tallene er gjort sværere for at være sikker på, at eleverne anvender teknikkerne bag multiplikation og division.

En teknik som eleverne kunne vælge at bruge er $\tau_{2.1}$ om at omskrive til brøk. Jeg tror dog, at mange overser denne mulighed. En oplagt teknik er $\tau_{5.2}$ om at bruge samme algoritme som for heltal, dog uden at ændre på kommaet:

$$
\begin{array}{lll}
0,2 \cdot 6,345 & 8 : 0,24 & = 30 + 3 + 0,3 = 33,\overline{3} \\
+0,0010 & -7,2 & \\
+0,008 & \overline{0,8} & \\
+0,06 & -0,72 & \\
+1,2 & \overline{0,08} & \\
=1,269 & -0,072 & \\
 & \overline{0,008} &
\end{array}
$$

Her er tallene ved division valgt sådan, at der opnås et decimaltal med en kort periode for at se, om eleverne har viden om hvad de skal gøre, når cifrene i divisionen går i ring.

Det er dog svært at sige, hvilken teknik eleverne foretrækker. Så de to næste teknikker kunne også være oplagte kandidater: $\tau_{5.2'}$ om at omskrive til heltal, udføre operationen og omskrive tilbage igen og $\tau_{5.2''}$ om at fjerne kommaet, udføre udregningen og placere det korrekt bagefter. Ved division behøver kommaet pga. proportionalitet ikke at blive genplaceret, til gengæld skal der tilføjes efterstillede nuller, hvis antallet af cifre er forskellige.

Teknikken $\tau_{5.2'''}$ kunne måske blive anvendt i udregningen af divisionen, hvis nogle elevere synes det er lettere at lave divionsstykket til et multiplikationsstykke, men det er mere besværligt og derfor knapt så oplagt:

$$8 : 0,24 = x \leftrightarrow x \cdot 0,24 = 8 \leftrightarrow 0,24 \cdot 33,\overline{3} = 8$$

hvor $0,24 \cdot 30 = 7,2$ og $0,24 \cdot 3 = 0,72$ og $0,24 \cdot 0,3 = 0,072$ så $0,24 \cdot 33,3 = 7,992$. Som det kan ses går decimaltallene i ring, så det er ikke nødvendigt at forstætte. Jeg forventer dog at denne udregning vil være for svær (S) for dem at gennemskue, da den kræver flere opdelte mellemregninger frem for blot en divisionsalgoritme.

NB! Opgaven $T_{5.3}$ er ikke medtaget i testen, da eleverne sjældent får brug for at lave operationer mellem procenter. Teknikkerne bag er altså irrelevant for gymnasiet.

En forkert teknik kunne være $\tau_{5.2*}$.

6. spørgsmål i GT

GT6: Hvor mange tal
a) Hvor mange tal er der imellem $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{5}$?
b) Hvor mange tal er der imellem $0,4$ og $0,8$?

Tabel 20: Her ses GT6

Spørgsmålet dækker over MO6 fra tabel 11 om tæthed og er taget fra HLO3 i tabel 28. Formålet er at undersøge, om eleverne ved, at der findes uendelig mange rationale tal.

Spørgsmålet er ikke relevant for gymnasieeleverne i den forstand, at de ikke direkte vil blive stillet et sådant spørgsmål. Men de er alligevel nødt til at have den grundlæggende viden om rationale tal, at man fx altid kan tage gennemsnittet. Det kan være problematisk for eleverne, da det ikke er noget de bevidst forholder sig til i hverdagen. Det kan være, at de tager opgaven for bogstaveligt uden at forholde sig til tætheden af rationale tal.

Første delspørgsmål (6.a) handler om tætheden af brøker. Et fyldestgørende svar vil være, at der findes uendelig mange tal imellem to rationale tal, dvs. at bruge den generelle teknik τ_6. Mange vil nok vælge denne teknik uden yderligere forklaring, hvis de indser det absurde i at begynde at finde konkrete tal.

Opgavetypen kan også være $T_{6.1}$, hvor man kan bruge teknikkerne $\tau 6.1$ og $\tau 6.1'$ som konkrete formler til at finde en ny brøk. Eller man kan omskrive til decimaltal med $\tau_{6.0}$. Da brøkerne har fælles nævner, kan man også bruge $\tau_{6.1''}$:

$$\frac{2}{5} < x < \frac{4}{5} \leftrightarrow 2 < 3 < 4 \leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

Ulempen ved denne teknik er, at der kun er ét tal som ligger imellem tællerne, derfor bliver det nødvendigt at anvende 2.del af denne teknik, nemlig at forlænge brøkerne:

$$\frac{4}{10} < x < \frac{8}{10} \leftrightarrow 4 < 5, 6, 7 < 8 \leftrightarrow \frac{4}{10} < \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10} < \frac{8}{10}$$

Man kan på denne måde blive ved med at forlænge og finde flere brøker imellem de oprindelige. En forkert teknik her vil altså være en forkortet version af $\tau_{6.1''}$ kaldet $\tau_{6.1*}$

En teknik som ikke er så relevant i dette konkrete spørgsmål(IK) er $\tau_{6.0'}$ om at repræsentere brøkerne på fx en tallinje. Den er relevant i gymnasiet, da eleverne er vant til at arbejde med koordinatsystemets akser og derigennem placerer og aflæser tal på aksen. Men i dette konkrete spørgsmål har de ikke fået givet nogen punkter, funktioner eller koordinatsystemer, så jeg forventer ikke at eleverne af sig selv vælger denne metode.

Det andet delspørgsmål (6.b) svarer til opgavetype $T_{6.2}$ om at finde tal imellem decimaltal. Brugbare teknikker er igen den generelle teknik τ_6. Derudover kan bruges $\tau_{6.2}$ om at bruge lexiografisk orden til at finde decimaltal imellem eller $\tau_{6.2'}$ hvor man blot tager gennemsnittet. Man kan også vælge at bruge $\tau_{6.0}$ og omskrive til brøker:

$$0,4 < x < 0,8 \leftrightarrow \frac{4}{10} < x < \frac{8}{10} \leftrightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{4}{5}$$

Herigennem kan ses, at spørgsmålet i virkeligheden er identisk med delspørgsmål 6.a og dermed må svaret være det samme, så der findes uendelig mange decimaltal imellem.

Teknik $\tau_{6.0'}$ vil måske bliver brugt af nogle til dette delspørgsmål, da det intuitivt er nemt at forholde sig til decimaltal på en tallinje. En forkert teknik kunne være $\tau_{6.2*}$, hvis de glemmer at tænke på, at man altid kan sætte flere decimaler efter tallet.

7. spørgsmål i GT

GT7: Forhold mellem størrelser
a) Et A5-ark har størrelsen 148mmx210mm.
Hvad er forholdet mellem A5-arkets længde og bredde?
b) Hvis $T = 2\pi \cdot L$, hvad er så forholdet mellem T og L?

Tabel 21: Her ses GT7

Spørgsmålet dækker over MO7 fra tabel 12 om forhold mellem rationale tal.

I gymmnasiet er de vant til at arbejde med forholdet mellem ensvinklede trekanter. Derfor er det relevant (R), at de ved hvad et forhold er. Nogle elever er måske så ensporede, at de har svært ved at anvende begrebet forhold på andet end fx ensvinklede trekanter, fordi det er en formel de memorerer og ikke egentlig viden om hvad et forhold er. Ifølge afsnit 2.4 kan forhold netop være problematiske, da sammenhængen mellem forhold og brøker historisk set ikke er en selvfølge og derfor heller ikke kan forventes at være det for eleverne.

Jeg tester ikke eleverne i skalaforhold, hvor man skalerer en figur op/ned (opgave $T_{7.2}$), da det ikke er noget der bliver brugt særlig meget tid på i gymnasiet, og det er derfor irrelevant (IG) at teste.

Første delspørgsmål (7.a) handler om forhold mellem siderne på et A5-ark. Dette er inspireret af Brousseau jvf. afsnit 2.3.3. Papirark er noget eleverne kan forholde sig til, så forhåbentlig er de i stand til at opstille den ønskede brøk til at beskrive forholdet med. Opgavetypen er $T_{7.1}$ som handler om forhold mellem figurer. Her skal man se længden og bredden af A5-arket som to linjer og dermed 'figurer'. Teknikken der skal bruges er $\tau_{7.1}$, som handler om at dividere sidelængderne med hinanden for at finde forholdet:

$$\frac{210}{148} = \frac{105}{74} = 1.4\overline{189} \text{ eller } \frac{148}{210} = \frac{74}{105} = 0.7\overline{047619}$$

Her er $\tau_{1.1}$ brugt til at reducere brøken med, ved at dividere med den oplagte fællesnævner 2. $\tau_{1.1'}$ kunne også være brugt, men jeg tror det er nogle lidt for store tal for eleverne til, at de begynder at opløse i faktorer. Den sidste udregning har jeg udført med lommeregner, dvs. teknik $\tau_{2.2'}$, som eleverne ikke har til rådighed. Jeg forventer ikke, at eleverne begynder at omskrive brøken til decimaltal, men jeg håber, at nogle af dem vil vælge at reducere brøken. En forkert teknik kunne være $\tau_{7.1*}$.

Det andet delspørgsmål (7.b) handler om at finde forholdet mellem to variable i en formel. Opgavetypen er $T_{7.3}$ om at finde proportionalitetsfaktoren mellem to størrelser, hvis den findes.

I 1.g-klassen har de endnu ikke lært, hvad det vil sige at være proportionale. Derfor er dette ord ikke medtaget i spørgsmålet. Men eleverne skal igen bruge deres viden om, hvad et forhold er, for at kunne anvende en korrekt teknik. Her er teknik $\tau_{7.3}$ brugbar, da den siger, at forholdet er:

$$T = 2\pi \cdot L \leftrightarrow \frac{T}{L} = \frac{2\pi \cdot L}{L} = 2\pi$$

$\tau_{7.3''}$ handler om at se sammenhængen som en ret linje, hvor forholdet kan ses som hældningen. Jeg tror ikke nogle elever vil anvende denne teknik til at bestemme et forhold, og jeg anser den derfor for irrelevant i det konkrete spørgsmål (IK). $\tau_{7.3'}$ er irrelevant i det konkrete spørgsmål (IK), da den handler om omvendt proportionalitet.

Ekstraopgaver

Disse er medtaget for at sikre, at nogle elever ikke bliver for hurtigt færdige og dermed får de resterende elever til at stresse sig igennem spørgsmålene. Samtidig giver ekstraopgaverne også mulighed for at teste flere opgavetyper på eleverne, uden at det går ud over, om de får svaret på de væsentligste spørgsmål.

Det viste sig dog i a posteriori analysen at mange af ekstraopgaverne skilte sig markant ud fra de andre spørgsmål. Det skyldes til dels at ekstraopgaverne ikke var blevet ordentligt finpudset inden testen blev givet (pga. at læseferien stod for døren). Derudover skiller flere af ekstraopgaverne sig meget ud fra resten af spørgsmålene i testen. Derfor vil jeg ikke bruge mere tid på disse, så a priori analysen er placeret i bilag B.8. Jeg har arbejdet videre med E6 og E7, da formuleringerne minder meget om resten af testen.

E6) Omskriv $65,3\%$ til en brøk idet du viser din mellemregning.

Tabel 22: Her ses Ekstraopgave 6

Spørgmålet handler om omskriving af rationale tal og hører derfor under MO2. Selv om det næsten kan være nemmere at omskrive fra procent til brøk end fra procent til decimaltal, er mit indtryk fra gymnasiebøgerne, at de sjældent får brug for at lave denne omskrivning i praksis. Derfor er spørgsmålet placeret blandt ekstraopgaverne og ikke under spørgsmål 2.

Opgavetypen er $T_{2.4}$. Man kan bruge teknik $\tau_{2.4'}$ til at omskrive til decimaltal først og bagefter løse opgavetypen $T_{2.1}$ til at omskrive decimaltal til brøk. Det er dog hurtigere at vælge $\tau_{2.4}$ og omskrive til brøk med det samme ved at opstille udtrykket $\frac{65,3}{100} = \frac{653}{1000}$, hvor der forlænges med 10 for at opnå en brøk, dvs. et udtryk med hele tal i tæller og nævner.

E7) Reducer $\frac{\frac{2}{3}-1}{5}$ idet du viser dine mellemregninger.

Tabel 23: Her ses Ekstraopgave 7

Spørgsmålet handler om at reducere, dog er det mere sammensat, da der kræves brug af flere regneregler. Derfor hører den både under MO4 og MO5. Det er medtaget for at se, hvordan de håndterer komplicerede opgaver.

Det at reducere komplicerede udtryk hvor flere regneregler skal bruges, er noget som er meget relevant (R) i gymnasiet, da de netop vil møde sådanne opgaver. Spørgsmålet her er inspireret af opgavebogen AB1 (**ab1:2005; s.13**). Opgavetypen er $T_{4.1}$, hvor jeg forventer at $\tau_{4.1}$ om at forlænge til fælles nævner vil blive brugt. Her er det dog nødvendigt først at bruge $\tau_{2.1'''}$ om, hvordan hele tal omskrives til brøker. .

$$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Det er ikke sikkert eleverne er bevidste om disse trin, men straks tænker, at $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ og konkluderer ud fra dette at $\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$. Faren her er dog, at de nemmere roder rundt i fortegn. Derefter er det opgavetypen $T_{5.1}$ der skal løses:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{5} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{15}$$

Her er brøken reduceret ved først at bruge $\tau_{5.1''}$ i "omvendt" rækkefølge. Dvs. ved at behandle $-\frac{1}{3}$ som et tal der er ganget på brøken $\frac{1}{5}$. Derefter er brugt $\tau_{5.1}$ om at gange tæller med tæller, og nævner med nævner. Det problematiske her er, hvis eleverne ikke ser brøken $-\frac{1}{3}$ som et "tal" man kan sætte uden for brøken og derfor ikke kan håndtere det sidste udtryk.

5.2 OVERSIGT OVER ALLE NYE, FORKERTE OG ANVENDTE TEKNIKKER

I løbet a både a priori-analysen og a posterirori-analysen af GT dukker der en række 'forkerte' teknikker op, som for overskuelighedens skyld er samlet i tabel 24. I samme tabel ses også de nye teknikker, som blev fundet i a posteriori analysen.

Antal elever:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Procent af 24	4	8	13	17	21	25	29	33	38	42	46	50	54	58	63	67	71	75	79	83	88	92	96	100
Procent af 48	2	4	6	8	10	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	38	40	42	44	46	48	50

Antal elever:	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Procent af 48	52	54	56	58	60	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	88	90	92	94	96	98	100

Figur 7: Her ses en tabel der viser, hvordan man omregner fra procentandel af elever til det faktiske antal elever. Der er 24 elever i hver klasse og 48 elever ialt.

Derudover angiver tabellen hvilke teknikker der rent faktisk er anvendt i hvert spørgsmål, hvor mange procent af eleverne der har anvendt de forskellige teknikker og hvor højt procenttal de pågældende elever gennemsnitligt har haft.

For at skelne, så betyder symbolet !, at det er en ny variant af en allerede eksisterende teknik. Denne tæller stadig som primær teknik hvis det er en ny variant af denne. Derimod betyder $\sharp$ at det er en helt ny teknik. $*$ betyder stadig at det er en forkert teknik.

Elevernes procenttal angiver hvor mange procent rigtige spørgsmål den pågældende elev har fået i testen. Når der angives et procental for et spørgsmål, så betyder det, at eleverne der svarede på det pågældende spørgsmål gennemsnitligt havde det angivne procenttal. Dette kan give en antydning af, om elever der fx svarede godt på testen har anvendt teknikken.

Når det angives, hvor mange procent af eleverne der har svaret rigtig på det pågældende spørgsmål, så bruges det, at der var 24 elever i hver klasse dvs. 48 elever ialt. Derfor kan man bruge tabellen i figur 7 til at omregne fra procentandel til det faktiske antal elever. Fx svarer 4% af 24 elever netop til én elev, mens 4% af 48 elever svarer til to elever.

Bemærk at der blev testet på 26 1.g'ere (ud af 30 ialt) og 24 3.g'ere (ud af 26 ialt). Det var det antal som mødte op til prøverne - flere udeblev pga. sygdom.

Men to besvarelser blandt 1.g'ere blev sorteret fra INDEN a posteriori-analysen blev påbegyndt. Den ene fordi eleven skulle gå før tid, og derfor kan det være svært at sammenligne med resten af klassen. Den anden fordi eleven er kommet væsentlig senere ind i klassen i løbet af 1.g og skiftede fra HTX, så det ødelægger lidt sammenligneligheden med de andre i klassen. Derudover er det lige så nemt at arbejde med det samme antal elever i begge klasser.

Tabel 24: Her ses en oversigt over alle nye og forkerte teknikker som igennem a priori og a posteriori analysen af GT er dukket op. Teknikker markeret med fed er dem der rent faktisk blev brugt af eleverne ifølge a posteriori-analysen. Der er også tilføjet "andre"og "primære"teknikker - det referer til teknikker fra den oprindelige MO som faktisk blev anvendt

GT			**Nye, forkerte eller anvendte teknikker fra analysen af GT**	**Anvendt af:**
1.a)	$\boldsymbol{\tau_{1.2\sharp}}$	=	**Brøkdelen** $\frac{a}{b}$ **af** x **er** $\frac{(x\cdot a)/b}{x}$	4%(62%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.2\sharp\sharp}}$	=	**Find brøker der har samme decimalrepræsentation**	8%(57%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.2\sharp\sharp\sharp}}$	=	**Brøkerne** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **hvis** $\frac{a}{b} = x\%$ **og** $c = x\% \cdot d$	4%(57%)
	$\tau_{1.2*}$	=	lægge tal til i tæller og nævner	
	$\tau_{1.2**}$	=	gange tal på i tæller ELLER nævner	
	$\boldsymbol{\tau_{1.2***}}$	=	**Opløft brøken i en potens:** $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	4%(95%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.2****}}$	=	**Fordi** c **går op i** a **og** d **går op i** b **er** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	4%(48%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.2*****}}$	=	Se 4.b	
	$\tau_{1.3*}$	=	brøker er lig hinanden hvis de har samme tæller	

	Andre:	= $\tau_{2.4}$:	4%(86%)
	primære:	= $\tau_{1.2}$:63%(80%), 67%(76%)	
1.b)	$\boldsymbol{\tau_{1.3**}}$	= **Se bort fra minus-tegnet (de glemmer det)**	29%(69%)
		Er bl.a kombineret med $\tau_{2.2'} = 4\%(90\%), \tau_{1.1'} = 4\%(81\%)$	8%(85%)
	$\tau_{1.1*}$	= trække tal fra i tæller og nævner	
	$\boldsymbol{\tau_{1.1**}}$	= **dividere med et tal i tæller ELLER nævner**	4%(76%)
			13%(65%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.1***}}$	= **Anvend $\tau_{1.1}$ men gentag IKKE trods fælles divisor**	8%(36%)
	$\tau_{1.1****}$	= Ikke brugt her, men se 2.b	
	Andre:	= $\tau_{1.2}$:	4%(86%)
		$\tau_{1.1'}$	8%(93%)
	primære:	= $\tau_{1.1}$:58%(78%), 25%(79%)	
2.a)	$\boldsymbol{\tau_{2.1\sharp}}$	= **Opdel decimaltallet som en sum af flere decimaltal**	8%(79%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.1\sharp\sharp}}$	= **Find to hele tal som opfylder, at $y : x = a_1, d_1 d_2 \cdots$ ved at prøve sig frem med $x \cdot a_1, d_1 d_2 \cdots$ indtil et heltal opnåes**	4%(86%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.1*}}$	= **give decimaltallet nævneren 1**	8%(55%)
			17%(81%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.1**}}$	= **flytte kommaet forkert antal pladser i forhold til valget af nævner**	4%(76%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.0*}}$	= Se 3.b	
	Andre:	= $\tau_{2.1} + \tau_{1.1}$:	4%(81%)
		$\tau_{2.1} + \tau_{1.2}$:	4%(76%)
	primære:	= $\tau_{2.1}$:8%(90%), 29%(85%)	
		$\tau_{2.1'}$: 29%(82%), 13%(89%)	
2.b)	$\boldsymbol{\tau_{2.2\sharp}}$ $(+\tau_{5.2})$	= **Opdel brøken $\frac{a}{b}$ som en multiplikation mellem tæller a og en enhedsbrøk $\frac{1}{b} = 0, c_1 c_2 \cdots$ som omskrives til decimaltal.**	8%(79%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.1****}}$	= **Divider i tæller og nævner med alle slags tal, fx 2, ikke kun fælles divisorer, så der opnås brøker med decimaltal i nævner**	17%(74%) 4%(62%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.2*}}$	= **brug forkert divisionalgoritme**	4%(76%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.2**}}$	= **Tag cifrene i brøken og lad dem være cifrene efter kommaet $\frac{a}{b} =' 0, ab'$**	4%(38%)
	$\boldsymbol{\tau_{2.2***}}$	= **Find heltallet og lad 'resten' være cifferet efter komma: $\frac{a}{b} = \frac{x \cdot b + r}{b} = x, r$**	4%(48%)
	Andre:	= $\tau_{2.2}$:	13%(79%)
			4%(81%)
		$\tau_{1.2} + \tau_{2.2}$:	4%(76%)
	Primær:	= $\tau_{2.2'}$: 46%(82%),46%(84%)	
2.c)	$\boldsymbol{\tau_{2.3'!}}$	= **Omskriv a til procent: $\frac{a \cdot 100}{100} = (a \cdot 100)\%$**	8%(76%)

				8%(81%)
	$\tau_{2.3'!!}$	=	**Gang med 100 %**	17%(81%)
	$\tau_{2.3\sharp}$	=	**Flyt kommaet to pladser til højre**	8%(83%)
	$\tau_{2.3\sharp\sharp}$	=	**Benyt decimaltallenes placering:**	21%(81%)
			$1 = 100\%, 0,1 = 10\%, 0,01 = 1\%, 0,001 = 0,1\%$ osv.	8%(74%)
	$\tau_{2.3*}$	=	se bort fra alle nuller foran tallene	
	$\tau_{2.3**}$	=	**Divider kommatal med 100 for at få procent**	4%(95%)
	$\tau_{2.3***}$	=	**Gang med 10 for at få procent**	8%(64%)
	Primær:	=	$\tau_{2.3'}$: 50%(69%),63%(72%)	
		=	$\tau_{2.3'!}$ og $\tau_{2.3'!!}$ Se ovenfor	
2.d)	$\tau_{2.3***}$	=	Se under 2.c	8%(43%)
	$\tau_{2.3\sharp\sharp}$	=	Se under 2.c	4%(81%)
				8%(74%)
	$\tau_{2.4\sharp}$	=	**Komma flyttes to pladser frem**	25%(81%)
				4%(48%)
	$\tau_{2.4*}$	=	Sæt komma foran "tallet", dvs. tilføj ikke ekstra nul.	
	$\tau_{2.4**}$	=	**$0,x\% = \frac{1}{x}$ og $y,0\% = y$**	4%(24%)
	$\tau_{2.4***}$	=	**Divider procenten med 10 for at få decimaltal**	8%(45%)
	Primær:	=	$\tau_{2.4'}$: 54%(77%),71%(80%)	
3.a)	$\tau_{3.2'!}$	=	**Brug lexiografisk orden til at sammenligne orden**	4%(90%)
			ved at identificere første placering efter kommaet	4%(81%)
			med værdien $\frac{1}{10}$, 2.placering med $\frac{1}{100}$ osv.	
	$\tau_{3.2\sharp}$	=	**Sammenlign det som tallene runder op til.**	8%(86%)
			Hvis fx a rundes op til b så må b være størst.	29%(69%)
	$\tau_{3.2*}$	=	Forlæng decimaltallene med hver deres faktor så de	
			begge bliver til heltal, som kan sammenlignes.	
	$\tau_{3.2**}$	=	Se bort fra komma og sammenlign tallene	
			som om de var heltal.	
	$\tau_{3.2***}$	=	**Man kan kun sammenligne decimaltal**	4%(76%)
			der har lige mange cifre	
	$\tau_{3.2****}$	=	**Rund op til samme antal decimaler og sammenlign**	4%(52%)
	$\tau_{3.2*****}$	=	**Placer efterstillede nuller så der er lige mange**	
			cifre. Sammenlign derefter kun sidste ciffer	
	Andre:	=	$\tau_{3.2}$	17%(81%)
				4%(81%)
			$\tau_{3.0''}$	4%(76%)
				17%(79%)
	Primær:	=	$\tau_{3.2'}$: 54%(71%),25%(82%)	
			$\tau_{3.2'!}$ se ovenfor	
3.b)	$\tau_{3.1\sharp}$	=	**Sammenlign brøkerne i forhold til en anden**	4%(81%)
			brøk, og vurder hvor meget de afviger fra den.	

	$\tau_{3.1\sharp\sharp}$	=	**Spejlvend brøkerne i 1 og sammenlign. Da er den oprindelig orden det omvendte:** $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow 1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d}$	4%(62%)
	$\tau_{3.1*}$	=	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow a - b < c - d$	
	$\tau_{3.1**}$	=	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow a < c$	
	$\tau_{3.1***}$	=	Se 4.e	
	$\tau_{3.1****}$	=	Se 4.e	
	$\tau_{3.0**}$	=	**Skraver brøker i hver sin figur med forskellig antal inddelinger. Aflæs pr. øjemål hvilken brøk der er størst**	8%(57%)
	$\tau_{2.0*}$	=	**Omskriv til blandet brøk ved at sige "heltal større end brøken"+ "det der mangler for at få et heltal".**	4%(81%)
	Andre:	=	$\tau_{3.0''}$:	4%(90%)
	Primær:	=	$\tau_{3.1'}$: 79%(79%),54%(86%)	
4.a+ 4.b)	$\tau_{4.1*}$	=	Læg/træk tæller sammen/fra hinanden uden at finde fælles nævner	
	$\tau_{4.1**}$	=	**Læg/træk tæller sammen/fra og nævner sammen/fra hinanden**	4%(38%) 17%(33%)
	$\tau_{1.2*****}$	=	**Forlæng brøk ved at gange forskellige tal i tæller og nævner**	4%(48%)
	primær:	=	$\tau_{4.1}$:92%(78%),83%(82%)	
4.c)	$\tau_{5.1\sharp}$	=	**Forlæng til fællesnævner før tæller og nævner multipliceres**	8% (88%)
	$\tau_{5.1*}$	=	**Gang kun tællerne sammen (eller kun nævnerne)**	4% (43%) 4% (62%)
	$\tau_{5.1**}$	=	**byt rundt på division og multiplikation**	13% (59%)
	primær:	=	$\tau_{5.1}$:46%(74%),42%(73%) $\tau_{5.1} + \tau_{1.1'}$: 50%(78%), 29%(84%)	
4.d)	$\tau_{5.1\sharp}$	=	Se 4.c	4% (81%)
	$\tau_{5.1*}$	=	Se 4.c	4% (86%)
	$\tau_{5.1***}$	=	**Brug følgende formel:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$	8% (57%)
	Andre:	=	$\tau_{5.1}$ $\tau_{1.1'}$	8%(64%) 4%(100%) 4%(86%)
	primær:	=	$\tau_{5.1'}$:21%(78%), 29%(78%) $\tau_{5.1'} + \tau_{1.1}$: 46%(80%), 21%(85%)	
4.e)	$\tau_{3.1***}$	=	Multiplikation af brøker gør mindre men multiplikation af heltal gør større	
	$\tau_{3.1****}$	=	Multiplikation af brøker gør større ligesom heltal	
	Andre:	=	$\tau_{3.0'}$	8%(83%) 13%(84%)

	primær:	=	$\tau_{3.0'''}$: 46%(75%), 54%(79%)	
5.a+	$\boldsymbol{\tau_{4.2*}}$	=	**Træk fra hinanden /læg tal til uden at tilføje**	4%(52%)
5.b)			efterstillede nuller.	8%(36%)
			Se bort fra de overskydende sidste cifre.	
(5a)	$\boldsymbol{\tau_{4.2**}}$	=	**Læg tallene sammen, hvert ciffer for sig, fra venstre mod højre. Lad 'menterne' blive overført videre mod højre.**	4%(24%)
	Andre:	=	$\tau_{4.2'}$	4%(86%)
	primær:	=	$\tau_{4.2}$: 100%(75%), 79%(81%)	
(5b)	$\boldsymbol{\tau_{4.2***}}$	=	**Træk tallene $a-b$ fra hinanden uden brug af menter. Lad $'0'$ i minuenden (a) repræsentere $'10'$ mens $'0'$ i subtrahenden(b) repræsenterer $'0'$.**	17%(60%)
	primær:	=	$\tau_{4.2}$: 63%(82%), 79%(81%)	
5.c)	$\boldsymbol{\tau_{5.2\sharp}}$	=	**Opdel gangestykket i flere simple gangestykker, så antal decimaler findes først. Derefter udføres multiplikationen:** $(0,c_1)\cdot b = c_1\cdot(0,1\cdot b)$	8%(90%)
	$\boldsymbol{\tau_{5.2*}}$	=	**Udfør regneoperationen og lad kommaet blive**	13%(63%)
			på præcis samme placering som oprindelig.	4%(24%)
	$\boldsymbol{\tau_{5.2**}}$	=	**Gang tallene sammen hvert ciffer for sig .**	
			A) Uden brug af 'menter' - hvis det overstiger 9 skrives blot tallet så der kommer flere decimaler. Se bort fra 0 foran kommaet.	4%(38%)
			B) Lad efterstillede nuller svare til at gange med 1	4%(24%)
			C) Placer hvert udregnet ciffer lige efter et komma. Til sidst lægges alle gangestykkerne sammen	4%(81%)
	$\boldsymbol{\tau_{5.2***}}$	=	**Udfør multiplikationen og træk bagefter resultatet fra det oprindelige tal**	4%(62%)
	Andre:	=	$\boldsymbol{\tau_{2.1}}$ er kombineret med $\tau_{5.1}$ eller $\tau_{2.2}+\tau_{5.2}$	13%(83%)
	primære:	=	$\tau_{5.2}$: 21%(81%), 13%(83%)	
			$\tau_{5.2'}$: 17%(82%), 8%(93%)	
			$\tau_{5.2''}$: 13%(87%), 13%(81%)	
5.d)	$\boldsymbol{\tau_{5.22*}}$	=	**Divider ét ciffer af gangen. Giv resultatet samme**	17%(67%)
			placering som oprindelig ciffer:	4%(76%)
			$a:0,c_1c_2 = 0,(a:c_1)(a:c_2)$	21%(75%)
	$\boldsymbol{\tau_{5.22**}}$	=	**Byt rundt på dividend og divisor**	17%(83%)
	Andre:	=	$\tau_{2.1}$ er kombineret med $\tau_{5.1'}+\tau_{1.1}/\tau_{1.1'}+\tau_{2.2}$:	4%(100%)
				17%(92%)
	Primær:	=	$\tau_{5.2}$: 4%(81%),8%(93%)	
6.a)	$\boldsymbol{\tau_{6.1*}}$	=	**Fællesnævner:** $a<x<c$ **medfører** $\frac{a}{b}<\frac{x}{b}<\frac{c}{b}$	8%(69%)
			Der kan ikke være andre tal imellem.	13%(48%)
	$\boldsymbol{\tau_{6.2**}}$	=	Se 6.b (som misforstået forklaring: 8%(88%))	17%(57%)

	Andre:	=	$\tau_{2.2'}$	8%(93%)
		=	$\tau_{6.2}$	17%(85%)
				33%(81%)
	Primær:	=	τ_6 : 25%(68%),42%(80%)	
6.b)	$\boldsymbol{\tau_{6.2*}}$	=	**Brug lexiografisk orden til at sammenligne decimaltallene og finde tal imellem. Tilføj ikke flere cifre end der oprindeligt er.**	8%(69%)
	$\boldsymbol{\tau_{6.2**}}$	=	**Imellem to tal a og b er antallet af tal lig $a-b$. Dette gælder også for decimaltal.**	17%(57%) 17%(56%)
	Andre:	=	$\tau_{2.2'}$	8%(93%)
		=	$\tau_{6.2}$	17%(85%)
				29%(78%)
	Primær:	=	τ_6 : 29%(69%),42%(80%)	
7.a	$\boldsymbol{\tau_{7.1\sharp}}$	=	**Hvis der gælder sammenhængen $a = k \cdot b$ så kaldes forholdet mellem a og b for $1:k$, dvs. når a vokser med 1 vokser b med k**	13%(86%) 13%(83%)
	$\boldsymbol{\tau_{7.1*}}$	=	**Træk sidelængerne fra hinanden for at finde forholdet**	8%(50%) 4%(62%)
	$\boldsymbol{\tau_{1.1****}}$	=	Se 1.b	4%(56%) 13%(65%)
	Andre:	=	$\tau_{2.2}$	4%(88%)
	Primær:	=	$\tau_{7.1}$: 38%(79%),17%(85%)	
		=	$\tau_{7.1} + \tau_{1.1}$: 8%(88%),21%(93%)	
7b)	$\boldsymbol{\tau_{7.1\sharp}}$	=	Se 7.a	4%(76%) 17%(71%)
	$\boldsymbol{\tau_{7.3*}}$	=	**Forholdet mellem a og b når $a = k \cdot b$ er $a : k \cdot b$.**	
	Andre:	=	$\tau_{7.3''}$	4%(38%)
	Primær:	=	$\tau_{7.3}$: 38%(74%),38%(86%)	

5.3 A POSTERIORI ANALYSE AF GT

Jeg vil her komme med en a posteriori analyse af elevernes besvarelser. Først præsenteres noget generelt statistik og nogle overordnede tabeller, derefter kommer en mere uddybende analyse.

5.3.1 *Statistik og grafisk oversigt*

Først er det udregnet hvor mange rigtige spørgsmål hver elev har løst. Der er stillet 21 spørgsmål, når ekstra-opgaverne ikke regnes med, men for nemheds skyld er der omregnet til, hvor mange procent rigtige spørgsmål hver elev har. Dvs. det er elevens procenttal.

Baseret på de to klasser svarer en gennemsnitlig elev i gymnasiet rigtig på $74\% \pm 19\%$. Den store afvigelse skyldes at det kun er baseret på 48 elever.

I appendix B.9 er uddybet, hvordan usikkerheden er beregnet.

Elever på A-niveau plejer til skriftlig eksamen gennemsnitligt at klare sig til lige under karakteren 7 (i år var forcensuren på 6,7). Karakteren 7 gives for at have opnået ca. 56 − 78% af pointene.

Det kan ikke helt sammenlignes med GT-testen, da procentallene kun er beregnet ud fra rigtig/forkert og altså ikke ud fra en pointvurdering hvor man kan svare mere eller mindre rigtigt.

Så pga. af forskellene i pointgivningen og pga. det meget lille antal elever der giver den meget store usikkerhed, kan det ikke vurderes om en gennemsnitlig gymnasieelev klarer sig bedre i opgaver om brøkregning end de gør i eksamensopgaver.

Hvis man ser på selve usikkerheden på gennemsnittet, så er elevernes gennemsnitlige procenttal i de to klasser:
1.g: 75% ± 3%
3.g: 73% ± 4%
samlet: 74% ± 3%

Dvs. sige der afviges fra gennemsnittet når procenttallet ligger uden for intervallerne baseret på 2 afvigelser:
1.g: [69%; 81%]
3.g; [65%; 81%]
samlet: [68%; 80%]

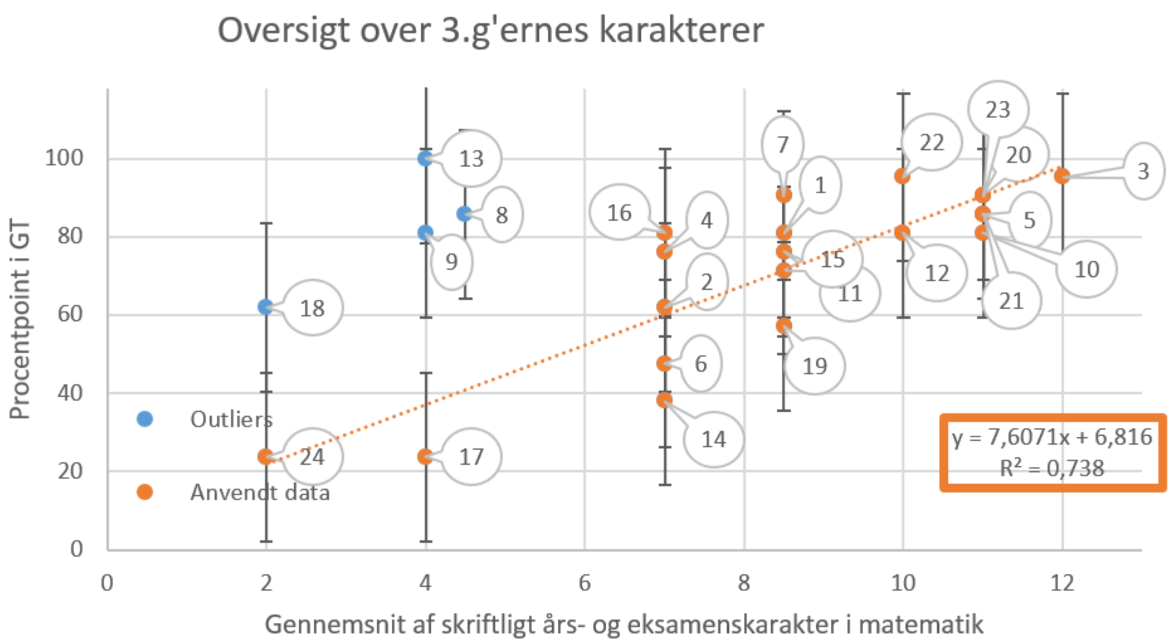
Så når procenttallet fx større end dette intervaltal, er der tydeligt flere af de elever med højt procenttal der har svaret på spørgsmålet.

Som det ses er der ikke væsentligt forskel på de to klassers præstation, da de to gennemnistlige pointtal er inden for hinandens afvigelser. Selvom 1.g'erne i denne specifikke klasse har klaret sig en anelse bedre er det altså ikke belæg for at påstå at gymnasieeleverne er blevet dårligere til brøkregning, selvom det dog tyder på, at de heller ikke er blevet mærkbart bedre til brøkregning. Dette er interessant hvis man forventer at eleverne gennem arbejdet med mere abstrakt matematik for skærpet deres viden om rationale tal. Det tyder altså ikke på, at eleverne fx blive bedre til brøkregneregler blot fordi de møder brøker i avancerede opgaver og beviser.

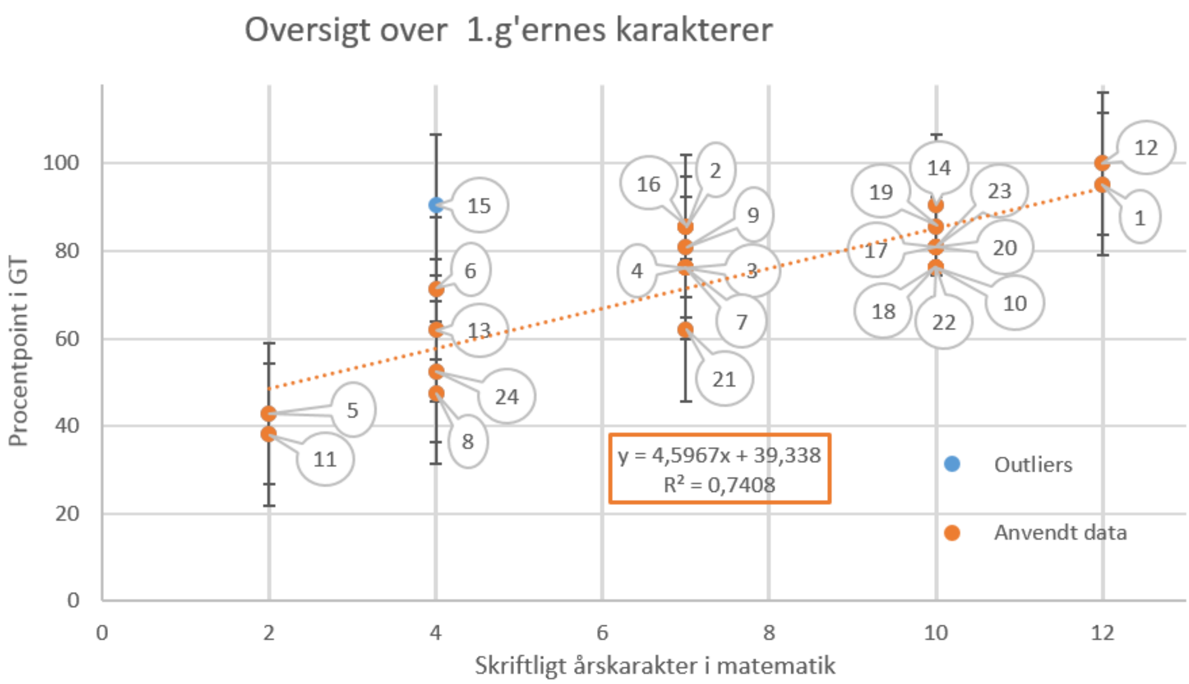
På figur 8 og figur 9 ses en oversigt over, hvordan hver enkelt elev har klaret sig i GT-testen i forhold til den karakter de har fået i matematik. For 3.g'ernes vedkommende er der fundet en gennemsnit mellem deres skriftlige årskarakter og skriftlige eksamenskarakter, da det giver et mere reelt billede af hvad de kan.

Bemærk at 3.g'ernes samlede skriftlige karaktergennemsnit lå på 6,5, hvor den gennemsnitglige forcensur ligger på 6,7 for hele landet, så klassen er en meget gennemsnitlig klasse. 1.g'ernes årskarakterer har et gennemsnit på 7,5, men det kan hurtigt falde når først eleverne møder årsprøver og terminsprøver der giver et mere reelt billede af hvad de kan. Til sammenligning lå 3.g'ernes skriftlige årskarakter gennemsnitligt i 1.g på 7,7, så det er ikke til at sige at den ene klasse plejer at præstere væsentlig bedre i matematik end den anden klasse.

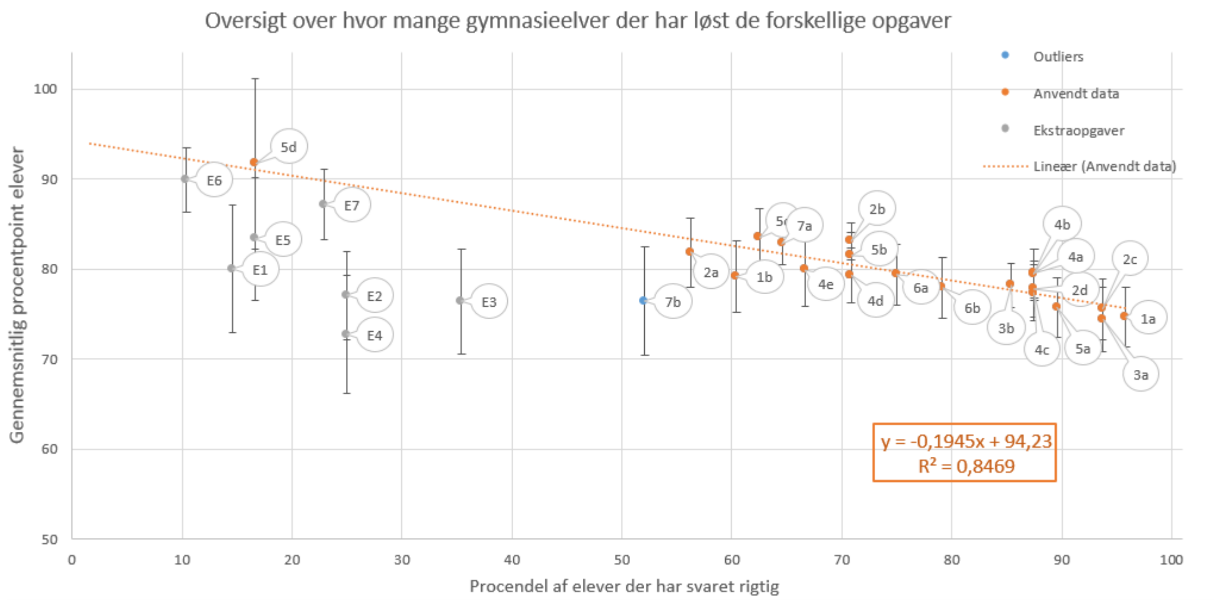
Når man kigger på tabel 8 og 9, ses det tydeligt at nogle elever skiller sig ud. De har altså præsteret meget bedre i GT end de plejer at præstere i den almindelige gymnasieundervisning.



Figur 8: Her ses en sammenligning af, hvilke karakter 3.g'erne har fået i forhold til hvordan de klarede sig i GT-testen. Der er taget et gennemsnit af skriftlig årskarakter og eksamenskarakter. Den lineære regression er beregnet på de korrigerede data, og viser at der er en svag lineær tendens, dvs. de dygtige elever klarer sig generelt bedre i GT-testen. Navngivningen af punkterne relaterer til nogle elevnumre jeg har givet eleverne for at kunne relatere dem til deres besvarelser.



Figur 9: Her ses en sammenligning af, hvilke skriftlige årskarakterer 1g'erne har fået i forhold til hvordan de klarede sig i GT-testen. Den lineære regression er beregnet på de korrigerede data, og viser at der er en svag lineær tendens, dvs. de dygtige elever klarer sig generelt bedre i GT-testen.



Figur 10: Her ses en oversigt over hvordan gymnasieeleverne samlet set har klaret GT. Der er lavet en sammenligning mellem procentandel der har svaret rigtig på pågældende spørgsmål og det gennemsnitlige procenttal på de elever der har svaret rigtig. Ekstraopgaverne er ikke regnet med i regressionerne og hellere ikke i pointtallene.

Men bortset fra disse elever, så ser det overordnet ud til, at sammenhængen mellem skriftlig karakter og præstastion i brøkregning har en svag lineær tendens. Datasættet er dog for lille til at få større præcision, men det betyder i praksis at elever der præsterer godt i skriftlig gymnasiematematik også præsterer godt i brøkregningen. Det er altså interessant, at der blandt elever der præsterer godt normalt ikke er nogen som præsterer dårligt i brøkregningen. Til gengæld er der nogen elever som præsterer godt i det mere grundlæggende brøkregning, men præstere dårligere i gymnasiematematikken.

Ifølge figur 8 skiller følgende elever sig ud hos 3.g'erne: elev3.8,3.9,3.13 og 3.18.

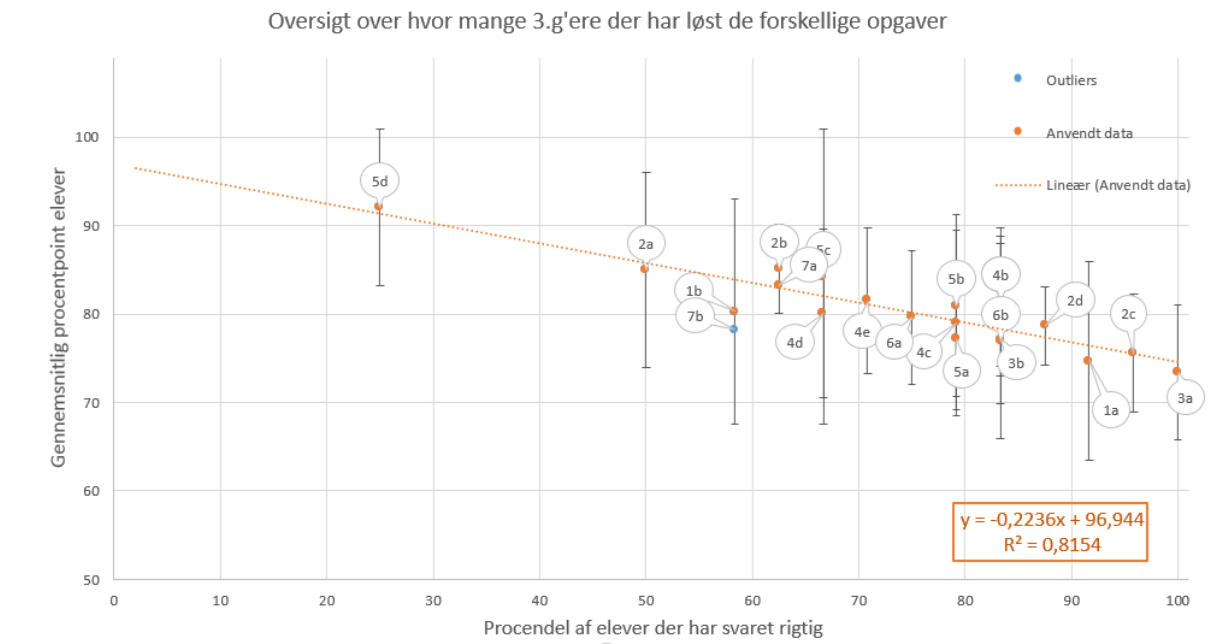
Hvad angår elev3.9 og 3.13 skyldes det, at de pågældende elever sådan præsterer godt nok til den daglige matematikundervisning. Eleverne har blot ikke lavet deres afleveringer ordentligt, hvilket afspejler sig i den skriftlige karakter og dermed også i eksamenskarakteren.

Hvad angår elev3.8 og elev3.18, så er det to elever som generelt præsterer lavt når det handler om gymnasiematematik, men som tydeligvis stadig har styr på den mere grundlæggende brøkregning fra folkeskolen. Jeg har tidligere erfaret at elev3.18 fx præsterede godt i Georg Mohr konkurrencen som er en hel anden form for matematik end den der mødes i den almindelige gymnasieundervisning.

Hos 1.g'erne er det jvf. figur 9 især elev1.15 som skiller sig ud. Denne elev får en lav karakter da eleven afleverer mangelfulde afleveringer og ikke træner til prøverne, men overordnet set er det en elev som igen præsterer godt i den daglige undervisning, og så giver indtryk af at kunne præstere mere skriftligt, hvis blot eleven forsøgte. Derfor ses det også at denne elev faktisk har godt styr på brøkregningen.

I figur 10 ses en grafisk oversigt over, hvor mange der har svaret rigtig på de enkelte spørgsmål.

Ekstraopgaverne er medtaget, selvom de, som nævnt i a priori analysen, er blevet udeladt i analysen. Elevernes gennemsnitlige procental i ekstraopgavernes er det procenttal som ele-



Figur 11: Her ses en oversigt over hvordan 3.g'erne har klaret GT. Der er lavet en sammenligning mellem procentandel der har svaret rigtig på pågældende spørgsmål og det gennemsnitlige procenttal på de elever der har svaret rigtig. Ekstra-opgaverne er ikke regnet med i regressionerne og hellere ikke i pointtallene.

verne fik i selve testen. Dette er valgt ud fra en forventning om, at den viden eleverne har vist i selve testen, afspejler deres generelle viden om brøker.

Som det ses skiller ekstra-opgaverne sig tydeligt ud. Der ser altså ikke ud til at være nogen sammenhæng mellem antallet af elever der er svaret på ekstra-opgaverne og hvordan de generelt præsterer i GT. Netop derfor er ekstra-opgaverne udeladt af analysen, da de ikke har virket efter hensigten. Opgaverne har bl.a. været for anderledes i forhold til resten af testen, for tvetydige og dermed svære at vurdere eller for dårligt formuleret så eleverne har misforstået spørgsmålet.

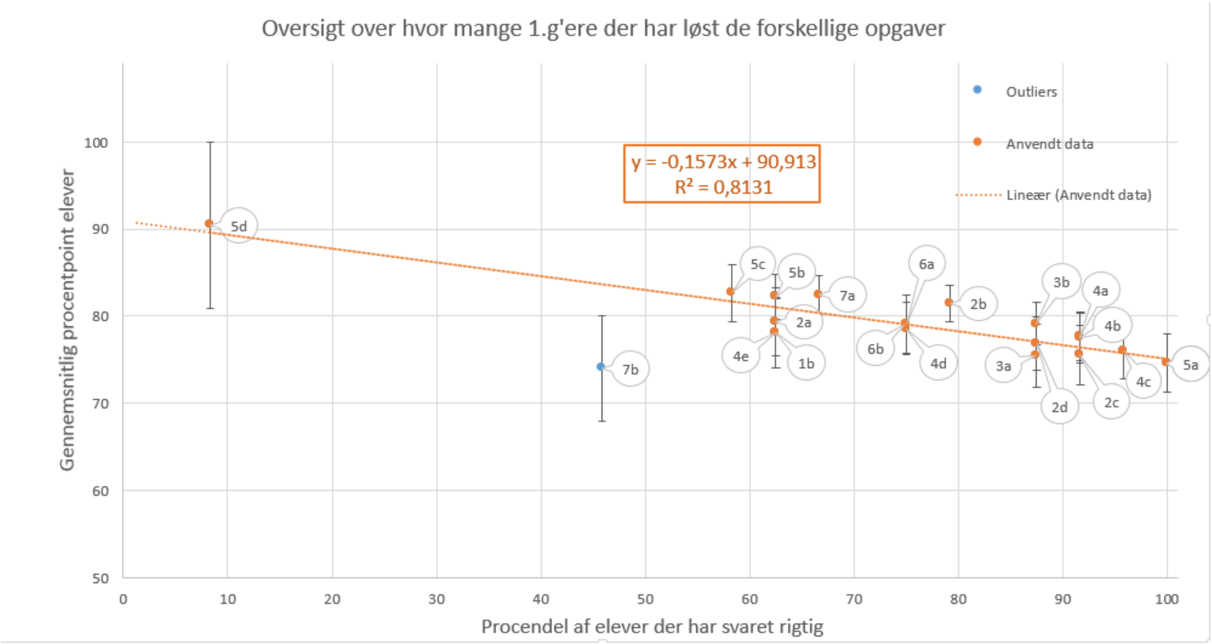
Det er kun E6 og E7 der ikke skiller sig mærkbart ud fra resten af spørgmålene. Disse to spørgsmål var også dem der mindede mest om de andre spørgsmål i GT og som formuleringsmæssigt ikke gav grund til forvirring. Derfor er disse medtaget i analysen.

Derudover viser figur 10 at der er en lineær tendens mellem antal rigtige svar på spørgsmålene i selve testen og de pågældende elevers procenttal. Det betyder igen, at spørgsmål som kun få elever svarede rigtig på, er blevet besvaret af de elever som præsterede godt i testen. Så spørgsmålene har altså virket efter hensigten.

Kun spørgsmål 7.b afviger mærkbart fra de andre spørgsmål. Her er der væsentligt færre af de elever der ellers præsterer godt i GT, som har svaret rigtig på spørgsmålet. Dette tyder på at spørgsmålet ikke har virket efter hensigten. Dette vil blive uddybet nedenfor.

I figur 12 og figur 11 ses en tilsvarende grafisk præsentation hvor man kan se hvordan de to klasser har klaret sig hver for sig i GT. Der er selvfølgelig lidt variationer i hvor mange der har svaret på de forskellige spørgsmål, men de afviger ikke væsentligt fra hinanden, når man tænker på hvor store afvigelser hver enkelt spørgsmål har.

Som det ses, er afvigelserne hos 3.g'erne konsekvent større end hos 1.g'erne. Dette viser, at 3.g'ernes præstation er mere spredt. Der er altså generelt flere der klarer sig godt og flere der



Figur 12: Her ses en oversigt over hvordan 1.g'erne har klaret GT. Der er lavet en sammenligning mellem procentandel der har svaret rigtig på pågældende spørgsmål og det gennemsnitlige procenttal på de elever der har svaret rigtig. Ekstra-opgaverne er ikke regnet med i regressionerne og hellere ikke i pointtallene.

klarer sig dårligt, mens 1.g'erne har flere elever der klarer sig gennemsnitligt. Dette kan man også se af figur 9 og figur 8, hvor det fx ses, at 3.g'erne har 3 elever under 40% mod kun én hos 1.g'erne og 3.g'erne har 14 elever over 80% mod kun 11 hos 1.g'erne.

