INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Matematiklærerens forberedelse

Observationer af samspillet mellem gymnasielærerens forberedelse og undervisning

Jakob Svendsen

Specialerapport

Marts 2009

IND's studenterserie nr. 9

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

INDs studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet (2007)
Nr. 7: Katja Vinding Petersen: Lyd og Liv (2007)
Nr. 8: Jesper Bruun: Krop og computer i fysikundervisning (2008)
Nr. 9: Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse (2009)

Jakob Svendsen: Matematiklærerens forberedelse

Observationer af samspillet mellem gymnasielærerens forberedelse og undervisning

Matematikundervisning foregår i et samspil mellem matematiklærere og matematikelever. Hvis vi ønsker at beskæftige os med undervisning er vi altså nødt til at interessere os for lærerne. Vi bør observere lærere og først identificere, derefter forsøge at forstå, deres aktiviteter og handlemåder både før, under og efter interaktionen med eleverne. Denne forståelse bør være et vigtigt element i vores tanker om matematikdidaktikken. Dette speciale vil beskæftige sig med lærerens forberedelse. Gennem observation af tre lærere vil jeg se hvilke overbevisninger og fokusområder læreren har under forberedelsen og hvordan disse kommer til udtryk i undervisningen. Jeg vil både observere forberedelsen og selve undervisningen for at opnå forståelse for samspillet mellem disse. Specialet vil også beskrive hvordan det overhovedet lader sig gøre at observere forberedelse, samt hvilke metodologiske overvejelser der følger når man skal observere forberedelse.

__IND's studenterserie__ består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Fra og med 2007 publiceres specialer elektronisk i IND's studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.

Resumé

Matematikundervisning foregår i et samspil mellem matematiklærere og matematikelever. Hvis vi ønsker at beskæftige os med undervisning er vi altså nødt til at interessere os for lærerne. Vi bør observere lærere og først identificere, derefter forsøge at forstå, deres aktiviteter og handlemåder både før, under og efter interaktionen med eleverne. Denne forståelse bør være et vigtigt element i vores tanker om matematikdidaktikken.

Dette speciale vil beskæftige sig med lærerens forberedelse. Gennem observation af tre lærere vil jeg se hvilke overbevisninger og fokusområder læreren har under forberedelsen og hvordan disse kommer til udtryk i undervisningen. Jeg vil både observere forberedelsen og selve undervisningen for at opnå forståelse for samspillet mellem disse.

Specialet vil også beskrive hvordan det overhovedet lader sig gøre at observere forberedelse, samt hvilke metodologiske overvejelser der følger når man skal observere forberedelse.

Abstract

Mathematics teaching takes place in the interaction between teachers and students of mathematics. If we want to work with education, we need to take teachers into concern. We should observe teachers and first identify, then try to understand their activities and practices before, during and after interaction with the students. This understanding should be an important element in our view of mathematical didactics.

The concern of this thesis will be with teachers preparation. Through observation of three teachers I will consider the teachers beliefs and focus during preparation, and the effect of this in teaching. I will observe both the preparation and teaching to gain understanding of the interplay between them.

The thesis will also describe how to observe preparation and which methodological considerations that will arise when observing teachers preparation.

Indhold

1 Indledning

Udgangspunktet og formålet med at undervise i matematik, er at skabe en didaktisk transposition, dvs. en flytning og omformning af viden. Vi ønsker selvsagt at eleverne får noget ud af undervisningen. Der kan være uenighed om *hvad* eleverne skal have ud af undervisningen, om det fx er kompetencer, evner, færdigheder eller forståelse. Uanset *hvad*, er der dog enighed om *at* eleverne skal have „noget" ud af undervisningen. Dette er både i lærerens, elevernes, forældrenes, skolebestyrelsens og politikernes interesse. Alle disse, og flere andre, har mulighed for at påvirke undervisningen i den ene eller anden retning, men i sidste ende vil det være læreren der interagerer direkte med eleverne. Stigler og Hiebert [1999] udtrykker det således at: „*Teaching lies within the control of teachers*". [p. 4]

Hvis vi ønsker at beskæftige os med undervisning, kommer vi dermed ikke uden om at beskæftige os med underviserne. Vi kan opstille teorier og udarbejde hypoteser, men lærerne vil være forbindelsen mellem disse teorier og eleverne. Derfor vil det være vigtigt at skabe et indblik i lærerens handlemåder. Vi bør forsøge at forstå lærerens overvejelser og aktiviteter både før, under og efter interaktionen med eleverne.

Jeg vil i dette speciale beskæftige mig med lærerens forberedelse. Forberedelsen ligger – eller burde ligge – til grund for undervisningen, og jeg vil både observere forberedelsen og selve undervisningen for at opnå forståelse for samspillet mellem disse. Jeg vil se på hvilket fokus, og hvilke overbevisninger, læreren har under forberedelsen, og derefter observere hvordan dette kommer til udtryk i løbet af undervisningen.

Jeg vil også beskrive hvilke metodologiske overvejelser der følger når man skal observere forberedelse. En stor del af lærerens forberedelse består af hans tanker, og da disse ikke umiddelbart lader sig observere, er det altså vigtigt at overveje hvordan det overhovedet lader sig gøre at observere forberedelse.

Jeg vil i dette speciale lade ordet „undervisning" dække selve undervisningssituationen, hvor læreren interagerer med eleverne. I observationsafsnittet vil citationstegn markere ordrette citater fra lærere og elever.

Opbygning og kilder I dette speciale vil jeg først introducere en række teorier omkring lærerviden og lærerforberedelse. Disse teorier vil virke som grundlag for at kunne tolke og analysere den observation jeg har foretaget. Kilderne til teorierne om lærerviden vil primært være Shulman [1985], Bromme [1994], Margolinas et al. [2005] og Stigler og Hiebert [1999]. Derudover vil jeg beskrive teori om hvordan læreren skaber dokumenter, dette vil hovedsageligt være inspireret af Gueudet og Trouche [2009]. Jeg vil desuden bruge modellen fra Winsløw [2008] som værktøj til at beskrive overgangen mellem forberedelse og undervisning.

Med ovenstående teorier som grundlag, vil jeg beskrive hvilke tanker jeg har gjort mig om at observere forberedelse. Jeg vil beskrive hvilke metoder jeg gjorde brug af under min observation, samt begrundelsen for mine valg. Dette afsnit vil jeg blandt andet bygge på teorien fra Dinham [2002]. Yderligere vil jeg diskutere hvilke problemer jeg forventede at støde på.

Under observationen overværede jeg hvordan tre gymnasielærere forberedte sig, og så hvordan deres forberedelse kom til udtryk i undervisningen. Jeg vil først beskrive mit indtryk af de tre lærere og det matematiske indhold i deres undervisning. Derefter vil jeg analysere selve observationen. Dette vil jeg hovedsageligt gøre ved at udvælge enkelte episoder som var relevante og interessante i forhold til formålet med dette speciale. Analysen har naturligvis det formål at skabe et indblik i lærerens forberedelse, men sekundært vil den også virke som eksempel på anvendelsen af de nævnte teorier. Den vil vise hvordan fx GOA-modellen kan bruges til at identificere komponenterne i en didaktisk situation, så man igennem denne konkretisering af begreberne kan opnå forståelse for det observerede.

Afslutningsvis vil jeg først konkludere på det metodologiske aspekt af observationen, og beskrive hvilke erfaringer jeg gjorde mig i forbindelse med det at observere forberedelse. Derefter vil jeg konkludere på selve observationen og opsummere hvilke „resultater“ og hypoteser jeg mener at kunne drage ud fra min observation.

2 Teoretisk baggrund

Dette afsnit vil beskrive de teorier, jeg vil arbejde ud fra i dette speciale. Teorierne er ikke umiddelbart forbundne, og de fokuserer på forskellige aspekter af lærerens forberedelse. Ved at se på både konkrete og abstrakte elementer af forberedelsen, vil jeg således få en bredere forståelse for hele lærerens forberedelse og samspillet med undervisningen.

2.1 Lærerviden

En lærer har en viden. Denne viden kommer fra forskellige steder og bruges forskelligt afhængigt af, hvilken undervisningssituation læreren står i. Denne komplekst sammensatte viden, som læreren bruger både i forberedelsen og i selve undervisningssituationen, lader sig ikke beskrive blot som en høj faglig viden eller som en grundig pædagogisk viden. Snarere foreslår Shulman [1985], at lærerens viden er en kombination af faglig viden, pædagogisk viden og pædagogisk faglig viden. Denne tredeling er naturligvis hverken simpel eller entydig, og den er blevet modificeret, udvidet og fortolket af bl.a. Bromme [1994]; Margolinas et al. [2005], og har dannet grundlag for nye teorier om lærerviden.

Ingen af disse tre „former for viden" er vigtigere end de andre, men afhængig af situationen kan en af disse træde i forgrunden. Det er mere eller mindre klart hvad begreberne faglig viden og pædagogisk viden dækker over. Det er begreber som også fungerer som selvstændige områder uden for det didaktiske område.

Det burde sige sig selv, at faglig – matematisk – viden, eller mere specifikt viden om det matematiske emne som læreren skal undervise i, er nødvendig for at kunne undervise. Men citatet: *„He who can, does. He who cannot, teaches"* [Shulman, 1985, p. 4] af George Bernhard Shaw indikerer dog, at denne viden på et tidspunkt blev neglicheret, endda iblandt lærere. Det at undervise blev primært set som en pædagogisk opgave, og en god lærer var én, der via undervisningsteknikker forstod at videregive den information, der var at finde i en velskrevet lærebog. Formålet med læreruddannelsen var at udruste læreren til at kontrollere klasselokalet, organisere tiden, give korrekt ris og ros og til at bedømme eleverne. Eksamener for lærere bestod af spørgsmål af pædagogisk art samt faglige spørgsmål, som ikke var på betydeligt højere niveau, end hvad eleverne skulle lære. [Shulman, 1985, p. 4]

Som universitetsstuderende med det formål at blive lærer, kan man blive mødt med undren over, hvorfor man lærer „så meget“ matematik, og hvorfor det skal være på så højt niveau i forhold til det niveau man skal undervise i. Denne holdning er netop et udtryk for, at for at kunne undervise behøver man kun at vide det samme som, men dog være ekspert i, det eleverne skal lære. Ifølge denne holdning er den eneste forskel på en lærer og en meget dygtig elev altså lærerens evner til at benytte pædagogiske værktøjer og undervisningteknikker. Dette er naturligvis en del af, hvad der adskiller den dygtige elev fra en lærer, men Shulman [1985] argumenterer for, at der rent fagligt også er – eller hvert fald burde være – en forskel:

> *„The teacher need not only understand* that *something is so; the teacher must further understand* why *it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakend and even denied.“* [Shulman, 1985, p. 9]

Denne forståelse, som Shulman taler om, opnåes kun ved dyb forståelse for de underliggende begreber, samt ved at bruge matematiske begreber på et abstrakt plan. Sfard [1991] kalder denne proces for *reifikation*. Man opnår kun fuld forståelse for et begreb, når man forstår at bruge begrebet abstrakt, i en sammenhæng hvor det virker som grundlag for nye begreber. Dette er først muligt, når begrebet ikke længere er en operation eller en procedure, men i sig selv bliver et objekt. Eksempelvis når begrebet „funktion“ overgår fra at være en operation til at være et begreb, således at man kan arbejde abstrakt med funktionsbegrebet, og fx begynde at arbejde med $\mathbb{C}^1$ mængden af kontinuert differentiable funktioner.

Faglig viden og pædagogisk viden er i en forstand modsatte grøfter, som lærere og uddannelsen af lærere risikerer at falde i. Det er er klart, at en uddannelse af lærere ikke primært kan fokusere på det pædagogiske aspekt og nedprioritere den faglige del. På samme måde må det dog også være klart, at en uddannelse, der blot fokuserer på at give lærerene en høj faglig viden uden at bekymre sig om, hvorvidt disse lærere er i stand til at videregive denne viden, er lige så ufrugtbar.

At have høj faglige viden og at have klaret sig godt på universitetet er i sig selv ikke nok for at være en god underviser i matematik. Naturligvis fordi det pædagogiske aspekt stadig vil mangle, men derudover argumenterer Bromme [1994] for, at selve matematikken er en anden:

> *„The contents of learning mathematics are not just simplifications of mathematics as it is taught in universities.“* [Bromme, 1994, p. 74]

Selvom det altså kunne virke plausibelt, at undervisning af elever skulle bestå i at holde sig imellem de to identificerede „grøfter“ med lige stor fokus på både den pædagogiske og den faglige viden, er dette altså ikke tilfældet. Kompleksiteten af undervisning gør, at der er aspekter af undervisning, som ikke blot kan tilskrives høj faglig viden eller dyb pædagogisk viden. En god lærer må besidde viden ud over dette. Denne viden kalder Shulman pædagogisk faglig viden, og beskriver den som „viden om at videregive lærerens egen faglige viden til eleverne“. Som baggrund for denne viden skriver han:

> *„Teachers must not only be capable of defining for studenst the accepted truths in a domain. They must also be able to explain why a particular proposition i deemed warranted, why it is worth knowing, and how it relates to other propositions“* [Shulman, 1985, p. 9]

Fra et didaktiske synspunkt er „pædagogisk faglig viden“ (herefter forkortet PCK[1]) et mere komplekst begreb end faglig og pædagogisk viden, og ikke helt så umiddelbart som de andre to. Af samme grund har PCK fået mest opmærksomhed i didaktisk litteratur. Således er begrebet blevet yderligere opdelt og bearbejdet i dybere facetter. PCK blev som sagt indført af Shulman, som reaktion på at uddannelsen af lærere var blevet for fokuseret på det rent pædagogiske.

PCK bygger naturligvis på viden, som kan læres, men bygger derudover på lærerens erfaring i højere grad, end fx faglig viden gør. Når læreren skal beslutte, hvordan han vil præsentere et matematisk begreb, vil hans tidligere succesoplevelser vægte langt højere end en teori om emnet. De fleste valg, som læreren træffer

[1] Pedagogical Content Knowledge

i forbindelse med både forberedelse og undervisning, vil udspringe af lærerens pædagogiske faglige viden. Eksempelvis vil valg omkring pensum, samt overvejelser om hvordan pensum skal præsenteres, have baggrund i lærerens PCK. Da læreren som nævnt bør have en stor faglig viden, vil han have viden ud over det, han skal videregive til eleverne. Læreren skal altså forstå at fravælge aspekter af et emne. Et begreb, der er vigtigt i forhold til en matematisk teori, er ikke nødvendigvis vigtig i forhold til det, som eleverne skal lære i forhold til denne teori.

I forbindelse med alle matematiske emner er der kendte problemer og vanskeligheder, som eleverne har større risiko for at komme ud for. Disse er i mange tilfælde globalt kendte af matematiklærere. Det kan fx være misconceptions, der bygger på elevens egen opfattelse af et matematisk begreb. En del af lærerens PCK er således også at have redskaber til at lede eleverne igennem eller uden om disse vanskeligheder og faglige misforståelser.

Det er klart, at læreren har brug for PCK i forberedelsen til at udvælge begreber og forebygge elevers vanskeligheder. I undervisningssituationen har læreren brug for PCK til at tolke og reagere på eleverne reaktioner i forhold til det matematiske begreb, som undervisningen omhandler.

Lærerens aktiviteter Margolinas et al. [2005] inddeler ud fra denne idé om PCK lærerens aktiviteter i fem niveauer (se figur 1). Modellen beskriver lærerens arbejde, og hvilke aspekter læreren arbejder ud fra. Den lærerviden, der er i spil, er afhængig af, hvilket niveau læreren arbejder ud fra. Første niveau (+3) omhandler lærerens overbevisning omkring matematik, læring og undervisning. Andet niveau (+2) er en længererækkende didaktisk plan, fx den overordnede plan for et skoleår. Tredje niveau (+1) er den specifikke plan for den observerede periode, og dækker fx planlægningen af det enkelte modul. Det fjerde niveau (0) er selve interaktionen med eleverne. Femte niveau (-1) er refleksionen, observationen og respons på elevernes aktiviteter.

På hvert niveau bliver læreren påvirket af de omkringliggende niveauer. Således vil en lærer, der arbejder på niveau +2 med at konstruere en overordnet plan for et skoleår, være i en spænding mellem niveau +3 og niveau +1. Hans tanker om,

+3 Værdier og overbevisning vedrørende læring og undervisning.

+2 Det overordnede didaktiske projekt.

+1 Det lokale didaktiske projekt.

0 Didaktisk aktion.

–1 Observation af elevernes aktivitet.

Figur 1: Niveauer af læreraktivitet

hvordan fx pensum bliver konstrueret, så eleverne får mest muligt ud af emnerne, vil være bestemt af hans didaktiske og matematiske overbevisninger (+3), men samtidig være styret af hans erfaring med at konstruere en plan for et enkelt modul (+1). På hvert niveau bruger læreren både sin faglige, pædagogiske og pædagogisk faglige viden. Disse videnstyper vil dog have forskelligt udtryk afhængigt af, hvilket niveau læreren arbejder på.

Lærerens overbevisning omkring læring

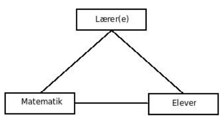
Læreren har en vis frihed til selv at vælge, hvordan han vil undervise, så længe hans undervisning blot opfylder de krav, som læreplanen opstiller. Det vil sige, at læreren specielt i det lokale didaktiske projekt (+1) og til en vis grad på det overordnede plan (+2) har frihed til at tilrettelægge sin undervisning ud fra hans erfaring og overbevisning (+3).

De krav, som undervisningsministeriet opstiller i læreplanen, vedrører primært pensum, kernestof og evaluering, og ikke retningslinier for hvordan det enkelte undervisningsmodul skal tilrettelægges. Heller ikke skolernes ledelse sætter krav eller begrænsninger ind i niveau +1: lærerens forberedelse af det enkelte modul. I Danmark er der „tradition“ for at se undervisning og specielt forberedelse som en privat sag, hvor læreren i første omgang kun står til regnskab overfor klassen, og i sidste ende blot vil blive evalueret på, hvordan klassen klarer sig til prøver. På dette område ligger vi op ad den amerikanske undervisningtradition:

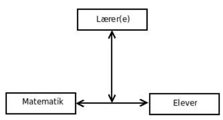
> *„Teachers are left alone, an action sometimes justified on grounds of freedom, independence, and professionalism.“* [Stigler og Hiebert, 1999, p. 13]

Den måde, læreren vælger at undervise, vil således afspejle de holdninger og overbevisninger, denne lærer har (+3). Stigler og Hiebert [1999] fremhæver en undersøgelse, der viser, at *„Teachers are essentially teaching the same way they were taught in school.“* [p. 98]. Lærerens overbevisninger vil altså være formet af den måde, han selv er blevet undervist, og dermed bliver undervisning i en vis forstand kulturelt bestemt, hvilket også er en af hovedpointerne hos Stigler og Hiebert [1999].

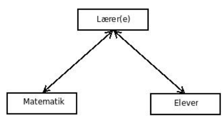
Det, som læreren vælger at lægge fokus på, vil afspejle, hvordan læreren ser relationerne mellem hjørnerne i den didaktiske trekant (se figur 2). Man kan betragte et didaktisk system, hvor der indgår lærer, elever og matematik på en måde, hvor eleverne interagerer med matematikken, og lærerens opgave vil være at orkestrere dette samspil (se figur 3). Man kan også opfatte relationerne således at læreren interagerer med matematikken og „ejer“ på den måde matematikken. Eleverne kan tilgå matematikken, men kun gennem læreren, og lærerens opgave bliver at tilmåle og videregive matematikken til eleverne (se figur 4).



Figur 2: Den didaktiske trekant



Figur 3: Læreren orkestrerer samspil



Figur 4: Læreren ejer matematikken

Jeg fremhæver disse to syn på relationerne i det didaktiske system, fordi de vil knytte sig til, hvordan læreren opfatter matematisk epistemologi. Undervisning i matematik vil indholde en mængde begreber, koncepter, definitioner og sætninger. Det er klart, at læreren fra starten kender disse, mens de er ukendte for eleverne. Det er lærerens opgave at gøre dem kendte for eleverne og gøre disse begreber til en del af elevernes viden. Den mest oplagte måde at udføre denne „flytning af viden“ på kunne umiddelbart synes at være, at læreren blot forklarer dem begrebet. På denne måde ejer læreren den matematiske viden, og han videregiver den til eleverne, svarende til figur 4. Skønt dette „tankpasserprincip“, hvor læreren ses som besiddende en viden, som han kan hælde på eleverne, med rette er udskældt som model for læring, er det dog en tankegang, man i praksis vil støde på.

Alternativt kan læreren se det som sin opgave at tilrettelægge undervisningen, så eleverne formår selv at udvikle begrebet og selv komme frem til den sandhed, som læreren fra starten ligger inde med. På denne måde involverer eleven sig selv i matematikken og kommer selv frem til resultater. Læreren står uden for denne interaktion og sikrer udviklingen af konceptet. Stigler og Hiebert [1999] henviser til TIMSS[2], som indholder en undersøgelse af 8. klasses matematiklektioner. Denne undersøgelse viser, at forholdet mellem *stated concepts* og *developed concepts* er gennemsnitligt 20/80 i Japan, mens det forholder sig lige omvendt i USA, hvor begreber altså kun i 20% af tilfældene udvikles af eleverne. [Stigler og Hiebert, 1999, p.61]

Undervisning vil forme sig forskelligt, alt efter hvilket syn på matematikundervisning læreren har. Hvis begreber primært fastslås og videregives af læreren, vil det sandsynligvis være vigtigere for læreren, at eleverne kender definitioner og begreber, end at de forstår baggrunden og rationalet for disse begreber. For at blive god til begreberne vil læreren give eleverne opgaver, som træner brugen af disse begreber. Dette vil almindeligvis blive gjort ved, at læreren viser eleverne, hvordan en opgave regnes. Derefter bliver de sat til at regne tilsvarende opgaver – eventuelt vil opgaverne stige en smule i sværhedsgrad. På denne måde bliver det primære fokus i matematik og matematikundervisning at lære begreber og træne procedurer. Eleven vil have en stor risiko for at få et billede af, at det i matematik er vigtigere at adlyde regler og huske beregningsmetoder, end det er at forstå baggrunden for reglerne og procedurerne

Omvendt vil den lærer, der mener, at eleverne selv bør udvikle begreber, mene at forståelse af baggrunden for en definition er lige så vigtig som definitionen selv. Derfor vil læreren give eleverne opgaver, hvor formålet er, at eleverne udforsker matematikken og selv kommer frem til definitionen. TIMSS-undersøgelsen viste, at mens 95% af amerikanske elevernes arbejdsopgaver blev brugt på at øve begreber,

[2]Third International Mathematics and Science Study

brugte japanske elever lige så meget tid på at øve begreber, som de gjorde på at udforske matematikken og selv komme frem til begreber [Stigler og Hiebert, 1999, p. 71].

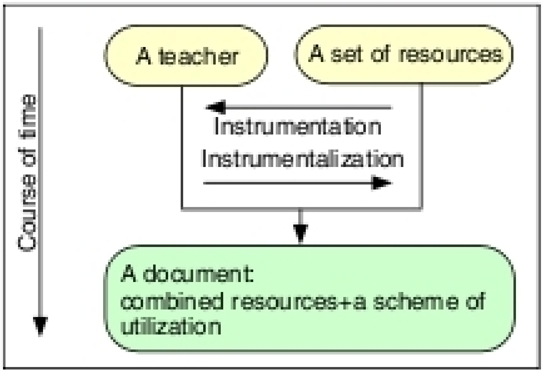
Naturligvis er det vigtigt at kende og træne de begreber, som eleverne har fået præsenteret. Stigler og Hiebert gør det dog klart, at dette vil være en ufuldkommen forståelse af, hvad matematik er:

> *„If students simply learn definitions to increase their mathematical vocabulary, they are just scratching the mathematical surface. If students use definitions to explore the deeper properties and relationships in mathematics, then they really are doing mathematics“* [Stigler og Hiebert, 1999, p. 58]

Lærerens overbevisning vil således meget direkte have en indflydelse på hvordan han vælger at bruge sin pædagogiske, faglige og pædagogisk faglige viden. For at sikre at eleverne „laver matematik“ bør selvstændig udforskning af det didaktiske miljø altså være en del af undervisningen.

2.2 Lærerens ressourcer

I arbejdet som lærer findes ressourcer, som man kan gøre brug af. Disse ressourcer understøtter og indgår både i forberedelsen og i den faktiske undervisning. Jeg vil – inspireret af Gueudet og Trouche [2009] – tolke ordet „ressourcer“ bredt, og således lade det omfatte alt hvad læreren benytter, det være sig lærebøger, opgavesamlinger, websider, arbejdsark, computerprogrammer, samtaler med kollegaer, CAS-værktøjer osv. Den mængde af ressourcer, som disse tilsammen udgør, danner grundlag for lærerens undervisning og forberedelse. I sig selv er ressourcerne, hvor avancerede og fyldestgørende de end måtte være, ikke direkte brugbare til undervisning. Gueudet og Trouche [2009] skelner mellem *ressourcer* og *dokumenter*. De udvider idéen om instrumental genesis, hvor man skelner mellem fx en lommeregner som artefakt og som brugbart instrument. Instrumental genesis er processen, hvoraf instrumentet skabes af artefakten. Denne idé udbygges, således at dokumenter skabes i en proces af læreren ud fra ressourcerne. Dokumentet bliver knyttet til den specifikke lærer, og selv med den samme ressourcemængde ville to forskellige lærere skabe forskellige dokumenter. Dokumentet skabes af læreren gennem lærerens brug af ressourcerne. Processen kaldes dokumental genesis (herefter DG), og er dobbeltrettet således at læreren på den ene side bearbejder ressourcerne i den proces som kaldes *instrumetalization*. Samtidig vil ressourcerne på den anden side indholde muligheder og begrænsninger, som vil have en indflydelse på, hvordan læreren kan arbejde med ressourcen. Dette, at ressourcen påvirker læreren, kaldes *instrumentation*. Disse to modsatrettede påvirkninger udgør tilsammen dokumenteringsprocessen (se figur 5), som leder frem til, at læreren skaber et dokument, som for denne lærer indeholder langt mere information end ressourcerne gjorde i sig selv.



Figur 5: Processen hvor dokumentet skabes (documental genesis)

DG skal ikke udelukkende ses som en proces, hvor læreren omskaber en række ressourcer til et dokument, for langt mere end bare at være et endeligt produkt vil det skabte dokument nu indgå i lærerens mængde af ressourcer. Dermed vil det skabte dokument være grundlag for nye dokumenter, og DG vil dermed blive en proces, der strækker sig ud over skabelsen af det enkelte dokument. På langt sigt vil det skabte dokument indgå i lærerens ressourcer, når fremtidig undervisning skal planlægges. De fleste lærere oplever at skulle undervise samme emne flere gange, og selvom det nogle gange vil være tilfældet, at et skabt dokument (fx et arbejdsark) genbruges, så vil det under næste forberedelse dog på ny indgå i mængden af ressourcer. Selvom det konkrete ark papir er det samme, så vil det nye dokument være skabt af en anden ressource-mængde end det oprindelige, fx vil erfaringer og evalueringer fra sidste undervisning spille ind. På denne måde bliver dokumentet et andet, til trods for at arbejdsarket tilsyneladende er det samme.

På kort sigt vil dokumentet også fortsat indgå i en proces. Allerede i den undervisning som dokumentet er skabt til, vil det indgå som en del af ressourcerne sammen med elevers indput. Dermed vil dokumenter, som skabes i timen (fx et Excel-regneark), have det oprindelige dokument som ressource. Endvidere vil eleverne, såfremt det fx er et arbejdsark, tage dokumentet til sig som en del af deres ressourcemængde. Dokumenter som de udarbejder, såsom noter og skriftlige afleveringer samt deres matematiske viden, vil bygge på dette dokument.

Komponenter Dokumentet skabes i DG, og Gueudet og Trouche [2009] opdeler processen i tre forbundne komponenter: Materielle, matematiske og didaktiske. Det er mere eller mindre oplagt, hvad de tre komponenter dækker over, selvom det kan være svært præcist at klassificere et aspekt som værende det ene eller det andet. De materielle komponenter er papir, computer, filer på computeren osv. Som regel vil de materielle komponenter i ressourcerne være forskellige fra de materielle komponenter hørende til dokumentet, men oftest vil der være et overlap i de to mængder. De matematiske komponenter er den til emnet hørende notation, teknikker, teori og opgaver. Didaktiske komponenter er lidt diffuse, og dækker bredt over alt fra måder at organisere undervisningen til lærerens overbevisninger. Både de matematiske og de didaktiske komponenter vil i en vis forstand gå igen både i ressourcer og i det skabte dokument.

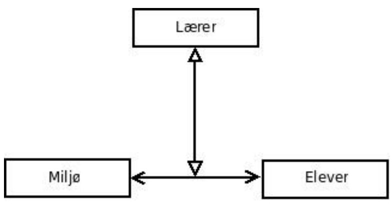
De didaktiske komponenter, som læreren gør brug af, kan som sagt være en mere eller mindre ubegrundet erfaring eller overbevisning, men kan også være en didaktisk teori. Ofte vil læreren benytte teorien ubevidst eller måske benytte den uden at kende den eksakte teori og begreberne herfra.

2.3 Teorien om Didaktiske Situationer

Jeg vil i dette afsnit fremhæve aspekter og begreber fra Teorien om Didaktiske Situationer (herefter TDS). Jeg vil ikke beskrive TDS i detaljer, men kun fremhæve begreber, som jeg observerede var en del af lærerens didaktiske komponenter, og som jeg derfor fandt relevante under min observation af lærernes forberedelse.

Didaktisk kontrakt

Winsløw [2007] beskriver undervisningssituationen som *„en kombination af to 'spil': elevens arbejde med det af læreren arrangerede didaktiske miljø, [...] og lærerens spil med dette arbejde“* [Winsløw, 2007, p. 137] (se figur 6). Eleven vil vinde spillet ved at tilegne sig emnet, og læreren vil på samme måde vinde spillet ved at have konstrueret og tilpasset det didaktiske miljø, således at eleven opnår den tilsigtede viden. Målet er således det samme: at eleven lærer. Spillereglerne, som hører til dette spil, består af implicitte og eksplicitte gensidige forventninger og forpligtelser. Disse kaldes den „didaktiske kontrakt“. Kontrakten er som sagt dobbeltrettet, og vil først blive tydelig i det øjeblik enten lærer eller elever bryder kontrakten. Det kan selvfølgelig være et bevidst valg at bryde kontrakten, fx kan eleven vælge at lade være med at forberede sig. Oftest vil et brud på kontrakten dog skyldes, at de forventninger lærer og elever har til hinanden, ikke er blevet afstemt, idet de netop er implicitte. Eleven kan således fx have en forventning til, at læreren introducerer et nyt begreb ved at gennemgå det ved tavlen. Hvis læreren så vælger at give eleven en opgave, som har det formål, at eleven selv kommer frem til begrebet, vil eleven kunne opfatte dette som et brud på kontrakten.



Figur 6: Det didaktiske dobbeltspil

I den didaktiske kontrakt er et paradoks nemlig det, at *„hvis den ikke forsvinder, kan den ikke opfyldes.“* [Winsløw, 2007, p. 146]. Hvis eleven fokuserer på at opfylde kontrakten, vil det ikke være muligt at vinde det didaktiske spil. En berømt situation, som beskriver dette, er opgaven om kaptajnens alder: „På et skib er der 26 får og 10 geder, hvor gammel er kaptajnen?“. Opgaven gives til elever i 2. klasse. Hvis eleven er fokuseret på at opfylde den didaktiske kontrakt og samtidig har en forventning om, at læreren også opfylder den, vil eleven svare 36.

Hvis eleverne tilstrækkeligt mange gange oplever, at de ikke behøver forholde sig kritisk til de opgaver, læreren stiller, er der altså en fare for, at elever stopper med at tænke over de opgaver, de bliver stillet, samtidig med at læreren kun stiller opgaver som er „idiot-sikre“. Resultatet vil blive, at når eleven støder på en opgave, som ikke umiddelbart lader sig løse på kort tid, vil dette blive opfattet som, at læreren har brudt kontrakten.

Adidaktiske situationer

Det ovenfor beskrevne didaktiske spil består som sagt af to spil. Det spil hvor eleven arbejder med miljøet, kan antage to former. Enten interagerer eleven med det didaktiske miljø uden lærerens indgriben, eller også orkestrerer læreren direkte elevens arbejde. Situationen uden lærerens indgriben kaldes adidaktisk, mens den anden situation kaldes didaktisk. Undervisning vil veksle didaktiske og adidaktiske situationer. Winsløw [2007] argumenterer for at *„den primære læringssituation er elevernes eget samspil med det didaktiske miljø, hvor læreren i det væsentlige ikke griber ind.“* [Winsløw, 2007, p. 139]. Det er altså vigtigt, at læreren har fokus på det *adidaktiske potentiale*, når han forbereder og skaber et didaktisk miljø, som eleven kan interagere med. Det adidaktiske potentiale er de muligheder, som eleven har for selvstændigt at udforske det didaktiske miljø.

Specielt i forbindelse med adidaktiske situationer kommer den didaktiske kontrakt til at spille en stor rolle. Da adidaktiske situationer skal naturligvis være lærerige, og eleverne bør blive udfordret. Samtidig skal miljøet være åbent. En stor fare ved adidaktiske situationer er den såkaldte *jourdain-effekt*, hvor læreren konstruerer et miljø eller en opgave, hvor eleverne – mere eller mindre ukritisk –

skal følge en vejledning. Når eleverne når bunden af vejledningen, har de angiveligt vist en matematisk sætning. Således bliver miljøet ikke tilstrækkeligt åbent og den tillærte viden – hvis der overhovedet kommer „viden“ ud af en sådan opgave – er ikke personlig viden. Da eleverne arbejder uden lærerens indblanden, vil det blive meget tydeligt, hvis lærer og elever ikke har samme opfattelse af den didaktiske kontrakt. I en didaktisk situation vil læreren i de fleste tilfælde hurtigt kunne specificere de implicitte forventninger, som han har til eleverne i forbindelse med det opstillede didaktiske miljø, såfremt han oplever, at eleverne bryder den didaktiske kontrakt.

2.4 GOA-modellen

Disse teorier om lærerviden, didaktiske systemer og skabelse af dokumenter kan give et indblik i, hvordan viden udveksles, bruges og udvikles. Dette vil altid ske i relationer. Disse relationer kaldes epistemiske systemer, og komponenterne i dette system lader sig observere og beskrive med GOA-modellen [Winsløw, 2008]. GOA-modellen er et begrebsapparat, som tillader os at arbejde konkret med, hvad vi observerer i et epistemisk system (herefter ES).

I GOA-modellen beskrives et ES som en tripel (G, O, A) bestående af en Gruppe af individer, en Organisation af viden og et mængde Artefakter.

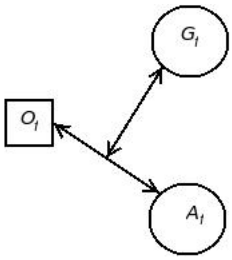
Når en viden skal læres og undervises, vil der indgå en gruppe af mennesker, som er i en relation omkring denne viden. Individerne i denne gruppe kan antage forskellige roller. Disse roller samt størrelsen af gruppen afhænger af det betragtede ES. En almindelig situation vil fx være, at gruppen består af en lærer og elever, men systemet kan lige så godt være en situation, hvor den gruppe af mennesker der indgår er flere lærere, der samarbejder om at fremstille et undervisningsforløb.

Den viden, som gruppen beskæftiger sig med, er i sig selv organiseret i viden, erfaring og praksis. Organisationen kan være begrænset til et meget specifikt område eller en specifik opgave, men det kan også omfatte et større matematisk begreb. Organisationen er ikke relativ til gruppen, snarere omfatter organisationen hele det matematiske område forstået som abstrakt begreb. De matematiske og didaktiske komponenter der blev nævnt i afsnit 2.2 vil begge være en del af organisationen omkring emnet. Begge disse vil dog både knytte sig til organisationen forstået som abstrakt begreb og til en form for personlig forståelse af organisationen. Dette gør sig specielt gældende for de didaktiske komponenter. Eksempelvis vil en kendt misconception, såsom „en funktion har et maksimum eller minimum i en given x-værdi, hvis den afledte funktion er 0 ved denne værdi“, samt kendte metoder til at imødekomme denne misconception, være en del af organisationen forstået som person-uafhængigt begreb, mens en didaktisk overbevisning eller erfaring såsom at „elever forstår bedst et begreb ved at få teorien præsenteret før eksempler“ vil være en del af den pågældende lærers opfattelse af organisationen.

Gruppen har, afhængig af situationen, brug for artefakter til at tilgå den viden som er i fokus. Artefakterne omfatter de materielle ting, som grupper bruger såsom papir, bøger, lommeregnere, overheads, computere osv. Artefakterne vil svare til de materielle komponenter nævnt i afsnit 2.2.

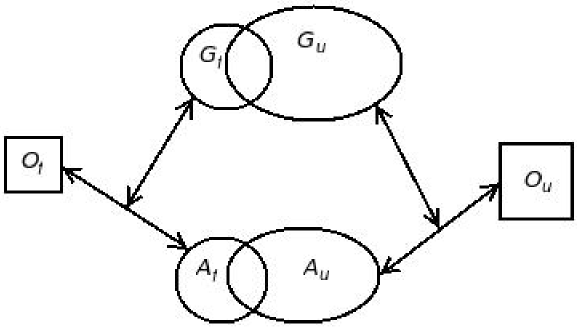
Artefakterne er vigtige for, at gruppen kan arbejde med organisationen. Specielt i forhold til matematik er vi i den situation, at de begreber og repræsentationer vi arbejder med, grundlæggende har en skriftlig karakter [Winsløw, 2007, p. 158]. Dermed vil en situation, hvor en gruppe vil forsøge at interagere med en organisation af viden uden brug af artefakter, ganske givet ikke blive frugtbar [Winsløw, 2008, p. 2]. Dog vil det være forkert at sige, at gruppen interagerer med organisationen *igennem* artefakterne. Snarere arbejder gruppen med et samspil mellem organisationen og artefakterne. Artefakterne skaber således muligheder og begrænsninger for, hvordan gruppen kan tilgå organisationen. Samtidig vil organisationen skabe muligheder i artefakterne. Artefakterne i sig selv indeholder ikke viden. At gruppen kan bruge disse til læring sker kun, fordi artefakterne bruges i samspil med organisationen. Samspillet i denne GOA-model er illustreret i figur 7.

Jeg vil i observationsafsnittet give eksempler på, hvordan denne model bruges, både ved at vise, hvordan samspillet kan beskrives inden for et ES og ved at benytte modellen til beskrive overgangen mellem to ES. De epistemiske systemer, jeg vil betragte, er: lærerens forberedelse (G_f, O_f, A_f) og lærerens undervisning



Figur 7: Samspillet i et ES

(G_u, O_u, A_u). Ved hjælp af modellen vil det blive muligt at arbejde konkret med samspillet og overgangene mellem de to systemer. I den danske undervisningstradition består G_f almindeligvis kun af én lærer, og denne lærer vil også være en del af G_u, oftest som den eneste lærer i denne gruppe. Under forberedelsen vil læreren gøre brug af diverse artefakter, såsom lommeregner og lærebog. Begge disse vil også være del af A_u. Således vil de to systemer indeholde overlap. Figur 8 illustrerer, hvordan disse to systemer forholder sig til hinanden.



Figur 8: Samspillet mellem to epistemiske systemer

3 Metodologi

Observation er på samme tid både enkelt og meget kompliceret. Umiddelbart er observation blot at betragte. Hvad øjet ser kan der ikke stilles spørgsmål ved, og således er det blot at gengive, hvad man med øjet har set. På den anden side er intet ved observation trivielt. Der kan stilles spørgsmålstegn ved alt i observationen, og man kan gøre sig overvejelser om alt, der vedrører observationen. Hvad vil man observere? Hvordan vil man observere? Vil det observerede lade sig observere? Vil det øjet ser være udtryk for, hvordan virkeligheden er?

Det bliver hurtigt klart, at den naive opfattelse af observation ikke slår til. Allerede udvælgelsen af observationsmetode og lærere vil involvere en subjektiv bedømmelse. Dermed bliver observationen „farvet“ af observatørens holdninger, allerede inden den går i gang.

At dén „objektive observation“ tilsyneladende ligger uden for rækkevidde er imidlertid ikke et problem. For ikke at samle uoverskueligt store mængder ubrugeligt data er det klart, at min observationen bør være farvet af, hvad jeg vil observere. Der bør være forskel på, om jeg fx undersøger lærerens forberedelse eller lærerens kendskab til pensum. Spørgsmål, både implicitte og eksplicitte, og fokusområder vil naturligvis være forskellige i de to tilfælde. Selvom det altså ikke er et problem, er det dog noget, man skal gøre sig klart, og et faktum man skal indordne sin tolkning af observationen under.

3.1 Observationsmetode

Jeg valgte at observere lærerne vha. flere forskellige metoder. Dette er der flere begrundelser for [Dinham, 2002, p.329]. Den traditionelle begrundelse er, at flere metoder styrker troværdigheden af de observerede resultater. Således vil man regne med, at alle de brugte metoder giver samme resultat, og de øvrige observationsmetoder blot virker som en slags validering af, hvad den primære observation fortalte os. Naturligvis er det korrekt, at flere observationsmetoder der giver anledning til samme fortolkning, alt andet lige styrker de fundne resultater. Dinham [2002] antyder dog, at man begrænser sig selv ved kun at have dette syn på brugen af flere forskellige observationsmetoder:

> *„The traditional view stems from the expectation that there exists – for any given research question – a verifiable finding to be discovered, a single outcome to be revealed.“* [Dinham, 2002, p. 331]

Andre begrundelser for brugen af flere metoder vil tillade en mere åben og undersøgende observation, hvor resultatet ikke er givet på forhånd.

Dinham [2002] giver eksempler, hvor brug af forskellige metoder har andre begrundelser end blot at styrke troværdighed. Eksempelvis kan én metode bruges til at observere „hvad“, mens en anden metode observerer „hvorfor“. Eller en observationsmetode kan have som formål at samle information og data, som ligger til grund for konstruktion af en anden observationsmetode.

Da observation af lærerforberedelse er forholdsvist nyt, var jeg ikke i den situation, at jeg på forhånd havde en formodning om, hvad jeg ville observere. Som følge heraf ville det være naivt kun at benytte en observationsmetode. Samtidig ville det dog resultere i alt for meget data og være en kende hovedløst, blot at begynde at observere et antal lærere med så mange observationsmetoder som muligt.

Formålet var at undersøge gymnasielæreres forberedelse, og få et indblik i hvilke tanker læreren gør sig under forberedelsen. Dette i sig selv fastlægger ikke en bestemt observationsmetode som umiddelbart synes mere frugtbar end andre metoder. Da forberedelse har forbindelse til undervisning, var det dog fra starten klart, at jeg ønskede at observere både forberedelse og undervisning.

Metoder

Jeg vil i dette afsnit beskrive de metoder, jeg primært gjorde brug af under min observation. Jeg vil også beskrive hvilke forventninger, jeg på forhånd havde til metoderne. Jeg vil først i afsnit 5 diskutere, hvilke fordele og ulemper der i praksis var forbundet med de forskellige metoder. