INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Forskningslignende situationer

En empirisk, didaktisk undersøgelse af et eksperimentelt matematikforløb for danske gymnasieelever

Julian Tosev

Specialerapport

Juni 2007

INDs studenterserie nr. 5

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)

Julian Tosev: Forskningslignende situationer

En empirisk undersøgelse af didaktikken forbundet med introduktionen af forskningslignende situationer for danske gymnasieelever. Ideen om forskningslignende situationer kommer fra Frankrig, hvor man har erfaring med forskningslignende situationer gennem frivillige, nationale matematikprojekter. Udarbejdelsen, gennemførelsen og evalueringen af to forskningslignende undervisningsdesigns bygger på teorien om didaktiske situationer, som er analyseværktøj gennem hele specialet. Med tilhørende teori karakteriseres og sammenlignes forskningslignende undersøgelsessituationer med mere klassiske undervisningssituationer. Didaktiske elementer beskrives, analyseres og vurderes, i relation til undervisningsdesign, med det mål at give læseren indblik i didaktiske muligheder ved brugen af forskningslignende situationer i et dansk gymnasium,samt at fremhæve egenskaber og potentialer ved sådan et forløb.

***INDs studenterserie** består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Derfor har vi fra og med 2007 besluttet at publicere dem elektronisk i INDs studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.*

DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Kandidatspeciale

Stud.scient. Julian Tosev

Forskningslignende situationer

En empirisk, didaktisk undersøgelse af et eksperimentelt matematikforløb for danske gymnasieelever

Vejleder: Prof. Dr. Carl Winsløw

Afleveret den: 27/06/2007

Tak til de personer, der har hjulpet mig med specialet:

Carl Winsløw

Nynne Maria Afzelius

Hans Christian Thomsen

Christian Thune

Dennis Pipenbring

Niels Nørskov Laursen

Martin Sonnenborg

Karina Søgaard

Sarah Kyhn Buskbjerg

Ana Hesselbart

Lisbeth Fajstrup

Jonna Bybeck Nielsen

1. ABSTRAKT

En empirisk undersøgelse af didaktikken forbundet med introduktionen af forskningslignende situationer for danske gymnasieelever. Ideen om forskningslignende situationer kommer fra Frankrig, hvor man har erfaring med forskningslignende situationer gennem frivillige, nationale matematikprojekter. Udarbejdelsen, gennemførelsen og evalueringen af to forskningslignende undervisningsdesigns bygger på teorien om didaktiske situationer, som er analyseværktøj gennem hele specialet. Med tilhørende teori karakteriseres og sammenlignes forskningslignende undersøgelsessituationer med mere klassiske undervisningssituationer. Didaktiske elementer beskrives, analyseres og vurderes, i relation til undervisningsdesign, med det mål at give læseren indblik i didaktiske muligheder ved brugen af forskningslignende situationer i et dansk gymnasium, samt at fremhæve egenskaber og potentialer ved sådan et forløb.

Indhold

2. INTRODUKTION

forskning [ˈfɔrsgneŋ] subst. -en
1. en grundig undersøgelse af et bestemt emne for at finde frem til ny viden om det, fx om anvendelsesmuligheder, egenskaber og beskaffenhed
(Politikkens Nudansk Ordbog, udgave 17)

Jeg ønsker i denne rapport at fokusere på undervisning i gymnasiesammenhæng, hvor eleven arbejder forskningslignende med en matematisk problemstilling. Jeg har valgt at kalde en sådan situation, for en forskningslignende situation, eller blot FLS. Denne idé, hvor elever arbejder forskningslignende, har jeg taget fra et fransk undervisningsprojekt, som kaldes matematik i cowboybukser, *math en jeans* (http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm), hvor elever beskæftiger sig med uløste, matematiske opgaver gennem flere uger. Eleverne deltager i math en jeans forløbene helt frivilligt på samme måde, som man her i Danmark kunne gå til badminton eller spejder. Det er først og fremmest dejligt at se, at man i Frankrig har kunnet etablere et projekt, som math en jeans, hvor elever frivilligt arbejder med matematikken. I Danmark kan det være svært at motivere elever til at beskæftige sig med matematik ud over det obligatoriske niveau. Dette kan man blandt andet se i resultaterne af undervisningsministeriets arbejdsgruppe for evaluering af naturfag (http://us.uvm.dk/gymnasie//almen/lov/regelsamlinger/1999/dok99/naturfagm2.htm), hvor 25 % af elever, der afslutter folkeskolen, skriver, at de oplevede faget matematik som ret kedeligt eller meget kedeligt.

Jeg har designet to undervisningsforløb, som bygger på konkrete math en jeans forløb. Jeg har dernæst været ud i fem gymnasieklasser i hovedstadsområdet og gennemført undervisningen. Jeg ønsker i denne rapport at beskrive hvilket potentiale en FLS kan have i gymnasiesammenhæng og sammenligne en mere traditionel undervisningssituation[1] med det, som jeg kalder for en

[1] Med traditionel undervisning menes ikke eksperimentelle matematikforløb, hvor teori bliver gennemgået af underviseren ved tavlen, efterfulgt af opgaveløsning med den pågældende teori, eller praksis der har stor lighed til dette.

undersøgelsessituation. Min rapport bygger på teorien om didaktiske situationer, som vil være min teoretiske baggrund. Denne teori vil jeg benytte til at karakterisere en FLS generelt, samt til at analysere de resultater jeg fik i de fem gymnasieklasser.

2.1 Opbygning af speciale

- Jeg vil starte med at beskrive math en jeans projektet og gennemgå, hvad der kendetegner en FLS. Jeg vil beskrive problemstillingerne i mine to undervisningsdesigns og gøre rede for, at mine to undervisningsdesigns netop er FLS'er.
- Dernæst vil jeg beskrive elementer af teorien om didaktiske situationer og benytte denne teori til at karakterisere en FLS.
- Efter teorien vil jeg beskæftige mig med projekter og beskrivelser, der har lighed til FLS'er i et afsnit som jeg kalder for sideblik.
- Jeg vil dernæst komme med en a priori analyse af mine to undervisningsdesigns, som primært er overvejelser, jeg har gjort mig i forbindelse med gennemførelsen af undervisningen.
- Jeg vil gennemgå og begrunde den metodologi, jeg har benyttet under selve undervisningsforløbet.
- Dernæst vil jeg opstille de resultater på baggrund af mit data
- Til sidst vil jeg komme med en konklusion af rapportens hovedpointer og resultater.

Jeg har dermed to hovedpunkter, som jeg fokuser på i dette speciale:

1) En bred teoretisk beskrivelse af FLS, som bygger på teorien om didaktiske situationer.
2) Opbygning, gennemførsel og evaluering af eget undervisningsdesign med relation til den teoretiske beskrivelse fra punkt 1).

2.2 Math en jeans

Der er mere end 100 steder i Frankrig, hvor math en jeans projektet udøves. Man ønsker med math en jeans, at finde en ny vej til matematisk viden, som skal gå gennem FLS'er (http://fr.wikipedia.org/wiki/MATh_en_JEANS). Math en jeans gruppen vælger et uløst matematisk problem og arbejder med dette problem gennem længere tid, hvorved de forsøger at finde egenskaber ved problemet eller bevise elementer af problemstillingen. To math en jeans skoler bliver ofte parret, så begge skoler arbejder med den samme problemstilling. Disse to skoler mødes for at fremlægge deres opdagelser og fremskridt med problemstillingen. De uløste opgaver er med til at motivere eleverne til at arbejde med problemstillingen, da man kan opdage noget helt nyt, som ingen tidligere har opdaget. Samtidigt er det en stor motivationsfaktor, at en anden skole arbejder på samme problem, og dermed opstår et kompetitativt element, som motiverer yderligere. Klimaks for math en jeans er, når elever fremlægger deres opdagelser i den nationale kongres i Frankrig.

2.3 Forskningslignende situationer

Jeg kalder det ikke for forskningssituationer, men derimod forsknings*lignende* situationer, dette er der en grund til: En forsker arbejder under andre forhold end en gymnasieelev gør, en forsker er lønnet og har desuden mange andre opgaver udover selve forskningen. Her kan blandt andet nævnes, undervisning af klasser, udgivelse af artikler, koordination med Universitet samt meget mere. Desuden er der helt forskellige krav til det produkt, en forsker producerer, i modsætning til det produkt man kan forvente af en gymnasieelev. Sidst, men ikke mindst, er der en underviser til stede i en FLS, hvilket ikke er tilfældet for forskeren. Men selve udforskningselementet forsøger man i en FLS at efterligne så meget som muligt.

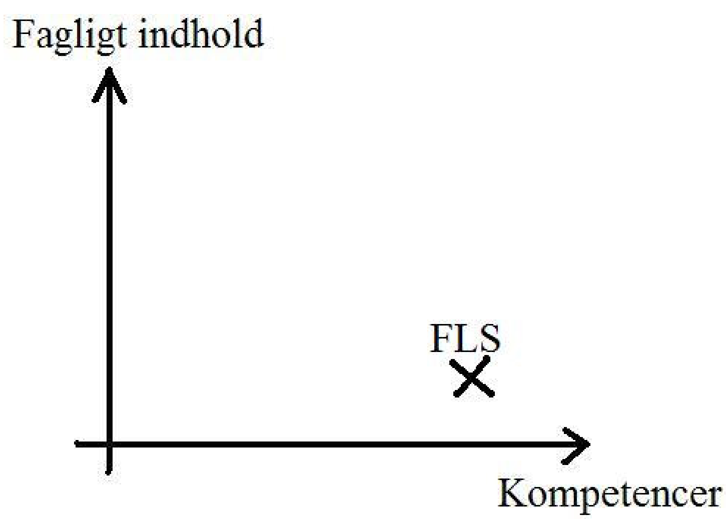
I en FLS ligger fokus ikke primært på det rent matematikfaglige, men derimod på alle de kompetencer, der er nødvendige for at arbejde forskningslignende. Disse kompetencer, som er centrale i arbejdet med FLS'er, har jeg valgt at kalde for *tværgående kompetencer,* stærkt inspireret af Greniers "*transverse knowledge*" (Grenier, 2004, s. 1). De tværgående kompetencer har jeg valgt at definere således:

Tværgående kompetencer

- *Stille stærke hypoteser og gode spørgsmål*
- *Arbejde med flere repræsentationer, herunder at kunne skifte mellem repræsentationer samt at kunne blive inden for samme repræsentation*
- *Kommunikere mundtligt og skriftligt, herunder formidle og debattere*
- *Strukturere og modellere*

- *Benytte hjælpemidler*
- *Udforske matematisk problemstilling samt eksperimentere*
- *Bevise og modbevise*

I Frankrig har man betegnet transverse knowledge, som essentielle i arbejdet med matematik (Grenier, 2004, s. 1), og derfor er der kommet fokus på arbejdet med disse kompetencer. Jeg vil fokusere på disse kompetencer i arbejdet med mine to undervisningsdesigns og beskrive, hvilken effekt det har, at introducere danske gymnasieelever for en FLS, hvor der er fokus på tværgående kompetencer. Sammenhæng mellem fagligt indhold og kompetencer i en undervisningssituation kan illustreres i et koordinatsystem:



I en FLS er der især fokus på kompetencer og mindre fokus på nyt, fagligt indhold. Grenier (Grenier, 2004) opstiller 5 kriterier, der skal være opfyldt, hvis en undervisningssituation skal kunne defineres som forskningslignende[2]:

1. ***En FLS er beslægtet med en professionel forskningsstrategi***
   Der skal foreligge uløste, matematiske problemer.
2. ***Der skal være let adgang til det indledende spørgsmål***
   Spørgsmålet skal være let forståeligt og må ikke kræve tung matematik.

[2] Grenier kalder disse for: Research Situations for the Class og på fransk: Situations de Recherche en Classe (SIRC)

3. ***Mulige indledende strategier er inden for synsvidde***

   Uden specifikke forudsætninger.

4. ***Flere udforskningsstrategier og flere udfoldelser er mulige***

   Konstruktion, bevis og beregninger samt matematiske begreber kan involveres.

5. ***Et besvaret spørgsmål kan eventuelt medføre nye spørgsmål***

Jeg vil benytte Greniers definition af en FLS og det er netop med disse 5 kriterier i baghovedet, at jeg har udarbejdet mine to undervisningsdesigns.

Når Grenier skriver "*beslægtet med en professionel forskningsstrategi*", så fokuseres der netop på at arbejde med uløste, matematiske opgaver og at det ikke 100 % er en forskningssituation. Den lette adgang til det indledende spørgsmål medfører, at alle kan forstå dette, selvom man ikke har stort kendskab til matematiske termer og begreber. Punkt 3 og 4 fortæller, at man let kan begynde at formulere og afprøve ideer i forbindelse med problemstillingen via forskellige veje og punkt 5 fortæller, at man hele tiden kan arbejde videre med en given problemstillingen, ved at ændre og modificere problemstillingen.

En FLS situation har dermed to fokusområder:

1. ***Træne og styrke tværgående kompetencer***
2. ***Afdække problemstilling matematisk***

2.4 To forskningslignende problemstillinger

Jeg har fundet to math en jeans problemstillinger fra http://www.mjc-andre.org/pages/amej/sujets/80sujets/espace_sujets.html[3]. Disse har jeg benyttet til at designe to undervisningsforløb, som blev introduceret for gymnasielever, med det mål at undersøge didaktiske egenskaber og potentialer ved brugen af FLS'er i gymnasiet. De to problemstillinger beskrives herunder:

[3] Franske hjemmesider kan blive oversat til engelsk ved hjælp af programmer som Google translater og Altavistas Babelfish: http://www.google.com/translate_t & http://babelfish.altavista.com/

Sofaproblemet:

En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med bredde 1 og passerer et hjørne på 90 grader. Hvilken form har den genstand, der dækker det største gulvareal, og som kan passere hjørnet?

Cirkelskiveproblemet:

Hvordan placeres 1, 2, 3, 4, … cirkelskiver, så de tilsammen dækker den største cirkelskive?

Både sofaproblemet og cirkelskiveproblemet er uløste, matematiske opgaver og er derfor beslægtet med forskning. Flere matematikere har arbejdet med disse problemstillinger, og jeg vil senere i rapporten gennemgå, hvor langt man er kommet med disse to problemstillinger i det matematiske miljø. De to problemstillinger kræver ingen tung matematik for at kunne forstå, og der er flere indledende muligheder for at udforske problemerne, som vi også skal se på senere i rapporten. Der er i begge tilfælde mulighed for at kunne stille nye og mere avancerede spørgsmål, efter dele af problemstillingerne er bevist. Dermed vil jeg karakterisere disse to problemstillinger som placeret under det jeg kalder for FLS'er.

2.5 Hvorfor arbejde forskningslignende?

Matematikere har historisk set altid arbejdet med at finde svar på uløste problemer og formulere deres opdagelser til omverden. Hvorfor bør gymnasieelever ikke opleve denne praksis? Skal man som matematikstuderende blot lade sig føre gennem en allerede planlagt sti, hvor man betragter matematikkens storslåede bygningsværker uden på noget tidspunkt at forsøge at gå egne veje? Brousseau skriver om dette (Brousseau, 1997, s. 22):

"Knowing mathematics is not simply learning definitions and theorems in order to recognize when to use and apply them."

Brousseau fortsætter:

“We do mathematics only when we are dealing with problems – but we forget at times that solving a problem is only a part of the work; finding good questions is just as important as finding their solutions.”

På Universitetet kan jeg kun tale ud fra egen erfaring, men det er min opfattelse, at selv her beskæftiger de studerende sig primært med allerede kendt stof, som de skal kunne forstå og benytte i en eksamenssituation. Ved at lade eleven udforske et givent matematisk emne selvstændigt, kan man forstille sig, at eleven vil have samme forudsætninger som datidens matematikere og foretage samme fejl og iagttagelser, som datidens matematikere gjorde (Winsløw, 2006, s. 20). Denne praksis kan der være mange didaktiske fordele ved, efter min mening.

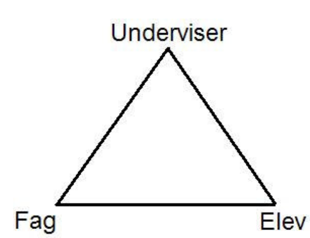
3. TEORI

Jeg vil benytte Teorien om Didaktiske Situationer (TDS), som er udarbejdet af Guy Brousseau (Brousseau, 1997) som teori i mit speciale. I min gennemgang af teorien vil jeg udvælge elementer fra TDS, som jeg finder relevante i mit arbejde med FLS'er. Efter hvert teori afsnit, vil jeg henlede opmærksomheden på FLS og forsøge at beskrive FLS'er ud fra den netop beskrevne teori. Denne beskrivelse af FLS'er, vil ikke være funderet i empiri, men er derimod rene, teoretiske overvejelser. Jeg har valgt denne fremgangsmetode, da jeg har gjort mig mange overvejelser i forbindelse med FLS, og mange af disse overvejelser bliver ikke fremhævet i mine to undervisningsdesigns. Samtidigt har jeg forsøgt at beskrive FLS'er så generelt som muligt. Hvis jeg kun lod mine to designs repræsentere FLS'er, ville mange generelle egenskaber ved FLS'er gå tabt, da mine to designs ikke omslutter alle egenskaber for samtlige FLS'er. Som jeg skrev i introduktionen, ønsker jeg at karakterisere FLS'er med en bred teoretisk beskrivelse, hvilket ikke bliver muligt, hvis jeg kun ser på egenskaber ved to specifikke designs.

Jeg vælger under teoriafsnittet at beskrive, hvordan jeg umiddelbart opfatter FLS'er, og under resultater at se om denne opfattelse er korrekt. Jeg er opmærksom på, at der findes egenskaber ved FLS, som ligger uden for rammerne af mine to designs, og at disse egenskaber derfor ikke bliver afprøvet i praksis. Min beskrivelse af disse egenskaber bliver derfor udelukkende beskrevet teoretisk.

3.1 Didaktisk trekant

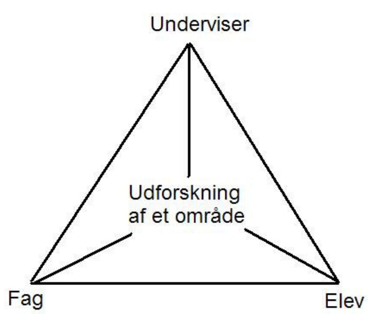
Den klassiske didaktiske trekant indeholder underviser, elev og fag (Winsløw, 2006, s. 16). Dette er komponenter, der indgår i en undervisningssituation, og mellem disse komponenter kan jeg beskrive følgende: Den didaktiske akse løber mellem underviseren og faget, den adidaktiske akse løber mellem fag og elev og den sociale akse løber mellem underviser og elev. I dette tilfælde eksisterer der 3 relationer, som man kan forholde sig til i en undervisningssituation, og hver relation er afhængig af det modsatte hjørne (Winsløw, 2006, s. 18).



Den adidaktiske akse mellem fag og elev er afhængig af underviseren, den didaktiske akse mellem underviser og fag er afhængig af at kunne formidle til eleven og den sociale akse mellem underviser og elev kræver et fag. Denne sammenhæng mellem de tre hjørner i trekanten, kalder Winsløw for et didaktisk system, og det er især den adidaktiske akse, som jeg interesserer mig for i arbejdet med FLS. Jeg forsøger at fokusere på elevens selvstændige arbejde med faget og at gøre eleven fri fra underviseren i størst mulig grad.

3.2 Den forskningslignende, didaktiske tetrahedron[4]

I en FLS tager man udgangspunkt i en konkret, uløst opgave, som umiddelbart er uafhængig af faget. Eleven arbejder selvstændigt med problemet og forsøger at formulere hypoteser, der kan



afdække områder af problemet. Dermed er der i en FLS ikke direkte fokus på faget i den didaktiske trekant, men derimod på at løse dele af problemstillingen og gøre fremskridt indenfor problemstilling. Fokus ligger på udforskning af et område eller *udforskningsområdet*. Duchet (Duchet, 2004) beskriver netop, hvordan man bør tilføje en ekstra komponent til den didaktiske trekant, når man arbejder med en FLS. Udforskningsområdet er i vores tilfælde sofaproblemet og cirkelskiveproblemet, som alle komponenter i den didaktiske trekant må forholde sig til. Dermed er der dannet en tredimensionel tetrahedron, som jeg kan forholde mig til, når jeg arbejder med FLS'er. Der dannet tre nye relationer i vores tetrahedron, som jeg vil beskrive nærmere her:

Elev ~ udforskningsområde

Denne relation er uafhængig af både faget og underviseren og eleven arbejder selvstændigt med udforskningsområdet. Eleven har fokus på at afdække udforskningsområdet, og der findes ikke én korrekt fremgangsmetode, men eleven finder sin egen. Under denne udforskning kan eleven trække på en anden relation, nemlig faget, som kan være med til at afdække udforskningsområdet. På samme måde kan eleven trække på relationen til underviseren, når der er brug for vejledning.

---

[4] A tetrahedron (plural: tetrahedra) is a polyhedron composed of four triangular faces, three of which meet at each vertex. A regular tetrahedron is one in which the four triangles are regular, or "equilateral," and is one of the Platonic solids. (Wikipedia.com)

Fag ~ udforskningsområde

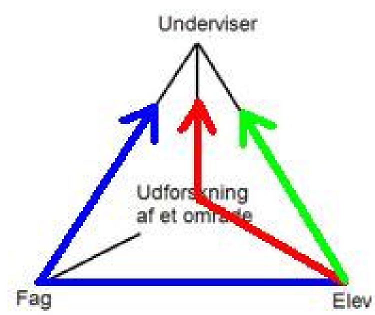
Udforskningsområdet er ikke afhængig af et bestemt matematisk emne inden for faget. Geometri, kombinatorik, analyse, sandsynlighed eller andre emner kan være i spil i en FLS samtidigt. Faget tilbyder blot mulige værktøjer og fremgangsmetoder, men dikterer ikke én bestemt fremgangsmetode eller et bestemt matematisk emne, hvilket er usædvanligt i en matematikundervisning.

Underviser ~ udforskningsområde

Underviseren skal i en FLS forholde sig til udforskningsområdet ligesom eleven skal, derfor opstår der en relation mellem underviser og udforskningsområdet. I en traditionel undervisningssituation ligger faget "stille" for underviseren, der er ingen ændring i det faglige og underviseren har fuldt overblik med situationen. I en FLS er udforskningsområdet levende og i konstant bevægelse, derfor skal underviseren blive ved med at forholde sig til udforskningsområdet sammen med eleven.

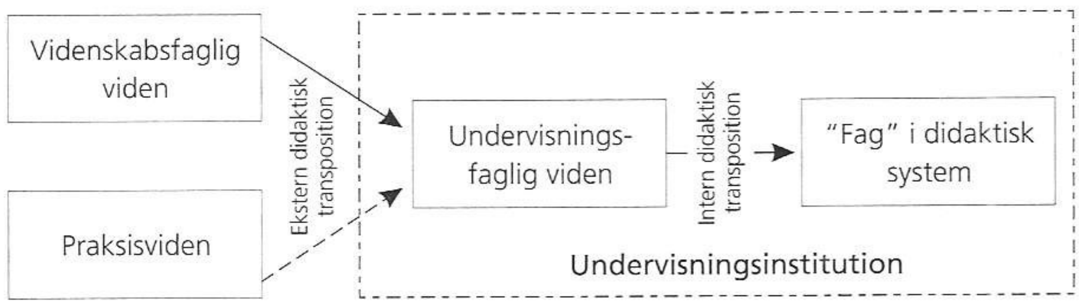
Nye veje mellem elev og underviser

Der er tre veje mellem eleven og underviseren i en FLS: den direkte, via faget og via udforskningsområdet. Den direkte relation, er den sociale akse, som siger noget om forholdet mellem eleven og underviseren uafhængigt af det faglige. Relationen via faget er den traditionelle elev/underviser relation, hvor underviseren formidler faget, underviseren giver karakter, eleven løser opgaver, mm. Den sidste veje mellem elev og underviser er via udforskningsområdet, hvor elev og underviser mere fungerer som samarbejdspartner end noget andet. Begge har interesse i at afdække udforskningsområdet og de lever i en symbiose med udforskningsområdet i centrum. Ligesom et elektrisk kredsløb, kan indeholde modstand, så vil der i dette didaktiske system eksistere en modstand, som vi finder i udforskningsområdet. Sammenstødet mellem eleven, der ønsker at lære, og den modstand der findes i udforskningsområdet, medfører et effektivt møde, skiver Duchet (Duchet, 2004, s. 1).



3.3 Den didaktiske transposition

Den didaktiske transposition indeholder to transpositioner: én fra videnskabsfaglig viden og praksisviden hen til undervisningssituationen, den anden transposition sker i klasseværelset, hvor underviseren besidder en undervisningsfaglig viden, som bliver omformet, så eleven kan tilegne sig ny viden. Disse to transformationer kaldes for ekstern didaktisk transposition og intern didaktisk transposition (Winsløw, 2006, s. 19), se figur herunder



Forskning forbinder man generelt med videnskabsfaget matematik og ikke med undervisnings-faget matematik. Med FLS'er ønsker man at få videnskabsfaget og undervisningsfaget tættere på hinanden, ved at lade eleven arbejde forskningslignende. Det er ikke et mål i sig selv at videnskabsfaget og undervisningsfaget kommer tættere på hinanden. Målet er at implementere nogle af de gode principper forskeren benytter i sit arbejde, ind i undervisningssituationer, hvor eleven arbejder. Dermed forsøger man med FLS'er at flytte undervisningsfaget nærmere på videnskabsfaget. Videnskabsfaget bør ikke flytte sig nærmere på undervisningsfaget, men fortsætte uden forandring.

Målet med FLS'er er ikke primært, at eleven tilegner sig ny viden, som det er tilfældet for forskeren, men at eleven benytter en allerede eksisterende viden til at undersøge et udforskningsområde. Eftersom eleven arbejder selvstændigt med en åben problemstilling, er det ikke oplagt, at eleven vil tilegne sig ny viden. Det vil være fint hvis eleven tilegner sig ny viden inden for et matematisk emne, men fokus ligger på allerede eksisterende viden og tværgående kompetencer.

3.4 Roller i den didaktiske transposition

Jeg vil benytte to former for viden, som Winsløw (Winsløw, 2006, s. 134) beskriver således: *Personlig viden* er individets egen forestilling om et pågældende område inden for faget. Denne viden kan være helt unik og bære sit helt eget præg, denne viden bliver normalt skabt i individets tidlige møde med det pågældende område. I modsætning til den personlige viden findes den *officielle viden*, som er den viden, der findes i lærebøger, videnskabelige artikler mm. Denne viden er der en vis enighed om i det videnskabelige miljø, og denne er derfor meget mere stabil end den personlige viden hos et individ. Der eksisterer derfor to processer: *personliggørelse af officiel viden* og *fællesgørelse af personlig viden*, som jeg vil beskrive nærmere her: I den didaktiske transposition eksisterer der 3 aktører: Forskeren, underviseren og eleven. Hver af disse aktører spiller en forskellig rolle i den didaktiske transposition. Forskeren er ansvarlig for at producere ny viden inden for sit fag, som i dette tilfælde er matematik, men som i princippet kunne være hvilket som helst andet fag. Denne nye viden bliver til officiel viden gennem en fællesgørelse af forskerens personlige viden, og denne nye viden/officielle viden bliver flyttet eller omformet, ved hjælp af den eksterne didaktiske transposition, til undervisningssituationen. (Jeg vil ikke beskæftige mig med selve de didaktiske transpositioner, men bruger blot den didaktiske transposition til at tydeliggøre de forskellige roller der eksisterer). Når ny, officiel viden skal videregives til fx en undervisningsinstitution, er det forskerens arbejde at videregive denne viden så præcist og så letforståeligt som overhovedet muligt. Forskeren har ingen interesse i, at den eksterne didaktiske transposition indeholder modstand eller er besværlig på nogen måde. Derfor forsøger forskeren at eliminere alt modstand, så modtageren let og hurtigt kan benytte den nye, officielle viden i en konkret undervisningssammenhæng, eller anden matematisk praksis. Forskeren beskriver den nye viden upersonligt og ude af kontekst (Brousseau, 1997, s. 227). Underviserens arbejde er det modsatte, nemlig at re-personliggøre og sætte den nye viden ind i sammenhæng overfor eleven.

Underviserens arbejde er at videregive den officielle viden til eleven. Til tider kan det være tilstrækkeligt at fortælle eleven den officielle viden direkte, hvilket medfører, at eleven personliggør den officielle viden. Om dette skriver Hersant og Perrin-Glorian
(Hersan og Perrin-Glorian, 2005, s. 56):

"In some cases it is enough that knowledge be presented and explained; this is then the more economical way to teach. However, many students have difficulties in learning some important mathematical concepts. In this case, we think it is necessary to elaborate teaching situations, which give the students a chance to make sense of this concept."

De situationer hvor underviseren ikke blot kan fortælle eleven den officielle viden, bliver underviseren nødt til at gribe til andre metoder. Underviseren forsøger i sådanne tilfælde at "gemme" den officielle viden og elevens arbejde bliver derfor, ligesom forskerens, at forsøge at finde den officielle viden. Eleven skal personliggøre den officielle viden, fx ved at arbejde med opgaver, hvorved eleven får en forståelse for de matematiske begreber og lærer formler og definitioner at kende. Underviseren fortæller ikke eleven, hvordan opgaven skal løses, men håber på at eleven selv kan klare dette arbejde.

Dermed har vi hovedingredienserne: Forskeren producerer ny viden gennem en personliggørelsesproces, hvorved denne nye viden bliver til officiel viden. Forskeren arbejde bliver dernæst fællesgørelse af den personlige viden, som nu er officiel viden. Underviseren er modtager af den officielle viden og forsøger at "gemme" den officielle viden i et didaktisk miljø, som jeg vil beskrive nærmere senere. Eleven arbejder med miljøet og forsøger at "finde" den officielle viden og dermed personliggøre den officielle viden.

3.5 Nye roller i en FLS

I en FLS arbejder eleven med uløste, matematiske problemstillinger, derfor er det ikke muligt at finde officiel viden, da der ikke eksisterer nogen endelig officiel viden. Elevens arbejde bliver derfor meget lig med forskerens arbejde. Eleven er ansvarlig for at producere ny viden ved at arbejde med udforskningsområdet (Grenier, 2004, s. 3). I en traditionel undervisningssituation forsøger eleven at finde viden, som allerede er officiel viden, og som både forskeren og underviseren på forhånd kender til, i en FLS er der ingen, der kender den officielle viden, hvilket er en ny rolle for eleven. Elevens arbejde med udforskningsområdet medfører, at eleven skal personliggøre viden, som ikke er officiel på nogen måde, men derimod er elevens helt egen, unikke forestilling af udforskningsområdet. Dernæst bliver det elevens arbejde, ligesom forskeren, at fællesgøre denne nyerhvervede, personlige viden for resten af klassen og for underviseren. Dermed placerer man eleven i en ny situation, da eleven skal formidle et stykke viden, som ingen andre kender til på forhånden. Denne evne til at formidle ny, personliggjort viden er en del at de tværgående kompetencer.

Forskeren inden for videnskabsfaget kommer til at fungere som rollemodel for, hvordan god, matematisk praksis udføres. Eleven og underviseren kan lære af forskerens arbejde med faget, og begge kan forsøge at benytte nogle af de gode principper, som forskeren benytter, når der arbejdes i en FLS. Forskerens udnævnelse som rollemodel er den eneste nye rolle i forhold til forskeren, da forskeren derudover er uafhængig af undervisningssituationer på gymnasiet.

Underviseren bliver, som eleven, placeret i en ny rolle i en FLS. Underviseren kommer til at fungere, på den ene side som en vejleder for eleven og på den anden side som forsker, der arbejder med udforskningsområdet (Grenier, 2004). Underviseren kommer meget tættere på elevens rolle i modsætning til en traditionel undervisningssituation, idet begge parter undersøger udforskningsområdet. I en traditionel undervisning er underviserens og elevens arbejde modsatrettede: underviseren "gemmer" viden, eleven finder viden. I en FLS samarbejder underviseren og eleven om at afdække udforskningsområdet.

I en FLS er det forventeligt, at underviseren besidder de tværgående kompetencer, som man ønsker eleven skal træne og styrke. Derfor bliver det underviserens arbejde at fokusere på de tværgående kompetencer hos eleven samtidigt med at udforskningsområdet undersøges i samarbejde med eleven. En af de tværgående kompetencer er: udforskning af matematisk problemstilling, som selvfølgelig altid er vigtigt i enhver matematikundervisning. I en FLS er det særdeles vigtigt pga. den eksperimentelle karakter. Heuristik bliver derfor et centralt element.

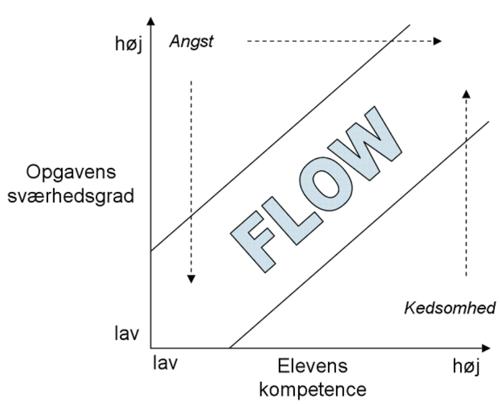
3.6 Didaktisk miljø

Brousseau (Brousseau, 1997) sammenligner en didaktisk læringssituation med et miljø, hvor miljøet indeholder alle elementer, der har indvirkning på læringssituationen. Det er primært underviseren, der er ansvarlig for at skabe et godt miljø, så eleven har mulighed for at tilegne sig viden gennem en personliggørelsesproces. Et miljø kan inkludere ting som: undervisningslokalet, inventar, lærebøger, gruppedannelser, osv. Det *didaktiske miljø* er afhængigt af problemstillinger, opgaver, arbejdsformer, hjælpemidler, formuleringer mm.

"Ligesom et miljø kan være mere eller mindre velegnet for en plante- eller dyreart, kan et didaktisk miljø virke mere eller mindre befordrende for elevernes tilegnelse af en tilsigtet viden"
(Winsløw, 2006, s. 135).

Der findes ikke ét optimalt miljø for alle læringssituationer, og derfor bør underviseren tilpasse det didaktiske miljø efter forskellige situationer.

I et didaktisk miljø kan der være mere eller mindre feedback, når eleven arbejder med miljøet. Når eleven fortager en handling, så kan miljøet give et svar tilbage, som eleven kan forholde sig til. Denne feedback kan være stærkt og den kan være svag. Hersant og Perrin-Glorian beskriver denne feedback, som miljøet kan give til eleven i deres artikel, Hersant og Perrin-Glorian, 2005, s. 117. Det beskrives hvordan denne feedback til tider ikke er tilstrækkelig for at eleven kan tilegne sig ny viden. I dette tilfælde bør underviseren være opmærksom på den manglende feedback og gribe ind og ændre det didaktiske miljø, så eleven får mulighed for at tilegne sig ny viden gennem miljøet. Brousseau (Brousseau, 1997, s. 65) beskriver to forhold, der kan være gældende for et didaktisk miljø: *modstander* og *modtager*. Indeholder miljøet en opponent (modstander), som eleven skal arbejde imod, inden det bliver muligt at personliggøre viden? Det behøver ikke at være dårligt, at miljøet indeholder modstand, det kan ofte være motiverende for eleven, at miljøet indeholder modstand. Dette beskrev jeg tidligere i et eksempel, da Duchet skildrede sammenstødet mellem elevens ønske om at lære og modstanden i udforskningsområdet. Underviseren kan variere på forskellige parametre i det didaktiske miljø. Hvis man betragter en opgave, som bliver præsenteret for eleven, så er det underviserens arbejde at finde en balance mellem elevens kompetencer og opgavens sværhedsgrad. Se figur til venstre (http://design.emu.dk/artik/05/17-traeningsprogr.html). Hvis opgavens sværhedsgrad bliver for høj i forhold til elevens kompetencer, så vil eleven opleve angst og befinde sig i en ubehagelig situation. Hvis elevens kompetencer er høje i forhold til opgavens sværhedsgrad, så vil eleven opleve kedsomhed. I begge ydrepositioner vil miljøet ikke være optimalt for eleven, og det er svært at motivere eleven til yderligere arbejde.



Det andet forhold Brousseau beskriver i forbindelse med miljøet, er modtager. Indeholder miljøet en modtager, som eleven skal målrette sin viden imod inden det bliver muligt at personliggøre viden? Denne modtager er ofte underviseren, som eleven kommunikere med gennem en diskurs, men det kunne lige såvel være en klassekammerat. Dette forhold gør sig gældende for elevens motivation, når der arbejdes med det didaktiske miljø.

3.7 Det didaktiske miljø i en FLS

Det didaktiske miljø bliver ændret i en FLS. De uløst, matematiske opgaver betyder, at der ikke foreligger lærebøger og andet direkte tilgængeligt. Elev og underviser kan benytte internettet til at finde information om det pågældende udforskningsområde, men selv dette er ikke altid tilfældet. I en FLS eksisterer der ikke en klar tilsigtet viden med undervisningen, derfor kan det være svært for underviseren at skabe det didaktiske miljø, da eleven kan gå et utal af veje med problemstilling. Miljøet giver en svag feedback, da det er muligt at eksperimentere med problemstilling, fx ved at bruge CAS[5]. Underviser og klassekammerater kan ligeledes give feedback, når eleven arbejde med miljøet.

Der eksisterer ikke en opponent i kraft af en underviser, der forsøger at "gemme" en officiel viden, da denne ikke eksisterer. Underviseren samarbejder med eleven i forsøget på at afdække udforskningsområdet. De modstandere elev og underviser arbejder imod, er de tværgående kompetencer, altså evnen til at kunne formidle ideer, bruge hjælpemidler, bevise hypoteser, kommunikere med underviser og kammerater, osv. Hovedmodstander bliver selve udforskningsområdet, som alle ønsker at afdække bedst muligt. I en FLS er der en stor modstand, da problemstillingen er uløst for selv de bedste matematikere i verden. Denne modstand kan være med til at demotivere eleven, da man på forhånd ved, at chancerne for at løse problemstillingen er meget lille. Det gælder om at opnå delmål med en FLS, som er opnåelige mål eleven kan få succes med. Samlet set er der en stor ændring af det didaktiske miljø, sammenlignet med mere traditionel undervisning. Dette betyder ikke nødvendigvis et mindre gunstigt miljø i forhold til læring, blot et ændret miljø med nye didaktiske udfordringer og muligheder.

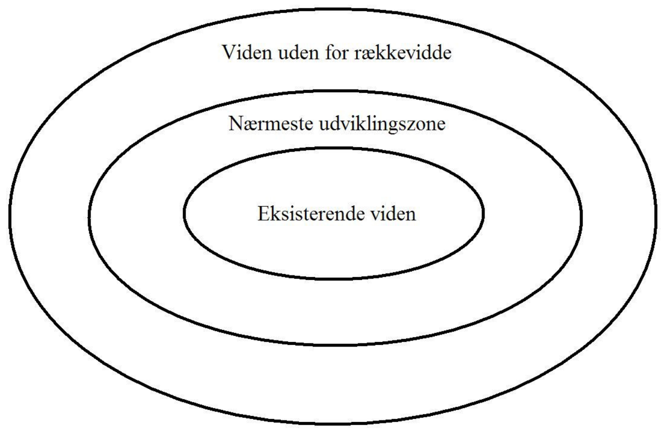
[5] CAS Computer Algebra System

3.8 Automatisk niveaudifferentiering i en FLS

En FLS indeholder flere faktorer, som er med til at nuancere det didaktiske miljø. I en traditionel didaktisk situation arbejder eleven normalt med en enkel opgave, som underviseren har udvalgt. Underviseren ønsker ikke en alt for svær opgave, men heller ikke en alt for let opgave. Lige meget hvilken opgave underviseren vælger, er der risiko for, at nogle elever vil opleve kedsomhed, da deres kompetencer overstiger opgavens sværhedsgrad, mens andre elever vil opleve angst, da deres kompetencer er begrænsede i forhold til opgavens sværhedsgrad. I en FLS er der indbygget en *automatisk niveaudifferentiering*, så alle elever kan udforske problemstillingen på eget niveau. Der eksisterer ikke én måde at gribe problemet an på, men et utal af måder, og derfor kan eleven angribe problemet, som han eller hun ønsker. Denne automatiske niveaudifferentiering medfører, at alle elever har mulighed for at opleve flow i forbindelse med problemstillingen. Dette vil betyde, at underviseren kan opleve elever, der finder arealer af trapezer, mens andre elever integrerer grafer under kurver i det samme undervisningsmodul. Jeg vil undersøge, om eleverne er i stand til at finde opgaver, der passer til deres niveau, eller om de trods den automatiske niveaudifferentiering oplever angst eller kedsomhed og dermed ikke formår at udnytte det sværhedsspænd der findes i FLS'er.

3.9 Nærmeste uviklingszone

Eleven, der arbejder med et miljø, har mulighed for at tilegne sig ny viden, men der er en begrænsning for, hvor meget viden en elev kan tilegne sig. Det afhænger af det miljø eleven befinder sig i. Den rækkevidde, som eleven har mulighed for at nå gennem miljøet, kalder Vygotsky (Winsløw, 2006, s. 168) for *nærmeste udviklingszone.* En elev besidder en mængde viden, denne viden kan udvikles og vokse i sammenspillet med miljøet og er især afhængig af klassekammerater og underviser, der kan give feedback i en undervisningssituation. Dermed vil en elev have en større udviklingszone i en læringssituation med en underviser i forhold til at side alene. I en didaktisk situation bør underviseren placere den tilsigtede viden inden for elevens nærmeste udviklingszone. Dette betyder, at den tilsigtede viden ikke allerede må være en del af elevens eksisterende viden, og at den tilsigtede viden ikke overstiger elevens nærmeste udviklingszone. Med denne viden om nærmeste udviklingszone kan underviseren tillade sig at stille mere krævende opgaver til eleven i en didaktisk situation, hvor underviseren er til stede (fx klasseværelset), i modsætning til hjemmeopgaver, hvor den nærmeste udviklingszone er mindre. Den nærmeste udviklingszone er afhængig af miljøet, som jeg netop har beskrevet, men den er også afhængig af tiden. Eleven vil have en større nærmeste udviklingszone, hvis man ser på et helt år i modsætning til et enkelt modul.



3.10 Nærmeste udviklingszone for FLS'er og tilsigtede kompetencer

Når en elev præsenteres for nyt stof, vil eleven til at starte med forsøge at efterligne omgivelserne i håbet om at få en succesoplevelse (Winsløw, 2006, s. 169). Eleven vil efterligne underviserens fremgangsmetode og langsomt få et større overblik, som medfører, at eleven efterhånden arbejder selvstændigt med en problemstilling. I en FLS findes der ikke direkte nogle personer at efterligne, da fremgangsmetoden er ukendt og det netop er denne, som eleven skal finde.

Den nærmeste udviklingszone i en FLS er ikke defineret ud fra fast, tilsigtet, faglig viden. Underviseren ønsker at fremme de tværgående kompetencer, og dermed bliver den nærmeste udviklingszone defineret ud fra disse kompetencer. Hvilke hjælpemidler er en del af elevens eksisterende viden og hvilke ligger inden for den nærmeste udviklingszone? Hvad vil eleven være i stand til at bevise? Hvilke repræsentationer ligger uden for elevens rækkevidde? Dette er spørgsmål der forholder sig til de tværgående kompetencer og den nærmeste udviklingszone. Hvis underviseren fx ønsker, at eleven skal blive bedre til at stille stærke hypoteser, så bliver den tilsigtede kompetence netop elevens evne til at stille stærke hypoteser. Dette er et mere diffust tilsigtet mål i forhold til en mere traditionel tilsigtet viden om fx Pythagoras læresætning. Når de tværgående kompetencer bliver til de tilsigtede kompetencer i en FLS, bliver den nærmeste udviklingszone meget afhængig af miljøet, heriblandt klassekammerater og underviser. Det er fx noget lettere at træne mundtlige kommunikationskompetencer i klassen med andre i modsætning til alene derhjemme.

Den anden tilsigtede viden i en FLS er afdækning af udforskningsområdet, som skal ske rent matematik fagligt. I en FLS besidder underviseren ikke på forhånd en viden om, hvilke matematikemner eleven vil benytte. Underviseren kan dog komme med kvalificerede bud på, hvilke veje eleven højst sandsynligt vil gå, gennem en analyse af problemstillingen. Dermed vil underviseren vide, hvilket matematisk stof der højst sandsynligt vil blive benyttet. Forhåbentligt tilegner eleven sig ny matematikfaglig viden gennem arbejdet med FLS'er, men det er ikke ny viden der i fokus i en FLS. Fokus ligger på elevens evne til at kunne benytte allerede eksisterende viden og benytte denne viden, når det er nødvendigt. Eleven kan i en FLS berøre rigtig mange matematiske emner i arbejdet med problemstillingen, dette stiller store krav til eleven om at kunne benytte allerede eksisterende matematisk viden i alle mulige tænkelige situationer. Hvis eleven fx får en idé om et trapez eller en ellipse som en god genstand i sofaproblemet, så opstår problemet, når eleven skal finde arealet af disse figurer. Samtidigt stiller det store krav til underviseren, der skal have overblik til at gennemskue, hvor eleven vil hen med problemet, og være i stand til at vejlede derfra. Underviseren skal derfor være omstillingsparat og have en alsidig matematisk viden, der er mobiliseret (se næste afsnit).

3.11 Specifik viden og mobiliseret viden

Viden kan være mere eller mindre tilgængeligt for en elev, når der arbejdes med miljøet. Jeg skælder mellem to former for viden: den *specifikke viden* og den *mobiliserede viden*. Den specifikke viden kan komme til udtryk i en læringssituation, hvor underviseren beder eleven om at differentiere et funktionsudtryk, og eleven dernæst differentiere funktionsudtrykket korrekt, men at eleven ikke vil benytte differentiering, med mindre der blev bedt om det. Den mobiliserede viden er ikke afhængig af specifikke stikord fra fx en underviser, men bliver benyttet, når det er nødvendigt. Man kan forestille sig en situation, hvor eleven arbejdede med funktioner og helt selvstændigt og umotiveret besluttede sig for at benytte differentiering til at løse opgaven, selvom der ikke specifik blev bedt om dette; denne form for viden kalder jeg for mobiliseret viden.

FLS’er er 100 % afhængige af den mobiliserede viden, da der ikke eksisterer nogle krav i forbindelse med problemstillingen. En af styrkerne ved FLS’er er netop muligheden for at benytte allerede eksisterende viden på et konkret stykke matematik og dermed trække på viden, som ellers kun benyttes, når underviseren beder om det. Udforskningsområdet bliver problemet eleven er fokuseret på at afdække, men succes er afhængig af mobiliseret viden.

3.12 Riskzone og comfortzone

Skovsmose (Skovsmose, 2001) arbejder med et tilsvarende projekt til FLS, hvor eleven arbejder undersøgende. Skovsmose beskriver, hvorledes der eksisterer en *riskzone* og en *comfortzone*. Når eleven arbejder med problemstillingen, og dette fører eleven ud, hvor overblik mistes, og det faglige bliver for kompliceret (kommer på dybt vand), så er eleven i en riskzone. Når alt kører på skinner, og eleven har overblik og kan løse de matematiske opgaver ved brug af eksisterende viden, så befinder eleven sig i en comfortzone. I en FLS vil eleven forsøge at blive i en comfortzone, men gode ideer og hypoteser kan hurtigt fører eleven ud i en riskzone. Til tider kan eleven kommer meget langt ud i en riskzone og vil spørger underviseren om hjælp. Skovsmose pointe er, at underviseren ikke straks skal fører eleven tilbage til en comfortzone, men at der findes en styrke ved at forblive i riskzonen og arbejde derfra.

Underviseren bør forblive på den usikre vej sammen med eleven og forsøge at følge elevens tankegang, selvom det kan være i et ubehageligt miljø. I en FLS træner man evnen til at arbejde i en riskzone, hvilket forskeren inden for videnskabsfaget altid gør.

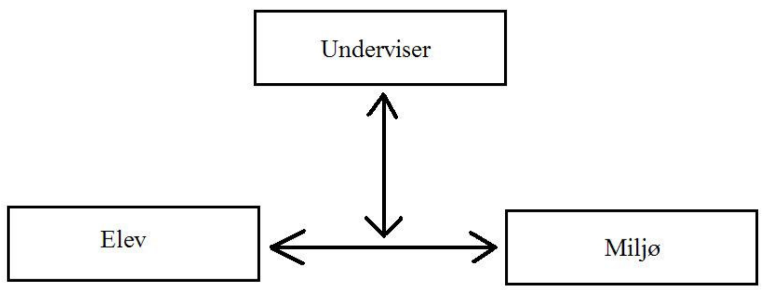
3.13 Det didaktiske spil

Brousseau benytter ordet spil i forbindelse med en didaktisk læringssituation (Brousseau, 1997, s. 56). Brousseau beskriver, hvorledes der eksisterer 2 spil, som er afhængige af hinanden:

- Det ene spil er elevens spil med miljøet, hvor spillet vindes, hvis eleven tilegner sig ny viden og denne viden bliver personliggjort. (Hvis underviseren blot fortæller svaret på en opgave vil den nye viden ikke blive personliggjort. Eleven skal selvstændigt tilegne sig den nye viden gennem arbejdet/spillet med miljøet).

- Det andet spil er underviserens spil, hvor underviseren vinder, hvis det miljø som underviseren har skabt medfører, at eleven tilegner sig ny viden.
  (Dette spil kan sammenlignes med en gartner, der planter en blomst i noget jord, vander blomsten og giver blomsten sollys, hvis planten blomstre, så vinder gartneren. Man kan ikke tvinge en blomst til at blomstre, men kan kun skabe nogle gode rammer. På samme måde kan man ikke tvinge en elev til at lære, man kan kun skabe nogle gode rammer, der øger muligheden for læring hos eleven.)

De to spil er illustreret på nedenstående figur, hvor pilene illustrerer de 2 spil:

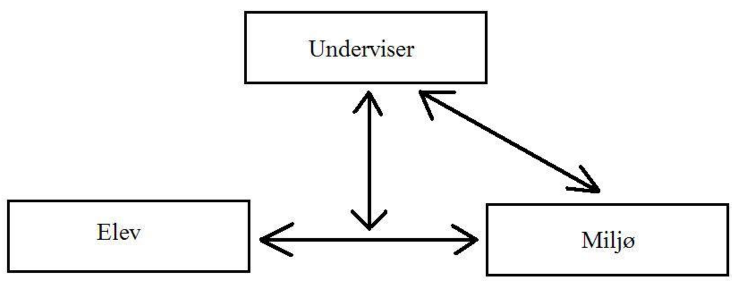


Hvis man betragter en didaktisk læringssituation som et spil, så vil begge spil vindes eller begge spil tabes samtidigt. Man kan ikke forstille sig at det ene spil vindes og det andet tabes.

3.14 Det didaktiske spil i en FLS

I en FLS eksisterer de to ovenstående spil stadigvæk, men der er sket det, at underviseren ikke er 100 % ansvarlig for det didaktiske miljø. Eleven bærer noget af ansvaret for, at der bliver skabt et miljø, hvor det er muligt at tilegne sig ny viden og nye kompetencer. Underviseren kan lægge de overordnede rammer for undervisning, men selve indholdet er eleven ansvarlig for. Elevens muligheder for at vinde spillet er ændrede. Succes afhænger nu primært af elevens evne til at skabe et miljø, hvor det er muligt at vinde. Underviseren spiller stadig et spil, men dette spil får underviseren mindre indflydelse på. Som underviser skal man kunne give slip på noget kontrol, hvis der skal arbejdes med FLS'er, hvilket kan være svært, hvis man altid har 100 % kontrol over udviklingen i undervisningen. Ligesom i en traditionel didaktisk situation, så enten vindes eller tabes begge spil samtidigt i en FLS.

I en FLS opstår der endnu et spil, som man ikke ser i en traditionel undervisningssituation. I en traditionel undervisningssituation kender underviseren det emne, som eleven skal arbejde med og derfor ligger alt underviserens fokus på at skabe et miljø, hvor eleven kan lære. I en FLS er underviserens arbejde ændret, som jeg beskrev i 3.5, til både at være vejleder, men også til at være forsker. Derfor opstår der et nyt spil mellem underviseren og miljøet, som er uafhængigt af eleven, med den undtagelse at miljøet er skabt for eleven. Underviseren har dermed fokus på to elementer i en FLS: at skabe et miljø for eleven og at afdække udforskningsområdet. Teoretisk set kan underviseren vinde dette nye spil med miljøet uafhængigt af de to andre spil. Underviseren kan afdække store dele af udforskningsområdet selvstændigt, uden eleven tilegner sig ny viden, nye kompetencer eller afdækker udforskningsområdet. Dette nye spil sammen med de to eksisterende har jeg illustreret herunder:



3.15 Faser i det didaktiske spil

I en undervisningssituation beskriver Brousseau to situationer (Brousseau, 1997): *didaktiske situationer* og *adidaktiske situationer*. Når underviseren har interaktion med eleven, bliver situationen betegnet som en didaktisk situation. Når eleven arbejder selvstændigt med miljøet, betegnes det som en adidaktisk situation. Disse to former for situationer vil jeg benytte i min beskrivelse af faserne i det didaktiske spil.

Devolution

En didaktisk situation, hvor underviseren er ansvarlig for at skabe et miljø, ved at introducere problemstillingen til eleven. Underviseren overgiver det didaktiske miljø til eleven. Brousseau definer devolution således:

”Devolution is the act by which the teacher makes the student accept the responsibility for an (adidactical) learning situation or for a problem, and accepts the consequences of this transfer of this responsibility” (Brousseau, 1997, s. 230).

Handling:

En adidaktisk situation, hvor underviseren trækker sig tilbage og lader eleven udforske problemstillingen.

Formulering:

Eleven formulerer en hypotese til den givne problemformulering. Denne situation kan være en didaktisk situation, hvis underviseren har indvirkning på elevens formulering, eller adidaktisk hvis underviseren ikke har indvirkning på elevens formulering.

Validering:

Hypoteser afprøves og kontrolleres. Denne situation kan være adidaktisk, hvis valideringen sker uden underviseren deltager. Validering kan også være en didaktisk situation, hvis underviseren er med til validering af hypoteser.

Institutionalisering:

En didaktisk situation hvor underviseren gennemgår den officielle viden, og hvor elevens hypoteser sammenlignes med den officielle viden.

Faserne i det didaktiske spil behøver ikke at komme i den rækkefølge, jeg beskriver ovenfor. Man kan sagtens forestille sig, at der kommer en ny devolution efter valideringen, hvor underviseren ændrer det didaktiske miljø for at fokusere på et nyt aspekt.

3.16 Faser i en FLS

Institutionaliseringsfasen eksisterer ikke i en FLS, da der ikke findes nogen officiel viden om udforskningsområdet. I en traditionel undervisningssituation afslutter underviseren med institutionalisering, men i en FLS findes der ikke en oplagt afslutning, da man i princippet kan arbejde med udforskningsområdet så længe man ønsker. Grenier skriver (2.3), at et besvaret spørgsmål eventuelt kan medfører nye spørgsmål, hvilket betyder man kan arbejde længe med problemstillingen. I mit konkrete design, vil man kunne arbejde så længe man ønsker med cirkelskiveproblemet, da man altid kan undersøge problemstillingen med én ekstra cirkelskive. Et afsluttet FLS forløb vil dermed mere have karakter af en valideringssituation end en institutionaliseringssituation. I math en jeans projektet arbejdes der med problemstillinger over flere uger, hvilket blot viser, at der er masser af "kød" på math en jeans problemstillingerne.

Devolution i en FLS er ikke kun en didaktisk situation, hvor underviseren overgiver miljøet. Eleven bærer en stor del af ansvaret i forbindelse med devolutionsfasen, da eleven selv kan vælge, hvilken vej han eller hun vil gå med problemstillingen. Samtidig er eleven i math en jeans forløbene ansvarlig for yderligere præcisering af problemstillingen, da problemstillingerne ofte beskrives meget generelt. Jeg valgte at være meget præcis med mine problemformuleringer, da jeg kun havde et modul til rådighed. En math en jeans problemformulering kan lyde således:

"*Hvad er det mindste antal kamera, der kan overvåge det indre af et polygon*?" (http://www.mjc-andre.org/pages/amej/sujets/80sujets/espace_sujets.html)

Dette spørgsmål er interessant i forbindelse med placeringen af kameraer på museer, hvor man ønsker at overvåger hele rum på én gang. Hvis eleven blev præsenteret for sådan en problemformulering, så bliver eleven nødt til at præcisere flere ting: Hvor stor en vinkel kan et kamera se? Er det et todimensionelt eller tredimensionelt problem? Hvis et kamera placeres i et hjørne, kan kameraet så se hele det pågældende hjørne? Alle disse præciseringsspørgsmål giver ansvar til eleven under devolutionen.

Under forløbet kan eleven ændre miljøet ved at finde nye samarbejdspartnere, ændre fokus på problemstillingen, benytte andre hjælpemidler, mm., som vil blive betegnet som en ny devolutionsfase. Elevens evne til at kunne devoluere under forløbet, er en vigtig faktor for, at en FLS bliver en succes. Underviseren er stadigvæk ansvarlig for at udforskningsområdet bliver præsenteret for eleven, og dermed er underviseren stadig en vigtig brik i forbindelse med devolution.

De 3 resterende faser: handling, formulering og validering er ikke skarpt adskilt i en FLS. Disse 3 faser er centrale i en FLS, hvor eleven konstant arbejder med miljøet, formulerer en hypotese og afprøver hypotesen, arbejder videre med miljøet, formulerer bedre hypoteser og afprøver disse. I en optimal FLS vil disse 3 faser være adidaktiske situationer, hvor eleven ikke har brug for at kommunikere med underviseren, men blot udforsker problemstillingen selvstændigt.

Selvom handling, formulering og validering er tæt knytte i en FLS, bør underviseren være opmærksom på, at valideringsfasen ikke glemmes eller negligeres. Hvis eleven er fagligt svag og ikke har erfaring med selvstændige beviser og modbeviser, så kan man frygte, at der sker en handlingsfase og en formuleringsfase men ingen valideringsfase. I sådan en situation vil eleven arbejde med miljøet og stille nogle hypoteser, men aldrig forsøge at bevise hypoteserne. Her bør underviseren gribe ind og opfordre eleven til at komme med argumenter for sine påstande og gerne beviser eller modbeviser. Hvis underviseren ikke griber ind i sådan en situation, eller ikke opdager den manglende validering, så vil eleven ikke træne alle de tværgående kompetencer, og den FLS bliver meget mindre forskningslignende.

3.17 Didaktiske variable

I forbindelse med undervisning har underviseren mulighed for at variere på miljøet, så eleven får lettere ved at tilegne sig ny viden. Disse variationer af miljøet kalder jeg fremover for *didaktiske variable* (Winsløw, 2006, s. 143). Underviseren kan ændre miljøet ved at stille nye krav til brug af hjælpemidler, bede eleven om at arbejde selvstændigt, hvis der tidligere er blevet arbejdet i grupper, mm. Alle muligheder underviseren har for at påvirke det didaktiske miljø ved brug af didaktiske variable, bør underviseren være opmærksom på. Underviseren kan inden en undervisningssituation være opmærksom på, hvilke didaktiske variable der er til rådighed og benytte disse, hvis eleven ikke personliggøre viden i den adidaktiske situation. Det er sjældent at en undervisning forløber fuldstændigt, som underviseren har planlagt, og derfor er det en god idé at være opmærksom på didaktiske variable. De fleste undervisere vil sikkert kunne genkende, at de didaktiske variable benyttes, men at de ikke er planlagt og analyseret på forhånd.

3.18 Forsknings variable

Underviseren i en FLS har ikke den samme kontrol som i en traditionel undervisningssituation. De didaktiske variable bliver derfor mindre betydningsfulde, da underviseren ikke bør gribe ind i elevens arbejde med miljøet. Desuden kan det være svært at benytte didaktiske variable i en FLS, da disse bør benyttes for at få eleven til at personliggøre ny viden, men denne viden er ikke officiel. Hvordan bør underviseren benytte didaktiske variable i en FLS? Grenier (Grenier, 2004, s. 3) beskriver hvorledes didaktiske variable i en FLS bliver til *forsknings variable*. Eleven kan variere på miljøet ved at stille nye spørgsmål, udvide forskningsstrategier, modellere udforskningsområdet, mm. Disse ændringer er variable, som vil ændre miljøet, og som kan medføre, at eleven får lettere ved at tilegne sig tværgående kompetencer. Forsknings variable har samme karakter som didaktiske variable. Den eneste forskel er, at didaktiske variable har til formål at ændre miljøet, så eleven kan personliggøre officiel viden, og forsknings variable har til formål at ændre miljø, så tværgående kompetencer styrkes og udforskningsområdet afdækkes.

Underviseren kan benytte forsknings variable til at designe undervisning, så der fokuseres på forskellige tværgående kompetencer. Der kan nævnes følgende forskerhandlinger, som man kan bede eleverne om at udføre:

- Spontant bede eleven om at fremlægge opdagelser for resten af klassen mundtligt
- Skrive en matematisk artikel om udforskningsområdet
- Forberede og gennemføre undervisning for klassekammerater om egen nyopdaget viden
- Læse, kommentere og vurdere andre klassekammeraters skriftlige arbejde
- Kommentere og vurdere andre klassekammeraters mundtlige arbejde
- Beskrive nye opdagelser for ikke-faglige personer, mundtligt eller skriftligt
- Afholde en videnskabelig debat om udforskningsområdet

Ovenstående ideer til forsknings variable har især fokus på tværgående kompetencer og mindre fokus på afdækning af udforskningsområdet.

3.19 Den didaktiske kontrakt

Brousseau (Brousseau, 1997) benytter ordet *didaktisk kontrakt* om de spilleregler, der eksisterer mellem underviser og elev i en læringssituation. Den didaktiske kontrakt er ikke en fysisk kontrakt, som underviser og elev skriver under på, men en uformel specifikation af ansvar og forventninger i forhold til undervisningen. Både underviser og elev må acceptere den didaktiske kontrakt inden undervisning kan begynde. Eleven skal acceptere at arbejde med det didaktiske miljø, som underviseren skaber, og acceptere at engagere sig i problemstillingerne. Underviseren skal acceptere, at han eller hun er ansvarlig for at designe et didaktisk miljø og eventuelt modificere miljøet, så eleven har mulighed for at tilegne sig ny viden. Devolution og institutionalisering er to vigtige faser, hvor underviseren kan modificere den didaktiske kontrakt (Hersant og Perrin-Glorian, 2005, s. 116). Både elev og underviser kan opleve et brud med den didaktiske kontrakt, hvilket sker, når den ene part ikke føler, at den anden part overholder det sæt spilleregler, som begge har accepteret. Eleven kan fx bryde den didaktiske kontrakt, hvis der ikke arbejdes med miljøet. Underviseren kan fx bryde den didaktiske kontrakt, hvis det ikke er muligt for eleven at tilegne sig ny viden, da denne viden ligger uden for rækkevidde. Underviseren kan ligeledes bryde den didaktiske kontrakt ved at fortælle eleven, hvordan en opgave skal løses. Dette er et brud med kontrakt, da eleven ikke selvstændigt har fundet den tilsigtede viden, og sandsynligheden for at eleven vil personliggøre denne viden, hvor underviseren blot fortælle fremgangsmetoden, er mere afhængig af elevens hukommelse end noget andet.

Hersant og Perrin-Glorian (Hersant og Perrin-Glorian, 2005, s. 118) beskriver fire dimensioner af den didaktiske kontrakt:

1. Det matematiske område
2. Didaktisk status af viden
3. Udviklingen og karakteristika ved den igangværende didaktiske situation
4. Fordeling af ansvar

Det matematiske område svarer til det matematiske emne, der arbejdes med i undervisnings-situationen. Fx differentialregning, sandsynlighedsregning eller geometri. Underviseren kan ændre den didaktiske kontrakt ved fx at inkludere et geometrisk aspekt til en opgave eller på andre måder benytte forskellige matematiske områder/emner til at påvirke det didaktiske miljø. På denne måde kan underviseren stille krav til, hvilke områder der må/kan/bør benyttes og dermed variere elevens mulighed for at tilegne ny viden.

Didaktisk status af viden har to ekstremer: Gammel viden, som er viden eleven længe har kendt til, og ny viden, som eleven ikke kender til. Mellem disse to ekstremer ligger der viden under udvikling, som kan være viden eleven netop arbejder med, eller viden som er ved at blive institutionaliseret. Mængden af gammel viden, ny viden og viden under udvikling, kan være med til at forme en undervisningssituation. Hvis underviseren beslutter sig for at arbejde med gammel viden, så vil undervisningen bære præg af rutinemæssigt arbejde, hvor begreber og sætninger trænes. Hvis der arbejdes med ny viden, så er der fokus på problemløsning og udforskning.

Udviklingen og karakteristika ved den igangværende didaktiske situation omfatter elementer, der påvirker eleven i arbejdet med miljøet, og som ikke falder ind under de tre resterende kategorier. Det kunne omhandle ting som hjælpemidler, repræsentationsformer, mm.

Underviseren kan overlade mere eller mindre af ansvaret til eleven i læringssituationen. Hvis underviseren påtager sig alt ansvaret for, at eleven får udbytte af undervisning, så beskriver Hersant og Perrin-Glorian det som en stærk kontrakt. Hvis eleven får en stor del af ansvaret for situationen, så kalder Hersant og Perrin-Glorian det for en svag kontrakt. I arbejdet med gammel viden har underviseren mulighed for, at overlade mere ansvar til eleven i forhold til arbejdet med ny viden, hvor underviseren må påtage sig et stort ansvar.

Den didaktiske kontrakt opdeler Hersant og Perrin-Glorian yderligere i tre niveauer:
Makrokontrakten beskæftiger sig med overordnede undervisnings mål.
Mesokontrakten beskæftiger sig med gennemførelsen af undervisning.
Mikrokontrakten beskæftiger sig med specifikke matematiske problemer og opgaver.

3.20 Den didaktiske kontrakt i en FLS

Hvis en gymnasieklasse aldrig har arbejdet med FLS'er, så kan underviserens præsentation af en FLS virke som et brud med den didaktiske kontrakt, da miljøet drastisk bliver ændret fra en velkendt matematikundervisning til en ny ændret form, som eleven ikke har erfaring med. Den første udfordring for en underviser bliver dermed at få skabt en didaktisk kontrakt, som eleven accepterer.

Devolution bliver derfor et vigtigt instrument, hvor underviseren kan præsentere en FLS og gennemgå eventuelle mål og krav angående denne FLS. Hvis underviseren ikke får skabt et miljø hvor tværgående kompetencer trænes og styrkes, og hvor udforskningsområdet ikke bliver afdækket, så har underviseren brudt den didaktiske kontrakt, da der ikke er blevet skabt tilstrækkelige, gunstige forhold for eleven. Skovsmose beskriver, hvorledes brud med den didaktiske kontrakt ikke behøver at være en negativ ting, da brud med den didaktiske trekant ofte er tæt forbundet med forbedringer af matematikundervisningen (Skovsmose, 2001, s. 18). Brud med den didaktiske kontrakt kan også være pga. skolens matematiske traditioner. Eks.:
En skole har nogle faste undervisningsprincipper og undervisningsformer, som der er blevet undervist efter i lang tid. En underviser introducerer en ny undervisningsform, som er markant anderledes end skolens principper, og som er skræmmende for både elever og andre undervisere. Dette ville svare til et brud med den didaktiske kontrakt i forhold til skolens matematiske traditioner. Skovsmose pointe er følgende: for at kunne forbedre matematikundervisningen må man forsøge med nogle nye, mere eksperimentelle, tiltag, som er uafprøvet, men som kan vise sig at være en forbedring af undervisningen.

Det matematiske område i en FLS ligger ikke fast, alligevel vil der ofte være nogle områder, der er mere oplagte end andre, som jeg beskrev i 3.10. Underviseren *har* altså mulighed for at forberede og fokusere på nogle matematiske områder inden undervisning begynder. I forbindelse med FLS'er vil der primært arbejdes med gammel viden, som skal benyttes på et konkret område. Størstedelen af ansvaret ligger hos eleven, hvilket er muligt, netop når der arbejdes med gammel viden, som jeg beskrev i 3.19. Hjælpemidler, repræsentationer, beviser mm. er eleven selv ansvarlig for at benytte, når det er nødvendigt.

3.21 Uheldige konsekvenser i en didaktisk situation

Det findes flere uheldige konsekvenser af den didaktiske kontrakt, som jeg kort vil beskrive (Brousseau, 1997, s. 25):

- *Topaze-effekten:* Underviseren udvander opgavens krav, når eleven ikke selv kan finde løsningen.

- *Jourdain-effekten:* Eleven følger underviserens anvisninger uden at kende det dybere indhold
- *Metakognitivt skifte:* Underviseren har ikke succes med formidle den officielle viden til eleven og foretager et matekognitivt skifte ved at benytte en mere uformel beskrivelse af den officielle viden.
- *Misbrug af analoge miljøer:* Eleven kan ikke løse en opgave, underviseren giver svaret på første opgave og stiller en ny opgave, som stort set er magen til den første. Eleven skal blot afkode de små ændringer, der er fra den første opgave til den anden og ellers blot gentage underviserens arbejde.

Ovenstående konsekvenser er et resultat af underviserens ønske om, at eleven tilegner sig ny viden og et forsøg på at undgå at bryde den didaktiske kontrakt. Brousseau uddyber disse konsekvenser nærmere (Brousseau, 1997). Jeg vil blot benytte disse konsekvenser til at belyse en af styrkerne ved FLS'er. Eftersom underviseren fungerer som vejleder, vil underviseren ikke forsøge at udvande problemstillinger, da eleven selv er ansvarlig for at finde disse. Underviseren kender ikke på forhånd en ideal fremgangsmetode, der vil derfor ikke opstå en Jourdain-effekt. Der vil ikke ske et metakognitivt skifte, da FLS bygger på elevens gamle viden og institutionaliseringsfasen ikke eksisterer. Ikke to opgaver er ens, dermed ingen misbrug af analoge miljøer, hvor underviserens arbejde kan efterlignes. Ovenstående konsekvenser vil derfor ikke forekomme, når man arbejder med FLS, hvilket er en klar styrke i modsætning til mere traditionelle didaktiske situationer. Der er ikke grobund for de uheldige konsekvenser.

3.22 Uheldige konsekvenser i en FLS

Når det nu er sagt, at man ikke vil opleve de klassiske, uheldige konsekvenser, der er knyttet til den didaktiske kontrakt, så skal det samtidig nævnes, at der er risiko for andre uheldige konsekvenser, som specielt er forbundet med FLS'er. Disse konsekvenser beskriver Duchet (Duchet, 2004, s. 3). Disse konsekvenser er forbundet til forskningselementet, som også forskeren kan komme ud for. Konsekvenserne jeg beskrev i 3.21, og som Brousseau beskriver nærmere, er forbundet til didaktiske situationer, hvor underviseren bryder den didaktiske kontrakt.

Nedenstående konsekvenser er i forbindelse med adidaktiske situationer i en FLS. Jeg har valgt at beskrive konsekvenserne således:

- *Blokering:* Eleven sidder fast i sin udforskning.
- *Eksplosion:* Eleven er fuld af ideer, som medfører, at arbejdet ikke er målrettet eller fokuseret.
- *Looping:* Elevens arbejde kører i cirkler uden udvikling.

En blokering kan ske, når eleven arbejder med miljøet, og eleven ikke kan se nogle veje frem og dermed går i stå. Blokering kan ske for alle forskere, hvilket Leone Burton beskriver nærmere i sin bog (Burton, 2004). Duchet skriver, at man ikke skal være bange for hverken sine fejl eller resultater under udforskningen. Hvis dette kan lade sig gøre, kan man mindske blokering. Blokering er især et fænomen, der optræder senere i en FLS og ikke i starten.

Eksplosion er et fænomen, man vil se i starten af en FLS, hvor eleven bliver præsenteret for udforskningsområdet. Et af kriterierne for at være en FLS er netop, at flere udforskningsstrategier og flere udfoldelser er mulige. Dette kan medføre en eksplosion, hvor eleven ser mange indledende muligheder og desperat forsøger at forfølge dem alle samtidigt. Dette kan være en negativ konsekvens, da eleven ikke fokuserer sit arbejde omkring et område, men spreder sin koncentration ud over flere områder.

Looping er en form for blokering, hvor udforskningsprocessen til dels går i stå. Eleven efterprøver en hypotese, som viser sig ikke at bære frugt. Dette medfører en lille ændring af hypotesen, som igen ikke bærer frugt. Denne proces fortsætter, og eleven kan føle frustration ved denne proces. Eleven starter fra et punkt, forsøger at komme videre, men ender samme sted, der blev startet. Looping sker især senere i en FLS, hvor eksplosionen er overstået og eleven ikke kan se flere mulige fremgangsmetoder.

4. SIDEBLIK

I dette afsnit vil jeg beskæftige mig med projekter, som er nært beslægtet med mit emne om FLS'er. I alle projekterne er der fokus på matematiske kompetencer, som man ønsker eleven skal tilegne sig, frem for rent matematikfaglighed. Dette kapitel er tænkt som en perspektivering, hvor jeg retter fokus udad og sammenligner min forståelse af FLS med tilsvarende projekter.

4.1 Eksperimentel matematik

I den nye læreplan for matematik indgår eksperimentel matematik som et didaktisk princip. Alle matematikundervisere i gymnasiet skal nu til at tilrettelægge undervisningen, hvor eksperimentel matematik indgår. Dette kan være noget af en omvæltning, da der ikke findes nogen klar definition af eksperimentel matematik. Desuden kan det være svært at finde problemstillinger og opgaver i forbindelse med udarbejdelsen af et forløb med eksperimentel matematik. I den sammenhæng har jeg udarbejdet et kandidatprojekt på Universitetet, hvor jeg forsøger at karakterisere den eksperimentelle matematik og sammenholde eksperimentel matematik overfor klassiske matematik didaktiske teorier, heriblandt TDS. Mit kandidatprojekt om eksperimentel matematik har jeg vedhæftet som til mit speciale (Bilag A).

Der eksisterer en arbejdsgruppe, der er et samarbejde mellem undervisningsministeriet og matematiklærerforeningen, der har udarbejdet en bog om eksperimentel matematik, netop i et forsøg på at kaste noget lys over et emne, som kan virke utrolig tåget. Nynne Maria Afzelius[6] og jeg har udarbejdet et afsnit til denne bog, hvor vi forsøger at karakterisere den eksperimentelle matematik. Jeg har vedhæftet vores bidrag til bogen som bilag til mit speciale (Bilag B).
Jeg vil i det følgende forsøge at sammenligne eksperimentel matematik med FLS.

[6] Underviser på Nørre Gymnasium

I læreplanen beskrives eksperimentel matematik således:

”Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.”
(Læreplan, Stx, Mat A, 2006)

Jeg vil kort beskrive, hvorledes jeg karakteriserer eksperimentel matematik i mit kandidatprojekt:

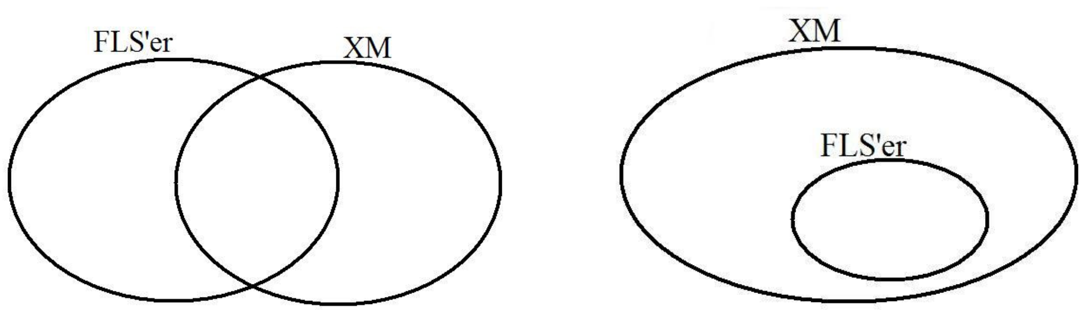
Eksperimentel matematik (fremover XM) fokuserer på elevens selvstændige, kreative indfaldsvinkler til problemstillinger. Brugen af flere repræsentationer til beskrivelse af samme begreb er vigtigt. Det er væsentligt at benytte flere indfaldsvinkler til problemstillinger og udforskning spiller en central rolle. Mønstre og sammenhænge i matematikken kan indses ved hjælp af erfaring og udforskning, hvilket medfører en matematisk indsigt hos eleven. Det materielle miljø kan være med til at motivere eleven, og derfor kan der arbejdes med papfigurer, mønter, legoklodser, CAS mm. Beviser og modbeviser er essentielt i arbejdet med XM, hvor eleven bør finde egne beviser og modbeviser og ikke blot lære beviser udenad.

De to beskrivelser af XM som ses ovenfor, har meget tilfældes med FLS’er. Alligevel er der en fundamental forskel, som jeg vil illustrere ved hjælp af en artikel fra Brousseau (Brousseau, 2002):

Brousseau beskriver i sin artikel en undervisning, som strækker sig over 25 moduler. Underviseren viser i første modul eleverne 3 sække med bogstaverne A, B og C på fronten. I hver af de 3 sække bliver der lagt 5 brikker, brikkerne kan være sorte eller hvide. Ingen, inklusiv underviseren, ved hvor mange sorte eller hvide, der er i hver sæk. Det bliver nu elevernes arbejde at finde ud af, hvor mange hhv. sorte og hvide brikker der er i hver sæk. Eleverne har én mulighed for at undersøge indholdet af sækkene: så ofte som eleverne ønsker, må en elev stikke hånden ned i en sæk og trække en brik op, og se om den er sort eller hvid, og derefter skal brikken ned i sækken igen.

Denne form for undervisning vil jeg betegne som eksperimentel. Den indeholder alle de elementer, som læreplanen og jeg beskrev i forbindelse med XM. Denne undervisning har til formål, at udvikle elevernes forståelse for sandsynlighed gennem et eksperimentelt forløb. Der eksisterer altså en fast tilsigtet viden, som underviseren har mulighed for at institutionalisere sidst i forløbet. Denne mulighed er ikke til stede i en FLS, og på dette punkt er der forskel på XM og FLS'er. XM kan sagtens have en matematisk, tilsigtet viden, som underviseren forsøger at få eleverne til at personliggøre, i dette tilfælde med en eksperimentel tilgang.

Jeg har netop beskrevet, at et XM forløb ikke nødvendigvis er en FLS, da man i et XM forløb kan have en fast tilsigtet viden, hvilket ikke kan være tilfældet i en FLS. Vil det være sandt, at en FLS altid vil kunne betegnes som XM? Eller deler XM og FLS'er en fællesmængde, hvor nogen forløb både falder ind under XM og FLS, mens andre kun er XM forløb eller kun FLS'er? Vi står altså med en af nedenstående situationer:



Man kunne teoretisk set forestille sig, at FLS'er og XM er disjunkte, men dette er ikke tilfældet, mine to undervisningsdesigns er eksempel på dette. Både sofaproblemet og cirkelskiveproblemet er en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, matematiske begreber og innovative evner udvikles, og eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler. Samtidigt er mine to designs FLS'er, som jeg beskrev i 2.4.

Hvis første situation er sand, så skal jeg vise, at der minimum eksisterer én FLS, som ikke falder under definitionen af XM. Hvis den anden situation er sand, så skal jeg vise, at hver gang jeg har en FLS, så er det XM. Vi ved at XM og FLS'er ikke er identiske pga. undervisningen med sække og brikker, der kun XM. Jeg vil vise den anden situation og dermed påstå: Hver gang man har en FLS, så er det XM[7]. Lad os se nærmere på definitionen af FLS. Jeg argumenterer for, at definitionen af FLS'er medfører, at en FLS altid er et XM forløb:

1. ***En FLS er beslægtet med en professionel forskningsstrategi.*** *Der skal foreligge uløste, matematiske problemer.*

Da der arbejdes med uløste, matematiske opgaver, bliver man nødt til at arbejde eksperimenterende, da ingen kender en algoritme til at løse uløst problemer. Uløste problemer betyder desuden, at eleven bliver nødt til at formulere formodninger selvstændigt, hvis udforskningsområdet skal afdækkes.

2. ***Der skal være let adgang til det indledende spørgsmål.*** *Spørgsmålet skal være let forståeligt og må ikke kræve tung matematik.*

Den lette adgang medfører netop, at eleven får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler gennem induktive forløb/iagttagelser. Den lette adgang er med til at stimulere eleven til at være kreativ, da eleven får overblik over problemstillingen. Det er svært at være kreativ, hvis man ikke har overblik og ikke forstår opgaven. Sidst, så har eleven lettere ved at danne erfaring med problemet, hvis der et let adgang til det indledende spørgsmål.

3. ***Mulige indledende strategier er inden for synsvidde.*** *Uden specifikke forudsætninger.*

Dette punkt er meget lig med det foregående, og derfor kan argumenterne ses ovenfor. Innovative evner og kreativitet er svært at måle. Det er dog egenskaber, der er lettere at opnå med let adgang til spørgsmål og med mulige indledende strategier inden for synsvidde. Induktive fremgangsmetoder er oplagte i forbindelse med FLS'er, da det er svært at sige noget generelt i starten af en FLS.

4. ***Flere udforskningsstrategier og flere udfoldelser er mulige.*** *Konstruktion, bevis og beregninger samt matematiske begreber kan involveres.*

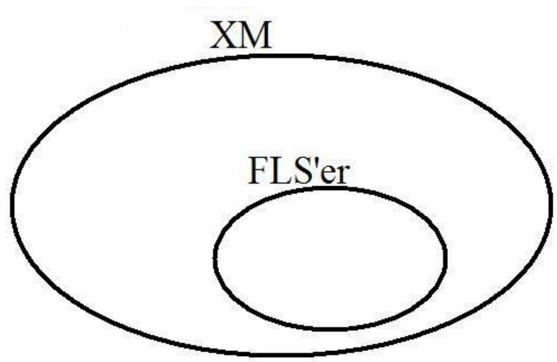
[7] Denne matematiske fremgangsmetode er ikke et bevis på nogen måde, da sætninger og ord kan fortolkes på forskellige måder.

I min karakteristik af XM beskriver jeg, hvorledes flere repræsentationer er vigtige. Flere udforskningsstrategier og flere udfoldelser lægger op til, at der kan benyttes flere repræsentationer i arbejdet med FLS'er. Beviser og begreber nævnes, som elementer der kan indgå i en FLS. Læreplanen skriver netop, at begrebsapparat skal udvikles, og jeg fremhæver fokus på beviser og modbeviser i XM. De flere udfoldelser kan desuden læses som brugen af hjælpemidler er mulige, heriblandt CAS mm.

5. ***Et besvaret spørgsmål kan eventuelt medføre nye spørgsmål.***

Når der stilles nye spørgsmål i en FLS, så er det eleven, der stiller disse nye spørgsmål. Denne evne til at stille spørgsmål er afhængig af elevens evne til at have indsigt med problemstillingen og se sammenhæng i udforskningsområdet. Nye spørgsmål i en FLS vil ofte have samme karakter, som tidligere stillede spørgsmål inden for samme udforskningsområde og dermed vil eleven se et mønster i matematikken, da nogle elementer går igen og opføre sig regelmæssigt. Et eksempel inden for cirkelskiveproblemet kunne være, udforskning af 3 cirkelskiver og 4 cirkelskiver. Den viden der bliver indset for 3 cirkelskiver, kan man benytte, når der arbejdes med 4 cirkelskiver.

Med ovenstående beskrivelse kan man se, at kriterierne for at blive karakteriseret som XM altid er gældende, når man arbejder med FLS'er. Derfor er FLS'er XM, og det er følgende situation der er gældende:



Dermed kan undervisere i gymnasier meget vel benytte FLS'er hvis læreplanens krav om brug af XM skal overholdes.

4.2 Bedømmelseskriterier i forbindelse med XM

Når der arbejdes med XM i gymnasiet, er det underviserens arbejde at bedømme hver enkelt elev med en karakter. Som jeg har beskrevet, så fokuserer FLS'er ikke kun på rene matematikfaglige kompetencer, men i lige så høj grad på tværgående kompetencer. Det medfører, at bedømmelsen af eleverne bliver ændret. Hvordan skal underviseren bedømme, og især hvad der skal der bedømmes efter? Hvis der er fokus på tværgående kompetencer, så er det disse, som underviseren skal bedømme. Men det er ikke lige så let at bedømme disse kompetencer i modsætning til traditionelle matematik opgaver, hvor der findes et facit, som man kan kontrollere om eleven har fået.

Denne problemstilling har jeg arbejdet med i en rapport på Universitet. I rapporten forsøger jeg at fremhæve, hvad og hvordan en underviser bør bedømme i forbindelse med XM. Jeg har i rapporten udviklet en taksonomi, som opdeler den nye karakterskala i 3 områder. En vurdering af en elev vil falde i et af de tre områder: høj, mellem og lav. Vurderingen høj dækker over karaktererne 12 og 10, mellem dækker over karaktererne 7 og 4, og lav dækker over karaktererne 02, 00 og -03. Sidst i rapporten vurderer jeg 2 konkrete XM rapporter modtaget af elever, der har arbejdet med netop sofaproblemet, som jeg vurderer ved hjælp af den netop udviklede taksonomi. Taksonomien samt vurderingen af de 2 rapporter, har jeg vedhæftet som bilag til specialet (Bilag C).

4.3 Undersøgelseslandskaber

Skovsmose (Skovsmose, 2001) beskæftiger sig med det, som han kalder for *undersøgelseslandskaber***,** der på mange måder mider om XM og FLS'er. Skovsmose beskriver, nogle kompetencer der er nødvendige i matematik, som ikke er rent matematikfaglige kompetencer. Skovsmose har gennem mange observationer af matematikundervisninger bemærket, at matematikundervisning oftest har det samme mønster: Underviseren gennemgår noget teori, efterfulgt at elever der regner opgaver. Dette mønster kalder Skovsmose for *exercise paradigm*[8]*.* Skovsmose beskriver derefter et undersøgelseslandskab (Landscapes of Investigation), hvor eleven arbejder mere eksperimenterende med matematikken. Skovsmose fremhæver de

[8] Det er fra Skovsmose exercise paradigm i baghovedet, når jeg skiver traditionel matematikundervisning.

egenskaber, som man ønsker eleven skal tilegne sig gennem matematik (som ligger tæt på min beskrivelse af tværgående kompetencer) således:

"… the development of mathemacy, seen as a competence similar to literacy, as characterised by Freire. Mathemacy refers not only to mathematical skills, but also to a competence in interpreting and acting in a social and political situation structured by mathematics."
(Skovsmose, 2001, s. 2).

Skovsmose benytter derefter sin artikel til at fremhæve egenskaber ved brugen af undersøgelseslandskaber. En af Skovsmose pointer er, og som læreplanen ligeledes beskriver, at matematik af mere eksperimenterende karakter, som fx undersøgelseslandskaber, ikke bør stå alene, men bør være et supplement til mere traditionel matematikundervisning.

4.4 KOM-projektet

Dette projekt er nedsat af uddannelsesstyrelsen, hvor man ønsker tilføre ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark. KOM-projektet beskriver kompetencer, som man ønsker eleven skal opnå på forskellige niveauer, og dermed forsøger man at gøre op med en traditionel pensumliste. I rapporten beskrives 8 kompetencer, som er centrale i matematikundervisning på alle niveauer. Jeg vil ikke beskæftige mig mere med KOM-projektet, men blot benytte rapporten til at illustrere endnu sted, hvor man har benyttet kompetencer, som centralt element i forbindelse med matematikundervisningen. KOM-rapporten kan læses her http://pub.uvm.dk/2002/kom/.

4.5 Aalborg Universitet og forskningsprojekter

I forbindelse med mit arbejde på specialet har jeg skrevet en artikel til Mathilde[9] angående eksperimentel matematik i undervisning (Tosev, 2007). Lisbeth Fajstrup fra Aalborg Universitet læste min artikel og kontaktede mig med en spændende vinkel til specialet. På Aalborg Universitet har man længe arbejdet med netop sofaproblemet, som bliver præsenteret for førsteårs-studerende i matematik og datalogi under et såkaldt pilotprojekt. Eleverne bliver sammensat i

[9] Matematikblad for dansk matematisk forening

grupper på 6-8 personer, og der er mulighed for at få vejledning under projektet. Grupperne arbejder i 12 uger med sofaproblemet, hvor de forsøger at afdække problemstillingen bedst muligt. Der er især fokus på egenskaber ved genstande, der kan passere hjørnet, så grupperne kan undersøge de elementer, som de finder relevante. Fx arbejdes der med forskellige vinkler på hjørnet, alt fra 0 grader til 180 grader. Desuden forsøger grupperne at sige noget om genstande inden de passerer hjørnet. Fx Er det muligt at se på en genstand, om den faktisk kan passere hjørnet?

Lisbeth Fajstrup påpeger, at succes i forbindelse med pilotprojektet er afhængig af, om eleverne tager ejerskab om problemstilling. Lisbeth Fajstrups erfaring er, at eleverne tager godt imod sofaproblemet, og at eleverne arbejder målrettet og interesseret. Hans Hüttel, som er medansvarlig for afvikling af sofaproblemet på Aalborg Universitet, beskriver, at flere datalogistuderende som normalt ikke har den helt store interesse for matematik, faktisk finder projektforløbet med sofaproblemet ret spændende. Disse studerende engagerer sig i problemstillingen og samtidig lærer de en masse om præcision i forbindelse med formidling af matematik, siger Hans Hüttel. Der er flere grunde til, at introducere førsteårsstuderende for sofaproblemet, siger Hans Hüttel: Problemstillingen er ”åbent i begge ender”, dvs. problemet skal præciseres til at starte med, og der er mulighed for at udvide problemstillingen, som man ønsker. Sofaproblemet kan tage udgangspunkt i gymnasiematematik, hvilket gør det velegnet for førsteårsstuderende. Sidst fortæller Hans Hüttel, at eleverne bliver tvunget til at formulere egne definitioner og sætninger, som er sundt for førsteårsstuderende.

Lisbeth Fajstrup beskriver, at man har en lang tradition med forskningsprojekter på Aalborg Universitet, hvor eleverne har mulighed for at udfolde sig mere frit. Senere på studiet beskriver Lisbeht Fajstrup, at der stilles ret præcises krav til det faglige indhold. Lisbeth Fajstrup har skrevet en artikel om projektorganiseret undervisning, som kan findes her http://vbn.aau.dk/research/rundkredspaedagogik%283549501%29/.

Et problem som sofaproblemet kan introduceres på stor set alle niveauer i uddannelsessystemet. Aalborg Universitet er med til at illustrere, at man kan få en FLS til at fungere på Universitetet og min erfaring med specialet viser, at samme undervisningen kan fungere i gymnasiet. Et spændende projekt ville være, at introducere samme FLS for alle uddannelsestrin og se om det ”kan fungere” alle steder og hvorfor eller hvorfor ikke. Grenier

(Grenier, 2004, s. 4) har netop gennemført sådan et projekt for 9-10 årige, 11-12 årige og førsteårsstuderende på Universitetet. Den FLS som Grenier beskæftiger sig med omhandler kombinatorik, hvor der benyttes metalskiver og farvede brikker (se beskrivelse i Grenier, 2004). Alle de grupper som Grenier observerede foretager nogle forskningslignende handlinger på nær meget få fra de yngre grupper. Alle grupper stillede hypoteser og arbejde induktivt. Greniers artikel viser, at det *er* muligt at gennemføre FLS'er på flere uddannelsesniveauer.

5. A PRIORI ANALYSE

Med mine undervisningsdesigns ønskede jeg så vidt som muligt skulle ligne math en jeans forløbene, men i praksis var dette ikke muligt, da math en jeans forløb strækker sig over utrolig lang tid. Derfor blev jeg nødt til at tilpasse mine designs, så de var mulige at gennemføre på et gymnasium.

Jeg valgte to allerede eksisterende math en jeans problemstillinger og byggede min undervisning op omkring dem. Jeg valgte to geometriske opgaver, da der eksisterer mange gode geometriske math en jeans problemstillinger, og fordi jeg rent personligt holder meget af geometriske problemstillinger inden for matematikken. Jeg var opmærksom på, at introduktionen af en FLS for gymnasieelever kan virke som brud med den didaktiske kontrakt, som jeg beskrev i 3.20. For at undgå en alt for stor ændring af det didaktiske miljø kontaktede jeg undervisere i Københavnsområdet, der allerede havde erfaring med XM. Dermed forventede jeg, at eleverne som jeg skulle undervise allerede havde arbejdet eksperimenterende matematik og dermed ville eleverne have lettere ved at acceptere og arbejde med en FLS. Samtidig ønskede jeg klassens faste underviser til at undervise/vejlede i forbindelse med mit design. Igen for at undgå en stor ændring at det didaktiske miljø, men også fordi det er svært at vurdere sig selv objektivt og samtidigt holde øje med, hvordan klassen arbejder.

I stedet for at gennemføre et langt forløb på et enkelt gymnasium, besluttede jeg mig for at gennemføre flere små FLS'er på flere skoler. Dermed ville jeg introducere den samme problemstilling flere steder og forventede at få et tydeligere billede af introduktionen af en FLS for danske gymnasieelever. Samtidig ville jeg kunne sammenligne de klasser, der havde arbejdet med den samme problemstilling. Dermed vil jeg have lettere ved at opdage misforståelser og uklarheder, men også potentialer og egenskaber ved FLS'er.

5.1 Overvejelser i forbindelse med undervisningsdesigns

Jeg ønskede at udforskningsområdet blev det centrale element i undervisningen. Jeg ønskede også at skabe et miljø, hvor der opstår mange hypoteser, og hvor eleverne lærer og træner nogle tværgående kompetencer. Ikke mindst så ønskede jeg at skabe noget motivation gennem miljøet, så eleverne oplever FLS'er som noget interessant og spændende.

Eftersom eleverne skal arbejde forskningslignende, er jeg opmærksom på, at det er under devolutionen, hvor det didaktiske miljø bliver skabt, og hvor jeg har mulighed for at skabe et miljø, som eleverne kan arbejde med resten af tiden. Når eleverne er i gang med at arbejde, så har underviseren mindre muligheder for at ændre miljøet. Derfor er devolutionen utrolig vigtig og denne har jeg haft stor fokus på i udarbejdelsen af mine designs.

For at kunne sammenligne forskellige klasser og for at gøre devolutionen præcis og ens i de forskellige klasser, så udarbejdede jeg et ark, som jeg kaldte for "Information til lærer", som detaljeret beskrev, hvad jeg forventede af den faste matematikunderviser for klassen. Dette ark kan blandt andet ses i bilag (Bilag D). Hvis den faste underviser skal undervise/vejlede, så er det nødvendigt, at den pågældende underviser kender til problemstillingen. Derfor gennemgik jeg hovedtrækkene i mit design sammen med underviseren, så der var mulighed for god vejledning. Disse hovedtræk inkluderede de veje som jeg forstillede mig at eleverne ville følge, disse veje vil jeg se nærmere på senere.

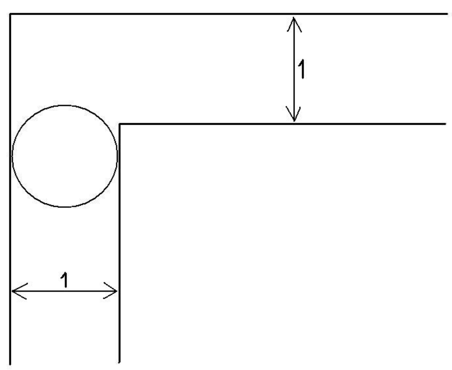
5.2 Opgaveark

De to opgaveark, som eleverne blev præsenteret for, så ledes ud:

Sofaproblemet

Problemformulering:
En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med bredde 1 og passerer et hjørne på 90 grader. Hvilken form har den genstand, der dækker det største gulvareal, og som kan passere hjørnet?

Inspiration:
En cirkel med diameter 1 kan passere hjørnet. Findes der andre former der kan passere hjørnet, som har areal større end cirklen med diameter 1?



Formalia:
Der er ikke nogle krav til hvilke veje I ønsker at bevæge jer ud fra problemformuleringen, eller hvordan I vælger at gribe problemet an. Der må benyttes alle tænkelige redskaber og materialer, som I finder relevante. Jeres lærer fungerer som vejleder og vil ikke svare på faglige spørgsmål.
3 gange under modulet vil en gruppe gennemgå deres opdagelser ved tavlen.

Hver person i gruppen afleverer selvstændigt en rapport (tidspunkt informeres af lærer), som vil blive bedømt med en karakter (25 % fra hypoteseark, 75 % fra rapport). Rapporten skal indeholde følgende:

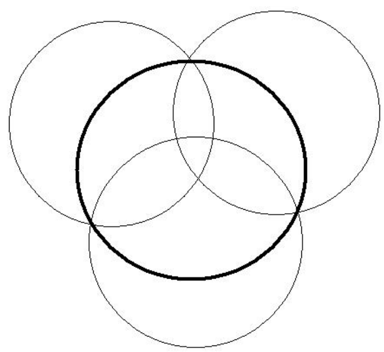
- Navn, dato, gymnasium og gruppe.
- Et udleveret ark pr. gruppe med hypoteser som opstod i gruppen.
- Matematisk gennemgang, illustration og argumentation af jeres stærkeste hypoteser.

Den primære del af opgaven består i at stille hypoteser, undersøge og udforske muligheder og begrunde hvorfor netop jeres hypoteser er gode ved brug af matematisk argumentation.

Cirkelskiveproblemet

Problemformulering: Hvordan placeres 1, 2, 3, 4, … cirkelskiver, så de tilsammen dækker den største cirkelskive?

Inspiration:
Hvordan placeres de 3 cirkelskiver (tegnet med tynd streg), så de tilsammen dækker den størst mulige cirkelskive (tegnet med tyk streg)?



Formalia:
Der er ikke nogle krav til hvilke veje I ønsker at bevæge jer ud fra problemformuleringen, eller hvordan I vælger at gribe problemet an. Der må benyttes alle tænkelige redskaber og materialer, som I finder relevante. Jeres lærer fungerer som vejleder og vil ikke svare på faglige spørgsmål.
3 gange under modulet vil en gruppe gennemgå deres opdagelser ved tavlen.

Hver person i gruppen afleverer selvstændigt en rapport (tidspunkt informeres af lærer), som vil blive bedømt med en karakter (25 % fra hypoteseark, 75 % fra rapport). Rapporten skal indeholde følgende:

- Navn, dato, gymnasium og gruppe
- Et udleveret ark pr. gruppe med hypoteser som opstod i gruppen
- Matematisk gennemgang, illustration og argumentation af jeres stærkeste hypoteser

Den primære del af opgaven består i at stille hypoteser, undersøge og udforske muligheder og begrunde hvorfor netop jeres hypoteser er gode ved brug af matematisk argumentation.

Som man kan se på arket ”Information til lærer” (bilag C), så var eleverne allerede opmærksomme på, at der skulle arbejdes alternativt denne dag. Jeg ønskede at underviseren informerede eleverne om dette, for at få eleverne til at acceptere den didaktiske kontrakt, eller i hvert fald for at eleverne var opmærksomme på, at en alternativ undervisning kunne medføre et ændret miljø.

Som det kan ses på opgavearkene, så valgte jeg at tegne en figur og skrive 2 linjer som inspiration. Jeg var bekymret for, om eleverne ville stejle og ikke acceptere den didaktiske kontrakt, hvis der kun var en problemformulering. For mig var det vigtigt at observere en FLS og tværgående kompetencer og mindre vigtigt med kognitive[10] processer i forbindelse med forståelse af problemstillingen. Samtidig havde jeg blot ét undervisningsmodul til rådighed med hver klasse, derfor valgte jeg at tilføje en figur og lidt inspiration til opgavearkene, så eleverne kunne komme hurtigere i gang med at udforske.

5.3 Forskningsvariable i mine undervisningsdesigns

Jeg beskrev under teori (3.7), de muligheder underviseren har for at påvirke det didaktiske miljø. Jeg valgte at benytte mig af nogle af disse forskningsvariable i mit design af flere grunde. Eftersom jeg kun havde et enkelt modul til rådighed, gik mit arbejde ud på at inddrage så mange tværgående kompetencer som muligt, og samtidig undgå uheldige konsekvenser i en FLS.

Hypoteseark

Jeg var opmærksom på eksplosion, som en uheldig konsekvens og valgte derfor at inddrage et hypoteseark, som kan ses i bilag (Bilag D). Hypotesearket skulle benyttes til at skrive hypoteser ned, som de opstod, og hypotesearket ville indgå som en del af den endelige vurdering. Ideen med hypotesearket fik jeg fra Grenier (Grenier, 2004, s. 4), som benytter noget tilsvarende, som kaldes for *sheet of assessments.* Dette hypoteseark skulle være med til at målrette elevernes ideer og dermed undgå eksplosion. Samtidig tvinger hypotesearket eleverne til at formulere hypoteser i matematisk sprog, og med hypotesearket er det let for mig at se elevernes udvikling gennem modulet.

[10] Psykiske processer der omfatter tænkning og erkendelse (Politikkens Nudansk Ordbog, 17. udgave)

Konferencer

En anden uheldig konsekvens, som jeg beskrev, var blokering. Jeg ser mange fordele ved at lade eleverne opleve blokering, men igen pga. den korte tid til rådighed besluttede jeg mig for, at indfører 3 konferencer under modulet, som skulle eliminere blokering og fremtvinge nogle tværgående kompetencer. Jeg valgte at kalde disse for konferencer og ikke oplæg eller andet, da jeg ønskede at konferencerne skulle fungere fuldstændig ligesom rigtige matematiske konferencer, hvor man bliver præsenteret for forskeres opdagelser. Under modulet blev nogle af eleverne spontant bedt om at fremlægge deres opdagelser for resten af klassen. Dette stiller krav til mundtlig kommunikation og formidling. Efter hver konference var der mulighed for at stille spørgsmål, som fokuserer på debat og argumentation samt præcision, hvis man ønsker at andre elever skal godtage, det man siger. Det ville være dejligt, hvis der opstod en videnskabelig debat i klassen under konferencerne, hvor elever debatterer med elever uden indblanding fra underviseren. Hvis nogle grupper gik i stå og oplevede blokering, så var konferencerne med til at belyse udforskningsområdet fra en ny vinkel, og forhåbentlig ville disse grupper få noget inspiration til egne udforskning. Ligesom man kunne forvente ville ske under en rigtig matematiskkonference.

Skriftligt produkt

For at lægge vægt på skriftlige kompetencer valgte jeg, at hver enkelt person skulle aflevere en rapport, som indeholdt argumentation for den stærkeste hypotese, som gruppen havde fundet. Denne rapport er med til at fokusere på beviser og modbeviser, og desuden indgår rapporten, som en del af den karakter eleverne modtager. Jeg overvejede også at lade hver gruppe aflevere én rapport, men gik hurtigt væk fra dette, da hver elev dermed ikke vil træne skriftlige kompetencer i samme grad.

Materielle miljø

Under handlingsforløbet kunne man forestille sig, at eleverne pludselig havde brug for en passer, saks, formelsamling eller lignende. Det kunne ikke forventes at alle grupper havde sådanne materialer til rådighed under den FLS. Jeg var opmærksom på, at flere grupper garanteret ville benytte sig af sådanne materialer og var derfor i tvivl, om jeg skulle lægge sådanne materialer frem ved starten af undervisning. Ved at lægge disse materialer frem ved undervisnings start, sender jeg et budskab til eleverne om, at disse materialer bør benyttes og dermed forhindre jeg elevernes selvstændige indfaldsvinkler. Derfor besluttede jeg mig for at have disse materialer klar, og kun hvis grupperne spurgte om nogle af disse materialer, eller snakkede om dem, ville jeg fortælle eleverne, at jeg havde dem til rådighed og at de meget gerne måtte benytte sig af dem. Grenier (Grenier, 2004) beskriver nærmere, hvordan det materielle miljø har indvirkning på FLS, heriblandt mulighed for at afprøve hypoteser, modbevise hypoteser, men også hvorledes det materielle miljø kan begrænse udvikling, da problemstillingen bliver identificeret med materialerne.

5.4 Hvad ved man om sofaproblemet i dag?

Jeg vil se nærmere mine to problemstillinger, og den viden der findes på internettet om mine to problemstillinger. For at forstå hvilke veje eleven højst sandsynligt vil gå med problemstillingen, kan det være hensigtsmæssigt at se, hvilke veje tidligere matematikere gennem tiden har gået.

Man ved at sofaproblemet stadig i dag er et uløst problem (Vennebush, 2002).
Der eksisterer mange former og genstande, som kan passere hjørnet, jeg vil kort præsentere nogle oplagte former her:

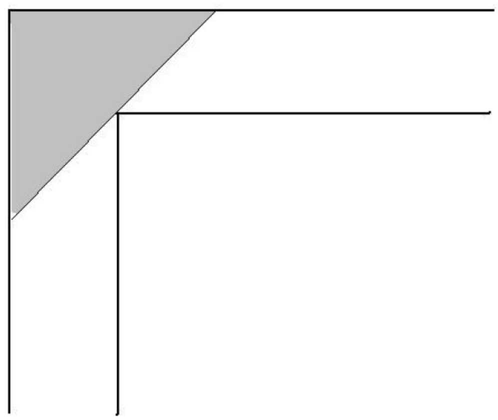
Cirklen med diameter 1 (Areal = $\pi/4 \approx 0{,}79$):
Som illustreret på opgavearket, så kan cirklen med diameter 1 passere hjørnet.

En pind med bredde 0 og længde $\sqrt{8}$ (Areal = 0):
Dette indses ved at benytte Pythagoras læresætning på pinden, når den netop har roteret 45 grader.

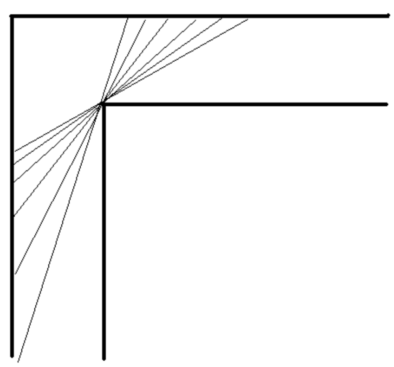
Kvadrat med sidelængde 1 (Areal = 1):
Dette er indlysende.

Rektangel med siderne $\sqrt{2}$ og $\sqrt{2}/2$ (Areal = 1):

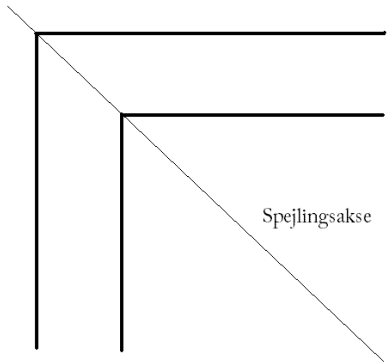
Hvis man ønsker, at rektangelet skal roteres rundt om hjørnet, vil rektanglet på et tidspunkt ligge inden for det grå felt, som ses på figuren nedenfor.



Pinden uden bredde, som jeg beskrev ovenfor, er mest belastet ved en rotation på 45 grader, hvilket kan illustreres ved nedenstående figur.

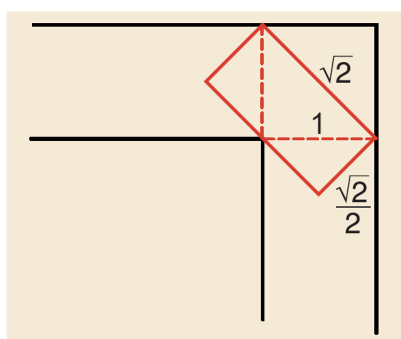


Hvis en symmetrisk genstand kan komme fra korridoren og ind og ligge, så den er roteret 45 grader, så kan genstanden komme helt rundt om hjørnet. Dette skyldes hjørnets symmetriske form. Når en figur er kommet fra korridoren og ind og ligge 45 grader, så kan man spejle både figur og hjørne i en akse, der går gennem ydre hjørne væg og indre hjørne væg.



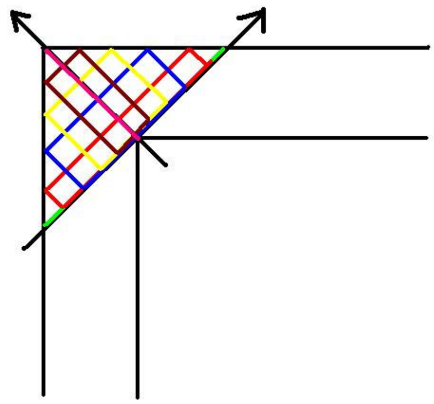
Derefter kan man trække genstanden ud, den vej den kom ind, hvilket samlet set vil svare til, at genstanden har passeret hjørnet.

Rektanglet vil dermed også kunne passere hjørnet, hvis det kan komme ind og ligge med en 45 graders rotation. Afstanden (på nedenstående figur) fra omdrejningspunktet til de to hjørner af rektangelet er netop 1, som svare til bredden af korridoren. Eftersom denne afstand ikke overstiger 1, vil nedenstående rektangel kunne passere hjørnet. Det er oplagt, at nedenstående rektangel kan komme fra korridoren og ind og ligge med en rotation på 45 grader; Genstanden kan flyttes lodret op og roteres omkring omdrejningspunktet.



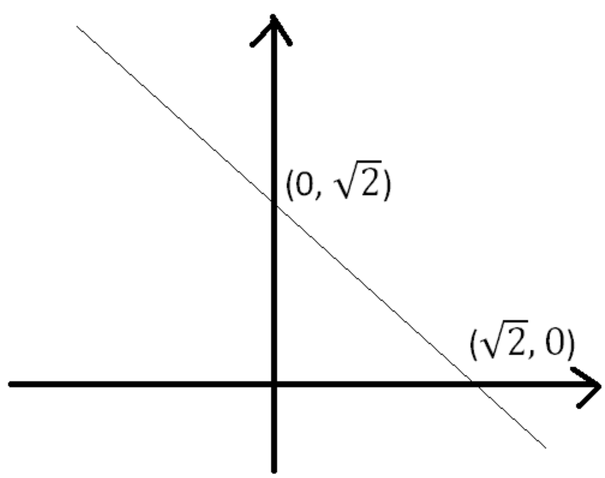
Ved at benytte Pythagoras læresætning finder man siderne på rektanglet til at være hhv. $\sqrt{2}$ og $\sqrt{2}/2$, dette giver ligesom kvadratet et areal på 1.
Man kan forsøge at ændre lidt på siderne i rektanglet, for at se om man kan få et større areal, men dette vil ikke lykkes. Jeg har valgt at bevise denne påstand således:

Betragt en samling af rektangler placeret i hjørnet:



Ovenfor ses rektangler i flere farver, der er placeret i hjørnet. Jeg vil argumentere for, at rektanglet med bredde $\sqrt{2}/2$ og længde $\sqrt{2}$ har det største areal.

Der kan placeres uendelige mange rektangler i hjørnet, ovenfor er blot nogle få indtegnet for at give et billede af situationen. På tegningen har jeg ligeledes indtegnet et koordinatsystem, som også kan ses nedenfor, blot roteret 45 grader i negativ omløbsretning.



Den rette linje i koordinatsystemet svare til den ydre væg i korridoren og har funktionsudtryk:

$$f(x) = -x + \sqrt{2}$$

Hvert punkt på linjen, mellem (0, $\sqrt{2}$) og $\sqrt{2}$, 0), svare til et rektangel placeret i hjørnet.

Arealet A af et vilkårligt rektangel på linjestykket, er givet ved $2x \cdot y$

Da jeg har $y = -x + \sqrt{2}$, så kan jeg omskrive arealet af et vilkårligt rektangel således:

$$A = 2x \cdot y = 2x \cdot \left(-x + \sqrt{2}\right) = -2x^2 + 2x\sqrt{2}$$

Dette er funktionen for en parabel, hvor grenene peger nedad. Det største rektangel er netop repræsenteret ved toppunktet. Jeg kan finde toppunktet, som jeg får til $(\sqrt{2}, 1)$.

Dette svare netop til rektangelet med siderne $\sqrt{2}$ og $\frac{\sqrt{2}}{2}$ og arealet er lig med 1.

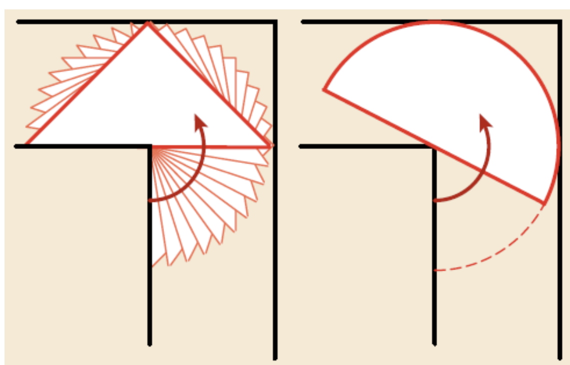
Dermed var har jeg fundet det største rektangel.

Ligebenet trekant med grundlinje 2 og højde 1 (Areal = 1):

Denne trekant kan rotere rundt i hjørnet omkring et omdrejningspunkt, som findes som midtpunkt af grundlinjen. Se figur nedenfor.

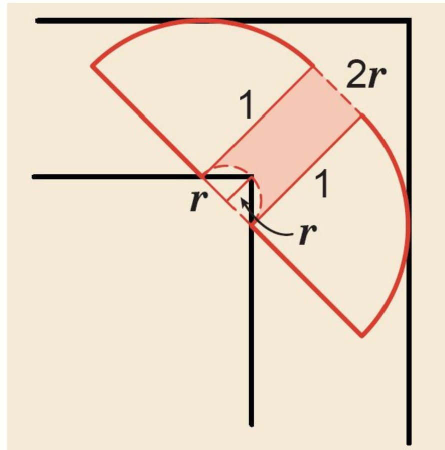
Halvcirkel med radius 1 (Areal = π/2 ≈ 1,57):

Halvcirkelen kan rotere rundt i hjørnet med samme argumentation som den ligebenede trekant.

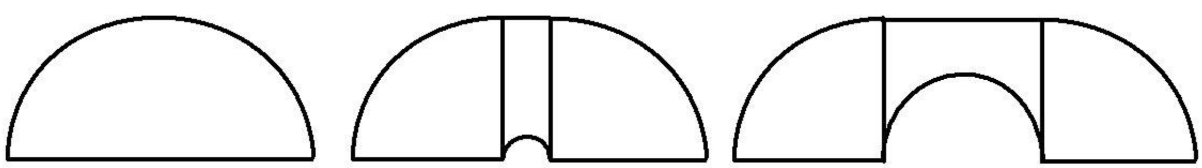


Hammersleys sofa (Areal = π/2 + 2/π ≈ 2.207416):

Ved at opdele halvcirklen i 2 kvartcirkler har man mulighed for at lægge et rektangel ind mellem halvcirklerne med det forbehold, at man skærer en halvcirkel ud af rektangelet, se figuren.



Denne genstand vil have et større areal end halvcirklen, præcist hvor stort arealet er, afhænger af vores rektangel med udskåren halvcirkel. Men hvor stor skal vores rektangel være med den udskårne halvcirkel? Eller sagt på en anden måde: Hvor stor skal radius i den udskårne halvcirkel være? Hvis radius er nul vil man blot have halvcirklen igen, hvis radius er 1, vil man have skåret for meget væk.



Arealet af midterstykket er givet ved: $A = 2r - (1/2)\pi r^2$

Dette areal ønsker vi at optimere. Der er flere måder at finde det optimerede areal, jeg vil benytte to metoder, som elever i gymnasiet kan benytte.

Man kan finde det største areal numerisk ved at benytte en tabel:

Radius **r**	**Areal af midterstykke** **$2r - (1/2)\pi r^2$**
1,00	0,42920
…	…
0,67	0,63487
0,66	0,63576
0,65	0,63634
0,64	**0,63660**
0,63	0,63655
0,62	0,63619
0,61	0,63551
0,60	0,63451
…	…
0,00	0,00000

Her finder vi, at $r = 0{,}64$ giver det største areal, og dermed bliver arealet af den samlede figur:

$A = (1/2)\,\pi + 0{,}63660 \approx 2{,}207$

Man kan også benytte en anden metode til at finde det optimerede areal:

Arealet af midterstykket er givet ved: $A = 2r - (1/2)\pi r^2$

Dette er en parabel med grenene nedad, derfor kan man differentiere og sætte lig med nul.

$$A = 2r - (1/2)\pi r^2$$

$$A' = 2 - \pi r$$

Sætter lig med nul:

$$0 = 2 - \pi r$$

$$r = 2/\pi$$

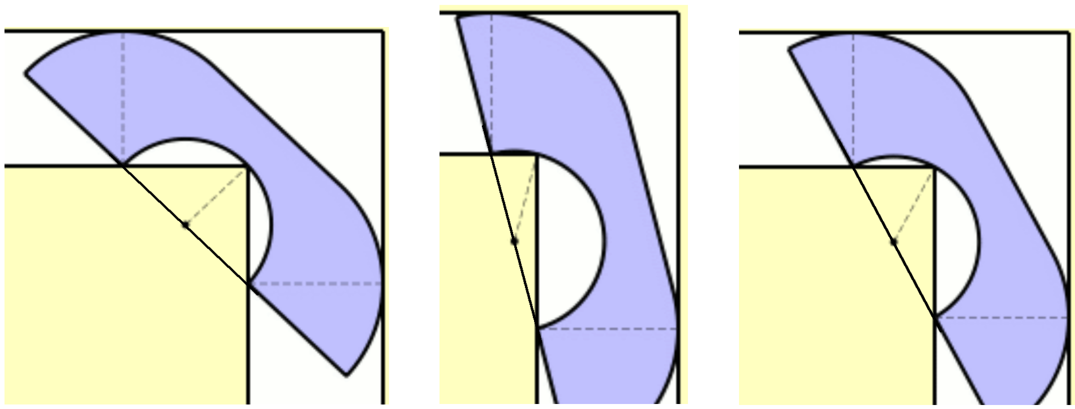
Dermed får vi det samlede areal af figuren til:

$$A = (1/2)\pi + 2\,(2/\pi) - (1/2)\,\pi\,(2/\pi)^2$$

$$A = 2/\pi + \pi/2$$

$$A \approx 2{,}207$$

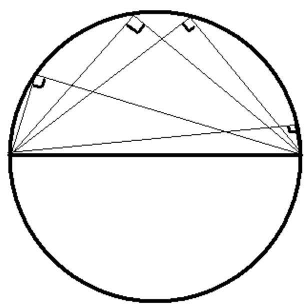
Denne løsning kaldes for Hammersleys sofa. Jeg vil argumentere for, at den kan passere hjørnet.



Radius på kvartcirklerne er lig med 1, derfor kan denne genstand være i korridoren.

For at komme videre skal man vide, at trekanter i halvcirkler, hvor diameteren udgør hypotenusen, altid danner vinkler på 90 grader på periferien.

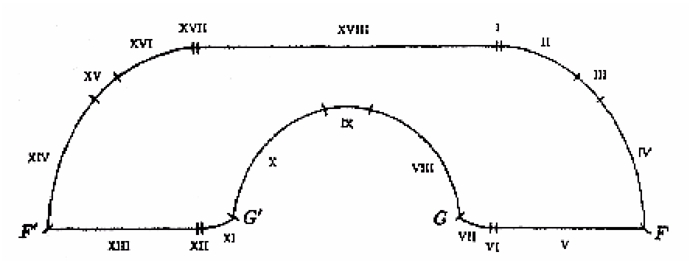
(http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII31.html) Se figur:



Dette er netop tilfældet i vores situation. Hjælpelinjen mellem de flade stykker på Hammersleys sofa er diameteren i en halvcirkel, og det gule hjørne (på tre ovenstående illustrationer) er netop 90 grader. Punktet midt på hjælpelinjen, som er placeret inde i indervæggen på de tre tegninger, kalder jeg for centrumspunktet (CP). Genstanden berør væggen i præcist 5 punkter på tegningerne: 2 ydrepunkter der rør ydervæggen, og 3 indrepunkter der rør indervæggen. Afstand fra CP til de 3 indrepunkter er altid lig med $2/\pi$ pga. vores viden om vinkler i halvcirkler. Da disse 3 afstande altid er lig med hinanden, vil genstanden glide rundt og berøre alle punkterne på den udskårne halvcirkel i sin passage rundt om hjørnet. Dette betyder, at der på intet tidspunkt vil være en afstand større end 1 mellem centrum af kvartcirklerne og ydrepunkterne. Dermed vil genstanden kunne passere hjørnet.

Gervers sofa (Areal = 2,219532):

Gerver arbejdede videre med Hammersleys sofa og har til dags dato rekorden for den største genstand, der kan passere hjørnet. Gerver opdelte omkredsen af Hammersleys sofa i 18 mindre buelængder og ændrede minimalt på disse, hvilket medførte et areal større end Hammersleys sofa.



For nærmere information om Gervers sofa, se

http://mathworld.wolfram.com/MovingSofaProblem.html

http://www.mathsoft.com/mathsoft_resources/mathsoft_constants/Geometry_Constants/2025.aspx

http://www.mathcad.com/library/Constants/sofa.htm

5.5 Hvad ved man om cirkelskiveproblemet i dag?

I 1962 stillede Zahn[11] følgende spørgsmål, som har stor lighed til cirkelskiveproblemet:

*"Givet et heltal **n**, hvad er det mindste reelle tal **r(n)**, så **n** cirkelskiver med radius **r(n)** blive placeret, så de tilsammen dækker enhedscirklen?"*

I cirkelskiveproblemet, som jeg beskriver, er arbejdet stort set det samme. Jeg fokuserer kun på placeringen af cirkelskiver, men kunne lige så godt spørger: *Hvor stor en cirkelskive kan man dække med n enhedscirkelskiver?* Zahn ønsker at dække en enhedscirkel med mindre cirkelskiver, jeg ønsker at benytte enhedscirkler til at dække størst mulige cirkelskive. Hvis man har fundet et svar på problemformuleringen, som Zahn beskriver den for *n* cirkelskiver, så skal man blot gange denne med den reciprokke værdi for at få et svar på *n* cirkelskiver under min problemformulering.

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Disk_covering_problem

Og omvendt kan et svar til min problemformulering laves om til et Zahn svar ved at gange med den reciprokke værdi. Jeg vil lade være op til læseren at indse dette.

Ligesom for sofaproblemet vil jeg kort gennemgå nogle oplagte tilfælde for cirkelskiveproblemet. Jeg vil beskrive, hvordan *n* cirkelskiver skal placeres for at dække størst mulige cirkelskive, og hvad radius på denne maksimale cirkelskive er:

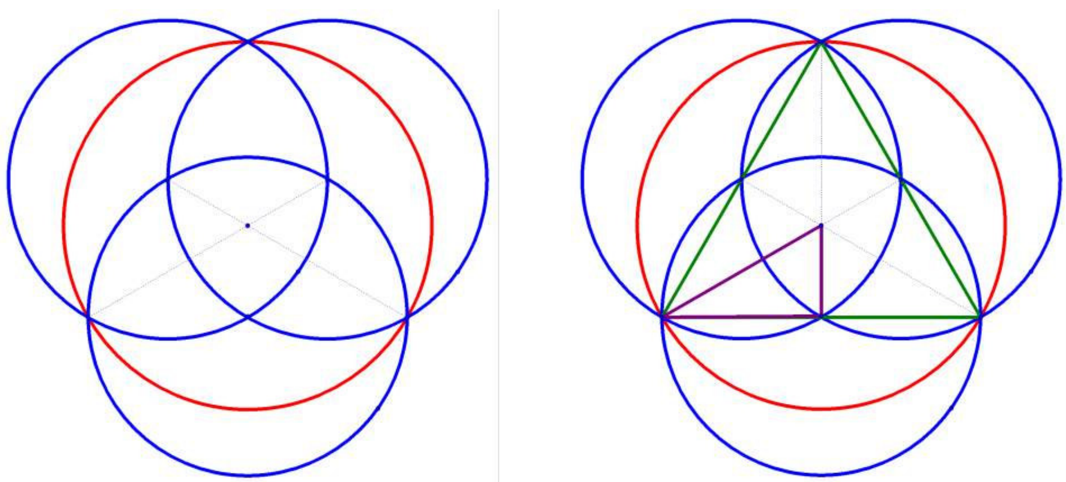
1 cirkelskive:

Givet én enhedscirkelskive vil det størst mulige areal være netop 1.

2 cirkelskiver:

Givet to cirkelskive vil det størst mulige areal være 1.

3 cirkelskiver:



På første figur ses placeringen af 3 blå cirkelskiver, så de tilsammen dækker en cirkelskive, som er rød. På den anden figur er linjerne mellem skæringspunkterne af de blå cirkler indtegnet med grøn. Den røde cirkel er tegnet som omskrevet cirkel af den grønne trekant. Den optimale placering er de tre blå cirkler er afhængig af, hvor stor en grøn trekant det er muligt at tegne. Den grønne trekant vil have de længste sider, netop når siderne i den grønne trekant er diameter i de blå cirkler. Ovenstående figurer er derfor den optimale placering (http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/).

Hvad er radius af den røde cirkel, når de 3 blå cirkler er enhedscirkler?

På den anden figur har jeg ligeledes indtegnet en lilla trekant, hvor hypotenusen er radius af den røde cirkel. Den lilla trekant har en vinkel på 90 grader, 30 grader og dermed også en vinkel på 60 grader. Den hosliggende katete er 1, da det er radius i en enhedscirkel.

Dermed finder vi radius x af den røde cirkel, således:

$$\cos 30 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

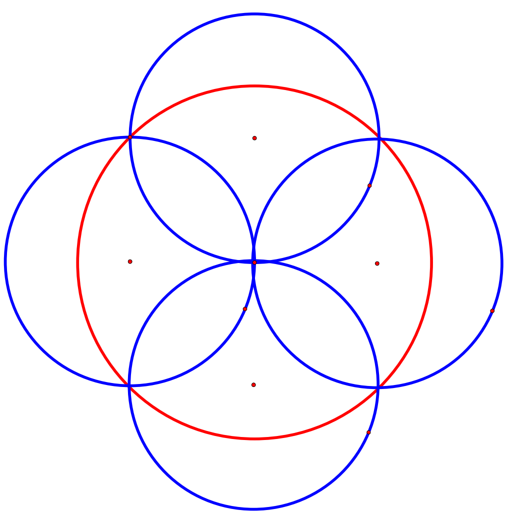
Hvis man ønsker svar på Zahns spørgsmål om, det mindste areal $r(3)$, af 3 ens cirkelskiver, der dækker en enhedscirkel, så skal man tage den reciprokke værdi af x:

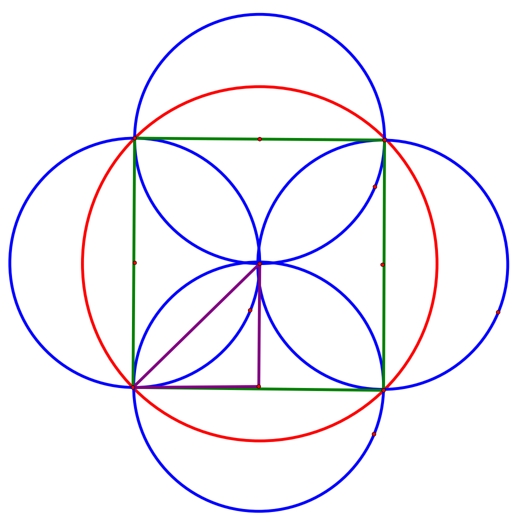
$$r(3) = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(http://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html):

4 cirkelskiver:

Man kan bruge samme fremgangsmetode for 4 cirkelskiver som for 3 cirkelskiver:





Den optimale røde cirkel opstår som omskrevet omkring den grønne firkant. Den grønne firkant bliver størst, når den har sider, der er diameter i de blå cirkler (http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/).

Hvad er radius af den røde cirkel, når de 4 blå cirkler er enhedscirkler?

Hypotenusen i den lilla trekant er radius i den røde cirkel. Ved hjælp af Pythagoras læresætning kan man hurtigt se, at radius x i den røde cirkel er:

$$x = \sqrt{2}$$

Svar på Zahns spørgsmål om 4 cirkelskiver:

$$r(4) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Jeg vil ikke gennemgå flere cirkelskiver men blot henvise til følgende hjemmesider, hvor man kan få mere information om cirkelskiveproblemet og Zahns spørgsmål:

http://en.wikipedia.org/wiki/Disk_covering_problem

http://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html

http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/

5.6 Opbygning af et modul

Et modul svare stort set til 90 min med en lille pause mellem de to lektioner. Jeg valgte at danne grupper med 4 personer i hver gruppe, hvor der minimum var én faglig stærk person i hver gruppe. Det var min vurdering, når man har grupper på 4 personer, så har alle mulighed for at ytre sig, og der er flere ideer på banen og man minimerer blokering. Den ene fagligt stærke person betyder, at de ideer og hypoteser der opstår, udmunder sig i noget konkret matematik fagligt og ikke blot løse ideer.

Modulet valgte jeg at strukturere således:

Introduktion:	Devolution: Den faste underviser opdeler klassen i grupper og gennemgår kort, hvordan man kan gribe en FLS an, samt formalia for forløbet gennemgås. Underviseren arbejder med et problem på tavlen, mens grupperne kigger på. Underviseren arbejder med følgende math en jeans problemstilling: *Hvad er det mindste antal kameraer, der fuldstændigt kan overvåge et tilfældigt rum?*

Derefter modtager alle grupper opgavearket og hypotesearket, som gennemlæses. Hvis der er spørgsmål svares disse i plenum.

Undersøgelsessituation: I denne handlingsfase udforsker grupperne udforskningsområdet, dette bliver efterfulgt at formuleringsfaser, hvor hypoteser opstilles. Hypoteser efterprøves i gruppen under en valideringsfase. Disse tre faser, handling, formulering og validering, går igen flere gange under undersøgelsessituationen.

Konference: En gruppe udvælges til at fremlægge de opdagelser, som gruppen har gjort efterfulgt af spørgsmål fra klassen. Dette er en adidaktisk situation, hvor det kun er gruppen ved tavlen og klassen uden underviser, der validerer de hypoteser, som bliver præsenteret under konferencen.

Undersøgelsessituation: Fortsat udforskning i grupperne. Forhåbentligt har konferencen givet nye ideer og indfaldsvinkler til grupperne.

Konference: En ny gruppe fremlægger opdagelser efterfulgt af spørgsmål og debat i klassen.

Undersøgelsessituation: Fortsat adidaktisk udforskning i grupperne.

Konference: En ny gruppe fremlægger opdagelser efterfulgt af spørgsmål og debat i klassen.

Afslutning: Underviseren fortæller, hvordan man fortsat kan arbejde med problemstillingen og ideer til rapporten, fx brugen af internettet.

Ud over introduktionen så er det adidaktiske situationer, der forekommer i forbindelse med modulet. Så vidt som muligt bør underviseren forholde sig passivt og blot vejlede, når det er nødvendigt. Ansvaret skal ligge hos eleverne, selv under konferencerne er det eleverne, der stiller spørgsmål, svare og debatterer. Hvis underviseren går for aktivt ind og skaber en didaktisk situation, fx under konferencerne, ved at tage styringen, så eliminerer underviseren til dels elevernes egne ideer og fremtvinger en fremgangsmetode, som eleverne vil have stor tilbøjelighed for at følge, eftersom det er underviseren, der fortæller om den. Ved at overlade ansvaret til eleverne under konferencerne, lader man eleverne kommunikere matematik med ligesindede, hvilke er en god tværgående kompetence.

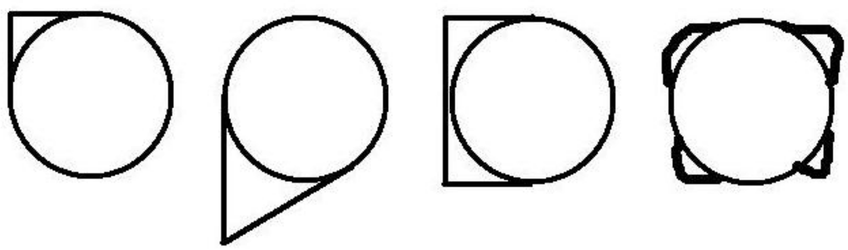
Hovedideen med at strukturere modulet således er ønsket om at skabe et adidaktisk udforskningsmiljø, hvor der ikke er begrænsning på udviklingen, og hvor det er muligt at få feedback gennem miljøet. Jeg ønsker at gøre den nærmeste udviklingszone så omfattende som muligt, og samtidig give eleverne en fornemmelse af flow, hvor sværhedsgrad passer sammen med kompetencer. Ligesom en gartner ønsker at skabe de ideel forhold for en plante i jorden med sol, vand og næring, så ønsker jeg at skabe det bedste forskningslignende miljø i en gymnasieklasse.

5.7 Elevernes forventede vej gennem miljøet

I dette afsnit vil jeg ud fra erfaring om den eksisterende viden samt teoriafsnittet, forsøge at analysere mig frem til, hvilken veje jeg forstillede mig eleverne kunne gå med problemstillingerne. Denne analyse var vigtig i min forberedelse af undervisningen, da jeg ville være på forkant med undervisningen, og dermed ville jeg have lettere ved at sætte den faste underviser og mig selv ind i, det utal af veje som eleverne kunnen gå. Denne analyse kan ikke tage højde for alle de veje som eleverne kan gå, men de mest oplagte vil jeg gennemgå.

Elevernes forventede veje – sofaproblemet

Eftersom jeg har indsat en figur til inspiration på opgavearket, så vil det være oplagt at finde arealet af cirkelen. For at finde frem til dette resultat skal man have kendskab til formlen for arealet af en cirkel, man skal kunne finde radius af cirklen ud fra tegningen og kommunikere dette videre enten mundtligt eller skriftligt. Eleven der opstiller cirkelen som en hypotese, skal have overblik med problemstillingen og have erfaring med symbolholdigt sprog, når arealet udregnes. Desuden kræver opgaven, at man kan flytte en geometrisk opgave fra geometrien hen til algebra, hvor arealet udregnes. Denne opgave med at finde arealet af en cirkel, minder meget om en traditionel matematisk opgave, hvor der bliver spurgt om et areal af cirklen, hvilket eleven derefter gør. Efter at have fundet arealet af cirklen ligger der ikke flere oplagte muligheder, og herfra er det elevens evne til at udforske et matematik miljø, der er essentielt. Eleven vil indse, at det ikke er muligt at udvide cirklen og at cirkel med diameter 1, er den største cirkel der kan passere hjørnet. Ved at lade cirklen passere hjørnet vil eleven kunne indse, at man kan påklistre noget ekstra på cirklen, som vil medføre et større areal. Fx:



Ved at klistre noget på cirkel vil eleven løbe ind i et problem: Hvordan finder man arealet af det påklistret? Dette kan medføre en blokering, da det kan være svært at finde arealet af sådanne figurer. Ved at opdele figuren i mindre dele kan man finde approksimationer af arealet. Dette kræver, at den approksimative viden er mobiliseret og bliver benyttet i den konkrete situation. Samtidig kan det forventes, at eleven ikke vil acceptere et approksimativt areal. Hvis eleven beslutter sig for at finde arealet af en figur, hvor det er svært at finde arealet, så har eleven skabt sit eget didaktiske miljø, og eftersom eleven har besluttet sig for at arbejde med sådan et areal, bør det forventes, at eleven regner med at kunne finde arealet, præcist eller approksimativt. Når en underviser skaber et miljø, vil underviseren, højst sandsynligt, have lettere ved at opnå flow hos eleven, da underviseren har større viden og indsigt med problemstillingerne. Man kan forvente, at eleven ikke har overblik over miljøet, som eleven netop har skabt, og dermed vil der være større sandsynlighed for angst eller kedsomhed. Efter cirklen er kvadratet en oplagt mulighed, som eleven let kan finde arealet af. Eleven vil hurtig kunne indse, at det ikke er muligt at udvide kvadratet på nogen måde, og det ikke er muligt at påklistre noget på kvadratet, da det vil medføre, at figuren ikke kan passere hjørnet.

Af hjælpemidler vil brugen af millimeterpapir være oplagt, hvor et hjørne bliver tegnet på millimeterpapiret. Det er ligeledes oplagt at klippe figurer ud, og afprøve disse ved at føre en udklippet figur rundt i hjørnet. I forhold til sofaproblemet mener jeg ikke, det er oplagt at benytte CAS. Hvis det var muligt at flytte en figur i et CAS program inden for nogle faste rammer (korridor), så kunne CAS være en mulighed men ellers ikke.

Efter opdagelsen af kvadratet kan der forekomme en blokering. Det kan være svært at indse, hvordan man kan komme videre med problemstillingen. Forhåbentligt vil eleverne kaste sig over rektangler og trapezer. Udforskningen af disse vil foregå på millimeterpapir, og arbejdet vil svare til Gervers arbejde med sofaen, hvor det handler om at ændre minimalt på siderne for at opnå et større areal. Brugen af rektangler og trapezer er afhængig af elevernes mobiliserede viden om arealet af disse størrelser. Formuleringsfasen vil være en række af trapezer med forskellige sidelænger og arealer, som efterprøves. Når eleven fx arbejder med et trapez i jagten for det optimale trapez, så vil eleven finde et areal, teste om dette kan passere hjørnet, finde et nyt areal, teste igen, osv. Denne proces kan meget vel betegnes som looping, hvor eleven ikke for alvor udvikler ny viden eller nye kompetencer, men blot blive inde for det samme område uden mulighed for at se andre fremgangsmetoder. Eleven kan under arbejdet med trapezer og rektangler maksimalt få et par ekstra kvadratmillimeter lagt til arealet, men det ændrer ikke det store billede. I et tilfælde som dette vil konferencerne være med til at få eleven ud af looping. Hvis eleven mener at have fundet det maksimale trapez eller rektangel, der kan passere hjørnet ved hjælp af papirudklip, så vil eleven forsøge at bevise hypotesen med stærkere argumenter end blot flyt af papirudklip.

Ligesom det var muligt at påklistre noget ekstra på cirklen, så vil det være muligt at påklistre noget ekstra på trapezet og rektangelet, da disse figurer roterer omkring et omdrejningspunkt i modsætning til fx kvadratet. Dette kan medføre en masse kreative figurer, som kan være meget svære at finde arealet af, alt fra ellipser til figurer i fri hånd. Den største ulempe ved sofaproblemet er netop, når eleven bliver kreativ og udvikler sjove, irregulære figurer, så bliver det meget svært at finde arealet. De figurer som eleverne kan finde arealet af, er ikke kreative, og de kreative figurer kan eleverne ikke finde arealet af. Dermed vil der opstå en modstand i systemet, hvor man vil opleve blokering og eller looping.

Eleverne vil indse at der eksisterer to metoder til at få en figur rundt om hjørnet: flytning og rotation. Flytning ser man fx med cirklen og med kvadratet, rotation ser men med rektanglet og trapezen. Denne indsigt med et omdrejningspunkt vil medføre nogle figurer, der udnytter rotationen til at finde større arealer. Brugen af cirkelbuer vil stige blandt grupperne, og dermed vil det være oplagt at benytte cirkelbuer til at skabe genstande. Dette kræver, at eleven indser brugen af omdrejningspunkter, og hvorfor det er oplagt at benytte cirkelbuer i sofaproblemet. Det bliver lettere at finde arealet af cirkelstykker og lettere at argumentere for en cirkelbues vej gennem hjørnet, så længe der er en afstand på 1, fra omdrejningspunkt til cirkelperiferi.

Det sidste punkt, som jeg forudser, eleven vil arbejde med, er muligheden for at fjerne et område omkring omdrejningspunktet for dermed at tilfører et større areal omkring cirkelperiferien; altså arbejde sig hen imod Hammersleys sofa. Hvis eleven arbejder med dette, kan det igen være svært at finde det optimale areal, og arbejdet vil have tilbøjelighed til at blive loope igen.

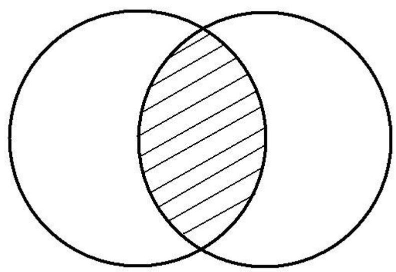
Elevernes forventede veje – cirkelskiveproblemet

Jeg har forsøgt at formulere cirkelskiveproblemet så enkelt som muligt, alligevel ser jeg muligheden for, at eleverne kan misforstå problemet. Ordet *cirkelskive* kræver en vis viden, som alle ikke umiddelbart besidder. Man skal vide, at der menes en cirkel, og det som den indeslutter. Der er forskel på en cirkel og en cirkelskive, hvilket kræver en forklaring. Dette bryder til dels med princippet om let adgang til det indledende spørgsmål. Der kræves ikke tung matematik for at forstå sammenhængen, og derfor mener jeg stadig, at cirkelskiveproblemet kan defineres som en FLS. Jeg er blot opmærksom på, at devolutionen af problemstillingen kan medføre uklarheder. Derfor valgte jeg at indføre et ”læs og forstå” forløb, hvor underviseren svarer på spørgsmål, straks efter eleverne har læst problemstillingen.

Under udforskningen af cirkelskiveproblemet vil det være oplagt at benytte sig af en passer og millimeterpapir eller måske udklippede cirkelskiver, som kan rykkes rundt. Brugen af CAS er ligeledes oplagt, da flere CAS programmer kan tegne cirkler, punkter, linjer, mm. Der er mange muligheder med det materielle miljø i arbejdet med cirkelskiveproblemet, det gælder blot om at benytte dem, hvilket jeg regner med, at eleverne også vil gøre.

Det vil være oplagt at begynde med at betragte én cirkelskive, som ikke bør volde de store problemer. Eleven skal være opmærksom på, hvordan hypotesen formuleres, når der arbejdes med én cirkelskive. Problemstillingen spørger til placeringen af én cirkelskive.

I forbindelse med 2 cirkelskiver kan der opstå endnu en uklarhed. Problemstillingen lyder således: *Hvordan placeres 1, 2, 3, 4, … cirkelskiver, så de tilsammen dækker den største cirkelskive?*

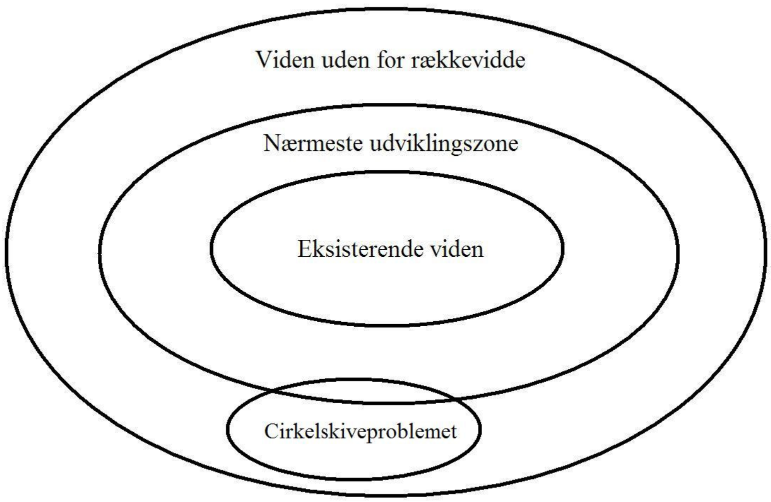


Hvad menes præcist med tilsammen? Menes det skraverede område, som ses på figuren til venstre? Hvis problemstillingen skal forstås som det skraverede område på figuren, så skal de to cirkelskiver placeres oven på hinanden for at få dække den største cirkelskive. Men dette vil også gældende for 3, 4, 5, 6 … cirkelskiver. 7 cirkelskiver skal også ligge oven på hinanden, for at *tilsammen* at dække den største cirkelskive. Problemet skal ikke forstås som fællesmængden, men som foreningsmængden af cirkelskiverne. Dette kan jeg dog ikke skrive i problemformuleringen, da det vil bryde med den lette adgang til det indledende spørgsmål. Fælles- og foreningsmængder vil blot medføre sværere adgang til den allerede problematiske problemformulering.

Efter at have indset at der menes foreningsmængden af to cirkelskiver, bliver spørgsmålet, hvordan skal de to cirkelskiver placeres? Eleven vil indse, at der ikke kan opnås et bedre resultat end med én cirkelskive, og to cirkelskiver kan placeres tilfældigt, da den største cirkelskive blot kan ligge inde i en af de to cirkelskiver.

Både en cirkelskive og to cirkelskiver er oplagte og kræver ikke større refleksion. Placeringen af tre cirkelskiver er første gang, at eleverne skal benytte sig af matematisk argumentation og udforskning. Hvis der benyttes CAS eller udklippede cirkelskiver i papir, så vil eleven indse, at placeringen af de tre cirkelskiver er afhængig af skæringspunkterne mellem cirklerne og at diameteren spiller en central rolle. I forbindelse med cirkelskiveproblemet vil der ikke på samme måde eksistere en automatisk niveaudifferentiering, da alle elever er tvunget til at bevise deres påstand for placeringen af tre cirkelskiver. Man har mulighed for at argumentere og bevise forskelligt, men i denne situation eksisterer der faktisk en officiel viden, og dermed er arbejdet med tre cirkelskiver ikke et uløst problem.

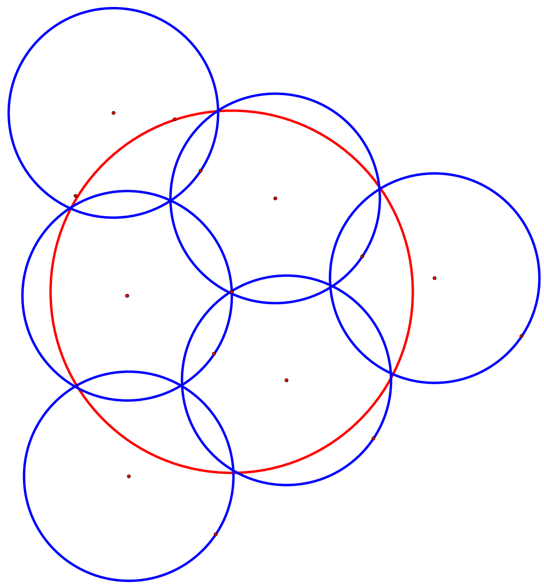
Hvis eleven kun arbejder med cirkelskiver, hvor svaret er kendt (det må man forvente, da der findes officiel viden fra 1 til 12 cirkelskiver), så kommer vi ud af en FLS og ind i en normal didaktisk situation, hvor underviseren besidder den tilsigtede viden, og blot forsøger at gemme denne viden for eleven. Dermed kan man diskutere, om cirkelskiveproblemet i virkeligheden er en FLS eller blot en del af en FLS, hvor de uløste elementer af udforskningsområdet ligger uden for elevens rækkevisse. Se figur.



Den del af cirkelskiveproblemet som ligger inden for elevens nærmeste udviklingszone er ikke uløste problemer. Der er mulighed for at ændre på dette forhold, men det kræver, at mit undervisningsdesign løb over meget længere tid og ikke blot et enkelt modul. Hvis der blev arbejdet med cirkelskiveproblemet over flere uger, så var der større sandsynlighed for, at eleverne ville undersøge både 13, 14, 15, … cirkelskiver og dermed arbejde med uløste problemstillinger.

Jeg forventer, at eleverne primært arbejder med tre og fire cirkelskiver, som indeholder mange gode matematiske overvejelser. Det princip der blev benyttet for tre og fire cirkelskiver, kan man ikke benytte, når man skal finde placeringen af fem cirkelskiver. For 5 cirkelskiver bliver eleverne nødt til at eksperimentere.

Jeg forstiller mig, at nogle elever vil arbejde med 6 cirkelskiver, da man har mulighed for at placere 6 cirkelskiver på en ”pæn” måde. Se figur. Dette er en fin placering, men der findes end bedre placering, som Károly Bezdek fandt i 1979 (http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/). Eftersom der er fundet en bedre placering end den der ses til venstre, så sidder underviseren med viden, som eleven ikke gør. Underviseren arbejder ikke med miljøet, som jeg beskrev tidligere i teorien, da underviseren kender det rigtige svar for 6 cirkelskiver. Underviseren bliver derfor ikke en udforsker, men en traditionel underviser, der ønsker at skabe et miljø, hvor eleven selv indser den officielle viden, hvilket er noget vanskeligt i denne situation med 6 cirkelskiver, hvis eleven er overbevis om, at den optimale placering er fundet.



Den sidste mulighed jeg forventer fra eleverne, er arbejdet med 7 cirkelskiver, hvor man igen har mulighed for at placere cirkelskiverne på en ”pæn”, regulær måde. Man kan placere én cirkelskive i midten, og de resterende 6 cirkelskiver omkring.
http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/

Cirkelskiveproblemet indeholder nogle uklarheder og problemer, som jeg har beskrevet. Jeg blev opmærksom på nogle af disse problemer under designet, men valgte at fortsætte med at bruge cirkelskiveproblemet. Først og fremmest for at se om min a priori analyse var korrekt, men også for at se om disse uklarheder og problemer overhovedet var problemer. Selvom nogle af principperne ved en FLS bliver overtrådt, kunne man meget vel forstille sig, at cirkelskiveproblemet ville blive en god læringssituation, hvor eleverne arbejder målrettet og tilegner sig nogle tværgående kompetencer.

Gennem hele forløbet var jeg opmærksom på, om cirkelskiveproblemet ville kunne fungere som en FLS, og netop dette aspekt vil jeg komme ind på igen senere i specialet.

6. METODOLOGI

Jeg vil i dette afsnit gennemgå den metode, jeg har benyttet til at indsamle data i forbindelse med mine to undervisningsdesigns. Mit mål med specialet er, at beskrive hvilken potentiale der ligger i FLS i gymnasiesammenhæng. Fokus ligger på tværgående kompetencer, og derfor er det især disse kompetencer, som jeg ønsker at observere og analysere hos eleverne. Min metodologi er derfor opbygget omkring observation af de tværgående kompetencer. Jeg har ønsket at indsamle den største mulige mængde relevante information i forbindelse med en FLS'er. Min indsamling af data sker gennem 5 kanaler, som jeg herunder vil beskrive og begrunde:

6.1 Elevrapport

Jeg valgte, at alle elever selvstændigt skulle aflevere en rapport om udforskningsområdet, som blev vægtet med 75 % af den samlede karakter. Selvom der arbejdes i grupper, så har jeg valgt, at alle aflevere en rapport. Dette skyldes, at jeg ikke primært er interesseret i det faglige indhold, men derimod de tværgående kompetencer. Ved at lade alle elever aflevere en rapport, så træner alle elever kommunikation og formidling skriftligt, hvilket ikke ville være tilfældet i samme grad, hvis der kun blev afleveret en rapport. Selvom alle i en gruppe har arbejdet med de samme hypoteser, så vil der være forskellighed blandt rapporterne, da alle i gruppen ikke 100 % tænker ens. Der vil være forskel i opsætningen, strukturen, beviserne mm. Desuden har eleven mulighed for at arbejde videre med problemstillingen hjemme og tilføre ekstra elementer i rapporten. Jeg er interesseret i en stor mængde relevant information og indsamling af elevrapporter fra alle er en god, konkret kanal til information fra undervisningssituationen. Alle de tanker og overvejelser eleverne har gjort, og som jeg ikke har mulighed for at indfange, kan komme til udtryk i rapporten.

6.2 Hypoteseark

Jeg har valgt, at hver gruppe afleverer ét hypoteseark. Det var vigtigt for mig, at indsamle ideer og hypoteser som de opstod, og ikke blot de endelige, gennemarbejdede hypoteser. Samtidig benytter jeg hypoteserne som et medium, hvor eleverne reflekterer over, hvordan de formulerer deres hypoteser, og hvor de bliver tvunget til at opstille hypoteser i et matematisk sprog, præcist og stringent. Det var vigtigt for mig, at jeg kunne se en udvikling blandt hypoteserne helt fra start til slut af modulet. Både dårlige og forkerte hypoteser ville jeg gerne have information om, sammen med de gode og rigtige hypoteser. Matematikere dokumenterer generelt ikke deres opdagelser, men præsentere dem som et ret linje uden omveje. Dette illustreres ved følgende historie:

En psykolog beder en matematiker om at løse et problem. Matematikeren accepterer dette og skriver noget på tavlen, som han visker ud, skriver noget nyt på tavlen og visker det igen ud. Dette fortsætter indtil matematikeren sætter to streger under et resultat, som bliver på tavlen, og matematikeren fortæller, "der har du løsningen!". Psykologen spørger til, hvad det var han viskede ud, for det er vel lige så vigtigt som selve resultatet. Det der gik galt og det som viste vejen til målet var psykologen i lige så høj grad interesseret i.

For at indsamle data om de ting der går galt, og de ting der viser vejen til resultatet, valgte jeg at benytte hypotesearket. Der blev udnævnt en sekretær, som skulle skrive hypoteserne ned, og hypotesearket ville tælle 25 % af den samlede karakter. Hvis alle fik et hypoteseark og dette ikke ville indgå som en del af karaktergivningen, så kunne man frygte, at arket ikke ville blive benyttet, og dermed havde jeg ringe mulighed for at få information om de veje, som grupperne har benyttet. Derfor lagde jeg stor væk på hypotesearket og opfordrede alle grupper til at benytte arket aktivt.

6.3 Videofilm af introduktion og konferencer

En af de muligheder jeg havde for at opfange data i grupperne, var en diktafon i hver gruppe. Dette ville resultere i, at jeg skulle benytte ca. 6 diktafoner, som ville optage to timers optagelse pr. gruppe. Dette skulle ske i 5 klasser, altså: 6 • 5 • 2 = 60 timers optagelse.

Dette ville ikke være relevant information, da meget ville være småsnak. Derudover bliver der ofte peget og benyttet ord som "den", hvilket vil være svært at forstå mening af med en diktafon. Sidst så er 60 timers optagelser en stor mængde data, som ville være tidskrævende at høre igennem.

Der var også mulighed for at opstille et kamera ved hver gruppe, som skulle optage alt der blev sagt og gjort. Men ligesom diktafonen ville dette medføre 60 timers optagelser, og samtidig kan kameraet ikke både fange, det der bliver skrevet på papirerne og den samlede gruppes handlinger.

Med ovenstående viden i baghovedet besluttede jeg mig for videofilmning af underviseren under introduktionen og videofilmning af konferencerne. Under introduktionen ville eleverne blive præsenteret for problemstillingen og have mulighed for at stille spørgsmål. Dette var vigtigt for mig at indfange til senere analyse, da eleverne ville blive præsenteret for en FLS. Hvordan foregik dette? Ville eleverne acceptere den didaktiske kontrakt? Forstod eleverne problemstillingen, eller var der misforståelser og uklarheder? Var eleverne opmærksomme på, hvordan hypotesearket skulle benyttes? Alle disse spørgsmål og flere, ville jeg have mulighed for at analysere på videoen. Under konferencerne valgte jeg ligeledes at videofilme. Kameraet blev placeret, så hele tavlen kunne ses på videofilmen. Gruppen gennemgår opdagelser ved tavlen, som bliver efterfulgt af spørgsmål til gruppen. Dette var også en vigtig situation at indfange med kamera: Hvordan gennemgår grupperne deres opdagelser ved tavlen? Hvilke spørgsmål stiller klassen? Hvordan fungerer den videnskabelige debat uafhængig af underviseren? Accepterer klassen gruppens gennemgang og hypoteser? Er klassen overbevidst? Konferencerne havde jeg regnede med, ville vare ca. 5-10 minutter, derfor var konferencerne et oplagt tidspunkt at filme, hvor der samtidig blev indsamlet god, relevant data.

6.4 Observationsnoter

Under hele modulet noterede jeg ting, jeg så og hørte, som kunne være relevant til senere analyse. Det kunne være ting som: Hvordan gruppen var placeret i forhold til hinanden? Hvordan kommunikerede gruppen? Hvilke hjælpemidler og repræsentationer blev der benyttet? Blev der sagt bemærkelsesværdige ting? Er der en god arbejdsstemning i grupperne? Har konferencerne indvirkning på grupperne? Har underviseren indvirkning på grupperne? Osv. Observationsnoter er en god og hurtig metode til indsamling af data, dog er jeg opmærksom på, at observationsnoter kun opfanger en brøkdel af det der sker, da jeg ikke kan observere alle grupper samtidigt.

6.5 Den faste undervisers kommentarer

Inden undervisningen var jeg i kontakt med den faste underviser 2-3 gange. Den faste underviser kender klassen bedre end jeg, og derfor var det vigtigt for mig, at notere de kommentarer, som den faste underviser havde til forløbet. Disse kommentarer noterede jeg mig inden forløbet, hvor underviseren og jeg snakkede om forløbet, under forløbet mens grupperne arbejde og efter forløbet. Den faste underviser har lettere ved at sætte elevernes handlinger i perspektiv og beskrive, hvordan den enkelte elev handler under normale omstændigheder.

Med ovenstående metodologi følte jeg mig fint klædt på til at gennemføre undervisningen af mine to designs, og tilfreds med det data som jeg ville indfange. Jeg overvejede at udarbejde et evalueringsark, som alle elever skulle udfylde efter modulet, men gik hurtigt væk fra denne idé. Jeg var ikke interesseret i elevernes vurdering af undervisningssituationen, da spørgsmål som: *Synes du det var en god undervisning? Lærte du noget?* Ikke ville give mig meget ny information. En elev kan sagtens lære en masse uden at være opmærksom på det, især hvis der arbejdes med tværgående kompetencer. Jeg var heller ikke interesseret i at gennemføre en god undervisning fra elevernes synsvinkel, jeg var derimod interesseret i didaktiske egenskaber og potentialer ved en FLS, som kan være fuldstændig uafhængig af en god eller en dårlig undervisning fra elevens synsvinkel.

7. RESULTATER

I dette kapitel vil jeg opstille de resultater, som jeg har fundet i forbindelse med gennemførelsen af mine to undervisningsdesigns. Under bilag (Bilag E) har jeg valgt at placere nogle hypoteseark og rapporter, som jeg modtog fra eleverne. Disse hypoteseark og rapporter illustrerer mange af de resultater, som jeg beskæftiger mig med under dette afsnit. Pga. omfanget af hypoteseark og rapporter, har jeg ikke vedhæftet alle hypoteseark og rapporter, jeg modtog, men udvalgt nogle som giver et fint billede af, hvordan eleverne greb problemet an.

Dette afsnit er opdelt i 3 dele: først vil jeg gennemgå resultater i forbindelse med sofaproblemet, derefter resultater i forbindelse med cirkelskiveproblemet, og til sidst vil jeg gennemgå nogle resultater, som er fælles for begge designs. Jeg vil ikke komme med en fuld gennemgang af alle situationer i de 5 klasser, men derimod fremhæve de interessante, didaktiske forekomster og analysere på disse ud fra min teori.

7.1 Resultater - sofaproblemet

Sofaproblemet blev gennemført i 3 gymnasieklasser, en 1.g klasse og to 2.g klasser og dermed har jeg mest data i forbindelse med sofaproblemet, da cirkelskiveproblemet blot blev gennemført i 2 gymnasieklasser. I alle tre klasser skete der nogle interessante handlinger og formuleringer, som er spændende at se nærmere på. Nogle af disse handlinger og formuleringer er ens for de 3 klasser, og dermed ledes man til at tro, at der skete nogle ting, som var uafhængig af klasse og underviser, og mere afhængig af selve designet. De elementer, som går igen, er især interessante i forbindelse med reproducerbarhed af et undervisningsdesign, hvor man ønsker at gennemføre et forløb uafhængigt af klasse, for dermed at blive bedre til at styre udviklingen og kunne genskabe vellykkede forløb.

7.2 Analyse og vurdering af undervisningsstrukturen

Her vil jeg beskæftige mig med strukturen af et samlet forløb, som jeg valgte at gennemføre. Et forløb indeholdt følgende: introduktion, undersøgelsessituationer, konferencer, hypoteseark samt rapporter. Hvert af disse elementer medførte nogle interessante overvejelser og resultater, som jeg vil se nærmere på.

Introduktion

Ud fra min videofilmning og observationsnoter står det klart, at eleverne hurtigt forstår problemstillingen i forbindelse med sofaproblemet. Devolutionen i starten af modulet, er den eneste sande didaktiske situation, hvor underviseren skaber et miljø, hvilket sker forbløffende nemt. De spørgsmål som dukker op under introduktionen tilhører en eksplosionsfase, hvor ideer og hypoteser allerede søges valideret:

Elev A: ”Kan man ikke bare…?”

Elev B: ”Man kan da bare gøre den lang?”

Udforskning af problemstilling er allerede godt i gang, og dette er netop en af de tværgående kompetencer der udvikles her. Tre principper for en FLS: let adgang til indledende spørgsmål, strategier inden for synsvidde og flere udfoldelser, bliver en effektiv metode til at komme i gang med arbejdet og dette skaber motivation. Ud fra elevernes ansigtsmimik på videofilmen er det min vurdering, at eleverne glædede sig over og var fascineret over, at de nu skulle til at arbejde med uløste problemstillinger; dette skaber mere intern motivation.

Undersøgelsessituationer

Kendetegnet for alle klasser er en eksplosion under den første undersøgelsessituation. Grupperne sætter sig ikke ned og snakker om, hvordan problemet bedst gribes an, der opstår flere hypoteser, mange som ikke kan nå at blive skrevet på hypotesearket, da en ny hypotese allerede er på vej. Grupperne var ikke målrettede og fokuserede, hvilket er ærgerligt, når man på den anden side kan glæde sig over, at eleverne tager godt imod problemstillingen. Der er skabt motivation, som kan være nødvendigt for at kunne få en FLS til at funger over længere tid.

Relationen mellem udforskningsområde og elev, som Duchet beskriver, fungerer utrolig effektivt. Eleverne ”glemmer” at de arbejder med matematik og er kun interesserede i at løse problemstillingen. Der leges og udforskes, matematikken (fag i den didaktiske trekant) bliver netop et redskab, der skal bruges til finde, opstille og bevise hypoteser og ikke det centrale i undervisning. Al min erfaring fra sofaproblemet viser, at vejen til fag via udforskningsområdet, er en effektiv vej, som motiverer eleverne og sætter eleverne i forbindelse med matematikken på en alternativ måde.

Underviser: ”Eleven opstiller en hypotese om et trapez og river formelsamlingen frem for at finde formlen for arealet af en trapez. Det er noget helt andet end at lave opgaver med arealbestemmelse af figurer”

Konferencer

Under konferencerne får eleverne mulighed for at træne formidling, kommunikation, argumentation samt overbevisning. Eleverne har ikke haft mulighed for at forberede disse konferencer og bliver bedt om at fremlægge opdagelser for klassen. Denne manglende forberedelse resulterede i, at konferencerne ofte blev forvirrende og ustrukturerede. Brugen af matematiske termer og begreber var ofte tilfældig, og flere hypoteser var lette at modbevise, eller også blev klassen ikke overbevist af gruppen ved tavlen. Der var generelt langt mellem succesoplevelserne ved tavlen, hvor flere grupper blev gjort opmærksom på deres fejl og mangler foran hele klassen.

Under en konference fremlægger en gruppe en hypotese, som er svag og forkert, hvor klassen ikke stiller nærmere spørgsmål eller kritiserer hypotesen. Dette kan skyldes, at eleverne ikke 100 % forstod gruppens argumentation og dermed ikke greb ind. Men et mere oplagt svar er det ændrede didaktiske miljø og nye roller i en FLS. I en traditionel didaktisk situation er det underviseren, der styrer slagets gang ved tavlen. Det er traditionelt underviseren, der stiller spørgsmål, beder klassen om bemærkninger, validerer formuleringer mm. Jeg havde bedt underviseren om at forholde sig passiv og kun gribe ind, hvis det var nødvendigt. Denne ændring af miljøet havde eleverne ikke opfanget, og derfor ændrede eleverne ikke på deres normale rutiner. Eleverne var ikke opmærksomme på, at det var deres ansvar at vurdere og validere de andre elevers arbejde, og derfor forholdt klassen sig ikke aktivt til de hypoteser der blev opstillet.

Eleverne opstillede hypoteser, som generelt lå inden for de forventede veje, som jeg havde forudset. Til tider dukkede der dog hypoteser op, som jeg ikke havde forudset, og som var ret interessante. Under konferencerne blev nogle af disse alternative hypoteser fremlagt, men klassen havde svært ved at overskue disse hypoteser (jeg iblandt), da det krævede mere arbejde inden man kunne forstå sammenhængen. Et mål med FLS'er er netop, at eleverne finder deres egne, kreative veje, men i dette tilfælde, havde klassen svært ved at fungere som en aktiv medspiller, da eleverne manglede erfaring med den pågældende hypotese.

Hypoteseark

I flere grupper havde hypotesearket ikke den ønskede effekt. Hypotesearket blev til et *resultatark*, hvor der blev noteret de hypoteser, der var holdbare. Ligesom i historien om psykologen og matematikeren, så er eleverne vant til at fremlægge deres resultater og ikke deres proces. Nogle grupper viskede hypoteser ud, efter de var blevet modbevist, andre omformulerede allerede eksisterende hypoteser. Hvis man skal have gavn af hypotesearket, så skal eleven lære at dokumentere sit arbejde og beskrive de veje, der er benyttet under udforskningen. Matematikken er generelt støvsuget for procesbeskrivelser, og kun endelige resultater bliver dokumenteret. Jeg mener, at der ligger et stort potentiale i dokumentation og beskrivelse af vejen til målet. Dette kan sætte matematikken i en kontekst, som kan fremme læring af matematik. Det er svært at komme ind i en klasse og bede elever om at ændre på deres arbejdsmønstre og samtidigt forvente at det sker. En del af matematikundervisning kan med fordel tilrettelægges, så eleven og underviseren træner, hvordan man dokumenterer og beskriver den eller de veje, der er blevet betrådt.

Mit design viste, at alle grupper formulerede hypoteser og arbejdede forskningslignende. Der var ingen grupper i de 3 klasser, som oplevede for stor modstand eller andre større problemer i forbindelse med afviklingen af undervisningen. Det blev bekræftet, at det var muligt at gennemføre en FLS med fokus på tværgående kompetencer.

Hypoteserne der blev opstillede var meget forskellige, både i forhold til sprogbrug, struktur og matematik faglighed. Nogle hypoteser bar præg af "egne noter", mens andre var mere præcise og velformulerede:

- 8-kantede figurer → besværlig udregning
- Trapez med mål: 0,5 • 0,75 • (0,75+2,25) = 1,125
- Man kunne forestille sig en buet figur, selvom vi ikke kan regne arealet ud.

- Hvis sofaen er en halvcirkel vil det største mulige areal være med radius 1 og areal 1,57…
- Ved at fjerne en halvcirkel i centrum af halvmånen og sætte noget ekstra på omkring periferien, vil man kunne få et større areal end halvcirklen.

Den automatiske niveaudifferentiering fandt sted, eleverne var gode til at undersøge egenskaber, som lå inden for deres nærmeste udviklingszone. De forskellige hypoteser viser netop, at eleverne arbejdede på et niveau der passede til dem. Eleverne var gode til at skabe nye miljøer og devoluere og præcisere, når det var nødvendigt. De fagligt stærkeste elever kom længst med afdækning af udforskningsområdet og opleve ikke kedsomhed, mens de fagligt svage elever arbejdede på et niveau, som var passende til dem, uden at opleve angst. Dette er et interessant, didaktisk resultat, der viser, at det er muligt at gennemføre en undervisning, hvor det faglige indhold og de tværgående kompetencer bliver differentieret, så alle elever bliver udfordret på et niveau, der passer til dem.

Rapporter

Der var stor usikkerhed omkring, hvad der skulle afleveres, selvom jeg forsøgte at formulere det tydeligt og klart på opgavearket. Rapporten, som eleverne skulle aflevere, adskiller sig fra mere traditionelle rapporter, da der ikke er noget facit. En rapport med argumentation af stærkeste hypoteser kan virke som brud med didaktisk, da det bryder med de traditionelle matematikafleveringer. Rapporterne er generelt beskrivelser af alle hypoteser på hypotesearket fra start til slut. Ligesom for hypotesearket og for konferencerne, så mener jeg, at det er sundt for eleverne at arbejde med de tværgående kompetencer, da jeg ofte så problemer med kommunikation, strukturering, argumenter, beviser, osv.

Rapporterne var bedre, end hvad jeg havde forventet. Eleverne arbejder med rapporter inden for alle fag på gymnasiet og afleverer matematikafleveringer hver uge. Det blev tydeligt, at eleverne havde erfaring med skriftlige afleveringer, denne kompetence var meget stærk hos eleverne. Andre tværgående kompetencer var ikke i samme grad mobiliseret. Det var tydeligt, at de kompetencer, som eleverne arbejder med til hverdag, også var de kompetencer, som eleverne var bedst til at benytte.

7.3 Analyse af udvalgt episode - sofaproblemet

Jeg vil herunder zoome ind på en enkel situation i forbindelse med en konference, som meget fint illustrerer et resultat i forbindelse med sofaproblemet.

Flere gange kom eleverne ud i en riskzone, hvor de ”ikke kunne bunde”, og hvor overblikket blev mistet. Andre gange blev den matematiske problemstilling gjort til et konkret, praktisk problem, som medførte besynderlige overvejelser hos eleven, her kan nævnes nogle eksempler:

- ”Kvadratet er 0,99 • 0,99 ellers kan det ikke komme ned ad gangen”
- ”Skal det ligne en sofa?”
- ”Må man lave mærker i væggen?”
- ”Hvor lang er gangen?”
- ”Der skal være håndtag i siderne, ellers kan kvadratet ikke komme ud af hjørnet”
- ”Hvor højt er der til loftet?”
- ”Må sofaen have led?”
- ”Er der nogen legoklodser?”

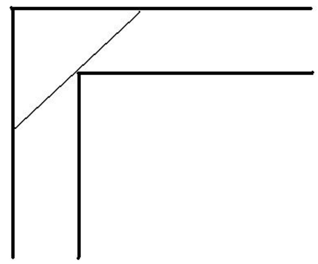
Flere grupper valgte desuden at regne direkte på opgavearket, selvom det kun var en skitse uden faste mål. Dette gav nogle skæve resultater, som var vanskelige at sammenligne med andre grupper, der arbejdede på et millimeterpapir.

Det største problem jeg erfarede i forbindelse med sofaproblemet, var den manglende bevisførelse og argumentation. Eleverne var gode til at opstille hypoteser, men mindre gode til at bevise disse. I de fleste tilfælde blev en figur klippet ud og ført gennem et optegnet hjørne på millimeterpapir, og dette svarede til et ”bevis”. Herunder kommer en transskription af en situation, som illustrerer dette:

Anden konference

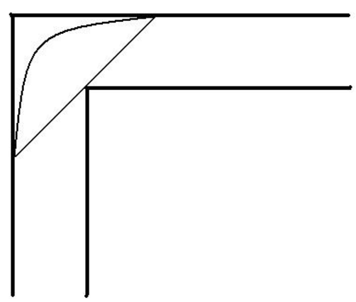
Fire gruppemedlemmer G1, G2, G3 og G4 går op til tavlen på opfordring fra underviseren U, alle andre elever i klassen E1, E2, E3, … lytter spændt.

G1 tegner følgende figur på tavlen

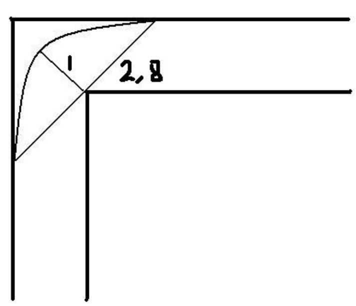


G1: ”Vi har set på, hvor bredt vi egentligt har kunnet lave det, hvis det kun var en streg. Hvis det gik sådan her (peger på stregen), så kan den komme rundt. Også har vi set på, at man eventuelt kan tage noget på, så det bliver sådan her”

G1 tegner videre på figuren



G1: ”Så det bliver en bue. Men for at den kan komme rundt her, så skal den højest være en meter”



G1: ”Det her stykke skal være 1 meter og det her 2,8. Vores problem ligger i, at det er nemt at beregne, hvis det er en trekant med højde 1 og grundlinje 2,8, men det er ret svært at finde ud af, hvad arealet er når den buer ”

E1: ”Så snart du skubber lidt til den, så vil den ene spids jo gå ind i en af væggene”

G2: ”Men den anden spids vil samtidigt flytte sig”

G1: ”Det her er jo det smalleste punkt (*peger på hjørnet*)”

E1: ”Det forstår jeg simpelthen ikke, hvordan i gør”

Der kommer støj i klassen, da flere begynder at diskutere problemet

E2: ”Har i prøvet med en figur?”

G1: ”Hvad?”

E2: ”Har i prøvet at klippe en figur ud og lave den?”

G1: ”Nej”

Smågrin og støj i klassen

E3: ”Vi har lavet noget lignende, hvor vi har lavet det til en halvcirkel og så vil vi hurtig kunne finde ud af, hvor stor arealet er”

G1: ”Vi skal også passe på, at vi ikke komme ud over siden”

U: ”Hvilket areal får i med en halvcirkel E3?”

E3: ”Vi får arealet 1,57”

G3: ”Hvad har i lavet radius til”

E3: ”Den er 1”

G1: ”Vores trekant giver 1,4 i areal plus det ekstra buede”

E4: ”Hvordan vil i dreje den der om hjørnet, når grundlinje er 2,8? Så vil halvdelen være større end gangen er bred. Den vil jo ikke kunne dreje rundt om”

G1 peger og fortæller, at man kan betragte stregen som en diagonal i et kvadrat og at man kan flytte figuren rundt langs det inderste hjørne.

E4: ”Hvis du nu vil vippe den rundt om hjørnet, så vil den være bredere end gangens bredde”

Mere støj i klassen pga. problemet

G1: ”Den skal ikke den vej gennem hjørnet. Den kan være i den første korridor således (*viser med hænder*) Og i den anden korridor således”

Mere støj i klassen. Elever diskuterer om den sidder fast

E4: ”Sidder den ikke fast nu?”

G1: ”Sidder fast?”

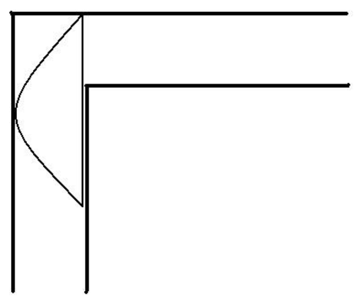
E4: ”Ja, hvordan vil i rykke den?”

G1 kigger på tegningen og på andre fra gruppen og begynder at grine pga. problemer med argumentation.

G2: ”Altså, hvis vi har en meter her (peger på tegning). Hvis man rykker den en lille smule, så vil man kunne flytte den, da denne del blive kortere og denne del længere”

E4: ”Hvordan kan i rykke den, går den ikke helt op til væggen begge steder?”

G1 tegner en ny tegning



G1: ”Først vil den ligge her. Så vil vi hele tiden rykke den lidt (*visser rotationsbevægelse med hænderne*)”

Igen støj i klassen, da elever diskuterer

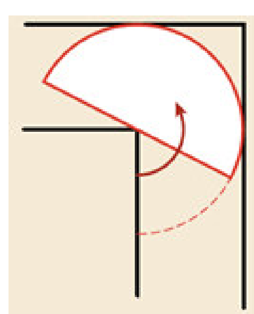
E4: ”Kan i ikke prøve til næste gang (*konference*) at teste jeres figur? Vi prøvede med den der, men det fungerede ikke”

G1: ”Jo”

U: ”Jeg tror vi siger tak til gruppen. Der var mange interessante input”

Tredje konference

En anden gruppe gennemgår meget præcist halvcirklen med radius 1.



Gruppen fortsætter med at fortælle, at det er muligt at fjerne en lille halvcirkel omkring midten af halvcirklen og påføre ekstra areal omkring periferien af halvcirkelen. Der er ingen kommentar fra klassen og gruppen sætter sig ned.

U: ”Gruppen fra før (*anden konference*) synes, at der blev skudt lidt hårdt på nogle af deres argumenter og vil gerne fremlægge igen.”

Gruppen fra anden konference går op til tavlen.

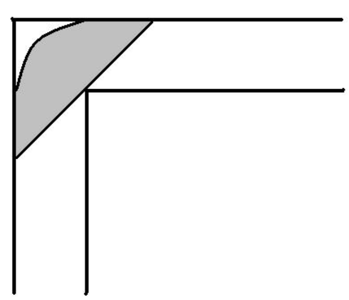
G1: ”Vi ved allerede, at stregen kan komme igennem.”

G2: ”Ja, det er jo det smalleste punkt, den kan være i. Lige så snart den kommer over dette punkt, så er den fri.”

E2: ”Jamen ligger den helt inde til hjørnet og helt inde ved væggen?”

G2: ”Ja! Man skal bare skubbe”

Latter i klassen. G1 tegner følgende tegning



G1: ”Nu har vi gjort sådan, at vi har en figur, der består af to trekanter og en kvartcirkel. Trekanterne har en højde på 0,7 og grundlinje på 1,4 og her er en kvartcirkel med radius på 1.

Arealet af begge trekanter er: 0,7 • 1,4 og vi behøver ikke dividere med 2, da der er to trekanter. 0,7 • 1,4 = 0,98.

Arealet af kvartcirklen: 1 • 1 • π og det dividerer vi med 4, da det kun er kvartcirkel, og det giver 0,785.

De to har vi plusset med hinanden og det giver 1,765”

Småsnak i klassen

G2: ”Jeg tror alle er enig om, at det er det smalleste sted (*rotation på 45 grader*). Det er i hvert fald det, som alle illustrerer, når de kommer her op. Altså i det punkt.”

G1: ”Det er også her at kateterne er mindst, hvis man bruger Pythagoras.”

G2: ”Og derfor får man den mindste hypotenuse. Så den skal ikke være større en 2,8. Faktisk så har vi nogle ekstra millimeter ude i siden, for den rigtige hypotenuse er lidt større end 2,8. Så det er ikke noget problem.”

G1: ”Ja, den burde kunne.
Forskellen på vores og på halvcirkelen er, at vi udnytter det lille stykker her (*angiver det areal som ligger uden for halvcirklen på deres figur*)
Ellers er det samme idé.”

Ingen kommentar fra klassen

U: ”Tak”

Denne situation som netop er beskrevet er karakteristisk for konferencerne i forbindelse med sofaproblemet. Det der især springer i øjnene, er den manglende bevisførelse, som er essentiel blandt de tværgående kompetencer og i arbejdet med eksperimentel matematik. Gruppen formår ikke at overbevise klassen om deres hypotese, og klassen stiller ikke yderligere kritiske spørgsmål til gruppen efter tredje konference. Alle i klassen besidder mobiliseret viden, der kan benyttes til at modbevise påstanden, men dette sker ikke.

Eleverne er i et ændret miljø, hvor de er ansvarlige for at bevise deres hypoteser, men denne øvelse har eleverne ikke stor erfaring med, og derfor bliver debatten uklar og forvirrende. Den viden der skal benyttes, ligger inden for elevernes nærmeste udviklingszone, da der arbejdes med simple geometriske figurer. De simple geometriske figurer gør også situationen god, da mange elever kan overskue problemet og er aktive under debatten. Elevernes viden angående geometri er ikke mobiliseret i en sådan grad at det kan overbevise klassen.

Underviseren i denne situation er rigtig god. Hun holder sig tilbage og lader eleverne debattere og argumentere, selvom det for hende ville være let at modbevise hypotesen. Dette er vigtigt i forbindelse med personliggørelse af ny viden og illustrerer tydeligt de nye roller i en FLS.

Hvis man betragter Duchets tetrahedron, så er gruppen og klassen i gang med at afdække udforskningsområdet. I denne sammenhæng, hvor der ikke opstår enighed om en hypotese, burde eleverne trække på viden fra faget. Dette sker ikke. Eleverne er optaget af at overbevise hinanden, men trækker ikke viden fra faget eller underviseren, som er muligt. En elev foreslår faktisk, at gruppen skulle prøve at klippe en figur ud og flytte denne igennem et optegnet hjørne. Hvis gruppen forsøgte denne øvelse, ville det hurtigt stå klart, hvorfor hypotesen ikke er sand. Den sofa der blev beskrevet er ”født” i hjørnet og den bliver i hjørnet.

7.4 Resultater - Cirkelskiveproblemet

Cirkelskiveproblemet blev gennemført i 2 gymnasieklasser, en 1.g klasse og en 2.g klasse. Ligesom med sofaproblemet, så opstod der nogle situationer i begge klasser, som jeg vil komme nærmere ind på.

7.5 Analyse og vurdering af undervisningsstrukturen

Jeg vil også her gennemgå undervisningsstrukturen og beskrive hvert element for sig selv: introduktion, undersøgelsessituationer, konferencer, hypoteseark og rapporter.

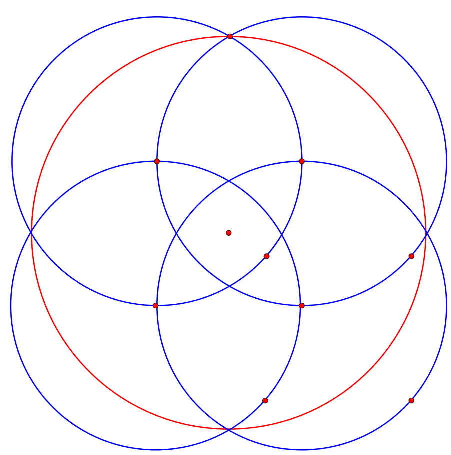
Introduktion

Den ene klasse hvor jeg underviste, havde på forhånd hørt introduktionen, og derfor fik jeg ikke denne på videofilm. Denne klasse lod til at forstå problemstillingen og gik straks i gang med udforskningen/handling. Den anden klasse havde ikke fået introduktionen på forhånd, og denne fik jeg mulighed for at videofilme. Det stod klart, at problemstillingen var problematisk for klassen, og der var mange spørgsmål til opgavearket. Ordet *cirkelskive* voldte problemer, og klassen forstod ikke med det samme, hvad opgaven gik ud på. Klassen stillede spørgsmålstegn til, hvorfor man ville ønske at dække en cirkelskive og ikke blot det største areal. Underviseren fik svaret på alle spørgsmål, men selv under undersøgelsessituation dukkede der flere spørgsmål op til problemformuleringen. Devolutionen var ikke klar, og der var ikke let adgang til det indledende spørgsmål, som er et krav for at være en FLS. Hvis cirkelskiveproblemet skal benyttes en anden gang i en FLS, så bør problemformuleringen og devolutionen ændres, for at eleverne lettere kan forstå problemformuleringen og hurtigere kan komme i gang med egen udforskning.

Undersøgelsessituation

Stort set samtlige grupper greb fat om 3 cirkelskiver, hvilket jeg ikke havde forventet, da det ville være oplagt at begynde med en cirkelskive. Dette skyldes, efter min mening, figuren på opgavearket, som alle grupper sad og kiggede på, og derfor var det oplagt at arbejde med tre cirkelskiver. Ved at have figuren på opgavearket, var jeg med til at styre elevernes opmærksomhed. Som jeg beskrev i 3.10, og som Winsløw beskriver (Winsløw, 2006, s. 169), så vil en elev starte med at efterligne underviserens fremgangsmetode, når der arbejdes med nyt stof. Med figuren på opgavearket kunne eleverne gribe tråden, og efterligne det arbejde der var på opgavearket. Der er selvfølgelig ikke noget galt i at starte med tre cirkelskiver, det kan have den positive konsekvens, at grupperne arbejde med fuldstændig den samme problemstilling, hvilket kan resultere i nogle bedre debatter under konferencerne.

I den ene klasse benyttede alle grupper CAS i undersøgelsessituationen, i den anden klasse var der ingen der benyttede CAS. Dette skyldes tidligere undervisningspraksis, hvor den ene klasse ofte benytter CAS i undervisningen, og derfor var det naturligt for eleverne at benytte CAS. I den anden klasse var der ikke tradition for at benytte CAS, og derfor blev CAS ikke benyttet. Dette skabte nogle spændende sammenligningsmuligheder. CAS er et godt værktøj at benytte, når der arbejdes med cirkelskiveproblemet. Dette skyldes, at eleven tvinges til at tage stilling til, hvor centrum skal placeres, hvor stor radius skal være, mm. Desuden kan man være mere nøjagtig med CAS i modsætning til passer. Med dette sagt så er det ikke min opfattelse, at klassen der brugte CAS klarede sig bedre, end klassen der ikke benyttede CAS, det var blot nogle forskellige situationer der opstod. Cirkler der er tegnet med CAS, kan virker meget overbevisende og eleverne tænker mere på at tegne flotte figurer, end på at forholde sig kritisk til det de ser. Fx var der en gruppe i CAS klassen, der havde følgende hypotese for 4 cirkelskiver:



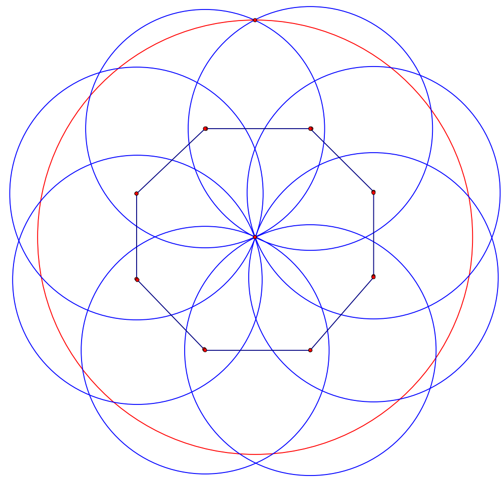
Afstanden mellem centrum af 2 cirkelskiver (som ikke ligger diagonalt) er lig med 1, som også svare til radius af cirkelskiven. Dette er ikke den optimale placering, men gruppen opdagede først dette, da en anden gruppe fremlagde en korrekt hypotese for 4 cirkelskiver. Med CAS ser løsningen pæn og overbevisende ud, og kan derfor distrahere eleverne. Flere grupper i CAS klassen begyndte langsomt at lægge CAS væk og tegne med passer på papir.

"Jeg foretrækker at gøre det i hånden"

CAS er med til at illustrere hypoteser på en let og overskuelig måde, og eleven tvinges til at tænke over placeringen af cirkelskiverne. Grenier beskriver et forsøg med kombinatorik (Grenier, 2004, s. 5), hvor eleverne startede med at benytte materialer til at formulere hypoteser, men at disse elever bevægede sig over til papir og blyant lidt efter lidt. Denne tendens oplevede jeg også i CAS klassen, hvor CAS var med til at skabe ideer og illustrationer, men at argumentationen forgik med papir og blyant. CAS fik langsomt en mindre og mindre plads under modulet. De grupper der fortsatte med at benytte CAS oplevede ubevidst blokering, da det blev svært at tegne flere og flere cirkelskiver med CAS. Det blev en kamp mod CAS programmet, som ofte viste sig at være en dårlig idé, da det var meget tidskrævende i forhold til udbyttet.

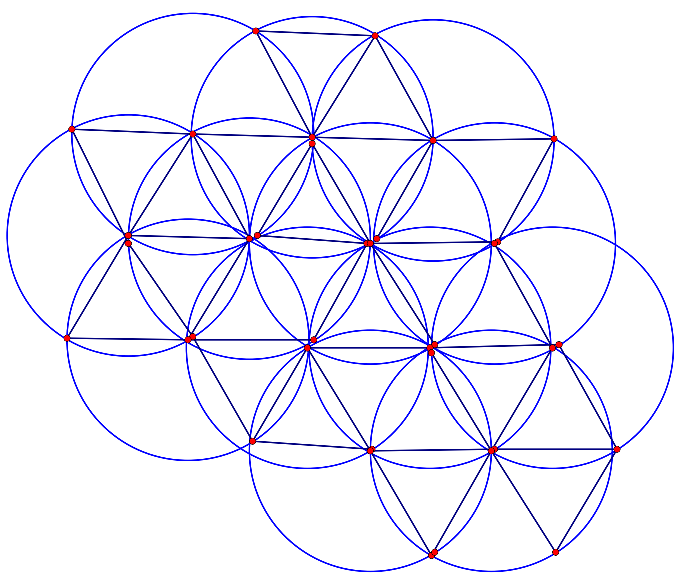
Konferencer

I begge klasser opstod fuldstændig identiske fremgangsmetoder for placeringen af *n* cirkelskiver. Fremgangsmetoden var således: Hvis man skal finde placeringen for *n* cirkelskiver, så skal man tegne en *n*-kant og finde centrum af denne. Hver cirkelskive skal så placeres med centrum i et hjørne af *n*-kanten og radius fra hjørne af *n*-kant og ind til centrum.
For en 8-kant vil det se således ud:



Der var ikke nogle elever, der kommenterede denne fremgangsmetode og begge klasser accepterede hypotesen, selvom der ikke blev gennemført et bevis. Senere indså flere elever dog, at det måske ville være bedre, hvis en enkel cirkel blev placeret i midten og de andre omkring. Ligesom for sofaproblemet, så havde eleverne svært ved at gå fra hypoteser til beviser. Eleverne var gode til at opstille hypoteser, men der manglede stærke argumenter og beviser.

Under en konference opstod der endnu en løsningsmodel for placeringen af *n* cirkelskiver:



Man skulle blot sammensætte ensvinklede trekanter og derpå tegne cirkelskiver fra hvert punkt. Dette er en kreativ idé, men hvis dette var sandt, så ville cirkelskiveproblemet ikke være et uløst problem, som eleverne også fik at vide. Både *n*-kanten og dette netværk med *n* cirkelskiver viser, at eleverne ofte var på jagt efter lette løsninger, hvor der findes et ”pænt” resultat. Det lader til, at gymnasieeleverne er vant til opgaver med lette og ”pæne” løsninger, og derfor er det naturligt, at eleverne søger ”pæne” løsninger i forbindelse med en FLS. Sandheden er, at der ikke findes mange lette løsninger i forbindelse med cirkelskiveproblemet. Opgaver hvor der ikke umiddelbart findes lette løsninger opfordrer til eksperimenterende matematik, hvor der skal prøves frem. I sådan en situation kan et resultat meget vel være ”grimt” og på inden måde let at finde. I forbindelse med cirkelskiveproblemet var der ingen elever, der kom ud i en riskzone, da alle hypoteser var ”pæne”.

Hypoteseark

Hypotesearkene fra grupperne indeholdt ofte bemærkninger og ideer, som var svære at forholde sig konstruktivt til. Fx

”Når hullet i midten bliver tilstrækkeligt stort, må dette dækkes med flere cirkler”

Hvilket hul henvises til? Hvad er tilstrækkeligt stort? Kan 2 også være flere cirkler? mm.
Mange af disse løse ideer og bemærkninger havde stort potentiale for at blive stærke hypoteser, da de oftest var bygget på nogle gode betragtninger og indsigt med problemstillingen. Desværre stoppede tankeprocessen efter hypotesen/bemærkningen var stillet.

Eleverne var kreative og arbejde forskningslignende og i modsætning til hypoteseark fra sofaproblemet, så fungerede hypotesearket fint, og det var let for mig at se elevernes udvikling på arket. Størstedelen af hypotesearkene viser desuden en tydelig udviklingen hos grupperne, de første hypoteser er jævne, mens de sidste hypoteser er bygget på en større indsigt og forståelse med problemstillingen.

Rapporter

Rapporterne er primært beskrivelser af, hvordan man placerer cirkelskiverne og ingen eller meget få beskrivelser af, hvorfor dette er den optimale placering. Eleverne leder efter et svar, som de kan sætte to streger under. Dette er svært at finde i forbindelse med cirkelskiveproblemet og derfor må man undersøge nærmere. Det er svært at forstå fra undervisningssituationerne og fra rapporterne, hvorfor eleverne tror, at en given hypotese er sand. Jeg ved at eleverne hurtig tager en hypotese til sig og vælger at argumentere for denne. Elevernes umiddelbare opfattelse af at noget er sandt, kan være årsagen til, at eleverne vælger at acceptere en hypotese, selvom den ikke er bevist. En gruppe der erfarede at *n*-kanten ikke var en sand hypotese under en konference valgte at argumentere for denne hypotese i rapporten.

Endnu engang står det klart: hvis man skal arbejde eksperimenterende og forskningslignende, så bør dette ske flere gange og ikke blot en enkel gang. Eleverne skal lære, hvordan man arbejder forskningslignende og træne de tværgående kompetencer. Blot fordi man ændrer det didaktiske miljø, så ændrer man ikke automatisk elevernes syn på matematikken. Man ændrer heller ikke på de metoder og værktøjer, som eleverne traditionelt benytter i forbindelse med matematikken. Elevernes matematiske vaner og mønstre er fast forankret i eleven, og det er svært at ændre disse.

7.6 Analyse af udvalgt episode - cirkelskiveproblemet

Jeg har valgt at se nærmere på en konference i forbindelse med cirkelskiveproblemet, hvor en gruppe argumenter for placeringen af 2 cirkelskiver:

Første konference

En gruppe bestående af G1, G2 og G3 kommer op til tavlen på opfordring fra underviseren U. De resterende elever i klassen E1, E2, E3, … retter opmærksomhed mod tavlen

G1: ”Vi har tegnet sådan her”

G1 tegner en cirkel på tavlen i fri hånd, som er meget æggeformet.

U kommer op til tavlen og giver gruppen et stykke snor, som kan benyttes til at tegne cirkler med.

G2: ”Er den til at tegne cirkler med?”

U: ”Ja, den er til at tegne cirkler med”

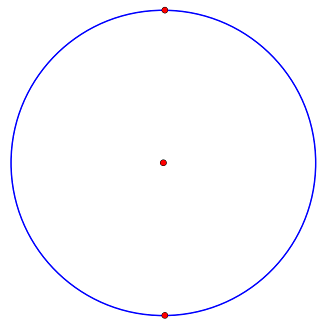
E1: ”Årh ja, det er sådan man lavede cirkler i stenalderen”

Latter i klassen

G2 tegner en cirkel med snoren

Klassen er imponeret over den flotte cirkel

G1: ”Så har vi lavet to cirkler som har skæringspunkt her og her”



G1 peger på de to røde punkter på periferien, som er illustreret ovenfor.

G1: "Det er meningen at de to cirkler skal dække hele denne cirkel"

G2 forsøger at tegne, men går i stå, da hun ikke ved, hvor de to cirkler skal tegnes fra. G1 tager over og går også i stå,

G1: "Hvordan fanden gør vi det?"

De kan ikke finde centrum af de to cirkler der skal dække cirklen på tavlen.

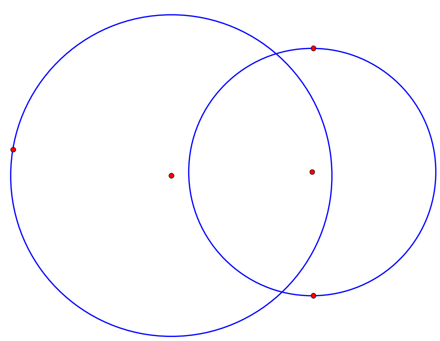
G1: "Jeg kan ikke finde ud af det her"

G1 tegner figuren i fri hånd, men visker den hurtig ud igen.

E2 rækker en frisbeeformet genstand til gruppen

E2: "Kan i ikke bruge den her?"

G2 tegner følgende figur på tavlen



G3: "Den skal da skære helt oppe i punktet"

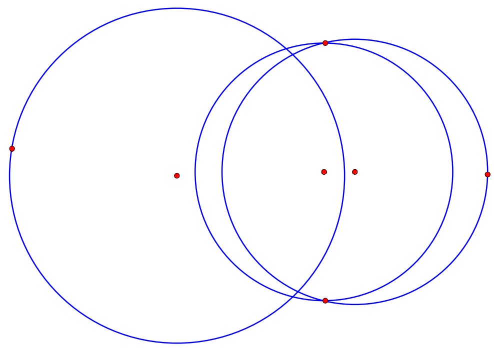
G1: "Det er simpelthen alt for besværligt"

Gruppen kigger i deres papirer

G3: "Det virkede pisse godt lige før"

G1: "Det ser skide flot ud på tegningen"

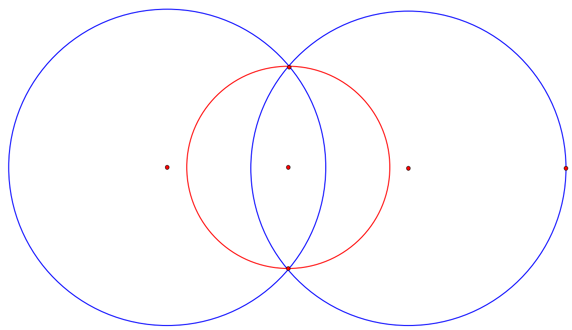
G2 tegner videre på tegningen



Gruppen visker tavlen ren og ser noget fortabt ud.

G1: ”Nu gør vi det fandme”

G1 tager snoren og tegner følgende figur på tavlen



G1: ”Sådan, så virker det sgu. Så har vi et skæringspunkt her og her. Og de to (*blå*) dækker det hele (*den røde*).”

G1: ”Hvis vi havde haft noget ordentligt værktøj, ville det gå lidt nemmere”

Kort pause, hvor klassen betragter figuren på tavlen.

E2: ”Må man supplere? Handler det ikke om at finde den <u>største</u> cirkel inde i de andre cirkler?”

Småsnak i klassen

E3: ”Den cirkel i har lavet der (*den røde*), er den ikke mindre end de andre (*de blå*)?”

E3: ”Kunne i ikke bare lægge alle cirklerne ind i den store? Så ville i få en endnu større cirkel end den i har fået”

G1: ”Jo… men nu har vi gjort det her”

Latter i klassen

Gruppen bruger meget tid på konstruktionen af deres figur og går næsten i stå. På deres millimeterpapir, hvor de har tegnet deres oprindelige figur, har de benyttet sig at de tern, der allerede eksisterer på papiret til at tegne figuren, men disse tern er ikke på tavlen, hvilket er den primære årsag til, at de går i stå. I denne situation er det interessant at se, at formidlingsprocessen faktisk går i stå pga. det materielle miljø. Jeg valgte bevidst at have en snor klar, når grupper skulle gennemgå hypoteser på tavlen, da det kan være svært at være præcis, når man skal tegne cirkler i fri hånd. I denne situation hjalp det ikke meget, da snoren faktisk forvirrede gruppen, og det tog utroligt lang tid at konstruere en simpel figur.

Begge klasser der arbejdede med cirkelskiveproblemet havde store vanskeligheder ved at tegne gode cirkler på tavlen, som præcist illustrerede placeringen af cirkelskiverne. Eleverne er ikke vant til denne situation, og derfor opstår der unødvendige problemer, som blokerer for formidlingen. En af de tværgående kompetencer er netop at kunne benytte forskellige repræsentationer. Selvom tegning af en geometrisk figur på papir og tavle vil falde ind under den samme repræsentation, så kan der være stor forskel i selve udførelsen, som jeg netop har beskrevet. En af styrkerne ved FLS'er er, at eleven kommer ud i situationer, hvor der skal benyttes kompetencer, som normalt ikke ville opstå i en traditionel undervisning.

Gruppen fremfører en dårlig hypotese, som klassen er hurtig til at modbevise. Dette er endnu en situation, hvor eleverne stiller de kritiske spørgsmål, når de kan se noget er galt. Og igen forholder underviseren sig passivt og lader eleverne diskutere problemstillingen. Hvis eleverne viste, at underviseren når som helst ville gribe ind og institutionalisere den pågældende viden, så ville eleverne ikke forholde sig lige så aktivt til hypoteserne på tavlen. Når klassen nu ved, at underviseren ikke vil gribe ind, så bliver eleverne nødt til at være opmærksomme. Det er disse adidaktiske situationer, hvor valideringen også er adidaktisk, der er interessante i en FLS.

Gruppen fremlagde en hypotese, men kunne hurtig se, at den ikke var optimal, efter en elev foreslog, at alle cirkler lægges oven på hinanden. Flere gange forekommer denne episode i en FLS, hvor en gruppe fremlægger en hypotese, som klassen kollektivt skyder ned. Der er få succesoplevelser i forbindelse med konferencerne, hvilket også var tilfældet i forbindelse med sofaproblemet. Det er ikke så mærkeligt, at grupperne ikke oplever succes under konferencerne: grupperne bliver spontant bedt om at fremlægge, de får ikke mulighed for at forberede sig, og de har maksimalt arbejdet med hypotesen i 15 minutter. For at undgå demotivation og højne faglighed i forbindelse med konferencerne, ville det være en idé, at ændre på konferencerne, så grupperne på forhånd viste, at de skulle op og fremlægge.

7.7 Overordnede resultater

Både sofaproblemet og cirkelskiveproblemet viser, at det er muligt at gennemføre en FLS i en gymnasieklasse. Alle grupper arbejdede forskningslignede, de stillede hypoteser og argumenterede for disse. Samtidig viser min empiri, at der findes et hav af kreativitet blandt eleverne. Der blev stillet individuelle, kreative og til tider sjove hypoteser. Ud fra min erfaring bliver det didaktiske spil mellem miljø og elev forstærket, ved at fokusere på et udforskningsområde. Udforskningsområdet bliver en snedig, pædagogisk vej til faget, hvor eleven benytter matematikken til at afdække udforskningsområdet. Der er ikke direkte fokus på matematiske formler og sætninger, men de er nødvendige, hvis der skal gøres fremskridt inden for udforskningsområdet. Derfor er det min klare mening, at en underviser sagtens kan benytte en FLS til at arbejde med et specifikt, matematisk emne. Et af principperne ved FLS'er er, at der ikke findes nogen fast, tilsigtet viden, men jeg ser ikke noget problem i, at underviseren på forhånd ønsker at fremme en matematisk, tilsigtet viden, som ikke fortælles til klassen. Som jeg har illustreret, med mine to designs, så eksisterer der nogle oplagte fremgangsmetoder, som ikke er til at komme uden om. Blandt disse oplagte fremgangsmetoder, kunne underviseren have en tilsigtet viden, som han eller hun ønskede at eleverne personliggjorde. Fx kunne en underviser vælge at gennemføre en FLS med sofaproblemet, mens den skjulte, tilsigtede viden ville være arealbestemmelse af geometriske figurer. Lisbeth Fajstrup fra Aalborg Universitet gør ligeledes opmærksom på, at man kan styre det faglige indhold i forbindelse med sofaproblemet. Dette giver hun udtryk for i en af vores korrespondancer: " *Det er en væsentlig pointe i projektarbejde, at man rent faktisk kan styre det faglige indhold*". Grenier (Grenier, 2004) beskriver en FLS, hvor eleverne arbejder med brikker på skiver, hvor alle elever beskæftiger sig med kombinatoriske problemstillinger. I denne situation ville det være muligt, at kombinatorik blev det område/emne, der blev arbejdet med, da man med sikkerhed ville vide, at matematiske sætninger i forbindelse med kombinatorik ville blive berørt. To af de faste undervisere, som jeg samarbejdede med under specialet, fortalte, at de meget vel kunne knytte en tilsigtet viden til en FLS, selvom det ikke er "ånden" med FLS'er. Dette skyldes, at eleverne tvinges gennem nogle bestemte, matematiske områder i en FLS, og det ville være oplagt at knytte geometriske FLS'er til traditionelle, geometriske, matematikforløb. Selvom det er muligt for en underviser at knytte en fast, tilsigtet viden til en FLS, så bør underviseren ikke ændre på miljøet for at fokusere på denne tilsigtede viden. Hvis underviseren vælger at ændre på det didaktiske miljø for at fremme en tilsigtet viden, så kan det gå ud over mange af de gode principper, der findes i forbindelse med FLS'er.

7.8 Demokratisering af matematikundervisningen

Flere personer vil sikkert betragte ovenstående overskrift som et oxymoron[12], da der eksisterer noget modstridende i ordene demokrati og matematik. Flere elever er vant til at betragte matematikundervisningen som et sted, hvor der arbejdes med absolutte størrelser, og hvor udsagn enten er sande eller falske. Dette er også tilfældet for FLS'er, men alligevel nærmer vi os det, som jeg kalder for *demokratisering af matematikundervisningen.* Den manglende institutionalisering medfører, at der ikke kommer nogen officiel viden ind i klasseværelset, og underviseren griber ikke ind og fortæller, hvad der er sandt og hvad der er falskt. Sandhed bliver derfor sværere at indse for eleven, og klassen må i samarbejde (fx under konferencerne) finde ud af, hvad der er sandt, og hvad der er falskt. Denne fremgangsmetode, hvor alle deltager i en debat om, hvad der er mest optimalt, finder vi i vores samfunds demokrati; derfor har jeg valgt at benytte ordene demokrati og matematik i den samme overskrift. Der findes fordele og ulemper ved denne demokratiseringsproces. En fordel er, at eleverne får mulighed for at diskutere en matematisk problemstilling og træne tværgående kompetencer. En ulempe vil jeg illustrere ved følgende eksempel:

Under et modul arbejder to grupper med samme hypotese. Den ene gruppe fremlægger hypotesen under en konference, og den anden gruppe kommenterer fremlæggelsen, ved at rose det gode arbejde gruppen har gjort. En elev fra en tredje gruppe stiller et kritisk spørgsmål og får et overfladisk svar. Den hypotese som begge grupper arbejder med er forkert, men ingen i klassen har indset dette, og alle i klassen lader til at have accepteret denne hypotese, på trods af nogle få, svage argumenter og et manglende bevis. Selv den kritiske røst fra en elev i klassen er forsvundet, da størstedelen af klassen har accepteret hypotesen. Under resten af modulet, bliver der henvist

[12] Et oxymoron er et ord eller en kort vending, der er sammensat af to tilsyneladende selvmodsigende begreber (Wikipedia.com)

til denne forkerte hypotese flere gange, hvilket til dels afsporer debatten og kvæler ellers gode initiativer.

For enhver hypotese i en FLS findes der en sandhed, som kan indses af alle, ved at betragte et korrekt, matematisk bevis, i modsætning til demokratiet, hvor der ikke findes en endelig sandhed, der kan bevises. Derfor vil den ene hypotese i en FLS, være bedre end den anden hypotese, og afstemning vil ikke kunne definere, hvad der er sandt eller forkert. Inden en hypotese er bevist for eleven, må eleven gøre sig nogle tanker om, hvilke hypoteser der er sande, og hvorfor de er sande. Transskriptionen af de to konferencer i forbindelse med sofaproblemet viser netop, at gruppen forsøgte at overbevise klassen om, at deres hypotese var sand. Det lykkedes ikke første gang, så de prøvede igen anden gang. Hvis man forstillede sig, at halvdelen af en klasse mente, at en hypotese var sand, og den anden halvdel mente, at hypotesen var falsk, hvad skulle klassen så kollektivt mene? Et svar ville være en demokratisk afstemning, men det er helt uacceptabelt i en matematik-undervisning. Alle i klassen burde lægge hovederne i blød og søge efter beviser eller modbeviser til hypotesen, så det kunne blive afgjort, om en given hypotese er sand eller falsk. Denne demokratisering af matematikundervisningen skyldes et matematikfagligt underskud i klassen, pga. den manglende officielle viden, manglende institutionalisering og underviserens manglende indgriben.

En af de tværgående kompetencer er netop *kommunikation mundtligt og debat.* For at eleverne skal kunne debattere, er det nødvendigt, at der skabes et miljø, hvor det er muligt at debattere. Min empiri viser, at en FLS er et udmærket sted at træne kommunikation mundtligt og debat. Ved at bede elever om at afdække et udforskningsområde, ved hjælp af Duchets tetrahedron, så ligger de matematiske begreber og sætninger ikke lige for, og dette er grobund for matematisk debat.

Denne demokratisering af matematikken, som blev observeret i forbindelse med min undervisning, er ikke unormal i det matematiske miljø. Matematikhistorien viser, at først når et tilstrækkeligt antal forskere er enige om et stykke matematisk viden, bliver det til officiel viden. Imre Lakatos, elev af Karl Popper, beskriver denne fremgangsmetode og udvikling i sin bog *Proof and Refutations* (Lakatos, 1976). I bogen kommer Lakatos med historiske beskrivelser af matematiske hypoteser, der er blevet accepteret af det matematiske miljø, selvom de ikke var sande. Man fandt ud af, at disse hypoteser nok ikke var sande, da matematikere pludselig fandt modeksempler til de etablerede hypoteser. Dette medførte, at hypoteserne blev ændret og dermed forbedret; blot indtil der blev fundet et nyt modeksempel til den nye hypotese. Lakatos beskriver denne udvikling, som en god udvikling der er med til at forbedre matematikken. Det sidste man skal gøre er, at acceptere en hypotese når den er blevet opstillet og ”bevist”. Derimod skal man straks forsøge at finde modeksempler til hypotesen, beskriver Lakatos.

I denne sammenhæng kan jeg komme med endnu et eksempel på demokratisering af matematikken. Clay Mathematics Institute, som stillede 7 millennium problems (http://www.claymath.org/millennium/), fik løst et af disse, da Grisha Perelman løste Poincarés formodning[13]. I samarbejde med Morten Jacob Nesgaard, som er en studiekammeret fra Universitet, har jeg udarbejdet en artikel (Nesgaard og Tosev, 2006), som beskriver Poincarés formodning, og alt det postyr, der var i forbindelse med løsningen af formodningen. Denne artikel findes som bilag til specialet (Bilag F). Nu skriver jeg, at Perelman fik løst Poincarés formodning, men sandheden er, at løsningen blev præsenteret for det matematiske miljø i 2004, og i 2006 var der ingen, der kunne modbevise løsningen, derfor valgte man efter to år, at kalde formodningen for løst. Der findes en sandsynlighed for, at Perelmans løsning ikke er korrekt. Blot fordi ingen har kunnet modbevise løsningen, betyder det ikke, at løsningen er korrekt.

Denne praksis, som ses i det matematiske miljø, er netop, hvad jeg observerede i de 5 gymnasieklasser: Hypoteser blev opstillet og efterfølgende valideret af det matematiske miljø, som i dette tilfælde var klassen. Nogle hypoteser blev accepteret af elever, selvom de var forkerte, ligesom det er sket gennem historien.

7.9 Den korte tid udvander den FLS

Jeg valgte at gennemføre 5 mindre undervisningssituation med længde på 2 timer. Som jeg beskrev i introduktionen, så bliver math en jeans forløbene gennemført over flere uger. Med denne korte tid til rådighed blev mange af de gode hensigter og principper i forbindelse med

[13] *If we stretch a rubber band around the surface of an apple, then we can shrink it down to a point by moving it slowly, without tearing it and without allowing it to leave the surface. On the other hand, if we imagine that the same rubber band has somehow been stretched in the appropriate direction around a doughnut, then there is no way of shrinking it to a point without breaking either the rubber band or the doughnut. We say the surface of the apple is "simply connected," but that the surface of the doughnut is not. Poincaré, almost a hundred years ago, knew that a two dimensional sphere is essentially characterized by this property of simple connectivity, and asked the corresponding question for the three dimensional sphere (the set of points in four dimensional space at unit distance from the origin). This question turned out to be extraordinarily difficult, and mathematicians have been struggling with it ever since. http://www.claymath.org/millennium/Poincare_Conjecture/*

FLS’er udvandet. I en FLS burde underviseren og eleven samarbejde om at afdække udforskningsområdet, og der burde ikke eksistere nogen fast tilsigtet viden. Dette bliver ikke opfyldt pga. den korte tid. Der findes officiel viden om mange af de hypoteser, som eleverne arbejder med. Inden for cirkelskiveproblemet findes der beviser for de første 12 cirkelskiver. Inden for sofaproblemet findes der beviser for stort set alle genstande, som eleverne arbejdede med. Eftersom eleverne, pga. den korte tid, ikke arbejdede med hypoteser, der lå uden for disse områder, så kendte underviseren til beviset og til den optimale fremgangsmetode. Miljøet bliver derfor meget lig med en traditionel undervisningssituation, hvor underviseren kender den officielle viden og forsøger at gemme denne for eleven, elevens arbejde bliver at finde denne viden. I de 5 klasser hvor jeg underviste, opstod der på intet tidspunkt en situation, hvor underviseren og eleven samarbejdede om en hypotese. Underviserens rolle var stort set uændret, og det samme var elevens. Eleverne fik at vide, at de arbejdede med en uløst problemstilling, men store dele af problemstillingen er ikke uløst, og der findes officiel viden om disse dele. Jeg havde den opfattelse, at det didaktiske miljø ville blive ændret markant, men dette var ikke tilfældet. Undervisningen forløb på mange måde som en traditionel undervisningssituation. Selvom det ikke var muligt at institutionalisere hele problemstillingen, så var det muligt at institutionalisere dele af problemstillingen. Faktisk var det muligt at institutionalisere alle de områder, som eleverne arbejdede med. Under undersøgelsessituationen havde underviseren et større overblik over problemstillingen, selv når underviseren og eleven befandt sig i en riskzone, var underviseren hurtig i stand til at arbejde med miljøet, på et niveau som eleven ikke var. Igen fordi underviseren på forhånd kendte den officielle viden. Retoriske spørgsmål kunne hurtig få eleven videre, hvis der opstod en blokering eller en uklarhed, ligesom man ser det i en traditionel undervisningssituation.

Eleverne havde på et enkelt modul ikke mulighed for at sammenligne deres resultater. Hvis der var mere tid til rådighed, kunne det være interessant, at klassen i fællesskab opstillede hypoteser ved at sammenligne gruppernes arbejde. Dette ville højst sandsynligt medføre endnu flere interessante, matematiske debatter.

Hvis man ønsker fuldt udbytte at en FLS, så skal man arbejde med problemstillingen over længere tid. Jeg oplevede eksplosionsfasen, men nåede aldrig at opleve elevens dybere udforskning af problemstillingen pga. den korte tidsramme. Det er min opfattelse, at der var rig mulighed for at beskæftige sig med de tværgående kompetencer, men afdækning af udforskningsområdet blev kun strejfet, i forhold til hvad der fandtes af potentiale. Hvis man vil opleve en FLS med alle styrker og egenskaber fra første modul, så kan man vælge at arbejde med en problemstilling, som ingen i klassen, inklusiv underviseren, kender til. Det kan være et math en jeans forløb, hvor der findes intet eller minimalt viden tilgængeligt. Man kan også vælge at opstille sin egen problemstilling, på den måde vil klassen opleve en større ændring af det didaktiske miljø og et større samarbejde mellem eleven og underviseren og dermed opnå flere af de gode principper, der findes i FLS'er.

7.10 Resultater i forbindelse med den didaktiske kontrakt

I forhold til den didaktiske kontrakt opstod der nogle nye situationer. Mikrokontrakten, som Hersant og Perrin-Glorian beskriver (Hersant og Perrin-Glorian, 2005, s. 119), bliver skabt af eleven uden indblanding fra underviseren. Mikrokontrakten beskæftiger sig med elevens direkte arbejde med en opgave. I den FLS ligger alt ansvar hos eleven, underviseren opfordrer til selvstændige indfaldsvinkler i forbindelse med mikrokontrakten. De opgaver som eleven arbejder med, kan være vidt forskellig fra de opgaver som en anden elev i klassen arbejder med. Mine observationer viser følgende:

- Eleverne er kreative og kommer med mange hypoteser på kort tid
- Mange hypoteser bliver ikke noteret på hypotesearket.
- Kun oplagte hypoteser bliver noteret på hypotesearket.
- Flere gange bliver hypoteser ikke noteret på hypotesearket, da der er knyttet et stort stykke arbejde til efterprøvningen af hypotesen.
- Der opstår en kompetitativt atmosfære, hvor grupper er i konkurrence om at finde den bedste hypotese.
- Der bliver benyttet oplagte repræsentationer.
- Elevernes viden er ikke mobiliseret i tilstrækkelig grad.

Som Hersant og Perrin-Glorian beskriver, så bliver mesokontrakten skabt ud fra mikrokontrakten. Både eleven og underviseren er ansvarlig for handlinger på mesoniveauet. Eleven kan være med til at skabe miljøet, men underviseren har allerede planer om grupperinger, konferencer, mm.

Jeg noterede mig følgende på mesoniveau:

- Aflevering af rapporten var en så stor ændring af det didaktiske miljø.
- Konferencer var med til at inspirere grupperne.
- Der blev arbejdet med gammel viden.
- De grupper der sad tættere på hinanden, og hvor alle kunne se hinanden, fungerede bedre end dem, hvor det modsatte var gældende.

Makrokontrakten skabes ud fra mesokontrakten. I mit tilfælde var FLS'er det område der blev arbejdet med. FLS'er vil derfor høre til makrokontrakten og være det hovedområde der arbejdes med. Området i forbindelse med makrokontrakten i en FLS vil netop ikke være et matematisk emne som geometri, sandsynlighedsregning, kombinatorik eller andet.

Det største problem jeg oplevede i forbindelse med den didaktiske kontrakt, var aflevering af rapporten. Det var et krav fra underviseren på mesoniveau, at alle elever skulle aflevere en rapport med matematisk gennemgang, illustration og argumentation af stærkeste hypoteser. Eleven havde ikke havde mulighed for at påvirke undervisning på dette område og alt ansvar lå hos underviseren. I nogle klasser var der mange spørgsmål til rapporten i slutningen af timen, der blev spurgt til, hvorfor hver gruppe ikke blot behøvede at aflevere én rapport og hvad indholdet af rapporten egentlig skulle være.

I en klasse ønskede en gruppe at gå uden for klassen og arbejde med problemstillingen, hvilket de altid fik lov til, da jeg ikke havde mulighed for at observere deres handlinger i samme grad. Gruppen satte sig modvilligt tilbage og begyndte at arbejde. Gruppen følte dette som et brud med en didaktisk kontrakt, da de altid får lov til at arbejde uden for klassen. Dette skaber en interessant situation, som kun kan optræde, hvis en fremmed person kommer ind i en klasse, hvor der eksisterer et veletableret regelsæt og en allerede eksisterende didaktisk kontrakt. Gruppen henviste (ubevidst) til den didaktiske kontrakt, som de allerede havde sammen med deres faste underviser og følte derfor, at denne didaktiske kontrakt også burde gælde i denne pågældende situation. Den faste underviser og jeg var sammen blevet enig om en ny didaktisk konktrak, heriblandt at det ikke var tilladt at gå uden for klassen, hvilket vi ønskede at eleverne ville acceptere. Eftersom gruppen satte sig tilbage og begyndte at arbejde engageret, accepterede de automatisk den nye didaktiske kontrakt.

Jeg beskrev tidligere i 7.9, at det korte forløb er med til at udvande den FLS. En af de elementer der bliver udvandet, er underviserens rolle som vejleder. Jeg oplevede en episode, som omhandler ansvaret i en FLS i forhold til den didaktiske kontrakt: I en klasse var eleverne opmærksom på, at det var deres arbejde at undersøge problemstillingen, og at underviseren ville forholde sig passivt. En elev spurgte underviseren efter hjælp til en konkret opgave, og underviseren forsøgte at hjælpe eleven ved at guide eleven videre. Eleven blev ved med at bede underviseren om hjælp og insisterede på, at underviseren skulle fortælle, hvordan man løste den konkrete opgave. Underviseren valgte ikke at hjælpe eleven yderligere, hvortil eleven spurgte: ”Hvordan skal jeg så komme videre?”. Til dette svarede underviseren, ”prøv dig frem”. Efter denne situation, så eleven opgivende og frustreret ud.

Denne episode viser, at eleven oplevede situationen, som et brud med den didaktiske kontrakt, hvor størstedelen af ansvaret er flyttet fra underviseren over til eleven. Eleven accepterede ikke denne flytning af ansvar og følte derfor, at kontrakten blev brudt af underviseren. Underviseren ønskede blot at overholde sin del af kontrakten, men stod i en splittet situation, da underviseren faktisk burde vejlede og samarbejde med eleven, men eftersom underviseren 100 % kendte den optimale fremgangsmetode, ville der ikke være tale om vejledning, men derimod institutionalisering. Underviseren valgte ikke at institutionalisere den pågældende viden, da elementer af den FLS dermed ville gå tabt. Eleven oplevede yderligere dette som et brud med den didaktiske kontrakt, da underviseren under traditionelle omstændigheder ville have institutionaliseret den pågældende viden, men ikke gjorde i denne situation. Eleven var ikke opmærksom på at den faste undervisers havde fået en ny rolle og blev derfor frustreret, da han ikke fik mere hjælp. Eleven viste samtidig, den pågældende viden på intet tidspunkt ville blive institutionaliseret.

I min søgen efter undervisere der ville stille deres klasse til rådighed for mit design, valgte jeg bevidst at henvende mig til undervisere, der havde erfaring med XM, netop fordi det ville være interessant at gennemføre en undervisning i en klasse, der allerede havde erfaring med XM. Dette ville alt andet lige betyde, at miljøet og den didaktiske kontrakt hurtigere ville blive accepteret, og dermed ville der være mere tid til undersøgelsessituationer. Når jeg ser tilbage på forløbet, så burde jeg have gennemført den samme undervisning i en klasse, der ikke havde erfaring med XM, netop for at se om eleverne ville acceptere den didaktiske kontrakt i samme grad, som elever der tidligere har arbejdet med XM.

7.11 Vurdering af elevernes tværgående kompetencer

Jeg vil i det efterfølgende vurdere de tværgående kompetencer hos eleverne i forbindelse med mine FLS'er.

Stille stærke hypoteser og gode spørgsmål

Eleverne stillede mange hypoteser, men de var ikke altid gode. Evnen til at stille gode spørgsmål er afhængig af elevens indsigt og forståelse for problemstillingen. De elever der stillede gode og stærke hypoteser viste en god forståelse for problemstillingen tæt knytte med brug af matematiske termer. Svage hypoteser var ude af sammenhæng og grebet fra den frie luft. Under konferencerne blev eleverne placeret i en situation, hvor de kunne stille spørgsmål til gruppen, der fremlagde. Hvis man vil arbejde mere med dette, kan man bede en gruppe om at være opponent, som skal stille spørgsmål til fremlæggerne under konferencen. På den måde tvinger man eleverne til at formulere spørgsmål, som vil være med til at træne evnen til at stille gode spørgsmål. Ved at vælge en gruppe til at være opponentgruppe, strukturerer man valideringsfasen, så der altid vil komme feedback fra miljøet, i dette tilfælde fra opponentgruppen.

Arbejde med flere repræsentationer, herunder kunne skifte mellem repræsentationer samt kunne blive inden for samme repræsentation

Elevernes rapporter er primært geometriske fortolkninger og nogle analytiske udregninger i forbindelse med udregning af arealer af sofaer eller cirkelskiver. Eleverne var generelt gode til at udregne arealer analytisk, men havde problemer med mundtlige kompetencer i forbindelse med konferencerne. Det vil være en fordel at fokusere på flere forskningslignede elementer, som at skrive en artikel, gennemføre en undervisning, læse/lytte og kommentere andres arbejde, beskrive matematiske opdagelser til en ikke faglig person eller afholde en videnskabelig debat, hvis man ønsker at træne elevernes mathemacy i forbindelse med brugen af matematiske repræsentationer.

Kommunikere mundtligt og skriftligt, herunder formidle og debattere

Det er min opfattelse, på baggrund af min data, at eleverne er bedre til at formidle skriftligt end mundtligt. En FLS lægger op til debat og formidling af hypoteser, samt argumentation. Når underviseren forholder sig passivt, tvinger man eleverne til at komme på banen, som alt andet lige vil betyde træning af kompetencer i forbindelse med kommunikationen mundtligt. Igen er det en mulighed at benytte nogle forskningslignede elementer, som jeg beskrev i 3.18, hvis man vil styrke kommunikations kompetencer yderligere.

Strukturere og modellere

Efter eleverne er blevet introduceret til problemstillingen, er det elevens arbejde at strukturere problemstillingen yderligere ved at vælge det område af problemstillingen, der ønskes dækket. Eleven er dermed ansvarlig for en nærmere devolution og strukturering af undersøgelses-situation. Disse egenskaber er vigtige i forbindelse med den XM, men også i andre sammenhænge, som fx PISA undersøgelserne
(http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html).
De lande der klare sig godt i PISA undersøgelserne, er de lande der arbejder meget med problemløsning i undervisningen (Winsløw, 2006, s. 176). De lande der klare sig mindre godt, er lande der primært arbejder med rutinearbejde i undervisningen. En stor del af problemløsning er selvfølgelig strukturering og modellering. Eleverne var generelt gode til at devoluere og strukturere problemstillingerne, hvilket kan hænge sammen med, elevernes tidligere erfaring med XM i matematikundervisningen.

Benytte hjælpemidler

Jeg valgte at have hjælpemidler til rådighed, men ikke lægge dem frem, som jeg beskrev under a priori analyse. Eleverne var rigtig gode til at benytte hjælpemidler til at udforske problemstillingen og spurgte efter dem, når det var nødvendigt. Pga. den korte tid var det ikke muligt at benytte internet, hvilket også ville være en oplagt hjælpemiddel i en FLS. I forbindelse med CAS er der mange gode pædagogiske muligheder, når resultater skal illustreres.

Udforske matematisk problemstilling samt eksperimentere

Fra starten af modulet opstod der mange gode, spændende hypoteser, som til tider medførte eksplosion. Jeg oplevede, at alle grupper var gode til at udforske og eksperimentere. Denne kompetence var den dominerende blandt alle de tværgående kompetencer hos eleverne. Udforskning var ofte forbundet med leg og sjov, desuden var eleverne stærkt motiveret under udforskningen.

Bevise og modbevise

Af alle de tværgående kompetencer, var bevis og modbevis den kompetence, som eleverne have sværest ved at arbejde med. Mange gange var eleverne ikke opmærksom på, at det var nødvendigt at bevise en hypotese efter den var opstillet. Det lå ikke naturligt for eleverne at bevise påstande, og de argumentationer der blev benyttet var generelt svage.

7.12 Potentiale for FLS'er i danske gymnasier

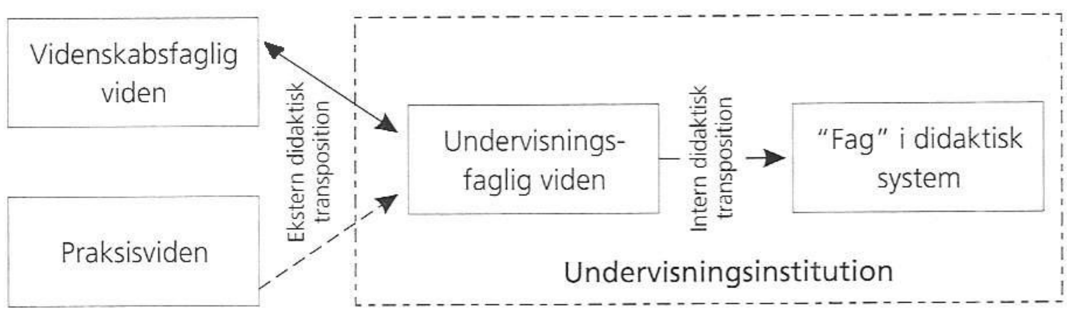
Der er ingen ydre forhindringer i forbindelse med afviklingen af FLS'er i danske gymnasier, tværtimod så kræves det af læreplanen, at alle skal arbejde eksperimenterende. Det er ikke muligt direkte at kopiere det franske math en jeans projekt til et dansk gymnasium. Det franske projekt er frivilligt, og der arbejdes over flere uger med samme problemstilliner. Den danske læreplan sætter krav til emner, som elever skal igennem, hvilket kan være tidskrævende. Det vil nærmest være muligt, hvis en underviser beslutter sig for, at benytte flere uger på en FLS. FLS'er indeholder muligheder og egenskaber, som kan være et frisk pust til matematikken, og som kan være med til at forbedre matematikundervisningen med tiden.

En FLS kan sammenlignes med en forretningsfranchise[14]. Alle rammerne er på plads, det er blot et spørgsmål om at komme i gang. I begge tilfælde skal man ikke til at opfinde den dybe tallerken, man kan fokusere på det vigtige, nemlig at udforske (eller tjene penge, hvis det er en forretningsfranchise). Hvis man vil forske inden for matematik, så er det langt mere tidskrævende end blot at arbejde med en FLS. Alligevel kan de FLS'er være en interessant metode til at

[14] **franchise** ['frɑ·ntjɑjs] subst. en
1. en aftale om retten til at sælge en virksomheds produkter el. serviceydelser i et bestemt område mod at forpligte sig til at betale en fastlagt afregningspris og opfylde visse krav om indretning, medarbejderuddannelse, markedsføring og produktudvikling (Politikkens Nudansk Ordbog, udgave 17)

introducere elever for forskningen gennem et veltilrettelagt miljø, der er skabt af underviseren. Der er få forskere inden for de naturvidenskabelige fag (http://vbn.aau.dk/research/danmark_uddanner_for_faa_forskere(522425)/).

FLS'er vil efter min mening være med til at skabe interesse for forskningen, som flere politikere garanteret vil have interesse i. Det ville være interessant, hvis der kunne sprede sig en forskningslignende kultur inden for de danske gymnasier, hvor eleverne netop arbejder efter de principper som forskeren arbejder efter. Hvis dette blev tilfældet, så kunne man forestille sig, at den didaktiske transposition ville få en dobbelt rettet pil mellem videnskabsfaget og uddannelsesinstitutionerne, da uddannelsesinstitutionerne højst sandsynligt ville opdage ny viden.



8. KONKLUSION

FLS'er er et forsøg på at fokusere på de tværgående kompetencer, der er forbundet med matematikken gennem et konkret forløb. Eleverne, der arbejder med miljøet, er ikke i tilstrækkelig grad opmærksomme på, at de bliver vurderet på deres tværgående kompetencer. Eleverne lægger derfor den største energi i løsningen af givne opgaver, og mindre i formidling, strukturering, kommunikation, dokumentation, bevisførelse mm. Dette skyldes primært elevernes traditionelle undervisningsmønstre og vaner, som er svære at ændre på et enkelt undervisningsmodul.

En FLS ændrer det matematiske miljø, så der fx ikke eksisterer en klar institutionaliseringsfase, og de traditionelle roller mellem eleven og underviseren ændres. Eleverne accepterer den didaktiske kontrakt, og de er rigtig gode til at udforske en matematisk problemstilling og stiller mange kreative hypoteser i den sammenhæng. De matematiske argumentationer og beviser volder eleverne flere problemer, ofte er de forkerte eller mangelfulde. Dette skyldes især elevernes manglende erfaring med selvstændige beviser i forbindelse med matematikundervisningen i hverdagen.

Udforskningsområdet skaber nogle nye relationer i den traditionelle didaktiske trekant og disse fungerer, didaktisk og pædagogisk set, meget effektivt. Eleven fokuserer på udforsknings-området og ønsker at afdække dette bedst muligt. For at det kan lade sig gøre, bliver eleven nødt til at trække på viden fra matematikken. Dermed bliver matematikken sekundær og udforskningsområdet bliver primært, hvilket skaber en øget og intern motivation, da eleven ikke blot arbejder med matematiske opgaver for matematikkens skyld, men der eksisterer en dybere mening med at benytte matematiske formler og begreber. Samtidig indeholder FLS'er en automatisk niveaudifferentiering af matematikundervisningen, så alle elever kan arbejde på et niveau, hvor kompetencer og sværhed passer sammen. Dette minimerer angst og kedsomhed i forbindelse med undervisningen.

FLS'er overholder kriterierne for at blive betegnet som XM, og kan derfor benyttes i forbindelse med afviklingen af XM i gymnasiet. FLS'er kan dog ikke stå alene i gymnasiet, men bør fungere som supplement til mere traditionel undervisning, hvor der er fokus på ny viden.

Det er en styrke, at FLS'er kan fungere på flere uddannelsesniveauer. Med FLS'er er der flere måder at gribe problemet an på, og der kan benyttes mange matematiske repræsentationer i arbejdet. Erfaring fra Aalborg Universitet viser, at sofaproblemet har været en succes for nye elever på Universitetet. Mit data viser, at det er muligt at få en FLS til at fungere i gymnasiesammenhæng. For at fokusere yderligere på de tværgående kompetencer, kan man inddrage flere forsknings variable, som jeg har beskrevet i 3.18, fx undervise klasse, skrive artikel, give feedback til gruppe, mm.

Et kort forskningslignende modul udvander de egenskaber og potentialer, der findes ved en FLS, da underviser og elev ikke i tilstrækkelig grad kommer til at fungere som samarbejdspartnere, og de traditionelle roller bliver til dels fastholdt. Desuden findes der officiel viden om store dele af de problemstillinger, som eleverne arbejder med, og først efter længere tids arbejde med en forskningslignende problemstilling, vil det være muligt at opdage ny viden, og opnå alle de egenskaber og potentialer der findes ved en FLS.

FLS'er opbygger en demokratiseringskultur i forbindelse med matematikundervisningen. Den FLS skaber et matematikfagligt tomrum, pga. den manglende institutionalisering og underviserens passive rolle. Eleven får derfor sværere ved at indse, hvilke hypoteser der er sande, og hvilke der er falske. Eleven vælger til tider at acceptere en hypotese, selvom den ikke er bevist. Der er større sandsynlighed for, at en elev vælger at tro på en hypotese, som ikke er bevist, hvis flere personer i klassen tror at hypotesen er sand.

9. LITTERATURLISTE

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Redigeret og oversat af N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland og V. Warfield. Kluwer, Dordrecht.

Brousseau, G. Brousseau, N. og Warfield, V. (2002): An experiment on the teaching of statistics and probability. Journal of Mathematical Behavior 20, 363–411.

Burton, L. (2004): *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics.* Kluwer.

Duchet, P. et al. (2004): Rapport præsenteret ved The MATH.en.JEANS workshop 22. August. http://mathenjeans.free.fr/amej/evenements/ue2004/ue2004.html

Grenier, D og Godot, K. (2004): Research situations for teaching: a modelling proposal and example. Artikel præsenteret ved ICME 10, http://www.icme-organisers.dk/tsg14/TSG14-02.pdf

Hersan, M og Perrin-Glorian, M.-J. (2005): Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. Educational Studies in Mathematics 59 no. 1-3, 113-151.

Lakatos, I (1976): *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press.

Nesgaard, M og Tosev, J (2006): Poincarés formodning – Perelmans bevis og det efterfølgende cirkus. Famøs fagblad for aktuar, matematik, økonomi og statistik. 20. årgang, nummer 1, november.

Poltikens nudansk ordbog (2001), 17. Udgave, Gyldendals bogklubber

Skovsmose, O (2001): Landscapes of Investigation. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33 (4), 123-132.

Tosev, J (2007): Eksperimentel matematik i undervisningen. Mathilde nyhedsbrev for dansk matematisk forening nr. 31, maj.

Vennebush, G.P. (2002): ”Move the sofa”. The National Council of Teachers of Mathematics, inc. http://my.nctm.org/eresources/article_summary.asp?from=B&uri=MT2002-02-92a

Winsløw, C. (2006): *Didaktiske elementer. En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik.* Biofolia.

- http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm
- http://us.uvm.dk/gymnasie//almen/lov/regelsamlinger/1999/dok99/naturfagm2.htm
- http://fr.wikipedia.org/wiki/MATh_en_JEANS
- http://design.emu.dk/artik/05/17-traeningsprogr.html
- http://www.mjc-andre.org/pages/amej/sujets/80sujets/espace_sujets.html
- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII31.html
- http://mathworld.wolfram.com/MovingSofaProblem.html
- http://www.mathcad.com/library/Constants/sofa.htm
- http://www.stetson.edu/~efriedma/circovcir/
- http://www.claymath.org/millennium/
- http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html
- http://vbn.aau.dk/research/danmark_uddanner_for_faa_forskere(522425)/
- http://pub.uvm.dk/2002/kom/
- http://vbn.aau.dk/research/rundkredspaedagogik%283549501%29/
- http://www.google.com/translate_t
- http://babelfish.altavista.com/
- http://en.wikipedia.org/wiki/Disk_covering_problem
- http://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html
- http://us.uvm.dk/gymnasie//vejl/laereplan_pdf/stx/stx_matematik_a.pdf
- http://www.mathsoft.com/mathsoft_resources/mathsoft_constants/Geometry_Constants/2025.aspx

BILAG A

Eksperimentel Matematik

Udarbejdet af: Julian Tosev

Dato: 16.01.2007

Kandidatprojekt i matematikkens didaktik

ECTS: 12,5

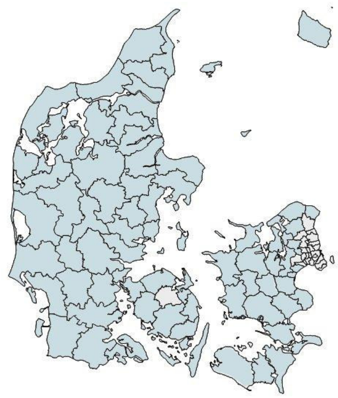
Vejleder: Prof. Carl Winsløw

INDHOLDSFORTEGNELSE

1. INDLEDNING

Den eksperimentelle matematik er kommet ind i læreplanen i gymnasiet som et didaktisk princip. Jeg har derfor valgt at beskrive den eksperimentelle matematik ud fra 4 forskellige didaktiske teorier, som tilsammen vil belyse den eksperimentelle matematik og give en bedre forståelse for matematik som eksperimentel fag. Når der arbejdes eksperimenterende med matematik, vil eleven blandt andet arbejder mere udforskende og afprøvende, jeg vil gerne give en forsmag på dette ved hjælp af et eksempel som kaldes for *"Four Colour Theorem":*

Er det muligt, at farve det nye Danmarkskort kun ved hjælp af 4 farver således, at ingen to kommuner der deler en grænse (som ikke blot er et punkt), har den samme farve?



Jeg vil først i rapporten komme med en karakterisering af den eksperimentelle matematik, hvor principperne ved denne form bliver fremhævet og konkretiseret. I afsnit 4 vil jeg først beskrive Teori om didaktiske situationer generelt, for derefter benytte teorien til at beskrive den eksperimentelle matematik, blandt andet ved hjælp af flere matematisk eksempler og undervisningssituationer. Dernæst vil jeg følge samme fremgangsmetode i afsnit 5, hvor jeg først vil beskrive den antropologiske teori, for derefter beskrive den eksperimentelle matematik ved hjælp af den antropologiske teori. I afsnit 6 benyttes samme fremgangsmetode for den kognitive teori, og instrumenteringsteorien følger samme fremgangsmetode i afsnit 7.

2. PROBLEMFORMULERING

Jeg ønsker at give en operationel, teoretisk funderet definition, illustreret ved eksempler, af hvad eksperimentel matematik er.

3. MATEMATIK SOM EKSPERIMENTELT FAG

Eksperimentel matematik kan blive betragtet som et oxymoron[15], da der kan være noget modstridende i de to ord: matematik og eksperimentel. Man finder eksperimentel matematik i læreplan for matematik på niveau A i gymnasiet. I punkt 3, som omhandler didaktiske principper i forbindelse med undervisning, finder man følgende:

> *Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.*
> *(Læreplan 2006 Stx, niveau A)*

Den eksperimentelle matematik har fundet plads i læreplanen og alle gymnasielærer skal nu til at tilrettelægge deres undervisning så eksperimentel matematik indgår. Man hvad vil det overhoved sige, at arbejde eksperimentelt med matematik? Hvordan kan vi forlange at undervisere over hele landet skal til at arbejde med eksperimentel matematik, hvis ingen ved hvad det indebærer? Målet med denne rapport er at kaste lys over den eksperimentelle matematik, ved hjælp af teorier fra matematikkens didaktik, blandt andet teorien om didaktiske situationer af Guy Brousseau og den kognitive teori. Jeg vil ligeledes benytte mange matematiske eksempler i denne rapport til at fremhæve egenskaber ved den eksperimentelle matematik.

Hvis man betragter den didaktiske transposition som Winsløw beskriver (s. 20, Winsløw, 2006), så eksisterer eksperimentel matematik i dag i læreplanen og skal formidles til eleverne via den interne didaktiske transposition. Den eksperimentelle matematik er, pga. den didaktiske transposition, kommet til undervisningssituationen via den eksterne didaktiske transposition. Inden for videnskabsfaget og praksisviden af matematik kan eksperimentel matematik blive betragtet som en særlig slags matematik, som man kan arbejde med selvstændigt, blandt andet ved hjælp af computere. Dette på trods af, at den eksperimentelle matematik bredder sig over mange matematiske discipliner.

3.1 Karakterisering af eksperimentel matematik

Der findes flere skildringer af eksperimentel matematik, hvis man søger på Google, men en klar definition af området, er svær at finde. Borwein og Bailey (s. 76, Borwein, 2005) kommer dog med en definition, hvor computeren står helt centralt i arbejdet med eksperimentel matematik. Der eksisterer nogle fælles

[15] Et oxymoron er et ord eller en kort vending, der er sammensat af to tilsyneladende selvmodsigende begreber (Wikipedia.com)

egenskaber ved de forskellige beskrivelser af den eksperimentelle matematik, som jeg i dette afsnit har prøvet af koge sammen til 4 punkter. Disse 4 punkter udgør tilsammen en karakterisering af den eksperimentelle matematik, men skal dog ikke opfattes som en definition, men mere som en beskrivelse af visse karakteristika ved området.

3.1.1 Kreativitet

En utrolig vigtig egenskab ved eksperimentel matematik er den store fokus på elevens kreativitet og egne indfaldsvinkler til matematiske problemer. Udforskning, leg og afprøvning bliver stillet helt centralt så eleven får erfaring med flere løsningsmodeller til et matematisk problem og dermed ikke kun arbejder med én given løsningsmodel. Det er et mål at eleven udvikler og finder egne fremgangsmetoder til at løse opgaver, dette skal ske på baggrund af gammel viden (konstruktivisme) og derfor er det nødvendigt, at eleven har matematisk erfaring med et emne, inden det er muligt at finde egne løsningsmodeller og fremgangsmetoder til et matematisk problem.

3.1.2 Erfaringsdannelse

Gennem arbejde med eksperimentel matematik er det et fundamentalt mål, at eleven bliver i stand til at opdage mønstre og sammenhænge i matematikken. Denne opdagelse bliver mulig gennem erfaring, da eleven dermed vil få overblik og kontrol (s. 127, Winsløw, 2006) med det matematiske emne og dermed blive i stand til at finde både mønstre og sammenhænge i matematikken. Disse mønstre og sammenhænge kan desuden optræde i flere repræsentationer, hvilket vi vil se senere i rapporten, fx ved hjælp af Pascals trekant. Leone Burton omtaler i sin bog (Burton, 2004), at matematisk indsigt og intuition kommer fra erfaring og denne indsigt kan være med til at matematikere angriber matematiske problemer på en ny måde. Denne indsigt, som Leone Burton beskæftiger sig med, vil være et mål at opnå i den eksperimentelle matematik.

3.1.3 Matematiske objekter

Da de matematiske objekter ikke umiddelbart er til at tage og føle på, så bliver man nødt til at beskæftige sig med dem gennem forskellige repræsentationer. Det er en pointe i den eksperimentelle matematik, at man arbejder med de matematiske objekter på en alternativ måde. Her kommer blandt andet computeren ind i billedet, som gør det muligt at manipulere med objekter og afprøve ideer hurtigt og let. Dette gør objekterne til nogle størrelser, som man kan undersøges på næsten samme måde, som det er gældende inden for de resterende naturfag. Man kan også forestille sig, at man benytter materialer som pap, fx til at undervise i proportionalitet ved hjælp af puslespilsopgaven[16]. Ved at arbejde med de matematiske objekter på denne

[16] En opgave hvor elever får udleveret et puslespil, hvor brikkerne er trekanter og firkanter. Eleverne skal nu gengive puslespillet, men hvis en side er 5 cm lang, så skal den i det nye puslespil være 9 cm lang. Dette medfører hurtigt

måde, vil eleverne ikke kun opleve de matematiske objekter som kridt på en tavle, men derimod mere nærværende. Hvis eleverne sidder til forelæsning og alt matematikken foregår oppe gå tavlen, så vil eleverne ikke personliggøre (s. 135, Winsløw, 2006) den matematiske viden. Hvis eleverne derimod selv arbejder med de matematiske objekter, fx via computeren, pap eller papir og blyant, så vil eleverne lettere personliggøre den matematiske viden.

3.1.4 Bevis og falsifikation

Beviser har en central placering inden for matematikken. Inden for den eksperimentelle matematik er det et mål, at beviser ikke blot bliver udenadslære fra en bog, men at elever selv forsøger at finde hypoteser til påstande og dermed selv finder beviser. Dette kan ske ved at eleven begynder at se sammenhænge i matematikken, som kan afprøves og testes. Jonathan M. Borwein (s. 76, Borwein, 2005) skriver følgende om beviser i forbindelse med eksperimentel matematik:
Exploring a possible result to see if it merits formal proof. Og: *Suggesting approaches for formal proof.* Man kan komme med ideer og forslag til beviser eller ligefrem modbevise hypoteser. Falsifikation er netop denne proces, hvor man modbeviser - eller gendriver - et bevis eller en hypotese. Ideen med denne proces er, at elever prøver at komme med hypoteser, som dernæst bliver falsificeret, dette medfører forhåbentligt nogle bedre hypoteser, som så igen bliver falsificeret osv. Borwein (s. 76, Borwein, 2005) skriver følgende om falsifikation: *Testing and especially falsifying conjectures*, som et princip ved den eksperimentelle matematik.

Denne fremgangsmetode, hvor hypoteser bliver beviset og modbevist stammer fra Karl Popper (1902 – 1994) og senere Imre Lakatos (1922 – 1974). Lakatos beskriver denne falsifikation nærmere i sin bog Proof and Refutations, denne fremgangsmetode vil man i den eksperimentelle matematik meget gerne arbejde videre med, da eleven selv får indflydelse på beviser og kan komme med egne indfaldsvinkler og hypoteser.

Med ovenstående karakterisering har jeg givet et billede af den eksperimentelle matematik, som jeg opfatter den.

De elever jeg underviser på Frederiksberg gymnasium, betragter matematik som et ”militærfag”, hvor man skal følge underviserens metoder og have en stor portion disciplin, og hvor egne metoder sjældent er til nogen nytte. I den eksperimentelle matematik er der stor fokus på det induktive, kreative, afvekslende og selvstændige, som forhåbentlig skal være med til at motivere eleverne, og give dem en dybere forståelse for de matematiske objekter og samtidig give en større interesse for faget. Uden mange af disse elementer, kan

---

problemer, da eleverne indser, hvis man blot lægger 4 cm til alle sider og kanter af puslespillet, så passer brikkerne ikke sammen.

matematikundervisning hurtig komme til at blive uinteressant, da alle de ”sjove” elementer er fjernet fra faget. Som matematikere kan man have stor begejstring ved faget, men eleverne oplever ofte ikke denne begejstring. Sfard (s. 186, Sfard, 2000) kommer med en meget fin lille historie, som er med til at beskrive dette fænomen, hvor matematikunderviseren elsker faget matematik og hvor eleven forsøger at forstå hvor denne kærlighed kommer fra.

Sfard skriver følgende:

> *The point I was trying to make in this paper may be illustrated by the story of a poor man who asked his wife to cook it for him a dish often served in a rich man's house and rumored as truly delicious. The obedient woman did what she was asked to do, alas replacing or simply removing most of the luxurious ingredients which were beyond poor people reach. Ever since the poor guy tasted the result of his wife efforts he could not stopped wondering about the peculiarity of the rich man's taste: How could the unpalatable dish be an object of delight for the latter? Similarly, if we remove too many ingredients from the exquisitely structured system called mathematics, we may be left with a rather tasteless subject which is not conducive to effective learning. (s, 186, Sfard, 2000).*

4. TEORI OM DIDAKTISKE SITUATIONER
OG EKSPERIMENTEL MATEMATIK

4.1 Teori om didaktiske situationer

Teorien om didaktiske situationer (TDS) er en hovedretning inden for det epistemologiske program (s. 8, Laursen, 2006), hvor det væsentlige i matematikundervisning, er selve undervisningssituationerne mellem underviser og elev, hvor der eksisterer 3 aktører: elev, underviser og miljø. Vi er i en adidaktisk situation, når eleven arbejder med miljøet uden underviserens indgriben. Når underviseren griber ind, så taler man om en didaktisk situation (s. 139, Winsløw, 2006) Da der netop er 2 mulige situationer, kalder vi dette for et didaktisk dobbeltspil. Guy Brousseau er matematikdidaktikeren som er hovedophavsmand for TDS.

Inden der overhoved kan blive tale om nogen form for undervisning, er både underviser og elev nødt til at indordne sig under nogle regler, hvor eleven blandt andet accepterer, det miljø som underviseren lægger frem og samtidig engagerer sig i de matematiske problemer. Underviseren accepterer rollen som formidler, der designer et miljø, hvor det er muligt for eleven at tilegne sig viden. Underviseren er desuden ansvarlig for, at eleven lærer stoffet og underviseren skal eventuelt modificere miljøet, hvis det er nødvendigt. Disse regler, som begge parter accepterer, kalder Brousseau for den didaktiske kontrakt, som selvfølgelig er en uformel kontrakt (s. 116, Hersant og Perrin-Glorian, 2005). Dette spil som foregår i læringssituationen kan kun vindes af begge parter, hvis eleven tilegner sig den pågældende viden, på denne måde er både underviser og elev afhængige af hinanden for at vinde spillet (s. 145, Winsløw, 2006).

TDS bygger på konstruktivisme, hvor det centrale er elevens evne til at skabe ny viden ud fra gammel viden, og derfor er det især den adidaktiske situation der er interessant, når vi arbejder med denne teori. For at eleven overhovedet meningsfuldt kan tilegne sig viden om et emne, er det vigtigt at den viden, der skal opnås bygger på en konkret situation, der giver mening for eleven. Derfor er det underviserens arbejde at formulere fundamentale problemer, som eleven skal finde svar på, netop den epistemologiske hypotese[17];

disse fundamentale situationer er ifølge Brousseau den vindende strategi der gør, at eleven personliggør viden i den adidaktiske situation (s. 144, Winsløw, 2006).

[17] Al menneskelig viden kan (re)formuleres som svar på fundamentale problemer om en klasse af situationer, og at viden kan tilegnes af en målgruppe, netop når sådanne situationer og problemer er tilgængelige for målgruppen (Winsløw, 2006)

TDS er ikke en model for hvordan der bør undervises i matematik, eller hvordan man forbedre undervisningen i matematik. TDS er et analyseværktøj, som man kan benytte på en undervisningssituation (s. 116, Hersant og Perrin-Glorian, 2005).

Brousseau beskriver 5 faser af undervisningen (s. 138, Winsløw, 2006):

- Devolution (didaktisk situation): Underviseren lægger miljøet frem for eleven.
- Handling (adidaktisk situation): Eleven arbejder med miljøet.
- Formulering ((a)didaktisk situation): Eleven formulerer hypoteser.
- Validering (didaktisk situation): Underviseren evaluerer elevens arbejde.
- Institutionalisering (didaktisk situation): Underviseren fremlægger den officielle viden om emnet.

Der findes nogle generelle konsekvenser ved TDS, som kan medføre, at spillet ikke vindes og eleven dermed ikke personliggøre viden om emnet, jeg vil beskrive 2 af disse, som jeg benytter senere: *Topaze-effekten*: Underviseren udvander opgavens krav, når eleven ikke selv kan finde løsningen. *Jourdain-effekten*: Eleven følger underviserens anvisninger uden at kende det dybere indhold (s. 148, Winsløw, 2006).

4.2 Eksperimentel matematik med brug af TDS

Jeg vil beskrive 2 situationer, hvor TDS er vores analyseredskab og hvor det er eksperimentelt matematik der er den form vi vil arbejde med. På den måde vil de særlige egenskaber ved eksperimentel matematik blive fremhævet, når der arbejdes med TDS.

4.2.1 Pascals trekant i en fundamental situation

Eftersom der i den eksperimentelle matematik lægges stor vægt på egne indfaldsvinkler og løsninger, så er det især i handlings- og formuleringssituationen, hvor eleverne kan arbejde selvstændigt og finde egne metoder til løsning af matematiske problemer. Den adidaktiske situation, står derfor helt centralt, i eksperimentel matematik, men er selvfølgelig afhængig af en god devolution. Jeg ønsker at konstruere en fundamental situation, hvor eleven får mulighed for, ved hjælp af egen erfaring, at personliggøre viden om Pascals trekant. Jeg vil ikke gennemgå et fuldt designet undervisningsforløb, men derimod benytte eksemplet med Pascals trekant, til at fremhæve principper ved eksperimentel matematik, når man benytter TDS.

Jeg vil her gennemgå et eksempel, hvor den eksperimenterende tilgang til matematikken bliver fremhævet, og hvor induktive fremgangsmetoder står centralt, så eleverne får mulighed for at formulere selvstændige formodninger, som er et ønske fra læreplanen. Inden for kernestoffet i læreplanen er der især potenser og ligningsløsning, som eleverne skal opnå viden omkring (læreplan stx mat A, 2006). Jeg har valgt at tager udgangspunkt i udtrykket $(x + y)^n$, som vil give eleverne større kendskab til binomialkoefficienter, potenser, binært tal, kvadrat sætninger, ligningsløsning, mm. Denne undervisning kunne foregå i en 3.g klasse, da eleverne på dette tidspunkt allerede besidder en stor mængde viden om både potenser og ligningsløsning og vil dermed lettere være i stand til at trække på gammel viden, når der skal stilles egne hypoteser. Desuden er udtrykket $(x + y)^n$ utroligt interessant, da man kan udlede utrolig mange ting fra udtrykket, som jeg vil beskrive efterfølgende. Denne store mængde matematik, der kan udledes fra et simpelt udtryk som $(x + y)^n$ er også en af hovedårsagerne til, at jeg har valgt netop dette udtryk.

Denne form for undervisning, hvor man ønsker at arbejde eksperimentelt stiller krav til underviseren om at både devolutionen og institutionaliseringen er godt tilrettelagt, hvis ikke der bliver skabt et miljø, som eleven kan arbejde konstruktivt med, kan eleven hurtig blive forvirret omkring formålet med denne eksperimentelle arbejdsform. Til tider kan det være nok at underviseren blot institutionalisere et matematisk emne til eleven, men andre gange, kan eleverne have særlig problemer med blot institutionalisering og man har derfor brug for andre undervisningssituationer, hvor eleven får et bedre billede af de matematiske begreber (s. 115, Hersant og Perrin-Glorian, 2005). Her vil jeg benytte TDS til at nuancere undervisningen, så handling, formulering og validering vægtes højt, så elevernes selvstændige arbejde med miljøet bliver centralt og underviseres institutionalisering bliver benyttet til at fremlægge den officielle viden på området, som det også et tænkt med institutionaliseringen (s. 139, Winsløw, 2006). Institutionaliseringen af emnet vil på dette tidspunkt ikke være nyt stof for eleverne, da de netop selv har arbejdet med emnet, stillet hypoteser, mm. Eleverne skal have CAS (Computer algebra systemer) værktøj til rådighed, hvilket forudsætter, at eleverne har kendskab med disse værktøjer. Med CAS kan eleverne bruge mere tid på at finde sammenhænge og skabe overblik over emnet, og mindre tid på at udregne tidskrævende mellemregninger, fx *expand*($(x + y)^7$), hvilket CAS kan foretage utroligt hurtigt, men ville være mere tidskrævende, hvis man skulle udregne med papir og blyant, og uden kendskab til Pascals trekant.

Hovedmålet med denne opgave er, at beskrive $(x + y)^n$. Man kan forestille sig, at eleverne får udleveret et ark med en masse påstande, det er derefter elevens arbejde at finde de udtryk der er sande og gerne komme med hypoteser til beviser eller videreudvikle påstandene eller finde egne påstande. Samtidigt kan eleverne også vælge at modbevise nogle af påstandene på arket, fx ved at finde modbeviser. Eftersom det er elevens egne, kreative metoder vi er på jagt efter, er det vigtigt at man ikke beder eleverne om at følge en handlingsplan slavisk, som vil give dem alle svarene, og hvor Jourdain-effekten hurtigt kan optræde. Man kan bede elever om at *udregne udtrykket for n=1,2,3,4* (gerne ved hjælp af CAS):

$$1$$
$$x + y$$
$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Findes der en algoritme til at finde $(x + y)^n$ for vilkårligt n? Det er lige præcis her i handlingssituationen, at eleverne kan være kreative og finde egen metoder, og hvor den eksperimentelle matematik kan vise sig, at være en fordel, da eleverne bruger stor tid på problemløsning af et nyt emne og ikke blot rutinetræning af velkendt stof. Winsløw (s. 176, Winsløw, 2006) beskriver hvorledes Japansk matematikundervisning især arbejder meget med problemløsning i undervisningen, og hvorledes Japan klare sig godt i forhold til andre lande, hvis man kigger på fx PISA undersøgelserne. Desuden er der ikke nogen korrekt fremgangsmetode i denne situation, eleven må anvende alle de muligheder der er til rådighed til at finde en sammenhæng til at beskrive $(x + y)^n$.

Underviseren skal overholde den didaktiske kontrakt, og skal dermed holde tilbage med viden under handlingsforløbet og lade eleven selv tilegne sig den nye viden. Underviseren er desuden forpligtet til, at modificere miljøet, så eleven faktisk lære det der skal læres, fx hvis der er for meget modstand (s. 140, Winsløw, 2006) i systemet. Underviseren står dermed i en paradoksal situation: for at undervise eleven bedst og give de bedste muligheder for eleven, skal underviseren holde tilbage med viden og ikke blot give svaret på alle spørgsmålene. Underviseren skal stille spørgsmål og designe problemstillinger, som eleven selv er i stand til at udforske og finde.

Rækkevidden af elevens nye viden gennem miljøet kalder Vygotsky for nærmeste udviklingszone (s. 169, Winsløw, 2006), det er underviserens opgave at designe og modificere et miljø, der gør det muligt at for eleven at opnå den største mænge nye viden om et emne, som overhovedet er muligt inden for den nærmeste udviklingszone. Den kompleksitet som læring kan have hos elever, vil ikke være en ulempe når eleverne søger egne algoritmer til beskrivelse af $(x + y)^n$, men derimod en fordel; problemer kan opstå, hvis underviseren har sin metode, men eleven har en anden metode, der ikke bliver afprøvet.

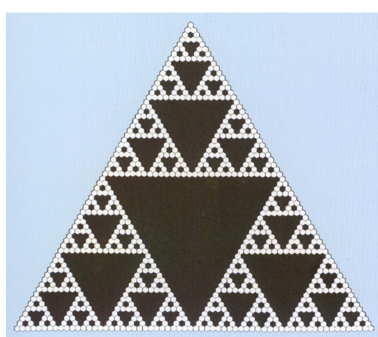
Et andet interessant område ved pascals trekant er beskrivelse af trekanten ved hjælp af binomialkoefficienter. *Er det muligt at beskrive et element i trekanten ved hjælp af binomialkoefficienter?* Dette kunne ligeledes være en påstand på arket, som eleverne får udleveret. Præcis hvordan miljøet skal designes og modificeres for at eleverne opnår denne viden, vil jeg ikke komme ind på, man blot skitsere de områder der kunne være interessant i forbindelse med den eksperimentelle matematik. Udforskning af $(x + y)^n$, hvor binomialkoefficienter skal benyttes kunne være en interessant idé.

Man kan beskrive i koefficienterne Pascals trekant ved hjælp af binomialkoefficienter, som skal institutionalisere sidst i forløbet, hvor n står for rækken (den første række hedder 0) og r er elementet i rækken (det første element hedder 0) i pascals trekant. På denne måde benytter man binomialkoefficienter som en repræsentationsmåde til at beskrive Pascals trekant.

En anden påstand på arket kunne være, om der er nogle sammenhæng mellem summen af koefficienterne i én række i trekanten. Eleverne vil højst sandsynligt også finde frem til, at summen af koefficienterne i rækkerne er lig med 1, 2, 4, 8, 16 … og underviseren kan spørge, hvad summen er for n = 93. Målet er, at eleverne indser, at summen af en række er lig med 2^n.

Følgende spørgsmål introducere primtal i forbindelse med pascals trekant:
Hvis et primtal findes på plads 1 i en række, så går dette primtal op i de resterende elementer i rækken?
Denne påstand er sand, men ikke for element 0 og for det sidst element i rækken.
Spørgsmålene i forbindelse med Pascals trekant har til formål, at benytte forskellige emner fra matematikken, fx binomialkoefficienter, potenser og primtal inden for det samme område, som i dette tilfælde er Pascals trekant. Det er et mål med opgaven, at benytte mange repræsentationer i beskrivelsen af $(x + y)^n$, og netop Pascals trekant er et godt emne til dette, da man kan benytte mange emner og repræsentationer fra matematikken til beskrivelse af trekanten. Mogens Niss (s. 10, Niss, 1999) beskriver, hvorledes elever knytter et matematiks objekt tæt sammen med én enkelt repræsentation eller eksempel og rækkevidden af det matematiske begreb bliver begrænset af selve eksemplet, der er blevet benyttet. Niss fortsætter: ”*… hvis almindelige elever eller studerende skal danne sig en generel forestilling om et matematisk begreb og forstå dets omfang, er de nødt til selv at erfare dette omfang ved at have fået mulighed for at undersøge et bredt spektrum af repræsentative manifestationer af begrebet inden for forskellige domæner*” (s. 12, Niss, 1999). Jeg ønsker i dette eksempel med Pascals trekant netop at benytte så mange eksempler og repræsentationer som muligt, for at undgå at eleverne knytter Pascals trekant med kun en repræsentation.

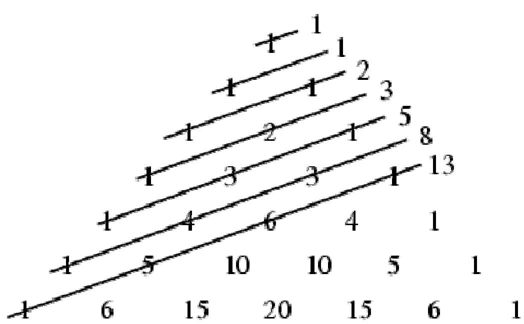
Det binære talsystem dukker op på en yderst æstetisk måde i forbindelse med Pascals trekant:



Denne trekant dukker op, når alle lige koefficienter tegnes sorte og alle ulige koefficienter tegnes hvide. Eleverne vil forhåbentligt indse at matematik også kan være smuk og bliver sikkert hurtigt i stand til at tegne trekanten uendelig stor og finder måske glæde ved netop dette. Her skal underviseren dog være med til at guide eleven væk fra en simpel tegneopgave og hen til matematikfaglig indhold, så man ikke oplever det som ”halen der logre med hunden”.

Underviseren skal designe undervisningen, så eleven lære mest muligt og skal holde tilbage med viden, som jeg beskrev tidligere. De steder hvor eleven ikke er i stand til at tilegne sig den ønskede viden alene, er det, som sagt, underviserens arbejde at modificere miljøet. Men hvordan skal underviseren modificere miljøet? Underviseren skal først indse, at der er for meget modstand i systemet og miljøet derfor ikke er optimalt for eleven, der skal lære. Under valideringsfasen har underviseren mulighed for at evaluere elevens arbejde og kan her vælge en ny devolution, hvor der er mindre modtand i systemet, dette kunne i vores tilfælde være en elev, der ikke kan fortsætte Pascals trekant ud fra ovenstående række, men bliver nødt til at udregne hver række ved hjælp af CAS. Som underviser ønsker man selv, at eleven indser sammenhængen og skal derfor ikke blot fortælle fremgangsmetoden, men når man modificere miljøet, kan underviseren komme til at udvande opgavens krav og man vil dermed have en Topaze-effek. Det er altså en balancegang som underviser at modificere designe/modificere et miljø og undgå Topaze-effekten.

Følgende ligner starten på Fibonacci talrække, er dette Fibonacci talrækken?



Fibonacci talrækken kan ligeledes udledes fra Pascals trekant og dette stiller nogle krav til eleven. Først skal eleven erindre hvad Fibonacci tal er, eller måske finde Fibonacci tal i lærebog eller internet, dernæst benytte viden om Fibonacci tal til at undersøge trekanten.

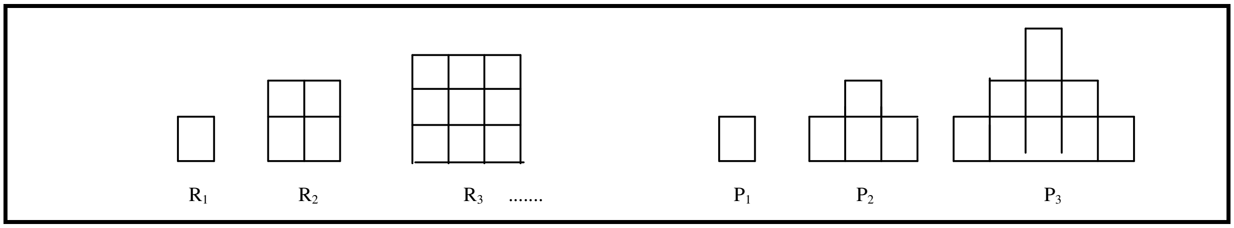
Alle de eksempler som jeg har beskrevet i forbindelse med Pascals trekant kræver, at eleven erindre eller genfinder gammel viden og benytter denne viden til undersøgelse af Pascals trekant. Dette eksperimentelle forløb har netop til formål, at trække på gammel viden og koble flere matematiske emner sammen omkring et emne, som her er Pascals trekant. Dette forløb er dermed ikke emneopdelt, men derimod en sammenblanding af flere matematiske emner, der alle sammen er med til at beskrive $(x + y)^n$.

Alt dette matematik, som vi netop har set på, et udsprunget af $(x + y)^n$, denne følelse kan man som underviser håbe på, at eleverne også vil føle. Der er sket et mindre big bang fra $(x + y)^n$ til binomialkoefficienter, mønstre, Fibonacci tal, primtal, summer osv., osv.

4.2.2 Afgræsning af eksperimentel matematik

Betragt følgende opgave:

Hvad kan man sige, om forholdet mellem R_{200} og P_{200}?



Sfard (s. 160, Sfard, 2000) benytter denne opgave til at illustrere hvorledes elever fra to forskellige matematikkurser, løser denne opgave vidt forskelligt. I Sfards artikel skal men skrive et brev til sin ven, hvor man forsøger at overbevise vedkommende om, at $R_{200} = P_{200}$. Det ene hold vælger et induktionsbevis, som kræver stor matematisk forståelse og det andet hold vælger at formulere brevet i naturligt sprog, og benytter ikke nogle matematiske symboler.

Ovenstående opgave er utrolig velegnet til eksperimentel matematik. Eleverne har mulighed for at benytte gammel viden til at løse opgaven, der er flere måder at gribe problemet an på, opgaven kan illustreres ved flere repræsentationer, man kan benytte CAS til at undersøge problemet og det er i gymnasiesammenhæng forholdsvis lige til at komme med ideer til bevis for at R_{200} og P_{200}.

Jeg vil nu komme med et eksempel, hvor det ikke er oplagt at benytte den eksperimentelle matematik. Betragt følgende opgave, som også kommer fra Sfrads artikel (s. 169, Sfard, 2000):

Hvorfor er minus gange minus lig med plus?

Denne opgave kræver en dybere forståelse for algebra, hvis eleverne skal trække på gammel viden. I min gymnasietid lærte jeg ovenstående som en regel, man ikke skal stille spørgsmål til, men det kan man som matematikere ikke være tilfreds med. I Sfards artikel bliver opgaven løst algebraisk ved at antag, at den distributive lov gælder, dette vil en gennemsnitlig gymnasieelev garanteret ikke komme i tanke om eller noget der komme i nærheden af. Det er vanskeligt at benytte CAS, for ikke at sige umuligt, for hvad skal

man indtaste i systemet? En algebraisk løsning virker til at være den eneste logiske måde, at løse problemet. Derfor vil jeg ikke betragte denne opgave som en god opgave i eksperimentel matematik.
Hvordan kan en underviser overgive det didaktiske miljø til eleven i opgaven om minus gange minus lig med plus, når eleven overhovedet ikke har nogle muligheder for at gennemføre en handlingssituation eller formuleringssituation? Netop disse to faser (handling og formulering) hvor det er elevens selvstændige arbejde med miljøet, bliver stort set umulige i en situation, hvor eleven ikke har mulighed for at foretage nogle induktive initiativer, og derfor vil det kun være en institutionaliseringsfase, at underviseren kan komme med et officielt bevis for minus gange minus er lig med plus. Hvis underviseren holder fast i, at den didaktiske kontrakt ikke skal brydes, og at eleven selv skal komme frem til denne nye viden, så vil der være stor sandsynlighed for enten Topaze-effekten eller Jourdain-effekten.

Matematiske emner, hvor eleven ikke selv har mulighed for at udforske miljøet fra forskellige vinkler og med forskellige repræsentationer, og hvor der intet induktivt element eksistere, vil derfor ikke være et godt eksperimentelt emne.

4.3 Ligheder mellem TDS og eksperimentel matematik

Brousseau har i sin teori en adidaktisk teori, hvor eleven arbejder selvstændigt med miljøet uden indgriben fra underviseren, denne adidaktiske situation kræver noget fra eleven, da en adidaktisk situation vil være umulig, hvis eleven ikke allerede besidder nogle matematiske færdigheder. Netop elevens selvstændige arbejde med miljøet er også i fokus, når man arbejder med eksperimentel matematik. Derfor kan man se ligheder mellem en eksperimentel undervisning og TDS.
Når man læser didaktiske principper i forbindelse med læreplanen, som blev citeret først i rapporten, så ligner det noget som Brousseau selv kunne have formuleret. Læreplanen skriver fx *formulere formodninger ud fra konkrete eksempler,* dette svare til en handling og formuleringsfase i TDS. Der står desuden, at eleven selvstændigt får mulighed for at formulere formodninger, dette er netop en adidaktisk situation. Der er fokus på, at eleven skal kunne udvikle ny viden selvstændigt ud fra gammel viden, hvilket er et princip inden for TDS og for den eksperimentelle matematik.
Derfor mener jeg, at TDS er et godt analyseredskab, når man arbejder eksperimentelt med matematik, TDS indeholder faser, som garanteret alle vil blive benyttet, når man arbejder med eksperimentel matematik i undervisningssammenhæng.

4.4 Definition af eksperimentel matematik med brug af TDS

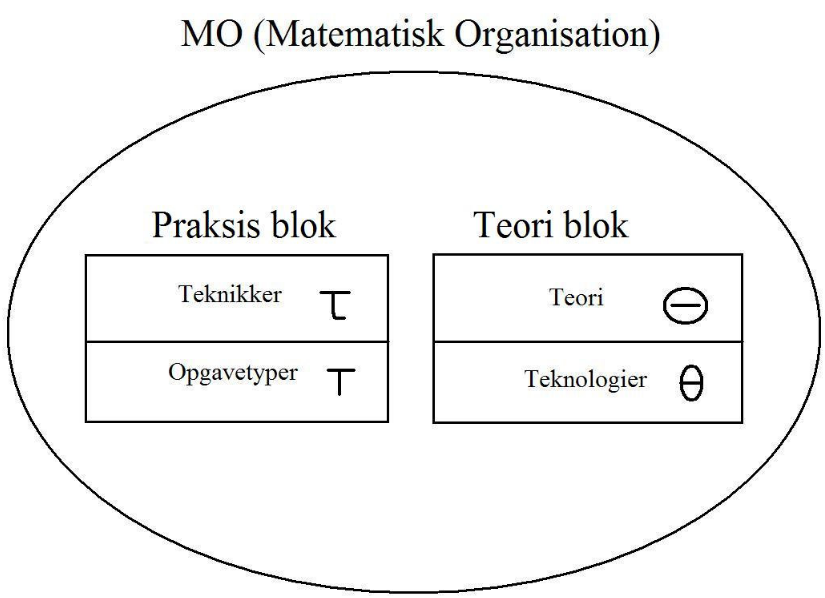
Den adidaktiske situation står helt centralt, hvor eleven kan være kreativ og finde egne fremgangsmetoder til at løse matematiske problemer, derfor er handlingssituationen og formuleringssituationen nøglefaser, hvor eleven lære ny viden bygget på gammel viden. Underviserens rolle er vigtig både til at designe og modificere et miljø som er optimalt for eleven. Eleven skal acceptere at arbejde eksperimentelt og underviseren skal, når det er nødvendigt, holde tilbage med viden, altså skal elev og underviser overholde den didaktiske kontrakt. Underviseren skal desuden udvælge matematiske emner som er hensigtsmæssige i forbindelse med eksperimentel matematik, dvs. emner hvor der kan benyttes flere repræsentationer og hvor eleven selv kan tilføre viden. Modificering og design af miljø skal ske med omtanke, så man ikke oplever uheldige effekter.

5. DEN ANTROPOLOGISKE TEORI OM DIDAKTIK OG EKSPERIMENTEL MATEMATIK

5.1 Den antropologiske teori om didaktik

Den antropologiske teori af didaktik (ATD) ligger sammen med TDS under det epistemologiske program. ATD, som først blev beskrevet af Chevallard, betragter blot matematik, som en menneskelig aktivitet, der beskæftiger sig med en bestemt type af problemer, og er dermed ikke en videnskab der er hævet over andre videnskaber (s. 11, Laursen, 2006).

Inden for ATD optræder de såkaldte matematisk praksis eller matematiske organisationer, som vi fremover vil kalde for MO'er. *En matematisk praksis er en model for hvordan konkret matematisk viden er organiseret i en specifik undervisningssituation* (s. 11, Laursen, 2006). En MO består af en praksis blok og en teori blok. Praksisblokken består af opgavetyper (T), og teknikker (τ), som beskriver hvordan disse opgavetyper skal løses (s. 236, Barbé et al, 2005). Teoriblokken består af teknologier (θ) og teori (Θ), her finder man den diskurs der er nødvendig for at retfærdiggøre og fortolke praksisblokken (s. 237, Barbé et al, 2005). I teknologidelen beskæftiger man sig med teknikker og opgavetyper udefra, og i teoridelen arbejder man med beviser, sætninger, definitioner, mm (s. 12, Laursen, 2006). Herunder ses en punktvis MO, som jeg vil beskrive senere:



ATD benytter følgende faser: Første møde, udforskning, teknik, teknik/teori, institutionalisering og til sidst evaluering

En MO kan være punktvis, lokal eller regional. En punktvis MO er en unik type af problemer i en given institution. Fx kan udregning af grænsen af rationelle funktioner i uendelig i gymnasiet være en punktvis MO (s. 237, Barbé et al, 2005). En lokal MO er en samling af punktvise MO'er, der alle sammen kan beskrives ved hjælp af en fælles teknologi. På samme måde som en samling af punktvise MO'er kan beskrives under en fælles teknologi, så kan en samling af lokale MO'er også beskrives under en fælles teknologi, som vi kalder for en regional MO (s. 238, Barbé et al, 2005).

5.2 Eksperimentel matematik med brug af ATD

Med ATD kan al matematik aktivitet forklares ved hjælp af MO'er. Der findes altid en teknik til et givet problem som Barbé et al. beskriver:

> *The anthropological approach assumes that any "way of working", the accomplishment of any task or the resolution of any problem requires the existence of a technique even if this technique can be difficult to describe or show to others (even to ourselves) (s. 237, Barbé et al, 2005).*

5.2.1 Ny fremgangsmetode i en MO

Jeg skimter mine gamle gymnasium matematik bøger (Carstensen og Frandsen, 2002) og ser hurtigt, at der er en fast fremgangsmetode i bogen, som jeg desuden har oplevet mange andre steder. Hvert kapitel starter med at beskrive en problemstilling, altså en opgavetype, som man ønsker at få svar på, til tider efterfulgt af eksempler. Dernæst kommer der noget teori, hvor flere sætninger bliver bevist og begreber bliver defineret, for til sidst at komme med en teknik til at beskrive vores problem generelt. Dermed bliver rækkefølgen i matematikbogen: Opgavetype, teori, teknik. Den flittige elev vil lære teknikken og teorien udenad og kan dermed gentage forløbet, hvis det skulle være nødvendigt i en eventuel eksamen situation. Evnen til at kunne kopiere indholdet i bogen vil højst sandsynligt betyde, at eleven får en god karakter; om dette skriver Tall:

> *We see some of the "best" students in the country; what makes them "best" is that their coping skills have worked better than most for getting them past the various testing barriers by which we sort students (s. 307, Tall, 1997).*

Lad os betragte følgende opgave: *På hvor mange måder, kan man veksle en tier?*

Jeg ønsker at beskrive en fremgangsmetode, hvor eleverne arbejder eksperimentelt, hvilket her medfører, at der bliver bytte rundt på den måde hvorpå eleverne kommer i kontakt med hhv. opgavetype, teknik og teori. Undervisningen er målrettet mod en gymnasieklasse i 3.g og det faglige mål med undervisningen er kombinatorik, som eleverne skal få viden om ved hjælp af eksemplet med vekslemuligheder.

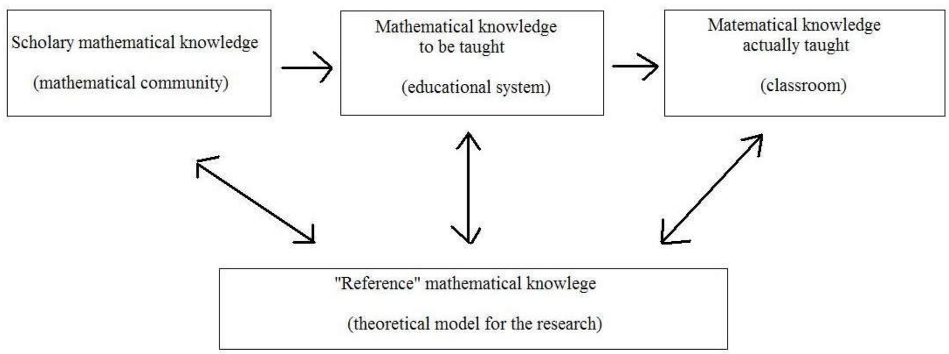
Vi tager udgangspunkt i Bosch et al (s. 4, Bosch et al, 2005) som skriver, ethvert stykke matematisk viden burde beskrives gennem angivelse af hvilke matematiske problemer og teknikker der er involveret og hvilken beskrivelse og retfærdiggørelse der er givet for dette, altså en MO. I tilfældet med vekslemuligheder er spørgsmålet *" hvor mange måder, kan man veksle en tier?"* en opgavetype, som dermed bliver elevernes første møde med emnet. For at fremhæve den eksperimentelle form, vil jeg ikke på dette tidspunkt gennemgå teknik til at løse den givne opgavetype, men derimod benytte rigtige penge, som eleverne får lov at arbejde med for at øge motivation og interesse. Selve teknikken til at løse vores opgavetype skal holdes hemmelig for eleven og det bliver elevernes arbejde at fremlægge teknikker, som man kan benytte til at løse opgavetypen. Udforskningsfasen som Barbé et al beskriver (s. 238, Barbé et al, 2005) bliver dermed en vigtig fase, hvor eleverne sidder med deres mønter foran sig og forsøger at finde den teknik som kan løse opgavetypen. Efter eleverne har udviklet egne teknikker skal der fokuseres på Teoridelen af vores MO. Elven skal søge at finde den teori der beviser teknikken, altså finde bevise for teknikken, eller blot hypoteser. Hvis eleverne ikke er i stand til at finde den pågældende teori, vil underviseren gennemgå den officielle viden under institutionaliseringen. Til sidst i forløbet vil der være en evalueringsfase af hele forløbet.

Dermed vil fremgangsmetoden under et eksperimentelt forløb se således ud: opgavetype, teknik og til sidst teori. I forhold til et standardiseret forløb, som jeg beskrev ovenfor, er der i det eksperimentelle forløb bytte på teknik og teori. Det er netop denne induktive indfaldsvinkle, som er centralt i den eksperimentelle matematik, hvor eleverne først får en opgave, dernæst finde egne teknikker, og til sidst forsøger at finde beviser. Når der arbejdes med opgavetyper og teknikker, så vil teknologidelen, altså den udefra diskurs om teknikker og opgavetyper (s. 12, Lauersen, 2006), være den afgørende faktor for at vi overhovedet kan snakke sammen om opgavetyperne og teknikken.
Jeg påpeger blot dette, da teknologidelen ikke indgår i den rækkefølge, jeg har opstillet, da jeg beskrev fremgangsmetoden for undervisningen.

Denne fremgangsmetode, hvor man først beskriver opgaven, dernæst leder efter teknikken for til sidst at finde bevis er jo netop sådan som matematikere arbejder (Burton, 2004). Leone Burton beskriver hvorledes en samling af matematikere arbejder med matematikken gennem flere dybdegående interviews, her er det klart, at størstedelen af matematikere netop først fokusere på en opgavetype, for derefter at søge teknikker til løsning af opgaven, for til sidst at fremsætte teori der beviser teknikken. Hvorfor bliver denne fremgangsmetode ikke videreført i lærebøger og undervisningssituationer? Hvorfor skal der opstilles et kunstigt forløb, bare fordi man er elev?

5.3 Didaktisk transposition og eksperimentel matematik

Vi så tidligere i læreplanen for matematik A på gymnasium (Læreplan 2006 Stx, niveau A), at eksperimentel matematik nu indgår som et didaktisk princip, og dermed skal undervisere forholde sig til den eksperimentelle matematik, når der undervises. Dette krav om eksperimentel matematik i gymnasiet kommer via den didaktiske transposition, som Barbé et al (s. 241, Barbé et al, 2005) beskriver således:



Eksperimentel matematik kommer fra videnskabsfaget ind til uddannelsessystemet, hvor det dermed kommer ind i læreplanen for mat A på gymnasiet. I læreplanen finder man yderligere faglige mål, kernestof, mm, som er elementer der bør indgå i undervisningen. Man kan betragte alle disse krav i læreplanen som elementer i en MO, og det er matematikeres arbejde at finde sammenhæng mellem opgavetyper, teknikker, teori og teknologi; dette kalder Barbé et al for reference matematical organisation (s. 241, Barbé et al, 2005).

5.4 Definition af eksperimentel matematik med brug af ATD

For at fremhæve elevens egne metoder og kreative fremgangsmetoder bliver udforskningsfasen stillet centralt, hvor eleven søger efter teknikker til at løse en given opgavetype. Dermed skal teknikken ikke introduceres til eleven, men skal derimod være skjult, så det bliver elevens arbejde at finde en teknik til en opgavetype. Efter teknik er fundet af elev eller under institutionalisering, så søger man at finde teori der beviser teknikken. Rækkefølgen i undervisningssituation bliver derfor: opgavetype, teknik og til sidst teori.

Krav i læreplan bliver betragtet som elementer i en MO, hvor det er matematikerens arbejde at finde sammenhæng mellem opgavetype, teknik, teori og teknologi. Heriblandt finder man også den eksperimentelle matematik som et didaktisk princip.

6. DEN KOGNITIVE TEORI AF DIDAKTIK
OG EKSPERIMENTEL MATEMATIK

6.1 Den kognitive teori af didaktik

Den kognitive teori har ikke fokus på selve undervisningssituationen, som man så for det epistemologiske program, der derimod på de kognitive processer som sker i behandlingen og "mødet med matematiske objekter" (s. 4, Lauersen, 2006).

Gascon (s. 45, Gascón, 2003) beskriver 3 retninger inden for den kognitive teori:

Primitiv konceptualisme: Matematisk viden er et system af koncepter, hvor man arbejder med elevers forståelser og misforståelser om de matematiske objekter.

Psykolinguisme: Matematisk viden er et system af koncepter og et sprog.

Proceptualisme: Modelieringen af de kognitive processer, når de skabes og udvikles.

Der arbejdes med forskellige registre inden for den kognitive teori, eller forskellige repræsentationer om man vil. Disse registre beskriver Duval (s. 3, Duval, 2002):

	Diskursiv	Ikke-diskursiv
Multifunktionel *Proces kan ikke laves til algoritme*	Fx naturligt sprog	Fx geometriske figur
Monofunktionel *Proces kan laves til algoritme*	Fx symbol sprog	Fx kartesiske grafer

Den diskursive kolonne består af repræsentationer,der kræver en form for grammatik, hvor den ikke-diskursive kolonne ikke kræver nogen form for grammatik.

Der eksisterer to forskellige transformationer, som Duval kalder for operationer og konversioner (s. 3, Duval, 2002). Operationer bruges når man bliver inden for det samme register gennem arbejdet med et matematisk objekt, konversion bruges når man skifter fra et register til et andet, og ikke ændre det matematiske objekt. Den matematiske kommunikation overordnet set kalder vi for den matematiske diskurs, og denne diskurs er helt central for at der overhovedet kan foregå nogen undervisning. I den kognitive teori beskæftiger man sig derfor med regler på objektniveau og regler på metaniveau. Regler på objektniveau er regler om de matematiske objekter og metaregler er regler for selve samspillet mellem elev og underviser (s. 160, Sfard, 2000).

6.2 Eksperimentel matematik med brug af den kognitive teori

Jeg vil behandle et matematisk eksempel, hvor operation og konversion er udgangspunktet for undervisningen, altså evnen til at blive inde for det samme register og evnen til at kunne skifte mellem registre. Selve eksemplet er en simpel matematisk opgave, som kan beskrives ved hjælp af flere registre, men som har en indbygget fælde.

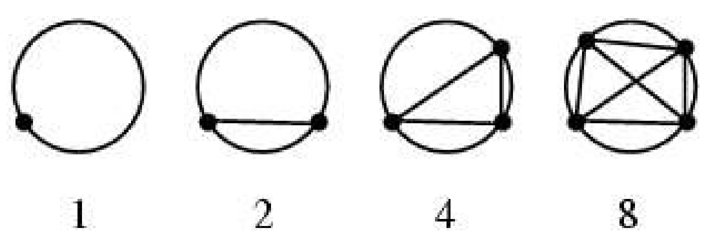
6.2.1 Konversioner i en undervisningssituation

Jeg vil her gennemgå et undervisningsforløb, som er rettet mod en gymnasieklasse i 3.g, hvor CAS er til rådighed. Jeg har valgt at fokusere på funktionsbegrebet, som det faglige mål, men eftersom der arbejdes med eksperimentel matematik og kognitiv teori, er det især skift af repræsentationer, altså konversion, som jeg har valgt at bygge undervisningen op omkring. Jeg har valgt denne indfaldsvinkel af flere grunde, først for at undgå, at elever knytter et matematisk objekt sammen med ét enkelt domæne, som Niss beskriver det i sin artikel (s. 10, Niss, 1999). Derudover beskriver Hughes Hallet hvorledes emner bør gennemgås med princippet om ”The rule of three”

> *One of the guiding principles is the ”Rule of Three,” which says that wherever possible topics should be taught graphically and numerically, as well as analytically. The aim is to produce a course where the three points of view are balanced, and where students see each major idea from several angels (s. 113, Tall, 1997).*

Den sidste grund til, at jeg har valgt at fokusere på konversion, finder jeg hos Winsløw, som beskriver, at konversion i mange hyppigt forekommende situationer er langt vanskeligere for elever end operationer (s. 333, Winsløw, 2004). Dermed vil det klart være en fordel, hvis eleverne bliver i stand til at skifte mellem repræsentationer, når der arbejdes med et matematisk emne.

I en undervisningssituation bliver eleverne udstyret med følgende figur:



Eleverne kan eventuelt være opdelt i grupper, og skal dernæst udforske det matematiske objekt, som i dette tilfælde vil være antallet af områder inden for cirklen, når man forbinder n punkter på en cirkel. Eftersom der især er fokus på konversion, så bliver det gruppernes arbejde, at beskrive udviklingen af områder ved hjælp af forskellige registre.

- Indtegn udviklingen af områder i forhold til antal punkter på cirklen i et koordinatsystem.
- Opstil en tabel, der beskriver ovenstående udvikling.
- Skriv et brev til din ven, hvor du overbeviser ham om, hvor mange områder der vil være på figur 10 (n=10).
- Opstil en funktion O(n), der beskriver ovenstående udvikling.

Den oprindelige figur som eleverne fik udleveret er geometrisk figur, og vil derfor blive placeret i den ikke-diskursive, multifunktionelle kasse i Duvals register, da en geometrisk figur ikke kræver grammatik, og fordi en geometrisk figur ikke kan laves til en algoritme. Indtegning i koordinatsystem, som først punkt ovenfor beskriver, vil derimod være placeret i den ikke-diskursive, monofunktionelle kasse. Brevet til en ven kræver selvfølgelig grammatik og vil være placeret i den diskursive multifunktionelle kasse. Når der skal opstilles en funktion, har eleverne brug for at løse ligninger, hvilket vil blive placeret i den diskursive, monofunktionelle kasse, og dermed vil alle registrene være repræsenteret i opgaven.

I selve opgaven ligger der ikke et krav om at fortsætte figuren og finde antal områder for O(6), dette er "fælden" som jeg omtale tidligere, som jeg gerne så nogle af eleverne selvstændigt kunne finde. O(6) = 31, ikke 32, som vil være det mest oplagte bud. Eleverne vil selvfølgelig ikke tage skade ved at beskrive udviklingen som: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64…, og vil sikkert nå frem til en funktion, der ser således ud: $O(n) = 2^n$. Den indbyggede "fælde" kan meget let findes ved at arbejde inde for det samme register, altså operationer med selve figuren. Den eksperimentelle matematik opfordrer til udforskning og selvstændige indfaldsvinkler med problemet. Et af målene med opgaven er eleverne egen succesoplevelser ved at indse at O(6) = 31. Hvis grupperne overhovedet ikke er i nærheden af at indse dette, så kan underviseren modificere miljøet, så grupperne selvstændigt finder "fælden", dette kan fx ske ved at underviseren melder klar ud, at $O(n) = 2^n$ *ikke* er den rigtige funktion for udviklingen.

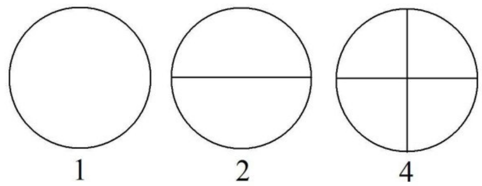
At opstille en funktion der beskriver udvikling er det sværest punkt i opgaven. Funktionen ser således ud:

1/24*n^4-1/4*n^3+23/24*n^2-3/4*n+1

(http://www.research.att.com/~njas/sequences/?q=1%2C2%2C4%2C8%2C16%2C31&language=english)

Til sidst i forløbet bør underviseren institutionalisere den officielle viden og gennemgå samtlige punkter, så alle elever oplever den korrekte besvarelse til punkterne. Punkt 3 hvor man skulle skrive et brev til en ven, vil dog ikke have en korrekt besvarelse, men kan selvfølgelig gøre godt og mindre godt. Den ikke-diskursive kolonne viser sig at være velegnet til arbejdet med den eksperimentelle matematik, da registre heri ikke skal tolkes på en bestemt måde.

Betragt endnu et eksempel, som beskæftiger sig med områder af en cirkel:



Hvad er det maksimale antal stykker, man kan skære en lagkage i med n snit?
Denne opgave minder utrolig meget om den foregående, men vil selvfølgelig have nogle andre repræsentationer. I dette tilfælde vil eleverne garanteret ikke falde i fælden, som forekommer allerede ved 3. snit, men derimod kunne det tænkes, at det bliver problematisk faktisk at skære, så man får det maksimale antal stykker.

6.3 Eksperimentel matematik og diskret matematik

Den diskrete matematik beskæftiger sig med ikke-kontinuerte genstande inden for matematikken og er eksempelvis tællelige mængder. Fælles for de eksempler der er beskrevet ovenfor er den diskrete matematik, som er særdeles velegnet til den eksperimentelle matematik. Det er nemlig muligt at betragte objekterne i matematikken på en lettere måde, end hvis alt var kontinuert. Emner som kombinatorik, talteori, grafteori, mængdelære og spilteori bør derfor klart foretrækkes, hvis der skal foretages forløb med eksperimentel matematik. Objekterne vil være lettere tilgængelige og dermed bedre egent til induktive forsøg og selvstændig udforskning for elever.

6.4 Definition af eksperimentel matematik med brug af kognitiv teori

Ved at benytte mange repræsentationer til at beskrive det samme matematiske objekt, får man en bedre forståelse for objektet. De ikke-diskursive registre er velegnet til arbejdet med den eksperimentelle matematik, da disse ikke skal tolkes på en bestem måde. Ved at arbejde med konversion i eksperimentel matematik, kan man undgå vanskeligheder og øge forståelse for et matematisk begreb.

Den diskrete matematik er velegnet, når der arbejdes med eksperimentel matematik, da objekterne blandt andet kan beskrives med heltal, hvilket gør det nemmere at beskrive objekterne i modsætning til objekter der beskrives ved hjælp af kontinuitet.

7. COMPUTER ALGEBRA SYSTEMER OG EKSPERIMENTEL MATEMATIK

7.1 Computer algebra systemer og instrumenteringsteori

Computer algebra systemer (CAS) dækker over alle programmer, som kan betragtes som et IT-værktøj, herunder avancerede lommeregnere, matematik computer programmer, mm. Samtidigt med den teknologiske udvikling, vil CAS værktøjer selvfølgelig også udvikle sig og brede sig langt ind i undervisningen på alle uddannelsestrin. Disse CAS værktøjer bør være understøttende for elevens læring, måske endda fremmende, men kan meget vel vise sig, at skabe mange problemer på vejen.

Trouche (s. 144, Trouche, 2005) beskriver forskelle mellem en artifact og et instrument:

- En *artifact* er et objekt, som skal hjælpe mennesker med at løse opgaver, fx er en lommeregner eller en algoritme en artifact.
- Et *instrument* er hvad en person skaber ud af et artifact.

Denne skabelse, hvor person og artifact går sammen kalder Trouche for *instrumental genesis* og er afhængig af det givne artifacts muligheder og begrænsninger, samt personens viden og arbejdsmetoder. *Instrumentation* er artifactets effekt på personen, hvor personen fx lære nye metoder til løsning af andengradsligninger. *Instrumentalization* er personens effekt på artifactet, fx tilpasning af menuer og knapper.

Det tager tid at sætte sig ind i et CAS værktøj, og dette kan give problemer. Eleven skal både have overblik over det matematikfaglige stof i en opgave og kende CAS værktøjet tilstrækkeligt, til at få et tilfredsstillende resultat, når der arbejdes med CAS i en undervisningssituation. Derudover opstår der nogle flere problemer i forbindelse diskursen om og med CAS værktøjet i undervisningen, som Artigue meget fint beskriver:

> *A discourse has to be constructed for instrumented techniques. Once more difficulties are obvious because this discourse will call up knowledge which goes beyond the standard mathematic culture (s. 261, Artigue, 2002).*

Inden for undervisningen har man brugt for en fast diskurs, som både underviser og elev kan få gavn af, hvis denne diskurs ikke eksisterer, eller der ikke bliver tænkt nærmere over den, så vil kommunikationen blive dårligere mellem elev og underviser, hvis man ikke kan formulere sig præcist. Hvis end ikke underviserne på uddannelsesstedet benytter den samme diskurs, så vil eleverne blive udsat for forskellige diskurser fra forskellige undervisere, som kan skabe forvirring.

Der kan ligeledes opstå nogle uheldige konsekvenser ved brugen af CAS, som Winsløw beskriver (s. 278ff, Winsløw, 2003), som jeg kort vil omtale her:

- *Blackbox-effekten*: Information og mellemregninger der går tabt ved at benytte CAS.
- *Jourdain-effekten*: Eleven følger underviserens anvisninger uden at kende det dybere indhold.
- *Animator-effekten*: Fokus ligger på brug af CAS frem for matematikfaglighed.
- *Partikularitetsproblemet*: Induktiv tankegang frem for deduktiv tankegang.
- *Motivations-effekten*: Elever benytter CAS til at springe over hvor gærdet er lavest.

Ovenstående har jeg beskrevet nogle uheldige konsekvenser ved brug ad CAS, men vil nu beskrive fordele ved brug af CAS i undervisning: Her kan nævnes, CAS' evne til at illustrere grafer mm, som kan være med til at give en bedre forståelse for det matematiske objekt. Ofte kan man ligefrem vende og dreje figurer, som man ønsker og ændre på variable og straks se resultatet, desuden skal man ikke glemme CAS' evne som kontrol for elevens egne beregninger. Efter eleven har fundet det bestemte integral i en opgave, så kan CAS benyttes som kontrol for dette resultat, hvis elevens eget resultat og CAS resultatet stemmer overens, så er der god chance for, at der er regnet rigtigt.

7.2 Eksperimentel matematik og CAS

Det helt unikke ved at benytte CAS i eksperimentel sammenhæng er objekterne i matematikken kan undersøges og findes ved hjælp af CAS. På denne måde kommer matematikken nærmere de resterende naturvidenskabelige fag. Fx benytter biologen sig af et mikroskop til at opdage encellede organismer, fysikeren måler baggrundsbestråling med en Geigertæller og astronomen ser på stjernerne gennem en kikkert. På samme måde benytter matematikeren sig af CAS til at se topologien for 3 dimensionale figurer. Denne mulighed for at opdage og arbejde med de matematiske objekter er et af de helt centrale aspekter ved den eksperimentelle matematik.

Ovenfor beskrev jeg nogle konsekvenser ved brugen af CAS, hvor partikularitetsproblemet netop er med til at ændre indfaldsvinklen til matematikken, til en mere induktiv tankegang. I den eksperimentelle sammenhæng vil man nok ikke kalde dette for et problem, men derimod et mål. Det er netop den induktive, kreative indfaldsvinkel som man prøver at styrke med den eksperimentelle matematik, og CAS kan generere rigtig mange eksempler på kort tid, som er med til at give eleverne et billede af sammenhæng både visuelt, symbolsk og numerisk. Den deduktive tankegang skal ikke glemmes, når man arbejder med matematikken, her kan CAS også være et deduktivt værktøj, som fx kan indgå i et bevis.

Hvis eleverne *kun* arbejder induktivt pga. deres nye CAS værktøj, altså partikularitetsproblemet, så er det underviserens arbejde at designe et miljø, så matematikkens deduktive væsen også bliver stimuleret hos eleverne, og gerne med brug af CAS.

Jeg vil beskrive en undervisningssituation, som er rettet mod en vilkårlig klasse i gymnasiet, og som har til formål at fremhæve matematikkens deduktive styrke ved hjælp af Fermat store sætning.
En metode til at fremhæve den deduktiv tankegang i matematik ved hjælp af CAS, vil være ved at stille en opgave, hvor eleverne kan komme med tusindvis af eksempler på at en påstand er sand, og hvor der eksisterer et modeksempel, som eleverne ikke har kunnet finde. Eller i forbindelse med et forløb, hvor eleverne har en TI83er til rådighed, introducere eleverne til Fermats store sætning og dernæst fortælle at du som underviser har fundet 2 modeksempler, nemlig

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \qquad \text{og} \qquad 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

På TI83eren vil disse to ligninger være sande, da TI83eren har en begrænset mængde RAM og der arbejdes med særdeles store tal, som resultere i, at TI83eren runder op. Dernæst bliver det elevernes arbejde at finde ud af, om disse to ligner faktiske er sande. Opgaven kan løses forholdsvis enkelt, når man tænker sig om (arbejder deduktivt). Den første ligning kan modbevises ved at besidde viden om potenser af lige og ulige tal. Denne viden medfører straks, at venstresiden af ligningen må være ulige og højresiden af ligningen må være lige. Hvis eleverne begynder på at udregne nogle af udtrykkene, så vil de først for alvor rode sig ud i problemer. Dette kan være med til at stimulere den deduktive tankegang, samtidig med men benytter CAS værktøjer i en undervisningssituation.

Ved at benytte CAS i undervisningen, så overlader man nogle af de tunge regnefærdigheder til CAS og dermed kan undervisningen foregå på et højere abstraktionsniveau. Hvis man for alvor beslutter sig for at benytte CAS på et uddannelsessted, så bør opgaverne der bliver stillet i eksamenssammenhæng selvfølgelig også være på et højt abstraktionsniveau. Man vil med brug af CAS kunne overlade regnearbejdet til CAS og fokusere på mere overordnede matematiske principper, fx sammenhæng og hypoteser til bevis, mønstre og udforskning af begreber, netop de principper som Borwein beskriver i sin artikel (s. 76, Borwein, 2005).

7.2.1 Polynomier af grad større end to og CAS

Jeg vil her beskrive et undervisningsforløb, hvor undersøgelser af polynomier er det matematisk objekt, som eleverne skal tilegne sig viden om. Jeg har valgt netop dette emne, da der kan opstå flere problemer ved at gengive polynomier i forbindelse med CAS.

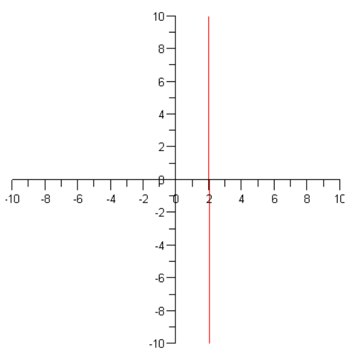
Jeg tager udgangspunkt i en undervisningssituation i gymnasiet 3.g., hvor TI89eren er CAS værktøjet til rådighed. Elverne skal som sagt have kendskab til egenskaber ved polynomier og skal arbejde udforskende og eksperimentelt med emnet. I første del af opgaven går ud på at beskrive nogle polynomier og anden del går på at finde nogle polynomier, som besidder nogle bestemte egenskaber.

Indtegn polynomiet $f(x) = x^3 - 9x^2 - 214x - 456$ *i et koordinatsystem og find nulpunkterne for polynomiet ved hjælp af grafen.*

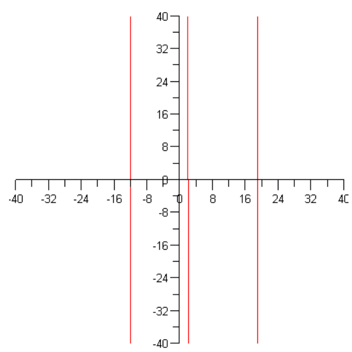
Ved at benytte CAS til denne opgave løber man hurtigt ind i et problem pga. vinduet der benyttes i TI89eren. Artigue beskriver det selv samme problem således:

> *When students use function graphs in a computer environment (or a graphic calculator), they are faced with the fact that a function graph is "window-dependent" and they have to develop specific "framing schemes" in order to cope efficiently with this phenomenon (s. 250, Artigue, 2002).*

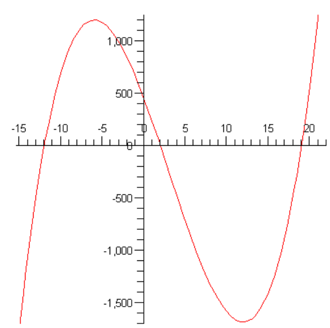
Det er netop i denne situation, at CAS værktøjet kan volde problemer, da man vil få et koordinatsystem, med en lodret linje, som til forveksling ligner x=2, se *figur 1*. Eleven kan vælge at zoome ud et par gange og vil opleve 3 lodrette streger i henholdsvis x=-12, x=2 og x=19, se *figur 2*. Hvis eleven ikke besidder en grundlæggende viden om udseende af grafen, så kan både figur 1 og 2 være tilfredsstillende for eleven.



figur 1



figur2



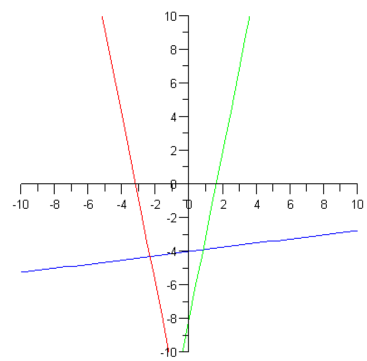
figur 3

Der skal flere tilpasninger til, før man får et vindue, som tydeligt viser alle egenskaberne ved grafen, *figur 3*, Hvordan kan eleven vide, at grafen ikke har endnu et nulpunkt langt ude på x-aksen et sted? Hvis eleverne ønsker et benytte CAS til at finde en graf for udtrykket, så er det helt nødvendigt, at kender nogle egenskaber ved polynomier, fx hvor mange rødder et n'te gradspolynomium maksimalt kan have. Det er selvfølgelig ingen hindring at man gennemfører et eksperimentelt forløb som dette for at belyse polynomiernes egenskaber. Hvis eleverne derimod besidder viden om polynomier, så kan "factor" funktionen hurtigt afsløre nulpunkterne og det blive lige så let at finde monotoniforhold, tangenter, integraler mm, som første del af opgaven kunne forløbe med.

7.2.2 Eksperimentel opgave med CAS

Jeg vil beskrive endnu et forløb, som Trouche (s. 141, Trouche, 2005) også beskriver i sin artikel. Lad der være givet nogle bestemte egenskaber ved en graf og find nu den graf, der opfylder egenskaberne, dette er ideen med denne opgave.

Find en graf, som har de tre rette linjer, som tangentlinjer, hvor linjerne er givet som:
$5x-8$, $-5x-16$ og $(1/8)x-4$.



I Trouches artikel beskriver han, hvorledes elever der blev stillet for denne opgave, forsøgte at tegne en tilfældig parabel der ser ud til at opfylde betingelserne, og dernæst zoome ind ved hjælp af CAS, for at se om linjerne nu virkelig var tangenter til parablen. Denne opgave indeholder mange gode principper, som man kan arbejde med i et eksperimentelt miljø. Selve opgaven har ikke en fast fremgangsmetode og eleverne har mulighed for at udforske opgaven med CAS, hvor det netop bliver væsentligt at modbevise parabler, der ikke opfylder betingelserne. Desuden har man fordelen ved at man med CAS kan foretage mange parabler hurtigt, ved at ændre på variablerne i funktionen for parablen.

Med introduktionen af CAS til matematikken er matematikken automatisk blevet mere eksperimentel, da man kan kontrollere resultater og ændre variabler, for at se hvilken ændring det har på en graf, som vi så med ovenstående opgave. Ved pludselig at få store mængder at data til rådighed, vil man have lettere ved at se sammenhænge i matematikken, man vil finde relationer og mønstre og netop den induktive fremgangsmetode et let med CAS.

7.3 Definition af eksperimentel matematik med CAS

Med CAS til rådighed får man mulighed for at finde og undersøge de matematiske objekter på nogenlunde samme måde, som i de resterende naturfag. CAS giver mulighed for at undersøge store datamaterialer, som kan give en bedre forståelse og overblik, samt mulighed for at dreje og vende figurer efter lyst. Man kan ændre variable hurtigt og arbejde induktivt og kreativ. Med CAS til rådighed kan den eksperimentelle matematik forgå på et højere abstraktionsniveau, da CAS let kan foretage de mere tidskrævende udregninger. Med introduktionen af CAS til matematikken er matematikken automatisk blevet mere eksperimentel.

8. KONKLUSION

Ved at arbejde eksperimentelt med matematik i gymnasiesammenhæng, ønsker man at fremhæve nogle særlige kvaliteter i matematikundervisningen: elevens selvstændige udforskning med et givet miljø bliver særdeles fremhævet, hvor kreativitet, induktive arbejde, opdagelser og selvstændig erfaringsdannelse med matematiske begreber står centralt. Eleven skal ifølge læreplanen udvikle innovative evner, dette kan blandt andet kan ske ved at undersøge formodninger og finde egne formodninger om et matematisk emne, som kan blive beviset eller modbevist i undervisningen.

Den diskrete matematik er særdeles velegnet, hvis der skal udvælges emner til arbejdet med eksperimentelle matematik, da diskret matematik indeholder emner, der er lette at beskrive og undersøge i modsætning til kontinuerlige begreber, der kan volde flere problemer i eksperimentel sammenhæng. Matematiske begreber, som ikke egner sig til at blive beskrevet ved flere repræsentationer, og hvor eleverne ikke har mulighed for at trække på gammel viden, vil ikke være oplagte emner i arbejdet med eksperimentel matematik, her beskrev jeg opgaven, om minus gange minus lig med plus? Denne opgave kræver en specifik algebraisk forståelse før man kan arbejde konstruktivt med opgaven, dette gør den ikke velegnet som opgave i eksperimentel matematik.

Inden for den antropologiske teori om didaktik kan man, ved hjælp af den eksperimentelle matematik, vælge at ændre fremgangsmetode, så opgavetype først bliver introduceret til eleven, hvorefter teknikken til løsning at opgavetypen, skal findes og afprøves af eleven selv. Dermed skal den officielle teknik til løsning af opgaven holdes skjult for eleven, for først til sidst at blive beskrevet under institutionaliseringen.

Til sidst skal nævnes CAS som et helt central værktøj i arbejdet med eksperimentel matematik, som Borwein (s. 76, Borwein, 2005) også beskriver i sin artikel om eksperimentel matematik. CAS kan give utrolige store mængder data til rådighed på kort tid, dette giver et overblik og forståelse, som ikke er muligt uden CAS, netop egenskaber der er til stor gavn, når der arbejdes eksperimentel med matematikken.

8. LITTERATURLISTE

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7**, 245 – 274.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. og Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* **59** no. 1 – 3, 235 – 268.

Bloch, I., Schneider, M. (2004). A various milieu for the concept of limit: From determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof. Artikel præsenteret ved ICME 10, se http://www.icme-organisers.dk/tsg12

Borwein, J. M. (2005). The experimental mathematician: The pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **10**, 75 – 108.

Bosch, M., Chevallard, Y. og Gascón, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. Artikel præsenteret ved CERME, se http://cerme4.crm.es/ group 11.

Burton, L (2004). Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics, Springer.

Carstensen, J., Frandsen, J. (2002). Mat 3A, Systime.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean J. for Research in Mathematics* Ed. **1** no. 2, 1 – 16.

Gascón, J. (2003). From the Cognitive to the Epistemological Program in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the learning of mathematics* **23** no. 2, 44 – 55.

Hersant, M., Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics* **59** no. 1 – 3, 113 – 151.

Hughes Hallett, D. (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes No* **19**,
121 – 126.

Laursen, N. N. (2006). Fire franske teoridannelser indenfor matematikkens didaktik.

Niss, M. (1999). Matematikdidaktisk forsknings karakter og tilstand. Upubl. Oversættelse af artikel i *Education Studies of Mathematics* **40**, 1-24.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning* **2** no. 3, 157 – 189.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. A. J. Bishop et al (red.), *International handbook of Mathematics Education,* 289 – 325, Dordrecht.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environment. D. Guin et al. (red.) *The didactical challenge of symbolic calculators,* 137 – 162. Berlin, Springer.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics* **52**, 271 – 288.

Winsløw, C. (2004). Hvad skal vi med matematikdidaktik? *K. Schanck (red), Didaktik på kryds og tværs,* DPU Forlag Kbh. 2004, 325 – 343.

Winsløw, C. (2006). Didaktiske elementer, en indføring I matematikkens og naturfagenes didaktik. Biofolia, 1. udgave.

BILAG B

Hvad karakteriserer eksperimentel matematik?

Nynne Maria Afzelius og Julian Tosev

Et forsøg på karakterisering af XM

Nynne Maria Afzelius, Nørre Gymnasium, nynnemaria@12move.dk
Julian Tosev, Frederiksberg Gymnasium, Julian@Tosev.dk

En klar definition på, hvad eksperimentel matematik er, er ikke umiddelbart til at finde. Men der findes forskellige bud på at indfange det. På nettet findes en række beskrivelser, men der hersker hverken på nettet eller i litteraturen enighed om præcis hvad eksperimentel matematik er. Interesserede kan nederst finde henvisninger til en række materialer og links, hvor man kan læse videre. Mange af de definitioner der angives stiller computeren centralt i arbejdet. Der eksisterer dog en række fælles egenskaber ved de forskellige beskrivelser af den eksperimentelle matematik, som kan indsnævres til fire punkter: Kreativitet, erfaringsdannelse, matematiske objekter og bevis og falsifikation. Disse fire punkter udgør tilsammen en karakterisering af den eksperimentelle matematik - det skal dog ikke opfattes som en egentlig definition, men mere som en beskrivelse af visse karakteristika ved området.

Kreativitet

En vigtig egenskab ved eksperimentel matematik er den store fokus på elevens kreativitet og elevens egne indfaldsvinkler til matematiske problemer. Udforskning, leg og afprøvning bliver stillet helt centralt, så eleven får erfaring med at anvende flere løsningsmetoder til et matematisk problem og dermed ikke kun arbejder med én given løsningsmodel. Det er et mål, at eleven udvikler og finder egne fremgangsmetoder til at løse opgaver, f.eks. gennem induktive forløb. Dermed bliver eleven i stand til at formulere generelle matematiske betragtninger om en given problemstilling.. Fremgangsmetoderne skal udvikles på baggrund af viden som eleverne allerede har, og derfor er det nødvendigt, at eleven på forhånd har matematisk erfaring med et emne.
En udfordring for mange lærere er at acceptere en kreativ proces, hvor eleven har ret til at lave fejl og prøve sig frem. Historien om en psykologiprofessor, der ville undersøge den professionelle matematikers arbejdsmetode illustrerer dette. Psykologiprofessoren satte en højt respekteret matematiker til at løse et problem. Matematikeren skrev nogle ting ned, viskede noget ud, skrev noget nyt, viskede ud og til sidst vidste han et resultat. Psykologiprofessoren ville, at han ikke viskede noget ud. Professoren var lige så meget interesseret i det, der ikke var rigtigt. Det var jo det der viste vejen til at nå målet. Der er alt for ofte en for stærk adskillelse mellem matematikerens kreative proces og fremvisningen af det færdige produkt. I arbejdet med den eksperimentelle matematik skal man være villig til at give rum og plads til processen og den kreative udfoldelse; uanset om eleverne starter langt fra målet.

Erfaringsdannelse

Gennem arbejdet med eksperimentel matematik er det et fundamentalt mål, at eleven bliver i stand til at opdage mønstre og sammenhænge i matematikken. Denne opdagelse bliver mulig gennem erfaring, da dette giver overblik og kontrol med det matematiske emne, og derved bliver eleven i stand til at finde både mønstre og sammenhænge i matematikken. Disse mønstre og sammenhænge kan desuden optræde i flere repræsentationer, f.eks. både algebraisk og geometrisk. Formålet med erfaringsdannelsen er at opnå matematisk indsigt og intuition vha. eksperimentel matematik. Denne matematiske indsigt og intuition kan f.eks. hjælpe en med at angribe et matematisk problem på en ny måde. Det er f.eks. beskrevet i Leone Burtons bog "Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning" (Burton, 2004)

Matematiske objekter

Da de matematiske objekter ikke umiddelbart er til at tage og føle på, bliver man nødt til at beskæftige sig med dem gennem forskellige repræsentationer. Det er en pointe i den eksperimentelle matematik, at man arbejder med de matematiske objekter på en række forskellige måder. Her kommer blandt andet computeren eller lommeregneren ind i billedet, idet den gør det muligt at manipulere med objekter og afprøve ideer hurtigt og let. Dette gør objekterne til nogle størrelser, som kan undersøges på næsten samme måde, som det er gældende inden for de andre naturvidenskabelige fag – man kan konkret eksperimentere i matematik! Man kan også forestille sig, at man benytter materialer som pap, f.eks. til at undervise i proportionalitet ved hjælp af puslespils lignende opgaver.

Ved at lade eleverne arbejde med matematiske objekter, og ved at lade dem håndtere dem selv i et utal af forskellige situationer og repræsentationer, letter man processen med at personliggøre den matematiske viden

Bevis og falsifikation

Beviser har en central placering inden for matematikken. Inden for den eksperimentelle matematik er det et mål, at beviser ikke blot bliver udenadslære fra en bog, men at elever selv forsøger at finde hypoteser til påstande og dermed selv finder beviser. Dette kan ske ved at eleven begynder at se sammenhænge i matematikken, som kan afprøves og testes. Man kan komme med ideer og forslag til beviser eller ligefrem modbevise hypoteser. Falsifikation er netop denne proces, hvor man modbeviser - eller gendriver - et bevis eller en hypotese. Ideen med denne proces er, at elever prøver at komme med hypoteser, som dernæst bliver falsificeret, dette medfører forhåbentligt nogle bedre hypoteser, som så igen bliver falsificeret osv. Derved får eleven selv indflydelse på beviser og kan komme med egne indfaldsvinkler og hypoteser.

Helt generelt må man sige, at der i eksperimentel matematik er stor fokus på det induktive, kreative, afvekslende og selvstændige, som forhåbentlig kan være med til at motivere eleverne, og give dem en dybere forståelse for de matematiske objekter og samtidig give en større interesse for faget. Som matematiker kan man have stor begejstring ved faget, og opleve mange forskellige facetter fascinerende ved netop matematik. Eksperimentel matematik kan være en af vejene til at vise eleverne, hvorfor matematik er det hele værd.

Yderligere litteratur

Interesserede læsere kan f.eks. fortsætte læsninger her:

Borwein, J. M. 2005. The experimental mathematician: The pleasure of discovery and the role of proof. International Journal of Computers for Mathematical Learning 10, 75 – 108.

Burton, L.2004. Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning. Springer.

Skovsmose, Ole. 2000, Landscapes of Investigation, Center for Research in Learning Mathematics, Pub. no. 20

Grenier, Denise og Godot, Karine, 2004, Research situations for teaching: a modelling proposal and example, ICME 10.

BILAG C

Taksonomi for sofaproblemet

Jeg vil ikke beskrive hvad der kræves for at få hver eneste karakter på karakterskalaen, men derimod opdele karakterskalaen i 3 dele:

Lav svarer til karaktererne: -03, 00 og 02

Middel svarer til karaktererne: 4 og 7

Høj svarer til karaktererne: 10 og 12.

Herunder vil jeg beskrive, hvad der kraves af opnå hhv. lav, middel og høj:

På den ny karakterskala vil min vurderingen lav dække over følgende:

Den tilstrækkelige Præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål. Den utilstrækkelige præstation, der ikke demonstrerer en acceptabel grad af opfyldelse af fagets mål. Den ringe præstation Karakteren gives for den helt uacceptable præstation. Kendetegnende for elever der modtager karakteren lav, er:

- Hypoteserne der bliver stillet er taget ud af sammenhæng.
- Hypoteser viser ikke en fremgang, den sidste hypotese er ikke stærkere end den første.
- Hypoteserne er lette at modbevise for ligestillede elever og uden meningsfuldt indhold.
- Eleven benytter kun en repræsentation og selv i denne er eleven fagligt svag.
- Eleven har svært ved at kommunikere matematik både sprogligt og mundtligt.
- Der bliver brugt få matematiske begreber og termer.
- Eleven sidder ofte fast i den kreative, selvstændige proces.
- Eleven benytter ingen eller få hjælpemidler og de benyttes ikke hensigtsmæssigt.
- Et bevis svarer til at flytte papirklip gennem hjørnet.
- Argumentationer er upræcise og forkerte.
- Der bliver benyttet meget lidt mobiliseret viden.

På den ny karakterskala vil min vurderingen middel dække over følgende:

Den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler.

Den jævne præstation, der demonstrerer en mindre grad af opfyldelse af fagets mål, med adskillige væsentlige mangler.

Kendetegnende for eleven der modtager karakteren middel, er:

- Hypoteser bygger svagt på erfaring med problemet.
- Hypoteser varierer, nogle er stærke andre er svage.
- Eleven opstiller få stærke hypoteser, som andre ligesindede ikke kan modbevise.
- Eleven benytter primært en repræsentation, og dette gøres godt.
- Der kommunikeres fint både sprogligt og mundtligt med enkelte fejl.
- Eleven er god til at benytte matematiske begreber og termer.
- Eleven er god til at udforske problemstillingen og har mange gode ideer.
- Eleven behersker brugen af hjælpemidler.
- Et bevis svare til flyt med udklippet figur samt få fine argumenter.
- Der trækkes til tider på mobiliseret viden.

På den ny karakterskala vil min vurderingen høj dække over følgende:

Den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler. Den fortrinlige præstation, der demonstrerer omfattende opfyldelse af fagets mål, med nogle mindre væsentlige mangler.

Kendetegnende for eleven der modtager karakteren høj, er:

- Hypoteser er velovervejet og viser indsigt med problemstillingen.
- Hypotesearket viser en klar fremgang og indeholder primært stærke hypoteser.
- Ingen eller meget få hypoteser kan modbevises af ligesindede.
- Eleven benytter selvstændigt flere repræsentationer.
- Der er generelt god kommunikation sprogligt og mundtligt.
- Eleven er god til at benytte matematiske begreber og termer.
- Udforskningsprocessen bygger på matematiske refleksioner med problemstillingen.
- Eleven behersker brugen af hjælpemidler.
- Eleven gennemfører stort set formelle matematiske beviser.
- Eleven behersker brug af mobiliseret viden, nar det er nødvendigt.

Bedømmelse af 2 opgaver

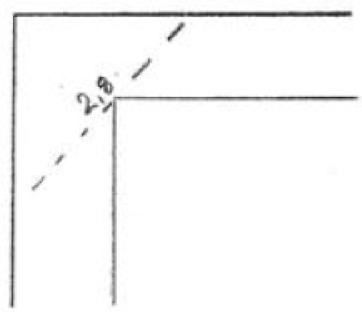
Jeg har valgt at betragte 2 rapporter, som begge fylder 2 sider. Jeg vil bedømme rapporterne og give dem en karakter bygget på ovenstående taksonomi. De pågældende elever vil ud over deres rapporter, som kan læses herunder, blive vurderet på deres hypoteseark, samt handlinger og formuleringer under modulet, der ikke er tilgængeligt for læseren. Alle aspekter er vigtige, når der skal vurderes i et eksperimentelt forløb.

Rundt om hjørnet

Problemformulering:
En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med bredde 1 og passerer et hjørne på 90°.
Hvilken form har den genstand, der dækker det største gulvareal, og som kan passerer hjørnet?

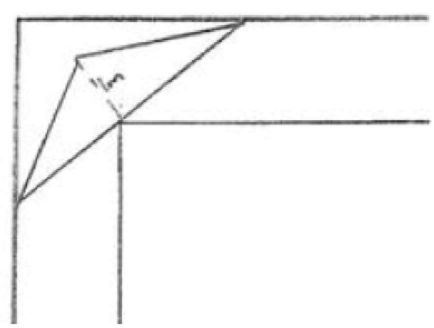
Hypotese 1:
Hvis sofaen var en streg(ingen bredde) ville længden være max. = 2,82m.

Vi regner os frem til at sofaen vil have en længde på 2,8m.
$2^2 * 2^2 = x^2$
$8 = x^2$
$2,8 = x$
Nu ved vi at sofaen max skal have en længde på 2,8, og ved rotation kan sofaen godt skubbes rundt om hjørnet med en længde på 2,8



Hypotese 4:
Trekant med grundfladen 2,8 og højden 1 ville godt kunne passere.

Vi finder nu ud af at arealet af denne trekant har et areal på 1,414 m^2
2,8: 2= 1,4
ud fra en model af papir med de nøjagtige mål, ser vi at det godt kan lykkes at få sofaen rundt om hjørnet.



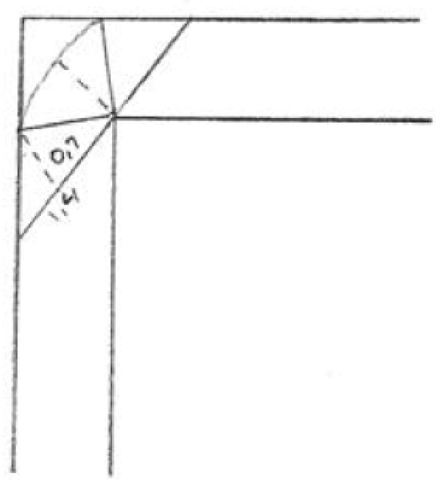
Hypotese 6:
En figur bestående af 2 trekanter og ¼ af en cirkel(radius 1m) vil have største areal.

Nu finder vi ud af at ved at lave 2 trekanter en cirkel og en stadig en længde på 2,8 har et større areal. Så nu er sofaen blevet større og kan stadig komme rundt om hjørnet med samme prinsip
$½^2 * \Pi = 0{,}785988$ (som er cirklens areal)

$1{,}4 = \frac{\Pi}{4} = 2{,}1854$

$1{,}4 * 0{,}7 = 0{,}98$
$1^2 * \Pi = \Pi : 4 = 0{,}785 = 1{,}765\ m^2$

Vi lavet også en model af papir af denne model. Hvilket godt kunne lade sig gøre.



7.1 Vurdering af første opgave

Hypoteserne er formuleret med viden om problemet, der tages først udgangspunkt i en sofa uden bredde, som må være den største længde muligt, der kan passere hjørnet. Derefter benyttes denne viden til at stille næste hypotese om en ligebenet trekant med siderne 1, 1 og 2,8. Den sidste hypotese bygger videre på den anden hypotese og dermed viser eleven en fremgang i hypoteserne. Desværre er elevens anden og tredje hypotese ikke sande, det er ikke muligt for disse at passere hjørnet. Især den sidste hypotese burde eleven kunne se ikke holdt, især hvis eleven virkelig klippede figuren og forsøgte at flytte den gennem hjørnet, som der beskrives. Med få ændringer ville den anden hypotese blive en fin hypotese, som eleven ville kunne arbejde videre med. Dermed har eleven 1 stærk hypotese, en forkert, og en hypotese, der med få ændringer også er stærk. Eleven benytter især 2 repræsentationer, den grafiske og symbolholdigt sprog, når der skulle udregnes arealer. Der laves en del fejl og upræcisheder, når der arbejdes med arealudregninger. Fx skriver eleven: $2^2 * 2^2 = x^2$. Der bor stå + i stedet for * og eleven måtte gerne fortælle, at Pythagoras lærersætning benyttes. Desuden skrives: $x^2 = 8 => x = 2,8$, hvilket er upræcist. Sidst ser man, at eleven i en udregning skriver: 0,785 = 1,765 m^2, hvilket er helt forkert. Brugen af symbolholdigt sprog er eleven dårlig til. De geometriske betragtninger er også noget jævne. Den skriftlige kommunikation er til at forstå, men noget forvirrende, de matematiske begreber og termer bruges lidt tilfældigt. Eleven er god til at udforske problemstilling og arbejder målrettet, hvilket ses i udviklingen af hypoteserne. Der bliver benyttet klip som hjælpemiddel, hvilket eleven ikke udnytter optimalt, eftersom eleven ville indse, at især tredje hypotese ikke var sand. Et bevis svare til flyt af papirklip og få upræcise argumenter. Den mobiliserede viden svare til arbejde med arealbestemmelse af cirkler og trekanter.

Sammenfattes disse overvejelser med ovenstående taksonomi, så vil denne elev blive bedømt til at ligge mellem lav og middel. Jeg vil for dette stykke arbejde give karakteren 4. Hvis eleven arbejdede godt under modulet, så ville denne karakter stå fast, men hvis der var alt for mange mangler ville jeg lade karakteren falde til 02.

Rundt om hjørnet

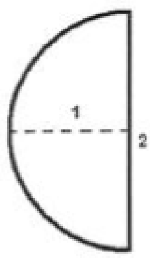
Formål:

Formålet er at finde den genstand med det største gulvareal som kan passere et hjørne på 90° i en korridor med bredde 1.

Hypotese 2

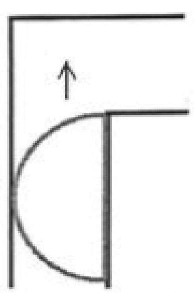
Hvis sofaen har form som en halvcirkel, vil det størst mulige gulvareal være hvor halvcirklen har en radius på 1.

Halvcirklen vil se således ud:

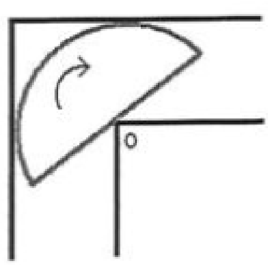


Gulvarealet for halvcirklen er: $(1^2 * \pi)/2 =$ 1,57

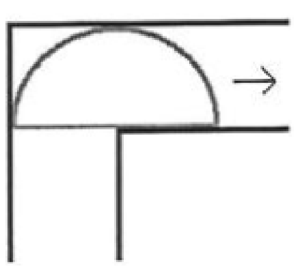
Halvcirklen vil komme omkring hjørnet og gennem korridoren på følgende måde:



Sofaen bliver først trukket/skubbet helt for enden af den første del af korridoren



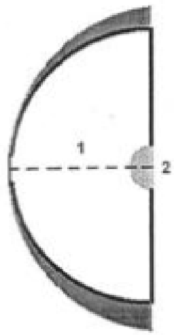
Sofaen drejes omkring omdrejningspunktet "O" til siden der er 2 lang er vandret.
Centrummet for den cirkel, som halvcirklen er en del af, er også omdrejningspunktet. Derfor er det muligt for sofaen at dreje om hjørnet, for der vil hele tiden kun være 1 fra omdrejningspunktet og ud til cirkelbuen.



Sofaen kan nu flyttes ned af den sidste del af korridoren.

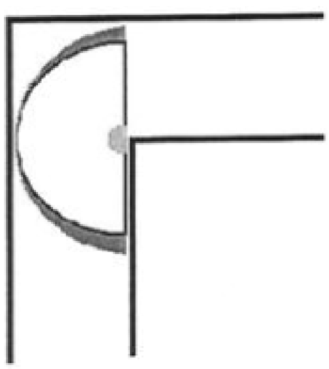
Hypotese 3
Hvis sofaen har form som en halvmåne, vil gulvarealet måske kunne blive større end det for halvcirklen.

Halvmånen vil se således ud:

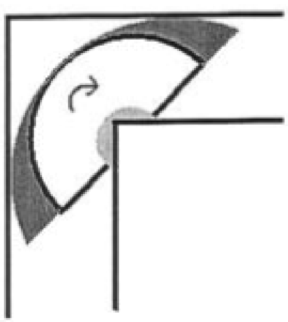


Princippet er det samme som med halvcirklen. Men tanken ved halvmånen er at fjerne en halvcirkel omkring centrum (lysegrå felt) og så sætte noget ekstra på cirkelbuen (mørkegrå felt), dog uden at ændre på bredden 1.

Halvmånen vil komme omkring hjørnet og gennem korridoren på følgende måde:



Halvmånen vil kunne komme op af den første del af korridoren ligesom halvcirklen.



Her er det så meningen at den del der er fjernet omkring centrum skal kunne sænkes ned over omdrejningspunktet (hjørnet) så der vil blive mere plads ude ved cirkelbuen.
Når sofaen er trukket/skubbet op til vandret, kan den flyttes ned af den sidste del af korridoren på samme måde som halvcirkel-sofaen.

Dette er kun en ide til hvordan gulvarealet af sofaen kan blive større. Det var ikke muligt for os at regne ud hvor meget vi må lægge til cirkelbuen når vi fjerner noget i midten.
Jeg kunne godt forestille mig at der var et forhold mellem hvor meget man fjerne og hvor meget man kan lægge til. Men hvad forholdet er, ved jeg ikke. Og om arealet kan blive stører ved jeg heller ikke. Dette er som sagt kun en ide.

OBS! Tegningerne er illustrationer. De er ikke tegnet i et reelt målestoksforhold.

7.2 Vurdering af anden opgave

Eleven arbejder med 2 hypoteser, som er velovervejede og viser elevens indsigt med problemstillingen, desuden er der en klar fremgang fra første hypotese til anden hypotese, hvor der manipuleres på første hypotese for at skabe en stærkere hypotese. Begge hypoteser er stærke og kan ikke modbevises af ligesindede. Eleven benytter geometriske betragtninger, hvilket gøres smukt og illustrativt. Der er en præcis og letforståelig skriftlig kommunikation, som bakkes op af klare illustrationer. Matematiske begreber og termer benyttes godt og udforskningen af problemstillingen er tæt knyttet til matematiske refleksioner om problemet. Eleven indser fx at fjernelse af en halvcirkel omkring centrum kan medføre et større areal. Brugen af cirkelbuer viser elevens forståelse med rotation af figurer i et hjørne. Eleven benytter umiddelbart ingen hjælpemidler andre end papir og blyant, hvilke i dette tilfælde er tilstrækkeligt. Under udforskningen benyttede gruppen udklippede figurer, så ideen om halvmånen er ikke udsprunget af 100 % rationalisme. Argumentationen for halvcirkelen er meget præcist og godt formuleret og den mobiliserede viden benyttes til udregning af areal af halvcirklen. Denne elev ligger helt i top af taksonomien. Jeg ville for denne rapport give karakteren 12.

BILAG D

Information til lærer

Mit speciale fokuserer på forskerlignende situationer i gymnasiesammenhæng, hvor eleven arbejder eksperimentelt og undersøgende. Der arbejdes med åbne matematiske problemstillinger, som kan være med til at motivere eleverne til forsat arbejde og hvor underviseren ikke besidder en endelige viden; dermed kommer underviseren til at fungere som vejleder mere end lærer. Helt konkret stammer arbejdsformen fra en matematisk tradition i Frankrig, som kaldes Math en Jeans (matematik i cowboybukser), hvor elever vælger at beskæftige sig med matematik i fritiden. Der vælges nogle åbne matematiske problemstillinger, som ikke kræver stor matematisk viden for at forstå, og som kan beskrives med få sætninger. Disse problemstillinger arbejdes der med over flere uger.

<u>En uge inden undervisningen:</u>

- Fortæl elever om Julian der kommer på besøg og at der skal arbejdes alternativt
- Er det i orden for alle elever, at der filmes? Filmen skal kun bruges til forskning.
- Dan grupper med 4 personer i hver. En faglig stærk elev og en kreativ elev i hver gruppe hvis muligt.

<u>På undervisningsdagen:</u>

- Fortæl kort om Julian og speciale
- Opdel i grupper
- Gennemgå formalia, som også står på opgaveark
- Rapport tæller 75 % af karakteren, hypoteseark tæller 25 %.
- Gruppen udnævner en sekretær, som skriver på hypoteseark.

<u>Eksempel på hvordan der bør arbejdes:</u>

Problemformulering:
Hvad er det mindste antal kameraer der fuldstændigt kan overvåge et tilfældigt rum?
Et kamera kan se 45 grader.
Gennemgå trekanter og firkanter, hvor hypoteseark benyttes.
Hypoteser er dog ikke nok, der skal også argumenteres for disse

<u>Sæt arbejdet i gang:</u>

- Udlevér opgaveark og hypoteseark til grupperne og lad dem læse det.
- Fortæl elever at problemformuleringen er et åbent problem i dag (ikke løst).
- Svar på spørgsmål fra eleverne i fællesskab
- Grupperne begynder arbejdet

<u>Under arbejde:</u>

- Forhold dig passivt, men svar gerne på ikke faglige spørgsmål
- Hvis en gruppe går fuldstændigt i stå, bør de hjælpes fagligt
- Hav materialer klar, hvis elever spørger efter dette, fx passer eller saks. (Julian medbringer disse)

<u>Konference:</u>

- Der afholdes 3 konferencer under modulet, hvor én gruppe kort gennemgår opdagelser. Dette er et åbent forum, hvor andre grupper meget gerne må stille spørgsmål.
- Vælg ikke den bedste gruppe til at holde oplæg først.

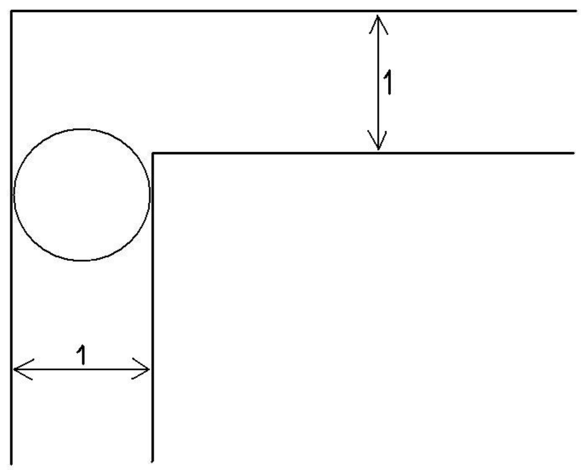
<u>Afslutning:</u>

- Fortæl elever, hvornår rapport skal afleveres.

Sofaproblemet

Problemformulering:
En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med bredde 1 og passerer et hjørne på 90 grader. Hvilken form har den genstand, der dækker det største gulvareal, og som kan passere hjørnet?

Inspiration:
En cirkel med diameter 1 kan passere hjørnet. Findes der andre former der kan passere hjørnet, som har areal større end cirklen med diameter 1?



Formalia:
Der er ikke nogle krav til hvilke veje I ønsker at bevæge jer ud fra problemformuleringen, eller hvordan I vælger at gribe problemet an. Der må benyttes alle tænkelige redskaber og materialer, som I finder relevante. Jeres lærer fungerer som vejleder og vil ikke svare på faglige spørgsmål.
3 gange under modulet vil en gruppe gennemgå deres opdagelser ved tavlen.

Hver person i gruppen afleverer selvstændigt en rapport (tidspunkt informeres af lærer), som vil blive bedømt med en karakter (25 % fra hypoteseark, 75 % fra rapport). Rapporten skal indeholde følgende:

- Navn, dato, gymnasium og gruppe.
- Et udleveret ark pr. gruppe med hypoteser som opstod i gruppen.
- Matematisk gennemgang, illustration og argumentation af jeres stærkeste hypoteser.

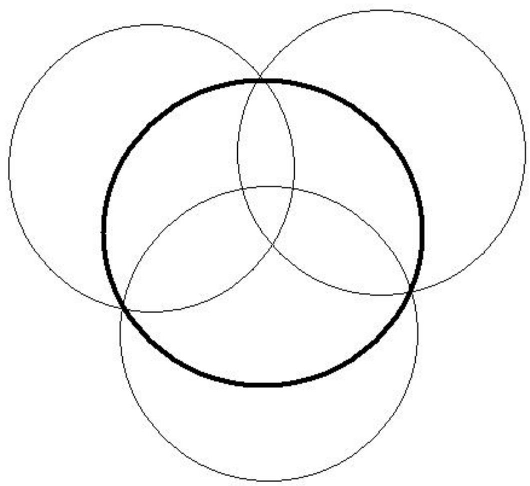
Den primære del af opgaven består i at stille hypoteser, undersøge og udforske muligheder og begrunde hvorfor netop jeres hypoteser er gode ved brug af matematisk argumentation.

God arbejdslyst...

Cirkelskiveproblemet

Problemformulering:
Hvordan placeres 1, 2, 3, 4, … cirkelskiver, så de tilsammen dækker den største cirkelskive?

Inspiration:
Hvordan placeres de 3 cirkelskiver (tegnet med tynd streg), så de tilsammen dækker den størst mulige cirkelskive (tegnet med tyk streg)?



Formalia:
Der er ikke nogle krav til hvilke veje I ønsker at bevæge jer ud fra problemformuleringen, eller hvordan I vælger at gribe problemet an. Der må benyttes alle tænkelige redskaber og materialer, som I finder relevante. Jeres lærer fungerer som vejleder og vil ikke svare på faglige spørgsmål.
3 gange under modulet vil en gruppe gennemgå deres opdagelser ved tavlen.

Hver person i gruppen afleverer selvstændigt en rapport (tidspunkt informeres af lærer), som vil blive bedømt med en karakter (25 % fra hypoteseark, 75 % fra rapport). Rapporten skal indeholde følgende:

- Navn, dato, gymnasium og gruppe
- Et udleveret ark pr. gruppe med hypoteser som opstod i gruppen
- Matematisk gennemgang, illustration og argumentation af jeres stærkeste hypoteser

Den primære del af opgaven består i at stille hypoteser, undersøge og udforske muligheder og begrunde hvorfor netop jeres hypoteser er gode ved brug af matematisk argumentation.

God arbejdslyst…

Hypoteser

Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

BILAG E

Navne: [redacted]

Dato: d. 21/3-07

Gymnasium: [redacted]

Hypoteser

Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	Hvis sofaen var en streg (ingen bredde), ville max. længde være = 2,82 m
2	Kvadrat, sidelængde 1 m ⇒ den kan godt komme rundt om hjørnet (evt. håndtag nødvendigt)
3	Rektangel ⇒ max. areal 1 m^2
4	trekant m. grundfladen 2,8 og højden 1 (areal 1,414 m^2) ville godt kunne passere.
5	En cirkel ville aldrig kunne have en diameter større end 1 m, og en halvcirkel ville aldrig have en radius større end 1 m.
6	En figur bestående af 2 trekanter og $\frac{1}{4}$ af en cirkel (radius 1 m) vil have størst areal (1,7654 m^2)
7	
8	
9	
10	

Navne: [redacted]

Dato: 22/3 -07

Gymnasium: [redacted]

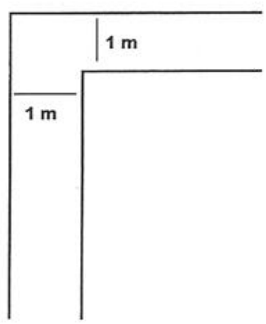
Hypoteser

Dette ark skal afleveres sammen med én rapport fra gruppen

1	De tre diametre danner den største trekant som danner den største cirkel.
2	Størst mulige indskrevne trekant vi kan danne ved de 3 cirkler kan give den størst mulige cirkel.
3	Hvad med, hvis der bruges flere end 3 cirkler.
4	når der er hul i midten flyttes en cirkel ind og dækker dette.
5	Når hullet i midten bliver tilstrækkelig stort, må dette dækkes med flere cirkler. med samme system som tidligere anvendt
6	En ~~2~~ to cirklers største areal, er lig en af cirklernes areal.
7	Nogle tal må „hoppes over" da der ikke findes en løsning til dem, ifølge vores system hvor de bliver større end den foregående. fx. 2 ~~8~~ 5
8	
9	
10	

Problemformulering:

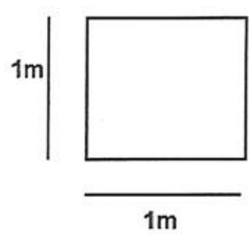
En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med en bredde på 1m, og passerer et hjørne på 90°. Hvilken form har den genstand, der dækker der største gulvarial, og som kan passere hjørnet.



Jeg gør lige opmærksom på at jeg har angivet det i meter fordi jeg ved en fejl har antaget det og derfor skrevet det i alle mine figurer. Jeg er klar over at der ikke er angivet enheder.
Jeg beklager fejlen.

Hypoteser:

1) Kvadrat på 1 x 1 meter:

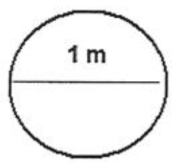


Arial:

$1m \times 1m = 1\ m^2$

Fig. 1.
Da korridoren er 1m x 1m på denne figur nødvendigvis også kunne være der.

2) Cirkel med diameter på 1m



Arial af cirkel med diameter på 1m:

$\pi \times r^2$

$\pi = 3{,}14$ v $22/7$

$r^2 = 0{,}5m \times 0{,}5m = 0{,}25$ v $\frac{1}{4}$

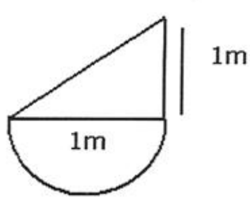
$3{,}14 \times 0{,}25 = 0{,}785m^2$

BB!

$22/7 \times \frac{1}{4} = 28/22 = 14/11$

Fig. 2 Vi afprøvede med en figur på det udleverede kopiark og figuren kunne passere

3) halvcirkel med trekant



Arial af figur:

Halvcirkel:

$0{,}785m \times 0{,}5 = 0.39m^2$

Trekant:

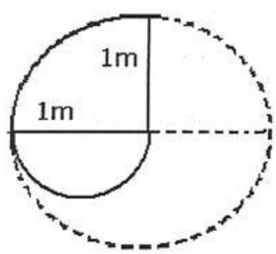
$1m \times 1m \times 0{,}5 = 0.50m^2$

$0{,}39m^2 + 0.89m^2 = 0.89m^2$

Fig. 3

Vi tog udgangspunkt i at hvis cirklen kan dreje om hjørnet hvis midten af cirkler er sat lige ud fra hjørnet. Derved ville det være mulig at påsætte en fig. som havde fuld højde, til gengæld skulle den ikke støde på i svinget, derfor valgte vi en trekant.

4) Halvcirkel med kvart cirkel:



Arial af kvart cirkel:

$$\frac{\pi \times 1^2}{4} = 0{,}785\text{m}^2$$

Halvcirkel:

$0{,}785\text{m}^2 \times 0{,}5 = 0.38\text{m}^2$

$0{,}785\text{m}^2 + 0{,}39\text{m}^2 = 1{,}285\text{m}^2$

[redacted] 30.03.07

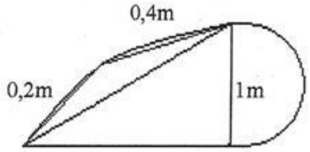
Gruppe: [redacted]

Matematik Rapport

Rundt om hjørnet

Hypotese 1:

En skæv-dråbeformet sofa vil have det største mulige areal man kan få rundt om hjørnet.



Figuren består af en retvinklet trekant, en halvcirkel med en diameter på 1 meter, og bue på trekantens langside.

Idéen bag denne figur opstod ud fra opgave arket, hvorpå der stod at en cirkel med en diameter på 1m ville kunne passere hjørnet. Vores tanke var så at udbygge denne cirkel, så meget så muligt, mens den stadig kunne komme rundt om hjørnet. Vi gav den en hale, og ved at prøve os frem, ved hjælp af at føre en udklippet figur gennem det hjørne der var afbilledet på opgavepapiret, fandt vi ud af at en hale der lænede sig op af væggen i 'korridoren' og var buet på den anden side så ud til at kunne få det størst mulige areal.

Længderne på figuren fandt vi ved at måle dem på vores udklippede modeller, og derefter dividere med 2, da forholdet mellem 1cm i virkeligheden og 1m i opgaven er 2:1.

Areal:

Halvcirkel: $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$ Trekant: $½ \cdot g \cdot h$

For at kunne regne arealet satte vi en trekant ind buen på trekantens langside. Derfor må det reelle areal være større end det resultat vi kom frem til.

$$\left(\frac{\pi \cdot ½^2}{2}\right) + (½ \cdot 1 \cdot 1{,}3) + (½ \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4) = \underline{\underline{1{,}18m^2}}$$

Hypotesen holdt ikke, denne figur har ikke det størst mulige areal.

[redacted]
Gruppe: [redacted]
Matematik Rapport

30.03.07

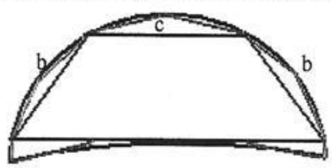
Hypotese 2:

En måneformet sofa vil have det største mulige areal der er muligt at få rundt om hjørnet.

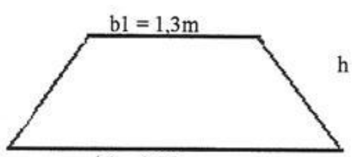
Udgangspunktet til denne figur var at noget det buer må være det nemmeste at få rundt om et hjørne. Vi startede med en cirkel med et "hak i, men efter at have varieret længden og tykkelsen, ved hjælp af udklippede modeller, kom vi frem til at en tyk halvmåne figur ville have det største mulige areal.

Areal:

For at kunne regne arealet af figuren delte vi den op i en trapez (rød) og fem trekanter (grønne).



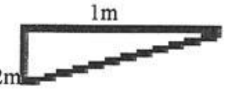
Trapez: $h \cdot ½ \cdot (b1 + b2)$



Areal = $0,75 \cdot ½ \cdot (1,3 + 2,25) = 1,33\text{m}^2$

Vi antager at trapezen er symmetrisk, så trekanterne parvis er ens.

a.

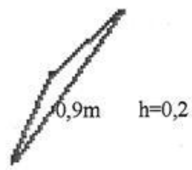


[redacted]
Gruppe: [redacted]
Matematik Rapport

30.03.07

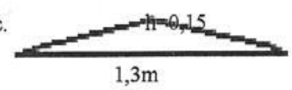
Areal: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}1m^2$

b.



Areal: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}09m^2$

c.



Areal: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}3 = 0{,}1m^2$

<u>Areal i alt</u>: $1{,}33 + 2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}09 + 0{,}1 = \underline{\underline{1{,}81m^2}}$

Hypotesen holdt, denne figur er den har det største areal af dem vi undersøgte.

[redacted]
27.03.2007
[redacted]

Cirkelskiveproblemet

Problemformulering:

Hvordan skal man placere 1, 2, 3, 4, …cirkler så de tilsammen dækker den største cirkelskive?

Hypoteser der er forudsat cirklerne er lige store:

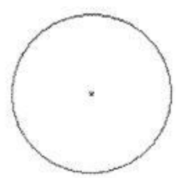
a) Hypotese 1: Hvis man kun bruger 1 cirkel, vil den største cirkelskive den dækker over den have en ligeså stor diameter som cirklens diameter. Altså de er lig hinanden.

b) Hypotese 2: Hvis to lige store cirkler haves skal de ligge oven i hinanden for at dække den største cirkelskive. Altså største cirkelareal = de 2 lagt oveni hinanden = cirklen fra hypotese 1.

c) Hypotese 3: Ved hjælp af et ligesidet polygon tegnes cirkler gennem polygonens hjørne samtidig med at cirklernes cirkelperiferi går gennem polygonens centrum. Derved er det muligt at tegne en større cirkel gennem cirklernes skæringspunkter. Denne cirkel vil da dække den største cirkelskive.

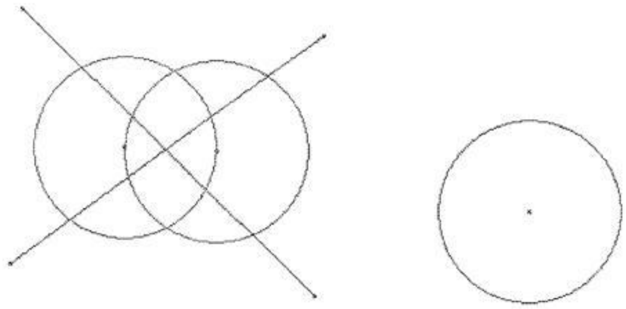
a)

Der er egentlig ikke så meget at tale om her, når du kun har en cirkel er det også den der er den størst mulige cirkelskive.



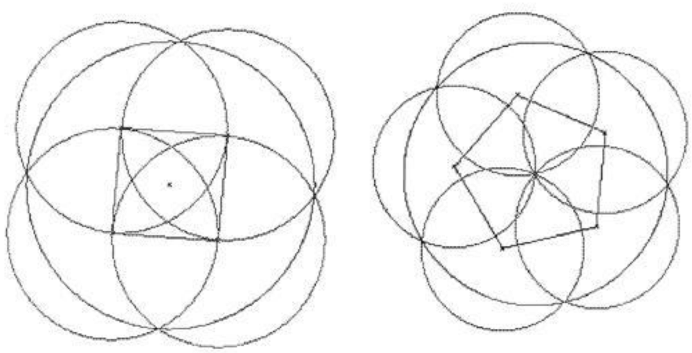
b)

Ser man på 2 lige store cirkler er der reelt 2 måder man kan sætte den sammen på så den største cirkelskive kan dannes. Den til højre herunder er samtidig den rigtige, det er hvor den ene cirkel dækker over den anden 100% og man kan sige at det minder om hypotese 1. Den anden måde man kunne forestille at gøre dette på var at sætte dem sammen som nederst til venstre, men det viser sig at være forkert da den størst mulige cirkelskives areal ikke vil være større end den ene cirkels diameter. Altså man skal bare lægge dem oveni hinanden.



c)

Ser man på cirkelskiver hvor der er placeret 2 cirkelskiver er det klart at de ikke bare kan lægges oveni hinanden. Det er klart at de kan placeres på mange måder. Vores 3. hypotese bygger på den ide at man vha. cirkler tegner ligesidede mangekanter, polygoner. Det burde kunne lade sig gøre at vende den sætning om, så man med polygoner kunne tegne cirkler. Nedenfor er 4 og 5 cirkler tegnet med deres respektive polygon i midten markeret med sort.



Som det fremgår, er der en sammenhæng mellem den måde cirklerne er placeret på og polygonen i midten. De skal placeres således at centrum af cirklerne er polygonens kanter. På den måde vil den største mulige cirkelskive kunne dannes med centrum i polygonens centrum

[redacted]
27.03.2007
[redacted]

Konklusion.

Med 1 eller 2 cirkler er det ren logik at se at den største cirkelskive dækkende over det vil være den samme cirkel. Men det er først når man kommer op over de 2 cirkler, 3, 4, 5, osv. at det bliver svært og uoverskueligt at komme med et konkret bevis. Den måde jeg vælger at gribe det an på er vha. Figurbetragtning. Det er det hypoteserne bygger på. Altså hvis du har den "størst mulige" cirkel vil du altid kunne tegne et polygon der har cirklen som sin omskrevne. Så er det klart, at jo større det polygon er, jo større vil "den størst mulige" være. Så I stedet for at regne med cirkler, vil jeg regne med polygoner, forstået på den måde at når du har de her 3, 4, 5, osv. cirkler, vil jeg lede efter på hvilken måde jeg kan danne det størst mulige polygon ud af dem. Og det forskyder forskningen lidt, da jeg nu vil lede efter dannelser af polygoner. Det er her hypotese 3 kommer ind I billedet. Altså for at danne den størst mulige cirkelskive, skal man danne det størst mulige polygon af de cirkler du har at arbejde med. Og for at danne det størst mulige polygon så skal man (hypotese 3) få cirklernes cirkelperiferi til at gå igennem polygonens centrum. På den måde har man det størst mulige polygon og den største cirkelskive.

Hypotese.

<u>Radius for den størst indskrivende cirkel:</u>

Radius for den størst indskrivende cirkel findes ved at, tage en hvilket som helst side i det regulære polygon og den tilhørende ortogonale linje der på. Den ortogonale linje vil gennem skære centrum. Længden af den fundene ortogonale linje skal der efter ganges med 2 for at få Radius for den størst indskrivende cirkel.

<u>Bevis:</u>

Tag et hvilket som helst polygon fx en pentagon. Til hver af de fem sider som pentagonen danner, vil siderne skære igennem en ellipse. Siden som gennemskære ellipsen vil blive brugt som hjælpe linje. Hvis der tegnes en ny linje gennem midt punktet af hjælp linjen, vil denne linje skære igennem den størst omskrivende cirkel og de to andre cirklers skæring mellem hinanden. Ved målinger ses det at linjen gennem polygonens centrum og som er ret på et af polygonens sider er lige så lang som linjen der skær den omskrevne cirkel skive og som står ret på polygonens side (beviset er illustreret neden for). En nærmere undersøgelse har vist at den indskrivende cirkel i pentagonen er halvt så stor som den største cirkel skive.

Radius af den største cirkel skive til understående figur.

$2*2,45=4,90cm$

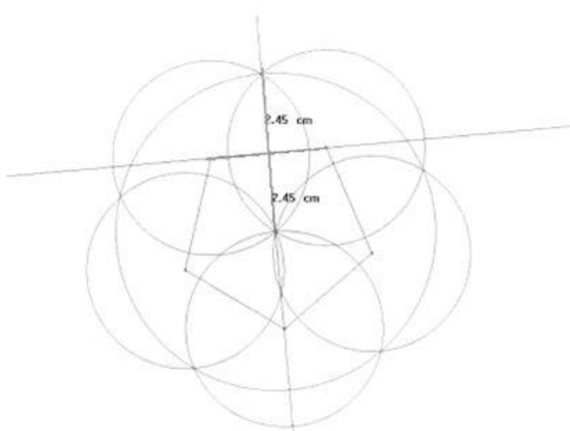
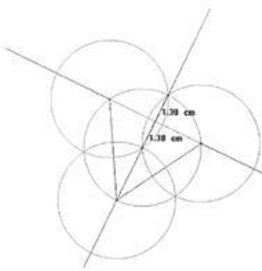


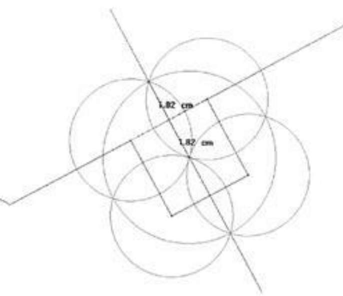
Illustration.

Illustrationer der hører til den overstående hypotese.

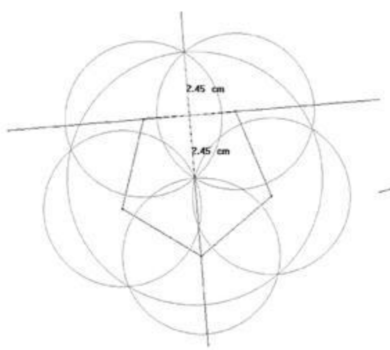
3 cirkler



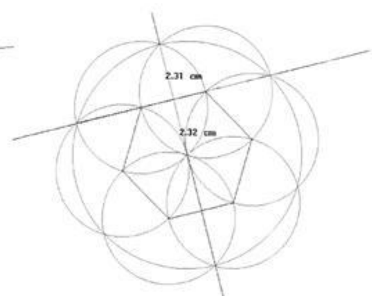
4 cirkler



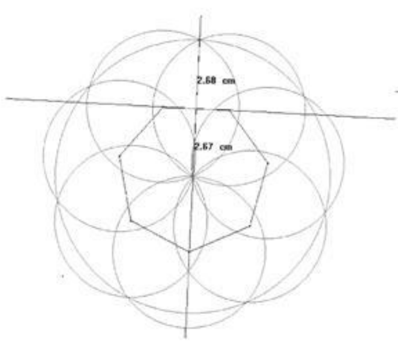
5 cirkler



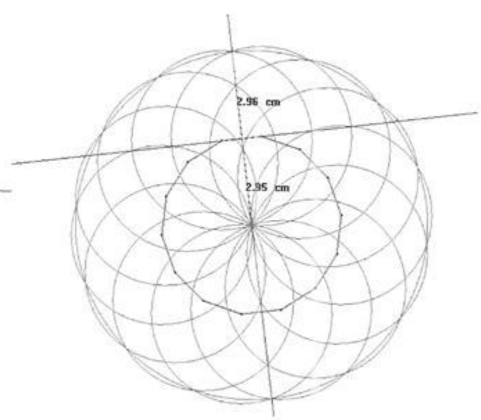
6 cirkler



7 cirkler



14 cirkler



BILAG F

Poincarés formodning
– Perelmans bevis og det efterfølgende cirkus

Morten Jacob Nesgaard og Julian Tosev

Det er ikke hver dag, at en matematisk formodning kommer i nyhederne, men det er lige præcis, hvad der er sket. Nyhedsbureauer som *The New Yorker, TV2* og *Politiken* har for nylig vist stor interesse i en sær russer. Sensationen, som har fanget nyhedsbureauernes opmærksomhed er, at Grigori Perelman har løst Poincarés formodning. Poincarés formodning blev stillet af Henri Poincaré i 1904 og lyder således: Enhver lukket, enkeltsammenhængende 3-mangfoldighed af endelig udstrækning er homeomorf med en kugleflade. Formodningen går i alt sin enkelthed ud på følgende: Forestil dig, at du kommer ind i slutningen af en formningstime i 4. klasse, og alle eleverne har lavet nogle lerfigurer. En person har lavet en kaffekop med hank, en anden har lavet en pølse, en tredje en fingerring, en fjerde et askebæger osv. Betragt nu overfladen af disse lerfigurer, så vil pølsen kunne deformeres om til en bold ved blot at trykke enderne sammen. Hvorimod dette ikke er muligt for en fingerring, da der er hul i den (den er ikke enkelsammenhængende). Tilsvarende kan et askebæger deformeres om til en bold, men en kaffekop med hank kan ikke. På samme måde kan man betragte alle lerfigurerne i klassen og se om de med topologiske briller på kan deformeres om til en bold. Formodningen, som er blevet verdenskendt, handler dog ikke om overfladen på en bold, som Stig Tøfting og Jesper Grønkjær render rundt og sparker til, men derimod en mere visuel-problematisk bold. Hvis vi ser på overfladen af en bold i 2 dimensioner, så svarer dette til cirklen med cirkelperiferi $x2 + y2 = r2$. I tre dimensioner er vores kugleoverfladen givet ved $x2 +y2 +z2 = r2$. Poincarés formodning omhandler overflader i en dimension højere, nemlig i fire dimensioner, hvor en kugleoverflade vil have ligning $x2 + y2 + z2 + w2 = r2$. Denne kugleoverflade er selvfølgelig svær at tegne, da vi kun har 3 rum-dimensioner at gøre godt med. Ikke desto mindre er det netop kugleoverflade i fire dimensioner, som Poincarés

formodning handler om. Gennem tiden har flere matematikere forsøgt at løse Poincarés formodning, bl.a. J. H. C. Whitehead, Bing, Haken, Moise, og Papakyriakopoulos (og her kræves grundig mundmotorisk træning for korrekt udtale!), men alle har de måtte sande, at det var for stor en mundfuld. På denne liste skal der desuden stå Poincaré selv, der kom med et ukorrekt bevis, som han dog selv senere fandt et modeksempel på. Der blev hurtigt formuleret en generaliseret udgave af Poincarés formodning, som spørger om en deformeret bold i n dimensioner uden huller, set med topologiske briller på, stadig blot er en bold. For n = 1, som svarer til cirkelperiferien, har løsningen været kendt længe, for n = 2 fandt Henri Poincaré selv et bevis. For n = 3 har ingen, indtil nu, løst formodningen og netop denne formodning for n = 3, har stået ubesvaret i ca. 100 år. For n = 4 fandt Freedman en løsning i 1982, for hvilket han fik en Fieldsmedalje, som svarer til Nobelprisen inden for matematik. n = 5 blev løst i 1961 af Zeeman, n = 6 blev løst af Stallings i 1962, og for n _ 7 fandt Smale en løsning i 1961. Smale udvidede senere sin løsning, så den gjaldt for n _ 5. Smale modtog en Fields medalje for dette bevis. Det bemærkelsesværdige er, at for n > 3, har man kunnet finde et bevis, men lige præcis n = 3, har voldt utrolige mange problemer. Poincarés formodning er en af Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts Millennium Prize Problems. The Millennium Prize Problems er 7 matematiske problemer, som blev stillet den 24. maj 2000, for at fejre matematik i det nye årtusinde.
Clay Mathematics Institute tildeler $1.000.000 til vedkommende, som løser en af The Millennium Prize Problems.

Nu tilbage til hovedpersonen: Grigori Perelman blev født i Leningrad (nu St. Petersborg) den 13. juni 1966 af jødiske forældre. Han startede sin tidlige matematiske uddannelse ved Leningrad Secondary School – en skole med særlig fokus på matematik og fysik. I 1982 stillede han op for USSR ved Matematik-OL. Her opnåede han den højeste score, man kunne få, og vandt en guldmedalje, bemærk at på dette tidspunkt var han kun 16 år gammel. I slutningen af 80'erne tog han sin Ph.D.-grad ved statsuniversitetet i Leningrad. Hans afhandling omhandlede sadelflader i det euklidiske rum. Herefter blev han ansat ved Steklov Institute of Mathematics i St. Petersborg. Indtil 1996 var han også løbende ansat ved forskellige universiteter i USA. Før 2002 var Perelman bedst kendt for sit arbejde vedrørende „comparison theorems" i riemannsk geometri. Men efter november 2002 ændrede Perelmans liv sig radikalt. Han udgav den første elektroniske artikel af en serie af artikler på arXiv.org, hvori han ud fra amerikaneren Richard Hamiltons idé omkring „Ricci flow" i hovedtræk beviser Thurstons geometriske formodning, hvoraf Poincarés formodning kan udledes som et specielt tilfælde. Disse artikler skabte røre i det matematiske miljø; havde Perelman virkelig bevist Poincarés formodning? I april 2003 blev han inviteret til USA for at give en række forelæsninger om sit arbejde vedrørende formodningerne (bl.a. på Columbia University, Princeton University og Harvard University). Da han efterfølgende kommer tilbage til Rusland er berømtheden nok steget ham lidt til hoved, for han gider ikke længere svare på sine kollegiers emails.

I sommeren 2006 tager tingene fart

I maj 2006 udgiver Bruce Kleiner og John Lott, begge fra The University of Michigan, en artikel på arXiv.org, som indeholder de manglende detaljer i Perelmans bevis for Thurstons geometriske formodning. I juni 2006 publicerer Asian Journal of Mathematic en artikel af Xi-Ping Zhu fra Sun Yat-sen University i Kina og Huai-Dong Cao fra Lehigh University i Pennsylvania. I artiklen angives et fuldstændigt bevis for Thurstons og Poincarés formodninger. Chefredaktøren for Asian Journal of Mathematic er den tidligere Fields Medal-modtager Shing-Tung Yau, som også er Caos doktorgradsvejleder. Denne dobbeltrolle har skabt en del rygter. Bl.a. at Yau har ønsket direkte eller indirekte at være forbundet til beviset for Poincarés formodning, og derfor har han presset sine redaktører til unaturligt hurtigt at have accepteret Zhus og Caos artikel.
I juli 2006 udgiver John Morgan fra Columbia University og Gang Tian fra Massachusetts Institute of Technology en artikel på arXiv.org med titlen „Ricci Flow and the Poincaré Conjecture."
I artiklen giver de et detaljeret bevis for Poincarés formodning. Den 24. august 2006 holder Morgan en forelæsning ved ICM (International Congress of Mathematicians) i Madrid, omhandlende Poincarés formodning. I maj 2006 beslutter en komite bestående af 9 personer, at Perelman skal modtage Fieldsmedaljen for sit arbejde vedrørende Poincarés formodning. Herefter besøger Sir John Ball, som er præsident for den internationale matematik sammenslutning, Perelman i håb om at kunne overtale ham til at modtage prisen. Efter to dage giver Ball op og rejser hjem. Perelman opsumerer deres konversation:1 *„He proposed to me three alternatives: accept and come; accept and don't come, and we will send you the medal* 1De følgende citater er fra http://en.wikipedia.org/wiki/Grigori_Perelman. *later; third, I don't accept the prize. From the very beginning, I told him I have chosen the third one."* Videre fortæller Perelman at prisen *„was completely irrelevant for me. Everybody understood that if the proof is correct then no other recognition is needed."* Perelman har også afvist at modtage sin andel af the Millennium

Prize på $1.000.000 fra Clay Mathematics Institute. Perelman er i øjeblikket arbejdsløs, bor hos sin mor i St. Petersborg og ernærer sig af hendes pension. Hans venner har fortalt, at han i øjeblikket synes, at matematik er alt for smertefuldt et emne at diskutere. Videre er han meget skuffet over matematikeres etiske standart – specielt Yaus bestræbelser på at nedtone hans rolle i beviserne for formodningerne og i stedet fremhæve Caos og Zhus. Perelman har direkte sagt: *„I can't say I'm outraged. Other people do worse. Of course, there are many mathematicians who are more or less honest. But almost all of them are conformists. They are more or less honest, but they tolerate those who are not honest.“* Han har også sagt: *„As long as I was not conspicuous, I had a choice. Either to make some ugly thing“* (a fuss about the mathematics community's lack of integrity) *„or, if I didn't do this kind of thing, to be treated as a pet. Now, when I become a very conspicuous person, I cannot stay a pet and say nothing. That is why I had to quit.“*
Perelman har garanteret været under en del pres, efter hans bevis er kommet ud til alle verdenshjørner. Alle medier har været efter ham for at få et interview med denne bemærkelsesværdig russer, som har løst Poincarés 100 år gamle formodning. Men at sige nej til Fieldsmedaljen, som er den største anerkendelse, man kan få inde for matematikken, og nej til $1.000.000 fra the Clay Institute virker ikke som noget, et normalt menneske vil gøre. Hvis man beder børn om at tegne et billede af en matematiker, som man har gjort i en række internationale undersøgelser, så får man typisk et billede af en distræt vildmand med skæg, briller og kittel. Perelman har åbenbart ikke været med til at ændre dette stereotype billede af matematikere, som lader til at være dominerende uden for det matematiske miljø. På den anden side, hvis man kan løse Poincarés formodning, så gør det måske ikke noget, at man er lidt aparte?