Den store spredning hos 3.g'erne kan også indikere at det er mere blandet hvem der svare rigtig på de forskellige spørgsmål.

Jeg vil i næste afsnit kommentere på nogle af de interessante spørgsmål og referere tilbage til disse grafer, når det er interessant at sammeligne, hvordan de to klasser har klaret i forhold til hinanden.

5.3.2 *Fordelingen af elevernes besvarelser*

I analysen fokuserer jeg på den primære teknik, som er en teknik som mange har brugt og som jeg selv forventede de ville bruge jvf. tabel 14. I de fleste tilfælde er der kun én primær teknik, men i tilfælde hvor flere teknikker er cirka lige hyppigt brugt og samtidig foreslået af mig, kan der opstå flere primære teknikker.

Derudover nævner jeg eventuelle nye teknikker som eleverne har anvendt. Jeg skelner også mellem om eleverne trods rigtigt svar slet ikke har uddybet hvilket teknik de bruger, enten pga. manglende mellermegning eller manglende forklaring. Oftest tyder det dog på at de har brugt den primære teknik. Tilsvarende ser jeg også på, om eleverne har anvendte rigtig teknik, men brugt forkert forklaring på hvilken teknik de har brugt. Det er oftest den primære teknik de bruger, men som de forklarer forkert bagefter.

Jeg uddyber også, hvilke forkerte teknikker eleverne har brugt. Når jeg kalder en teknik forkert, så kan eleven reelt set godt have udført den oprindelige teknik korrekt, men blot lavet simple regnefejl. Men da regnefejl også bundner i forkert teknik, fx for operationer med hele tal, kaldes det stadig at eleven har brugt en forkert teknik.

Procent rigtig	Intet svar	Primær teknik	Andre teknikker	Mangelfuld	Misforstået	Forkert svar
1.a) 100% (75%) 92% (75%) 96%(75%)	÷ 0% 4%(24%) 2%(24%)	$\underline{\tau_{1.2}}$, 63% (80%) 67%(76%) 65%(78%)	$\tau_{2.4}$, $\tau_{1.2\sharp}$, $\tau_{1.2\sharp\sharp}$, $\tau_{1.2\sharp\sharp\sharp}$ 16%(66%) 4%(57%) 10%(64%)	 13%(56%) 13%(92%) 13%(74%)	$\tau_{1.2**}$, $\tau_{1.2****}$ 8%(81%) 8%(43%) 8%(62%)	$\tau_{1.2***}$ 0% 4%(95%) 2%(95%)
1.b) 63% (78%) 58% (80%) 60% (79%)	÷ 8% (67%) 8% (43%) 8%(55%)	$\underline{\tau_{1.1}}$ 58% (78%) 25%(79%) 42%(79%)	$\tau_{1.1'}$, $\tau_{1.2}$ 0% 13%(91%) 6% (91%)	 0% 8%(88%) 4% (88%)	$\tau_{1.1**}$ 4%(76%) 13%(65%) 8%(68%)	$\tau_{1.1***}$, $\tau_{1.3**}$, $\tau_{2.2'}$ 29%(69%) 33%(69%) 31%(69%)
2.a) 63% (79%) 50% (85%) 56% (82%)	÷ 17% (63%) 25% (52%) 21%(57%)	$\underline{\tau_{2.1}}$, $\underline{\tau_{2.1'}}$ 38% (84%) 42%(86%) 40%(85%)	$\tau_{1.1}$, $\tau_{1.2}$, $\tau_{2.1\sharp}$ 8% (78%) 8% (79%) 8% (79%)	 17%(69%) 0% 8% (69%)	 0% 0% 0%	$\tau_{2.1\sharp\sharp}$, $\tau_{2.1*}$, $\tau_{2.1**}$ 21%(70%) 21%(70%) 21%(70%)
2.b) 79% (81%) 63% (85%) 71% (83%)	÷ 8% (48%) 13% (29%) 10%(36%)	$\underline{\tau_{2.2'}}$ 42% (82%) 46%(86%) 44%(84%)	$\tau_{2.2}$, $\tau_{1.2}$, $\tau_{5.2}$, $\tau_{2.2\sharp}$ 25%(79%) 4%(81%) 15%(79%)	 13%(84%) 4%(90%) 8%(86%)	$\tau_{1.1****} \rightarrow$ 0% 8%(79%) 4%(79%)	$\tau_{2.2*}$, $\tau_{2.2**}$, $\tau_{2.2***}$ 13%(49%) 25%(67%) 19%(61%)
2.c) 92% (76%) 96% (76%) 94% (76%)	÷ 0% 4% (24%) 2%(24%)	$\underline{\tau_{2.3'}}$, $\underline{\tau_{2.3'!}}$, $\underline{\tau_{2.3'!!}}$ 58% (71%) 88%(76%) 73%(74%)	$\tau_{2.3\sharp}$, $\tau_{2.3\sharp\sharp}$ 29% (82%) 8% (74%) 19% (80%)	 0% 0% 0%	$\tau_{2.3**}$, 4%(95%) 0% 2%(95%)	$\tau_{2.3***}$ 8% (64%) 0% 4%(64%)
2.d) 88% (77%) 88% (79%) 88% (78%)	÷ 0% 0% 0%	$\underline{\tau_{2.4'}}$ 54% (77%) 71%(80%) 67%(79%)	$\tau_{2.4\sharp}$, $\tau_{2.3\sharp\sharp}$ 29% (81%) 13% (65%) 21% (76%)	 0% 4%(100%) 2%(100%)	 4%(52%) 0% 2%(52%)	$\tau_{2.4**}$, $\tau_{2.4***}$, $\tau_{2.3***}$ 13%(59%) 13%(37%) 13%(48%)
3.a) 88% (76%) 100% (73%) 94% (74%)	÷ 0% 0% 0%	$\underline{\tau_{3.2'}}$, $\underline{\tau_{3.2'!}}$ 58% (72%) 29%(82%) 46%(76%)	$\tau_{3.2}$, $\tau_{3.0''}$, $\tau_{3.2\sharp}$ 29% (82%) 50% (73%) 40% (76%)	 0% 21%(62%) 10%(62%)	 0% 0% 0%	$\tau_{3.2**}$, $\tau_{3.2***}$, $\tau_{3.2****}$ 13% (68%) 0% 6%(68%)
3.b) 88% (79%) 83% (77%) 85% (78%)	÷ 4% (38%) 0% 2%(38%)	$\underline{\tau_{3.1'}}$ 79% (79%) 54%(86%) 67%(82%)	$\tau_{3.0''}$, $\tau_{3.1\sharp}$, $\tau_{3.1\sharp\sharp}$ 0% 13%(78%) 6%(78%)	$\tau_{3.0}$ 0% 21%(55%) 10% (55%)	 8%(83%) 0% 4%(83%)	$\tau_{2.0*}$, $\tau_{3.0*}$, $\tau_{3.0**}$ 8%(45%) 17%(55%) 13%(52%)
4.a + b) 92% (78%) 83% (82%) 88%(79%)	÷ 4% (43%) 0% 2%(43%)	$\underline{\tau_{4.1}}$ 92% (78%) 83%(82%) 88%(80%)	 0% 0% 0%	 0% 0% 0%	 0% 0% 0%	$\tau_{4.1**}$ 4% (38%) 17%(33%) 10% (34%)
4.c) 96% (76%) 79% (79%) 88% (77%)	÷ 0% 4% (24%) 2%(24%)	$\underline{\tau_{5.1}}$, $\underline{\tau_{1.1}}$ 96%(76%) 71%(78%) 83%(77%)	$\tau_{5.1\sharp}$ 0% 8% (88%) 4% (88%)	 0% 0% 0%	 0% 0% 0%	$\tau_{5.1*}$, $\tau_{5.1**}$ 4% (43%) 17% (60%) 10%(56%)

Procent rigtig	Intet svar	Primær teknik	Andre teknikker	Mangelfuld	Misforstået	Forkert svar
4.d)	÷	$\underline{\tau_{5.1'}}$, $\underline{\tau_{1.1}}$	$\tau_{1.1'}$, $\tau_{5.1}$,			$\tau_{5.1*}$,$\tau_{5.1***}$, $\tau_{5.1\sharp}$
75% (79%)	0%	67% (79%)	4%(100%)	4%(48%)	0%	25%(63%)
67% (80%)	25% (55%)	50%(81%)	13%(71%)	4%(100%)	0%	8%(76%)
71% (79%)	13%(55%)	58%(80%)	10% (84%)	4% (74%)	0%	17%(66%)
4.e)	÷	$\underline{\tau_{3.0'''}}$	$\tau_{3.0'}$,			
63% (78%)	0%	46% (75%)	8%(83%)	8%(88%)	0%	21%(75%)
71% (82%)	4% (71%)	54%(79%)	13%(84%)	4%(100%)	0%	17%(64%)
67% (80%)	2%(71%)	50%(78%)	10%(84%)	6% (92%)	0%	19%(70%)
5.a)	÷	$\tau_{\underline{4.2}}$				$\tau_{4.2'}$, $\tau_{4.2*}$, $\tau_{4.2**}$,
100% (75%)	0%	100% (75%)	0%	0%	0%	0%
79% (77%)	0%	79%(77%)	0%	0%	0%	21%(59%)
90% (76%)	0%	90%(76%)	0%	0%	0%	10%(59%)
5.b)	÷	$\tau_{\underline{4.2}}$				$\tau_{4.2'}$, $\tau_{4.2*}$, $\tau_{4.2***}$
63% (82%)	0%	63% (82%)	0%	0%	0%	38% (62%)
79% (81%)	0%	79%(81%)	0%	0%	0%	21%(45%)
71% (82%)	0%	71%(82%)	0%	0%	0%	29%(56%)
5.c)	÷	$\underline{\tau_{5.2}}$, $\underline{\tau_{5.2'}}$, $\underline{\tau_{5.2''}}$	$\tau_{2.1}$, $\tau_{5.1}$, $\tau_{2.2}$, $\tau_{5.2\sharp}$			$\tau_{5.2*}$, $\tau_{5.2**}$, $\tau_{5.2***}$
58% (83%)	13% (59%)	50% (84%)	0%	8%(81%)	0%	29%(65%)
67% (84%)	13% (48%)	33%(85%)	21% (86%)	13%(81%)	0%	21%(54%)
63% (83%)	13%(53%)	42%(84%)	10% (86%)	10% (81%)	0%	25%(61%)
5.d)	÷	$\underline{\tau_{5.2}}$	$\tau_{2.1}$, $\tau_{5.1'}$, $\tau_{1.1}$, $\tau_{2.2}$			$\tau_{5.22*}$, $\tau_{5.22**}$
8% (91%)	21% (74%)	4% (81%)	4%(100%)	0%	0%	71% (73%)
25% (92%)	54% (62%)	8%(93%)	17%(92%)	0%	0%	21%(82%)
17% (92%)	38%(65%)	6%(89%)	10%(93%)	0%	0%	46%(75%)
6.a)	÷	$\underline{\tau_{6}}$	$\tau_{6.2}$, $\tau_{2.2'}$		$\tau_{6.2**}$	$\tau_{6.1*}$, $\tau_{6.2**}$
75% (79%)	0%	25% (68%)	25% (87%)	0%	25% (82%)	25% (61%)
75% (80%)	4% (24%)	42%(80%)	33% (79%)	0%	0%	21%(61%)
75% (79%)	2%(24%)	33%(76%)	29%(82%)	0%	13%(82%)	23%(61%)
6.b)	÷	$\underline{\tau_{6}}$	$\tau_{6.2}$, $\tau_{2.2'}$		$\tau_{6.2**}$	$\tau_{6.2*}$, $\tau_{6.2**}$
75% (79%)	0%	29% (69%)	25% (87%)	0%	21%(84%)	25%(61%)
83% (77%)	0%	42%(80%)	29%(78%)	0%	13%(62%)	17%(56%)
79% (78%)	0%	35%(76%)	27%(82%)	0%	17% (76%)	21% (59%)
7.a)	÷	$\underline{\tau_{7.1}}$, $\underline{\tau_{1.1}}$	$\tau_{7.1\sharp}$	$\tau_{2.2}$	$\tau_{7.1****}$	$\tau_{7.1*}$
67% (82%)	25% (62%)	46% (80%)	13%(86%)	4%(86%)	4%(90%)	8%(50%)
63% (83%)	29% (52%)	38%(90%)	13%(83%)	0%	13%(65%)	8%(74%)
65% (83%)	27%(57%)	42%(85%)	13% (85%)	2% (86%)	8%(71%)	8%(62%)
7.b)	÷	$\underline{\tau_{7.3}}$	$\tau_{7.3''}$, $\tau_{7.1\sharp}$			$\tau_{7.3*}$
46% (74%)	21% (72%)	38% (74%)	4%(76%)	0%	4% (76%)	33% (77%)
58% (78%)	33% (63%)	38%(86%)	21%(63%)	0%	0%	8%(83%)
52% (76%)	27%(57%)	38%(80%)	13%(64%)	0%	2%(76%)	21%(78%)

Tabel 25: Her ses den procentvise fordeling af besvarelserne i GT. Parentes viser hvilket gennemsnitligt procenttal de pågældende elever har haft. Rigtigt svar = "primær teknik, andre teknikker, mangelfuld forklaring (utydelig teknik) og misforstået/forkert forklaring på deres teknik".

I tabel 25 ses en oversigt over de teknikker som rent faktisk blev anvendt af eleverne og hvordan de i grove træk har svaret. Som det ses har eleverne i de fleste tilfælde anvendte de primære teknikker som jeg forventede. Dog er der i 2.d og 6.a blevet anvendt andre teknikker af mindst 20% af eleverne og for 3.a er det hele 40% af eleverne.

I mange af spørgsmålene er det meget blandet hvem der har anvendt andre teknikker, fx 3.a og 3.b, hvor elevernes gennemnsitlige procenttal er 76%. I andre spørgsmål er der en tydelig tendens til at det er elever der præsteret godt eller dårligt som har anvendt andre teknikker, fx 5.c hvor elevernes gennemsnitlige procenttal er 86% eller 1.a, hvor det er 64%.

I tabel 24 kan man se nærmere på de enkelte teknikker. Der afspejler sig en tendens af, at de elever der præsterer bedre i GT også vælger mere hensigtmæssige teknikker, når de ikke følger de primære teknikker. Dette vil blive uddybet under de konkrete spørgsmål i afsnit 5.3.3.

Både mangelfulde besvarelser og misforståede besvarelser er en blandet elevflok. Man kan også sige, at især mangelfulde besvarelser ikke nødvendigvis indidkerer en elev som ikke har god viden om rationale tal, men blot en elev som ikke har argumenteret for sit svar. Mange elever har undladt mellemregninger og argumentation, hvilket gør det sværere at gennemskue deres teknikker, så det har været en ny vurdering for hvert spørgsmål, hvad der blev karakteriseret som mangelfuld forklaring. Hvis spørgsmålet fx direkte bad om argumentation og mellemregning, er det mangelfuldt hvis der kun er angivet facit.

Der ses der en tydelig tendens ved de forkerte svar om, at det oftest er elever med lavere procenttal der svarer forkert. Fx har 10% af eleverne svaret forkert på 4.a + b men de har kun haft en gennemsnitligt procenttal på 34. Her afviger 1.a dog, da én elev med procenttal på 95% har svaret forkert.

Hvis man sammenligner med de elever der slet ikke har svaret på spørgsmålene, så er det gennemsnitlige procenttal væsentligt lavere hos dem der ikke svarer en dem der svarer forkert. Det ses i spørgsmål 2.a hvor 21% har undladt at svare og lige så mange har svaret forkert, men procenttallet for de forkerte svar er 70% og hos uden svar er det 57%. Det er kun 4.e hvor de gennemsnitlige procenttal er nærmest identisk.

Så det tyder på, at de elever der præsterer dårligere i GT generelt er mere usikre på sig selv og derfor undlader at svare. Det ses fx i bilag B.6 hos elev3.19 (57%) i dialogerne E22(*"Jeg kan ikke huske formlen, og så tænkte jeg, at når jeg ikke ved det, så lader jeg være med at svare"*), E47 (*"Nu er jeg usikker - så jeg lader være"*).

Det kan også bare være at de elever der præsterer dårligere har mindre viden at trække på, og derfor ikke ved hvordan de skal gribe en opgave an. Det ses fx i bilag B.1 hos elev1.5 (43%) i dialog E8 (*"Jeg nåede at gå i gang med den, men så forsøgte jeg - hvordan er det nu man gør - og så viskede jeg ud"*) og L64 + E64 (*"Du kan slet ikke huske hvordan man dividerer brøker? - NEJ"*) og E67 (*"Det der med regningsarternes hiarki, det kunne jeg ikke lige"*).

Ifølge tabel 25 tyder det ikke på, at 1.g'erne adskiller sig væsentlig fra 3.g'erne, når det handler om at svarer forkert vs ikke at svarer på spørgsmålene eller når det handler om at svare mangelfuldt vs at give en misforstået forklaring.

5.3.3 *Uddybende kommentarer til spørgsmålene*

Her vil jeg gå mere i dybden med de spørgsmål som jeg finder det interessant at kommentere yderligere på.

Husk på, at jeg i tabel 13 viser, hvilke spørgsmål jeg forventede ville være problematiske. I tabel 25 kan man se, hvordan elevernes besvarelser har fordelt sig. I figurerne 12, 11 og 10 kan man få et grafisk overblik.

Desuden henviser jeg ofte til interviewene af gymnasieeleverne som findes under bilag B.

5.3.3.1 *Spørgsmål der ikke var særlig problematiske (mindst 85% rigtige)*

2.C, 3.A: Hele 94% af eleverne har svaret rigtig på spørgsmål 2.c om at omskrive fra decimaltal til procent og 3.a om at sammenligne decimaltal. Disse var altså stort set ikke problematiske for eleverne, netop som jeg forventede.

2.D, 3.B, 5.A: Mindst 85% af eleverne har desuden svaret rigtig på 2.d, 3.b, 5.a, så de kan ikke siges at have været særlig problematiske, hvilket jeg hellere ikke forventede at de ville være. De elever der har haft problemer er netop dem, som generelt har klaret sig dårligt i GT. Der er desuden flest 3.g'ere som har haft problemer med disse spørgsmål.

I 2.d blev ingen elever fanget i fælden med at lave fejl fordi tallet var mindre end 10%, men de havde i stedet forskellige andre teknikker. Til gengæld havde flere elever en noget vag forklaring, da de skriver, at de blot flytter komma to pladser frem.

I 3.b virker nogle elever til at mangle viden om, hvordan man sammenligner brøker, fx elev1.5 (43%) i E40 (*Jeg kan ikke huske det*). Nogle forsøger også at skraverer nogle upræcise cirkler og vurderer fejlagtigt ud fra disse, elev3.4 (76%) viser dog i E11 (*Man kunne lave en fællesnævner*) viden om, hvordan man kunne have anvendt cirklen korrekt.

4.A, 4.B, 4.C: 4.a, 4.b og 4.c blev samlet set besvaret af 88%, og kan derfor overordnet set hellere ikke anses for at have været særlig problematiske, på trods af, at jeg forventede det. Igen er det elever med lavt procenttal der har haft problemer med spørgsmålet.

Dog har 3.g'erne haft markant større problemer end 1.g'erne, fx har kun 79% 3'gere svaret rigtig på 4.c. Det er altså interessant at de grundlæggende brøkregneregler som sum, differen og multiplikation er blevet glemt i løbet af gymnasiet. De forkerte teknikker handler bla. om, at bytte rundt på division og multiplikation og om at håndtere tæller og nævner uafhængigt af hinanden.

Det er også interessant i 4.c at lidt over halvdelen af 1.g'erne med korrekt besvarelse forkorter facit, mens kun 42% af 3.g'gerne med korrekt facit forkorter.

1.A: Spørgsmål 1.a blev løst rigtig af 96%, hvilket er den bedste svarprocent. Jeg havde forventet at den ville være problematisk jvf. tabel 13. Det problematiske i det var, om eleverne forstod hvad der mentes med at finde brøker LIG $\frac{3}{4}$. De færreste elever har argumenteret for ækvivalens, men de har alligevel været i stand til at finde andre brøker, hvoraf 65% brugte den primære teknik til at forlænge. Nogle få argumenterede dog for ækvivalens ud fra decimalværdi eller procentrepræsentation.

Når man ser på tabel 25 så er der samlet 13% som slet ikke har haft argumenter for ækvivalens eller mellemregninger men blot skrevet "jeg forlænger" uden at vise hvad det vil sige at forlænge. Interview af elev1.5 (43%) jvf. bilag B.1 dialog E4 (*"Jeg gangede med to for oven og to for neden"*) og elev 3.19 jvf. bilag B.6 dialog E3 (*"fx så kan jeg gange det med 2."*) viser dog, at eleverne godt kan sætte ord på, hvad det vil sige at forlænge, når de bliver spurgt.

Begge klasser er lige gode om at svare mangelfuldt og det ses på elevernes procenttal, at det er meget blandet hvor godt de pågældende elever har præsteret. Det understreger, at det blot er et formuleringsproblem.

5.3.3.2 *Mere problematiske spørgsmål (mellem 56% og 80% rigtige)*

1.B: Jeg forventede at spørgsmålet ville være problematisk. Da kun 60% har svaret rigtig, kan den siges at have været problematisk.

Det viste sig, som forventet, især at være 'minus' der gav problemer, da eleverne glemte at få det med i mellemregninger eller facit. Elev1.6 (71%) udtrykker i dialog $E2 + L3$ (*jeg var i tvivl om jeg kan reducere sådan - Ja, når der var minus på!*).

Derudover har 8% givet en forkert forklaring på det de gør, ved at bruge en forkert matematisk notation ved fx at skrive $\frac{-68}{12} : 2$, når de i virkeligheden mener at de dividerer i både tæller og nævner. Mange af de samme elever brugte en lignende notation i spørgsmål 1.a.

2.A, 2.B: Eleverne havde ikke store problemer med omskrivning mellem procent og decimaltal, men til gengæld gav det flere problemer for eleverne at omskrive mellem decimaltal og brøker.

Den mest problematiske var 2.a hvor de skulle omskrive til brøk, for hele 21% slet ikke svarede på spørgsmålet og lige så mange svarede forkert.

Den mest typiske fejl var, at eleverne blot gav decimaltallet nævneren 1, sandsynligvis fordi de ved at det er sådan man gør ved heltal. Andre havde svært ved at finde ud af hvor mange pladser kommaet skulle flyttes, men mange har som nævnt slet ingen anelse om, hvad man skal gøre. Dette ses også hos elev3.12 (81%) i dialog E1 (*Ikke lige i det tilfælde. For de meget simple, dem kan jeg egentlig godt sådan regne ud, men har bare svært ved når det er sådan nogle tal*), som selv udtrykker manglende viden om, hvad man gør med generelle decimaltal. Eleven er dog i stand til at omregne de mest anvendte brøker, da sammenhængen mellem nogle konkrete decimaltal og brøker er noget der sidder på rygraden som fx at $\frac{1}{3} = 0,3\overline{3}$. Den pågældende elev skelner dog ikke mellem $0,3\overline{3}$ og $0,33$.

De elever der svarede korrekt på 2.a, brugte næsten alle de primære teknikker, det er dog interssant at flest 3.g'ere brugte $\tau_{2.1}$ mens flest 1.g'ere brugt $\tau_{2.1'}$. Mange elever havde dog ingen mellemregninger med.

I 2.b bruger de fleste den primære teknik $\tau_{2.2'}$ til at omskrive til mindre brøker som de kender decimalværdien af, det er dog de færreste der viser, hvordan de omskriver simnple brøker til decimaltal, for som nævnt under 2.a og som elev1.19 (86%) udtrykker det i dialog E1 (*Altså, $\frac{3}{4}$ det er jo bare $0,75$. Jeg tror det er sådan nogle basic ting som man har lært for længe siden og ikke engang tænker over*), så er det en viden eleverne ikke er bevist om hvor de har fra.

Nogle få brugte også den forventede teknik $\tau_{2.2}$ om at udregne divisionen mellem tæller og nævner, men flere har i mellemregingen den forkerte matematiske notationen, hvor de opnår brøken $\frac{7,5}{2}$. Et par elever laver blot regnefejl eller skrivefejl som fx at $\frac{3}{4} = 0,705$.

4.D: Det er interessant at hele 25% (55%) af 3.g'erne slet ikke svarer på spørgsmålet om at dividere to brøker. Som det ses er det primært elever der præsterer dårligt i GT der ikke har forsøgt. Derimod har en tilsvarende anddel af de lavt præsterende 1.g'ere faktsik forsøgt at løse spørgsmålet, dog uden held.

Det tyder altså på, at en stor anddel af 3.g'erne fuldstændig har glemt formlen, dette understreges også af elev3.19 i dialog E22 (*Jeg kan ikke huske formlen, og så tænkte jeg, at når jeg ikke ved det, kan jeg lige så godt lade være at svare*). Det kan også betyde, at 1.g'erne var mere tilbøjelige til at komme med et svar i dette spørgsmål, selvom de var usikre. Dog skyldes flere af de forkerte svar også blot regnefejl, hvor de ganske enkelt ganger forkert med de store tal, fx $7 \cdot 26 = 182$.

Blandt de elever der har svaret korrekt, har de fleste brugt den primære teknik $\tau_{5.1}$, hvoraf cirka en tredjedel slet ikke er reducerede brøken efterfølgedne. Blandt de elever der reducerede, var der mange der, som forventet, ikke fik reduceret mere end til $\frac{14}{91}$. De var altså ikke i stand til at gennemskue, at tæller og nævner kunne opløses i faktorer, hvormed det kunne ses, at brøken kunne forkortes med 7. Problemet er måske, at eleverne ikke er så vandt til at tænke i faktorer.

4.E: 4.e var som forventet problematisk, da kun 67% svarede rigtig, på trods af, at kun én elev krydsede "ved ikke" af. Eleverne blev ikke bedt om at uddybe deres forklaringer, hvilket meget få derfor gjorde, men igennemn interviewene viste elev1.19 (86%) i dialog E8 (*Det kommer an på om tæller er større end nævner*) viden om, at tælleren skal være større end nævneren.

De elever der svarede "mindre" har nok givet et hurtigt svar ud fra hvad deres første tanke-eksempel gav, dette understreges af elev3.19 (57%) i dialog E32 (*Ja, men jeg tænker i eksempler. Så tror bare at mit eksempel det var det der var rigtig.*).

Hvorimod elever der svarede "større"nok har baseret det på deres generelle intuition om hele tal, fx har elev1.6 (86%) i dialog L46 + E46 (*Så igen fik du faktisk noger der var mindre. Har du nogen idé om hvad skal man gøre for at få noget der er større? - Nej det har jeg ikke!*) svært ved at finde et eksempel på brøker der gav et større resultat. Det virker til at elevernes eksempler på en typisk brøk ofte er mindre end 1, eller det som nogen vil kalde en ægte brøk.

Flere elever argumenterer, at brøker skal være større eller mindre end 0 for at få hhv større eller mindre resultat, og glemmer altså at forholde sig til betydningen af tællerens og nævnerens størrelse i forhold til hinanden.

5.B: De færreste elever har problemer med at lægge to decimaltal sammen, men når det kommer til subtraktion har 29% svaret forkert, hvoraf der er flest 1.g'ere. Alle der har svaret korrekt har dog brugt den primære teknik. Opgaven var altså mere problematisk for eleverne end jeg forventede.

Problemet er især at håndtere 'menterne' rigtig, det betyder altså, at det mere er subtraktionsalgoritmen end det er kommatallene der er problemer her. Der er mange forskellige bud på brugen af 'menter'. Nogen tager tager blot alle menterne fra 7-tallet, andre tror, at når man tager en 'mente' fra en 'mente' så bliver den nye 'mente' lavere, dvs. 'menterne' blev hhv. på $10, 9$ og 8. Nogle elever har også helt undladt at bruge menter og fx blot tillagt '0' værdien 10 eller helt undladt at tilføje efterstillede 0'er.

En elev har desuden udregnet fra venstre mod højre. Der er dog også flere elever der blot laver regnefejl.

5.C: I 5.c har hele 13% undladt at svare og 25% har svaret forkert. Eleverne har altså ikke kendt de korrekte teknikker. Det største problem for mange var, hvordan de skulle håndtere komma. Som elev3.12 udtrykker i dialog E18 (*Ja, det er for lang tid siden jag har haft om kommatal*), så er problemet her hvordan man ganger kommatal korrekt og altså ikke selve multiplikationsalgoritmen.

Blandt de korrekte svar, er det meget få der viser, hvordan de har placeret deres komma. Nogle få elever har omskrevet multiplikationen til en division og i stedet brugt divisionalgortimen. Dette havde jeg ikke forventet.

6.A+B: I denne spørgsmål har de færreste elever argumenteret for deres svar og flere elever har svaret "mange"i stedet for uendelig. Gennem interviewene viste det sig dog at de godt ved, at der er ikke er et endeligt antal imellem, men fx elev i dialog L47 – E48 (*Ja, men findes* *der en grænse for hvor mange? - Nej det gør der ikke! - Så hvad kan man sige? - Det ved jeg ikke*) havde svært ved at finde ordet 'uendelig'.

Flere elever argumenter under brøkerne med at man altid kan finde flere decimaler. Det viser sig heldigvis gennem interviewene at eleverne godt ved at brøker kan repræsenteres som decimaltal jvf. elev3.19 dialog E50 (*Ja, men det er fordi brøker også kan omskrives til decimaltal*), men de færreste tænker over hvordan man kunne finde flere brøker i praksis.

Flere elever kommenterer at der jo ikke en nogen heltal imellem, som om de har en forventing om at 'tal' blot er heltal.

7.A: Som forventet var forhold problematiske og hele 27%(57%) har slet ikke svaret på nogen af spørgsmålene om forhold, men til sammenligning med 7.b har flere dog svaret korrekt og de pågældende elever har også præsteret bedre i GT så dette spørgsmål har trods alt virkert nogenlunde efter hensigten.

Mange elever har undladt at svare, da de slet ikke ved hvad de skal gøre og flere af dem der svarer korrekt har skrevet "usikker". Nogle elever har blot opskrevet en brøk, mens andre har opskrevet det som man typisk skriver et forhold, fx $148 : 210$. Det er dog meget få der har omskrevet til $1 : \frac{148}{210}$ og de færreste elever har forklaring eller mellemregning med.

Typiske fejl er, at eleverne ganger tallene eller trækker dem fra hinanden.

5.3.3.3 *Meget problematiske spørgsmål (under 52% rigtige)*

5.D: Det mest problematiske spørgsmål var 5.d som kun 17% (92%) svarede korrekt og hele 38% (65%) har undlagt at svare. Jeg havde også forventet at det ville være problematisk. De elever der svarer korrekt er klart blandt de elever der præsterer godt i GT. De elever der forsøger at svare klarer sig generelt bedre i GT end de elever der slet ikke svarer. Der er dog en kæmpe spredning på dette spørgsmål, hvilket skyldes det meget lave antal elever og at en enkelt elev med 81% rigtig har svaret korrekt.

Det er interessant at den primære teknik kun blev brugt af 6%(89%) mens 10%(93%) i stedet omskrev til brøk. Jeg forventede ikke at eleverne havde overskud til at se det smarte i dette, selvom division mellem brøker er meget lettere at håndtere.

Det virker til at være selve divisionalgoritmen som eleverne havde problemer med. Det ses bl.a. hos elev1.5 (43%) i dialog L23 + E23 (*Så du kan slet ikke huske det? - Nej*). Som det bliver nævnt af elev i dialog E34 (*Det kan jeg simptelthen ikke huske hvordan man gør. Jeg plejer at bruge lommeregner.*) skyldes elevernes manglende viden på dette område nok, at de er vandt til at bruge lommeregner. Blandt 1.g'erne er der betydelig færre (kun 8%) der svarer korrekt, så det kunne tyde på, at denne viden allerede er gået tabt sidst i folkeskolen.

Mange blev desuden yderligere forvirrede over, hvordan de skulle håndtere decimalerne. Dette ses bl.a hos elev1.6 (71%) i dialog E62 (*Jeg ved ikke om det er fordi jeg ikke er så god til at udregne med kommatal*) som godt kunne udføre divisionen efter omskrivning til division mellem heltal.

Flere elever laver regnefejl, men har stadig den rigtige tankegang, hvor de prøver at se, hvor mange gange divisoren går op i dividenden og så finde 'resten' og derefter fortsætte. Det ses fx hos elev1.19 (86%) i dialog E12 (*Jeg tror jeg har tænkt sådan: hvor mange gange går det op*) .

7.B: Spørgsmålet afveg jvf. figur 10 fra de andre spørgsmål og er kategorierseret som en 'outlier'.

Årsagen er, at væsentligt flere af de elever der ellers har præsteret godt, har svaret forkert i spørgsmålet. Det ses også af, at eleverne blandt de 21% der har svaret forkert har et gennemsnitligt procenttal på 78%, hvilket er det højeste gennemsnitlige procenttal blandt de forkerte svar (pånær 1.a, hvor én højt præsterende elev har svarede forkert).

Derudover har flere af de elever der præsterer dårligt i GT (hhv. 24% og 38% hos 3.g'erne og 48%, 38% og 52% hos 1.g'erne) overraksende nok svaret korrekt på spørgsmålet.

Det viser noget om, at spørgsmålets design har givet udfordringer og at det måske er mere tilfældigt hvem der lige har gættet sig frem til et korrekt svar, da mange svarer 2π uden yderligere forklaring.

Spørgsmålet er om eleverne reelt ved hvad et forhold er og ved hvordan man finder et forhold mellem to variable. Opgave er altså drilsk da den ikke er stillet på en måde så det er tydeligt, hvilken viden eleverne har og dét er måske årsagen til at opgaven er 'outlier'.

Flere af de elever der svarer forkert opskriver forholdet som $T : 2\Pi L$, så det tyder på, at de ikke rigtig ved, hvordan de skal forholde sig til variablen. Elev1.19 (86%) udtrykker forvirring over spørgsmålet i dialog E31 (*Jeg tror ikke helt jeg forstår hvad det er jeg skal, måske*).

Nogle elever kan godt forklare deres idé om hvad et forhold er, når blot de bliver spurgt om det, fx elev3.12 (81%) i dialog E43 (*Et forhold det er, at man kan gange en konstant på den ene for at få den anden*). Elev3.19 (57%) kan også godt svare på hvad et forhold er, men havde oprindeligt slet ikke besvaret spørgsmålet pga. spørgsmåles formulering jvf. dialog E63 (*Nej, jeg tror simpelthen bare jeg tænkte, at jeg blev lidt skræmt af, når det er en formulering man ikke er vandt til*).

E6, E7: E6 og E7 var de eneste ekstra-opgaver som ikke skilte sig markant ud fra de andre spørgsmål. Disse mindede mere om resten af spørgsmålene i testen, men pga. deres placering til allersidst i testen, blev de kun besvaret af hhv.10%(90%) og 23%(87%). Det var altså netop de højtpræsterende elever der nåede at komme til disse sidste spørgsmål og samtidig formåede at svare korrekt. Derimod svarede hhv. 33%(76%) og 17%(74%) forkert på spørgsmålene, så der var også flere af de lavere præsterende elever som nåede til ekstraopgaverne, fordi de sprang over andre spørgsmål som de slet ikke vidste, hvordan de skulle løse.

De fleste elever løste som forventet spørgsmål E6 ved at omskrive til decimaltal først. Nogle elever omskrev i stedet til brøk med decimaler i tælleren som en mellemregning. Derudover laver eleverne nogle af de samme fejl som i de tidligere spørgsmål, hvor de giver decimaltal nævneren 1 eller flytter komma et forkert antal pladser.

I E7 er der flere elever der ikke reducerer udtrykket færdigt og flere af dem der prøver gør det desværre forkert ved fx at reducere tælleren forkert, eller at håndtere nævneren forkert ved at gange nævneren 5 op i tælleren 1 i stedet for at gange den ind på nævneren 3. Dette viser altså, at eleverne har svært ved at håndtere brøkregnereglerne lige så snart det bliver mere kompliceret, så selvom spørgsmål 4.a, 4.b og 4.c ikke var problematiske, så må man i den grad sige at regneoperationerne er blevet problematiske for eleverne i denne reduceringsopgave, hvor eleverne skal overskue flere ting på én gang.

6 LÆRERSTUDERENDES VIDEN OM RATIONALE TAL

6.1 A PRIORI-ANALYSE

Her præsenteres de opgaver, som blev givet til de lærerstuderende under interviewene. Opgaverne er konstrueret af Putra (**zetra:2016**). Der gives også her et kort a priori-analyse af opgaverne, som også er inspireret Putras a priori-analyse.

A priori-analysen bygger på min allerede konstruerede PRM. Jeg vil ikke rigtig komme ind på de didaktiske apsekter. Jeg bruger diskussionsdelen til at få indsigt i, hvad de lærerstuderende ved om brøker og indblik i, hvad de gjorde sig af tanker i den individuelle del. Jeg vil altså ikke se på, hvordan de lærerstuderende i diskussionensdelen vil fremme elevernes læring, men blot se på de dele af diskussionen som relaterer til deres tekniske viden om rationale tal.

Da mange af de lærerstuderendes spørgsmål også er anvendt i GT vil en stor del af a priori-analysen allerede være foretaget i afsnit 5.1.

6.1.1 *HLO 1*

I tabel 26 ses HLO 1, som handler om lighed mellem brøker. Opgaven der skal løses af 4.klasseselever er spørgsmål 1.a fra GT. Opgavetypen er $T_{1.2}$, som kan løses med teknikken $\tau_{1.2}$.

Efterfølgende har en 4.klasseselev fundet brøken $\frac{8}{9}$, og de studerende skal nu i den individuelle del (a) tage stilling til, om disse brøker er lig hinanden. De skal altså løse opgavetypen $T_{1.3}$, hvor teknikkerne $\tau_{1.3}, \tau_{1.3'}$ og $\tau_{1.3''}$ er brugbare.

En anden teknik de kan bruge, er $\tau_{3.0}$ om at præsentere brøkerne grafisk for at kunne afgøre ordenen mellem brøkerne og indse, at de ikke er ækvivalente.

Som det fremgår af teksten har 4.klasseseleven brugt teknik $\tau_{1.2*}$ og de studerende skal derfor også vide at den angivne teknik er forkert.

HLO1: ENS BRØKER
Du beder 4.klasseselever om at finde brøker som er lig $\frac{3}{4}$. *En elev påstår at* $\frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ *, for brøkerne må være ens når man lægger 5 til foroven og forneden.* a. Hvad tænker du om dette svar? Uddyb gerne!? (*Løses individuelt på 4 minutter*) b. Hvad vil du som lærer gøre for at hjælpe eleverne i denne situation, så de bedre forstår konceptet om lighed mellem brøker? *(Diskuteres i par på 5 minutter, brug pladsen nedenfor til evt. skriverier som I bruger til at støtte diskussionen)*

Tabel 26: HLO1 Ens brøker, (**zetra:2016**)

HLO2: SAMMENLIGNE DECIMALTAL
5.klasseselever bliver bedt om at sammenligne størrelsen på $0,5$ eller $0,45$. Nogle elever svarer at $0,45$ er større ned $0,5$, mens andre svarer at $0,5$ er større end 0,45. a. Analyser elevernes svar. Forklar dine idéer til hvordan, man kan håndtere situationen i denne klasse? (*Løses individuelt på 4 minutter*) b. Hvordan bruger du denne situation til at fremme elevernes læring? *(Diskuteres i par på 5 minutter, brug pladsen nedenfor til evt. skriverier som I bruger til at støtte diskussionen)*

Tabel 27: HLO2 Sammenligne decimaltal, (**zetra:2016**)

6.1.2 *HLO* 2

I tabel 27 ses HLO 2, som handler om orden mellem decimaltal. Opgaven der skal løses af 5.klasseselever er næsten spørgsmål 3.a fra GT. Opgavetypen er $T_{3.2}$, som kan løses med teknikkerne $\tau_{3.2}$, $\tau_{3.2'}$, $\tau_{3.0}$, $\tau_{3.0'}$ og $\tau''_{3.0}$.

De lærerstuderende skal i den individuelle del (a) analysere elevernes svar. Herigennem er det interessant at se, hvilke forkerte teknikker de tror at eleverne kan have.

6.1.3 *HLO* 3

I tabel 28 ses HLO 3, som handler om tætheden af rationale tal. Opgaven der skal løses af 5.klasseselever er spørgsmål 6.a og 6.b fra GT. Opgavetypen er $T_{6.0}$, $T_{6.1}$ og $T_{6.2}$. som kan løses med teknikkerne τ_6, $\tau_{6.0}$ og $\tau_{6.0'}$ eller $\tau_{6.1}$, $\tau_{6.1'}$, $\tau_{6.1''}$ og $\tau_{6.1''}$ eller $\tau_{6.2}$, $\tau_{6.2'}$.
Det fremgår, at 5.klasseseleverne anvender de forkerte teknikker $\tau_{6.1*}$ og $\tau_{6.2*}$.

I den individuelle del skal de lærerstuderende fortolke elevernes svar. Det er her interessant at se, om de kan identificere elevernes forkerte teknikker og om de selv kan anvende korrekte tekniker til at argumentere for det korrekte svar. Kan de fx finde flere tal imellem end blot de oplagte som 5.klasseseleverne finder, eller kan de med det samme konkludere, at der er uendeligt mange tal.

6.1.4 *HLO* 4

I tabel 29 ses HLO 4, som handler om addition og subtraktion af brøker. Opgaven der skal løses af 6.klasseselever er spørgsmål 4.a og 4.b fra GT. Opgavetypen er $T_{4.1}$, som kan løses med teknikkerne $\tau_{4.1}$, $\tau_{4.1'}$, $\tau_{4.1''}$, $\tau_{4.1'''}$, $\tau_{4.1''''}$ $\tau_{4.0}$ og $\tau_{4.0'}$.

I denne opgave skal de lærerstuderende først forsøge selv at udføre udregningerne (a). Derefter skal de fortolke elevernes metode (b). Her er det interessant, om de genkender den forkerte teknik $\tau_{4.1**}$.

HLO3: HVOR MANGE TAL
Du beder først 5.klasseselever om at diskutere hvor mange tal der er mellem $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{5}$, og hvor mange tal der er mellem $0,4$ og $0,8$. *Eleverne siger så, at der kun er ét tal mellem $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{5}$, og det er $\frac{3}{5}$; de siger også at der er tre tal mellem $0,4$ og $0,8$.* a. Hvordan fortolker du disse påstande? (*Løses individuelt på 4 minutter*) b. Forklar dine idéer til, hvordan man kan undervise disse elever? *(Diskuteres i par på 5 minutter, brug pladsen nedenfor til evt. skriverier som I bruger til at støtte diskussionen)*

Tabel 28: HLO3 Hvor mange tal, (**zetra:2016**)

HLO4: REGNE MED BRØKER
Du beder 6.klasseselever om at udregne $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \cdots$ og $\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \cdots$ a. Hvordan løser du disse opgaver? (*Løses individuelt på 3 minutter*) *Du finder ud af at mange af eleverne lægger brøker til og trækker brøker fra på følgende måde* $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ og $\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ b. Hvordan fortolker du elevernes metode? (*Løses individuelt på 3 minutter*) c. Hvilke strategier vil du foreslå til undervisning af disse elever? *(Diskuteres i par på 5 minutter, brug pladsen nedenfor til evt. skriverier som I bruger til at støtte diskussionen)*

Tabel 29: HLO4 Regne med brøker (**zetra:2016**)

HLO5: REGNE MED DECIMALER
Som lærer giver du følgende lektier for til dine elever: a) $0,25 \cdot 8 = \cdots$, b) $8 : 0,25 = \cdots$ *Til næste samling i klassen bemærker en elev, at når han taster* $0,25 \cdot 8$ *ind på sin lommeregner, er svaret mindre end* 8*, og når han taster* $8 \div 0.25$*, er svaret større end* 8*.* *Han er forvirret over dette svar og tror at lommeregneren er i stykker.* Hvad kan du gøre for at hjælpe elever med at forstå denne regel? *(Diskuteres i par på 8 minutter, brug pladsen nedenfor til evt. skriverier som I bruger til at støtte diskussionen)*

Tabel 30: HLO5 Regne med decimaler, (**zetra:2016**)

6.1.5 *HLO 5*

I tabel 30 ses HLO 5, som handler om multiplikation og division med decimaltal. Opgaven der skal løses af nogle elever minder om spørgsmål 5.c og 5.d fra GT. Opgavetypen er $T_{5.2}$, som kan løses med teknikkerne $\tau_{5.2}$, $\tau_{5.2'}$, $\tau_{5.2''}$, $\tau_{5.2'''}$.

En anden mulig løsning af opgaven er ved at omskrive til brøker med teknik $\tau_{2.1'}$ og efterfølgende udregne operationerne med hhv. $\tau_{5.1}$ og $\tau_{5.1'}$:

$$0,25 \cdot 8 = \frac{4 \cdot 0,25}{4} \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{8}{4} = 2 \qquad 8 : 0,25 = 8 : \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{4}{1} = 32$$

Denne opgave har ingen individuel del, men kun en diskussionsdel. Det interessante her er at se, om de lærerstuderende kan anvende korrekte teknikker til selv at løse opgaverne, og hvordan de forholder sig til, at multiplikation gør mindre og division gør større. Denne del minder om spørgsmål 4.e fra GT og kan løses med teknikkerne $\tau_{3.0'}$ og $\tau_{3.0'''}$.

6.2 A POSTERIORI-ANALYSE

I Appendiks A ses en transkribering af interviews med de lærerstuderende. I a posteriori-analysen refereres til dialoger fra de forskellige grupper, hvor gruppe 1 svarer til interview 1 osv.

I tabel 31 har jeg prøvet at give et visuelt overblik over gruppernes svar. Der tages bl.a. stilling til om grupperne er i stand til at identificere elevernes forkerte teknikker og efterfølgende, om de studerende selv kan anvende korrekte teknikker.

Da mange af grupperne sætter visuelle billeder på deres teknikker, vælger jeg at vise, hvilke visuelle modeller, der foreslås. De fleste foreslår pizza-modellen, hvor der skraveres i cirkler. Én gruppe er særligt glad for mælke-modellen eller kop-modellen, hvor brøkinddelingen er små kvarte mælkekartoner eller plastikkrus. Generelt ses i tabel 31 at den samme gruppe ofte vælger de samme visuelle modeller.

Nogle grupper nævner en masse modeller i starten, men når det kommer til stykket, så uddyber de ikke, hvordan de vil bruge dem i den konkrete sammenhæng. Derfor er disse modeller ikke medtaget i analysen, da man reelt ikke kan sige at gruppen har anvendt modellen, men blot har lavet en brainstorming.

Det kan mange steder være svært at gennemskue, hvilke teknikker grupperne bruger. Fx

Opg.	Gruppe	Genkend $\tau_{1.2*}$	Anvend $\tau_{1.2}$	Ækvivalens $\tau_{3.0}$	Visuel Model
HLO1	Grp. 1:	(A2)	(A9)	(A12)	pizza (A12)
$T_{1.2}$	Grp. 2:	(B1)	(B1)	(B1)	pizza(B1), kasse(B2)
	Grp. 3:	(B2)	(A7)	(A1)	pizza (B4)
	Grp. 4:	(B6)	(A3)	(B8)	pizza (A3)
	Grp. 5:	(A13)	(B1)	(B3)	tallinje (B2),
					klippe-klistre (A12)

Opg.	Gruppe	Genkend $\tau_{3.2**}$	Anvend $\tau_{3.2'}$	Visuel Model $\tau_{3.0}$
HLO2	Grp. 1:	A(1)	A(0)	vægt (A9)
$T_{3.2}$	Grp. 2:	(B9)	(A3) $+\tau_{3.2'!}$ (B7)	kasse (B9)
	Grp. 3:	(B1)	(A11) $+\tau_{3.2}$ (B4)	
			$+\tau_{3.0''}$ (B14)	
	Grp. 4:	(B3)	kun $\tau_{3.2'!}$ (B3)	meterstok (A3), tallinje (B23)
	Grp. 5:	(B9)	(A13) $+\tau_{3.2\sharp}$ (B11)	tallinje (A7), mælkekarton (A22)

Opg.	Gruppe	Genkend $\tau_{6.1*}$	Anvend $\tau_6/\tau_{6.2}$	Sammenhæng $\tau_{2.2'}$	Visuel Model
HLO3	Grp. 1:	(A10)		(A7)+$\tau_{1.1}$(A20)	pizza (A6)
$T_{6.0}$		$+\tau_{6.2**}$ (A11)	$+\tau_{2.3'}$ (A8)		
$T_{6.1}$	Grp. 2:	(B4)+$\tau_{6.2*}$(A3)	(B4)/(A2)	(B4) + $\tau_{1.1}$ (B4)	
$T_{6.2}$	Grp. 3:	(A12)	(B21)/(B1)	(B9) + $\tau_{1.2}$(B16)	talrække
	Grp. 4:	(A4)	(B18)/(A0)		pizza(A3),
					meterstok (A9)
	Grp. 5:	(B3)	(A6)	(B2)+ $\tau_{1.2}$(A7)	pizza (A8),
					kop (B14)
					chokoloade (A18)

Opg.	Gruppe	Genkend $\tau_{4.1**}$	Anvend $\tau_{4.1}$	Visuel Model
HLO4	Grp. 1:	(A0)	(A3) + $\tau_{2.2''}$(A16)	pizza (B5)
$T_{4.1}$	Grp. 2:	(B2)	(A2)	pizza (B6), kasse (B8)
	Grp. 3:	(A1)	(B5)	pizza (B2)
	Grp. 4:	(C1)		chokolade (B8), renter (B10)
	Grp. 5:	(B2)	(B14)	pizza (A6), chokolade (B13)

Tabel 31: Oversigt over de lærerstuderenes svar til interviewene. Parenteserne referer til dialogerne i interviewene. Der tages stilling til, om de genkender elevernes forkerte teknik, om de selv er i stand til at anvende en korrekt teknik og om de har forslag til andre teknikker man kan vise eleverne. Til sidst kommenteres på, hvilken visuel model grupperne har brugt. En rød teknik betyder, at gruppen ikke har kunnet løse opgaven korrekt eller selv har anvendt den forkerte teknik. Overskrifterne i tabellen uddybes kort under opsummeringen af hvert spørgsmål her nedenfor.
NB! HLO5 kommer på næste side i tabel 32.

Opg.	Gruppe	Anvend $\tau_{3.0'''}$	Udregn	Idé	Visuel Model
HLO5	Grp. 1:	(A2)	(A2) +	(A6)	centicubes (A7),lagkage (B12)
$T_{5.2}$	Grp. 2:	(B14)	(B2)	(B2)	pizza (B1)
$0,25 \cdot 8$	Grp. 3:	(B8)		(A1)	pizza (A0), kopper (B16)
	Grp. 4:	(C6)	(A16)	(B8) + (B2)	penge (A7)
	Grp. 5:				penge (A2), mælk (B5)

Opg.	Gruppe	Anvend $\tau_{2.1'}$	Kan udregne	Idé i division	Visuel Model
HLO5	Grp. 1:	(A32)	(B22) $\tau_{5.0}$	(B24)	
$T_{5.2}$	Grp. 2:	(B1)	(B12)	(A0)	pizza (A3), lineal (B5)
$8 : 0,25$	Grp. 3:	kun $\tau_{2.3'}$ (A2)	(B24)	(B33)	penge (B29)
	Grp. 4:		(A21)	$\tau_{5.2'''}$ (A20)	sildeben (B5)
	Grp. 5:				mælk (A5)

Tabel 32: Fortsættelsen af tabel 31. Her ses HLO5. Der er opdelt i multiplikation og division, da der er forskel på, hvordan grupperne har håndteret dem.

når de siger at $\frac{1}{4}$ er det samme som $0,25$ uden uddybning. Årsagen er nok, som hos gymnasieeleverne, at denne viden er en viden, som de ikke er bevidste om, hvor de har fra. Man kunne have valgt fra starten af at indføre en teknik i PRM, som handlede om at memorere sådanne sammenhænge. Dette er dog for sent at ændre på nu.

Det kan også være svært at gennemskue, om gruppemedlemmerne individuelt kan anvende de korrekte teknikker og har styr på den bagvedliggende teknologi. Nogle steder kan det virke til, at det kun er igennem dialogen med andre gruppemedlemmer, at en delvis korrekt viden formuleres. Fx ser man i tabel 31 at det i gruppe 1 stort set kun er person A som identificerer og anvender de forskellige teknikker. I gruppe 4 som egentlig er en tre-personers-gruppe, kommer der ikke meget mere end anderkendende ord fra person C, som altså mest bekræfter de andres tanker, uden at byde væsentligt ind med nye teknikker og perspektiver. På denne måde er det svært at få et individuelt indtryk af, hvad de lærerstuderende kan.

6.2.1 *HLO1: Ens brøker*

Grupperne har, ligesom gymnasieeleverne, ingen problemer med dette spørgsmål. De kan genkende det problematiske i elevernes teknik $\tau_{1.2*}$, selv anvende den korrekte teknik $\tau_{1.2}$ og bruger en grafisk repræsentation (visuel model) til at afgøre ækvivalens $\tau_{3.0}$. Det kan skyldes de simple brøker, at grupperne kun bruger visuelle teknikker til at afgøre ækvivalens.

Gruppe 5 er dog inde på, at det godt kan være svært at inddele fx en pizza i 9 dele, men deres løsning på dette er ikke at finde en anden metode til at undersøge ækvivalens. I stedet foreslår de bare at man "klippe-klistrer"så man kan inddele figurer i forskellige inddelinger og så klippe ud og se, om de er forskellige.

Gruppe 2 demonstrer fin viden om, hvordan man forlænger brøker visuelt:
"B2: Omvendt, hvis jeg ganger, altså den rigtige regnemetode, så får jeg pludselige at $\frac{3}{4}$ i en kasse det er det samme som $\frac{15}{20}$ i en kasse, hvis man deler dem op indeni".

Grp. 1 (A2) og grp. 2 (A2) kobler den forkerte teknik $\tau_{1.2*}$ sammen med, at eleven blander reglerne sammen og i stedet bruger idéen fra ligningsløsning til at sige, at man skal gøre det samme på begge sider af brøkstregen, uanset om det er at gange tal på eller at lægge tal til.

6.2.2 *HLO2: Sammenligning af decimaltal*

Grupperne har, ligesom gymnasieeleverne, heller ikke problemer med dette spørgsmål. De kommenterer alle på det problematiske i, at folkeskoleelveverne ikke har nok viden om positionssystemt til at bruge lexiografisk orden. De genkender alle elevernes fokerte teknik $\tau_{3.2**}$ og anvender selv den korrekte teknik $\tau_{3.2'}$. De foreslår også visuelle modeller til, hvordan, man kan illustrere det ($\tau_{3.0}$).

Gruppe 1(A13) og 2 (A3) diskuterer, hvor man ellers skal bruge positionssystemet , fx når man ganger to kommatal sammen (grp. 1 B19: $1,05 \cdot 0,95$). Selvom grp. 1 er bevidste om at kommaets placering er vigtig (A19) , laver de alligevel selv fejl. De har altså problemer med det der svarer til opg. 5.c.

Gruppe 3 kommer ind på teknik $\tau_{3.2}$ om, at man også kan sammenligne tallene efter man har forlænget dem ved at gange med fx 10 eller 100. De konkluderer desværre, at det forvirrer eleverne at begynde at gange, så det er bedre bare at sige at de "rykker"kommaet. En skam at de ikke vil lære eleverne selve matematikken men blot en "huskeregel".

I gruppe 4 ser person B ikke folkeskoleelevernes forkerte teknik som $\tau_{3.2*}$:
"A13: De ved at det er $0,5$, så det er mellem 0 og 1."
"B14: Men hvis de ved det, så vil de også have svaret at den dér $(0,5)$ var større."
Person B tænker måske i stedet på den forkerte teknik $\tau_{3.2**}$ hvor der helt ses bort fra komma.

6.2.3 *HLO3: Hvor mange tal*

Denne opgave gav lidt flere problemer, da ikke alle grupper genkender den forkerte teknik $\tau_{6.1*}$ og indser, at der er uendelige mange tal (τ_6). Flere grupper opremser en længere række decimaltal imellem ($\tau_{6.2}$) og mange ser sammenhængen mellem brøkerne og decimaltallene. Men ligesom gymnasieeleverne, er det ikke alle der bruger ordet 'uendelig' men blot 'mange', fx gruppe 5:
"A9: Med pizzaer, med delinger, for ligesom at få en idé om, at der er mange tal imellem det her."

Gruppe 1 kommer ikke frem til, at der er uendeligt mange tal imellem, men laver selv samme fejl som 5.klasses-eleverne, når de fx siger:
"B3: Men de tænker jo ikke over, at for at 2 kan blive til 4 så skal de lægge to tal til. Det er jo dér den ligger lidt. Det er rigtig nok, hvad de siger, at det er det som ligger imellem og det er dét der mangler, hvis man skal skrive dem alle sammen op i rækkkefølge."

Andre grupper har lignende forkerte udsagn undervejs, men formår alligel i fællesskab at komme til den korrekte konklusion, fx gruppe 4:
"B15: Det er jo ikke fordi det er forkert det de har svaret jo."

6.2.4 *HLO4: Regne med brøker*

Ligesom mange gymnasieelever, havde de lærerstuderende ikke problemer med at finde fællesnævner ($\tau_{4.1}$), og de genkender fint folkeskoleelevernes problem $\tau_{4.1**}$: at de lægger tæller og nævner sammen som to uafhængige objekter.

Gruppe 4 ser folkeskoleelevernes problem som manglen på helt grundlæggende viden om rationale tal:
"C2: Det der er forkert er sådan set at, jeg tror ikke de har forståelsen af hvad de der brøker er, så jeg tror de har brug for en forståelse af hvad $\frac{1}{7}$ er og hvor stor $\frac{1}{3}$ er."
"B2: Jeg tror også de skal have forståelsen for, hvad hvert tal repræsenterer og hvad tælleren repræsenterer og hvad en brøk er. Det er jo dele af noget."

Gruppe 3 pointerer at problemet er, at folkeskoleeleverne ikke ser brøker som repræsentation for ét tal:
"B2: Altså, jeg tænker de ser det som to tal og ikke ét tal. En brøk er jo et tegn for ét tal. Så måske jeg vil starte dér og så bruge pizzaer eller et eller andet..."

Så det overordnede indtryk viser, at de lærerstuderende er bevidste om, at brøker er repræsentant for et reelt tal.

6.2.5 *HLO5: Regne med decimaler*

Ligesom gymnasieeleverne havde mange af grupperne problemer i en alle anden grad i denne opgave.

De kunne næsten alle argumentere for, at multiplikation gør mindre jvf. teknik $\tau_{3.0'''}$ og udregne multiplikationen. Nogle kom også ind på deres idé om multiplikation som "8 gange har du $0,25$", eller med andre ord, at det er gentagen addition af $0,25$.

Gruppe 4 starter med at bytte rundt på division og multiplikation (B2), uden at opdage fejlen. De er utydelige omkring, hvilken af de to regningsarter de egentlig diskuterer. De formulerer sig dog korrekt senere i dialogen. Gruppe 3 har samme problem, da de foreslår den visuelle pizzamodel, men giver et eksempel på division, på trods af, at de diskuterer multiplikation. De opdager heller ikke fejlen, men kommer senere med korrekte eksempler.

Grupperne kunne alle omskrive $0,25$ til $\frac{1}{4}$ - sandsynligvis med teknik $\tau_{2.1'}$, men ikke alle var gode til at udnytte denne sammenhæng. Nogle grupper omskrev også til 25% procent - sandsynligvis med teknik $\tau_{2.3'}$.

Nogle ser idéen i division som det modsatte af multiplikation. Division med fx 4 er det samme som at gange med $\frac{1}{4}$. Andre ser idéen i division som "hvor mange gange kan du lægge divisoren sammen med sig selv før dividenden opnås" ($0,25 + 0,25 \cdots = 8$ *giver* 32 *gange man lægger dem sammen*). Fx siger gruppe 2:
"Og sige, den der den er 8 cm lang, måske, hvis vi måler $0,25$ - hvor mange gang kan vi måle indtil vi når 8? Det er jo også den måde division er på.

Gruppe 1 kunne kun udregne divisionen med lommeregner, og selv bagefter kunne de ikke forklare, hvorfor resultatet blev 32. De var inde på nogle af de rigtige ting med, at divison med $0,25 = \frac{1}{4}$ er det samme som at gange med 4, men når aldrig helt selv at indse, hvordan man egentlig udregner det. De virker forvirrede over, hvorfor division giver et større resutlat.

6.3 LÆRERSTUDERENDE VS GYMNASIEELEVER

Overordnet set virker der ikke til at være væsentlig forskel mellem gymnasieeleverne og de lærerstuderende. Man kan sammenligne de lærerstuderendes tekniske præstationer med grafen fra figur 10. Heraf ses, at de opgaver som gymnasieeleverne generelt havde let ved, heller ikke var problematiske for de lærerstuderende.

Fx har gymnasieeleverne en svarprocent på over 90% i spørgsmål 1a og 3.a fra GT, hvilket svarer til HLO1 og HLO2, hvor de lærerstuderende ingen problemer har.

6a og 6b svarer til HLO3, hvor kun fire grupper ud af fem ($\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$) kan svare på spørgsmålet og flere grupper formulerer sig en anelse forkert undervejs, men får rettet op på det. Derfor svarer det meget godt til, at gymnasieeleverne i disse opgaver har en svarprocent på lidt under 80%.

4a og 4b svarer til HLO4 og her ligger gymnasieelevernes svarprocent kun lidt under 90%, så igen passer det meget godt med, at de lærerstuderende ikke havde problemer med teknikkerne.

5c, 5d og 4e svarer til HLO5. Her havde gymnasieeleverne en svarprocent på under 70%.

De lærerstuderende var bedre end gymnasieeleverne til at se, at multiplikation kan gøre mindre (4e). Årsagen kan måske skyldes, at de havde muligheden for at diskutere, i modsætning til gymnasieeleverne, som blot skulle sætte et kryds. Dette kunne måske resultere i, at nogle gymnasieelevere fik sat krydset lidt for hurtigt uden at gennemtænke svaret. Det blev også afspejlet i interviewet med gymnasieeleverne, hvor de fleste godt kunne indse det korrekte svar, da de fik mulighed for at tænke lidt over det og forklare sig.

De lærerstuderende var også generelt bedre end gymnasieeleverne til at udføre multiplikationen. Men, man skal huske på, at de lærerstuderende arbejdede med et mere simpelt gangestykke. Og et af problemerne for både gymnasieelever og lærerstuderende var netop placering af komma.

Det som de lærerstuderende havde sværest ved, var divisionen, og det var netop også dette spørgsmål, som gymnasieeleverne havde allersværest ved. Igen var de lærerstuderendes division lettere end gymnasieeleverne. Der var derfor ingen af de seminareistuderende der anvendte en klassisk divisionsalgoritme. Flere brugte i stedet idéen om at tælle, hvor mange gange man kunne lægge divisoren sammen og dette blev også anvendt af en gymnasieelev. Flere gymnasieelever brugte ligesom de lærerstuderende også teknikken om at omskrive til brøk.

Da antallet af grupper var meget lavt hos de lærerstuderende og flere af deres spørgsmål desuden var lavet lettere end gymnasieeleverne, kan man sige, at de lærerstuderendes tekniske viden ikke afveg markant fra gymnasieeleverne.

Da en stor del af de lærerstuderende faktisk havde haft matematik på A-niveau, kan man godt sammenligne de lærerstuderende med gymnasieeleverne. De lærerstuderendes skriftlige karaktergennemsnit i matematik i gymnasiet var tilsammen på lidt over 8, så mange af de lærerstuderende præsterede godt i matematik i gymnasiet. Flere af dem havde dog været væk fra skolen i nogle år, hvilket kan gøre, at de vil præsterere dårligere i matematik, end de gjorde i gymnasiet.

Til gengæld havde de lærerstuderende haft et halvt års studie, hvor der bl.a. har været brugt meget tid på matematik. Desuden havde emnet brøker været behandlet, selvom de muligvis vil møde mere om dette emne senere.

7 KONKLUSION

De rationale tal er et stort forskningsområde inden for matematikkens didaktik, og én af udfordringerne er ifølge Pinilla (**pinilla:2007**) de mange repræsentationsformer, som er forskellige og samtidig repræsenterer det samme rationale tal.

Matematisk set er et rationalt tal repræsentant for en ækvivalensklasse i brøklegemet $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$. Men i gymnasiet og folkeskolen er det repræsentationsformer som brøker og decimaltal, der arbejdes med. Udeladelsen af den bagvedliggende teori i gymnasiet kan være med til, at de rationale tal mister deres rationale, hvis det kun bliver til praktisk viden.

Det er ifølge Poulsen (**caroline:2015**) en udfordring for undervisningen i algebra i gymnasiet, at gymnasieleverne ikke har styr på den grundlæggende viden om rationale tal fra folkeskolen. Wu (**wu:2014**) mener, at en mere teoretisk håndtering af rationale tal i folkeskolen kan forberede eleverne til den mere teoretiske og abstrakte matematik, som de møder i gymnasiet. Ifølge Prediger er det et problem, at folkeskoleelevernes viden om rationale tal er baseret på simple brøker, hvilket gør det svært for dem at overføre deres viden til mere generelle brøker. Det tyder altså på, at den viden om rationale tal, som eleverne får med sig fra folkeskolen, ikke forbereder dem til gymnasiet.

Som analyseredskab blev udviklet en referencemodel for at få et overblik over, hvilken teknisk viden det kan forventes, at gymnasielever har om ratioanle tal. Den konstruerede prakseologiske referencemodel (PRM) blev opdelt i syv lokale MO, der dækker over ækvivalens, omskrivning mellem repræsentationsformer, orden, de fire regneoperationer, tæthed og forhold. Modellen er blot et første udkast, som man kan blive ved med at forbedre, da en referencemodel er dynamisk. Den bør fx revideres på baggrund af de empiriske undersøgelser, hvor nye teknikker blev lokaliseret. Dette er ikke gjort her i specialet, men andre opfordres til at arbejde videre med, hvilken viden det kan forventes, at gymnasieelever har om rationale tal.

Baseret på den konstruerede PRM blev der designet en skriftlig test (GT) til at undersøge, hvilken teknisk viden gymnasieelever faktisk har om rationale tal. På trods af, at testen var designet ud fra den viden, som det forventes i gymnasiet, at eleverne har, svarede eleverne gennemsitligt kun rigtig på $74\% \pm 3\%$. De mangler altså en fjerdedel af den tekniske viden om rationale tal som gymnasiet bygger videre på. Heraf mangler nogle elever langt mere viden, da de elever der præsterede dårligst kun svarede rigtig på omkring $20\% - 40\%$. Disse elever præsterer også dårligt i matematik generelt så manglen på viden om rationale tal kan give elever store udfordinger, når de skal arbejde med avanceret matematik i gymnasiet.

Tilsvarende viste det sig, at de elever der præsterer godt i den daglige undervisning i matematik også præsterer godt i GT. Overordnet set tyder det på, at der en lineær sammenhæng mellem præstation i GT og præstation i den daglige undervisning, dog afveg nogle få elever som præsterede bedre i GT end forventet, men der var ikke tilsvarende nogen der præsterede markant dårligere i GT end forventet i forholde til deres normale præstation i matematik.

Det viste sig i a posteriori-analysen at spørgsmålene i testen fungerede efter hensigten, pånær spørgsmål 7.b, som måske var dårligt formuleret. Det betyder, at der ser ud til at være en lineær sammenhæng (korrelationskoefficient $R^2 = 0,8$) mellem, hvor mange elever der svarede rigtig på et spørgsmål og hvor godt de pågældende elever præsterede i GT. Det var altså ikke blot tilfældigt, hvem der svarede rigtig, men det var netop dem, der havde stor viden om rationale tal, som svarede rigtigt på de svære spørgsmål.

Det var især teknikker omkring multiplikation og division med rationale tal, der gav gymnasieeleverne store problemer. Kun 17% af eleverne kunne udføre division med et decimaltal og 63% kunne udføre multiplikation med decimaltal. Det gik bedre med mulitplikation (88%) og division (71%) mellem brøker. Ifølge interviews med udvalgte gymnasielever kan det skyldes, at eleverne ikke træner regning med decimaltal i gynmnasiet, fordi de blot bruger lommeregneren. Dermed får de ikke holdt deres tekniske viden om decimaltal ved lige.

Gymnasieeleverne havde også store problemer med at håndtere minus i en brøk, omskrive decimaltal til brøk og opskrive et forhold. Derimod klarede de fint reducering af brøker, omskrivning til procent og sammenligning af decimaltal. Subtraktion og addition af rationale tal gav heller ikke de største udfordringer, bortset fra at subtraktion af decimaltal gav problemer med korrekt håndtering af 'menter'. Det tyder igen på, at eleverne er vant til at bruge lommeregner, når de arbejder med decimaltal.

I den empiriske undersøgelse af to gymnasieklasser blev der testet på ialt 48 1.g'ere og 3.g'ere med matematik på A-niveau. Det er interessant, at 1.g'erne gennemsnitligt svarede rigtig på $75\% \pm 3\%$ mens 3.g'erne klarede sig en andelse dårligere med en gennemsnitlig svarprocent på $73\% \pm 4$. Der er dog ingen markant forskel på de to klasser, da de ligger inden for hinandens afvigelser. Overordnet tyder det på, at viden om rationale ikke ændrer sig i løbet af gymnasiet. Det vil altså sige, at arbejdet med mere avanceret og abstrakt matematik ikke forbedrer elevernes viden om rationale tal. Den empiriske undersøgele er dog lavet i meget lille skala, så det kunne være interessant at få denne teori bekræftet i større skala.

Hvis det er rigtig at elevernes viden om rationale tal ikke ændres væsentligt i gymnasiet, så er det også et problem for de videregående uddannelser. Uddannelserne forventer ligesom gymnasiet, at de studerende har styr på den grundlæggende viden og så bygger de den nye viden ovenpå. Det ses fx i den empiriske undersølgese af lærerstuderende på 1.år. På trods af, at de allerede har arbejdet lidt med rationale tal på uddannelsen, så ser deres tekniske viden om rationale tal ikke ud til at afvige markant fra gymnasieelevernes viden. I hvert fald ikke på de få områder, hvor der blev lavet en sammenliging: ækvivalens af brøker, orden af decimaltal, tæthed af decimaltal og brøker, adddition og subtraktion af brøker, multiplikation og division af decimaltal. Det er altså problematisk, hvis læreruddannelsen ikke giver de studerende den nødvendige viden om rationale tal, men blot underviser dem i didaktiske tilgange. Når de lærerstuderende sidenhen skal undervise folkeskoleelever i rationale tal, så er de ikke udrustet godt nok til at forberede folkeskoleeleverne til gymnasiet. Det skal dog bemærkes at undersøgelsen af de lærerstuderendes tekniske viden er baseret på kun 11 personer og sammenligningsgrundlaget med gymnasieeleverne er begrænset, da den empiriske undersøgelse af de lærerstuderende bestod af gruppeinterviews.

Specialet har vist, at mange gymnasieelever har en mangelfuld teknisk viden om rationale tal, som de ikke fik med sig fra folkeskolen. Det kunne tyde på, at en af årsagerne er elevernes brug af lommeregnere og computere. Ifølge Andersen (**berlingske:2016**) *"spiller computeren en stor og ufortjent rolle i elevernes forhold til matematik"*. Han kritiserer bl.a. eksamensformen i matematik i gymnasiet, der opfordrer til overdrevent brug af computerprogrammer, og kommenterer: *"Problemet er bare, at eleverne intet (INTET!) har lært, og ikke har en jordisk chance for at klare et studium, der kræver matematik"*.

Konklusionen må være, at gymnasielevers viden om rationale tal ser ud til at være mangelfuld. Det tyder på, at der skal drastiske ændringer til i enten folkeskolen eller gymnasiet. Der opfordre derfor til, at der forskes videre inden for dette område.

Del II

APPENDIX

A

APPENDIX: LÆRERSTUDERENDE

A.1 LÆRERSTUDERENDE - INTERVIEW 1

Transkription af pilotstudiet
Dato: 6.januar 2016

PERSON A: til venstre
Har opnået karakteren 7 på matematik B-niveau.

PERSON B: til højre
Har opnået karakteren 7 skriftligt og 12 mundtligt på matematik B-niveau.

Gruppe 1 og Spørgsmål 1: Ens brøker

B1: Jeg tænker vi kunne lave et lille forsøg med dem, hvor man prøver at sige:
"Okay, lad os prøve at gøre som du gør og prøve at plusse i både tæller og nævner og så lad os se hvad det bliver."
A1: Ja
B2: Og så lad os se hvad der sker når man ganger, så kan de jo selv se med deres egne øjne hvad der fungerer og ikke fungerer.
A2: Ja, det tænker jeg også, og så tror jeg det er meget vigtigt at fortælle, at det her med bare at lægge til, det lyder som om at det er eleven som tænker i ligninger:
"Altså nu er det bare at i stedet for at det er på begge sider af lighedstegnet så er det så bare hvis du gør de samme ting på begge sider af brøkstregen, så er det fint nok", men det kan man jo ikke!
B3: Nej.
A3: Det er jo ligningsregler, det er jo ikke brøkregler.
B4: ja, præcis, jeg har også skrevet at de blander reglerne sammen
A4: Ja, det..
B5: Det er jo rigtig tænkt nok hvis man tænker i ligninger
A5: Ja, ja, og jeg synes også at i 4.klasse, man må anderkende´at der er... det er et meget hård at man har ræsonneret sig frem til at hvis man må det på det ene så må man nok også ved det andet.
B6: Ja
A6: Altså man må give dem cadeau for forsøget, altså tanken, men det er så måske ikke lige helt rigtigt matematisk, men altså, ellers må man vel lære eleverne brøkreglerne tænker jeg.
B7: Ja, det tænker jeg også!
A7: Man lærer vel brøker før man lærer ligninger?
B8: Jo, det gør man, så det er faktisk en ret vild idé han har fået tænker jeg.
A8: Ja
B9: I 4.klasse kendte jeg ikke de der regler, med lighedstegnet og hvad der nu ellers er. Der lærte jeg jo ikke om ligninger.
A9: Det ret sjovt at han tænker "lægge det til", for umiddelbart hvis han havde ganget det med to så der stod, ja, det ved jeg ikke rigtig - 6/8, så vil den jo være god nok!
B10: Ja!

A10:Så det er det der med at han tænker man bare kan plusse. Men, men, han blander det nok bare sammen, personen - nu siger jeg bare han, det ved jeg selvfølgelig ikke om det er. Eleven må være et skridt foran ved bare at vide at man overhovedet kan gør det samme på begge sider.
B11: Ja. Ja, det har du nok ret i
A11: Men øh.. Kunne man lave et eller andet med et pizza forsøg.
B12: Et pizzaforsøg? Ja, det tror jeg godt man kunne.
A12: Del en pizza i 4 og tag 3 af dem, så er der en kvart tilbage,
eller del i en pizza i 9 og tag 8 af dem, så er der ikke en kvart tilbage.
B13: Ja, det er rigtigt. Det kunne være en del af det man vil lave med dem hernede *(peger på delopgave b)*, når vi prøver at undersøge hvordan vi gerne vil lære dem det.
A13: Ja,ja, så kunne man jo gøre det.. så kunne man jo netop prøve at gange det med to og se at hvis vi deler den i 8 og tager 6 stykker er der så også en kvart tilbage? Ups det var der vist.
B14: Ja.
A14: Så måske på den måde, ligesom hende dér nordmanden gjorde i den dér video.
B15: Åh!
A15: Er det ikke noget med..
B16: Jo, hvordan var det nu? Hun sad og lavede pizza med dem alle sammen.
A16: Ja.
B17: Det var ret sjovt.
A17: Ja, fordi der ser man, jeg tror
B18: Det er meget visuelt
A18: Det skal blive meget visuelt. For det der med at når noget bliver større så bliver det mindre. Altså 9 er jo mindre end 4
B19: Ja.
A19: Men det fatter de ikke, det synes vi jo også er svært, da 9 er et større tal.
B20: Ja. Det er det måske bedre at få det visuelt ned på papir eller man tegner det eller et eller andet.
A20: Ja, lige præcis.
B21: I stedet for at man bare tænker at det kan jeg ikke gøre.
A21: Det vil jeg umiddelbart tro var det nemmeste, og så se om der var lige mange tilbage hvis du lavede to pizzaer. En med 3/4-dele. Fjerner tre fjerdedele og én hvor du fjerne otte niendedele.
(efterfølgende skrives en konklusion ned på papiret på opfordring fra Zetra, men ingen tegninger)

Gruppe 1 og Spørgsmål 2: Samme decimaltal

A0: Det handler om positioner. hvor står en'erne og hvor står ti'erne henne..
B1: Præcis!
A1: ..og, i decimaltal, fordi, den dér har vi jo også været igennem tidligere, at 45 se jo langt større ud end 5. De skal bare lige vide at der står nul bag på 5.
B2: Ja. Det der står 0,50 og ikke 0,5.
A2: Ja. Lige præcis. Og så tror jeg, altså hvis bare man skrev det normalt, det er jo også mærkeligt at man ikke skriver det, et eller andet sted - ikk?
B3: Det ved jeg ikke, ja det er det jo, når man skal til at lære det og forstå ja, så der skal jo stå 50
A3: fordi 0,5 er jo mere 1/2 end det er 50, så skrev man 0,50 og var ikke så doven, så ville de jo godt vide.
B4: Ja,ja, især når der står 50 og ikke 5, så kan de jo sagtens se sammenhængen.
A4: Ja.
B5: Det er jo fordi de ikke har forstået det med position og de har ikke forstået hvordan det er at hvis 5 skulle være større eller mindre end 45, så skulle der jo stå 0,05 og det kan de ikke se for sig når de ikke kender positionssystemet.
A5: Nej, nej, nej, overhovedet ikke *(sagt meget anderkendende)*. Det kunne være interessant at give dem en hvor der stod 0,12 fx og 5 (*mon ikke de mener 0,5!*), for 12 ser stadig større ud. Det er helt vildt, men hvad skal man gøre? For står du på den anden side af decimalet så vil der altid være et nul på.
A6: Ja.
B7: Der er jo ikke nogen logisk forklaringe andet end at det er dovenskab at vi ikke skriver det nul, eller det ved jeg ikke - jeg ved ikke om der er en logisk forklaring.
B6: Der er jo heller ikke behov for det for der er jo ikke noget, nul betyder jo ingenting. Man skriver jo heller ikke, selvom der er nul æbler, så skriver man jo ikke nul æbler.
A7: Nej, nej, men det kræver bare at man kender til positionssystemet, for man er nødt til at skrive nul, hvis det betyder 0,05, så er man tvunget til at skrive det dumme nul.
B8: Ja.
A8: Ja, så det må vel være noget positionssystem, det er det simpelt hen.
B9: Er det noget vi skal gennemgå med dem eller? Er der nogle gode idéer til, hvordan kan man ligesom vi fandt pizzaen før - hvordan kan vi finde en god idé til at gøre det visuelt?
A9: Det kan være noget med gram, det ved jeg ikke, 50 gram er mere end 45 gram eller sådan noget
B10: Det er jo lidt det samme problem man har.
A10: Ja, fuldstændig. Man skal, ja, der skal man, ja, men det handler om, der kan man sagtens lave mange forsøg der handler om at vise at 50 er større end 45.
Men, men, det handler om at de skal vide at der står et skjult nul bare 50 - bag 5'eren. Det er vel et eller andet man må øve og øve og snakke om det og..
B11: Men, det er det. jeg ved faktisk ikke. Jo det er noget man må bare
A11: Det er klart man ikke ved dette i starten - hvor skal man vide det fra, hvis ikke man har lært det, men altså?
Ja. Noget med at decimalerne det er afgørende hvilken position det står.
B12: Ja. Der er jo det der med som vi også læste at det er så svært for børn at se de der usynlige nuller som er.
A12: Ja, og hvor mange nuller der er.
B13: Ja, præcis ja.
A13: Ligesom når man ganger hvor man rykker kommaet. Hvor mange gange er det lige vi

rykker det for at det giver det rigtige tal.
B14: Præcis. Også når man ganger når man stiller det op. Det er det vi havde om, når man skriver et gangestykke.
A14: Ja, lige præcis. Hvor mange nuller der skal på alt efter hvor mange nuller der skal på.
B15: Det kunne måske være de har haft om det.
(*Der udføres et gangestykke på papiret*:)
Vi har 105 her, det ganger vi med 95, hvordan skal nullerne være.
Vi ganger 5 med 5, det giver 25. Så sætter vi den op her, ganger 5 med 0, det er 0, plus 2, så sætter vi 2 ned.
Man skal huske at sætte dette nul ned til ti'erne. Nu går vi til ti'erne og sætter nullet her. Så siger vi $9 \cdot 5$ det er 45. Og $9 \cdot 0 = 0$, plus 4, og $9 \cdot 1$ det er 1.

$$\begin{array}{r} \underline{105 \cdot 95} \\ 525 \\ \underline{9450} \end{array}$$

A15: Og så har vi dem alle sammen.
B16: Ja, det er dette her med at sætte usynligt nul, og det er det der er svært at forstå.
A16: Ja.
B17: Der er jo det der med at nu går vi over til ti'erne.
A17: Jeg vil godt kunne forstå et barn hvis det tænker at det der er meget nemmere at se en ti'er i det her end på den anden side af et decimal, for så står der "0,"altså så er vi allerede forbi det der normalt er en en'er og en ti'er plads.
B18: Kunne man ikke godt skrive 0 her?
(*der peges på regnestykket fra før, ud for tallet 95*)
A18: jo, det vil man sagtens kunne.
B19: Og komma dér.(*nu ændres der i gangestykket*)

$$\begin{array}{r} \underline{1,05 \cdot 0,95} \\ 525 \\ \underline{9{,}450} \end{array}$$

(Bemærk at kommaet er sat forkert her, de har altså ikke helt styr på det!)
A19: Ja, det kunne man sagtens. Så igen skal vi tælle hvor mange gange har vi rykket kommaet. Det har vi ialt 4 gange...(*der tælles kommaplaceringer*) Ryk antal gange 1,2,3,4
B20: Så bliver det 45
A20: Ja.
(herefter bliver de afbrudt da tiden er gået)

Gruppe 1 og Spørgsmål 3: Hvor mange tal

B1: Altså man kan sige her der er det jo... Det er med at være så.. Altså, nu fik jeg tænkt lidt på den her med brøkerne her.
A1: Ja.
B2: Det er jo rigtig nok at det eneste tal der ikke står der det er 3,5 (*der menest* 3/5). Det er jo det tal som er imellem når man siger 2,3,4.
A2: Ja.
B3: Men de tænker jo ikke over at for at 2 kan blive 4 så skal de lægge to tal til. Det er jo dér den ligger lidt. Det er rigtig nok hvad de siger, at det er det som ligger imellem og det er dét der mangler hvis man skal skrive dem alle sammen op i rækkefølge.
A3: Ja.
B4: Men det er jo ikke dét antallet der ligger imellem 2 og 4.
A4: Ja. Jeg kigger ikke så meget på den, jeg kigger mest på denne her 0,4 og 0.8. Øh.. nedenunder..
B5: Men det er ikke det samme.
A5: Øhh..
B6: Der skal vel stå 5 her, ikk?
A6: Nej der skal vel stå 4 - det ved jeg ikke. (*der havde desværre sneget sig en fejl ind i opgaven så der stod 0,5 på 2.linje i opgaveteksten i stedet for 0,4*).
Fordi den nederste dér, fordi mellem 0,4 og 0,8 ikk, hvis man kunne få dem til at forstå. Men der kunne man faktisk godt lave et pizzaforsøg igen.
B7: Mmmh..
A7: Og så bare køre i, altså, for hvis de ved at man kan dele 100 i 20'ere, så er der 5 af dem, så er der altså, så er 2/5 og 4/5.
Det er jo det samme (*de sammenligner 0,4 og 0,8 med 2/5 og 4/5*).
B8: Ja.
A8: Der kunne man fx godt lave, og så sige hvis vi nu tager det ene, det vi har i procenter, 40%og 80%, og det andet det er decimaler eller brøker, men ellers så måske igen forklare: altså sådan prøv at fjerne 40 % af pizzaen, prøv at fjerne 2/5.
B9: Ja.
A9: Altså man kan godt få dem til at forstå at talværdien er den samme størrelse selvom det er skrevet forskelligt.
B10: Ja.
A10: Men det der med. Men, jeg vil sige, man skal også lige forstå hvordan de bliver spurgt, for at spørge hvor mange tal er der imellem to brøker, så er der altså også kun ét. Det tror jeg jeg vil svare.
B11: Det vil jeg også.
A11: Men hvor langt er der fra 2 til 4, der er 2.
B12: Ja. Det er nemlig også det, det handler også om hvordan man formidler spørgsmålet.
A12: Ja,, ja for så vil jeg også sige at der kun var to imellem 5 og 8 (*0,5 og 0,8 - husk på fejlen i opgaveteksten*)
B13: Men det er der på sin hvis også.
A13: Men ikke helt jo. Øhm.. Så jeg tror, fordi, jeg tror man skal være helt tydelig på hvad man vil have ud af eleverne. Hvilket svar vil man gerne have fra eleverne.
B14: Ja.
A14: Og ikke fordi man skal være sådan, være total ledende i sit spørgsmål, men..
B15: Spørge klart og tydeligt hvad man, ja, vil vi have ud af det her. Hvad skal vi lære af det her.

A15: Ja, lige præcis, for alle ved jo at to plus to giver 4, tænker jeg, altså i en 5.klasse - de ved det jo godt.
B16: Ja, ingen tvivl
A16: De er nok i gang med at lære ligninger med to ubekendte.
B17: Men det kan være det handler om det her med at jeg tror de misforstår spørgsmålet. Altså hvad er det mellem det her.
A17: Ja. For jeg forstod det lidt som talværdien af det. Af de her 0,4 og 0,8 i forhold til 100. At det er jo det samme, at 5/5 det vil jo være 100, og så derned af. Hvis man på en eller anden måde kan lære dem at omskrive fra decimal til brøker eller den anden vej.
B18: Ja.
A18: Så ser det måske ikke, så er forskellen måske ikke så stor
B19: Ja. men det er ligesom om at det de mangler, de kan ikke se det her som en brøk endnu. Det har de ikke lige fanget.
A19: Og det kan man måske godt forstå. Og måske også fordi det der med er det 50 eller 90, for hvis det var 50 så ville man også kunne skrive det som en halv, osv. osv..
B20: Det er det der med at omskrive det til brøker og lave dem til den mindste brøk.
A20: Ja, lige præcis, man kunne starte med at give dem 8/10. Kan du forkorte den, ja. Ups det kunne du godt, hovsa der stod vist noget der lignede.
B21: Ja. Præcis. Så vil det helt klar være nemmere for dem at måske se det for sig når de har det hele som det samme. Måske omskrive det her til decimaltal.
A21: Ja, ja. Måske er det rigtigt. Ligesom - igår i dé der linjer. Hvis man får det samme værdier under eller ved siden af hinanden
B22: Ja.
A22: så er det så meget nemmere at regne med, synes jeg. Hvis det hele er brøker eller det hele er decimaler, hvordan de så når dértil. Det skal de jo selvfølgelig lære, men...
B23: Eller finde ud af på en eller anden måde, altså..
A23: Ja, lede dem frem til...hvad er 5/5, det er jo 1. Hvad sker der hvis du skriver et andet
B24: Ja, hvad gør vi med det her tal.
A24: Ja, men den er jo god nok at der kun er én imellem
B25: Ja, det er jo rigtig nok. Det er jo rigtig besvaret, men det er det om spørgsmålet...
A25: Ja, det er ikke matematisk besvaret, men logisk set så svarer de på spørgsmålet.
B26: Ja.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 1 og Spørgsmål 4: Regne med brøker

A0: Det er meget logisk. De trækker dem bare fra hinanden - tæller med tæller og nævner med nævner. Præcis ja, helt nemt.
B1: Det er det man vil gøre med almindelige tal.
A1: Ja. Lige præcis, så de har sikkert, kan det passe de går i 4. eller 5.klasse?
B2: Ja.
A2: De har sikkert tænkt sådan helt normalt, tror du ikke.
B3: Ja, helt klart, jeg tror de ikke helt forstår hvad brøker er, og så tænker de bare at det er to tal på hver sin ende af brøkstregen, så dem skal vi da plusse og minus med hinanden.
A3: De har slet ikke forstået værdien af tallene, som 1/2 og 2/3. Det kan man ikke trække fra hinanden før de har samme værdi. (*i nævneren...?!*)
B4: Præcis nej. De mangler ligesom forståelsen for brøker og hvad en brøk er, og hvad betyder det at vi har en brøk.
A4: Ja.
B5: Altså, for at kunne forstå det så kunne vi lave pizzaforsøget igen. det der pizzaforsøg det er bare
A5: Det er bare rigtig godt.
B6: Ja! Det kan man lære alt af.
A6: Men det handler om. Det her handler helt tydeligt om en grundlæggende forståelse for betydelsen, altså størrelsen af en brøk.
B7: Ja.
A7: At jo mere det er, jo mindre er det jo, eller, altså du kan jo ikke bare trække det fra hinanden som to tal, fordi 1/3 er jo, altså det kan du ikke bare trække fra 4/7 sådan helt almindeligt.
B8: Nej for det er to forskellige ting, jeg tror det er derfor der er svært. Det er jo, det er jo en helt anden værdi end der står her. Tallet betyder noget andet end når vi bare siger 1-3.
A8: Ja, men de har jo heller ikke regnet med brøker. De har jo regnet i fire regnestykker. Der er 2+1, 3+2, 4-1...
B9: Præcis ja,
A9: De tror sikkert bare at det er skrevet op lidt mærkeligt
B10: Det ville jeg også tro hvis jeg ikke vidste bedre.
A10: Ja, det ville jeg også.
B11: Hvad vil vi gøre?
A11: Så altså en forståelse for talstørrelsen, eller talværdien, eller hvad siger vi.
B12: Ja, brøkværdien
A12: Ja, Brøkværdien. Før man overhovedet skal kunne regne med det
B13: Ja, man kan jo ikke regne med det før man ved hvad det er.
A13: Der er en lærer der har trådt helt forkert dér eller også er det bare en elev der prøver sig frem og er lidt foran.
B14: Ja.
A14: For det første man får at vide må vel være at brøkers værdier,altså, eller at brøker har en værdi og det er ikke bare et tal, eller sådan. Det er noget med at de står ovenpå hinanden.
B15: Ja, det har en betydning.
B15: Det er jo ikke 1 og 2, det er jo en halv (1/2).
B16: Ja, det er det samme som 0,5
A16: Ja, lige præcis. Så skulle man måske... Ja det ved jeg ikke, så skulle man måske prøve at lave det om til decimaler og så kan man jo plusse og se hvor meget det er og prøve at se om det er det samme som 3/5. Det finder de nok ret hurtigt ud af at det er det ikke

B17: Ja, præcis. Det bliver i hvert fald svært at få det til at være.
A17: Selvfølgelig er børn forskellige, men man skulle bare tro at de havde lært, altså at man lærer regnemetoderne i brøker før man lærer at regne om til decimaler.
B18: Det kan være de ikke har forstået det. Det kan godt være at de har lært det men bare ikke har kunnet se det for sig, eller ja, fået forståelsen for det.
A18: Det er også lidt komplekst.
B19: Ja, det er det.Det er jo svært at se det her det er ikke tal, det er et forhold imellem to ting.
A19: Ja. lige præcis
B20: Forholdet mellem en hel og dele af en hel og det kan godt være svært for dem at se hvis det er de bare har fået at vide at en brøk det er det sådan her. (*der udføres en vandret håndbevægelse*)
A20: Ja, det er noget med en streg over
B21: Det er noget med en streg og så er der to tal. En tæller og en nævner.
A21: Ja.
B22: Det handler om at forstå hvad det er før man kan regne med det. Det virker som om eleven ikke har forstået hvad det egentlig er der sker, når man har 2/3 og 1/2. Hvordan ser det ud.
A22: Ja, hvad er størrelsen?
B23: Præcis Ja.
A23: Sådan noget med noge,..
B24: Noget med noget pizza. Noget med noget omregning til decimaler
A24: Omregning til decimaler, ja. Ja. Det må være vores svar på det.
De opfordres til at skrive deres konklusion ned da der er tid tilbage. De har ikke tegnet noget undervejs.

Gruppe 1 og Spørgsmål 5: Regne med decimaler

B1: Hold da op.
A1: Men det er jo det samme igen.
B2: Det er det samme igen, ja vi laver brøker.
A2: Hvad er værdien af 0,25? Det er ret vidt. Ganger du det med 4, så har du 1, ganger du det med 8 så har du 2. Men jeg tror, jeg tror, det er det der med at fatte at når man ganger med 0,"et eller andet"så vil det altid blive mindre
B3: Ja, end hvis du dividerer med det.
A3: Ja, lige præcis. Men bare det der med at gange med nul, det er altså mærkeligt
B4: Ja, ja!
A4: Fordi de ligner jo et tal,0,25 det er jo et tal,m så jeg kan godt forstå at man tænker så snart man ganger med noget så burde det jo bliver større fordi det er jo logisk.
B5: Igen, Igen det der med det er en blanding af brøker og position. Den er omme på den anden side af brøkenstregen, dvs. vi ligesom har ti'erne et andet sted.
A5: Ja.
B6: Når det er under nul, så bliver det bare noget andet. Det er også svært, det er svært at forstå også.
A6: Måske skal man ikke se det så meget som $0.25 \cdot 8$, men 8 gange har du 0,25.
B7: Præcis. Det er det der med at forstå.
A7: Nærmest sidde med centicubes og tælle.
B8: Ja. Du har 25
A8: Altså helt seriøst, lave et nul her, så lave en streg, så læg 25, så læg 50, når man har lagt 100 kan man sætte 1 her.
B9: Ja.
A9: Hvor mange gange har du så...altså sådan... Jeg ved det ikke, det er meget svært, men de skal jo forstå at 0,25 er en meget lille værdi, det er ikke 25, men det er...
B10: Det er en kvart.
A10: Ja, det er faktisk en kvart
B11: Det er en kvart. Og det er det man skal lære at forstå. Hvad er størrelsen på en brøk - det er i det her tilfælde en kvart
A11: Ja. Det er fjerdedel.
B12: En kvart lagkage. Hvad gør du når du har 4 kvarte, så har du en hel lagkage. Hvad hvis du har to hele lagkager, så har du 8 kvarte.
A12: Ja.
B13: Det er det der med at kunne se det for sig og det er svært.
A13: Ja, det skal virkelig være visuelt. Det dér "0,"skal virkelige være visuelt. Ellers ville det jo være 200. Det vil jo give god mening hvis det bare var gange 25.
B14: Ja, ja!
A14: Og hvad siger vi til divisionen? Jamen når du ikke dividerer med et helt tal, så ved du aldrig. Det er jo også igen det der 0,25. Det er jo det samme at forstå forskellen på gange og division i forhold til den talmængde man regner med.
B15: Ja.
A15: Jeg tror ikke engang jeg kan fortælle hvad svaret er.
B16: det tror jeg faktisk heller ikke.
A16: Så sidder vi her og kan ikke engang selv regne det.
B17: Vi kan vi ikke bare sige vi deler 8 med 25
A17: Men det skal jo blive større end 8.
B18: Ja, den er bare svær

A18: Når vi så synes den er meget svær, så er det ikke så mærkeligt at en lille elev i 5.klasse ikke synes det giver mening.
B19: Nej, overhovedet ikke. Jeg ved faktisk ikke hvordan man dividerer på denne måde. Jeg kan gøre det på lommeregneren og jeg forstår godt hvad der står på lommeregneren.
A19: Måske ligger vi bare en kvart til
A20: Ja, præcis
B21: Har vi en lommeregner liggende et sted?
(de finder en lommeregner i tasken)
A21: Du har den helt gode med.
B22: Ja, vi siger 8 divideret med 0,25. Det er 32.
A22: Det vil jeg sige bare var $8 \cdot 3$. Det kan jeg ikke sige hvorfor det bliver det.
B23: Hvordan kan det blive det?
A23: Så er det heller ikke så mærkeligt at en dreng ikke, at eleven ikke kan forstå hvorfor, når man ganger med noget der burde bliver større, så bliver det væsentligt mindre, og når man dividerer med noget hvor man tænker - vi dividerer ikke med særlig meget, så umiddelbart ville jeg tænker at det bliver 7,"ET ELLER ANDET", eller sådan.
B24: Ja. Det bliver det omvendte. Ligesom når vi siger "vi dividerer med 2", det er jo det samme som at vi siger at vi ganger med 1/2.
A24: Jo, jo, og det er nemlig, og det skal man måske lære. Det er måske også rigtig nok.
B25: Det er også fordi man trækker, altså, her dividerer vi jo også. Det er det samme som at sige dividere når vi siger gange med en decimal, eller et decimaltal.
A25: Ja, det der er faktisk divideret med 4 (*der peges på regnestykket* $0,25 \cdot 8$).
Divideret med en kvart, divideret med den som det vil stå i, hvis du lavede den her om til en brøk, så vil det være 1/4.
B26: Præcis ja.
A26: Hvis du dividerer den med en kvart så bliver det 2.
(*her blander de lidt rundt i hvad de egentlig mener!*)
B27: Præcis ja.
A27: Vi dividerer med 4, helt ærligt, er det ikke det?
B28: Jo, det er det da. Undskyld dividerer vi med 4
(Nu vender de blikket mod regnestykket $8 \div 0,25$*)*
A28: Her der ganger du med 1/4, det må vi vel gøre, nej dividere. Den dér kan jeg ikke forklare.
B29: Det kan vi godt, det må vi lige finde ud af. Det er giver 32. *der regnes ud:*8,16,24,32, så vi ganger det (8) med 4 i stedet for at dividere det med 4.
A29: Hvordan skal vi forstå? Når vi sætter et nul foran laver vi simpelt om.
B30: Præcis ja, vi bytter om på det hele.
A30: På faktoren, fra gange til division. Det skal man så regne og forstå hvis man plusser og minusser så gør man det ikke.
B21: Ja, det er jo det.
A31: Når man ganger så er det bare en kvart. (*Nu peges der på divisionstykket*) Den der kan jeg ikke finde ud af, jeg aner det ikke
B32: Det ved du så nu.
A32: Okay, interessant, ja, så det handler om at forstå at man, altså først og fremmest skal man ligge fatte at den her bliver byttet rundt når der står en nul foran, faktoren eller hvad det nu er. Bagefter skal man altså tænke det om i en brøk - så hvad er en kvart af noget. Ikke 0,25 gange, men hvad er en kvart. Hvis man kan lave det om til en brøk så er det måske nemmere.
B33: Ja, måske. Jeg ved det ikke helt. Jeg synes bare stadig det er svært. Selvfølgelig er det svært at forstå hvorfor bytter man rundt på det. Det er jo det der er, altså det er jo nemt nok

at forklare, nemt nok, altså det er jo nemmere at forklare at man ganger
A33: Ja. .
B34: Men når man dividerer hvordan kan man forklare at det er det der sker.
A34: Det kan jeg ikke engang forklare selv. Det kan jeg absolut ikke forklare.

(*Nu er tiden gået*.)

A.2 LÆRERSTUDERENDE - INTERVIEW 2

Transkription af pilotstudiet
Dato: 6.januar 2016

PERSON A: til venstre
Har opnået karakteren 4 på matematik A-niveau.

PERSON B: til højre
Har opnået karakteren 8 på matematik A-niveau.

RÆKKEFØLGE: spørgsmål 5-1-2-3-4

Gruppe 2 og Spørgsmål 5: Regne med decimaler

A0: Altså, jeg synes, jeg vil måske tage del i den med deleopgaverne først fordi så vil man kunne sige at du skal denne den sådan at de der 0,25 skal du få, blive ved med at nærmest plusse indtil det giver 8, så du kan på den måde se at det vil give mere end 8.
B1: Ja, men altså jeg tænker også netop, nu er det 0,25 så det svarer jo til 1/4 . Det er meget belejligt at have den der med lagkagen eller pizzaen, og så sige, jamen, på en eller anden måde få fortalt dem at den ene 1/4 der svarer til 0,25...*(skriver* $0,25 = \frac{1}{4}$*))*
A1: Mmh
B2: ...at det er... *(der tegnes en pizza som er delt op i kvarte)* den udgør den dér , altås 1/4, og hvis du tæller den (*de kvarte pizzastykker*) 8 gange, 1,2,3,4, og så den næste, 5,6,7,8, jamen så har du faktisk kun to hele pizzaer.
A2: Ja.
B3: At på den måde få sat nogle billeder på, så de forstår det der. Jamen når vi pludselig snakker 0,"et eller andet", og så samtidig, eller bruger den samme metode tænker jeg, til når der skal divideres. Jamen, hvad er 8 så? Så bliver det pludselig hvor mange gange kan det dér gå op i 8, det er pludselig ret mange gange.
A3: Præcis....Så kunne man bare lave 8 pizzaer med 4 stykkker i hver.
B4: Ja, lige præcis, så kunne man tegne derudaf. Dele det op, okay hvor mange gange kan du så lave det dér, 1,2,3,4,5... osv. (*begynder at tegne flere pizzaer på række, men færdiggør det ikke*)
A4: Ja, præcis.
B5:Så siger de "aah okay, og det det". En anden mulighed kunne også være hvis læreren havde et målebånd, en lineal eller en tommestok eller et eller andet. (*en lineal tegnes med streger på, dog uden at sætte tal på*)
A5: Mmh
B6: Og sige, den der den er 8 cm lang, måske, hvis vi så måler 0,25 - hvor mange gange kan vi måle det indtil vi når 8? Det er jo også den måde som division er på.
A6: *(Nikker anderkendende)*
B7: Det var i hvert fald det udmiddelbart jeg tænkte - jeg vil prøve at illustrere, jeg vil i hvert fald prøve at illustrere det fordi... Stod der hvad for en klasse det var?
A7: Nej, det tror jeg ikke..
B8: Nej, men altså selv i de store klasser kan de have svært ved at se at der bare står et tal. Så de vil gerne.. jeg kan i hvert fald selv godt lide at sætte nogle billeder på
A8: Helt sikkert. Også bare det der med at få dem forklaret at 0,25 er det samme som 1/4.
B9: Ja, lige præcis.
A9: Det er de nødt til. Basic.

(Herefter kommer en tænkepause for de nærstuderer selve spørgsmålet og tænker videre)
B10: Så kunne man selvfølgelig bevæge sid ud i forskellige regneregler. Når man skal til at gange og dividere med brøker, altså det der, altså nævner og nævner og tæller og tæller når man ganger dem, og så omvendt. Det som du siger når man flippe dem.
A10: Ja.
B11: Hvor det er man ganger tæller med nævner og nævner med tæller i stedet for.
A11: Og så vil du bare lave en brøk der hed? (*der sættes ring om de 0,25 i opgaveteksten*)
B12: Og også, og så prøve igen og forstå. Hvis vi nu snakker 0,25 som 1/4, hvad er 8 så? Hvis vi holder fast i fjerdele, så er det pludselig 4 gange 8, det er 32. Så vil du sige 32 fjerdedele.
A12: Ja.
B13: Og så kan man på den måde. Okay, det kan faktisk også skrives som en brøk, så når vi nu ganger 1/4 med det dér *(der udregnes på papiret:* $\frac{1}{4} \cdot \frac{32}{4} = \frac{32}{16}$*)*, så får vi... får man så ikke 32/16, men så bliver tælleren pludselig, den bliver større, men nævneren ændrer sig ikke, undskyld tælleren ændrer sig ikke men næveren bliver større.
A13: Top!
B14: Så, det gør jo så at når vi forstå brøker - at jo større nævner er, jo større dele, og så bliver tallet jo også mindre og mindre, ligesom når vi har 16 under 32.
A14: Præcis
B15: Så kunne man igen tage den når man så dividerer, når man har de der, det var 32/4 divideret med 1/4 (opskriver regnestykket $\frac{32}{4} : \frac{1}{4} = \frac{32 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}$) og man så havde fået lært dem regnereglen.
A15: Ja.
B16: Så kommer der pludselig til at stå 4 lige der, og så kommer der til at stå $4 \cdot 32$ heroppe. Så har man pludselig rigtig mange - en hurtig udregning, så går de ud med hinaden. Så er der pludselig rigtig mange dér. Når de så har forstået betydningen af de to, altså tæller og nævner, så kan de hurtigt se, okay, nu er det store tal er deroppe, før var tallet nedenunder større.
A16: Ja
B17: Så det er det der sker når man ganger brøker eller dividerer. Så der er rigtig meget man kan arbejde med.
A17: Ja, helt klart starte med at vise det visuelt.
B18: Ja, lige præcis, så det skaber forståelsen. Så kunne man for dem der var dygtige, eller hvis det var over en længere periode, komme op i og arbejde med: »se det med tal og se det med brøker, se når vi ganger og dividerer med hinanden.« (*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 2 og Spørgsmål 1: Ens brøker

B1: Jamen, for at hjælpe eleven videre, så vil man jo.. Det er ret tydeligt at eleven har forstået den der del med at forlænge og forkorte brøker, at man skal gøre det samme både i tæller og nævner. Han har bare ikke lige fået med at man skal gange med det samme tal, så det hjælper ikke at lægge et tal til.
Jeg tænkte at jeg ville illustrere det på en måde. Altså, tegne pizzaen og dele den op i 4, tegne pizzaen og dele den op i 9, og så skravere 3/4 og 8/9 sådan så han fysisk kan se at det er ikke det samme. Så den regemetode han bruger er altså forkert. (*har i forvejen tegnet situationen*)
A1: Lige præcis
B2: Omvent hvis jeg ganger, altså den rigtige regnemetode, så får jeg pludselig at 3/4 i en kasse det er det samme som 15/20 i en kasse, hvis man deler dem op indeni (*har i forvejen udregnet* $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$ *og skraveret en firkant*). Hvad har du?
A2: Ja, altså, jeg vil prøve at forstå hvorfor han ar gjort som han har gjort. Jeg ved ikke hvor langt oppe vi er her (*i forhold til klassetrin*), men hvis de har haft lidt om ligninger - fx hvis man må gøre det ene på den ene side så skal man også gøre det på den anden side, og så giver det stadig det samme resultat.
B3: Ja.
A3: Så hvis han har haft det i tankerne, at det faktisk er lige sådan, så kan jeg godt forstå han har gjort sådan, hvor jeg så måske vil prøve at få dem til at regne efter og se - giver det egentlig det samme? Hvor man bagefter vil kunne sige: "hvad vil du så kunne gøre anderledes, eller hvor tror du fejlen ligger?", og så i hvert fald bruge det visuelle til at hjælpe dem på vej til at se "nååeh ja, det giver mening nu", eller sådan noget lignende, så de ligesom kan se at det...
B4: Netop, og så få dem til at arbejde. Måske give dem nogle opgaver, nogle lette, nogle små brøker, hvor de så kan illustrere det og så få dem til at tegne selv, altså på ternet papir eller et eller andet.
A4: Ja.
B5: Og så sige "okay, hvis jeg nu ganger det md 2 i både tæller og nævner, hvad for en figur har jeg så?". Og så pludselig ser de også og får den dér forståelse for at figuren skal holdes, den ændrer sig ikke. Det er jo stadig den samme firkant.
A5: Ja.
B6: Der er pludselig flere streger indeni, eller pizzaen er bare pludselig delt op i flere og flere stykker, så der bliver ikke mere pizza ved at jeg ændrer på nogle af tallene. Jeg skal bare pludselig til at tælle mange flere små stykker. Og så får det måske pludselig den indsigt i en brøk. Jamen brøken kan jo ikke blive mere end et helt tal, fordi fx 4/4 så er det jo 1.
A6: Præcis
B7: Selvfølgelig hvis vi kommer over i noget der er større. Men det afføder måske at man pludselig kan få dem til at se brøker på en anden måde også, ved at man sætter dem til og tegne de forskellige ting.
A7: Ja.
B8: Og i hvert fald få dem væk fra den dér med at plusse i begge. Han har forstået at det må man godt men har bare ikke forstået at man ikke må gange, eller ikke må plusse heddet det, men skal gange i stedet.
A8: Han har forstået at man skal gøre det samme på begge sider i hvert fald.
B9: Ja, netop
A9: Og så lige give dem, som du sagde, nogle enkelte stykkerk, hvor de lige kan få det prøvet igennem det man har prøvet at hjælpe dem igennem, og så se om de bedre forstår det bagefter. (*De har ikke mere at sige.*)

Gruppe 2 og Spørgsmål 2: Sammenligne decimaltal

B1: Vil du lægge ud?
A1: Jeg har ikke lige læst det endnu!
B2: Nå, jamen, så bare læs det...
A2: Jeg tænker meget det dér med at lære dem om positionssystemet.
B3: Ja.
A3: Det synes jeg er meget vigtigt. For at fremme eleveres læring - 5.klasses elever de burde have haft om gange på det her tidspunkt, hvor jeg automatisk vil sige - hvis jeg har sagt at de skal gange med større tal, så har de også lært det dér med at så ganger du en'erne først med det andet tal, og så ganger du ti'erne. Altså, så du på den måde får positionssystemt tilbage så de kan se at ved 0,45 så er det 4'eren er er ti'eren og 5'eren der er en'eren.
B4: Ja. Lige præcis
A4: Og hvis man så går ned til 0,5, så kan de se at det står jo som det første tal efter kommaet.
B5: Ja, det er også det jeg er ude i - også det her med positionssystemet.
A5: Ja.
B6: Til at starte med, lige som at fra én og så til venstre og for hver gang tallet bliver større, så får tallet først i det tal man skriver, hvis det nu var 112, så har det først 1-tal værdien af 100, det næste har 10, og 2-tallet har værdien af $1 \cdot 2$.
A6: Ja.
B7: Er det så på den anden side af kommaet, så får de 10'ne, 100'ne, 1000'ne-dele, altså de taber værdi kan man sige på denne måde.Tallene bliver mindre og mindre,
A7: *nikker*
B8: de har mindre og mindre værdi når de rykker til højre, ligesom de har større og større værdi når de rykker til venstre på den anden side af kommaet. Så fordi der står 4 og 5 *der peges på papiret på tallene 0,45 og 0,5* og der kun står 5, men 5 har stadig den størrste værdi i forhold til 4. Så er der en 5'er som har en lille værdi, så der står i teorien "50"
A8: Ja.
B9: Så der står faktisk 50 og 45, og det tænkte jeg igen på en eller anden måde at illustrere og sige: "Hvis vi har 1 *(kasse)* så kan vi dele den op i 100 mindre (*har i forvejen tegnet en boks der er delt op*). Hvis vi nu skraverer 45 af dem og hvis vi nu skraverer 50 af dem - hvad er stå størst?
A9: Ja.
B10: Sådan så de ser at det er det samme som hvis det havde været på en anden side - hvis vi bare skulle dele 100 op. Nu er det 1 *(kasse)* vi deler op i 100.
Jeg overvejede også om man kunne fremme eleveres læring, det ved jeg ikke - nu er det en 5.klasse.
Ellers kunne man begynde at snakke om hvordan vores talsystem er bygget op.
A10: *Nikker*
B11: Måske komme ind på tal i andre baser. Det er jo ikke bare fordi der er nogen der har bestemt at det skal være 1 og 10, men det er jo fordi at en'ernes plads har en 10^0, og den næste har en 10^1, og på den anden side af kommaet så er det 10^{-1} osv. osv.
A11: Ja.
B12: Så de vil få den forståelse: "Men hov, det er sådan vores talsystem det faktisk fungerer - at når vi skriver 112, så er det fordi hvert tal har den form, bliver ganget med den faktor der står for den plads, og det samme gør sig gældende på den anden side af kommaet."
Og så kunne man jo komme over og lege, altså tage de andre baser, så man ser 8-talssystemet eller 2-talssystemet osv.. For det er faktisk det samme, så hvis vi i stedet for at skrive 10 så skriver vi pludselig i 2-talssystemet $2^0, 2^1$ i stedet for $10^0, 10^1$ *(skriver de to baser ned)* og så på den anden side af kommaet så er det bare opløftet i -1".

A12: Ja. Præcis.
B13: Det er i hvert fald et springbræt for den undren der måske er opstået hos eleven der siger: "wow, hvad er det rigtig svar her", kan man lave en krølle på og få drejet over til systemer.
(*Nu er tiden gået*.)

Gruppe 2 og Spørgsmål 3: Hvor mange tal

B1: Hvad tænker du?
A1: Jeg tænker i hvert fald at... Den var i hvert fald svær at fortolke, men jeg vil måske foreslå at de omdannede brøkerne til kommatal. Jeg tror jeg vil have nemmere ved at vise det med kommatal. Bare forklare det dér med at... det er nok ikke den samme 5.klasse som før...
B2: Nej.
A2: Men at du har 4,5, altså du har så mange tal nærmest at at du kan få imellem dem. Det stopper ikke bare dér. Hvis vi nu omdirigerede det her til almindeligt, til 40, altså til ti'ere, og det her til 80, så vil de også kunne se at der er alle de der 41, 42, 43...
B3: Ja, lige præcis, der er mange. Netop, der er mange tal imellem. Der er jo komplekse tal, og hvad der ellers er imellem (*Det er vist en misforståelse af komplekse tal!*).
Det som jeg tænker det er jo at, de synes jo at have påpeget at 2,3,4 (*peger på brøkerne*), så mellem 0,4 og 0,8 der er tre tal.
A3: 5,6,7. Ja lige præcis.
B4: Det tænker jeg jo: "jamen forstår de hvorfor det er de siger der kun er ét og hvorfor der kun er tre tal, og har de forstået at værdierne er det samme". Altså at 2/5 det er 0,4 og 4/5 det er 0,8. Er de med på det her?
For prøv at skrive de andre tal som brøker, og så er man jo på vej til at sige, mellem 0,4 og 0,8 der er jo så nul kommma 5,6,7, som jo også svarer til tiende-dele, altså 5/10, 6/10, 7/10.
Og så pludselig på hver side, så har du pludselig - før det har du 4/10 og 8/10, men hov, hvis vi forkorter den brøk, så kommer det til at hedde 2/5 og 4/5, og så er dem i midten jo faktisk er 3/5.
"Men hov, hvad skete der der - tallene er jo faktisk de samme,"men de er skrevet på forskellige måder. Så vi kunne jo faktisk godt skrive, som du også er inde på - der er ikke kun de tal, der er jo selvfølgelig mange, vi har jo også kommatal og vi har... - der er jo uendelig mange tal.
A4: Ja. præcis.
B5: Men vi kan jo godt skrive (*skriver ned på papiret:*) $\frac{2,5}{5}$ imellem $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$. Det svarer også pludselig til de samme værdier som - det var dem som de påstod var imellem.
A5: Ja!
B6: Altså 0,6, og 0,7 og 0,5.
A6: Ja.
B7: Men for rent syns skyld i matematikkens verden er så skriver man sjældent, altså det er sjældent man skriver et kommatal i en brøk på den måde, medmindre vi har med meget abstrakte regneudtryk at gøre.
A7: Ja
B8: Så 2/5 det ser bare bedre ud end 0,4 fx, men 5/10 det ser så måske også pænere ud end 2,5/5 så det er der hvor vi forkorter brøkerne - så kommer vi ind på at lære dem den viden om at "hvad er et pænt udtryk og hvad bruger man brøker til at udtrykke med - kan vi klare os med kommatal, eller skal vi en gang i mellem bruge bruge brøkerne?"
A8: Ja
B9: Og så kan vi jo kommer over og se - hvad er 1/3? Det er jo... (*der skrives på papiret* $\frac{1}{3} = \overline{0,3333333}$) Så er det pludselig at vi vil få åbnet op for hele den der verden med de tal som ikke kan skrives på andre måder en brøker.
A9: Præcis.
B10: Og det er måske igen sprinbrættet til den viden, og så kan vi måske begynde at arbejde med det og omdanne kommatallene til brøker på den måde.
A10: Ja.

B11: Det er ikke fordi jeg vil sige meget mere til det.

Gruppe 2 og Spørgsmål 4: Regne med brøker

B1: Ja, men lidt ligesom der var før, det er noget med at de har misforstået
A1: Ja. Præcis
B2: Det kommer til at lægge sammen - tæller med tæller og nævner med nævner - som ikke går. Det er kun når man multiplicerer, når man ganger, at man gør det på den måde.
A2: Ja. Det der med at man skal finde nye fælles nævner, finde det de går op i.
B3: Lige præcis.
A3: Det må være glippet.
B4: Det må de have glemt i den her 6.klasse.
For at komme videre, så er vi ude i at vende tilbage til at de må forstå hvad det er der sker mår man lægger brøker sammen. De må have... de skal have sat nogle billeder på.
Hvad fx 2/3 er og hvad 1/2 er: at begge er udtryk for den samme "ting", altså de kommer fra den samme runde pizza, eller sådan noget, hvor 2/3 det er hvor pizzaen er delt op i 3, og en halv det er hvor den er delt op på midten.

A4: Mmhhmh
B5: Det er stadigvæk den samme hele pizza vi snakker om, så hvis vi tog 2/3 og så kom med en halv pizza og skulle lægge dem oveni, men så får vi pludselig... så er vi ikke opppe i at have 3/5. Så er vi pludselig oppe i at have en for meget. Eller, én plus noget mere
A5: Ja. Præcis.
B6: Der vil jeg prøve igen at få dem til at tegne: "når I nu har regnet jeres stykker, når I nu har taget 4/7 - 1/3 så tegn resultatet *(der tegnes og skraveres pizzaer på papiret)* . Prøv at tegn de to, tegn en pizza eller tegn en kasse *(der tegnes flere kasser,som opdeles og skraveres)* og del den op i 7, eller sådan noget. Skraver 4 af dem og så tegn den samme størrelse kasse og så skal I trække 1/3 fra. Det er så meget det fylder her i denne her kasse. Tegn den samme kasse - I har fået 3/4, er der noget galt? Ja! der er noget galt for I har pludselig fået et større tal end der var i forvejen. Så der er noget I jeres regnemetode der er forkert."
Og så få dem til at sidde og tegne sig frem til at forstå det der med fællesnævner.
A6: Ja.
B7: Vi skal have ganget de to for at få den samme fællesnævner, og det skal vi så gøre i tæller og nævner.
A7: Præcis.
B8: Hvordan man så kunne gør det? En ting er jo at tegne, tænker jeg. Altså sådan nogle kasser og så få dem til at tegne. Det er lidt svært med syvende-dele, men fx hvis det var tredje-dele eller fjerde-dele. Det er rimelig nemt på et stykke ternet papir at tegne en kasse og så kan man dele det op i 3 og så kan man skravere det.
A8: Giv dem nogle "lette stykker", så de ligesom får metoden i det.
B9: Men også for at forstå: "men hvad sker der når vi nu forlænger brøken?". Hvis vi har vores kasse, igen som du var inde på en af de andre (*gange*). Kassen den ændrer sig ikke ved at vi forlænger den, vi sætter bare flere streger inde i den.
Ved at vi forlænger brøken med 2 måske...1,2,3,4.. Her har vi 4/4 *(tegner kasse og opdeler i 4 felter ved at sætte 3 lodrette streger.)*. Hvis vi forlænger den med 2 så har vi pludselig 8/8 *opdeler kassen i 8 felter ved at sætte yderligere streger 3 vandrette streger.*, og sådan kan vi jo blive ved at dele den op hele tiden. Hver gang vi forlænger brøken, så putter vi bare flere streger ind i kassen, men kassen bliver ligesom den samme.
A9: Ja.
B10: Det er det de skal forstå ved at... de må godt lave de dér (*laver nogle uforståelige armbevægelser*), de skal ligesom finde den der fællesnævner, så de ved "okay nu har vi to ens kasser

med lige mange i hver, og så tager vi jo små klodser, eller hvad vi skal kalde det, de små kasser vi har fået ud af det, og lægger dem sammen når vi plusser- hvor mange er der så?"
Så er der pludselig 7 af dem eller hvor mange der nu er i det første regnestykke.
Det er i hvert fald noget jeg vil kunne forstå hvis det er mig der har svært ved det.
A10: Ja. Jeg ved ikke om vi har mere.

A.3 LÆRERSTUDERENDE - INTERVIEW 3

Transkription af pilotstudiet
Dato: 6.januar 2016

PERSON A: til venstre
Har opnået karakteren 12 på matematik B-niveau.

PERSON B: til højre
Har opnået karakteren 12 på matematik A-niveau.

RÆKKEFØLGE: spørgsmål 4-5-1-2-3

Gruppe 3 og Spørgsmål 4: Regne med brøker

A0: Altså det er jo forkert det her.
B1: Ja, det må det være.
A1: De har bare glemt at finde fællesnævmer først. De har bare plussert tæller med tæller og nævner med nævner
B2: Altså, jeg tænker de ser det som to tal og ikke ét tal. En brøk er jo et tegn for ét tal. Så måske jeg vil starte dér og så bruge pizzaer eller et eller andet...
A2: Ja.
B3: At man ligesom tegner at.. *(der tegnes en cirkel som opdeles og skraveres)*, hvis vi nu tager 2/3 og skraverer det, så viser det at 2/3 betyder at der er den del. Jeg tror det er med at de ser det som to forskellige tal som de bare kan trække fra hinanden og lægge til hinanden. Det er det ikke.
A3: Ja.
B4: De skal se det som at det her det er betegnelsen for noget af en hel.
A4: Det tro jeg du har fuldstændig ret i.
B5: Så skal man jo så... Den måde jeg regner med brøker normalt er jo at jeg deler - deler den anden brøk op i, altså hvis man har syvende-dele og tredje-dele, så deler man altid syvendedele op i tredjedele på 21.
A5: Jo.
B6: Så ganger man med modsatte. Man kan sagtens vise eleverne at man kan dele tredje-delen op i halve så man får fjerdedele. Og så kan vi tegne denne her ovre, så tager vi en halv, og den kan vi dele op i tredje-dele, 1,2,3, hov vi skal vist skravere den der også. *(der tegnes yderligere en cirkel mere som opdeles i 6 felter/"slices"og 3 af dem skraveres.)*
Så tænker, jeg når først de har tegnet det her, så må de begynde at tælle.
A6: Ja. så må de begynde at tælle hvor mange der er.
B7: Så skal de måske skrive nedenunder at det er 2/3, når nej vi har lavet det om til 4/6... og 3/6...(*brøkerne skrives under cirklerne.*) og så må de begynde at tælle.
Tanken er jo så at de kan se det, det er dem her de skal tælle (*der peges på tællerne*) - det er tællerne de tæller i stedet for i stedet for
A7: Ja, i stedet for nævnerne
B8: I stedet for nævneren. (*der tegnes og skraveres en cirkel mere så der er 6/6+1/6 - en lille ekstra "slice"er tilføjet.*)
A8: Ja, det tror jeg har ramt det godt. (*han kommenterer på tegningen af den lille ekstra "slice"*)
B9: Jo, Jo, det er en slices pizza
A9: Få dem til at se at det faktisk er noget af et tal, der er mere end en hel.

B10: Det der med at fokusere på at tælleren er antallet. Det tror jeg er en god måde at vise det på.
A10: Altså, sige 3 ud af 6.
B11: Få dem til at tælle - "hvor mange er det du har?- "4 ".
Altså, jeg ved ikke hvad klasse det er, men alligevel. Altså, jeg går ud fra det er brøker man regner med, i fjerde? femte tror du ikke?
Det er ikke noget problem, man kan sagtens tælle der er 4 og 3. Tælle det op her, nu har jeg bare lavet det om til en hel og en sjettedel. Det der med at det bliver en hel viser jo også en brøk - at det kun er en del af et hele.
A11: Ja. Lige præcis
B12: Altså ved at du får 6 her *(peger på cirklen skraveret som 6/6)*.
A12: Det tror jeg du har ret i. Få dem til at indse at det er hel - et stykke af en hel. Og hvad er tællerne og nævneren - forskellen på dem.
Jeg tror vi er færdige.

Gruppe 3 og Spørgsmål 5: Regne med decimaler

A0: Jamen, for det første - igen med brøkerne hvor man siger en'te hel og så går vi ned under én, der begynder vi at komme ned i fx fjerdedel med 0,25. Og vi kan også se det som procenter.
Hvis du har en hel her *(der tegnes en cirkel)*, nu får de lige en pizza igen - og du skal have denne her 0,25. Hvis du siger du ganger 8 med 1. *opdeler cirklen i 8 felter*
B1: Ja, det tror jeg også jeg ville have sagt - det der 8 med 1.
A1: 8 med 1, ja, så har du 8. Hvis du ganger 8 med 0,25 så er vi nede i de her "en fjerdedel"(*der peges på cirklens slices*). Der er det vigtigt, hvor mange gange går 0,25 op i 1, og det gør den de der 4 gange. Så kan man jo tage den fjerdedel af...*(en fjerdel skraveres i cirklen)*
Igen, det er vigtigt at forstå det der med at når du ganger med 1, så bliver det hel, når du ganger over 1 så er det lige pludselig mere.

B2: Ja, $1 \cdot 8$ det er altid 8, kan man sige. Altså én gang otte. Men hvis du har..
A2: 0.25 del af noget, det er 25 %
B3: Jeg tænker bare, hvis du har sådan noget som en halv, så har du en $\frac{1}{2} \cdot 8$. En fjerdedel er ikke noget man bruger så meget til daglig. Altså en halv af 8.
A3: Ja, det ville nok være nemmere.
B4: $\frac{1}{2} \cdot 8$, det kan man ret hurtigt finde ud af, det må være 4.
A4: Ja.
B5: "Hvordan skriver man 1/2?"Jo det skriver man som 0,5. "Hvad står 0,25?"Det er så 1/4.
A5: Ja.
B6: Det kan vi... Måske er det farligt at bruge delene, for nogle brøker, nej, nogle decimaler er svære..
A6: Ja, ja, selvfølgelig.
B7: Det er en god måde at forklare det der med lommeregneren på.
A7: Ja
B8: Altå, hvis du har, hvis det er under 1, så har du ikke 1 gange. Hvis du ikke kan sige 1 gange 8, så må de bliver mindre end 8.
A8: Ja, lige præcis. Så er vi nede i halve eller tredjedele osv. Meget mindre. Vi snakker jo faktisk procenter her, er måske bedre at komme ind på
B9: Det kunne det sagtens være. 25 % af 8, så kommer vi væk fra at gange, gør vi ikke det?
A9: Øh... Om vi kommer væk fra gange?
B10: Ja, altså du ganger det jo.. Jo selvfølgelig hvis du skriver det om til procent.
A10: Så det er decimaltal
B11: altså 25 % $\cdot$ 8. Det kunne man godt.
Herovre, altså med det dividere - det er jo lidt... det er bare lidt sværere... Men igen, fordi den ikke findes så meget i virkeligheden. Ligesom når vi så på det med brøker.
A11: Ja, lige præcis.
B12: Men, jeg synes stadig. Hvis vi deler 8 med 1, så får jeg det hele.
A12: Hvis du så deler 8 med 0,25...
B13: Hvordan forklarer man det? Det er det...
A13: Vi har faktisk lavet den. Det er den med, hvis du har, hvis vi nu har 3 hele... *(der tegnes 3 ens firkanter*
Vi lavede den bare ikke med decimaler, tallene
B14: ja, men med brøker
A14: Øh.. hvordan var det?
B15: Var det ikke bare den hvor vi havde halve her

A15: Jo, hvor vi fyldte den op med kopper. Og der kunne man gå lidt ind under den samme - med at vise hvor mange kopper der kan være i den her
B16: Altså hvis du havde 8 af dem der (*der peges på firkanterne - der henvises til beholdere*) og så havde du 0,25 i hver (*i hver kop, som blev lagt ned i beholderne*).
A16: Ja, Lige præcis, så viser det
B17: Men det giver ikke nogen mening. Så ganger vi i stedet for.
A17: Ja. det er rigtig. Det har du ret i.
B18: Ahrg. Jeg tror ikke vi kan bruge det dér. Jeg tror vi er nødt til at sige - hvis man starter med den halve... Hvis du har 1, igen hvis du tager 1, ligesom herovre så giver det mening (*der peges på gangestykket*).
A18: Ja
B19: Hvis jeg deler 8 med en.
A19: Så er der 8
B20: Hvis jeg deler 8 med mig selv - så får jeg det hele selv.
Hvis jeg... det er bare svært at udtrykke det..
A20: Ja.
B21: Hvad hvis vi nu siger: "jeg har delt det med en anden, og jeg får 8, hvor meget var der ialt?"
A21: Det kunne man godt.
B22: Så var der 16.
A22: Ja, men hvis det så var 4.
B23: Hvis jeg har delt.
A23: Ja det kunne du godt
B24: Hvis jeg har delt det med tre andre, så det bliver 4 ialt, og jeg fik 8, hvor meget var der så ialt.
A24: Ja, hvad så hvis du fik alle deres.
B25: Ja, hvor meget har vi tilsammen
A25: Det kunne man godt. "Hvor stor del fik jeg?". Men jeg tror stadig den er svær at forstå.

B26: Men det man ser på det er jo så: "hvor stor en del fik jeg?"Jeg fik 0,25 %, så kan vi bruge procent dér.
A26: Ja, det kunne man godt. "Hvor stor en del fik jeg?", men jeg tror stadig den kan være svært at forstå.
B27: Den er svær at forstå - det er den.
A27: Det er ikke ligesom at du har 8 æbler og du skal have dem ind i 4. Nu er det jo så den anden vej.
B28: Ja.
A28: Men jo, jeg tror det er en rigtig god idé alt det er med at der skal være 4 og jeg havde 8, hvor mange var der så ialt.
B29: Ja. Jeg fik at vide at jeg, altså lave en historie over det, jeg fik udbetalt 100 kr, eller sådan noget, og fik at vide at det var overskuddet, og vi var 8 der skulle have det udbetalt, hvor stort var overskuddet så?
A29: Ja.
B30: Det har så været, altså så bliver det 12,5. Altså $100 : 12,5$, så bliver de 800 ialt.
A30: Ja.
B31: Især den der overgang fra at der er et antal, altså som med brøker, og så til at decimaltallene. Det synes jeg ikke at vi kan komme udenom for 0,25 har - er rigtig svær at oversætte til virkeligheden. Eller, 0,25 er fint nok, men mindre decimaltal, mere komplicerede decimaltal har meget færre, eller opstår færre gange.

A31: Du tænker på at man ser dem færre gange. På den måde ja.
B32: Altså hvis man tænker på 0,31
A32: Det ser man aldrig.
B33: Det er meget sværere. Men jeg tænker at hvis man får det, altså konceptet, på plads at hvis det er mindre end 1 så bliver det større fordi vi ser på hvad der var før vi dividerede.
A33: Ja.
B34: Ja, så kan man også...Men okay, så kan vi regne med tal under 1, dividere med tal under 1.
A34: Hvad? **B35:** Når vi først får konceptet på plads så kan vi gøre det med alle tal.
A35: Ja, ja, selvfølgelig.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 3 og Spørgsmål 1: Ens brøker

B1: Jeg tror, her er det vigtigt at tænke på hele nævneren, fx hvis du har to pizzaer - vi tager det lige igen fordi det er fantastisk.
B1: Jo. Jo.
A1: Ja, 9 stykker cirka (*der tegnes en pizza som deles i næsten 9 stykker*). Der er det vigtigt at tænke på at hvert stykke er større, jo mindre nævneren er, fordi den skal være delt i mindre stykker,så hvis du har 3/4 her *(der tegnes to pizzaer mere og de skraveres)*og 8 ud af 9. Der kan du se at stykket der mangler til sidst er meget mindre, så det er jo ikke det samme vi kigger på.
B2: Ja, hvis du får dem til at tegne det, så vil det blive tydeligt at de ikke er lige store.
Jeg tænker måske at...(*(der peges på elevens påstand)* at eleven kan... eleven gør noget rigtigt. Han gøre begge ting i både tæller og nævnere. Hvis han gangede, så ville det være rigtigt.
A2: Ja, så ville det være rigtigt.
B3: Men jeg tænker at hvis man tegner det op, så giver det også meget mere mening at forklare hvad der ligesom er at gøre. Hvis du så får eleven til at skulle tegne - hvis du nu tegner 9/8.
A3: Ja.
B4: (*(der siges noget som er svært at tyde...)*)
"Hvad så hvis du bare sætter streg over det hele og ganger med 2 i både tæller og nævner", eller ganger med 5. Det er selvfølgelig lidt meget at skulle, så er vi oppe på 15-20 liter, men altså gange - altså vise hvad der sker når man ganger med 2. Man kunne måske få dem til at tegne det ved siden af, og så skravere det i deres... (*der tegnes på et andet papir to cirkler hvor der skraveres lige meget, den ene har bare dobbelt så mange slices.*)
A4: Og så se at det er det samme, når du ganger med begge.
Men, hvordan med plus? Altså det er jo. Ja, jo, det er et godt udgangspunkt at tage, for man skal jo finde den samme, hvad hedder det, man skal finde den samme nævner i sidste ende, så det er måske en meget god måde at gå til dem på, for at vise, at hvis du ganger op, så får du det samme. Til gengæld...
B5: Du skal finde en brøk der er lig med 3/4, så er det ønsket at eleven skal gange. Eleven har forstået noget rigtigt ved at gøre det både i tæller og nævner. Vi er bare nødt til at vise eleverne at det skal være gange.
A5: Gange op, ja.
B6: Jeg tænker at hvis man bare har den her og så deler det op (*der peges på cirklen fra tidligere*
A6: Altså, hvis man bare har 1/4 der *(der tegnes en cirkel som deles op i fjerdedele)*
B7: Ja. Det der med at dele den, og så bagefter snakke om gange, det synes jeg faktisk er en god idé.
A7: Ja, og så sige hvis du ganger den med 2, så kommer der 8 stykker. Så skal du også gange 3 med 2 så du har, så du har de der 6 stykker. *(cirklen fra før får nu dobbelt så mange stykker)*
B8: Så vil man kunne se at det er det samme.
A8: Så er det lige pludselig...
B9: Og så måske lade eleverne gøre det med... altså gange med 3...det bliver noget...lad dem regne det ud, så det er tydeligt for eleven at uanset hvad eleven gør, når de ganger på begge sider af tæller og nævner, så bliver det konstant.
A9: Ja. Det viser også at man reducere brøker.
B10: Ja, ja, ja. Hvad gør vi så med den der... (*der peges på cirklerne*), det er så det samme
A10: Ja.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 3 og Spørgsmål 2: Sammenligne decimaltal

A0: Jeg vil sige, at det er en meget typisk fejl at bytte rundt på pladserne.
B1: Ja, selvfølgelig er 45 større end 5.
A1: Ja.ja. Man kan sige det vigtige er betydningen af pladserne på tallene, en'ere og ti'ere. Hvordan vi lige skal vise det, det ved jeg faktisk ikke lige. Ud over at fortælle.
B2: Det jeg kan se det er at man flytter kommaet én tak til venstre, så man får 5 og man får 4,5. Det vil eleverne bedre kunne håndtere. Hvad er størst af 5 og 4,5, fordi at selvfølgelig er 5 større end 4.
A2: Altså rykke kommaet en gang til højre.
B3: Til højre netop... Ja. Jeg havde ellers skrevet venstre.
A3: For at vise...
B4: Jeg tænker at 4 og 5 - selvfølgelig er 5 større end 4 - også 4,5, fordi de ved godt at 4,5 ikke er helt 5, vel. Så tænker jeg bagefter kan vi altid vende tilbage til, "men hvad så", altså hvis vi ved at hvis vi dividerer eller hvis vi ganger på begge sider med 10
A4: Mmh
B5: fx, så vil forholdet - hvis den ene er større før vil den også være større bagefter, og så se på 0,5 og 0,45.
A5: Tror du de vil forstå det?
B6: Jeg ved det ikke helt. Jeg kunne tegne videre og så sige 50 og 45.

(*tallene skrives:*
5,0 4,5
0,5 0,45)
50 45

"Hvad for en er så størst?"Og så gå tilbage til 0.
A6: Der kan man også vise pladsens betydning.
B7: Ja, det er rigtig nok.
A7: Ja, jo længere til venstre det står, jo større tal er det, på en eller anden måde. Jo, det kunne godt være det er det. Hvis du rykker kommaet jeg tror ikke du skal ud i gange.
B8: Nej, ja det er måske farligt.
A8: Ja, det tror jeg bliver farligt.
B9: Så rykker vi kommaet.
A9: Hvis du rykker kommaet engang til venstre **B10:** Så kan vi kommer til dén dér. (*(der sættes ring om 50 og 45)*
Hvad er størst?
A10: Den tror jeg viser det godt.
B11: Så kan man også trække 5 fra, så der kommer til at stå 45 herovre og 40 herovre (*(tallene skrives ned)* og så gøre det til kommatal og så sige 0,45, og 0,4 altså 0.40.
A11: ja, det kune vi godt. Vi kunne også.. selve decimalet i stedet for bare at skrive 0,5 og 0,45, så kunne du også lige vise "men der er faktisk 0 på", så det er 0,50 eller 0,45.
B12: Så gøre det 0,50 og 0,45.
A12: Ja for at vise..
B13: .. at jeg bare har trukket 0,05 fra.
A13: Hvad?
B14: Altså heroppe trækker du 5 fra, her trækker du 0,5 fra.
A14: Jeg tænkte mere bare for at vise at det er 0,50
B15: Problemet er jo bare at man kan også sætte nul på derovre, og så får du bare 450.
A15: Ja ja, så skal du sætte et mere på 5. Så skal du måske i virkelighedenlære dem at nullerne efter de betyder faktisk ikke noget.
B16: Nej.

A16: Igen. Tilbage til pladsen betydning. Det er det, der er vigtigt og lære.
B17: Ja. Jeg tænker pladsen betydning har de fået banket ind her (*(der peges på de nedskrevne tal)*, og lære dem at det er samme betydning. Det har jo samme betydning, det er bare hvor henne vi ser det - på hvilken side af kommatallen man har.
A17: Ja.
B18: Det der med at sætte nul på i hvert fald - det giver mening. For nuller macther herovre.
A18: Ja, ligesom for at matche antallet af cifre.
B19: Ja.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 3 og Spørgsmål 3: Hvor mange tal

B1: Lad os starte med decimalerne. Lige for hurtigt. Altså det er måske... jeg ved ikke helt. Altså man kan vise dem at, jamen 0,7 ja, den ligger da imellem, men 0,79 den gør også og 0 komma osv.
B1: Hvis vi holder det i femte-dele og i tiende-dele så er svaret rigtigt. Jeg ved ikke om jeg ville have sagt det med heltal og så vise dem at der ligger et kommatal imellem et heltal.
A1: Ja, det kunne man også - starte med at gøre det simpelt.
B2: Altså 1 og 2 (tallene skrives ned med stort mellemrum)
A2: Ja. Lige præcis
B3: Og der er 1/2, og det ved de, og det kan vi så skrive ind, og så kan vi fylde den ind med interval - 0,25 - det kan de også gøre. Og så tror jeg måske jeg vil gå til den dér (*der peges på tallene 0,4 og 0,8 i opgaven*) og så, jamen, hvis vi ser at det her er gældende mellem 1 og 2 - er noget lignende så ikke også gældende imellem...
A3: Ja, lige præcis.
B4: ... 0,4 og 0,8, for det kunne nemlig sagtens have været *(der skabes en ny talrække mellem 0,4 og 0,8 lige under den anden)*
A4: 0,5 og 6 og 7 *(tallene skrives ind på talrækken)*
B5: Men det der med hvis man ser at 0,5 og 0,25
A5: Ja, så må der også ligge noget imellem
B6: ja, så må der også være - hvad så mellem de to. Man kunne faktisk skrive dem op med fire ind. Hvis du får 0,75 ind dér *(tallene skrives ind i den først talrække)*. Det får du automatisk med 0,75, og så 0,8 og 0,4. Ja, så hernede, mellem 0,8 og 0,4, så vil 0,75 være dér.
A6: Ja. Hvad med brøken?
B7: Hvad med brøken?
A7: Den synes jeg er svær at forklare
B8: Altså, man kunne lave den om til decimaltal.
A8: Ja. Det kunne man godt.
B9: Altså sige 2/5 er det samme som 0,4 og 4/5 er det samme som 0,8 (*tallene skrives op over hinanden)*
A9: Surprise!
B10: Ja, det er helt vildt. Så kunne man...
A10: Så kan man vise at der er så mange tal imellem
B11: Så vil det blive 0 komma..., fordi her kommer. Det de de kommer frem til er 0,6 - det er det der ligger imellem 0,8 og 0,4 **A11:** Ja.
B12: Men, Det er lidt aktuelt at sige "hvad så"
A12: Nej, de har lige siddet med 0,6 og 0,7 også og 0,5 og sagt at der er jo også imellem
B13: Ja, 0,5 hvad svarer det til i brøker? Det svarer så til 1/2 ($\frac{1}{2}$ *skrives under 0,5 ved siden af de andre brøker og tal fra før* .
A13: Så den er også imellem?
B14: Ja.
A14: Men på en eller anden måde så er svaret rigtg - som du snakkede om.
B15: Altså jeg tænker at hvis du havde det på plads at du kan gange i både tæller og nævner, at det gør det en del nemmere. Det ved jeg ikke om man har i femte?
A15: Jo, det er der i hvert fald nogen der vil have. Det havde vores 6.klasse i hvert fald.
B16: Fedt. Men så har vi i hvert fald mulighed for at gøre meget mere. Så kan vi jo gange i både tæller og nævner, så har vi 10.
A16: Ja.
B17: Hvor mange ligger der så imellem 4/10 og 8/10. Der må så være mange flere.

A17: Der er pludselig flere.
B18: Og så kan man vise at det er det samme.
A18: Ja. Lige præcis.
B19: Man skal passe på med ikke at få lavet.. De kan godt finde på at lave kommatal oppe i tælleren.
A19: Ja, det kan de godt finde på, så det er $\frac{2,5}{5}$
B20: Altså man er nødt til at lave tal som svarer til 2/5 og 4, sådan så du ganger op.
A20: Ja, altså starte med den dér (*der peges på brøkerne i opgaveteksten*) og vise dem at det svarer til det samme. Vi har lige siddet med - og der sagde du der var tre tal imellem *(imellem 0,4 og 0,8)* og så kun ét tal dér (*(mellem brøkerne)*
B21: Det er det at der faktsik er uendeligt mange tal når de først kommer ud i det. Brøker er bare sværere at..
A21: Vise det med...
B22: Ja, og omsætte, for det tager bare meget længere tid.
A22: Ja. Gange dem op, det vil være en god måde at vise dem på.
(*Nu er tiden gået.*)

A.4 lærerstuderende - interview 4

Transkription af pilotstudiet
Dato: 6.januar 2016

person a: til venstre
Har opnået karakteren 4 på matematik A-niveau.

person b: i midten
Har opnået karakteren 12 på matematik A-niveau.

person b: til højre
Har opnået karakteren 10 på matematik A-niveau.

rækkefølge: spørgsmål 3-4-5-1-2

Gruppe 4 og Spørgsmål 3: Hvor mange tal

A0: Jeg tænker på. Det der er nemmest at forklare det er den her mellem de 0,4 og 0,8. Fordi det kan godt være at det er sværere at skrive 0,41 ligger imellem 0,4 og 0.8
B1: Vi kan se her at I princippet har de jo holdt sig inden for positionssystemet. De har egentlig en vis form for forståelse for det. Det er hverken gået under eller over, men de er inde imellem dem. Så den del har de forstået.
A1: Så er der så det med at der er tal imellem, og der siger du så at det vil være nemmere at tage udgangspunkt i decimaltal.
B2: Ja, fordi så kan man tage udgangspunkt i en lineal. Altså tage en lineal og dele den op.
A2: Ja. Der er en klar visuel forståelse.
C2: Det kan jeg også godt lide den vej.
A3: Det er helt klar den nemmeste måde at gøre det på, og så kunne man måske lave nogle pizzaer også.
C3: Lave nogle hvor der er i femte-dele
B3: Der er det ligesom vores video dér, for der skal vi jo yderligere lave den op i flere dele, altså få flere stykker
B4: Jeg tror vi er nødt til ja,
A4: Det tror jeg vi skal have helt konkret med pizzaer og så skal få 2/5 og så 4/5 og så lave en med 3/5 også, og så vise at der findes pizzastykker som ligger imellem
B5: Nå ja... tredje-dele... (*der tegnes en cirkel som opdeles og skraveres som 3/5*)
C5: Og så skal de kunne se på forskellen. Det skal vi kun gøre ved at skære den i yderligere situationer. Ligesom den norske video, hvor de også får en forståelse for tiendedele.
A5: Men det er sjovt at dele den op i 8 - prøv at tegne den ved siden af
B6: Får jeg ikke for mange dér? M (*der tegnes en cirkel som opdeles og skraveres som 4/8*)
A6: Og så vise hvad for nogle tal der ligger imellem. Fire, fem ottendedele.
C7: Det er nok nemmest at starte med at vise på lineal. Tror du ikke?
A7: I hvert fald det med decimaltallene.
C8: Den måde de forstår det.
A8: Det er så konkret med en lineal.
B8: *(der tegnes en lineal)*
A9: Ja, måske skal vi tage 100 cm. **C9:** Ja, så jeg tænker måske meterstokken vil være god.
A10: Ja!

B10: For der er man jo nødsaget til at bruge.. Der ved man jo at der er centimenter. Der kan du se du kan opdele den ydgerligere.
C10: Jo, lige præcis.
B11: Så de får en forståelse for det også. Så får de også det med ind.*(linealen får tallen om og 1m meter påskrevet og der tegnes små streger/inddelinger af linealen)*
C11: Jo, Enig.
B12: Men så også lige at forstå koblingen mellem decimaler og brøker så hvis de nu har svært ved den ene så kan de omskrive det til den anden.
C12: Jo.
B13: Hvis de hjælper folk med at oversætte det på den måde.
C13: Det er måske mere naturligt for eleverne at tænke, netop, at der er mere end et tal der ligger imellem 2 og 4.
B14: Altså de har lært rækkefølgen? I 5.klasse der er der også nogle situationer... Der er de også stadig i et tidligt stadie. De har nok - de har lige lært brøker i 3. og 4., måske, eller minds 4., måske.
C14: Ja.
B15: Det er jo ikke fordi det er forkert det de har svaret jo.
A15: Nej, nej.
C15: Ja.
B16: Men også når spørgsmålet - det lyder jo også - det er jo for at...
C16: Der er jo flere...
B17: Ja, men spørgsmålet er jo også et meget bredt spørgsmål. Det beder om hvilke tal der ligger imellem. Det er en form for en "fælde"for at fange de elever som ikke har fået hele pointen med. Det er jo så dem alle sammen her.
C17: Det er jo det de siger...
B18: I fællesskab så, må det være. Så det vil sige, at det er jo en meget god måde lige at finde ud af om de har forstået det. Hvis de skal komme med alle tal, skal de jo blive ved.
A18: Jo.
C18: Det kan jeg godt se, det du siger dér.
B19: De kan jo ikke...
C19: De har ikke lært at regne det hele.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 4 og Spørgsmål 4: Regne med brøker

C1: Ja, men jeg ser at de gør det at de plusser tal sammen i tælleren og plusser tal sammen i nævneren. Og de trækker fra på samme måde.Og det er jo forkert.
B1: Der er tale om en misforståelse ja. Brøkers egenskaber. Hvordan de repræsenterer dem.
C2: Det der er forkert er sådan set at, jeg tror ikke de har forståelsen af hvad de der brøker er, så jeg tror de har brug for en forståelse af hvad 1/7 er og hvor stor 1/3 er.
B2: Jeg tror også de skal have forståelsen for, hvad hvert tal repræsenterer og hvad tælleren repræsenterer og hvad en brøk er. Det er jo dele af noget.
A2: Det er en god idét. Det er især nævneren, som er det vigtige, hvor det ligesom er tælleren..
C3: Jeg tænkte på en plade Toms chokolade. Prøve at dele den op og vise hvad der sker hvis man skulle..
B3: Eller en guldbarre.
A3: Eller lagkage igen.
C4: Lagkage!
A4: Finde ud af om man helst vil have 2/3 eller om man vil have en halvdel.
C5: Ja. Det er også bare at prøve at vise nogle regneregler de kan forstå.
B5: Men hvordan finder man ud af det her...(*der læses opgaveteksten*).... hvor mange elever... Er vi enige om at det skal være en klassegennemgåelse?
A5: Ja, men jeg tror vi skal have det konkret. Det er meget abstrakt det der med én toendedel og to trejde-dele.
C6: Jeg tror bare de vil have godt af at se det.
A6: Helt sikkert. Det er noget med at de får en forståelse - Om det skal være 4/7-del pizza, eller 1/3.
C7: Vi har brug for at få det der rykket over. Jeg tror ikke de får noget ud af bare at sidde og regne flere og flere tal
B7: Så får de et facit og sådan noget. Det går slet ikke - så skal vi tage fat om det.
A7: Men det kunne også være sjovt at få nogen, altså ud fra det her, og så spørge dem om de vil have,altså - det er jo noget fusk, og så sige om de vil have 2/7-dele eller 1/3.
C8: Ja.
B8: Så hvis de siger 2/7, så vil, altså, så kunne de lettere finde ud af hvor stort er det næste stykke chokolade.
B9: Så er det lige som den der med at man forandrer sin verden, virkeligheden, altså man vil ikke blive snydt.

(*De har ikke mere at sige, men opfodres i stedet til at skrive deres strategier ned.*)

B10: Jeg tænker egentlig det der du kommer med Jeppe var meget smart - hvad man helst vil have. Man vil jo ikke bliver snydt, så det kræver en form for forståelse for det.Det kan være et penge-eksempel, renter.

Gruppe 4 og Spørgsmål 5: Regne med decimaler

A1: Jeg tror at det nemmeste det er i hvert fald at det med at gange først. For det kan godt være svært at dividere med et tal der er mindre end 1, altså forstå at det giver mere. Men det er nemmere at gange en pizza (*(tegner cirkel der opdeles i 4 stykker)*).
B1: Er det ikke den der vi havde på et tidspunkt, hvor vi har den med tallinje.
C1: Det tænker jeg også
B2: Altså hvor mange gange du har de dele. Hvis vi har 8, så er det hvor mange gange det sker, altså hvor mange dele du kan lave op til 8. Det er jo sådan vi skal forstå det, når du ganger med noget der er mindre. Det er, ligesom at gange med 1/4. Hvor mange dele kan du dele 8 op i, delt op i 4.
C2: Hvad?
B3: Hvis du har 1,2,3,4,5,6,7,8, *tallene 1-8 opskrives foroven i et sildeben* og så ganger du det med 0,25. Så vil det svare til hvor mange gange du kan få...altså, nu skal jeg lige tænker mig om... det er jo fjerde-dele.
A3: Ja.
B4: Så det er jo så små inddelinger.. Og hvor mange gange det kommer til at få mere. Altså nu tænker jeg på division
A4: Jeg forstår det stadig ikke lige helt...
B5: Altså, jeg tænker på division lige nu.
C5: Altså det jeg tænker på er at vi kan lave sådan et tælletræ dér

(*der tegnes:*

4	8	16	24	32
0,5	1	2	3	4

)

Hvis man bad dem om at sætte nogle tal op på en række og så sætte nogle tal ind. Så kan de godt se at det bliver større, 24, og så bliver det 32, og så bagefer få dem til at gøre... tage nogle tal nogenunder, det kunne jo så være 1/2 fx, så bliver det 4, og så bagefter tegner en graf og ser om de ikke kan få noget ud af sammenhængen mellem tallene. Og så ud fra tænker jeg man måske kunne forklare hvordan det kan være. **A5:** Jeg synes stadig vi er oppe på et meget abstrakt plan. De har brug for at sidde og kigge på nogle pizzaer, sidde og kigge på nogle helt små ting.
B6: Tror du ikke også de har mistforstået det med, altså det... Det husker jeg at når man mulitplicerer så bliver tallet større, det er den regnefejl der er, eller det er den huskefejl. De tænker hver gang man ganger med noget, så skal den gerne blive større. Det er der den ligger.
C6: Ja, men ikke altid. Når man ganger med noger der er mindre så bliver det mindre.
A6: Men det er jo netop samme problematik stadig med ikke at forstå tælleren og nævneren i en brøk. Ellers er det jo simple talforståelsen, og jeg tror at det virker stadig meget abstrakt.
C7: Det kan jeg godt at se at det gør.
A7: Det er jo sådan noget med at sige, prøv at hør her er en 25 øre, hvis det er.. hvis det er 25 øre... hvis du har 8 af dem, hvor mange kroner har du så?
B7: Ja, det er faktisk rigtig. Det er et godt eksempel.
C8: Ja, det er et godt eksempel
B8: Ja, fordi det er jo bare gentagen addition
A8: Ja, det tænker jeg. Det er, det skal være mere simpelt endnu.
B9: Den der med hvis du har 8 stykker 25 øre. Lad os tage udgangspunkt i noget nemmere, hvis det skulle være, så skulle det være 50 ører.
A9: Det er der i hvert fald gange i.
B10: Hvordan vil vi så forklare division?
C10: Er vi enige om at vi først skal... De skal være fuldstændig klar på, hvad det vil sige at gange med mindre før det giver mening at fortælle dem noget om dividere?

A10: Ja!
B11: Det tror jeg...
C11: Fordi ellers så... du kan ikke give dem den samme information
B12: Nej, så vil det begynde...
C12: Så vil det begynde at blive grimt. Når man så er færdig med det, så kunne man måske kigge lidt på det dér (*der peges på noget på papiret, efterfølgende kigger de alle lidt på papirene*)
B13: SÅ skal vi bare have en hel masse 25 ører.
C13: Masser af 25 ører? God idé!
B14: Eller lave tændstikker, eller, det kan jo være.
A14: 25 ører er bare så gode fordi det der 0,25. Altså vi kan også sagtens lave pizza. Sige...
C14: Skal det hele tiden være pizzaer?
A15: Nå, altså chokolade kiks eller et eller andet, det er ikke så...
B15: Vil I så ikke forklare... hvordan vil I forklare den med divisionen?
C15: Nå vi kommer til divisionen.. øhm.. Jeg havde egentlig først tænkt noget - denne her form for gange (*henviser til sit udfyldte sildeben*). Hvis vi benytter os af det i divisionen, så kan vi måske bruge denne her inddirekte.
A16: Men jeg tror altså, det er at lave lidt udenom samtidig, fordi de ved hvad der sker når man ganger og dividerer. Så kobler vi de sammen og så sige at når man ganger 8 med 25 ører, det giver 2. Så vil man altså også kunne vende den om og sige 2 divideret med
C16: Jeg tror, du kan ikke bare sige...
B16: Det er for abstrakt!
C17: Det tror jeg er for abstrakt.
A17: Tror du?
C18: Ja, det tror jeg. Så tror jeg alligevel..
A18: Hvis vi starter med at sige - altså hvis vi har 2 gange 2, det er lig med 4, så ved du at 4 divideret med 2 det er lig med 2.
B19: Eller tage fingeren for - hvad skal du have for et tal for at få 4?
A19: Jeg tænker, at det man kobler sammen, at der sker det samme når man ganger med 2. Du får resultater, så tager du resultatet og dividerer det med 2, så rammer du dér hvor man sluttede
C19: Startede!
A20: .. Hvad sker der hvis man tager 2 gange 3, det giver lig med 6, divideret med 3, det giver lig med 2.
(*regnestykker skrives op:* $2 \times 3 = 6$,
$6 \div 3 = 2$, *og der sættes ring om de to 2-taller*)
Hvad sker der så hvis jeg tager 0,25 ganger med 8, det er lig med 2, så hvis jeg tager 2 divideret med 8 (*skriver op:* $0,25 \times 8 = 2$ *og* $2 \div 8 = 0,25$).
C20: Kan du ikke lave den anden udregning
A21: Jo, det kan jeg godt. 8 gange med 0,25 det giver 2, 2 divideret med 0,25, (*skriver op:* $8 \times 0,25 = 2$ *og* $2 \div 0,25 = 8$) . Vi tager den samme rejse .
B21: Den samme rejse tilbage, tur retur
A22: Men det forudsætter selvfølgelig for at kunne det dér (*de udregner der lig er lavet*) at man har styr på pizzaer med gange, eller 25 ører.
C22: Jeg synes den er lidt svær.
B22: Altså man kunne lige så godt også tage fat om brøker, for det er det samme. Vi kan stadig ikke komme uden om det.
C23: Men, men, nu er det også indskolingen det her, ikke?
A23: Jo, du kigger vel på decimaltal i de små klasser?
B23: Det tror jeg faktisk ikke man gør.

(*aller sidder lidt og kigger op opgaveteksten*)
Når han er forvirret over lommeregnerens svar, hvad vil vi så fortælle ham? Skal vi bare sige til ham at lommeregneren virker og så bare være kynisk?
C24: Nej! Vi kan ikke bare sige at lommeregneren virker.
B25: Lad os prøve at lade ham regne efter og se at det virker.
A25: Ja, man kunne sagtens lade ham prøve at regne den der "rejse tur retur"(*der peges på udregninger fra lige før*)

(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 4 og Spørgsmål 1: Ens brøker

A1: Skal jeg starte? Det minder lidt om de pizzaer dér som jeg bliver ved at bringe på banen på gang på gang på gang.
C1: Er vi enige om at de to brøker ikke er det samme?
A2: Ja
B2: Ja, det har jeg skrevet
C2: Så det er vi enige om at det skal vi meget tydeligt vise?
A3: Jeg tænker ellers på at blive ved med at tegne. Hvis man nu har 3/4, hvad kan man så gøre? Så kan man dele dem igen, så kan man se at det stadigvæk er det samme der er tegnet på.(*to cirkler er tegnet og skravet så det passer med 3/4 og 6/8*) Hvor mange felter er det her? Det er 8, hvor mange har jeg farvet, det er 6.
C3: Bare sådan at du laver flere.
B3: Er det ikke også igen det eleven har misforstået - lægge til, trække fra i stedet for at forlænge?
C4: Jo, det har jeg også skrevet. Det bruger kun en regel, hvordan man regner med brøker - man kan lægge det samme til på begge sider uden at der sker noget. Men det er jo ikke det de gør. De laver jo om på brøken, og det er det de skal vide,at
A4: De skal vide hvordan man forlænger en brøk!
C5: Ja! Og de skal nok grundlæggende igen have noget grundlæggende forståelse.
A5: Det tænker jeg også, ja.
C6: De skal kunne se det for sig visuelt.
B6: De har jo taget fejl at det. Når man lægger 5 til for oven og forneden, så er det fordi de prøver at huske det, men de husker forkert. Hvis de havde haft en forståelse for det, så havde de ikke haft et problem. Altså bliver det større begge steder så..
C7: De har bare prøvet at lære udenad, i stedet for at forstå det.
B7: Så går der lige et par måneder, så kigger de lige på det, og så tror de at de kan huske det.
A7: Ja, men..
B8: Det er også fordi de tænker når man plusser, så bliver noget større,og når man lægger 5 til så gør de det der og også dér og så bliver kagen større,(*tegner to cirkler og skraverer så der er* $3/4 \neq 8/9$) og så bliver felterne større. Men det er jo det de har misforstået. At det de gør det faktisk ændrer hele brøken ved at gøre det sådan.
C8: Ja.
A8: Så der er også hvis de har fået at vide at de bare må gøre det samme over og under brøken, så..
B9: Det er jo også forkert...
A9: Ja, så er det jo bare..
B10: Der er jo ikke så frie tøjler.
A10: Så der skal være noget med at forlænge dem, hvordan man gør det, eller forkorte også.
B11: Og så har de vel også problemer med det der med at trække fra og dividerer.
C11: Ja, det tror jeg!
B12: Fordi de har vist... Det er lighed mellem brøker, så der er... det er også godt hvis det er forkert, at de kan se... de har jo også brug for sådan noget som lighed med brøker, eller at gøre mindre eller større, ved at, fx hvis de nu har et svar, som jeg skal angive i en kortest mulig form, eller reducere en brøk. De har 10/6 eller sådan noget. Så kan de selv se at det er den samme brøk der er derovre, de har bare gjort den pænere at se på. Hvis du har 100 over 200, det er det samme som 1/2.
A12: Ja, jeg tror måske også, at man kunne vende en om. Hvis det der er det samme, så må man kunne lægge 5 til foroven og forneden, så kan man også trække 5 fra for oven og

forneden, og lige pludselig så har man -2 over... Hvis dette egentlig burde gælde, så forklare hvad der mere også burde gælde, og så få eleverne til at se at det giver ikke nogen mening at man kan lægge til som man vil.
B13: I det her eksempel der ville det jo være 6/8 som eleven har tænkt på, eller det er også et svar. De beder 4.klasses elever om at finde brøker som er lig 3/4 og så er der én der har svaret det dér (*peger på opgaveteksten*)
De andre fra klassen ville nok starte med at svare 6/8 osv. osv. Den elev dér, som har svaret her, skal også kunne se hvorfor det er 6/8.
C13: Måske få eleverne i klassen til at forklare det for hinanden.
B14: Men det er også farligt, når det er introducerende stof.
C14: Men i hvert fald, hvis man lige lader de første fire til fem svar på den
B15: I hvert fald, der viser de i hvert fald at det ikke er det samme (*peger på de tegnede cirkler fra før*)
Er der mere vi skal?

Gruppe 4 og Spørgsmål 2: Sammenligne decimaltal

A1: Chokolade
C1: Meterstokken
A2: Jeg tænker også lige præcis meterstokken
B2: Jeg tænker igen at det lige så meget er at få styr på brøkerne først. Hvis det her er en fejl, så går jeg næsten også ud fra at de også har taget fejl i det andet.
C2: Jeg sagde bare meterstokken pga. de vælger at give dem kommatal
A3: Tænker du starte med at alle finder ud af hvor vi er henne på meterstokken? Hvis vi nu skulle sige 0,4 hvor det så ligger henne?
C3: position
B3: Det er igen positionssystemet. De har jo tænkt, eller nogen har tænkt at jo flere tal der er, derfor er det større, men igen hvor er positionen - det er 1/10 og det er hundrede-dele, og tusinde-dele.
A4: Bare fordi der står 0,5. Der kunne jo sagtens stå 0,500 dér.
C4: Ja.
A5: Og det er jo ikke større, eller det der står bagefter er jo bare for at gøre det endnu mere præcist. Mellem 0,4 og 0,5 der er der altså også noget.
B5: Der er jo altså også igen flere tal imellem her, imellem de to (*der peges på tallene 0,5 og 0,45 i opgaveteksten*). Der jo også 0,475, det betyder jo ikke det er større fordi der igen er tre tal. Altså hvert tal har en...
A6: Jeg tænker måske også på at vi skal gøre det nemmere og spørge hvor ligger 0,4 henne? Og så sige 0,45, det må så være imellem.
B6: Lige imellem
C6: Så det skal vi tegne med meter - skal vi så...skal vi så ikke starte ud med at vi har 0,4 og 0,45 og 0,5 som de skal finde på..
A7: Ja. Lad os tage udgangspunkt i meterstokken. Men jeg tror måske vil det ikke engang behøve at være en meterstok, for det er måske sjovere at starte med en blank stykke papir og så selv sætte dem ind hvor de tror at det er...
B8: Jaeh
A8: Fordi så er de nødt til at tænke lidt mere over det!
B9: Ja. Præcis, hvis vi kan komme til at prikke til dem med svaret. Hvorfor er det du mener den er større.
A9: Så bare sige "her er 0 og her er 1 - hvor vil du så tegne 0,5 ind og hvor vil du tegne 0,45 ind"
B10: Men så kræver det også at man er i en klasserumskultur hvor de andre ikke bryder ind, eller de andre ikke svarer.
C10: Ja, ja.
B11: Hvorfor har du tegnet tre meterstokke?
A11: Det er fordi så skal de tegne 0,4 og 0,5 og 0,45 ind
B12: Men er det ikke også bare farligt at give dem et et-tal, for hvad nu hvis de tror den er større?
C12: Det er fordi det er en...
B13: Hvis de nu tror..
A13: De ved at det er 0,5, så det er mellem 0 og 1.
B14: Men hvis de ved det så vil de også have svaret at den dér var større (*dvs. 0,5*)
A14: Jeg tror når de ser det dér...
B15: Men spørgsmålet er skal man også give dem det dér (*der peges på de tre tegnede meterstokke*) eller skal man lade være...

C15: Det skal man nok til at starte med?
A15: Det tænker jeg også
B16: Hvis man nu har et interval fra 0 til 1000, hvor tror I det vil være. Hvis de så tror det betyder 45, så tror de den her hernene (*0 og 1000 skrives med stort mellemrum på papiret og der peges på det*). Det er imellem det her stykke herinde.
C16: Så er det sådan flere ting du vil lære
A16: Så er det også et helt andet problem
B17: Men det er jo positionssystemet de har misforstået.
A17: Ja, ja, men så tager mindre og gør det større
B18: Men hvis vi ikke gør det der større så har vi gjort dem en bjørne... (*meterstokken*), eller så hjælper vi dem jo næsten til svaret. Og det er jo fint nok, men den fejl skal jo næsten heller ikke komme igen. Altså de skal selv - det er noget de selv skal have frem i hovedet tænker jeg.
A18: Men jeg tænker det her bare skal være så simpelt så det ikke kan gå galt.
C18: Ja
B19: De skal kunne vide at når der stå 0 komma et eller andet foran, så er det fordi det befinder sig i det interval som er... Men når vi giver dem en meterstok så føler jeg også næsten at vi har givet dem halvdelen af svaret.
C19: Det har vi også, men så tænker jeg at...
B20: Så finder de selvfølgelig frem til det. Det gør de jo... (*der tales i munden på hinanden*). Giv dem en masse flere tal
A20: Give dem flere tal?
B21: Altså lege med en masse - giv dem brøker også hvis det er det.
A21: Ja, det næste de kan tegne er det der 0,475.
C21: Hvad for nogle tal tænker du på?
B22: Vi kan også give dem 8/6 eller... Altså alle tal.
A22: Ja, så skal de lave flere forskellige...
B23: Så skal de selv lave det på en tallinje.
A23: Det kunne man sagtens - mellem 1 og 10.
B24: Ja, altså afgrænse det.
C24: Vi kunne sagtens have nogle falske brøker med også
B25: Ja. Der er også igen, så skal vi jo også differentiere her imellem eleverne jo. Nogen vil jo svare ja, men andre har ikke forstået det.
C25: Der kunne man måske lave noget..
B26: De skal jo ikke kede sig undervejs, der skal man jo også lave noget... Så kunne man måske lave grænsen større, eller give flere uægte brøker.
C26: Jeg ved ikke om man kunne lave sådan noget med kasser (*tegner en tallinje med 10 kasser under til at "udfylde"med tal*). Skrive nogle tal op. Og så skal de selv skrive dem ind på tidslinjen.
A26: Tallinjen
C27: Ja. På tallinjen selvfølgelig.
A27: Det jeg tænkte på - men det er måske også at gøre det for nemt. For jeg tænkte på at lave én fra 1 til 10 og så selv skrive: "tegn de her ind". Så skal de selv finde ud af hvor det er henne. For de dér kan man jo egentlig godt gætte sig til (*kasser fra før*)
C28: Hmmm.. oKay så..
A 28: For eksempel cirka 2, det må jo så være dén for det er den der ligger ved to (*snakker om kasserne*)
C29: Man kan man så sige at 2 det er her og bagefter komme til det du siger fordi den er næsten dømt til at blive fyldt med fejl

B29: Det er godt at lave fejl
(*Nu er tiden gået.*)

A.5 SEMINARIESTUDERENDE - INTERVIEW 5

Transkription af pilotstudiet
Dato: 6.januar 2016

PERSON A: til venstre
Har opnået karakteren på matematik A-niveau. Undervisningserfaring: 1 år i 4.-10.klasse og 2 år på C-A niveau.

PERSON B: til højre
Har opnået karakteren på matematik B-niveau. Undervisningserfaring: 1 år i 7-9.klasse

RÆKKEFØLGE: spørgsmål 2-3-4-5-1

Gruppe 5 og Spørgsmål 2: Sammenligne decimaltal

B1: Hvad har du skrevet?
A1: Jeg har skrevet at jeg vil spørge eleverne "hvorfor er det ene mere korrekt end det andet? til at starte med, for ligesom at skabe den diskusssion.
B2: Ja.
A2: For at skabe en refleksion, og så kan jeg rigtig godt lide at elever diskuterer det med hinanden, for det giver udbytte.
B3: Ja. Totalt hårde linje
A3: Derefter så vil jeg snakke om ti-talssytemet.
B4: Ja.
A4: Komme ind på hvad regler der gælder for det
B5: Okay.
A5: Og så vil jeg gå ind på: "men gælder de også for komma"
B6: Ja.
A6: Altså efter kommaet, og så vil jeg prøve på at lede deres diskussion derhen af. Altså hele tiden skære...hjælpe dem.
B7: Ja.
A7: Og så til sidst - nu noget jeg ikke at skrive det færdigt, men det er noget med at tegne nogle linjer på tavlen. Nå det har du også gjort. (*der er tegnet en tallinje mellem 0 og 1*) Så vil jeg tegne streger, lige præcis.
B8: Ja.
A8: Og høre - hvor ligger den ene, hvor ligger den anden.
B9: Ja. Jeg har så skrevet her også at jeg tror de er så små størrelser at nogen gange kan det skabe forvirring når man snakke nul komma et eller andet. Og så hvis man egentlig fjernede det dér nul komma, altså så på selve tallet, så tror jeg at 45 er jo uanset hvordan man vender og drejer det større end 5, så det er dér hvor det kan knase. **A9:** Ja.
B10: Og så tror jeg også. Altså jeg har skrevet at ud over at tegne den linje her, så komme med forskellige "små ting ind"(*der laves håndfagter - der menes måske bare små tal mindre end 1*). Det er noget med at runde op og ned
A10: Ja.
B11: Hvornår er det man runder op og hvornår er det man runder ned. Hvis vi nu kun snakker om ét ciffer. Hvor ligger de så egentlig henne. Således så man havde det på plads, for hvis man så begynde at runde den her op, så vil de være det samme.
A11: Ja.

B12: Så vil de have en fortåelse for det. Det kan også godt være, alt efter om, hvis de går helt tabt her, så den del hvor de yderligere tal bliver placeret fx 0,43 og 0,...
A12: Ja. Ja. Det er fint. Jeg vil evt. også prøve at stille dem et spørgsmål: "om 0,5 var det samme som 0,50"(*udtalter: nul komma fem nul, hvor andre tidligere har udtalt det nul komma halvtreds*).
B13: Ja.
A13: Det ved de ikke er det samme, men det får dem til at diskutere hvorfor det er det samme, og hvorfor det ikke er det samme. Det vil give dem en forståelse. Bagefter vil man kunne sætte 0,450 og så spørge om det er større end det andet.
B14: Ja... Ja.
A14: Og så evt. prøve med andre tal.
B15: Jeg tror visuelt der giver det mere mening for folk nogen gange, end at skulle se bare på tal
A15: Det har du ret i, det har du ret i. Men jeg tænker også på at lave det senere, når det var at du har fået en forståelse. For så vil jeg ligesom kunne spørge.
B16: Ææhh.. Hvordan fremmer vi deres læring (*sidder og læser på opgaveteksten*). Jeg tror efter den her så havde jeg plottet en masse tal op på tavlen, eller på et eller andet stykke papir og lade dem...
A16: Og så skulle de sætte streger under
B17: Ja. (*tegner på opfordring en tallinje fra 0 til 1 med 10 inddelinger*)
Hvad siger vi så.. 5....
A17: der mangler lige et komma - 0 - 7 (*én af inddelinger på tallinjen*)
B18: Og så tror jeg egentlig at man...
A18: Skal sætte en masse
B19: Ja, hvis vi havde den her 0,45, så vil vi egentlig bare have hevet den ned dertil hvor den anden, hvad hedder det, 0,5. Dernede. (*tegner streger fra tallene og ned til deres placering på tallinjen*)
A19: Ja, og så 0,3.
A20: Ja. Præcis. 0.3, og 0.33. En masse tal
B21: Det er så 1/3 og det vil sige så, aarhg.. den sætter vi dér. Ja, er det ikke...
A21: Jo, så tænker jeg at man kunne.
B22: Jeg tænker når det nu er 5.klasse, så..
A22: Men kunne evt. også tage den over i mælk måske og få noget visuelt på fx 1/2 liter mælk.
B23: Nåh ja.
A23: Så kunne man sige hvor meget vil den anden så svare til, hvis det her er en 1/2 liter mælk. En kande eller sådan noget, måske. Det kommer an på hvilken klasse det her.
B24: Det kunne man ja.
A24: Forstår du det ja.
B25: Ja.
A25: Jeg tænker bare, den dér vil jeg bruge hvis man skulle komme ind på andre metoder.
B26: Ja. Jeg tror bare den er lidt diffus. Så rammer du i hvert fald flere elever.
A26: Ja.

(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 5 og Spørgsmål 3: Hvor mange tal

A1: Altså jeg tænker... forklar din idéer til hvordan du kan formidle det til eleverne (*der kigges på opgaveteksten*)
B1: Jeg har skrevet at det her med at brøker ikke altid er nemme for folk at arbejde med. Det er så diffust så man forstår det ikke.
A1: Ja.
B2: Jeg ved ikke rigtig om det er pizza vi skal lave. Men hvis man nu omregnede det her så vil man jo også se at det er det samme. 2/5 er det sammme.
A2: Ja. Ja... Okay, ja. Det var ikke sådan jeg havde tænkt.
B3: Okay. Det var hvad jeg tænkte, at hvis man skulle omregne det, så ville man se at det var det samme, og at er de her antal tal i mellem? Men jeg kan godt forstå deres logik i at hvis de kun kigger på brøker så ligger der et enkelt hop imellem med tal, og så ligger der flere tal, altså de dér tre hop inde imellem.
A3: Ja.
B4: Jeg tror bare de har tænkt det lineært, de har simptelthen tegnet det op. Hvor ligger de så henne og hvor mange tal ligger der så inde imellem - hvis man skriver det på den måde
A4: Ja. Lige præcis
B5: For at afhjælpe det, så var det at jeg havde skrevet at de skulle omregne det for, at..
A5: Ja. Jeg har slet ikke fået tænkt over det. Jeg har ikke lige fået lavet connection at de skulle se det var det samme tal.
B6: Det er heller ikke sikkert de skal det.
A6: Men jeg så det meget sådan, at de var meget fastlåste, for bare mellem 2/5 of 4/5 der mange tal.
B7: Ja.
A7: Bare hvis man forlænger den én op, så kommer man pludselig op på tre.
B8: Ja. Men det dér tror jeg bare de er låst. At den ene står der.
A8: Men det er det. Jeg tror de er for fastlåste i deres forståelse. Derfor tænker jeg de skulle - som du fx siger med pizzaer - de skulle introduceres til noget dagligdagsmatematik.
B9: Ja.
A9: Med pizzaer, med delinger, for ligesom at få en idé om at der er mange tal imellem det her.
B10: Ja.
A10: Men også at det kan skrives over til (*der peges på kommatallene i opgaveteksten*)
B11: Ja.
A11: Hvordan kan man ellers undervise dem i det?
B12: Kunne man ikke bruge nogle mælk?
A12: Jo. Det kunne man nok godt.
B13: Hvis man nu, du ved - hældte det er op, altså fysisk.
A13: Ja.
B14: Kan du ikke huske. Kan du huske den kop dér, hvor de havde lavet med kopperne, hvor Lasse havde lavet: "Hvor mange antal kopper kan der være i én kande vand?"
A14: Det er rigtigt
B15: Og så fjernede man så nogle af koppperne. Altså, det kan der være i den ene, og den anden kan der så være 3 kopper i ud af 5. Hvad er forskellen her. Så egentlig have her ved siden af den anden kan der være i milimeter. Så kan det se at der jo egentlig det samme, det er bare skrevet på hver sin måde.
A15: Lige præcis.
B16: Hvorfor tegner du sådan en mælke til en kande vand. (*tegner en mælk der hældes op i en*

kande)
Visuelt der kunne man jo fjerne den. Kan du huske da vi havde de dér..
A16: Ja, det kan jeg godt huske.
B17: posted de dér selder.
A17: Ja, jeg kan godt huske det. Det var yderst smart.
B18: Øh...
A18: Nu har jeg i hvert fald tegnet noget. Ellers kunne man jo bare lave noget med en plade chokolade som vi gjorde.
B19: Ja.
A19: Det var jo samme system som det byggede på.
B20: Ja, så kunne man her holde det op mod hinanden og så kan de lave en sammenligning. Jeg tror jeg vil have fundet et kop mded 200 ml, og så vil jeg øse op fra min 1 liter kande. Hvor meget kan jeg øse op, eller... Og så kan de visuelt se at der står egentlig på den kande at det er 0,4 og der er 0,8 vi har fjernet
A20: Ja. Ja. Det giver god mening.
B21: (*tegner 3 kander der er fyldt med hhv. 1 liter, og ca. 2/5 og 4/5*)
A21: (*laver en tallinje hvor 0,4=2/5 og 0,8=4/5 indtegnes*)

(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 5 og Spørgsmål 4: Regne med brøker

A1: Lad os starte med dig.
B1: Ja. Jeg tror bare vi har snakket så meget hele tiden, at de er så lineære. Altså at de hele tiden tænker i den her lige bane
A1: Ja.
B2: Og så tror jeg, at lige præcis brøker som jeg har skrevet ved nogle af de andre dér. Det er for diffust for dem, så når de er så låst af dem, så tror jeg bare de regner hen af. Og der er jo også nogle at brøkernes regnerregler der bare går hen, så hvis man ikke har styr på hvornår det er man må gøre det, så er det bare nærliggende at man altid kan gå hen af.
A2: Lige præcis.
B3: Tænker jeg bare.
A3: Jeg har skrevet at... jeg tror ikke eleverne kan se det visuelt for sig, for så vil det meget hurtigt give mening. Det er også det der er min strategi for næste. Så vil de meget hurtigt give mening at de IKKE er sådan dér. (*der peges på elevernes metode*).
B4: Ja, jeg var... det stod der nemlig ikke heroppe (*i spørgsmål b*), nu så jeg bare elevernes metode og så sidder jeg bare sådan lidt.. Men så kom jeg herned til er løsningen.
A4: Ja.
B5: Og det var nemlig at komme med nogle helt konkrete ting, chokoladen bl.a., eller pizzaen, lige bortset fra at pizzaen er dum når der er 7 pizzaskæringer.
A5: Ja, men altså. 2/3 + 1/2. Så vil jeg så spørge dem 3/5, det er jo mindre end en hel. Men nu står vi altså med mere end én, så det kan ikke være helt rigtigt.
B6: Ja. Yes. Jeg tror vi skal..
A6: Tegner pizza (*begge tegner to pizzaer og skraverer 2/3 og 1/2*)
B7: Uh. Så kan man koble dem sammen og så have lavet - kan du ikke huske "lær om pizza"med de dér nordmænd, hvor de prøvede at dele det op. Det er virkelig (*begge laver armbevægelser*)
A7: Jeg tror virkelig bare de har brug for at få en forståelse. Man kunne også godt regne.. Man kunne også godt lave regneregler med dem, men jeg tror det der vil give bedst vil være at lave pizzaer. Og derefter få nogle regnerregler de selv var med til at lave.
B8: Ja. Jeg tror faktsik. Jeg tror at for nogen, hvis det er ikke gav mening, så vil jeg yderligere have inddelt den i sjette-dele. Så man kan vise dem at... hvad mangler der... (*der tegnes to nye cirkler med 4/6 og 3/6 skraveret og det vises at det giver en hel pizza + slice*)
A8: Det vil også være min plan at inddele det-
B9: At inddele det i halve. Men jeg kan godt se det dér. Men jeg tænker hvis det er forståelse for hvorfor kan jeg smække de dér ting derover i. Hvad er det jeg helt eksakt gør. Så vil jeg netop få mine, hvis jeg så tæller dem sammen vil jeg få min hele pizza plus min...
A9: Ja. Jeg tror jeg er meget enig med dig i hvad jeg vil gøre. Derefter vil jeg prøve at få dem til at diskutere i klassen. Få nogle regneregler ind under huden.
B10: Ja.
A10: Hvor man ligesom ikke vil poste resultaterne foran dem, men hvor det ligesom er dem der skal være forskerne.
B11: Men heroppe der kan man ikke se hvordan kan jeg smække dem sammen (*peger på opgaveteksten*), men det kunne man hernede ved at inddele dem. (*peger på cirklerne*)
A11: Ja.
B12: Og så var der den anden opgave... Hvor det skal trækkes fra. Jeg tror egentlig at det er det samme man vil forklare
A12: Jeg vil gøre det samme. Og vil jeg sige, så vil jeg lave hvis der kommer en eller anden gut og skal have en tredjedel af pizzaen. Er det ikke pizza?

B13: Jeg tror jeg vil lavet et eller andet chokoladebar, hvor der tilfældigvis er én med 7 rækker.
A13: Ja. Så der er 4 rækker tilbage af dem.
B14: Ja, således at de netop kan, altså så giver det 21, hvorimod hvis du laver pizzaen, så er du låst i at du skal have 21 tals pizza du skal sidde og dele op, hvorimod..
A14: Åh ja, på den måde ja.
B15: Det kan de ikke abstrahere sig fra, men der findes jo nogle chokoladebarer der har 7 riller eller et eller andet.
A15: Du spiser for meget chokolade. Ja, men jeg var lige præcis ude i også at tænke at pizzaen, det bliver meget med 21 små slices.
B16: Ja.
A16: Så det kan du have ret i. Det vil nok bare fjerne forståelsen.
B17: Jeg tror altså opg. 2 ved hjælp af chokoladebar.
(*Nu er tiden gået.*)

Gruppe 5 og Spørgsmål 5: Regne med decimaler

B1: Jeg trooor at jeg vil..
A1: Det er ærgeligt at vi ikke har 25 ører mere.
B2: Ja.
A2: For så ville jeg sige at 8 personer har en 25 ører hver. Hvor mange kroner har de tilsammen
B3: Ja. Jeg er ude i den mælk dér.
A3: Nåh! De har jo deres skolemælk!
B4: Ja
A4: De er jo altid på 250 ml.
B5: Og så vil jeg tænke, hvor mange kan man.. hvor meget kan de være (*demonstrerer med armbevægelser at mælkekartoner hældes op i en høj cylinder*). Ved den første dér ($8 \cdot 0{,}25$) vil jeg det modsat, altså at jeg har så meget (*bruger faktor til at vise 250 ml mælkekarton*) og jeg skal bruge 8, hvad har jeg så i liter.
A5: Ja. Lige præcis. Og ved den anden vil sige hvis man nu har 8 liter mælk og de skal deles ud i 25.
B6: I de her små genstande.
A6: Ja. I de her små genstande. Hvor mange skal jeg så fylde op.
B7: Ja. Præcis.
A7: Alts det... Vil du tegne.
B8: Iiih.. tak. Hvad var det jeg sagde - den dér
A8: $0{,}25 \cdot 8$
B9: Små millimeter, hvad hedder de. Skolemælk. *(skriver metoden i stedet for at tegne)*
A9: Skolemælk ja.
B10: Ja
A10: Og den anden det var så 8 liter. Skal jeg tegne.(*tegner en skolemælk på 0,25 L og skriver der er 8 af dem. Tegner derefter en stor cylinder med 8 liter mælk i.*)
B11:... med kartoner... (*skriver stadig metoden ned*)
Så... Hallo gav det mening at vi skal sidde og skrive eller tegne? Du sidder og tegner så fint... Så skal du have 8 af dem for at gøre det visuelt.... Du kan da ikke bare lave en 8 liter spand..
A11: Det kan jeg da godt.
B12: Okay.
A12: Har du aldrig haft en mælkejunge.
B13: HVad?
A13: En mælkejunge?
B14: Hvor mange liter er der i den?
A14: Den er der 12 i, nej 16... 25 måske
B15: Du må også gerne tegne på min så står vi lige.
A15: Nej..
B16: Jeg kan godt lide at du sad i et split sekund sad og overvejede det.
A16: Skal vi så prøve at finde på flere? Vi er meget enige.
de opfordres til at fortsætte da kun halvdelen af tiden er gået **B17:** I think we are done!
A17: We agreed
B15: Very quickly

Gruppe 5 og Spørgsmål 6: Ens brøker

B1: Yes, Jeg har skrevet at vedkommende har i hvert fald fat i noget rigtigt, men når man forlænger en brøk så skal man gange.
A1: Ja.
B2: Eleven lægger til. Og så tror jeg egentlig jeg visuelt igen vil sige forståelsen igen. Tegne det op på en linje og sige hvor ligger vi egentlig henne? Og giver det så det samme.
A2: Ja.
B3: Så de selv måske kan få lov til at lægge nogen til efter deres teori og så prøve at omregne dem til hvor de så ligger henne. Så de kan komme frem til at det ikke er det samme, at det svar er galt. De er ikke selv lig hinanden, så det er ikke det samme.
Sådan tænker jeg lidt at det er, og så gøre nøjagtig det samme igen, hvor vi bare omkonverterer. Når vi så ganget med noget, var det samme tal som de er kommet frem til at de gerne vil sidde og regne med. Og så prøv at gange i stedet for - er det så egentlig det samme når vi har ganget den.
A3: Ja.
B4: Ja.
A4: Ja. Jeg synes at det er et rigtig rigtig kreativt svar. Jeg tænker at nu havde jeg læst det som om det er klassen, men jeg tænker den her elev virkelig har tænkt over, eller i hvert fald har gjort sig nogle tanker. Og derfor vil jeg også udfordre ham på en måde.
B5: Ja.
A5: Jeg tænker han skal lige som føle succes ved at han har fundet noget han tror der virker, men jeg vil så prøve på at rette ham ind på det. Altså udfordre hans metode.
B6: Jeg tror jeg vil lade ham regne igennem andre tal og så lade ham prøve at regne det ud.
A6: Ja. lige præcis
B7: På den her skala. Og så se, men hov. Det ligger sådan set ikke det samme sted. Og så lade dem arbejde med de samme tal. Og så sige, men så lade os prøve at gange det i stedet for med det dér tal vedkommende har fundet.
A7: Ja, eller hvis du lægger andre tal til.
B8: Ja. og netop tage én og så igen modrenge det og sige hov!
A8: Ja.
B9: Og så egentlig få vedkommende selv til at: "hvad hvad det så egentlig lige vi fandt ud af?"Så det ikke er mig der siger det.
A9: Ja. Så der sker en refleksion.
B10: Ja. Hvor han forhåbentlig vil sige at når man ganger det er det at vi forlænger, og så der det det samme.
A10: Ja.
B11: Nu skal du tegne det.
A11: Nå. Jeg havde ellers skrevet at man bare skulle bruge et godt pizza eksempel.
B12: Ja.
A12: Hvor man så tager 3/4. Laver en pizza med 3/4 og laver en ,ed 8/9 og så prøvet at se om det er det samme.
B13: Jeg tror bare når vi bruger de der skæve tal. Jeg forstå godt hvor du vil hen af, men når vi bruger de der skæve tal som fx 9, så er det de færreste der sidder og skærer en pizza op i 9 stykker.
A13: Så kan du sige, men det du siger hvis du lægger 5 til foroven, fx, er det så det samme som hvis det var 1 eller 2. For så er du stadig nede på en pizza der er 4/5. Hvis det skulle være det samme. Det er lidt nemmere at skære en pizza ud i 5.
B14: Ja. Ja. Når vi fysisk har klippet dem så. Så man ligesom kan sammenholde

A14: Det var ligesom min plan eventuelt at bruge sådan en, det ved jeg ikke. Hvis det kun er en enkelt så vil jeg nok ikke gøre det, men hvis det er en helt klasse så vil jeg lave en transparent. Det var i hvert fald det jeg lige sådan sad... Så vil jeg have lavet en transparent og lagt dem ovenpå hinanden
B15: Ja.
A15: For at se om de begge er samme størrelse.
B16: Ja. Men når vi hele tiden skal have pizzaer så tror jeg også børn tænker et eller andet skåret i fjerdedele, ottendedele eller sjettedele. Det er jo de færreste der vil klippe de i niendedele.
A16: Ja.
B17: Det gør man ikke.
A17: Nej. Det kan du have ret i.
B18: Så jeg tror ikke jeg vil bruge ordet pizza. Men jeg vil nok have skåret det ud og sagt at her har vi 9 dele. og hvis vi har 8/9 så fylder det så meget (*der laves fakter*) og hvis vi har den herovre med fjerdedel og så lægge den op.
A18: Ja.
B19: Er det her det samme som jeg siger. Ud fra vores hypotese omkring hvor mange dele er der til én hel del.
A19: Ja.
B20: Det samme som vi lavede med chokoladen.
A20 Lige præcis.
B21: Hvis jeg nu skriver klippe klistre (*metoderne skrives nu ned*).
A21: Ja. Det tror jeg er en meget god idé.
B22: Klippe klistre
A22: Og lægge ovenpå.
B23: Ja. Lægge ovenpå. Se forskellen
A23: Skabe refleksion
B24: Og så sagde vi også det med: "lade eleven fortsætte ud af tangenten..."

(*Nu er tiden gået.*)

B
APPENDIX: GYMNASIEELEVER

Transkription af interview
Dato: 22.juni 2016

Varighed: 10-20 min pr. elev

B.1 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV1.5

Elevens procenttal: 43%

(1.a)
L1: I den allerførste opgave 1.a der bliver du bedt om at finde andre brøker som er lig $\frac{3}{4}$. Så oplister du tre brøker og de er helt rigtige. Så siger du, at det er fordi $\frac{3}{4}$ er forkortet i forhold til fx $\frac{6}{8}$. Hvad betyder det at være forkortet?
E1: At man dividerer dem, gør det ikke? Fx hvis man har nogen, så finder man, hvis der nu står 6 for oven, så skal man finde noget der både kan divideres i tællerne og nævneren.
L2: Så hvis du fx skulle forkorte denne her $\frac{6}{8}$ tilbage til $\frac{3}{4}$, hvad
E2: Tilbage til?
L3: Ja, altså du skal finde noget der er lig $\frac{3}{4}$
E3: Ja,Ja
L4: Så siger du $\frac{3}{4}$ den er forkortet i forhold til $\frac{6}{8}$. Hvordan kom du fra... Okay, det er sådan set ligegyldigt med at forkorte. Det jeg sådan set gerne vil høre det her: Hvordan kom du fra $\frac{3}{4}$ til $\frac{6}{8}$? Hvordan har du fundet det tal?
E4: Jeg tror jeg gangede dem, gjorde jeg ikke? Jeg gangede med to for oven og to for neden.
L5: Ja, med to i tælleren og nævneren?
E5: Ja,
L6: Ja, det var bare det jeg gerne ville høre. Det er fordi "forkortet"er fint nok at sige, men ved du hvad det vil sige?
E6: Men så har jeg bare ganget dem, så det bliver 6 for oven og så bliver det 8 for neden.

(2.a)
L7: Ja, lige præcis. Ja, nede i opg. 2a, der har du bare svaret at du skal omskrive fra decimaltal til brøk.
E7: Jeg nåede den ikke,
L8: Så du har simpelt hen ikke nået den?
E8: Nej, jeg nåede at gå i gang med den, men så forsøgte jeg: "hvordan er det nu man gør", og så viskede jeg ud, og nej.
L9: Har du nogen idé om nu, hvis man sådan lige hurtigt skulle gøre det?
E9: Nej, jeg havde bare tænkt, at man skulle gange det med 100 eller sådan noget, og så dividere det, men det kunne jeg bare ikke få til at passe på nogen måde, så jeg tænkte arggh..
L10: Hvorfor lige 100?
E10: I procentregning der plejer man at gange med 100 og så dividere
L11: Så du tænker at når man skal omskrive fra decimaltal til brøk, så er det ligesom procenregning
E11: Ja, og det tror jeg ikke det var, men det havde jeg også gjort hernede, og så passer det

egentlig. Det er bare fordi at så tror jeg altid at 100, hvis du fx tager en cirkel så har du også 100% og ikke bare ganget med 50 fx, så er det kun halvdelen.
Bemærk: Eleven har heller ikke løst opgaven med procentregning rigtig, men der vælges ikke at bore mere i dette, da eleven tydeligvis ikke har styr på teknikkerne

(2.b)
L12: Ja. Yes. Nede i 2.b der skal du sige $\frac{15}{4}$ det skal omskrives til decimaltal. Det har du heller ikke rigtig kunnet. Du har slet streget det over så du ved godt
E12: ja, jeg vidste godt det ikke var rigtigt
L13: Har du nogen idé om hvad er det egentlig man skal gøre for at få $\frac{15}{4}$ omskrevet til decimaltal?
E13: Jeg er sikker på at man skal dividere det.
L14: Ja.
E14: Og så skal man. Jeg var lidt i tvivl om man skulle gange det op bagefter, men man skal i hvert fald dividere det. Det skal blive til komma.
L15: Ja, hvad er det man skal dividere?
E15: Det er 15 og så. Jeg ved ikke om man skal finde to tal de begge to går op i, og så dividere dem ud? Det kan jeg ikke lige sådan helt...
L16: Kan man det?
E16: Nej, det kan man ikke. Jeg ved ikke hvad jeg har tænkt
L17: Men du vil dividere 15 med hvad?
E17: 4!
L18: Lige præcis. Kan du finde ud af at dividere to tal med hinanden.
E18: Ja, så jeg burde også godt kunne have løst det dér.
L19: Har du lyst til at prøve at dividere to tal med hinandne?
E19: Hvad skal det være
L20: Prøv at sige 15 divideret med 4.
E20: Nu udfordrer du mig jo, for dette er jo et ulige tal. Så bliver det jo et kommatal, gør det ikke?
L21: Jo, det gør det
E21: Fordi hvis du skulle gange det dér, så 4 gange 4 det er 16. Så bliver det jo så, det kan jo hellere ikke bare bære $3,5$, men så kan jeg nok ikke finde ud af det.
L22: Du kan prøve. Har du en måde du dividerer på? En algoritme du bruger eller?
E22: Jeg tror jeg vil gøre sådan her, så vil jeg sige 15 og så 4 og så vil jeg sige lig med (*tegner en klassisk "divisionstrappe"*). Så vil jeg sige 1 op i 4, det kan man ikke, så det er bare 4. Så vil jeg sige 5 op i 4 det er så 4 og så er der én tilbage, ej jeg kan ikke huske hvordan man skriver det op. Så er der i hvert fald én tilbage her. Ej, det går helt galt!

15|4 =
4 (1)
4

L23: Så du kan slet ikke huske det
E23: nej

(2.d)
L24: Det er helt fint. Så går vi bare videre. Nede i punkt 2.d der skal du omskrive (3.8%) fra procent til decimaltal, og der gør du noget med at gange med noget og dividere med noget. Kan du forklare hvad du gør.

E24: Altså 38, det er bare fordi så har jeg fjernet, så har jeg rykket pladsen én. Så har jeg ganget det med 10 og divideret det med 100 ligesom man normalt gør ved $(38 \cdot 10 : 100 = 3,8)$
L25: Ja, men når du har rykket den én plads...
E25: Det er bare for at fjerne det der kommatal så der står 38, fordi så når man ganger det op, så bliver det til et kommatal når man dividerer det ud igen. Forstår du hvad jeg mener?
L26: Ja, men her har du bare flyttet decimalet først, og så har du bagefter ganget med 10, så du har både flyttet decimalet OG ganget med 10
E26: Ja, det skulle jeg ikke have gjort. Jeg skulle bare have divideret det tror jeg.
L27: Jeg ved ikke om du kan se..
E27: Altså, skulle jeg ikke bare have divideret det?
L28: Her har du bare taget
E28: Nej, det bliver forkert uanset hvad, for det dér vil hellere ikke passe jo $(38 : 100 = 0,38)$.
L29: Man kan sige at du har startet med $3,8$ og så får du $3,8$ her i resultatet igen, så du får egentlig bare det samme ud af det.
E29: Ja. Jeg tror heller ikke jeg regnede på den, jeg tror bare jeg skrev hvad jeg tænkte.
L30: Det er fint nok, så du tænkte man skulle flytte kommaet for at få et tal man bedre kunne håndtere og så ganger du med 10 bageefter igen og så ganger du med 100. Er du klar over hvorfor du ganger med 10 igen? Var det en måde at sige at du havde ganget med 10 da du rykkede komma?
E30: Jeg tror at det var for at jeg kom fra $3,8$ og fik det op til 38, så tror jeg bare jeg havde tænkt
L31: at så ganger du med 10 for det.
E31: Ja. ..... Jeg kan overhovedet ikke huske hvad jeg har tænkt. Det er bare ud fra når man kigger på det.

(3.b)
L32: Her omme i 3.b der svarer du forkert og du argumenterer med at det er logisk. Og det synes jeg ikke rigtig om det argument at det er "logisk"især når du facit er forkert, så logikken holder ikke altid. Nogen gange skal der noget "matematik"til, nogen gange er "logik"ikke nok (*her nærmere forstået som elevens intuition!*)
E32: Nej.
L33: Men kan du forklare - hvad var det der var logisk for dig?
E33:
Hvis du kigger på de her brøker - hvilken er størst? $(\frac{7}{11} > \frac{4}{7})$ **L34:** Du mener at logisk er $\frac{7}{11}$ mindre end $\frac{4}{7}$
E34: Det er fordi jeg har tænkt at hvis man har fx en kage og den er indelt i 11 stykker. Det blev ikke pænt... (*Inddeler hurtigt en skitse af to cirkler "sådan cirka"uden at tælle præcist*)
L35: Det gør ikke noget
E35: Så, vent. Jeg kan faktisk godt se det, fordi så vil det her ovre $(\frac{4}{7})$ - det er mindre i princippet, fordi stykkerne bliver større og derfor er der mindre at tage af, hvorimod her, nej
L36: Det du siger er, hvis man skulle dele kagen i flere stykker så er der mindre
E36: Så er der mindre hvis man tager $\frac{7}{11}$, nej, jeg har skrevet $\frac{4}{7}$. Nej, hvad har jeg svaret
L37: Du har skrevet at $\frac{4}{7} >$ størst, for hvis man skal dele kagen i $\frac{7}{11}$ så er det opdelt i mindre stykker, så det er mindre.... Men... vi kan godt blive enige om at hvert af stykkerne er mindre.
E37: Men tallet i sig selv.
L38: Hvis du har 7 af de her mindre stykker, er de 7 mindre stykker så tilsammen større eller mindre end hvis du har 4 har de her stykker (*opdelt i syvende-dele*)
E38: De er større
L39: hvorfor? Du har ikke nogen anelse om hvordan man sammenligner brøker?

E39: Nej
L40: Eller hvordan du i en kage kunne gøre det på en måde, så du bedre kunne sammenligne dem.
E40: Jeg kan ikke huske det. Jeg tror det er derfor. Det var de I lavede i starten da jeg ikke var der så meget, og så tror jeg aldrig jeg har fået fuldt ordenligt op på det. Hvilket er min fejl.
L41: Det her er faktisk ikke gymnasiepensum.
E41: Nej, det er før det.
L42: Det er før gymnasiet. Men du har slet ikke nogen idé om hvordan du enten bare med tallene, eller i en kage kunne lave en reel sammenligning. Så det ikke bare er "logik"der lige gør at du "synes"den ser større ud?
E42: Jeg tror jeg vil bruge sådan noget tegning-agtigt noget hvor man kunne sammenligne dem.
L43: ja, og hvordan skulle du så gøre med de her tegninger?
E43: Så ville jeg farve dem efter sådan og så vil jeg se hvad der giver mest mening, tror jeg.
L44: Hvis jeg nu siger til dig, at der var en elev der gjorde det, altså farvede dem sådan her sådan cirka.
E44: Så skulle de bare have været lige store, så kunne man hvor der var mest tilbage.
L45: Hvis man farver dem sådan her (*Jeg skraverer cirka samme mængde af hver cirkel*) hvilken er så størst?
E45: Det er den der?
L46: Kan du visuelt se det?
E46: Nej?
L47: Pointen er, at de er så tæt på hinanden så der skal noget mere til end bare at farve dem og lige kigge på... Hvad kunne man gøre i de her kager for at man mere præcis kunne aflæse dem.
E47: Jeg ved ikke om man skal trække dem fra, eller regne med dem begge to på én gang.
L48: Nej, men vi går bare videre.
E48: Du får mig på dybt vand...
L49: Det gør ikke noget, jeg vil bare gerne vide hvad du tænker. Det er ikke fordi du skal vide det nu her, men jeg vil gerne vide hvad er det så du tænker når du ikke kan finde det rigtige svar. Hvad er det så du tænker i stedet? Det er dét der er interessant.
E49: Så skriver jeg bare noget, tror jeg.

(4.a)
L50: Okay. Vi kan jo kigge på 4.a. Du skal lægge to brøker sammen ($\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$), men det har du ikke nogen idé om hvordan man gør eller?
E50: Jeg tror at det jeg tænkte var at jeg ville gange på kryds og sige $2 \cdot 2 = 41$ og $3 \cdot 1 = 3$, men så tror jeg bare jeg tænkte at det var ikke rigtigt for det virkede for nemt.
L51: Så du kan slet ikke huske hvad det er man skal gøre når man skal lægge to brøker sammen? Du kan jo lige prøve at gøre det på papiret.
E51: Men skal man ikke finde noget der er ens hernede.
L52: Jo, vi skal have det samme nede i nævneren.
E52: Så hvis man tager 4 for neden i begge to.
L53: Går 3 op i 4?
E53: nej, 6
L54: Lige præcis, man kunne tage 6 i nævneren.
E54: Så man tager 6 og så tager man... (*nedskriver:* $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$)
L55: Kan du bare ændre nævneren som du har lyst til?
E55: Nej, skal jeg ikke sige sådan her.... (*nedskriver:* $\frac{2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$), er det ikke rigtig nok?

L56: Argh.. Du skal også huske at forlænge tællerne.
E56: Nå ja, de skal også ganges op. Det kan jeg faktisk godt huske når du siger det. Jeg har også brugt det i en aflevering har jeg ike?

(4.d)
L57: Det tror jeg. Vi kan jo prøve at kigge nede i 4.d. Der skal du dividere to brøker. ($\frac{2}{7} : \frac{26}{14}$)
E57: Ja. Det gik heller ikke. (*har svaret:* $\frac{13}{7}$)
L58: Nej vent, kan du fortælle mig hvad det er du gør. Hvordan dividerer man to brøker med hinandne? Det er ikke sikkert du kan huske hvad du gjorde, men så kan du sige hvad du vil gøre nu. Hvordan vil du nu dividere to brøker med hinanden? Hvis du ikke kan gennemskue dit svar her så prøv her på papiret at dividere de to tal. Hvad vil du gøre nu?
E58: Jeg tror, jeg ved ikke om jeg vil forkorte dem. Det vil jeg nok ikke. Så tror jeg, at jeg vil sige 26 op i 2,
L59: Ja så du vil starte med at forkorte brøken $\frac{26}{14}$
E59: Ja, jeg vil sige 26 divideret med 2 det er 13 og 14 divideret med 2 er 7.
L60: Ja, så hvad er det der er lig med $\frac{13}{7}$? Er det hele resultatet eller hvad er det der er lig med det? (*peger på elevens oprindelige svar som var* $\frac{13}{7}$)
E60: Det er den der brøk.
L61: Ja, $\frac{26}{14}$, lige præcis. Hvad vil du så gøre bagefter?
E61: Så vil jeg tage den anden.
L62: Kan du gøre mere ved den?
E62: Jeg kan forkorte den, nej det kan jeg ikke helt.
L63: Så nu har vi $\frac{2}{7} : \frac{13}{7}$. Hvad vil du så gøre?
E63: Så vil jeg tage dem begge to tror jeg, og så finde noget der er ens for neden, nej det har jeg jo allerede.
L64: Du kan slet ikke huske hvordan man dividere brøker?
E64: Nej.
L65: Det er helt fint.... Lad os prøve at gå om på næste side.

(opg. 5.b)
E65: Er der en side mere?
L66: Ja, ja, det var en lang opgave
E66: Dem der omme kunne jeg slet ikke få til at passe, Det skulle give sådan et eller andet... jeg havde en idé om hvad det skulle give, men jeg kunne ikke huske hvordan ($6,7 - 0,4321$)
L67: Du kan ikke huske hvordan man lægger decimaltallene sammen
E67: Nej, det er det der med regningsarternes hiarki, det kunne jeg ikke lige...
L68: ...huske hvad man skal... Altså, det du roder rundt i er lidt din
E68: Opstilling...
L69: opstilling, ja, og din brug af menter.
E69: Men jeg tror det er fordi vi har lært det på sådan et spøjs måde, hvis jeg har 6, så skal jeg tage 10 og flytte dem herover, og så har jeg kun 5 tilbage her, men så kunne jeg bare slet ikke få det til at passe da jeg så kom til det. Jeg ved ikke om jeg har fået byttet for meget rundt på det, eller hvad jeg har lavet.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10\,10\,10} \\ 6,\cancel{7}000 \\ -0,4321 \\ =6,2679 \end{array}$$

L70: Så flytte du over (*menter*). Problemet er måden du flytter over på. Kan du bare flytte fra 7 og flytte den tre pladser hen.
E70: Jeg tror det er fordi jeg har tænkte at så har jeg flyttet 10 herover (*fra 7-tallet og én plads til højre*), så skal den ikke være dér. Men så ved jeg ikke om jeg bare skulle have sagt 6, og så flytter jeg den herover fra starten af... Altså det ændrer vel ikke på svaret herfra? For det er jo 10 der kommer herfra, det er jo ikke noget jeg tager ud af 7-tallet. Det er bare noget jeg flytter.
L71: Ja
E71: Men jeg ved ikke...
L72: Så du tager noget fra 7-tallet her,
E72: Nej jeg tager noget fra 6-tallet, nej 7-tallet
L73: Nej, hvis det er 7-tallet du tager fra, så er der 6 tilbage. Så flytter du 10 herover **E73:** Ja, og så flytter jeg en tak mere.
L74: Ja, men problemter er når du tager her fra denne plads (*den første mente*), så er det jo ikke 7-tallet du tager fra længere. Hvor er det så du tager fra?
E74: Så tager jeg fra 3-tallet.
L75: Så det er herfra du tager fra (*peger på 3.ciffersøjle*), men det er ikke 3-tallet du tager fra. Du har lige smidt et 10-tal over,
E75: så det er ud af 13
L76: Ja. Nej, nej, du skal jo trække dem fra hinanden
E76: Ja.
L77: Det er det her med menterne. Du ved ikke rigtig hvad du skal med dem. Du har taget dem allesammen fra 7'erne og smidt over.
E77: Nå ja, det kan jeg godt se.
L78: Vil du kunne prøve at udføre divisionen nu her?
E78: Det ved jeg ikke, er det ikke bare minus?
L79: Division? Jo, jeg mener minus. Det er minus du skal gøre.
E79: Men jeg skal jo bruge 10 her henne (*ved det sidste ciffer*). Det er jo det der er mit problem
L80: Ja, så hvordan får du de 10 derhen?
E80: Så ved jeg ikke om jeg skal tage dem herfra (*peger på pladsen til venstre for sidste ciffer*)? Nej, jeg skal jo stadig tage dem herovre fra (*peger på syv-tallet*). Så vil jeg bare skrive 10 her. Men så vil jeg sætte dem her først, for at sætte dem herhen.
L81: Ja. prøv at sætte den dér først. Hvordan får du den så videre?

$$\begin{array}{r} \cancel{10} \\ 6,7000 \\ -0,4321 \end{array}$$

E81: Så vil jeg sætte en streg igen, og så vil jeg skrive den her, så sætter en streg og så flytter jeg den herover, så har jeg 10 og så det 9.

$$\begin{array}{r} \cancel{10}\,\cancel{10}\,10 \\ 6,7000 \\ -0,4321 \\ = \qquad 9 \end{array}$$

L82: Ja.
E82: Det har jeg også gjort deroppe
L83: Men hvad er der så tilbage her? (*peger på 2.sidste ciffer*)

E83: Så er der bare 2 for den (*menten*) er der ikke mere
L84: Er 10'eren helt forsvundet?
E84: Men jeg har jo lånt den videre.
L85: Så du tænker, at den slet ikke er der. Okay. Hvad tænker du så er der nu? Er der bare et nul nu?
E85: Ja. Så har der stået 10, så det er 8, eller hvad? Så gør jeg bare det samme som jeg har gjort dér.
L86: Ja, det du skal sige er, at der er 9 tilbage her, for du har lige lånt én derovre.
E86: Nå ja, ja,
L87: Og der er også 9 tilbage her, for du har lige lånt én derovre.
E87: Jeg tror jeg har forstået det...*regner lidt*... Så er der 9, nej så er der 6 tilbage her.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\;9\;10\;\;} \\ 6,7000 \\ -0,4321 \\ =6,2679 \end{array}$$

L88: Ja, så er der 6 tilbage der. Lige præcis.
E88: aha

(5.d)
L89: Jeg tror mit sidste spørgsmål skal være 5.dfor det er et meget stort spørgsmålstegn jeg har sat. Jeg kan simpelt hen ikke gennemskue hvordan du har fået facit. Du har ikke rigtig nogen mellemregninger eller noget.
E89: Nej, men jeg lavede ikke nogen mellemregninger, så jeg ved ikke hvad jeg lavede.
L90:Så jeg er meget spændt på hvordan du har fået det rigtige facit. Du har opstillet denne her divisionstrappe som du også prøvede på tidligere, og dér kunne du ikke finde ud af at gennemføre det. Derfor undrer jeg mig rigtig meget over at du er kommet frem til det rigtige facit og jeg kan slet ikke se dine udregniner

$$\underline{8}|\overline{\,0,24\,} = 33,33$$

E90: Nej, det forstå jeg heller ikke
L91: Også fordi - I måtte jo ikke have andre papirer til rådighed, så medmindre du har skrevet på bordet så er der ikke noget sted i margenen hvor jeg kan sige at du har lavet nogle kruseduller. Så jeg er meget meget spændt på hvordan du har fået dit facit
E91: Det ved jeg ikke. Jeg ved ikke hvordan jeg har fået det dér.
L92: Kan du have regnet det ud i hovedet?
E92: Nej, det tror jeg ikke.
L93: Også fordi du tidligere ikke engang vidste hvordan man skulle gennemføre en divisionsalgoritme. Du har slet ikke nogen anelse om det? For jeg ved ikke hvor det der tal kommer fra.
E93: Jeg ved ikke hvor det kommer fra.
L94: Men det er jo helt korrekt (*bortset fra at der er afrundet*), så jeg ved ikke hvordan det rigtige svar kan dukke op på den måde uden...
E94: Jeg ved det virkelig ikke
L95: Du er begyndt at udføre din division (*har visket ud at det skulle give* $0,42$)
E95: Men det er ikke noget i den retning tror jeg ikke. Jeg ved ikke
L96: Så du ved slet ikke hvad du har gjort? Det er ikke sådan at du er blevet inspireret at sidemanden eller et eller andet? Det er ikke fordi... lige nu spørger jeg bare fordi jeg virkelig

undrer mig over hvordan du kan komme frem til et rigtigt svar.
E96: Jeg ved det ikke. Jeg kan ikke svare dig på det, og jeg kan hellere ikke lige tænkte mig til, hvordan jeg har regnet det ud...*tænker længe*...Nej, det ved jeg ikke. Jeg melder pas.
L97: Det er mest det med at du ikke har flere mellemregninger
E97: Jeg kan ikke svare dig på det.
L98: Det er ret imponerende hvis du lige i hovedet har indset at så har vi 2 og 3 og det giver 6 og så har vi 2 i rest og det giver 24.
E98: Jeg er lige ved at prøve mig frem og tilbage, men jeg ved ikke. Jeg kan godt få det første tal frem, men jeg ved ikke hvordan jeg har gjort med de sidste. Det kan jeg ikke svare dig på.
L99: Skal vi så ikke stoppe her.

B.2 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV1.6

Elevens procenttal: 71%

(1.b
L1: I opgave 1.b der har du slet ikke rigig reduceret $\frac{-68}{12}$. Hvis du skulle prøve det nu på papiret her, hvordan vil du så reducere $\frac{-68}{12}$.
E1: Altså jeg skal lave det mindre.
L2: Ja.
E2: Det er nemlig det, jeg var i tvivl, jeg tror nok jeg gik i stå dér hvis jeg husker rigtig. Fx det er jo -68 og fx, jeg ved godt fx at 2 går op i tallet, men jeg vidste ikke, jeg var i tvivl om jeg kunne reducere det sådan.
L3: Ja, når der var et minus på.
E3: Ja, så jeg bare kunne sige $\frac{-34}{6}$
L4: Ja,
E4: Ja, jeg tror det er derfor jeg var i tvivl og så valgte jeg ikke at skrive noget.
L5: Okay, du kan jo prøve at skrive det du lige sagde.
E5: Ja, så jeg siger $\frac{-68}{12} = \frac{-34}{6}$
L6: Ja, Kan man reducerer det mere?
E6: Ja, det kan man godt, det er bare et eksempel - jeg har ikke rigtig gennemtænkt det her.
L7: Det er helt fint
E7: Lad os tage 2 igen: $\frac{-34}{6} = \frac{-17}{2}$
L8: Lige præcis. Kan det reduceres mere?
E8: Nej
L9: Nej, hvorfor ikke?
E9: Fordi der er ikke noget - tallet selv går ikke op i -17 og der er ikke andre tal der gør.
L10: Ja, lige præcis. HVad er 17 for et tal?
E10: Et ulige tal
L11: Ja?
E11: Et negativt ulige tal.
L12: Jaeh.. det er et primtal, så der findes faktisk ikke mere der går op i det.
E12: Så jeg kunne bare have gjort sådan dér.
L13: Ja, men det der minus forvirrer dig, kan jeg godt mærke.
E13: Det forvirrer mig meget. Ja, jeg var i tvivl lige dér.
L14: Ja,
E14: Så jeg vidste ikke man kunne gøre det, alså dividere på begge sider, altså dividere med 2.

L15: altså når der er et minus på
E15: Ja, ellers ville jeg have gjort sådan dér.
L16: Når det der minus forvirrer dig, er der så andre måder man kunne håndtere det minus på? Kunne man have gjort noget andet ved det dér minus?
E16: Kunne man have gjort noget andet ved det?
L17: For at løse opgaven, så du ikke blev forvirret af det.
E17: Hmm...
L18: Kunne man placere minus et andet sted?
E18: Ja, øh.. sådan placerer det over for et andet lighedstegn.
L19: Neej, hvor må man placere minustegnet henne i en brøk? Kan du huske det?
E19: Foran brøken?
L20: Ja. Havde det gjort det nemmere hvis du havde placeret minus foran?
E20: Ja, så kunne jeg godt.
L21: Ja, så havde du haft en brøk uden minus i, som du kunne have forholdt dig til.
E21: Ja.

(3.b)
L22: Jo mindre brøk, jo større er den.
E22: Står der det?
L23: Jo mindre en brøk, jo større er den.
E23: Altså, det vil jeg mene at det er, at, jeg tror nok jeg mente det sådan mere talmæssigt
L24: Ja.
E24: Og det er så fx $\frac{1}{2}$ er større end $\frac{1}{[}3]$
L25: Ja.
E25: Så jeg tro nok, at det vil jeg mene, for jeg har nemlig, altså, da jeg gik i 1.klasse - eller på det tidspunkt hvor man lærte brøker der fik jeg nemlig at vide, at at hvis man har svært ved at gennemskue det så kan man gætte det på denne her måde, fx hvis vi siger (*nedskriver brøkerne* $\frac{1}{2}$ *og* $\frac{1}{[}3]$
L26: Ja
E26: Så fik jeg at vide, at $1 + 3$ det giver 4 og $1 + 2$ det giver 3 så det tal som er mindre er det største. (*lægger tæller og nævnere sammen i brøkerne hver for sig - jeg forstod dog ikke hans forklaring i situationen*
L27: Ja, så det er nævneren du kigger på?
E27: Ja, jeg tror at jeg tænker alt for hurtigt
L28: Ja, for spørgsmålet er om man kan sige det, når de også har noget oppe i tælleren. Du kigger kun på enhedsbrøker i dette tilfælde, og så kan man sige at så er det jo, jo mindre en en nævner, jo større er tallet i sig selv.
E28: Ja.
L29: Det kan man ikke helt her. Men du løser sådan set opgaven fint nok. Det er mest din forklaring som er lidt forvirrende
E29: Ja, det kan jeg godt forstå.

(4.e)
L30: Nede i 4.e der siger du, at "når man ganger to brøker med hinanden så vil resultatet altid være større end de to brøker". Kan du komme på et eksempel hvor du ganger to brøker, hvor resultatet bliver større?
E30: Øh.. ja, jeg skal bare lige have et eksempel, ja, hvis jeg ganger... lad os tage...altså to brøker?
L31: Ja.

E31: Øh.. så taget vi fx, så tager vi bare to tredjedele, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$, så bliver det jo bare.
L32: Du må gerne bruge papiret hvis du vil det.
E32: Ja (*skriver brøkerne ned:* $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$, så kan jeg reducere det, fordin 6 går op i 12
L33: Ja,
E33: Det giver bare $\frac{1}{2}$
L34: Ja, øhh.. er den... Jeg bad dig om at finde nogetr som var større end de to brøker du oprindeligt havde. Er $\frac{1}{2}$ større end de to brøker du oprindeligt startede med?
E34: Om fx?
L35: Altså du ganger $\frac{2}{3}$ med $\frac{3}{4}$ og så er spørgsmålet - er resutlatet så blevet større, hvis vi nu siger resultatet var $\frac{1}{2}$, er det så større end de her to brøker?
E35: Nej, så er det lig med.
L36: Er den lig med $\frac{3}{4}$?
E36: Nå, nej, det er den ikke
L37: Er den større eller mindre end $\frac{3}{4}$ og $\frac{2}{3}$, sådan en halv ?
E37: Så er den mindre
L38: Så er den mindre, så du svarede at to brøker altid bliver større, at resultatet bliver større når man ganger to brøker, men nu har du et eksempel på at de bliver mindre. Er så svaret så at to brøker altid bliver mindre eller er svaret at de kan nogen gange blive større og nogen gange blive mindre?
E38: Altså så må svaret være at de bliver mindre.
L39: Kan man finde brøker som ganget sammen bliver større, for du har jo oprindeligt sagt at de bliver større og nu kommer du med et eksempel hvor de bliver mindre.
E39: Hvad har jeg ganget med den gang?
L40: Kan man finde nogen brøker der ganget sammen bliver større?
E40: Hmm. Ikke noget jeg kan komme på lige nu.
L41: Hvad tror du, at du har tænkt i situationen da du skrev at det bliver større? Hvis man ganger to brøker med hinanden og det bliver større?
E41: Altså, fx at en fjerdedel, nej en halv, den er jo mindre end... end..
L42:.. end både $\frac{3}{4}$ og $\frac{2}{3}$
E42: Så må jeg have ganget med et tal, et ulige tal, og så tænkte jeg, hvad tænkte jeg? Så tænkte jeg på... Nu skal jeg lige huske hvad jeg har ganget med...(*tænker længe og nedskriver:*$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{63}$)
L43: Blev det større så?
E43: Ja, blev det ikke det så?
L44: $\frac{20}{63}$ er det sådan cirka større end de to?
E44: Nu er jeg lidt i tvivl hvad det ligesom er du mener
L45: Så $\frac{20}{63}$ hvis man lige hurtigt skulle reducere det og prøve at sige, at det er ret tæt på $\frac{2}{6}$, spørgsmålet er - er $\frac{2}{6}$ større end $\frac{5}{7}$ eller $\frac{4}{9}$?
E45: Nej
L46: Så igen fik du faktisk noget der var mindre. Har du nogen idé om - hvad skal man gøre for at få noget der er større?
E46: Nej, det har jeg ikke.
L47: Fordi lige nu formår du kun at komme med eksempler på dette. Du ved ikke rigtig hvad man skal gøre for at finde noget der bliver større?
E47: Nej, det tror jeg ikke
L48: For man kan godt finde større
E48: Okay
L49: Det handler om, om tælleren er større end nævneren eller ej. Du har hele tiden kun valgt brøker der er mindre end 1. Hvad sker der hvis man ganger med et tal der er større end 1?

E49: Så bliver den større
L50: Ja, lige præcis. Kan brøker godt være større end 1?
E50: Ja,
L51: Ja
E51: Det kan det godt
L52: Så man kan altså gange med en brøk og få et resultat der er større?
E52: Det kan man godt
L53: Ja, lige præcis, men lad os gå videre.

(5.c)
L54: I opgave 5.c der ganger du ind - kan du forklare hvordan du har placeret dit komma?
E54: Ja.
L55: Du ganger sådan set dit 2-tal rigtig fint på men jeg kan fortælle dig at det er kommaet du ikke har placeret rigtig. Hvad har du gjort ved dit komma?
E55: Det er blevet på stedet.
L56: Ja, den har ikke rykket sig overhovedet, så hvad har du i virkeligheden ganget med? Hvis du kigger på hvad du har ganget med
E56: Jeg har ganget med 2
L57: Lige præcis - i virkeligheden har du bare ganget med 2. Du har fx sagt $2 \cdot 6 = 12$ og så fået alle decimalerne helt korrekt med.
E57: Så jeg skulle have rykket komma herover.
L58: Ja, én plads, lige præcis. Ja, hvorfor skulle den én plads frem?
E58: Fordi $0,2$ er mindre end 1
L59: Ja, fordi du har rykket den én plads på 2-tallet (*henviser til at eleven har ganget med 2 i stedet for* $0,2$

(5.d
L60: Ja, så skal du udføre en division her mellem 8 og et decimaltal. Du har ikke rigtig nogen idé om hvad du skal?
E60: Nej det har jeg ikke
L61: Du har svaret 42, jeg går ud fra at det er fordi 42 er svaret på alt eller?
E61: ja.
L62: Og så et fint spørgsmålstegn.
E62: Jeg ved ikke om det er fordi jeg ikke er så god til at udregne med kommatal. Det er jeg ikke så vandt til, men jeg havde en idé om at lave det om til - der var jeg også usikker om jeg kunne i stedet for sige $8 : 0,24$ så sige $800 : 24$.
L63: ja, det kan man sagtens
E63: Okay
L64: vil du nemmere kunne udføre den udregning?
E64: Ja, jeg tror det er meget nemmere på den måde?
L65: Ja, hvordan vil du gøre det? Udregne $800 : 24$?
E65: Der vil jeg så.. Der vil jeg så gøre hvor jeg siger $800 : 24$, så plejer jeg altod at sige, hvor mange gange går 24 op i 80 og der vil jeg så sige 6 gange, og så er der 8 tilbage. (*skriver følgende udregning:*

$$\frac{80\,{}^{8}0,{}^{8}0}{24}$$

ja, så er der 8 tilbage, ej hvorfor siger jeg 6, det er 3 gange. **L66:** Det passer lidt bedre ja
E66: Det er 3 gange, og så er der 8 tilbage nu og så skriver jeg et 8-tal heroppe, og så er der

80 igen og så vil det være 33
L67: Ja
E67: Og så faktisk vil det bare, og så kommer der et komma fordi der ikke er flere nuller tilbage, og så kommer der et nul mere og så, fordi der er jo igenn 8 tilbage, så bliver det bare ved.
L68: Ja, lige præcis - så bliver det bare ved - det kunne du sagtens gøre.
E68: Ja.
L69: Du havde bare lige brug for at skrive det om til hele tal
E69: Ja, jeg tror bare lige jeg var usikker på hvad man skulle gøre.
E70: Ja, men når man sidder med sådan et test så kan man netop også godt være lidt presset.
L71: ja.

(6.a)
L72: Du skriver der kan være rigtig mange tal imellem de to brøker. Hvor mange er rigtig mange tal? Du nævner en masse tal, en masse brøker, men du siger at der er rigtig mange. Hvor mange?
E72: Åh.. jeg ved ikke, jeg vil sådan sige uendeligt næsten.
L73: Næsten? Kun næsten? Er der en grænse? Er det sådan at på et eller andet tidspunkt så kan du ikke nævne flere tal imnellem?
E73: Nej, det tror jeg ikke. Altså, hvis jeg for eksempel skal sige - hvad er der imellem 1 og 2 så er der jo, altså så er der jo $1,1$ og $1,01$ og på den måde.
L74: Ja, så der er uendeligt mange?

(7.a)
L75: I syveren her, der skriver du har du forstår det slet ikke,
E75: Ja.
L76: Er det det der med hvad et forhold er du ikke helt forstår?
E76: Øh.. (*læser spørgmsålet højt* Jeg tror bare ikke jeg havde forstået spørgsmålet. Jeg tror det er det.
L77: Ja, hvis du kigger på den, forstår du hvad det er de spørger om, hvis du kigger på det nu?
E77: Altså vil de bare gerne have at jeg skulle have ganget de to (*peger på tallene* 148 *og* 210 *i opgaveteksten*
L78: Ved du hvad et forhold det er?
E78: Nej, det tror jeg ikke
L79: Det tror du ikke rigtig du ved... Kender du forhold fra andre situationer hvor man har brug for at arbejde med forhold
E79: Forhold? I matematik mener du?
L80: I matematik eller i din hverdag. Har du brug for det i din hverdag - andre steder end i matematik?
E80: Altså, jeg har hørt folk sige i forhold til 'det' og i forhold til 'det', hvor de på en måde sammenligner.
L81: Ja
E81: Men jeg tror ikke sådan, jeg altid har forstået dets betydning, for jeg synes folk bruger det meget forskelligt, synes jeg.
L82: Okay
E82: Hvis jeg lige kigger... (*kigger lidt på opgaveteksten*. Er det det her, altså selve papiret? (*tager fat i et A4-ark foran sig*)
L83: Altså længden og bredden af et papir. Bare en bredde og en længde.

E83: Hmm.. Altså, det hvad jeg får givet, er det fx 148 det er bredden?
L84: Ja, og de 210 mm det er længden.
E84: Nå, så skulle jeg ligesom sige, at.. skulle jeg så have minus: $210 - 148$
L85: Neej, vi kan også bare stoppe her,hvis du ikke rigtig er med på det med et forhold.

B.3 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV1.19

Elevens procenttal: 86%

(2.b)
L1: Du skriver, at $\frac{3}{4} = 0,75$ og så viser du, at det er lig $100 : 4 \cdot 3$. Er det måden du fandt frem til det på?
E1: Altså, $\frac{3}{4}$ det er jo bare $0,75$. Jeg tror det er sådan nogle basic ting som man har lært for længe siden og ikke engang tænker over.

(2.d)
L2: Ja... Så hernede i opgave 2.d der går det galt for dig. Du har skrevet
E2: Nå ja, en procent i stedet for en decimal. Det kan jeg godt se.
L3: Yes. Du skal omskrive fra procent til decimal. Du omskrev du det i stedet for fra decimaltal til procent.
E3: Ja.
L4: Ja, så du har lige byttet rundt og fundet det modsatte. Men ellers har du en fin argumenation for hvad det er du gør ($0,1 = 10\%$).

4.e)
L5: Hernede har jeg ikke bedt jer om at argumentere, men kan du forklare hvorfor du har krydset af hernede, at når man ganger med to brøker med hinanden så er det nogen gange større, nogen gange mindre.
E5: Altså hvis man ganger to brøker med hinanden så kommer det jo an på om den ene brøk er over 0. Altså når man ganger to tal, så hvis man ganger det med et minustal. Altså et plustal gange et minustal. Så giver det jo minus. Men hvis det er to plustal ganget med hinanden så bliver det ligesom større. Det kommer selvfølgelig an på om det er over 1.
L6: Ja. Hvad sker der når det er over 1?
E6: Så bliver det et større tal
L7: Og hvad sker der når det er under 1?
E7: Så blive det jo et mindre tal.
L8: Ja. Og kan brøker både være større og mindre end én?
E8: Jaeh. Ja... Det kommer an på om tæller er større end nævner.

(5.c)
L9: Ja. Helt sikkert.... Her har du lavet det at gange med $0,2$ om til at dividere med 5. Kan du forklare hvordan du har gjort det? Hvordan har du fundet ud af, at det er det samme at dividere med 5 som at gange med $0,2$?
E9: Det er fordi at $\frac{1}{5}$ og $0,2$ det er det samme, fordi $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$, fordi det er 5 femtedele og $0,2 \cdot 5 = 1$, så det er ligesom bare det samme.
L10: Og du synes det var nemmere at udføre en division end et gangestykke?
E10: Ja, det tror jeg.
L11: Hvordan har du udført divisionen? Det er ikke helt nemt at gennemskue - det ved jeg heller ikke om du selv kan.

E11: Øøh.. Det er ved at være lidt tid siden. Det er der hvor man ligesom dividerer den herude og så skriver man 'gange' det her tal og rest tilbage er 1 og så ligesom trækker det ned hele tiden

$6,345 : 5 = 1,269$

5

122445

1030

(5.d)
L12: Hernede der skal du ikke dividere med et heltal, men med et kommatal, og dér... Kan du gennemskue hvilken teknik du bruger her? Det er egentlig det samme som du gør heroppe, men nu er det bare blevet til kommatal du skal dividere med i stedet for i 5.d
E12: Jeg tror jeg har tænkt sådan: hvor mange gange...
L13: Jeg tror du har tænkt: hvor mange gange går det op..
E13: Ja, det tror jeg også jeg har gjort, men..
L14: Altså det der er gået galt er simpelt hen at du har ikke fået det rigtige tal med når du har talt hvor mange gange det går op. Du har sagt at der er 5 gange hen, men der er faktisk 6 gange hen er.
24*5=120
5*120=720
rest: $800 - 720 = 80$,
Rest: $80 - 72 = 8$ osv. *Resultat*: 25,333)
E14: Jeg tror også at så har jeg tænkt at det er plus.
L15: Men det du har sagt - for at få 120 så har du $5 \cdot 0,24$ og for at få 25 så har du 5 af dem
E15: Ja, så i virkeligheden har jeg bare glemt noget.
L16: Ja, du har i hvert fald lige regnet forkert, for hvis du siger $5cdot120$ hvad giver det så?
E16: Øhm..
L17: 600, så du skulle have haft 6 gange, plus så er der en rest. Hvordan forholder du dig til den rest? Så får du alle de her $0,3333$ men du har placeret decimalet lidt forkert kan man sige
E17: Ja.
L18: Det er det er bare at du har ganget forkert, så skulle du have haft $6 \cdot 5 = 30$ i stedet for 25, men så skulle det første 3-tal i dine decimaler have været lagt til 30 også. Dine decimaler her. Der det første af 3-tallerne er faktisk et 3-tal og ikke $0,3$
E18: Ja,
L19: Så det er blevet lidt rodet her for dig selv hvad det egentlig er du er ved at finde, men du har egentlig villet det rigtige.

$(6.a + b)$
L20: Så har vi også her i $6.a + b$. Kan du argumentere her? Du siger der er en masse decimaltal. sindsygt mange.
E20: Det er fordi man kan blive ved med at sætte decimaltal på. Man kan jo blive ved med at sige $0,2$, $0,21$ osv.
L21: Så hvis der er sindsygt mange, hvor mange er der så?
E21: uendeligt.
L22: uendelig mange, ja. For hvis du siger der er mange, så er der jo stadig en begrænsning
E22: Ja.

L23: Men du vil mene der er uendelig?
E23: Ja.

(7.a)
L24: Fint. Her har du prøvet at opskrive forholdet. Ved du hvad et forhold er?
E24: Jeg ved godt hvad et forhold er. Jeg tror ikke jeg nåede så meget i denne opgave.
L25: Ja, for du nåede hellere ikke til ekstraopgaverne. Så du har måske bare slet ikke nået denne her opgave? Så det har lige så meget været tiden? Du har ikke været i gang med et eller andet?
E25: Jo, men er det ikke sådan. Altså forholdet er op af den ene i forhold til hvor mange der er op af den anden. Sådan fx i forhold til hvis der er 2 : 1 så er der 2 op af den ene og 1 op af den anden.
L26: Ja. Så ville man opskrive det som du har gjort det. Og så vil man udregne det, som du har forsøgt så ikke har nået?

$210 : 148 = 1,4$	148
$\underline{148}$	196
620	

E26: Ja. det tro jeg

(7.b)
L27: Ja. Det er fint. Hvis du lige hurtigt skulle svare på 7.b og har tid nu til at kigge på den. Har du nogen ide om hvordan man skulle finde forholdet imellem dem?
E27: Øh... *tænker længe*... Jeg tror at... hedder det så $T : 2\pi L$.
L28: Argh... Altså, hvad sker der mellem T og L - hvad er forholdet imellem dem? Hvis du har T hvordan får du så L, kan man sige? Eller omvendt, hvis du har L men får T.
E28: Så, altås jeg får jo T ved at gange L med 2π
L29: Ja, så hvad er forholdet imellem. Hvis man fx siger at et forhold kan være $1 : 2$ fx. Hvad er forholdet imellem T og L så?
E29: Jeg tror bare ikke helt jeg forstår det?
L30: Du forstår ikke helt hvordan man finder forholdet imellem to variable?
E30: Altså, jeg forstår godt at L det er det samme som T når man ganger det med 2π.
L31: Ja, lige præcis
E31: Jeg tror ikke helt jeg forstå hvad det er jeg skal måske.
L32: Det man kan sige er, at forholdet imellem det er, at hvis du har én L så har du 2π - Hvis du har én L så er T den er 2π større. Kan du følge mig i det?
E32: Ja
L33: Så derfor siger man at forholdet det er $1 : 2\pi$. Hvis du nu skriver $1 : 2$, så kan man sige at den er $1 : 2\pi$
E33: Ja.
L34: Så det var bare det.

B.4 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV3.4

Elevens procenttal: 76%

(2.a)

L1: I opgave 2.a der har du omskrevet det til en brøk
E1: ja. Skal jeg forklare hvorfor?
L2: Ja.
E2: Okay. Det er fordi man kan jo omskrive decimaltal til brøker og decimalen kan man omskrive, fordi det er jo 1+decimaltal så det bliver $1 + \frac{354}{1000}$.
L3: Kan du omskrive det til en samlet brøk
E3: Ja, så er 1 jo også 1000 så man kan godt skrive $\frac{1000}{1000}+$ det dér.

(2.b)
L4: ja, lige præcis. Det kan man bare gøre. Så skal du udregne 15 divideret med 4 i 2.b, og du siger at 4 går op i 15 fire gange.
E4: Ja, det passer ikke helt - det giver 16.
L5: Hvordan kunne man ellers have gjort det?
E5: Ja, men skulle jo først finde ud af - ja man kan jo omskrive det til en anden brøk og så kan man finde ud af at reducere tælleren med 2 og man kan skrive $7,5$ deroppe.
L6: Du må gerne gøre det på papiret
E6: Ja, okay, vi har $\frac{15}{4}$ og så kan vi sge at det tal der går op i dem begge det, to kan være, det gør 60 i hvert fald, så kan vi skrive

$$\frac{15}{4} = \frac{60}{16}$$

Giver det mening? **L7:** Du skal jo omskrive det til kommatal
E7: Ja, men det er fordi jeg først vil have noget som 4 det går op i. Givet det ikke mening at man først har noget som... 4 det går op i, nej, det ved jeg ikke lige helt - $4 - 8 - 12$, det går op i 3 gange, så det er 3 plus det resterende, det er så...det er så $\frac{3}{4}$ kan man sige det? Sådan dér

$$3 + \frac{3}{4}$$

L8: Ja. Og hvordan bliver det så til et kommatal?
E8: Det er så $3,75$

(3.b)
L9: Ja, lige præcis. Så skal du u 3.b sammenligne to brøker og så tegner du nogle cirkler. (*Har lavet to flotte cirkler der er indddelt og skraveret som hver af brøkerne*)
E9: Ja, det blev ikke så præcist
L10: og så konkluderer du forkert. Synes du at dit øjemål er god nok til at se hvilken én der er størst?
E10: Nej, også fordi det er en meget upræcis tegning, så det er ikke lige sådan at gennemskue.
L11: Hvordan kunne man have gjort for at sammenligne to brøker?
E11: Man kunne lave en fælles nævner
L12: Ja, lige præcis. Så hvis du fx har skrevet en cirkel med det samme antal inddelinger.
E12: Så kunne man have skraveret på samme måde, og så er det nemmere at gennemskue.

(4.c)
L13: Yes. Jeg kan godt se hvad du mener i opgave 4.c, selvom du ikke skriver det
E13: Ja, så er det at man skal gange tæller med tæller og nævner med nævner.

(4.e)
L14: ja, lige præcis. Og så er det nede i 4.e siger du at når man ganger to brøker så bliver det altid mindre.

E14: Ja.
L15: Kan det slet ikke lade sig gøre at gange to brøker og så få et tal der er større?
E15: Øh.. Jo, det kan det nok så godt alligevel. Kan vi prøve at lave et eksempel (*skriver* $\frac{1}{2}$ *ned på papiret*).
L16: Ja.
E16: HVis vi har...hmm... Kan du give mig nogle tal, så kan det være jeg kan gennemskue det.
L17: Så jeg skal give dig en brøk?
E17: Ja
L18: Øh.. Men kan også sige - hvad skal der gælde om de brøker for at de bliver større når man ganger med dem?
E18: Nå jo, selvfølgelig, Det er når tælleren er højere end nævneren.
L19: Ja, lige præcis.
E19: Selvfølgelig
L20: Kan du se at hvis jeg gav dig en brøk, så havde jeg givet dig svaret.
E20: Ja.
L30: Men det er nemlig rigtigt. Hvis tælleren er større end nævneren, så bliver det større.
E30: Det giver mening.
L31: Hvorimod den halve du har skrevet op, så bliver det mindre.
E31: Ja, så bliver det altid mindre
L32: Ja, lige præcis, og det er den fejl man nemt laver når man får sådan et spørgsmål. Man tænker på brøker mindre end én som brøker, men brøker kan også godt være andet.
E32: Ja.

(5.d)
L33: Du skal dividere nede i opgave 5.d.
E33: Ja.
L34: Det har du ikke rigtig...
E34: Det kan jeg simpelthen ikke huske hvordan man gør. Jeg plejer at bruge en lommeregner.
L35: Så du har ingen anelse om det? Hvis - nu er det et kommatal - hvis du skulle have divideret med noget der ikke var en kommatal, havde det været nemmere så?
E35: Nej, jeg kan overhovedet ikke huske det... altså man plejer at gøre et eller andet - man tager først den sidste og ser at den går op i 8 to gange, så skriver man det. Så tager vi det næste, så tænker jeg man skal skrive nedenunder så, så skriver man et 0 og så 2 går op i 8 fire gange, så skriver vi dét dér. Nul går op i 8 og det er selvfølgelig nedenunder man skal gøre det, og så to nuller her. 0 går op i 8 nul gange, så skriver man et nul igen. Så tænker jeg man lægger det sammen og så skal kommaet sættes efter to decimaler. Det er sådan jeg kan huske det, men det ligger så langt væk.

$$\begin{array}{l} \quad 8 : 0,24 \\ 0,42 \end{array}$$

L36: Ja, men det er ikke det du skal gøre her.
E36: Okay. Det kunne jeg ikke huske
L37: Man har en divisionsalgoritme som sådan en trappe. Kan du huske den?
E37: Ja, det siger mig et eller andet. Det ligger meget langt væk
L38: Men det kan du ikke lige huske?
E38: Nej

(6.a + b)
L39: Så går vi ned til opg. 6.a her. Hvor mange tal ligger der imellem de to brøker?

E39: Det synes jer er svært at sige, for det er jo halve man får ud, eller ikke halve, men det er jo ingen hele tal man får ud.
L40: Det er rigtig nok, men står der at det skal være hele tal?
E40: Nej, det gør der ikke
L41: Men du har faktisk lavet en fin omskrivning her, hvor du har skrevet det om til $\frac{40}{100}$ og $\frac{80}{100}$
E41: Ja, så kan man siger at der ligger 20 hundrededele, nej 40 hundrededele imellem.
L42: Ja, så ligger der 40 hundrededele imellem. Ligger der flere tal imellem?
E42: Det kommer vel an på....
L43: Nu skrev du dem om, og så fik du faktisk 40 tal imellem.
E43: Ja, det kommer jo an på hvilket, altså man kan blive ved med at omskrive det - altså variere det efter omskriving.
L44: Så hvor mange tal findes der imellem?
E44: Alle
L45: Ja, hvad vil alle sige. Eller ligger alle tal imellem?
E45: Nej
L46: Nej, hvad er det du mener med det?
E46: Jeg mener bare at man kan blive ved med at omskrive det til forskellige tal så derfor kan man ikke give et entydigt svar, fordi der findes forskellige svar, afhængig af hvordan man omskriver.
L47: Ja, men fi ndes der en grænse for hvor mange?
E47: Nej, det gør der ikke
L48: Så hvad kan man sige?
E48: Det ved jeg ikke...
L49: Det ved du ikke?
E49: Nej
L50: Man kan sige at der er uendeligt mange.
E50: Ja, okay.
L51: Ja.

B.5 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV3.12

Elevens procenttal: 81%

(2.a)
L1: Ja, du har jo lavet denne her test og da du skulle omskrive fra kommatal til brøk, der har du skrevet 'pas'. Har du nogen ideér til hvad man kunne gøre for at omskrive sådan et kommatal her til en brøk?
E1: Faktisk ikke. Ikke lige i det tilfælde. For de meget simple, dem kan jeg egentlig godt sådan regne ud, men jeg har bare svært ved når det er sådan nogle tal
L2: Ja, Hvad gør du med et simpelt decimaltal? Kan du vise det eller forklare det?
E2: Hvis nu jeg tager $1,33$, så tænker jeg 33 ud af 100 så er det 33% så tænkte jeg - okay jeg ved ikke om det er sådan man siger, men det er to tredjedele - én tredjedel - jeg kan ikke snakke. Én tredejdel - det er sådan det var. Det er der hvor jeg er sådan lidt i tvivl, i opgaven, for jeg kan ikke sætte brøk på på samme måde. Det er sådan dér jeg tænkte
L3: Okay, Du kan ikke gennemskue hvad det er for en brøk det er.
E3: Nej, lige præcis. Så det er $0,33$ er lig med $\frac{1}{3}$ i brøk og dermed kunne jeg så finde ud af at denne her $(1,33)$ vil være $\frac{4}{3}$.

L4: Så du starter med at finde en du kan omskrive til brøker. Finde decimalerne omskrevet til brøker og så finde heltallet bagefter.
E4: Lige præcis
L5: Ja, men du har ingen anelse om hvordan man tager tallet i opgaven, som du ikke lige kunne gennemskue.
E5: Nej.

(1.b)
L6: Fint... Du har lavet en udregning her i opgave 1.b
E6: Ja, der forkorter jeg det egentlig bare.
L7: Ja, det forkorter du. Kan du se noget der går galt her.... Kan du gennemskue noget du har glemt?
E7: Øøhh.. Det tror jeg ikke lige jeg er med på faktisk.. øhh.. det burde være én eller hvad?
L8: Det er her det her ($-\frac{68}{12}$) du skal reducerer - giver det mening i forhold til dit resultalt?
E8: Øøhh.. Hvis man dividerer med 4 er det rigtig nok.
L9: Ja, men hvad sker der med sådan et minus i en brøk?
E9: Ahh ja, det kan jeg godt se. Der har jeg så lige overset kan jeg se.
L10: Ja, det kan ske, men det er simpelthen bare overset eller hvad?
E10: Ja. Jeg plejer egentlig at have styr på det.
L11: Man kan også godt se at du har det med her og her (*peger på mellemregningerne*), og så har du lige glemt den.
E11: Ja, for man kan jo rykke det minustegn både nederst og øverst og udenfor.

(2.b)
L12: Ja, lige præcis. Jeg synes det er interessant hernede i 2.b at du bruger modulus-regning
E12: Ja. Jeg tænkte at det lige var den bedste måde jeg kunne forklare på at det var sådan jeg tænkte. Ja, det bliver svært at forklare hvordan man gør ellers, synes jeg.
L13: For igen kan man sige, at hvordan ved du at $\frac{3}{4}$ er lig med $0,75$, fx.
E13: Det er... jeg tror også det har noget at gøre med, jamen $\frac{1}{4}$ det er jo 25% og så ganger jeg det bare op med 3 så det bliver 75.

(4.e)
L14: Ja... Hernede i 4.e er det. Kan du argumentere? Nu ved jeg godt at jeg ikke har bedt konkret i opgaven om at argumentere for det, men kan du forklare hvorfor det er du har svaret som du har svaret, for det er korrekt.
E14: Det er faktisk mit argument det her (*peger på marginen hvor der står* $\frac{1}{2} \cdot n\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$) fordi at hvis man har to større tal end de nederste i nævneren så bliver de jo ganget op og det bliver storst, fx $1 \cdot 1$ det er jo bare 1, og $2 \cdot 2$ hvis det er øverst så er det jo 4.
L15: Så det er det her med, at heltal kan også skrives om brøker.
E15: Hvis man bare lige vender den om, så kan man godt se at så bliver det faktisk større på den anden led. Men vender bare om og finder den reciprokke som man siger.
L16: Ja.
E16: Det var det jeg tænkte.

(5.c)
L17: Ja, så er vi omme i 5.c, og der skriver du så, at du ikke helt kan huske metoden.
E17: Ja, det er noget med at det.. nu har man... at rykkke kommaet de der seks gange fordi de er rykket hver af dem tre. (*Eleven har i testen opskrevet:* $0,200 \cdot 6,345$)
L18: Ja, så du mener der er seks decimaler fordi der er tre her og tre her.

E18: Ja, jeg kan bare ikke huske hvordan man gjorde det. Ja, det er for lang tid siden jeg har haft om kommatal
L19: Ja, så du er ikke vandt til at bruge kommatal så meget?
E19: Jeg mener faktisk at man vist bare fjerne kommaerne først og så bagefter når man har udregnet det lidt ligesom ganget helt almindelig så rykker man hele tiden det antal komma der er rykket tilsammen.
L20: ja, men man kan sige...så hvad vil du gange sammen?
E20: Altså først kan man sige det dér gange hele den dér der kommer dér (*peger på tallene* 2 *og* $6,345$ *i opgaven*). Så siger jeg nul her ved den næste, fordi det er en ti'er, så tager jeg dét gange dét her og så bare lige rykker dem en tand jo og så på den måde hele tiden indtil den sidste. (*Det eleven forklarer er, at* 2 *ganges på cifrene i* 6345 *ét af gangen og resultaterne placerings forskudt i forhold til hiannden, så det passer med tallenes værdi*)
L21: Ja, men det har du jo ikke rigtig gjort - rykket den - du har placeret dem samme sted, så de har sådan set sammen placering
E21: Ja, det er også dér - jeg kan sådan set godt se nu.
L22: Så det er mest det der er gået galt - du har ikke fået givet dem placeringer, og selvfølgelig skal de ikke bare allesammen lines op under hinanden.
E22: Nej, lige præcis. Jeg tror måske også det er dér den er gået lidt galt.
L23: Ja.
E23: Jeg tror - har jeg husket det med den første? Det har jeg vidst ikke. Næh.

(5.d)
L24: Næh.. Men du har ingen anelse om hvordan man dividerer? i 5.d?
E24: Det er et eller andet med at tage det samme, bare at dividere med det hele og så hente hele tiden. Fx 0 divideret med 5, så vidt jeg husker. 2 den kan ikke divideres med, så henter én derfra *peger på tallene fra delopgave* 5.c
L25: Nu er vi nede i den her (*peger på tallene fra delopgave* 5.d *som er* $8 : 0,24$)
E25: Ja, det er bare for at give en forklaring på det.
L26: Ja, jeg er ikke sikker på, at jeg helt forstår din metode.
E26: Nej, jeg kan ikke huske så meget. Men det er i hvert fald det der med igen at tage hvert led.
L27: Kender du den almindelige divisionsalgoritme, hvis ikke det havde været et kommatal, men bare havde været et heltal.
E27: Det ved jeg ikke.
L28: Det er hele divisionalgoritmen som...
E28: Ja, jeg ved ikke om det er samme princip... Nej, jeg ved det faktisk ikke, jeg er lidt lost på dén der.
L29: Okay. Det er generelt det at dividere to tal med hinanden?
E29: Ja, især når det er kommatal, så synes jeg ikke det er nemt.
L30: Men vil du kunne det uden kommatal, hvis vi fx sagde - prøvede at sige $105 : 3$, nu er det ikke en pænt tal
E30: Så ville jeg sige 3 går op i 30 ti gange, og hvor mange 30'er kan der gå op i det, jamen der er til 90, jeg skriver bare lige 90 her på papiret og så bare lige hernede på papiret at det er 303. Så er der så 15 tilbage, og det går den jo så op i 5 gange. Og så på den måde lægger jeg det sammen til at få 35.
Skriver ned på papiret:

$$90 + 15$$
$$30 + 5 = 35$$

L31: Ja.
E31: Så på den måde. Jeg plejer altid at se - hvad går det op i. Altså ti'ere og hvad går dét op i.
L32: Ja, og hvad så hvis det ikke går op? Går det altid op?
E32: Jaeh, men så - det er jo det der med at få det over i en brøk og igen med decimaler fra starten af. Det er jo så, alt efter hvilket kommatal det er. Altså $33,33$ så plejer jeg godt sådan nogenlunde at kunne det.
L33: Så hvis jeg nu havde sagt $\frac{105}{4}$ i stedet, ville du så vide hvad du skulle gøre?
E33:'Det er igen, jamen 100, det er jo så 25 gange den går op i, og så hvis det er 5 så er det fire, det er så 1, så er det $0,25$. Dermed så vil det være $26,25$.
Skriver ned på papiret:

$$\begin{aligned}100+4+1\\25+1+0,25=26,25\end{aligned}$$

$(6.a+b)$
L34: Ja, du ser ud til at have svaret nogenlunde på det. Du siger i hvert fald uendelig mange tal.
E34: Ja. Man kan hele tiden sætte et tal ekstra på.
L35: Det sjove er, at oppe ved brøker der argumenterer du med decimaler, så hvordan ville argumentet være hvis du skulle kigge kub på brøkerne.
E35: Altså, om det er kommatal eller ej, så kan man jo altid tilføje et mere tal.
L36: Ja, men hvad mener du med at tilføje et tal på en brøk
E36: Altås, 2, så kan man sætte 9 bag ved den og 9 bag ved den så det hele tiden bliver større og større og større.
L37: Ja, men vil det så stadig ligge imellem?
E37: Nå, ja, på den måde. Men så er det jo noget med, ja, fx, det bliver sådan nogle høje til i forhold til hinanden, for det skal jo give de der kommatal når det så bliver divideret. Altså det er derfor det er lidt svært at forklare. Det bliver sådan lidt kringlet og store tal når man skal dividere med hinanden.
L38: Kan du komme med et eksempel på nogle tal der ligger imellem?
E38: I hvert fald $\frac{3}{5}$ - den er rimelig klar, og så måske fem nej seks tiendedele. Det giver ikke rigtig mening det jeg laver lige nu.
L39: Jo, $\frac{5}{10}$ kan man godt.
E39: Men det er ligesom en halv kan man sige, det er derfor jeg tænker...
L40: Så en halv ligger faktisk imellem?
E40: Ja
L41: Men den ser mindre ud?
E41: Ja, den ser mindre ud, men det er jo i forhold til hvor mange gange man deler kagen.
L42: Ja, lige præcis. Så hvis du skulle se det her visuelt i kager, så ville du hurtigt indse, at det her er selvfølgeligt.
E42: Ja, lige præcis

$(7.a+b)$
L43: Ja, hernede, kan du forklare hvad et forhold er?
E43: Er forhold det er at man kan gange en konstant på den ene for at få den anden.

$(E6)$
L44: Ja. Du nåede ikke rigtig til ekstraopgaverne, men det var heller ikke et must. Nu snak-

ker du en del om når man skulle omskrive fra brøk til decimaltal, sp snakker du meget om procenter.
E44: Ja.
L45: Hvordan vil du omskrive procent til en brøk?
E45: Men det er jo sådan set lidt det samme som, hvis man dividerer det med 100, så vil det bare være et kommatal. Så det er jo samme princip.
L46: Så hvordan vil du opskrive nede i E6: 65,3% som en brøk?
E46: Det er jo så det. Øh.. Jeg ved ikke hvordan jeg vil gøre det men den der, pga. det der kommatal. Det er der den tricker lidt for mig, faktisk, fordi 33,3% den giver jo god mening for mig, for det er jo bare en tredjedel, men når det bliver sådan dér, så kan jeg ikke.
L47: Kan du omskrive den til et decimaltal, hvis du ikke kan omskrive den til en brøk.
E47: ja, decimaltal, det er jo bare $0,653$
L48: Ja, og så har vi problemet igen, at du ikke kunne finde ud af at omskrive fra decimaltal til brøk.
E48: Ja.
L49: Og du ved hellere ikke hvordan man går direkte herfra (*peger på procenttallet*) til en brøk? Det ved du hellere ikke?
E49: Nej, så det er der den tricker lidt for mig, som sagt.

(E7)
L50: Ja, kan du reducere det her udtryk i E7? $\left(\frac{\frac{2}{3}-1}{5}\right)$
E50: Øhh.. Ja, nu skal jeg prøve. Altså når man siger -1 så er det jo bare at trække 3 fra, så det bliver $-\frac{1}{3}$ der er øverst. Så er det over 5, så er det samme som det der når man har a (*hentyder til selve brøkregnereglen og opskriver* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$), så det vil være $\frac{ad}{bc}$ (*nedskriver også dette*). Så dermed, fordi den her, teknisk set så er der sådan en under (*peger på* 5*-talllet i det oprindelige udtryk og giver den nævneren* 1 *så det bliver* $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{1}}$). Nej, jo. I nævneren, så er den divideret med 1, så vi siger $-1 \cdot 1$ og $3 \cdot 5$ lig $\frac{-1}{15}$, og så har vi egentlig det.
L51: ja, det er bare fint. Tak skal du have.

B.6 GYMNASIEELEVER - INTERVIEW ELEV3.19

Elevens procenttal: 57%

(1.a) **L1:** Ja, lad os kigge på det første spørgsmål, 1.a. Du skriver at du løser den ved at finde 75% af nævneren.
E1: Ja.
L2: Hvordan gør du så det? Finder 75% af nævneren?
E2: ja, øh.. Fordi jeg ved at $\frac{3}{4}$ det er 75%, så, altså egentlig så er det jo bare at finde en $\frac{1}{4}$ og gange det med 3. Det er i hvert fald sådan jeg tænker. Så tror jeg bare det kommer lige til, fordi det er noget man kan i hovedet, altså $\frac{1}{4}$
L3:Så du er ikke rigtig bevidst om hvordan du så får fundet fx $\frac{6}{8}$
E3: Fx så kan jeg gange det med 2.
L4: Ja, i både tæller og nævner?
E4: Ja.
L5: Det er bare fordi din forklaring er lidt sjov.
E5: Det er sådan jeg tror jeg tænker det, men egnetlig så ganger jeg også.
L6: Ja, for det er jo egentlig det man gør, så din forklaring det forklarer kun brøken $\frac{75}{100}$, men

det forklarer ikke brøken $\frac{6}{8}$ - kan du følge mig i det? **E6:** Ja.

(2.b)
L7: Så går vi ned og kigger i 2.b. Der skal du udregner, eller omregne $\frac{15}{4}$ til decimaltal.
E7: Ja.
L8: Det går ikke helt så godt. Har du nogen idé om hvad man skal gøre?
E8: Nej, men der er med decimaltal, det synes jeg faktisk er svært. Så nej, det tror jeg ikke. Jeg tror jeg tænker at det jo, man netop skal nå frem til et kommatal, men det kan jeg ikke huske.
L9: Kan du se problemet i det du har gjort her?
E9: Øhh.. Jeg har måske, jeg skulle måske have skrevet $7,5$ her, for jeg har halveret her (*har oprindeligt skrevet:* $\frac{15}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$).
L10: Ja og så har du så fundet halvdelen af 7
E10: Ja, og det er jo så en start.
L11: Og hvad kunne man så gøre?
E11: Ja, så kunne jeg have sagt... Neej, så kunne jeg bare have sagt $7,5$ divideret med 2, ej, en dårlig fejl.
L12: Det er nok bare en regnefejl.
E12: Ja, det er det. Det er en hurtigfejl tror jeg.
L13: Ja, det er det nok.
E13: En sjov fejl

(3.b)
L14: Ja, så her i 3.b der skriver du at, du argumenterer at $\frac{4}{7}$ er størst fordi det er en større del af nævneren.
E14: Ja, jeg ville have spurgt om hvilken brøk er størst og ja.. øhmm.. ja det kan jeg ikke huske.
L15: Har du nogen anelse om hvordan man skal sammenligne to brøker?
E15: Ikke lige umiddelbart i hvert fald, nej. Altså, man kunne fx regne dem i decimaltal.
L16: Ja,
E16: Ja, det tænker jeg.
L17: har du forslag til andre muligheder.
E17: altså man kunne gange dem med hinandne - få dem til at have en fællesnævner
L18: Ja, det kunne man
E18: Ej, hvor smart. Ja, ganget 11 med 7
L19: Ja, lige præcis
E19: Ja, så havde jeg nemlig fået, hvis de havde været under fællesnænver, så vil tælleren fortælle hvad for én der var størst.
L20: Ja, lige præcis, og så ville du have fået 49 her og 44 dér. Så hvilken én vil så være størst, hvis du havde fået 49 herovre og 44 dér?
E20: Det er den dér (*peger på* $\frac{7}{11}$)

(4.c)
L21: Ja, lige præcis.... Og så kan jeg se, at herned ei 4.c der er det selvfølgelig tydeligt nok hvad du gør, men du har ikke lige vist det.
E21: Altså ja, der ganger jeg tæller med tæller og nævner med nævner og så reducerer jeg, eller dividerer med 2.

(4.d)
L22: Ja, når du så skal dividere to brøker, så har du ikke løst den.

E22: Nej, og det har jeg ikke for jeg kan godt huske at det er noget med at krydse over, og så er der nogen der skal ganges med hinanden også. Og jeg kan ikke huske formlen, og så tænkte jeg, at når ejg ikke ved det, så lader jeg være med at svare.
L23: Har du nogen idé om det, når vi snakker om det nu? I testen ville jeg jo gerne have at I ikke svarede et vildt gæt, men nu kan jeg sådan lidt mere høre hvad du tænker
E23: Jeg tror det er noget med, altså der er et eller andet med ad, og så ganget med cb eller sådan et eller andet og så over ad. Der er i hvert fald en eller anden formel, og det er den jeg ikke kan huske. Den kan jeg stadig ikke huske.
L24: Så hvis vi nu prøver at skrive $\frac{a}{b}$ divideret med $\frac{c}{d}$
E24: (*ovenstående nedskrives af eleven på papiret*)
L25: Hvad vil dit bud være at det vil give så?
E25: ALtså, ja, og det er nemlig det...
L26: Det er dér hvor du ikke rigtig kan huske hvad du skal gøre.
E26: Jeg kan ikke huske om det er a... ja, det er formlen jeg ikke kan...

(4.e)
L27: Okay. Nede i 4.e der skal du kryse af: "Når man ganger to brøker med hinanden så er resultatet altid større, mindre eller nogen større og nogen gange mindre". Du har sagt "altid mindre". Hvad er dit argument for det?
E27: Altså, jeg tror jeg tænkte bare sådan praktisk, hvis jeg ganger to tal så er det mindre. Jeg kan ikke huske mit argument.
L28: Men hvis du skulle svare på det nu, hvis du ganger to brøker
E28: Nu kan jeg se at den er forkert, så det er lidt svært at argumentere for det.
L29: Ja, men kan du så se hvorfor det er at brøker også godt. Eller - hvilken af de to andre muligheder er det? Det har jeg ikke fortalt dig endnu.
E29: Nej, jeg tænker det må være den her så (*peger på svarmulighed* iii)), for jeg må have haft et argument for at sige at den var mindre.
L30: Ja, så du tænker ikke at det kan være
E30: Ja.
L31: Kan du komme med et eksempel på hvor de gør det ene, altså hvor de nogen gange bliver mindre og nogen gange større?
E31: Fx hvis man ganger en, altså hvis tælleren er større end nævneren og man ganger det med det, så bliver det større. Men hvis man fx ganger noget med $\frac{1}{2}$ så bliver det jo 50%, men hvis man ganger noget med $\frac{4}{3}$ hvor tælleren er større end nævnerne, så bliver det så
L32: Ja lige præcis, så bliver det større. Så kan du se hvorfor det kan give begge dele når man kommer med eksempler?
E32: Ja, men jeg tænker i eksempler. Så tror jeg bare at mit eksempel det var det der var rigtigt.
L33: ja, hvis ens første eksempel er et hvor det bliver mindre, så er man tilbøjelig til at svare det andet.

(5.c)
L34: Ja, lad os kigge på den her 5.c. Du skal gange to kommatal sammen.
E34: Ja.
L35: Du starter egentlig med at lave en omskrivning som du streger igen ($0,2 \cdot 6,345 = \frac{6,345}{5}$).
E35: Ja, jeg tror
L36: Måske fordi du tænkte det var endnu sværere - du starter med at omskrive '$0,2$ gange med' til at være 'divideret med 5'
E36: Ja, der tror jeg igen det har været et bud og jeg har ikke vidst det, og så har jeg ikke

svaret.
L37: Men hvordan har du omskrevet. Hvordan har du ændret '$0,2$ ganget med' til at blive til 'divideret med 5'
E37: Det var fordi jeg tænkte at det var $\frac{1}{5}$, altås 20%.
L38: Ja
E38: Ej hvor sjovt, det kunne du lige se (*nentyder til at jeg har set det med at dividere med* 5 *på trods af at det er streget ud*)
L39: Ja, jeg kan godt se det.
E39: Det var i hvert fald min tanke bag, tror jeg.
L40: Men så kunne jeg forestille mig at du ikke vidste hvordan du skulle udregne $6,345$ divideret med 5. **E40:** Ja, det kunne ikke passe.
L41: Men har du nogen idet om hvordan man ganger to decimaltal med hinanden?
E41: Ikke lige umiddelbart nej.
L42: Og dem har du hellere ikke nogen idé om hvordan man dividerer? Kan du godt gange to almindelige tal med hinanden?
E42: Ja.
L43: hvordan vil du gøre det?
E43: Vi ganger $2 \cdot 3$
L44: Altså større tal.
E44: Uha, det var sådan noget vi lærte i 9.klasse. Det er sådan noget med at gange dem over hele tiden med hinanden.
L45: Ja.
E45: Det er nok noget af det samme, men så er det bare at tage højde for at komma.
L46: Ja, lige præcis

(5.d)
L47: Det er det samme hernede. Du ved heller ikke hvordan man dividerer. Igen - vil du kunne udføre det, hvis det ikke var for kommatallet, eller er det en teknik som du ikke har styr på.
E47: Altså hvis det bare havde været 24 så tror jeg det havde været nemmere. Jeg tror det er kommatallet der gør at man tænker - nu er jeg usikker - så lader jeg være.
L48: Så hvis du skulle prøve at dividere 8 med 24 fx - prøv lige at vis hvordan
E48: Nu skal jeg lige tænke. 8 divideret med 24 (*skriver det ned på papiret*)... argh... Det er faktisk ikke lige til. Det kan jeg ikke på stående fod tror jeg.
L49: Nej.
E49: Nej.

(6.a)
L50: Ja, så er vi hernede i 6.a, der skriver du "uendeligt mange pga. to decimlaer"
E50: Ja, og det er... det har jeg fordi man jo ikke ved hvor mange kommatal der ligger bag.
L51: Ja, men det nu mest at jeg tænker i forhold til at det handler om brøker.
E51: Ja, men det er fordi brøker også kan omskrives til decimaltal.
L52: ja, lige præcis. Super.

(7.a)
L53: Det her med forhold mellem tal det når du slet ikke at løse. Ved du hvad et forhold er?
E53: Ja, fx, ofte når man laver rekonstruktioner af ting, så gør man det altid ved at dividere det mindre eller ganger det større... men hvad skulle jeg gøre? Ja, jeg tror jeg skla omskrive det her til en brøk, men var lidt i tvivl om hvad der var tæller nævner.

L54: Men er det vigtigt i et forhold?
E54: Det er det nok ikke når du spørger sådan? Det ved jeg ikke.
L55: Når man snakket om et forhold mellem to størrrelser - har de så kun ét forhold?
E55: Øh.. Det kommer an på hvilket forhold man ser på.
L56: Hvis vi snakket forholdet mellem bordet og tavlen.
E56: og forholdet mellem tavlen og bordet - nej så har de ét forhold som både kan være bordet sammen med tavlen og tavlen med bordet.
L57: Ja, så når jeg spørger om det er ligegyldigt.
E57: Så er det, ej hvor smart, det skulle jeg have vidst.
L58: Kan du se det?
E58: Ja,
L59: Altså man kan sige, hvilken side (*referer til A5-arket fra opgaven*) er i forhold til den anden.

(7.b)
L60: Ja, hernede, hvordan vil du bestemme forholdet mellem disse to størrelser?
E60: (*eleven læser spørgsmålet højt*).. øh... så vil jeg bare sige T over L, ej hvor træls at jeg ikke har lavet det.
L61: Ja, og hvad er det så?
E61: øh.. 2π
L62: Lige præcis. Ja, $\frac{T}{L}$ er 2π
E62: Ej hvor sjovt, ja så er det bare at isolere - ej hvor fjollet
L63: Ja, for det er ikke fordi man kan sige du løb tør for tid, for du har i hvert fald kigget på de næste opgaver også. Så det er ikke fordi man kan sige at du simpelthen bare ikke nåede de sidste.
E63: Nej, jeg tror simpelhen jeg bare tænkte, at jeg blev lidt skræmt af, når det er en formulering man ikke er vandt til.
L64: Ja.

B.7 GT-TESTEN

I figur 33 ses GT-testen som den blev udleveret til eleverne på gymnasiet. Der er lavet god plads mellem spørgmålene til at eleverne kan svare direkte på papiret. Hovedmargenen var i stedet for dette speciales margen erstattet med den hovedmargen som ses her:

Navn: klasse: 3.x side 1

Hovedmargenen var selvfølgelig ændret så der stod 'klasse: 1.x' til 1.g'ernes test.

Svar kun på spørgsmål som du kan løse!
Lad være at gætte, men skriv hellere "ved ikke"eller "kan ikke nå det".

TEST I GYMNASIET OM RATIONALE TAL

1. **Ens brøker**

a) Find andre brøker som er lig med $\frac{3}{4}$.
Argumenter for dit svar.

b) Reducer brøken $\frac{-68}{12}$ mest muligt,
idet du viser dine mellemregninger

2. **Omskrivning af tal**

a) Omskriv $1,453$ til en brøk idet du forklarer din
metode eller viser dine mellemregninger.

b) Omskriv $\frac{15}{4}$ til decimaltal idet du forklarer din
metode eller viser dine mellemregninger.

c) Omskriv $0,0345$ til procent idet du forklarer din
metode eller viser dine mellemregninger.

d) Omskriv $3,8\%$ til decimaltal idet du forklarer din
metode eller viser dine mellemregninger.

3 **Sammenligning af tal**

a) Hvilket tal er størst: $0,45$ eller $0,445$? Forklar dit svar!

b) Hvilken brøk er størst: $\frac{7}{11}$ eller $\frac{4}{7}$? Forklar dit svar!

4. **Regne med brøker**

a) Udregn $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ idet du viser dine mellemregninger.

b) Udregn $\frac{4}{7} - \frac{1}{3}$ idet du viser dine mellemregninger.

c) Udregn $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$, idet du viser dine mellemregninger.

d) Udregn $\frac{2}{7} : \frac{26}{14}$, idet du viser dine mellemregninger.

e) Kryds det korrekte udsagn af:

Når jeg ganger to brøker med hinanden er resultatet...

- i) *...altid større end de to brøker* □
- ii) *...altid mindre end de to brøker* □
- iii) *...nogle gange større, nogle gange mindre end de to brøker* □
- iv) Ved ikke □

5. **Regne med decimaltal**

a) Udregn $0,3251 + 7,855$, idet du viser dine mellemregninger.

b) Udregn $6,7 - 0,4321$, idet du viser dine mellemregninger.

c) Udregn $0,2 \cdot 6,345$, idet du viser dine mellemregninger.

d) Udregn $8 : 0,24$, idet du viser dine mellemregninger.

6. **Hvor mange tal**

a) Hvor mange tal er der imellem $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{5}$?

b) Hvor mange tal er der imellem $0,4$ og $0,8$?

7. **Forhold mellem størrelser**

a) Et A5-ark har størrelsen $148mmx210mm$.
Hvad er forholdet mellem A5-arkets længde og bredde?

b) Hvis $T = 2\pi \cdot L$, hvad er så forholdet mellem T og L?

Ekstraopgaver

Løses kun hvis du grundigt har svaret på første del af testen.

E1) Er der forskel på $\frac{3}{5}$ og "3 divideret med 5"? Argumenter!

E2) Du køber en $\frac{1}{2}$ pizza og giver en $\frac{1}{5}$ af dette til en sulten ven, hvor meget pizza har du så tilbage?

E3) Find selv på en "hverdags-opgave med brøker i stil med E2

E4) Skraver 4/7 af en figur.

E5) Placer $\frac{17}{25}$ så præcist som muligt på en tallinje.

E6) Omskriv $65,3\%$ til en brøk idet du viser dine mellemregninger.

E7) Reducer $\frac{\frac{2}{3}-1}{5}$ idet du viser dine mellemregninger.

Tabel 33: Her ses den skriftlige test GT som gymnasieeleverne fik udleveret

B.8 ANALYSEN AF DE FRAVALGTE EKSTRA-OPGAVER

Her er samlet alt det fravalgte om ekstraopgaverne. Bemærk at disse sider ikke er finpudset eller færdigbehandlet, men blot hvad jeg havde nået før jeg valgte at fravælge dem.

E1) Er der forskel på $\frac{3}{5}$ og "3 divideret med 5"? Argumenter!

Tabel 34: Her ses Ekstraopgave 1

Det første ekstra-spørgmål er medtaget for at få viden om, hvad eleverne faktisk tænker om brøker. Ser de brøker som et tal i sig selv eller ser de brøker som en ren division der "ikke er udført endnu". Det kan ses som problematisk (P) for eleverne, hvis de ikke har tilstrækkelig viden om hvad en brøk egentlig er.

Spørgsmålet referer ikke direkte til nogle af teknikkerne i min PRM, selvom opgave $T_{2.2}$ om at omskrive brøker til decimaltal er centralt i sammenhængen mellem brøker og division af hele tal.

Det korrekte svar vil være, at en brøk er et rationalt tal, mens en division er en operation mellem to hele tal. Her kan man bruge teknik $\tau_{2.2}$ om at brøken omskrives til decimaltal ved at dividere tæller med nævner. Så man kan sige, at brøkstregen ved omskrivning kan repræsentere en division.

$\tau_{5.1''''}$ er også relevant, da den handler om at en brøkstreg kan ses som en division ved udregninger. Men der er altså stor forskel på at repræsentere brøkstregen som en division i tilfælde hvor man skal omskrive eller udregne og så at sige at brøkstreg og division betyder det samme.

En forkert teknik her vil være:

$$\tau_{E1*} = \text{Brøker er en division der ikke er udført endnu.}$$

Eller en anden variant af dette:

$$\tau_{E1**} = \text{Brøkstregen betyder division}$$

Set med disse teknikker bliver brøker nærmere set som decimaltal, i stedet for at se decimaltal som en repræsentation for rationale tal.

E2) Du køber en $\frac{1}{2}$ pizza og giver en $\frac{1}{5}$ af dette til en sulten ven, hvor meget pizza har du så tilbage?

Tabel 35: Her ses Ekstraopgave 2

E3) Find selv på en "hverdags-opgave med brøker i stil med E2

Tabel 36: Her ses Ekstraopgave 3

NR.	ELEVERNES "ORD-PROBLEMER"
1.	forstørre/formindske/skalere med fx linser
2.	deler en del af noget med nogen
3.	tager fx $\frac{3}{4}$ af noget, bagefter tages $\frac{1}{3}$ af dette. Hvor stor en del er det så af det oprindelige?
4.	Laver ord- subtraktionsopgaver fordi de glemmer at spørge, hvor stor en del det er af det hele
5.	Gør det til ordopgaver om addition i stedet
6.	Laver ren regneopgave, dvs. får det ikke sat ind i en virkelig situation
7.	Ved ikke hvordan man laver en ord-opgave

Tabel 37: Elevernes ideer til ord-problemer - givet som et svar på spørgsmål 3 i tabel 3. De røde forslag er ikke rigtige ord-opgaver, mens de blå forslag er ordopgaver, hvoraf nogen har mere at gøre med multiplikation en andre. De sorte er korrekte ord-opgaver. (**prediger:2006**; **s. 9**)

Det andet og tredje ekstra-spørgsmål er inspireret af tabel 3 og tabel 37 (som ses her nedenfor), som arbejder med elevernes viden om multiplikation.

Det oprindelige spørgsmål var især problematisk (P) for de elever der havde en mangelfuld viden om multiplikation, og derfor forventer jeg også at det vil være problematisk for mange af gymnasieeleverne.

Et andet problem var, hvorvidt eleverne forstod hvad der mentes med den opgave der blev stillet. Derfor har jeg her valgt at give et eksempel på en "hverdags-opgave først i spørgsmålet efter er de blevet bedt om selv at lave en lignende opgave.

Opgaven der skal løses i E2 er i første omgang $T_{4.1}$ om, hvordan man trækker brøker fra hinanden. For i første omgang skal det vides, at hvis vennen får $\frac{1}{5}$ af det du har, så har du i første omgang ifølge $\tau_{4.1}$ at:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

dvs. du har $\frac{4}{5}$ tilbage af det pizza du oprindeligt havde.

Derefter skal det afgøres hvor meget pizza du samlet set har. Her er opgaven som skal løses $T_{5.1}$ om at gange to brøker sammen. Det svære her er at gennemskue, at det at tage en del 'af' noget andet betyder at multiplicere. Derefter er det blot at bruge teknikkerne $\tau_{5.1}$ eller $\tau_{5.1''}$, om, hvordan man multiplicerer brøker. Se forkerte teknikker under delspørgsmål 4.c.

Dermed bliver facit:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$$

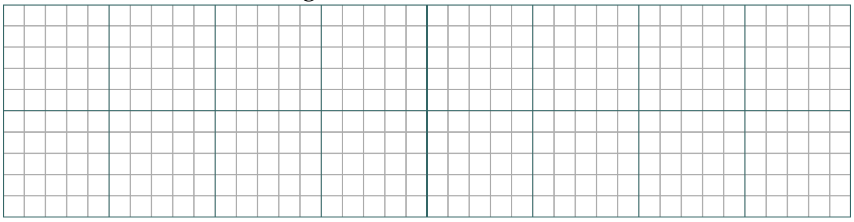
Det problematiske i opgaven her i opgaven er hvis eleverne ikke helt forstår hvad der spørges om og derfor anvender følgende forkerte teknik:

τ_{E1*} = *Find kun brøkdelen af den aktuelle anddel og ikke af den oprindelige andel*

Dvs. de tror de har svaret korrekt ved blot at svare på første del, nemlig at du har $\frac{4}{5}$ pizza tilbage.

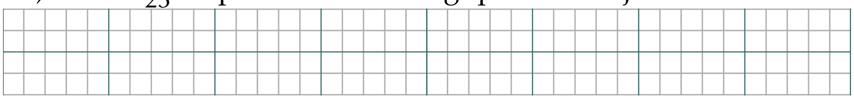
Opgaven der skal løses i E3 er at sætte et billede på en operation mellem brøker. Jeg forventer at de enten vælger multiplikation ($T_{5.1}$) eller addition (T_{4_1}), for spørgsmålet siger ikke specifikt at de skal bruge multiplikation i deres eksempel.

E4) Skraver 4/7 af en figur.



Tabel 38: Her ses Ekstraopgave 4

E5) Placer $\frac{17}{25}$ så præcist som muligt på en tallinje.



Tabel 39: Her ses Ekstraopgave 5

Det fjerde og femte ekstra-spørgsmål handler om at håndtere brøker grafisk, dvs. opgaven er $T_{2.5}$, da de både skal repræsentere brøker i en figur og på en tallinje. Dvs. det hører under MO2 fra tabel 7 om omskrivning af rationale tal.

En brugbar teknik er $\tau_{2.5}$ om hvordan man opdeler en figur eller en tallinje i passende antal enheder.

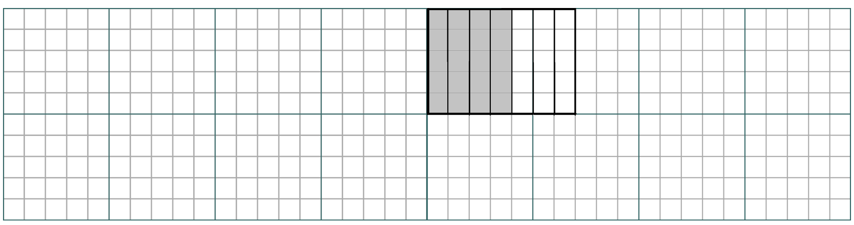
Teknikken er mere brugt i folkeskolen end i gymnasiet, så jeg tror ikke jeg vil kalde den relevant. Det er dog stadig interessant at se, om det er problematisk for eleverne, for ifølge tabel 1 er håndtering af diagrammer, figurer og modeller en typsik udfordring ved de rationale tal.

E4 kan løses ved fx at tegne et rektangel med en sidelængde på 7 tern, som er det der kaldes enheden i $\tau_{2.5}$. Derefter skraveres 4 søjler i rektanglet, dvs. det er antallet af enheder der skal tælles med. Mange andre figurer kan laves, men dette vil være det nemmeste.

Hvis eleverne begynde at skravere hele figuren skal de først til at udregne hvor mange tern der hører til en syvende del af figuren. Det er i det her tilfælde, 228,6 tern ud af 400. Det er altså ikke nemt at udregne uden lommeregner.

Der er medvilje ikke angivet en bestemt figur da det er interesant at se hvilke figurer eleverne vælger.

I figur 13 ses et eksempel på en besvarelse af E4.



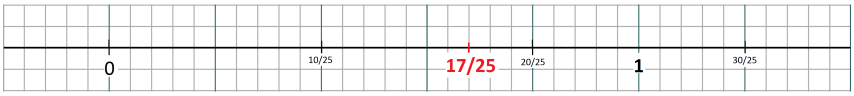
Figur 13: Her ses et forslag til, hvordan E4 fra GT kan løses

I E5 skal der tegnes en tallinje, hvor der imellem hvert heltal skal være en inddeling på 25, som er enheden jvf. $\tau_{2.5}$. Derfor er der ikke på forhånd givet en tallinje, da det er en del af opgaven at finde ud ad hvordan den mest hensigtsmæssigt tegnes.

Nogle kunne måske finde på at afgøre hvilke hele tal brøken ligger imellem før de tegner tallinjen. Det svarer til opg. $T_{3.1}$. Først benyttes dog $\tau_{2.1'''}$ til at omskrive hele tal til en brøk med samme nævner, derefter kan benyttes $\tau_{3.1'}$ til at afgøre ordenen mellem brøkerne ved blot at sammenligne tæller.

Da der skal tælles 17 enheder med, er det altså mindre end de 25, derfor er det ikke nødvendigt at have en tallinje der går højere op end én ($\frac{17}{25} < \frac{25}{25}$). Man kan altså blot tegne en linje, placere 0 i starten, tælle 25 tern frem og placere 1. Derefter kan man tælle 17 tern hen og placere brøken dér.

I figur 14 ses et eksempel på en besvarelse af E5.



Figur 14: Her ses et forslag til, hvordan E5 fra GT kan løses

B.8.1 *Diskussion i forhold til grafer*

Følgende hentyder til graferne 12 og 11, bemærk dog at ekstraopgaverne er fjernet fra disse grafer. Ekstraopgavernes placering kan i stedet ses på figur 10.

<u>Diskussion i forhold til graf: E2 for 3.g</u>

E2 skiller sig meget ud hos 3.g'erne, da mange af de aller dygtigste har brugt den forkerte teknik τ_{E2**}. Det drejer sig om elev3.3(24), 3.4 (17), 3.5 (20), 3.7 (20), 3.10 (20), 3.13 (22), 3.16 (19), 3.21 (18), 3.22 (24). Dvs. gennemsnittet af eleverne der har brugt denne teknik er bemærkelsesværdigt højt på $20,4$. Disse dygtige elever kan altså ikke trække gennemsnittet op for de rigtigt besvarede. Derudover trækker det rigtig meget ned at det rent faktisk er lykkedes elev1.17 (7) at svare rigtigt, på trods af et meget dårligt snit. Der er altså ikke nok gode til at trække dette snit op.

Jeg ved ikke hvad der er gået galt for 3.g'erne men de har forstået opgaven helt anderledes og har glemt at tage højde for hele pizzaen. Her formår de svage elever som tegner pizzaer at løse opgaven bedre end de dygtige som forsøger at udregne, men får tænkt forkert.

<u>Diskussion i forhold til graf: E4 for 3.g</u>

Elev3.6 (11) har overraskende svaret korrekt ved at indse at det blot handler om at lave en figur. De tilsvarende elever der har svaret korrekt har pointtallene, 19,24,15 og 20, hvilket giver et snit på 19,5 hvilket ikke er nok til at trække op. Mange af de dygtige har altså fejlet eller "mistforståët"opgaven. Det skyldes fx at elever med pointtallene 22, 23 og 24 alle har regnet forkert i forhold til antallet af felter der skal skraveres.

Punktet havde ligget nogenlunde tæt på linjen hvis blot eleven med pointtal 11 havde svaret forkert og én af de høje pointtal som nævnt ovenfor havde regnet korrekt da antallet af tern blev skraveret.

Diskussion i forhold til graf: E4 for 1.g

Elev1.11 (13) har ligesom hos 3.g'erne overraskende svaret korrekt ved at indse, at det blot handler om at lave en figur. Punktet havde igen ligget nogenlunde hvis blot denne elev havde svaret forkert, og én af de dygtige i stedet havde svaret korrekt, for igen har de dygtige forsøgt, men regnet forkert da antallet af tern skulle udregnes.

Fx har elev1.1 (21) skraveret 28 felter, og er altså meget tæt på at svare korrekt. Divisionen er faktisk udført korrekt, men ikke færdiggjort, da eleven er kommet frem til $\frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$ og dermed konkluderer at der skal skraveres $7\dot{4} = 28$ tern ud over de 200. Der vælges altså at se bort fra resten på $4 \cdot \frac{1}{7}$.

Opgaven er altså drilsk da den kan løses meget let hvis man ser på opgaven med simple øjne, men samtidig giver anledning til kompliceret udregning hvis man ser på den med mere komplicerede øjne. Derfor formår nogle af de svage elever at svare korrekt, mens nogle af de dygtige forsøger, men laver regnefejl eller afrundingsfejl.

Diskussion i forhold til graf: E1 for 1.g

Det der får punktet til at afvige så meget er, at elev1.11 med pointtal (12) formår at svare korrekt, mens elev1.12 med pointtal 27 desværre svarer forkert. Havde disse to været byttet rundt, havde punktet ligget pænt. Bemærk at elev1.12 laver sin eneste fejl i denne opgave.

Opgaven er drilsk, for hvad vil det egentlig sige at der er forskel på division og brøker. Eleverne er ikke vandt til at håndtere denne slags spørgsmål.

Diskussion i forhold til graf: E5 for 1.g

Afviger fordi så få har svaret korrekt. Det er kun 3 elever, hvoraf elev1.12 med gennemnsittet 27 er den ene af dem, og derfor er det med til at placere det så højt. I virkeligheden er det tankevækkende at den bedste elev findes i 1.g. Hvis denne elev i stedet havde haft et pointtal på fx 24, som den højeste hos 3.g'erne, så ville punktet have ligget mere normalt.

Man kan diskutere hvor vidt elev1.21 rent faktisk har svaret korrekt. Da eleven har placeret brøken "korrekt"mellem to andre brøker men ladt 5 tern repræsentere $\frac{1}{25}$-del. Dermed har papiret ikke nok plads. Og man kan altså sige at eleven ikke har været i stand til at lave en passende tallinje. Hvis elevens besvarelse blev kaldt korrekt, så ville punktet have ligget pænt på linjen.

OPgaven kunne altså være formuleret bedre, ved fx at bede dem om at tegne en tallinje først.

Diskussion i forhold til graf: E3 for 1.g

Afviger fordi både elev1.8 og elev1.11 med pointtal 12 har svaret korrekt. De trækker altså væsentligt ned. Der er ikke tilsvarende nok af de dygtige der har svaret på opgaven.

Bemærk at samtlige punkter som afviger markant under grafen hos 1.g'erne skyldes at elev1.11 mod forventning har svaret korrekt på disse opgaver.

OPgaven er ikke blevet besvaret af mange. Nok fordi den skiller sig ud så de der har haft tiden til ekstraopgaverne har gemt den til sidst, hvorimod andre blot har taget opgaverne i rækkefølge.

GT	Opgave	Anvendte teknikker	Nye teknikker	Forkerte teknikker	
E1)	$T_{2.2}$	$\underline{\boldsymbol{\tau}_{2.2}}$		τ_{E1**}	
E2)	$T_{5.1}, T_{4.1}$	$\underline{\boldsymbol{\tau}_{5.1}}, \underline{\boldsymbol{\tau}_{4.1}}, \tau_{4.1'''}$		τ_{E2*}, τ_{E2*}	
E3)	$T_{5.1}, T_{4.1}$				
E4)	$T_{2.5}$	$\underline{\boldsymbol{\tau}_{2.5}}$			
E5)	$T_{2.5}$	$\underline{\boldsymbol{\tau}_{2.5}}$			
E6)	$T_{2.4}, T_{2.1}$	$\underline{\boldsymbol{\tau}_{2.4'}}, \underline{\boldsymbol{\tau}_{2.1}}, \tau_{2.4}$		$\tau_{2.1*}, \tau_{2.1**}$	
E7)	$T_{4.1}, T_{5.1}$	$\tau_{4.1}, \tau_{2.1'''}, \tau_{5.1''}, \tau_{5.1}$			

Tabel 40: oversigt over ekstraopgaver

B.9 BILAG TIL A POSTERIORI ANALYSEN AF GT

B.9.1 *Statistiske formler*

Følgende afsnit bygger på **taylor:1997** (**taylor:1997**; **s.97-103**).
Der er 21 opgaver som skal løses, så hver elev kan opnå et sted mellem 0 og 21 point. For nemhedsskyld vil jeg hellere arbejde i procenter, så eleverne kan svare rigtig på mellem 0 og 100 %.

Statistikken for det samlede antal elever er behandlet på samme måde som klasserne hver for sig, bare hvor al data er slået sammen til "én klasse", hvorefter der er lavet statsitik på dette.

Gennemsnitligt svarer hver elev rigtig på:
1.g: $74,6\% \pm 16,17\%$
3.g: $73,6 \pm 21,53$
Sammenlagt: $74,1\% \pm 18,8\%$

Hvor standardafvigelsen er beregnet med formlen:
$sd = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}}$ Hvor x er hver enkelt elevs procenttal, $\overline{x}$ er elevernes gennemsnitlige procenttal og n er antal elever vi har målt på.

Bemærk at det ikke ændrer på formlerne at der arbejdes i procent.

Der er altså stor forskel på, hvor godt hver enkelt elev har klaret sig, og hvis vi antager at elevernes pointtal er normalfordelt og udvælger en tilfældig elev fra en af klasserne, så vil 68% af pointallene ligger inden for én afvigelse fra middelværdien.

Det der er udregnet indtil nu er usikkerheden på hver enkelt elevs procenttal. Man kan også udregne usikkerheden på selve gennemsnittet ud fra følgende formel: $\frac{sd}{\sqrt{n}}$

Hvor sd er afvigelsen på hver enkelt elev, som blev fundet før og N er antallet af elever vi beregner gennemnsittet ud fra. Det er denne afvigelse der præsenteres i opgaven, da den netop udtrykker usikkerheden på gennemsnittet.

B.9.2 *Detaljer om resultater fra testen*

Her ses mere detaljeret hvilke elever der har svaret hvad. Disse data er også plottet ind i excel hvorfra al statistikken er blevet udregnet. På trods af dobbelttjek kan jeg selvfølgelig ikke udelukke at der skulle være nogle forskellige mellem disse tal og excel-arkene. Det er excel-arkene der er de mest korrekte, da det er dem jeg hele tiden har dobbelttjekket med originalkilderne (elevernes besvarelse) når jeg var i tvivl om noget.

Spørgsmål 1a

Elever der ikke løste opgaven i 1.a:
3.g: elev3.24
1.g:

Generelt facit i 1.a:
De fleste elever formår at nævne 2-3 brøker, hvoraf følgende er mest hyppige: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$.

Primære teknikker i 1.a:
$\tau_{1.2}$ blev brugt af næsten alle til at argumentere med.

$\tau_{2.4}$ blev brugt af elev 1.19 til at understrege sin pointe ved at skravere cirkler.

Men ingen elever brugte nogle af de forkerte teknikker der blev fundet i a priori analysen. Og ingen elever gik ind og begyndte at argumentere direkte for ækvivalens.

Nye teknikker i 1.a:
$\tau_{1.2\sharp} = \textit{Brøkdelen } \frac{a}{b} \textit{ af } x \textit{ er } \frac{(x \cdot a)/b}{x}$ (elev1.13)
$\tau_{1.2\sharp\sharp} =$ *Find brøker der har samme decimalrepræsentation* (elev1.10, elev1.11)
$\tau_{1.2\sharp\sharp\sharp} = \textit{Brøkerne } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ hvis } \frac{a}{b} = x\% \textit{ og } c = x\% \cdot d$ (Elev3.19)

Denne teknik er dog meget kompliceret, da man både skal kunne omskrive til procent og bagefter gange med procent. Elev3.19 kom da også kun med eksemplerne $\frac{6}{8} = \frac{75}{100}$.

Mangelfuld forklaring i 1.a:
3.g: Elev3.8, elev3.13 og elev3.23
1.g: Elev1.5,elev1.7, elev1.8
Flere elever formår ikke at formulere en fyldestgørende forklaring på, hvorfor brøkerne er lig hinanden. De løser opgaven rigtig uden at det kan ses matematisk hvilken teknik de har brugt. Elev3.3 skriver fx at det er fordi der "bare er forlænget"uden at forklare hvad det vil sige. Andre skriver at de "fordobler brøken"uden igen at vise hvad de mener med det.

Mistforstået forklaring i 1.a:
3.g: Elev3.3,elev3.6, elev3.14
1.g: elev1.2, elev1.4

Elev1.2 har en mistforstået matematisk notation: $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$ som i pressede situationer nemt kan føre til at den forkerte teknik $\tau_{1.2*}$ vil blive brugt, så der kun bliver ganget på i fx tæller

Andre har også denne misforståelse i deres forklaringer. Fx skriver elev3.14 at der "ganges med 2"uden at udspecificere at det er i tæller og nævner. Men de får korrekt facit og viser ikke deres mellemregning.

Forkerte teknikker i 1.a:
$\tau_{1.2***} = \textit{Opløft brøken i en potens: } \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ (Elev3.3)

$\tau_{1.2****} = \textit{Fordi } c \textit{ går op i } a \textit{ og } d \textit{ går op i } b \textit{ er } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Elev3.6)

Eleven skrev fx at 6 går op i 3 og 8 går op i 4 så $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Eleven har altså misforstået hvad det vil sige at "gå op i et tal". Argumentet holder desuden ikke da man så kunne bruge samme argument til at konkludere $\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Spørgsmål 1b

Elever der ikke løste opgaven i 1.b:
3.g: elev18, elev3.24
1.g: elev1.6,

Generelt facit i 1.b:
Nogle giver nedenstående udregning og bagefter en forklaring, andre har medtaget matematisk hvordan de dividerer i tæller og nævner: $\frac{-68}{12} = \frac{-34}{6} = \frac{-17}{3}$
Stort set alle har som forventet udført udregningen trinvist for bedre at gennemskue fælles divisorer. Følgende elever har lavet udregningen i ét trin, nogle enkelte dog med hovedregningsskriblerier i margenen:
3.g: elev3.1, elev3.3, elev3.16, elev3.23
1.g: elev1.9, elev1.12, elev1.20, 1.24

Primære teknikker i 1.b:
$\tau_{1.1}$ blev som forventet brugt af næsten alle til at dividere med fælles nævner.

$\tau_{1.1'}$ blev dog også brugt af nogle til at opløse i faktorer og fjerne dem de har til fælles:
3.g: Elev3.3, elev3.7, elev3.16
1.g:

$\tau_{1.2}$ blev desuden brugt af Elev3.20 til at gange med $\frac{1}{2}$ i både tæller og nævner.
$\tau_{2.2'}$ blev brugt af elev3.5 til at omskrive til blandet brøk, dvs. $5\frac{2}{3}$.

Ingen elever har brugt $\tau_{1.3'''}$ til at omplacere minus-tegnet.

Nye teknikker i 1.b: Ingen

Mangelfuld forklaring i 1.b:
Flere elever glemmer at komme med en forklaring eller at vise deres mellemregninger. De medtager dog den ovenstående udregning der indikerer at de har brugt $\tau_{1.1}$:
3.g: Elev3.4, elev3.10, elev3.13, elev3.19
1.g:

3.10 har dog løst opgaven forkert, da det er blevet til $\frac{-17}{4}$, dvs. der er nok udregnet $6 : 2 = 4$

Misforstået forklaring i 1.b:
Elev3.8 skriver fx:

$$\frac{-68}{2}/2 = \frac{-34}{6}/2 = \frac{-17}{3}$$

Andre skriver også at de blot "dividerer med 2"men noterer det heller ikke matematisk med en mellemregning. Det drejer sig om de samme 5 elever som formulerede sig forkert i spørgsmål 1.a, derudover også:
3.g: elev3.15, elev3.21,
1.g: elev1.8, elev1.22

Forkerte teknikker i 1.b:
$\tau_{1.3**}$ = *Se bort fra minus-tegnet* (elev3.5, elev3.16, elev1.4, elev1.11, elev1.14, 1.20, 1.8)

Minustegnet bliver glemt af flere i mellemregningerne og derfor også i facit, men man kan ikke sige at de bevidst har set bort fra minustegnet: Elev1.10, elev1.3, 3.19, 3.22, 3.12

$\tau_{1.1***}$ = *Anvend* $\tau_{1.1}$ *men gentag IKKE trods fælles divisor* (Elev3.6, elev3.17)

Elev1.8 har desuden anvendt den forkerte teknik $\tau_{1.1**}$, men ingen har anvendt den forkerte teknik $\tau_{1.1*}$.

Spørgsmål 2.a

Elever der ikke løste opgaven i 2.a:
3.g: elev1, elev6, elev12, elev14, elev17, elev18, elev24,
1.g: elev1.5,elev1.7, elev1.9, elev1.24

Generelt facit i 2.a:
$\frac{1453}{1000}$

Primære teknikker i 2.a:
$\tau_{2.1}$ blev som forventet brugt af næsten alle til at skabe brøk med nævner 1000, dog har ingen mellemregning med.

Nogle få benyttede sig også af teknik $\tau_{2.1'}$ om at gange decimaltallet med passende tal for at opnå heltal og dermed finde nævneren. Alle der brugte $\tau_{2.1'}$ havde mellemregning med:
3.g: Elev3.10, elev3.7, elev3.3
1.g: Elev1.6, elev1.14, elev1.15, elev1.16, Elev1.21

Elev1.17 er den eneste som forsøger at anvende $\tau_{1.1}$ til at kommenterer på hvorvidt brøken kan reduceres yderligere efter anvendelse af $\tau_{2.1}$.

Nye teknikker i 2.a:
$\tau_{2.1\sharp}$ = *Opdel decimaltallet som en sum af flere decimaltal* (elev3.4, elev3.16)

$\tau_{2.1\sharp\sharp}$ = *Find to hele tal som opfylder, at* $y : x = a_1, d_1 d_2 \cdots$ *ved at prøve sig frem med* $x \cdot a_1, d_1 d_2 \cdots$ *indtil et heltal opnåes* (elev3.2)

Denne teknik er dog meget besværlig da det kan tage lang tid at prøve sig frem indtil man når tallet 1000. Eleven formår da heller ikke at få et facit, så den karakteriserer nærmere under "forkerte teknikker".

Mangelfuld forklaring i 2.a:
Alle der anvendte teknik $\tau_{2.1}$ pånær elev1.19, der har relateret til antallet af decimaler og elev1.3 der argumenter med $0,2 = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, dvs. anvender $\tau_{1.2}$.

Misforstået forklaring i 2.a: Ingen

Forkerte teknikker i 2.a:
Elev1.18 anvender $\tau_{2.1**}$ om at flytte flytte komma et forkert antal pladser, og nogle andvender $\tau_{2.1*}$ om at give decimaltallet nævner 1: 3.g: Elev3.11, Elev3.15, Elev3.20, elev3.21
1.g: Elev1.8, elev1.13, elev1.22,

Elev1.4 løser opgaven med $\tau_{2.1}$ og kalder det en uforkortelig brøk, men anvender bagefter $\tau_{2.1*}$ og kalder $\frac{1,453}{1}$ for en blandet brøk.

Spørgsmål 2.b

Elever der ikke løste opgaven i 2.b:
3.g: Elev3.14, elev3.17, elev3.24,
1.g: elev1.5, elev1.24

Generelt facit i 2.b:

Primære teknikker i 2.b:
$\tau_{2.2'}$ blev som forventet brugt af næsten alle til at omskrive til mindre brøker, som de kunne finde decimalværdien af.

Heraf viser kun elev1.4, elev1.16 og elev1.19 hvordan de omregner $\frac{3}{4}$ til decimaltal. For resten er det nok noget de husker "i hovedet", eller som elev1.16 skriver "min logiske sans siger mig".

Fx udregner elev1.19 $\frac{3}{4} = 100 : 4 \cdot 3$ og elev1.6 viser at $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ ($\tau_{1.2}$).

Nogle få benyttede sig også af den forventede teknik $\tau_{2.2}$ om at bruge en divisionalgoritme:
3.g: elev3.9,
1.g: elev1.2, elev1.9, elev1.24(udregner ikke)

Nye teknikker i 2.b:
$\tau_{2.2\sharp}$ = *Opdel brøken* $\frac{a}{b}$ *som et multiplikation mellem tæller* a *og en enhedsbrøk* $\frac{1}{b} = 0, c_1 c_2 \cdots$ *som omskrives til decimaltal.* (elev1,4, elev1.23)

Denne teknik efterfølges af teknik $\tau_{5.2}$ som anvendes til at udføre multiplikationen mellem decimaltal.

Elev1.3 benytter desuden $\tau_{1.2}$ til at forlænge brøken til nævner 100, hvorefter omskrivningen til decimaltal følger med simpel divisionsalgoritme $\tau_{2.2}$.

Mangelfuld forklaring i 2.b:
Få elever angiver kun resultatet uden nogen hint om, hvordan de kom frem til det, men sandsynligvis har de benyttet sig at en simpel divisionsalgoritme i hovedet ($\tau_{2.2}$). Andre har flere mellemregninger med, men undlader at vise hvordan de udregner 15/4. 3.g: Elev3.7
1.g: Elev1.1, elev1.17, elev1.22

Misforstået forklaring i 2.b:
Nogle elever anvender den forkerte teknik $\tau_{1.1****}$ nævnt nedenfor, som egentlig giver korrekt facit hvis man ikke laver regnefejl, men ikke er en korrekt matematisk notation. 3.g: elev3.15, elev3.5
1.g: ingen

Forkerte teknikker i 2.b:
$\tau_{2.2**}$ = *Tag cifrene i brøken og lad dem være cifrene efter kommaet* $\frac{a}{b} = 0, ab$ (elev1.11)

$\tau_{2.2***}$ = *Find heltallet og lad 'resten' være cifferet efter komma:* $\frac{a}{b} = \frac{x \cdot b + r}{b} = x, r$ (elev3.6)

$\tau_{1.1****}$ = *Divider i tæller og nævner med alle slags tal, fx 2, ikke kun fælles divisiorer, så der opnås brøker med decimaltal i nævner* (elev3.15, elev3.19, elev3.10)

Elev3.19 og elev3.10 laver desuden regnefejl i forsøget på at bruge denne teknik til udregningen $\frac{15}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$.

Elev3.2 og elev3.11 anvender den korrekte teknik $\tau_{2.2'}$, men laver regnefejl ved fx at udregne $3/4 = 0,705$ eller $\frac{15}{4} = 12 + \frac{3}{4}$. Elev1.8 anvender også $\tau_{2.2'}$, men udregner $3\frac{3}{4} = 3,33334$.

Elev3.4 anvender $\tau_{2.2*}$.

Spørgsmål 2.c

Elever der ikke løste opgaven i 2.c: Ingen

Generelt facit i 2.c:
$0,0345 \cdot 100 = 3,45\%$

Primære teknikker i 2.c:
$\tau_{2.3'}$ blev som forventet brugt af næsten alle til multiplicere med 100.

Næsten alle elever kommer med ovenstående mellemregning. Nogle enkelte uddyber ved i stedet ved at bruge en nye varianter af teknik 2.3′:
$\tau_{2.3'!}$ = *Omskriv* a *til procent:* $\frac{a \cdot 100}{100} = (a \cdot 100)\%$ (elev1.12, elev1.13, elev3.5, 3.21)
Denne teknik er god da den faktisk viser hvad det er, der matematisk sker ved omskrivning til procent. Det viser at eleven har dybere viden om teknikken end blot udenadslære.
Elev3.3 uddyber ved at nævne at procent er hundredele.

$\tau_{2.3'!!}$ = *Gang med 100* % (Elev3.22, elev3.20, elev3.12, elev3.11)
Denne teknik er egentlig mere matematisk korrekt end blot at gange med 100.

Nye teknikker i 2.c:
$\tau_{2.3\sharp}$ = *Flyt kommaet to pladser til højre* (elev1.16, elev1.17)
$\tau_{2.3\sharp\sharp}$ = *Benyt decimaltallenes placeirng* $1 = 100\%, 0,1 = 10\%, 0,01 = 1\%, 0,001 = 0,1\%$ *osv.* (elev1.2, elev1.4, elev1.7, elev3.7)

Disse teknikker er problematiske, da de ikke viser viden om, hvordan man matematisk omskriver, men blot 'mekaniske' teknikker som er lært sig udenaf.

Mangelfuld forklaring i 2.c: Ingen

Misforstået forklaring i 2.c:
Elev1.1 bruger den forkerte teknik $\tau_{2.3**}$ som er nævnt nedenfor, men løser opgaven korrekt.

Forkerte teknikker i 2.c:
$\tau_{2.3**}$ = *Divider kommatal med 100 for at få procent* (elev1.1)
$\tau_{2.3***}$ = *Gang med 10 for at få procent* (elev1.8, elev1.23)

Elev 1.8 skriver endda at der divideres med 10, selvom eleven har ganget.

Ingen brugte den forkerte teknik $\tau_{2.3*}$ om at lave fejl pga. tallet er mindre end 10%.

Spørgsmål 2.d

Elever der ikke løste opgaven i 2.d:
3.g: Elev3.17

1.g:

Generelt facit i 2.d:
Der er 4 mellemregninger som eleverne bruger:
A) $3,8/100 = 0,038$ (8 fra 3.g og 7 fra 1.g)
B) $3,8\% = \frac{3,8}{100} = 0,038$ (elev3.11,elev3.12,elev3.23, elev1.18)
C) $3,8\%/100 = 0,038$ (elev3.3+3.16+3.20, elev1.9+1.10+1.12+1.13+1.22)
D) $3,8\%/100\% = 0,038$ (elev3.4, elev3.5,elev3.21)

Primære teknikker i 2.d:
$\tau_{2.4'}$ blev som forventet brugt af næsten alle til at dividere med 100. De 4 mellemregninger kan ses somv varianter af denne teknik. Heraf er mellemregning B den der viser størst viden om, hvad procent er.

Nye teknikker i 2.d:
$\tau_{2.4\sharp}$ = *Komma flyttes to pladser frem* (elev3.6, elev1.2, elev1.4 ,elev7, elev1.16, elev1.17, elev1.20)

Følgende elever brugte desuden $\tau_{2.3\sharp\sharp}$ fra forrige delspørgsmål:
3.g: elev3.7
1.g: elev1.24

Mangelfuld forklaring i 2.d: Ingen

Misforstået forklaring i 2.d:

Forkerte teknikker i 2.d:
Elev3.2 og elev3.24 skriver at teknik $\tau_{2.4'}$ bruges, men i praksis bruges $\tau_{2.3***}$ i stedet.

Elev3.17 omskriver til blandet brøk i stedet og gør det desuden også forkert ($3\frac{1}{8}$):
$\tau_{2.4**} = 0,x\% = \frac{1}{x}$ og $y,0\% = y$ (elev1.17)
$\tau_{2.4***}$ = *Divider med 10* (elev1.5, elev1.8 - ligesom $\tau_{2.3***}$)

Elev1.19 bruger $\tau_{2.3\sharp\sharp}$, men tror fejlagtigt at 3,8 er decimaltal som skal omskrives til procent.
Ingen elever benytter sig af $\tau_{2.4*}$.

Spørgsmål 3.a

Elever der ikke løste opgaven i 3.a:
3.g: 1.g:

Generelt facit i 3.a:
Den hyppigste sammenligning er:
A) $0,4\underline{5} > 0,4\underline{4}5$ da $5 > 4$
Nogle enkelte laver i stedet denne sammenligning:
B) $0,4\underline{50} > 0,4\underline{45}$ da $50 > 45$ (elev1.6, elev3.12)

Primære teknikker i 3.a:
$\tau_{3.2'}$ blev som forventet brugt til at sammenligne med lexiografisk orden.

En ny variant er:
$\tau_{3.2'!}$ = *Brug lexiografisk orden til at sammenligne orden ved at identificerer første placering efter kommaet med værdien $\frac{1}{10}$, 2.placering med $\frac{1}{100}$ osv.* (elev3.1, elev1.15)

Følgende elever brugte i stedet $\tau_{3.2}$ om at gange med tal for at sammenligne heltal:
3.g: elev3.9
1.g: elev1.2, elev1.3, elev1.12, elev13
Elev 1.3 brugte en ny variant af $\tau_{3.2}$ ved at bruge $\tau_{2.3'}$ til at omskrive til procent, hvilket dog er det samme som blot at gange med 100.

Føkgende elever brugte $\tau_{3.0''}$ om at undersøge forskellen mellem tallene. 3.g: elev3.2, elev3., elev3.5, elev3.7, elev3.11
1.g: elev1.4

Nye teknikker i 3.a: Der er så overvældende mange der anvender følgende nye teknik, at den næsten skulle være kategoriseret som primær teknik sammen med $\tau_{3.2'}$. Den er dog mest brugt af 3.g'ere og det var ikke en teknik jeg havde forudset så den bliver ikke kaldet primær:
$\tau_{3.2\sharp}$ = *Sammenlign det som tallene runder op til. Hvis fx* a *rundes op til* b *så må* b *være størst.*
3.g: elev3,elev6,elev10,elev13, elev16,elev17,elev19
1.g:elev1.14, elev1.20

Mangelfuld forklaring i 3.a:
Elev3.14, elev3.15, elev3.21, elev3.23 og elev3.24 har ikke forklaret hvorfor $0,45$ er størst.

Misforstået forklaring i 3.a: Ingen

Forkerte teknikker i 3.a:

$\tau_{3.2***}$ = *Man kan ikke sammenligne decimaltal der ikke har lige mange cifre* (elev1.18)
$\tau_{3.2****}$ = *Rund op til samme antal decimaler og sammenlign* (elev1.24)
$\tau_{3.2*****}$ = *Placer efterstillede nuller så der er lige mange cifre. Sammenlign derefter kun sidste ciffer* (elev1.7, elev1.11)
Bemærk at $\tau_{3.2\sharp}$ minder meget om $\tau_{3.2****}$. Forskellen er hvordan man tolker på afrundingen.
Ingen har benyttet sig af $\tau_{3.2*}$.

Spørgsmål 3.b

Elever der ikke løste opgaven i 3.b:
3.g: 3.24
1.g: Elev1.11

Generelt facit i 3.b:
En typisk sammenligning er:
$\frac{7\cdot 7}{11\cdot 7} = \frac{49}{77} > \frac{44}{7} = \frac{4\cdot 11}{7\cdot 11}$ Men der er mange variationer af denne mellemregning, og flere undlader fx at vise hvordan de har forlænget brøkerne.

Primære teknikker i 3.b:
$\tau_{3.1'}$ blev som forventet brugt til at sammenligne brøker med fælles nævner.

Elev3.7 anvender dog $\tau_{3.0''}$ om at sammenligne forskellen mellem brøkerne.

Teknikken $\tau_{3.1}$ blev som forventet ikke brugt.

Nye teknikker i 3.b:
$\tau_{3.1\sharp}$ = *Sammenlign begge brøker i forhold til en anden brøk fx $\frac{1}{2}$, og vurder hvor meget de afviger fra denne.* (elev3.1)

Denne teknik er problematisk, da den ikke siger noget om hvordan denne vurdering skal foretages for at blive korrekt.

$\tau_{3.1\sharp\sharp}$ = *Spejlvend brøkerne i 1 og sammenlign. Da er den oprindelig orden det omvendte:* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow 1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d}$ (Elev3.2)

Mangelfuld forklaring i 3.b:
Elev3.6 anvender $\tau_{3.0}$ til at repræsentere i en figur, men det er ikke tydeligt ud fra den upræcise tegning at den ene brøk virkelige er større end den andne, selvom eleven konkluderer rigtig.

Følgende elever forklarer ikke hvordan de indser resultatet. De siger blot noget i stil med: "tælleren er en større del af nævneren": 3.g: Elev3.17, elev3.18, elev19, elev21
1.g:

Misforstået forklaring i 3.b:
Elev1.18 finder den største brøk, men regner forkert og får fællesnævernen til at være $21 = 2 \cdot 11 = 7 \cdot 3$.

Elev1.14 forlænger brøken forkert og får $7 \cdot 7 = 59$. Heldigvis for eleven ødelægger det ikke resultatet.

Forkerte teknikker i 3.b:
$\tau_{2.0*}$ = *Omskriv til blandet brøk ved at sige "heltal større end brøken"+ "det der mangler for at blive et heltal".* (elev3.1)
Fx har Elev1 skrevet $\frac{7}{11} = 1 + \frac{4}{11}$. Denne teknik vil jeg gerne have uddybet. Hvad har elev1 egentlig tænkt her? Teknikken minder om $\tau_{3.1\sharp\sharp}$.

$\tau_{3.0*}$ = *En brøk med større nævner giver flere inddelinger og er derfor en mindre brøk.* (elev1.5)

Elev3.4 og elev3.14 anvender $\tau_{3.0}$ til at skravere en cirkel. Problemet ved denne metode er, eleven ikke bruger samme enhed i de to cirkler, så der aflæses grafisk pr. øjemål og det vurderes at de fylder lige meget af en cirkel. Elev3.6 nævnt ovenfor kunne lige så nemt have aflæst modsat og dermed også fået forkert.

Elev3.24 og elev1.11 har svaret forkert uden nogen former for argumenation og anses derfor som nogen der ikke har løst opgaven, da der nok bare er valgt "tilfældigt".

Elev1.8 bruger $\tau_{1.2}$ til at forlænge med 2 og kommenterer desværre bagefter at brøkerne $\frac{14}{22}$ og $\frac{16}{28}$ nok er ens. Eleven virker til at mangle viden om hvordan man sammenligner brøker.

Spørgsmål 4.a og b

Elever der ikke løste opgaven i 4.a og b:
3.g:

1.g: elev1.5 (4a)

Generelt facit i 4.a og b:
Nogle har mellemregning med hvor de viser hvordan de forlænger, andre udregner blot
$\frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$
$\frac{12}{21} - \frac{7}{21} = \frac{5}{21}$

Primære teknikker i 4.a og b:
$\tau_{4.1}$ blev som forventet brugt til at finde fælles nævner først.

Nye teknikker i 4.a og b:

Mangelfuld forklaring i 4.a og b: Ingen

Misforstået forklaring i 4.a og b: Ingen

Forkerte teknikker i 4.a og b:
$\tau_{4.1**}$ = *Læg/træk tæller sammen og nævner sammen/fra hinanden* (elev1.11, elev3.6, elev3.14, elev3.17, elev3.24)

Elev1.11 havde sådan set regne rigtig men streget det hele ud igen og startede forfra. Måske efter at have løst opgaven om multiplikation?

Elev1.8 forlænger forkert i 4.b og får, at $\frac{4}{7} = \frac{16}{21}$.

Spørgsmål 4.c

Elever der ikke løste opgaven i 4.c:
3.g:
1.g:

Generelt facit i 4.c:
Følgende mellemregning er typisk: $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{19}$

Nogle viser også tydeligere at de multiplicerer tæller og nævner

Primære teknikker i 4.c:
$\tau_{5.1}$ blev som forventet brugt. Følgende har ikke efterfølgende brugt $\tau_{1.1}$ til at reducere brøken med: 3.g: (10 stk.) elev3.4+3.6+3.8+3.9+3.10+3.15, 3.20+3.21+3.23+3.24
1.g: (11 stk.) elev1.1+1.4+1.7+1.8+1.11+1.13+1.14+1.18+1.19+1.20+1.23

Nye teknikker i 4.c:
$\tau_{5.1\sharp}$ = *Forlæng til fællesnævner før tæller og nævner multipliceres* (elev3.16, elev3.22)

Elev3.16 reducerede desværre ikke facit bagefter, det gjorde elev3.22 dog.

Mangelfuld forklaring i 4.c: Ingen

Misforstået forklaring i 4.c: Ingen

Forkerte teknikker i 4.c:
$\tau_{5.1**}$ om at bruge division i stedet blev brugt af elev3.2, elev3.11, elev3.14.

$\tau_{5.1*}$ om kun at gange tællerne blev brugt af elev3.18, elev1.5

Spørgsmål 4.d

Elever der ikke løste opgaven i 4.d:
3.g: elev3.19, elev3.18, elev3.17, elev3.11. elev3.6, elev3.2
1.g:

Generelt facit i 4.d:
Følgende resultater er typisk:
A) $\frac{2}{13}$ (elev3.5+3.7+3.12, elev3.14, elev1.9+1.12+1.2)
C) $\frac{28}{182}$ (elev3.4+3.8+3.10+3.20+3.22+3.23+3.24+elev1.1+1.7+1.18+1.21+1.22
D) $\frac{14}{91}$ (elev3.1+3.3+3.9+3.21, elev1.1+1.3+1.6+1.10+1.13+1.14+1.15+1.17+1.19)

Ingen svarede $\frac{28}{7 \cdot 26}$, som jeg ellers havde forventet at nogle ville.

Primære teknikker i 4.d:

Elev3.14 og 3.7 brugte $\tau_{5.1}$ til at få $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$, hvorefter $\tau_{5.1'}$ blev brugt. Ellers brugte næsten alle $\tau_{5.1'}$ som forventet. Nogle kalder teknikken for at 'gange over kors'.

De fleste udregner $7 \cdot 26 = 182$ i margenen. Derefter reducerer nogle til A. Heraf er det kun elev1.12 og elev3.5 der forkortede brøken med $\tau_{1.1'}$ frem for at anvende $\tau_{1.1}$ to gange.

Dem der svarer D har brugt $\tau_{1.1}$. Ulempen ved teknikken er, at det kan være svært at gennemskue hvor lagt ned brøken kan reduceres når man arbejder med store tal.

Her får mange ikke tænkt over at 91 faktisk er deleligt med 7. Problemet bundner måske netop i, at de ikke er vandt nok til at tænke i 'faktorer' og derfor ikke tænker over, at $91 = 70 + 21$, for dermed ses nemt, at 7 er deleligt med begge tal, og dermed med 91. Dette er dog en teknik for hele tal og ikke for rationale tal, derfor er den ikke medtaget i min oversigt over teknikker.

Elev3.1 forsøgte at tjekke om 7 var en fællesfaktor med 182 ved at prøve at udregne $7 \cdot 26 = 182$, men bruger dog ikke dette resultat til noget.

Nye teknikker i 4.d:

Mangelfuld forklaring i 4.d:
Elev1.12 har ingen forklaring på udregningen.

Elev1.8 ganger med den omvendte, men formår ikke at reducere $\frac{\frac{28}{7}}{26}$. Derfor vil jeg kalde elevens argumentation for mangelfuld, da svaret ikke er leveret som én brøk.

Misforstået forklaring i 4.d: Ingen

Forkerte teknikker i 4.d:
$\tau_{5.1***}$ = *Brug følgende formel:* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$ (elev1.4, elev1.11)

Elev1.5 har svaret $\frac{13}{7}$ uden ydergliere forklaring.

Flere elever laver desværre regnefejl, dvs. brugt forkerte teknikker for 'hovedregning' men brugte ellers korrekt teknik: Elev1.20 fik $7 \cdot 26 = 182$, Elev1.24 fik $7 \cdot 26 = 164$, elev 3.15 fik $7 \cdot 6 = 56$.

$\tau_{5.1*}$ blev brugt af elev1.2.

Elev3.16 anvender $\tau_{5.1\sharp}$ til at forlænge til fællesnævner når der skal ganges med den omvendte. Eleven formår dog ikke at udføre multiplikation efterfølgende.

Spørgsmål 4.e

Elever der ikke løste opgaven i 4.e:
Elev3.15 har krydset "ved ikke"af.

Primære teknikker i 4.e:
Primære teknik er $\tau_{3.0'''}$ til at indse at multiplikation gør både større og mindre. De fleste sætter dog kryds uden at argumentere, så det må antages at de har brugt en variant af denne teknik, men det vides ikke.

Følgende elever anvender bagefter $\tau_{3.0'}$ til at konkludere at brøker gør større hvis tæller er større end nævne:.
3.g: elev3.1, elev3.7
1.g: elev1.18, elev1.14

Elev3.12 kom med konkrete eksempler: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 4$:

Nye teknikker i 4.e: Ingen

Mangelfuld forklaring i 4.e: Selvom meget forklarer sig, så kan de ikke ankalges for mangelfuld forklaring, da spørgsmålet ikke afkræver nogen forklaring, men blot et kryds.

Misforstået forklaring i 4.e:
Elev1.1 skriver at det kommer an på negative tal.

Elev 3.13 noterer at at resultatet bliver mindre hvis det er ægte brøker (<0) og ved uægte brøker kan det både gøre større og mindre (>0). Eleven har altså glemt at det ikke er større end nul men større end 1 der skal gælde! Elev 1.23 laver samme fejl med 'nul' og 'en'.

Forkerte teknikker i 4.e:
Følgende elever svarede forkert, men har ikke argumenteret for deres svar:
i) elev3.24, elev3.17, elev1.6, elev1.8, elev1.11, elev1.16
ii) elev3.4, elev3.8, elev3.14, elev3.19, elev1.21, elev1.17, elev1.9, elev1.4, elev1.3

Spørgsmål 5.a og b

Elever der ikke løste opgaven i 5.a og b:
3.g:
1.g:

Generelt facit i 5.a og b:

Eleverne udregnede som forventet opgaven ved at opstille tallene over hinanden og regne med 'mente'.

Primære teknikker i 5.a og b:
$\tau_{4.2}$ blev som forventet brugt af de fleste til at udføre addition og subtraktion som med hele tal.

Nye teknikker i 5.a og b:

Mangelfuld forklaring i 5.a og b: Ingen

Misforstået forklaring i 5.a og b: Ingen

Forkerte teknikker i 5.a og b:

Fejl i 5.a:
$\tau_{4.2**}$ = *Læg tallene sammen, hvert ciffer for sig, fra venstre mod højre. Lad 'menterne' bliver overført videre mod højre.* (elev3.17)

Elev3.5, elev3.14, elev1.19: Bruger korrekt teknik, men laver regnefejl. Glemmer fx at regne 'menter' med pga. skæv opskrivning af tallene eller at man ved 'menter' stadig skal huske det overskydende, dvs. hvis det giver 12 er 2 overskydende.

Elev3.8 brugte $\tau_{4.2'}$: $\frac{7855}{1000} + \frac{325}{1000} = \frac{8180}{1000} = 8,180$.
Problemet er, at eleven glemmer det sidste decimal, da der skulle være ganget med 10.000. I praksis bruger eleven egentlig $\tau_{2.1}$ om at omskrive til brøk og bagefter $\tau_{2.2}$ om at omskrive tilbage til decimaltal.

Fejl i 5.b:
$\tau_{4.2***}$ = *Træk tallene* $a - b$ *fra hinanden uden brug af menter og lad et '0' i minuenden (a) repræsentere et '10'-tal mens et '0' i subtrahenden(b) repræsenterer '0'.* (elev1.11, elev1.10, elev1.5, 1.17, 1.4)

Elev1.23, elev1.22, elev1.18, elev1.17, elev1.8: Anvender korrekt teknik men laver fejl med menterne, fx svært ved fx at holde styr på hvor menterne skal tages fra og hvordan man gør når man tager menter fra en mente. Fx ses, at menter regnes (elev1.8):

$$\begin{array}{r} \cancel{10}\cancel{0}8 \\ 6,\cancel{7}000 \\ -0,4321 \\ =6,2666 \end{array}$$

Elev3.8: brugte samme teknik som i 4.a, og glemte igen sidste ciffer.

Følgende elever anvendte den forkerte teknik, $\tau_{4.2*}$:
3.g: elev3.6, elev3.24
1.g: elev1.24, elev1.7

Spørgsmål 5.c

Elever der ikke løste opgaven i 5.c:
3.g: 3.19, 3.6
1.g: 1.5, 1.6, 1.13

Generelt facit i 5.c:

Primære teknikker i 5.c:
Jeg havde oprindeligt foreslået tre mulige teknikker, og disse har været cirke lige hyppige bland eleverne:
$\tau_{5.2}$ blev som forventet brugt af flere til at udføre multiplikationen: (8 elever)
3.g: elev3.22, 3.23, elev3.2
1.g: Elev1.1, elev1.8, elev1.9, elev1.12, elev1.17

En anden hyppig og primær teknik som jeg også foreslog er $\tau_{5.2''}$, som er brugt til at se bort fra kommaet og placerer det bagefter igen: (6 elever)
3.g: elev3.1, 3.20, elev1.15
1.g: Elev1.14, elev1.15, elev1.23,

Elev1.15 er dog den eneste der forklarer, hvordan det samlede antal decimaler er blevet talt op.

Der er dog også flere som først har anvendt den primære teknik $\tau_{5.2'}$ til at forlænge $0,2$ til 2, udført multiplikationen og til slut divideret resultatet med 10: (7 elever)
3.g: elev3.19, elev3.14, elev3.6, elev3.3
1.g: elev1.2, elev1.3, elev1.13

Flere har anvendt $\tau_{2.1}$, til at skrive et eller to af tallene om til brøker. jeg havde dog ikke forventet dette. Nogle har derefter brugt $\tau_{5.1}$ til at udføre multiplikationen, andre har med det samme brugt $\tau_{2.2}$ til at komme tilbage til decimaltal og herefter udført multiplikation med $tau_{5.2}$: 3.g: elev3.8, elev3.5, 3.11
1.g: se under "mangelfuld forklaring"

Nye teknikker i 5.c:
$\tau_{5.2\sharp}$ = *Opdel gangestykket i flere simplere gangestykker, så antallet af decimaler findes først og derefter udføres den egentlige multiplikation:* $(0,c_1) \cdot b = c_1 \cdot (0,1 \cdot b)$ (elev3.16, elev3.13)

Mangelfuld forklaring i 5.c:
Elev1.4, elev1.19 og elev3.21 bruger teknik $\tau_{2.1}$ til at omskrive multiplikation med $0,2$ til division med 5. Det forklares dog ikke hvordan denne omskrivning er udført, selvom der underbevist må være anvendt en variation af $\tau_{2.1}$ til at omskrive til brøken $\frac{1}{5}$. Selve divisonen med 5 er også udført uden mellemregninger, men facit er rigtig.

Elev1.19 har også opskrevet division med 5 men streget ud igen, så det anses som at opgaven slet ikke er løst.

Elev1.6 har også streget ud og derfor heller ikke løst opgaven, men havde dog ganget korrekt med 2, men ikke placeret kommaet korrekt.

Elev3.9 har ganget med 2, derefter ændret kommaets placering uden forklaring og efterfølgende kommenteret: "lidt i tvivl". Det ser der for ikke ud til at eleven har haft nogen viden om hvorfor kommet placeres som det gør.

Elev3.4 har udført multiplikation trinvist og korrekt, men glemt at lægge alle decimalerne sammen til sidst.

Mange af eleverne viser desuden ikke tydeligt hvordan de har placeret kommaet, men får dog rigtig resultat, så det er blevet accepteret. Selvom det er en skam at jeg ikke får mulighed for at se hvad de ved om hvordan de skal placere det.

Misforstået forklaring i 5.c: Ingen

Forkerte teknikker i 5.c :
$\tau_{5.2**}$ = *Gang tallene sammen hvert ciffer for sig .*
elev1.11: *A) Uden brug af 'menter' - hvis det overstiger 9 skrives blot tallet så der kommer flere decimaler. Se bort fra* 0 *foran kommaet.*
elev3.17: *B) Lad efterstillede nuller svare til at gange med* 1
elev3.17: *C) Placer hvert udregnet ciffer lige efter et komma. Til sidst lægges alle gangestykkerne sammen*

$\tau_{5.2***}$ = *Udfør multiplikationen og træk bagefter resultatet fra det oprindelige tal* (elev3.18)

Følgende har anvendt $\tau_{5.2*}$ om at decimaltallets placering ikke skal ændres.
3.g: 3.24
1,g: Elev1.7, elev1.21, elev1.24

Elev1.22 har brugt den forventede teknik $\tau_{5.2}$, men desværre regnet forkert i ét tilfælde: $0,2 * 0,6 = 1,8$. Eleven skriver, at en sådan opgave aldrig er set og regnet før.

Elev1.16 og elev1.20 har anvendt $\tau_{5.2'}$ til at forlænge til heltal først og placere komma til sidst. Der er dog lavet regnefejl. Den ene glemte at gange 2 ind på 3, den andne har udregnet $2 \cdot 6 = 62$.

Følgende elever har anvendt $\tau_{2.1}$ til at omskrive til brøker bagefter $\tau_{5.1}$ til at gange ind i brøken:
Elev1.10: $0,2 = \frac{2}{10}$, men har desværre regnet forkert da tælleren skulle udregnes: $2 \cdot 6,345 = 12,7$
Elev1.17: $0,2 = \frac{1}{5}$, hvor divisionen med 5 er udført hvert ciffer for sig. Det går dog galt for eleven til sidst når tallene skal lægges sammen så $0,008 + 0,001 = 0,0081$
Elev3.10: $0,2 = 2/10$, men regner desværre forkert: $\frac{12,690}{10} = 1,69$

Spørgsmål 5.d

Elever der ikke løste opgaven i 5.d:
Alle elever der ikke er nævnt nedenfor i andre sammenhænge.

Generelt facit i 5.d:

Primære teknikker i 5.d:
Meget få brugte den forventede primære teknik $\tau_{5.2}$:
3.g: 3.7, 3.22
1.g: 1.9

FLere har i stedet brugt den knap så forventede, og derfor ikke primære teknik $\tau_{2.1}$ Den handler om at omskrive til brøk. Derefter bruges $\tau_{5.1'}$ til at udføre division mellem brøker. Til sidst bruges brug $\tau_{1.1'}$ eller $\tau_{1.1}$ til at reducere brøken før τ2.2 bruges til at skrive tilbage til decimaltal:
3.g: elev3.3, elev3.5, elev3.8, 3.13
1.g: elev1.12

NB! Elev1.12 har brugt ovenstående teknikker men undladt at omregne tilbage til decimaltal og derfor fået $\frac{100}{3}$.

Nye teknikker i 5.d:

Mangelfuld forklaring i 5.d:

Misforstået forklaring i 5.d: Ingen

Forkerte teknikker i 5.d:
$\tau_{5.22*}$ = *Divider ét ciffer af gangen og giv resultatet samme placering som oprindelige ciffer:* $a : 0,c_1c_2 = 0,(a : c_1)(a : c_2)$ (elev3.4, 1.24, 1.21, 1.20) De får resultatet $8 : 0,24 = 0,42$. Elev1.6 har gjort noget lignende og fået 42

$\tau_{5.22**}$ = *Byt rundt på dividend og divisor*(elev3.1, elev3.4, elev3.10, 3.23, 1.23, 1.18, 1.16, 1.19, 1.8)

De tror de udregner divisionen $8 : 0,24$, men har i virkeligheden udregnet $0,24 : 8 = 0,03$. Andre får facit $0,3$.

Elev.19 bruger den rigtige teknik $\tau_{5.2'''}$ ved at regne ude hvad man skal gange med $0,24$ for at få 8. Dette gøres ved at udregne at fx $5 \cdot 0,24 = 1,2$ og derfor ganges der yderligere op. Desværre regner eleven forkert og får, at $5 \cdot 120 = 720$, men det skulle have været 6 gange.

Elev1.15 bruger den rigtige teknik $\tau_{2.1}$ til at omskrive til brøk, men laver desværre den ene fejl at skrive $8 = \frac{8}{10}$. Det er altså $\tau_{2.1'''}$ der er anvendt forkert her.

Elev1.2 har også brugt $\tau_{2.1}$ til at omskrive til brøker og kombineret med $\tau_{5.1'}$ til at ændre det til multiplikation, men desværre gjort det forkert: $8 : 0,24 = 8 \cdot (100 : 0,24)$. Her skulle nævner være 24 i stedet.
Elev1.11 har udregnet $8 : 0,24 = 3,333$ uden spor forklaring, så kan ikke se hvor fejlen er opstået henne.

Elev1.10 har anvendt $\tau_{5.2'}$ til at ændre til heltal. Er dog komme til at dividere igen med 100 som der blev forlænget med, hvilket man ikke skal ved division. Har desuden udregnet at $800 : 24 = 33,1$.

Elev1.1 har også brugt denne teknik, men formåede ikke at regne længere end til $33,?$.

Jeg kan ikke gennemskue følgende elevers udregning:

elev1.4: $8 \cdot 4 = 32 - 0,08 = 31,92$
elev1.3: $8 : 2,4 = 7$

Elev1.5 har svaret 33.33 men helt uden mellemregning. Jeg har ingen anelse om hvordan eleven har indset dette uden en eneste "krussedulle"i margenen. Men eleven har ikke svaret korrekt, da det ikke er vist at decimaltallene fortsætter.

Spørgsmål 6a og b

Elever der ikke løste opgaven i 6a og b:
3.g: 3.24(kun 6.a)

Generelt facit i 6a og b:
De fleste svarer blot "uendeligt mange".

Primære teknikker i 6a og b:
Som forventet er teknik τ_6 brugt af mange uden yderligere forklaring.

Elev1.17 uddyber dog i 6.a og siger at "både tæller og nævner kan ændres". Med det menest nok at man ikke kun skal kigge på tællerne $2 < 3 < 4$.

Elev1.23 uddyber at man altid kan putte flere decimaler på.

Flere argumenterer dog, at det er pga. decimaler. Med det mener de sandsynligvis, at man altid kan tilføje flere cifre på et decimaltal, dvs. de har taget udgangspunkt i den forventede teknik $\tau_{6.2}$. Det kunne være interessant at få bekræftet denne hypotese:
3.g: Elev3.19, 3.18, 3.13, 3.12, 3.7
1.g: Elev1.2, 1.7, 1.14, 1.16

Elev1.16 uddyber at selv de mindste decimaler tæller, så der er uendeligt mange decimaltal og brøker.

Elev1.7 skriver uddyber, at man altid kan finde en ny brøk imellem to forskellige brøker.

Følgende elever svarer uendelig, men nævner konkret tallene $\frac{3}{5}$ og $0,5$ og $0,6$ og $0,7$:
3.g:3.3, 3.17
1.g: 1.4, 1.6, 1.8, 1.9

Elev3.18 understreger pointen i a) ved at opstille et interval. Der menes nok underforstået, at der er uendelig mange tal i et interval mellem to forskellige tal. Dette er dog ikke forklaret. Man kan se det at referere til et interval som en form for brug af $\tau_{6.0'}$ om at repræsentere på en tallinje, selvom jeg dog ikke ved om eleven har tænkt det på denne måde.

Elev1.1, elev1.15 og elev1.19 er de eneste som kommenterer på sammenhængen mellem valget af tal i 6.a og 6.b. Der anvendes $\tau_{2.2'}$ til at omskrive brøker til decimaltal.

Nye teknikker i 6a og b:

Mangelfuld forklaring i 6a og b:

Misforstået forklaring i 6a og b: Følgende elever anvender ikke begrebet "uendelig"men bruger i stedet for ordet "mange". De kommer dog med gode eksempler på andre brøker og decimaler som ligger imellem, der er med til at vise at de godt ved, at der er flere end man kan tælle: 3.g: 3.8, 3.17

1.g: 1.18, 1.19

Elev1.4, 1.12, elev3.16 svarer uendeligt mange, men anvender $\tau_{6.2**}$. Den ene kommenterer at det skal være kommatal, så eleven virker ikke til at vide hvordan man finder flere brøker.

Elev1.6 komme med eksempler på brøker med decimaltal i tælleren, men svarer ellers korrekt.

Elev1.20 svarer uendeligt mange, men har misforstået hvad hele tal er, da eleven påstår at der er 2 hele tal imellem brøkerne og 4 hele tal imellem decimalerne.

Forkerte teknikker i 6a og b:
Følgende har anvendt $\tau_{6.1*}$ i $6.a$:
3.g: elev3.14, elev3.9
1.g: elev1.21 elev1.22
Elev1.22 og elev 1.21 har desuden anvendt $\tau_{6.2*}$ i $7.b$.

$\tau_{6.2**}$ = *Imellem to tal* a *og* b *er antallet af tal lig* $a - b$. *Dette gælder også for decimaltal.* (3.24, 3.16, 1.3, 1.11, 1.13, 1.24 KUN 7.b: 3.14, 3.9)

Elev3.8 løser $7.a$ skriver der er mange brøker fordi fx $\frac{1}{4}$ ligger imellem. Det gør den dog ikke, men det kan ikke ses hvilken teknik eleven har brugt.

Elev3.4 ser kun 'tal' som 'hele tal'. Tror desuden at man kan opnå et heltal blot ved at forstørre en brøk.

Spørgsmål 7a og b

Elever der ikke løste opgaven i 7a og b:
3.g: 3.24, 3.18, 3.19, 3.6 KUN 7.a: 3.17, 3.1 KUN 7.b: 3.8, 3.23, 3.15, 3.2
1.g: 1.5, 1.6, 1.9 KUN 7.a: 1.7, 1.11, 1.21 KUN 7.b: 1,17, 1.19

Generelt facit i 7a og b:
Mange er usikre på deres svar og skriver fx "?"og "usikker".
De fleste svarer ét af følgende i $7.a$):
$A.a)\frac{148}{210}$
$B.a)148 : 210\ \mathrm{leftarrow}1 : \frac{148}{210}$
$C.a\frac{74}{105}$

Og følgende i $7.b$):
$A.b)\frac{T}{L} = 2\pi$ eller 2π
$B.b)1 : 2\pi$

Primære teknik i 7a og b:
Følgende har som forventet brugt $\tau_{7.1}$ til at svare A.a og $\tau_{7.3}$ til at svare A.b. Mange dog uden yderligere forklaring, men i forhold til teknikken er det fyldestgørende nok:
3.g: , 3.11, 3.20 KUN 7.a: 3.10, 3.16, 3.23 KUN 7.b: 3.22, 3.7, 3.8, 7.5, 7.4, 3.3, 3.1
1.g: 1.2, KUN 7.a: 1.3,1.4, 1.13, 1.17, 1.20, 1.22 1.23 KUN 7.b: 1.1, 1.7, 1.8, 1.11, 1.12, 1.14, 1.21, 1.24

Bemærk at elev1.11 dog har omreget til kommatal, så svaret er i stedet blevet til $2 \cdot 3,14 = 6.28$. Men det ændrer ikke ved at eleven viser viden om hvad et forhold er.

Følgende har som forventet efterfølgende brugt $\tau_{1.1}$ til at reducere brøken og svare C.a:
3.g: 3.22,3.13, 3.8, 3.7, 3.3
1.g: 1.10, 1.12

Overraskende nok relaterer nogle få spørgsmål 7.b) til den lineære sammenhæng, dvs. bruger $\tau_{7.3'}$:
3.g: elev3.14
1.g:

Nye teknikker i 7a og b: $7.1\sharp$ = *Hvis der gælder sammenhængen* $a = k \cdot b$ *så kaldes forholdet mellem* a *og* b *for* $1 : k$*, dvs. når* a *vokser med* 1 *vokser* b *med* k
3.g: elev3.12, KUN 7.a: Elev3.21, 3.9, KUN 7.b:, elev3.17, 3.13, 3.14, 3.10
1.g: KUN 7.a: 1.1, 1.14, 1.15, 1.16, 1.18, 1.19 KUN 7.b: 1.4

Mangelfuld forklaring i 7a og b:
Elev1.15 og 1.19 løser 7.a korrekt, men bruger bagefter $\tau_{2.2}$ til at omregne til decimaltal. Der er dog mangelfulde mellemregninger.

3.15 svarer korrekt A.a, men streger ud igen.

Misforstået forklaring i 7a og b:
Elev3.16 svarer C.$a\frac{74}{105}$, men argumenter forkert ved at starte med at skrive 148×210.

Elev3.14, 3.4 og elev1.15 svarer korrekt, men bruger $\tau_{1.1****}$ til at forkorte til brøker med decimaltal i tælleren i 7.a.

Elev1.3 svarer korrekt, men skriver bagefter $\frac{T}{2\pi \cdot L}$ og skriver "don't know".

Forkerte teknikker i 7a og b:
$\tau_{7.3*}$ = *Forholdet mellem* a *og* b *når* $a = k \cdot b$ *er* $a : k \cdot b$. (3.21, 3.9, 1.10)

Følgende har anvendt $\tau_{7.1*}$ i 7.a:
3.g: Elev3.2
1.g: elev1.7, 1.24

Elev3.5 svarer i 7.a $\sqrt{2}$. Jeg har ingen anelse om teknikken.

Elev1.13, elev1.15, elev1.16, elev1.18, elev1.20, 1.22, 1.223 svarer i 7.b blot $T = 2\pi \cdot L$, $L = \frac{2\pi}{T}$ eller $\frac{T}{2\pi}$. De har altså ikke helt forstået hvad det vil sige at finde en forhold. I stedet har de blot opskrevet en sammenhæng mellem variablerne.

Ekstraspørgsmål E1

Ikke løst:
3.g: 3.2, 3.7, 3.8, 3.12, 3.14, 3.17
1.g: 1.19, 1.20, 1.13, 1.9, 1.7, 1.5, 1.3

Følgende har anvendt $\tau_{2.2}$:

3.g: 3.3, 3.5
1.g: 1.22, 1.17, 1.11, 1.10, 1.4

Flere elever argumenter, at division giver et kommatal, men at de ellers giver det samme. Elev1.11 argumenter at en brøk er et resultat i sig selv og divisionen er noget vi udregner.

Forkerte tekniker:
Ingen har anvendt τ_{E1*}.

Følgende har anvendt τ_{E1**}:
3.g: 3.1, 3.4, 3.6, 3.9, 3.10, 3.11, 3.13, 3.15, 3.16 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24
1.g: 1.24, 1.23, 1.21, 1.18, 1.17, 1.15, 1.14, 1.12, 1.8, 1.6, 1.2, 1.1,

Ekstraspørgsmål E2

Ikke løst:
3.g: 3.6, 3.8, 3.12, 3.15
1.g: 1.19, 1.20, 1.14, 1.9, 1.7, 1.5, 1.2

En bedre formulering kunne være: "Hvor meget har du tilbage af hele pizzaen?"

Følgende har som forventet brugt $\tau_{5.1}$ og $\tau_{4.1}$:
3.g: 3.20
1.g: 1.17, 1.12

Følgende har mod forventning brugt $\tau_{4.1'''}$ til at give en grafisk løsning, og dermed kun arbejdet med subtraktion:
3.g: 3.1, 3.9, 3.17
1.g: 1.22, 1.3

Mangelfuld forklaring: 3.g: 3.2, 3.11, 3.18, 3.23
1.g:

Forkerte Svar:
Følgende har brugt τ_{E2*} til at finde brøkdelen $\frac{4}{5}$. Elever med * betyder at de tydeligt har skrevet at det er anddelen ud af den halve pizza, så deres svar tæller i stedet som 'misforstået forklaring', da de reelt set har løst opgaven som de har forstået det:
3.g: 3.14, 3.19
1.g: 1.24* (grafisk), 1.21*, 1.18*, 1.16*, , 1.8, 1.6,

$\tau_{E2**} = \textit{brøkdelen } \frac{a}{b} af \frac{c}{d} \textit{ er } \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$
3.g: elev3.3, 3.4, 3.5, 3.7, 3.10, 3.13, 3.16, 3.21, 3.22
1.g: elev1.23, elev1.15, 1.11, 1.10, elev1.4, elev1.1

Disse elever får svaret $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

Elev1.24 svarer $\frac{3}{4}$ uden begrundelse.

Ekstraspørgsmål E3

Ikke løst:
3.g: 3.1, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, , 3.17 3.20, 3.21, 3.24
1.g: 1.24, 1.22 1.21, 1.19, 1.20, 1.16, 1.14, 1.9, 1.7, 1.6, 1.5, 1.2, 1.1

Ogave meget i stil med E2:
3.g: 3.3, 3.22
1.g: 1.11, 1.4, 1.3

Opgaver der skiller sig ud:
elev1.5, elev3.11

Ren multiplikationsopgave:
elev1.16

En sumopgave ($\tau_{4.1}$):
3.g: 3.19, 3.23
1.g: 1.12

Involverer én brøkdel af en hel:
3.g:
1.g:elev1.23, elev1.18, 1.17, 1.10, 1.8

Mangelfuld forklaring: elev3.10, 3.18

Følgende løser forkert:
Kommer med eksempler men kan ikke selv løse dem korrekt:
3.g:
1.g: 1.15

Ekstraspørgsmål E4

Ikke løst:
3.g: 3.24, 3.20, 3.21, 3.17, 3.14, 3.12, 3.10, 3.8, 3.7, 3.5, 3.4
1.g: 1.5, 1.7, 1.9, 1.13, 1.14, 1.15, 1.19, 1.20

En bedre formulering kunne have været: Tegn en figur og skraver $\frac{4}{7}$ af den.

Følgende har løst opgaven korrek ved at skravere en passende figur (ikke hele området):
3.g: 3.9, 3.6,, 3.2, 3.1, 3.3 (328,5 tern)
1.g: 1.2, 1.11, 1.12, 1.18, 1.21, 1.22

Elev1.4 har lavet et avanceret mønster, hvor 40 ud af hver 70 tern er skraveret. Eleven nåede dog ikke at blive færdig, men så det tæller som mangelfuld forklaring.

Forkerte teknikker:
Mange elever har muligvis ikke forstået spørgsmålet, da de har troet at "skraver en figur"betyder skraver hele feltet foran dem. De har dog skraveret 428 eller 429 i stedet for 428,6 tern:
3.g: 1.1

1.g:

Følgende har skrevet et andet antal end 429:
3.g: 3.23 (212), 3.22 (207), 3.19 (220), 3.18 (220), 3.15 (230), 3.13 (420), 3.11 (21,2)
1.g: 1.10(206), 1.6 (230), 1.8 (420), 1.16(188), elev1.17 (244)
Enkelte har lavet mellemregningen i margenen som igen viser tydeligt, at de har svært ved divisionsalgoritmen. Elev1.1 har dog gjort det korrekt, men ikke færdiggjort divisionen.

Elev1.16 skriver at opgaven ikke kan løses for man kan ikke opdele 400 tern i $\frac{4}{7}$.

Ekstraspørgsmål E5

Ikke løst:
3.g: 3.24, 3.20, 3.21, 3.18, 3.17, 3.14, 3.12, 3.11, 3.10, 3.9, 3.8, 3.7, 3.6, 3.5, 3.4, 3.3, 3.2
1.g: 1.24, 1.4, 1.4, 1.5, 1.7, 1.9, 1.10 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.19, 1.20, 1.22, 1.24
Følgende har placeret korrekt:
3.g: 3.23, 3.22, 3.16, 3.1
1.g 1.3, 1.12, 1.17
Nogle har været smarte og lavede tallinjen mellem 0 og 1 25 felter lang. Andre har ladt hele stykket være tallinjen, dvs. 40 felter lang og udregnet at $\frac{40}{25} \cdot 17 = 1.6 \cdot 17 = 27,2$.

Følgende har forsøgt at placeret korrekt, men fx placeret 1-tallet forkert:
3.g:
1.g: 1.18, 1.23

Følgende har blot sat en streg uden at lave en tallinje:
3.g: 3.19
1.g: 1.8, 1.1

Elev1.13, 1.11 og 1.6 har skraveret et område.
Elev1.21 har også placeret korrekt, men dog ikke færdiggjort tallinjen, og der derfor vist viden om hvordan man laver en passende tallinje.

Ekstraspørgsmål E6

Ikke løst:
3.g: 3.24, 3.17, 3.14, 3.15, 3.12, 3.11, 3.6 3.8, 3.7, 3.5, 3.4, 3.3, 3.2
1.g: 1.24, 1.2, 1.4, 1.5, 1.7, 1.9, 1.10 1.13, 1.14, 1.6, 1.17, 1.19, 1.20, 1.21, 1.24

Følgende har omskrevet korrekt og haft passende mellemregning. De fleste ved at omskrive til decimaltal først ($\tau_{2.4}$ + ($\tau_{2.1}$)). Elev1.16 ved blot at gange med 10 ($\tau_{2.4}$):
3.g: 3.23, 3.22
1.g: 1.12, 1.16, 1.23

Følgende har omskrevet til brøk med decimaler i tæller:
3.g: 3.21, 3.20 , 3.19, 3.18
1.g: 1.18, 1.22

Følgende har omskrevet til decimaltal: $\tau_{2.4}$

3.g: 3.16, 3.13, 3.10, 3.9, 3.1
1.g:
Følgende anvender $\tau_{2.1*}$ til at give decimaltallet nævner 1:
3.g: 3.15
1.g:
Elev1.1 og 1.11 brugte $\tau_{2.1**}$ til at flytte kommaet forkert i forhold til valget af nævner.
Elev1.8 omskriver helt forkert til blandet brøk $6\frac{53}{1}$.

Ekstraspørgsmål E7

Ikke løst:
3.g: 3.24, 3.19, 3.18, 3.17, 3.14, 3.12, 3.6, 3.5, 3.4, 3.3, 3.2
1.g: 1.24, 1.2, 1.4, 1.5, 1.7, 1.9, 1.10 1.13, 1.14, 1.6, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24
Følgende har regnet korrekt: 3.g: 3.15, 3.13, 3.11, 3.10, 3.7
1.g: 1.12
Elev1.1, elev1.15, 1.22 og 1.23 har regnet korrekt, men ikke reduceret helt færdig, så man kan kalde det misforstået forklaring.

Følgende har reducderet forkert i tælleren:
3.g: 3.23, 3.9, 3.8
1.g: 1.11

Følgende har håndteret nævneren forkert (fx ganget 5 op i tæller):
3.g: 3.21, 3.16,
1.g:
Elev3.1 brugte $\tau_{5.1***}$.
Følgende har udregnet noget der ikke giver mening:
3.g: 3.20
1.g:
Elev1.8 omskriver til $\frac{2}{3} : \frac{-1}{5}$

C
GENNEMGANG AF BROUSSEAUS UNDERVISNINGSFORLØB

Jeg vil ikke komme specifikt ind på, hvordan undervisninger er tilrettelagt og udført ud fra **TDS!** i de enkelte lektioner, men vil i stedet fokusere på den matematiske viden og læring som eleverne får ud af de forskellige moduler.

Modul 1:
brousseau:2014 starter undervisningsforløbet ud med at lade ekeverne måle på tykkelsen af papir, så de får indsigt i hvor mange ark papir der skal til "en hel" . Herigennem lærer eleverne at ordene papirtykkelserne i forhold til hinanden. Efterfølgende lærer eleverne at bruge præcise begreber til at beskrive deres metoder. Fx lærer de at snakke om fysisk størrelse, tykkelsen af en stak papirer, tykkelsen af et enkelt papir, et numerisk udtryk for tykkelsen. Herigennem lærer de "generiske termer" for nævneren: tal, par, ordnet par. På den måde lærer de at bruge proportionalitet til at analysere arkene og at argumetnere korrekt og præcist.

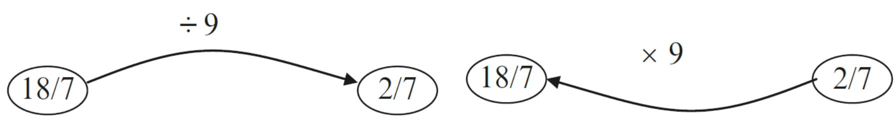
Næste step er at lære begrebet om ækvivalens, hvor de lærer, at tykkelsen af papirerne er det samme, selvom det beskrives ud fra $4/50$ eller $8/100$, og notationen a/b og ordet brøk introduceres uden yderlige uddybning i første omgang. Eleverne har altså endnu ikke opnået en viden om brøker endnu, som kan identificeres og anvendes i andre sammenhænge, men de har fået nogle matematiske redskaber og begreber på plads som kan bruges til at bygge videre på.

Modul 2:
Næste step er at lære eleverne om, hvordan man håndterer operationer på rationale tal og tykkelsen af papir. Denne læring foregår i samarbejde med eleverne, hvor de selv får lov at erfare, at man ikke blot kan lægge papirtykkelser, og herigennem brøker, direkte sammen.

Eleverne lærer derefter at gange et tal på en brøk ved at undersøge hvor tykke n ark er, hvis tykkelsen af ét ark er $\frac{a}{b}$. Senere udvides til division af et tal, når de bliver præsentere for det modsatte problem, hvor fx 9 ark har tykkelsen $\frac{18}{7}$, og de så skal undersøge hvor tykt ét ark er. Dette præsenteres lidt som multiplikation, ved at vise eleverne, at $\frac{2}{7}\cdot = \frac{18}{7}$. Dermed bygges videre på den viden om multiplikation som de lige har opnået. Notationen på dette tidpsunkt er små pilediagrammer der indikere de operationer de udfører. Et sådan diagram kan ses i figur 15.

Selvom de ikke har lært at løse brøker generelt, har de alligevel lært at analysere nye situationer og derigennem dividere. Det er ikke blot en teknik de har opnået men også en mere teknologisk viden, som de kan tage med sig videre.

Modul 3:
Som nævn i de tidligere afsnit er det meget begrænsende, hvis den matematiske viden kun kobles op på ét begreb, da eleverne så kan blive låst fast i en bestemt forestilling. Derfor ud-



Figur 15: Diagram der viser, hvordan elevernes første håndtering af divison af forhold med et tal håndteres. Her arbejds der med tykkelsen af papir (**brousseau:2014**; **s. 24**)

vides elevernes viden om brøker til mere generelle erfaringer når de præsenteres for andet end blot papirark. De sammenligner størrelser som rumfang, vægt og længder og arbejder altså herigennem med ratioanle tal som forhold. Eleverne har på dette tidspunkt svært ved at skelne mellem de to forhold 5/4 og 4/5.

Elevernes viden fra kontinuerte størrelser er svær at tage med videre, da de præsenteres for "ord-opgaver om diskrete tilfælde med poser i en kugle. Dette får årligt eleverne til at spørge, om der findes størrelser som ikke kan sammenlignes, dvs. inkommensurable størrelser.

Modul 4 og 5:
Eleverne lærer at arbejde med intervaller og at placere brøker i intervaller i forhold til hele tal.

Efterfølgende lærer de at indsnævre intervallerne ved at indele dem i 100 og 1000-dele, som viser sig at være nemmere end fx 36-dele. Dette giver dem indsigt i at der er mange brøker i hvert interval, for man kan altid blive ved med at indsnævre. Det er altså et første møde med de rationale tals tæthed. De indser også at nogle brøker har et uendeligt antal decimaler, fx 22/9, som er periodisk.

De begynder først nu at placere de rationale tal direkte på en tallinje, men der er ikke langt fra at arbejde med intervaller til at præsentere det visuelt, så denne nye præsentation er ikke svær for eleverne.

Først derefter lærer eleverne, hvad decimaltal er, ved at se dem som summer af decimalbrøker, dvs. brøker opdelt i 10-dele, 100-dele og 1000-dele, og derefter lærer de den klassiske decimalnotation med komma og cifre, som falder eleverne meget naturligt efter at de har lært at mestre decimalbrøker.

En del af problematikken omkring decimaltal og brøker i folkeskolen idag er måske, at eleverne ofte præsenteres direkte for decimaltal FØR de lærer om brøker, og at der slet ikke er fokus på sammenhængen mellem brøker og decimaltal. Dermed bliver brøker noget besværligt og abstrakt og decimaltallene bliver den "nemme" og foretrukne notation for eleverne.

Modul 6 og 7:
Eleverne lærer at mestre operationerne addition og subtraktion mellem decimaltal som genkendes som metoden fra naturlige tal. Efterfølgende lærer de at håndtere division af decimaltal med hele tal og der arbejdes med dilemmaer som "er alle brøker decimaler?" og "stopper alle divisioner". Herigennem møder de gentagne sekvenser, eller perioder, af cifrene i decimaltal, som kan opstå ved division.

På dette tidspunkt har det ikke lært mere end de basale regneoperationer, til gengæld er de lige trygge ved ægte og uægte brøker. De kender kun decimaltal som mål for en længde, så dybden af deres viden og den grad af ejerskab de har over deres viden om brøker kan være svært på nuværende tidspunkt at teste.

Modul 8:
Eleverne lære at arbejde med forhold mellem puslespil, hvor de skal skalere puslespilsbrikker op. De erfarer at alle gør det på hver deres måde, og derfor passer brikkerne ikke sammen når der skaleres op. Dette giver anledning til at genopfriske hvad de har lært og til at indse regneoperationerne på ny.

Nu læres at gange to brøker sammen ved først at gange et tal på, og derefter dividere med et tal. Husk på at eleverne stadig arbejder med brøker som forhold mellem størrelser, og altså endnu ikke med brøker som rationale tal i sig selv.

Modul 9:

Eleverne lærer gennem lineære afbildninger at arbejde med proportioner. De lærer også at skelne mellem udregninger og målinger og herigennem hvad approksimationer og afvigelser er.

Modul 10:
Først nu præsentere eleverne for ratioanle tal herunder især multiplikation af to rationale tal. De får repeteret hvad de har lært om brøker og får præciseret hvad forskellene (multiplikation gør ikke altid større) og lighederne (distributive lov) med naturlige tal er. Der bliver også gjort op med forståelsen af multiplikation som gentagen addition, hvor de lærer at multiplikation mellem brøker i stedet skal ses som formindskelser eller forstørrelser.

På dette tidspunkt er eleverne begyndt at arbejde udelukkende med bogstavnotation, da de ikke længere arbejder med størrelser men med rationale tal.

Modul 11:
Til sidst præsenteres eleverne for hverdagsopgaver, hvor de skal arbejde med forhold mellem andet end blot længder. Fx skal de arbejde med forholdet mellem antallet af elever i en klasse og antallet der har lært at svømme. Det svære her for eleverne er, at finde ud af, hvad det er de tager brøkdelen af.

Bagefter præsenteres eleverne for procentregning og senere skalering.

Modul 12 og 13:
Disse to moduler er senere tilføjelser fra 90'erne. De handler om at lade eleverne selv prøve at designe hverdagsopgaver og at klassificere opgaverne, så de ved hvilken operation der skal bruges for at løse dem. Det sværeste for eleverne er at udregne division mellem decimaltal, fx $0,4 : 0,62$.

Der fokuseres herefter på division mellem brøker, og de lærer at se division, som det modsatte af multiplikation. De lærer også at division af tal mindre end 1 forstørrer og større end 1 formindsker. Dette er netop modsat af multiplikation, hvor et tal mindre end 1 gør mindre og et tal større end 1 gør større.

De lærer også er at "dividere med 4" er det samme som at "gange med $1/4$" og det samme som at "gange med 0.25".

Modul 14:
Det sidste modul handler om komposition af lineære afbildninger, hvor de først skalerer én gang og bagefter skalerer igen. Herigennem lærer de hvordan de med multiplikaion er brøker kan slippe for en mellemregning ved at skalere direkte med én skalafaktor.

Der udtrykker sig stadig med pilediagrammer som de hele vejen har brugt til at illustrere deres operationer med, men de lærer at bruge dem i nye sammenhænge, så de ikke er låst fast på én repræsentationsform, fx én bestemt figur eller størrelse.

Modul 15:
Dette modul var heller ikke med i det oprindelige pensum. Modulet hander om at division og multiplikation af decimaltal nemmest løses ved at omskrive decimaltallene til brøker. I dette modul sættes der også fokus på at pilediagrammerne ikke er formel matematisk viden, men et redskab de har lært til at håndtere operationerne, og de lærer herigennem at operationerne kan udføres uden brug af pilediagrammer men blot ved direkte brug af regneoperatiorne.

Der bliver her sat ord på nogle ting som ikke har været udspeciferet før, og eleverne bliver bl.a spurgt om hvad det betyder at dividere med en brøk. Herigennem får de mulighed for at bruge de redskaber de har fået med undervejs, hvor de først prøver at opstille et hverdagsproblem og bagefter lokalisere et diagram som kan beskrive udregninge. Herigennem er de selv med til at bevise hvorfor man kan nøjes med at gange med den omvendte brøk.

D

ZETRA PUTRAS MATERIALE

Dette appendix kapitel præsenterer noget af det materiale fra Putra (**zetra:2016**) som har inspireret mig i opgaven. Materialet er udleveret personligt af Putra under den løbende kontakt jeg har haft med ham både ved personlige møder og nogle enkelte skype-møder.

Det er vigtigt at pointere, at Putras arbejde kun er hans foreløbige udkast. Det er altså noget han også stadig arbejder med. Derfor bruges som inspiration end som direkte rettesnor.

Han skriver selv følgende op materialet:
"Yes, she can include those materials, but she should write that is a preliminary priori-analysis because we still work on it. She have to elaborate it based on her needs.

HTT2 and HTT4 has been presented in CITAD V (**zetra:2016a**), HTT 4 also will be presented in (**zetra:2016b**) the Summer School (8th YERME Summer School, Poděbrady, Česká Republika, August 13 to 20, 2016.).

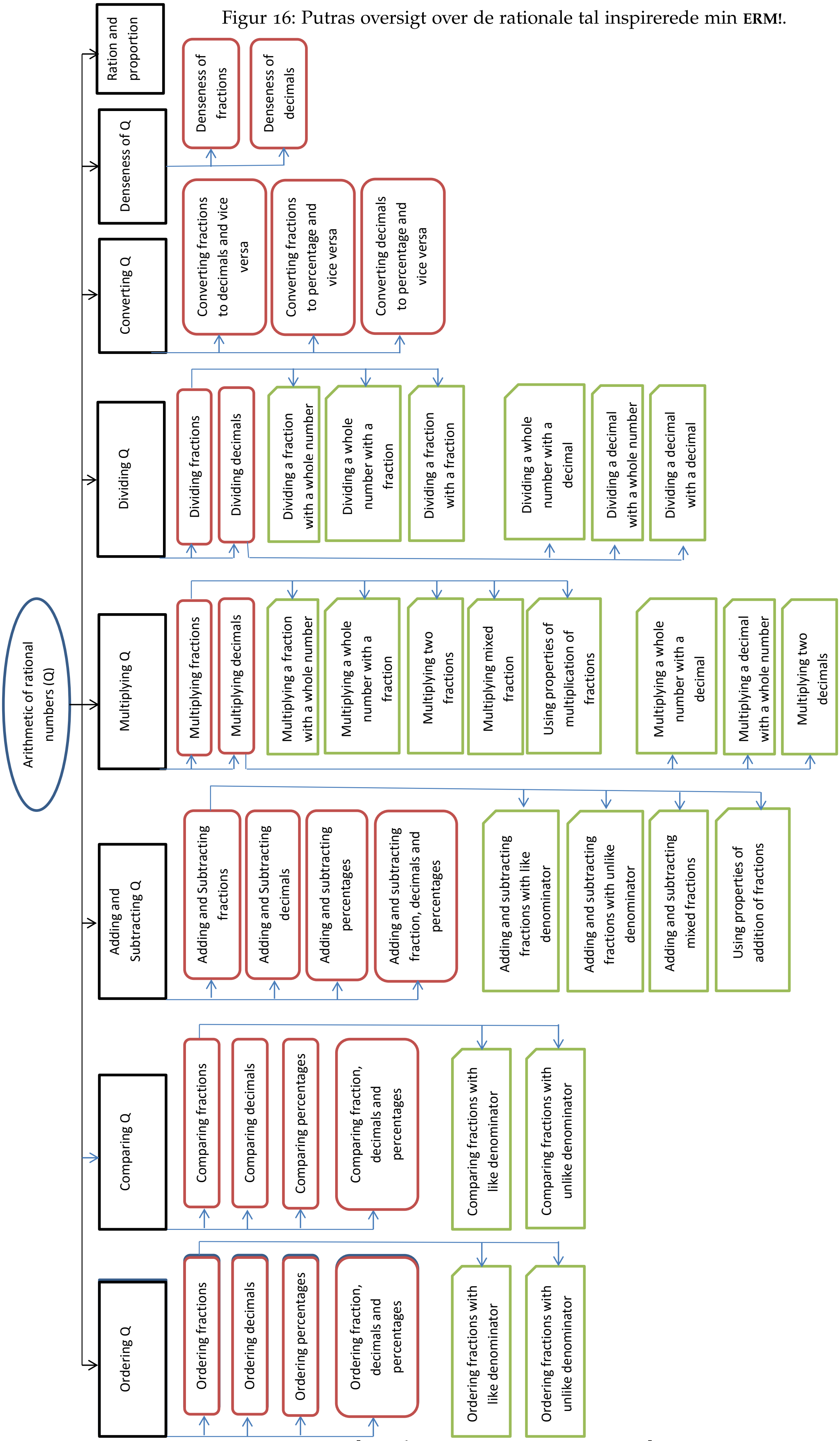
HTT 3 has been presented at Spring School in Wurzburg and for PhD course on Collective aspect (**zetra:2015**) (Paper is submitted for the Educational design in mathematics and science: The collective aspect course conducted at Department of Science Education, November 16 to 20, 2015).

HTT5 will be presented on the poster in the teacher education conference in Berlin analysis (Poster will be presented at the ERME Topic Conference ETC3 on mathematics teaching, resources and teacher professional development, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany, October 5 to 7, 2016. (**zetra:2016c**)). "

Her ses bl.a. i figur 16 Putras oversigt over de rationale tal, som i afsnit 3.3 inspirerede mig meget i arbejdet med Prakseologisk Reference Model (PRM).

Her præsenteres også Putra's egen foreløbige a priori analyse af testen til de seminariestuderende. Her har hans teorier, teknologier, teknikker og opgaver også inspireret mig til konstruktionen af PRM og senere i arbejdet med a priori analysen af de seminariestuderende.

Figur 16: Putras oversigt over de rationale tal inspirerede min **ERM!**.



1. . Equal or Equivalent fraction

You ask fourth grade students to find equal fractions of $\frac{3}{4}$.

A student claims that $\frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ *because if you add 5 to both the top and the bottom, the fraction must be equal.*

Analyse this answer. What do you think about this answer? Please explain!

What would you do as a teacher to help the students from this case to understand the concept of equal fractions better?

(Billstein, Libeskind, & Lott, 2007; Beckhamn, 2008)

The task can be described as follows:

t_1 = given a positive fraction, $\frac{a}{b}$, determine other fractions that are equal/equivalent to it.

t_1' = given two positive fractions, $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, decide if they are equal/equivalent.

t_1^* = given incorrect student responses to a task of type t_1, determine what to do as a teacher to help students better understanding the concept of equal fractions.

Possible *techniques* to solve such tasks:

τ_{11} = identify an correct equal fraction of $\frac{a}{b}$ by multiplying each numerator and denominator with the same positive integer.

τ_{12} = change both fractions into decimals, and show to the students they are not equal.

τ_{13} = use rectangle models to represent $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$.

τ_{14} = represent both fractions in a number line.

τ_{15} = use milieu such as calculator to compute both fractions into decimals, and show to the students they are not equal.

τ_{11}* = give a simple fraction such as $\frac{1}{2}$, ask students to reflect whether the procedure adding by 5 to both the top and the bottom works.

τ_{12}* = ask students to reflect their answer by using milieu such as calculator or computer. (connecting to τ_{15})

τ_{13}* = ask any student who gives a correct answer to explain their answer.

τ_{14}* = ask students to represent both fractions using a rectangle model and a number line. (connecting to τ_{13} and τ_{14})

τ_{15}* = ask students to change both fractions into decimals and reflect their answers. (connecting to τ_{12})

The *technology* associating with this *task* and *techniques* is:

θ = Two fractions, $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, are equal/equivalent if there is exist an integer *n* such that $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{c}{d}$.

The *theory*

Θ = theory of the structures of rational numbers (equivalent of rational numbers).

2. **Comparing decimals**

Fifth grade students are asked to compare between 0.5 and 0.45.
Some students answer that 0.45 is bigger than 0.5 because 45 is bigger than 5, meanwhile others answer the opposite is true.

Analyse the students’ solution. Explain your ideas to handle the situation in this class?

How do you use this situation to further the students’ learning?

(Peled, & Awawdy-Shahbari, 2009)

The task can be described as follows:

t_2 = given two different decimal numbers, $0 < a < 1$, and $0 < b < 1$, Decide of $a > b$ or $a < b$.

t_2^* = given two difference student answers to a task of type t_2, determine what to do as a teacher to make students learn.

Possible *techniques* to solve such tasks:

τ_{21} = change a and b into integers by multiplying by tens.

τ_{22} = divide a by b, if the result is less than 1, $a < b$, otherwise $a > b$.

τ_{23} = subtract a from b, if the result is bigger than 0, $a > b$, otherwise $a < b$.

τ_{24} = use lexicographical order to compare both decimals.

(Since 5 is bigger than 4, so 0.5 is bigger than 0.45)

τ_{25} = change decimals into fractions or into percentages.

τ_{26} = represent both decimals into rectangle models or number lines.

τ_{21}^* = ask students to change decimals into fractions or percentages (connecting to τ_{25})

τ_{22}^* = give students a decimal such as 0,50 and ask them to compare to 0,5. It will help them to realize that 0,50 is equal to 0,5, then they can easily compare 0,5 to 0,45. (connecting to τ_{24})

τ_{23}^{*} = ask them to use calculator, so they can subtract or divide one decimal to the other. (connecting to τ_{22} and τ_{23})

τ_{24}^{*} = ask students to represent both decimals into rectangle models or number lines. (connecting to τ_{26})

τ_{25}^{*} = give a contextual problem such as measure and compare two sticks with 0.5 m and 0.45 m long. It will help them to change into cm and compare it. (connecting to τ_{21})

A possible *technology* for this problem:

θ = for two decimal numbers, $0 < a < 1$, and $0 < b < 1$, $a > b$, if and only if $\frac{a}{b} > 1$ or $a - b > 0$.

The *theory*

Θ = theory of the arithmetic of decimal numbers.

3. **Denseness of rational numbers**

You ask fifth grade students how many numbers between $\frac{2}{5}$ and $\frac{4}{5}$, and how many numbers between 0.4 and 0.8.

Your students say that there is only one number between $\frac{2}{5}$ *and* $\frac{4}{5}$ *namely* $\frac{3}{5}$ *; they also say 3 numbers between 0.4 and 0.8.*

How do you interpret this claims?

Explain your ideas to teach this students?

(Vamvakoussi, & Vosniadou, 2004; Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Janssen, Kelchtermans, Verschaffel, & van Dooren, 2015; McMullen, Laakonen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2015).

The task can be described as follows:

t_3 = given two different rational numbers, $\frac{a}{b} = m, c_1 c_2 \cdots$ and $\frac{c}{d} = n, d_1 d_2 \cdots$, find how many numbers between $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, and $m, c_1 c_2 \cdots$ and $n, d_1 d_2 \cdots$.

t_3' = given two different student answers about denseness of numbers between $\frac{a}{b} = m, c_1 c_2 \cdots$ and $\frac{c}{d} = n, d_1 d_2 \cdots$, interpret these answers.

t_3^* = given problems and student responses to a task of type t_3, determine what ideas as a teacher to teach students.

Possible *techniques* to solve this task:

τ_{31} = change fractions into decimals or vice versa. Show that 2/5 = 0.4 and 4/5 = 0.8, so there must be the same numbers between them.

τ_{32} = first show that there is one number between x and y (x, y representing the general terms for rational numbers such as $\frac{a}{b}$, and $m, c_1 c_2 \cdots$. There exists z, so $x < z < y$, then use this to find z_1 so that $x < z_1 < z$, continue to z_2 so that $x < z_2 < z_1$, and etc.

τ_{33} = represent those numbers in a number line, find other numbers between two numbers using average.

τ_{34} = find a number between $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ using a formula: $\frac{a+c}{b+d}$.

τ_{35} = find a number between $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ using a formula: $\frac{ad+bc}{2bd}$.

τ_{35} = if $b = d$, take a number x between a and c, then $\frac{a}{b} < \frac{x}{d} < \frac{c}{b}$.

τ_{36} = find some decimals between $m, c_1c_2 \cdots$ and $n, d_1d_2 \cdots$. e.g. between 0.4 and 0.8, there exist 0.5, 0.6, and 0.7. (finding numbers between 4 and 8).

τ_{37} = find a decimal between $m, c_1c_2 \cdots$ and $n, d_1d_2 \cdots$ using a formula: $\frac{n,c_1c_2\cdots+n,d_1d_2\cdots}{2}$.

τ_{31}^* = ask students to change fractions into decimals or vice versa, so they will realize about equivalent fractions.

τ_{32}^* = give students another number between two rational numbers, e.g. 0.55, ask them whether it is between 0.4 and 0.8.

τ_{33}^* = ask students to represent those numbers in a number line.

τ_{34}^* = give students a contextual example related to measurement, e.g. changing 0.4 into 0.4 m and 0.8 into 0.8 m.

τ_{35}^* = use equivalent fractions to show that there is easy to find other fractions when we make denominator bigger.

The *technology* associating with this *task* and *techniques* is:

θ = between two rational numbers, there are infinity many rational numbers.

Then, the *theory* involved in justifying θ could be the

Θ = theory of the structures of rational numbers especially denseness of rational numbers.

4. Addition and subtraction of rational numbers

You ask sixth grade students to solve $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\cdots$, and $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\cdots$

How do you solve these problem?

you find that many students add and subtract fractions in the following way $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$, *and* $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$.

How do you interpret the student methods?

What strategies can you propose to teach these students?

(Sonnabend, 1997; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Şahin, Gökkurt, & Soylu, 2015, Son, 2012)

The task can be described as follows:

t_4 = given two positive rational numbers, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, determine $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\cdots$ and $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\cdots$

$t_4{}'$ = given two positive rational numbers, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, decide if $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ and $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$.

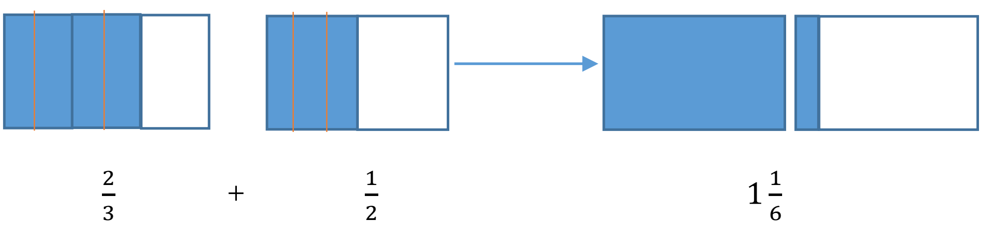
$t_4{}^*$ = given problems and student responses to a task of type t_4, determine what strategies propose to teach students.

The possible *techniques* to solve such tasks:

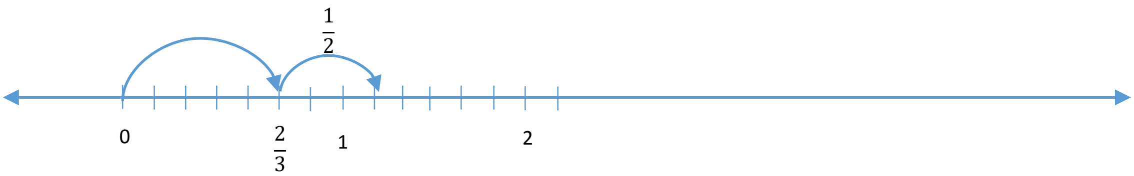
τ_{41} = change each fraction into similar denominators and then add and subtract each numerator to get the result.

τ_{42} = change fraction into decimals and then add and subtract them to get the result.

τ_{43} = represent each fraction into rectangle models and then add and subtract them to get the result.



τ_{44} = represent each fraction into number lines and then add and subtract them to get the result.



τ_{45} = use milieu such as calculator to compute addition and subtraction of fractions.

τ_{41}' = interpret the student answers are not correct without any proof.

τ_{42}' = use graph or diagram to show each fraction.

τ_{43}' = use calculator to prove the student answers are not correct.

τ_{44}' = change each fraction into decimals.

τ_{45}' = give a counter example where the proposed method early given a wrong answer, e.g. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cdots$ to show that the result is not $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ but $\frac{1}{2}$.

τ_{46}' = using comparing fractions, e.g. comparing $\frac{2}{3}$ ... $\frac{3}{5}$, and $\frac{4}{7}$ ... $\frac{3}{4}$ to help students realize their mistake.

τ_{47}' = compute $\frac{ad+bc}{bd} - \frac{a+b}{c+d}$ for addition and $\frac{ad-bc}{bd} - \frac{a-b}{c-d}$ for subtraction.

τ_{41}^*= ask any student who gives a correct answer to explain the answer.

τ_{42}^* = ask students to represent each fraction into rectangle model and number lines. (connecting to τ_{43} , τ_{44}, and τ_{42}')

τ_{43}^* = ask students to change fractions into decimals. (connecting to τ_{42} and τ_{44}')

τ_{44}^* = using milieu such as calculator to compute the problems and evaluate the student answers.

τ_{45}^* = provide students with a simple counter example such as $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cdots$ and reflect their answers. (connecting to τ_{46}')

The *technology* associating with this *task* and *techniques* is:

θ = numerators of fractions can be added or subtracted when they have same denominators.

Then, the *theory* involved in justifying θ could be the

Θ = theory of the arithmetic of rational numbers especially addition and subtraction of fractions.

5. Using Calculator (Multiplication and division of decimals)

As a teacher, you give homework to your students as follows: a) $0.25 \cdot 8 = \cdots$, b) $8 \div 0.25 = \cdots$
How do you solve these problem!

The next meeting at class, a student notices that when he enters 0.25 · 8 into a calculator, the answer is smaller than 8, and when he enters 8 ÷ 0.25, the answer is bigger than 8. He confuses with this answer and thinks that the calculator must be broken.

Is he right? What can you do to help students understand this rule?

(TEDS-M, 2008)

The task can be described as follows:

t_5 = given two rational numbers, a is decimal and b is integer, calculate $a \cdot b$ and $b \div a$.

t_5^* = given a task of type t_5 and student confusion why $a \cdot b < b$ and $b \div a > b$, determine what to do as a teacher to make students understand it.

The possible *techniques* to solve such tasks:

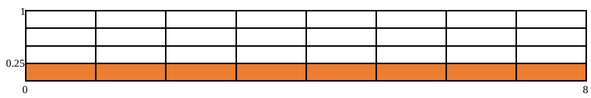
τ_{51} = use multiplication and division algorithm for decimals to solve these problem.

τ_{52} = use number patterns, $n \cdot 8$ and $8 \div n$ for $n = 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25$.

τ_{53} = change decimals into fractions and then do multiplication and division of fractions.

τ_{54} = solve problem by proportion, e.g. $8 \div 0.25 = 800 \div 25$.

τ_{55} = use rectangle models and number lines to solve multiplication and division problems.



τ_{56} = solve multiplication and subtraction of decimals by calculator.

τ_{51}^* = explaining by number patterns, $n \cdot 8$ and $8 \div n$ for $n = 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25$

τ_{52}^* = use rectangle models or number lines to explain $0.25 \cdot 8$ and $8 \div 0.25$.

τ_{53}^* = ask students to change decimals into fraction, and use procedure multiplication and division of fractions.

τ_{54}^* = give a contextual problem, e.g. there are 8 kg sugar that will be put in some plastic bags that each plastic bag can contain 0.25 kg sugar. How many plastic bags do we need?

τ_{55}^* = use proportional reasoning to explain $a \div b = na \div nb$

A possible *technology* for this problem:

θ = For $0 < a < 1$, and $b > 1$ than $a \cdot b < b$ and $b \div a > b$.

The theory:

Θ = theory of the arithmetic of rational numbers especially multiplication and division of rational numbers.

E BIBLIOGRAFI

Jeg har store problemer med at få bibliografien til at virker. Den har virket ca. én dag hver anden måned siden jeg startede og jeg kan slet ikke finde årsagen selvom jeg googler mig frem og til tider har brugte hele eftermiddage på et prøve at gennemskue problemet, som så løses og virker meget kortvarigt.

Derfor kommer her en bibliografi som jeg selv har skrevet ind i latex. Jeg har i selve bibliografien sorteret i alfabetisk rækkefølge efter forfatternavne.

Referencer brugt undervejs i specialet er valgt så jeg nemt kan huske dem og IKKE så de svarer til forfatterefternavn. Derfor kommer først en oversigt, hvor referencerne er skrevet i alfabetisk rækkefølge og kobles på forfatternavnene.

E.1 SAMMENHÆNG MED FORFATTER OG REFERENCER

(**ab1:2005**): Carstensen, Jens, Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens
(**aquinas:2008**): D'Onofrio, Sandro R.
(**basic:2005**): Cohn, P.M
(**barbe:2005**): Barbé, Joaqium, Bosch, Marianna, Espinoza, Lorena and Gascón, Josep
(**berlingske:2016**): Andersen, Leif H.
(**bosch:2006**): Bosch, Marianna and Gascón, Josep
(**brousseau:2014**): Broussou, Guy and Broussou, Nadine and Warfield, Virginia
(**caroline:2015**): Poulsen, Caroline
(**dis:2013**)
Lützen, Jesper
(**dummit:2004**): Dummit, David S. and Foote, Richard M., 2004,
(**foundation:1965**): Pervin, William J.
(**gyldendal:2005**): Clausen, Flemming and Schomacker, Gert and Tolnø, Jesper
(**gymnasie:2006**): Damberg, Erik and Dolin, Jens and Ingerslev, Gitte
(**hungerford:2000**): Hungerford, Thomas W.
(**kongshavn:2015**): Kongshavn, Maria
(**mata1:2005**): Carstensen, Jens and Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens
(**model:2010**): Durand-Guerrier, Viviane and Winsløw, Carl and yoshida, Hiroaki
(**ord:2016**): Dansk Synonymordbog
(**pinilla:2007**): Pinilla, Martha I. F.
(**prediger:2006**): Prediger, Susanne
(**set:1994**): Moschovakis, Yannis N.
citepstx:2012: Jørgen Dejgaard
(**taylor:1997**): Munkres, James R.
(**top:2000**): Taylor, John R.
(**uvmat:2014**): Sultan, Alan and Artzt, Alice F.
(**uvm:2013**): Undervisningsministeriet
(**webmatematik:2016**): Webmatematik
(**wu:2014**): Wu, Hung Hsi
(**zetra:2016**): Putra, Zetra Hainul

E.2 SELVE BIBLIOGRAFIEN:

(**berlingske:2016**)
Andersen, Leif H., 2016, *Udsigt til en matematisk katastrofe*, Berlingske, Udgivet 7.april 2016. Kan findes på følgende link:
http://www.b.dk/kronikker/udsigt-til-en-matematisk-katastrofe

(**barbe:2005**)
Barbé, Joaqium, Bosch, Marianna, Espinoza, Lorena and Gascón, Josep, 2005, *Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of the limits of functions in spanish high school*, Educational Studies in Mathematcis,s. 235-268, ,nr. 59

(**bosch:2006**)
Bosch, Marianna and Gascón, Josep, 2006, *Twenty-Five Years of Didactic Transposition*, ICMI Bulletin nr. 58, s. 51-65

(**brousseau:2014**)
Broussou, Guy and Broussou, Nadine and Warfield, Virginia, 2014, *Teaching Fractions Through Situations: A Fundemanteal Experiment*, Springe Science og Business Media

(**ab1:2005**)
Carstensen, Jens, Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens, 2005,*MAT AB1 opgaver stx*

(**mata1:2005**)
Carstensen, Jens and Frandsen, Jesper and Studsgaard, Jens, 2005, *MAT A1 stx*, Systime, 1.udgave, 1.oplag

(**gyldendal:2005**)
Clausen, Flemming and Schomacker, Gert and Tolnø, Jesper, 2005,*Gyldenddals Gymnasiematematik*, Gyldendal, 1.udgave

(**basic:2005**)
Cohn, P.M, 2005, *Basic Algebra - Groups, Rings and Fields,*,Springer , 2.udgave

(**gymnasie:2006**)
Damberg, Erik and Dolin, Jens and Ingerslev, Gitte, 2006, *Gymnasiepædagogik*, Hans Reitzels Forlag nr.1, 4.oplag

ord:2016
Dansk Synonymordbog, april 2016, *Repraesentere*
http://sproget.dk/lookup?SearchableText=repr%C3%A6sentere

(**dummit:2004**),
Dummit, David S. and Foote, Richard M., 2004, *Abstract Algebra*, John Wiley and Sons, Inc., 3.udgave

(**aquinas:2008**)
D'Onofrio, Sandro R.,2008, *Aquinas as Representationalist: the Ontology of the Species Intelligibilis*,
http://www.academia.edu/9907677/Aquinas_as_Representationalist

(**model:2010**)
Durand-Guerrier, Viviane and Winsløw, Carl and yoshida, Hiroaki, 2010, *A model of mathematics teacher knowledge and comparative study in Denmark, France and Japan*,ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, vol. 15

(**hungerford:2000**)
Hungerford, Thomas W., 2000, *Algebra*, New York: Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathemathics

(**kongshavn:2015**)
Kongshavn, Maria, 2015, *How did the understanding of ratio and proportion develop through history?*
Note: Et projekt uden for kursusregi skrevet i matematikkens historie hos Jesper Lützen, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet

(**dis:2013**)
Lützen, Jesper, juni 2013,*Diskrete Matematiske Metoder* , url=http://www.math.ku.dk/noter/filer/dis2013.pdf

(**set:1994**)
Moschovakis, Yannis N., 1994, *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag

(**top:2000**)
Munkres, James R., 2000, *Topology - international editition*, Pearson Education International, 2.udgave

(**foundation:1965**)
Pervin, William J., 1965, *Foundations of General Topology*, Academnic Press, nr.2

(**caroline:2015**)
Poulsen, Caroline, 2015,*Basic Algebra in the Transition from Lower Secondary School to High School*, Ind's studenterserie nr. 44, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet, Danmark
http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie44/

(**pinilla:2007**)
Pinilla, Martha I. F., 2007*Fraction: Conceptual and Didactic Aspects*, Acta Didactica Universitatis Comenianae nr. 7, s. 81-115

(**prediger:2006**)
Prediger, Susanne, 2006, *The relevance of didactic categories for analysin obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions*, Learning and Instruction nr.18, s. 3-17

(**zetra:2016**)
Putra, Zetra Hainul, 2016
Note: Jeg har haft personlig kontakt med Zetra Hainul Putra, især omkring interview af seminarestuderende og hans design af HLO.
Zetra arbejder på en PHD om bl.a. seminariestuderendes viden om rationale tal ved Institut

for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet. Hans vejleder er Carl Winsløw.
Zetras mail: zetra.putra@ind.ku.dk,

(**zetra:2016a**)
Putra, Zetra Hainul and Winsløw, Carl, 2016, *A framework for a comparative study of pre-service elementary teachers' knowledge on fractions and decimals*, Note: Has been presented in CITAD

(**zetra:2015**)
Putra, Zetra Hainul, 2015, *COLLECTIVE ASPECTS OF PRE-SERVICE LOWER SECONDARY TEACHERS' KNOWLEDGE ON DENSITY OF RATIONAL NUMBERS*, Note: Paper is submitted for the Educational design in mathematics and science: The collective aspect course conducted at Department of Science Education, November 16 to 20, 2015.

(**zetra:2016b**)
Putra, Zetra Hainul, 2016, *Preliminary analysis of pre-service elementary teachers' mathematical and didactical knowledge of fraction operations: the case of addition and subtraction of fractions*, Note: Paper will be presented at the 8th YERME Summer School, Poděbrady, Česká Republika, August 13 to 20, 2016.

(**zetra:2016c**)
Putra, Zetra Hainul and Winsløw, Carl, 2016, *Design of Hypothetical Teacher Tasks (HTT) to Access Pre-service Elementary Teachers' Knowledge on Rational Numbers*, Note: Poster will be presented at the ERME Topic Conference ETC3 on mathematics teaching, resources and teacher professional development, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany, October 5 to 7, 2016

(**stx:2012**)
Jørgen Dejgaard, 2012, *Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik stx A-niveau 2012*, LMFK-forlagenel

(**uvmat:2014**)
Sultan, Alan and Artzt, Alice F., 2010, *The Mathematics that Every Secondary School Math Teacher Needs to Know*, Routledge, Studies in Mathematical Thinking and Learning Series

(**taylor:1997**)
Taylor, John R., 1997, *Error Analysis*, University Science Books, 2.udgave

(**uvm:2013**)
Undervisningsministeriet, 2013, *Lærerplaner for matematik stx*, Note: Bilag 35, 36 og 37:
https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil37

(**webmatematik:2016**)
Webmatematik, februar 2016 *Omregning: brøker-procent-decimaltal*
Note:Matematikcenters online hjælp - hjemmeside:
http://www.webmatematik.dk/lektioner/7-9-klasse/broker/omregning-brok-procent-decimaltal

(**wu:2014**)
Wu, Hung Hsi, 2014 *Fractions Decimals and Rational Numbers*, rapport
https://math.berkeley.edu/~wu/NMPfractions.pdf ,

(**wu:1999**)
Wu, Hung Hsi, 1999, *Basic Skills Versusl Conceptual Understanding*, American Educator/American federation of teachers

colophon

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "The Elements of Typographic Style". `classicthesis` is available for both LaTeX and LyX:

https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

http://postcards.miede.de/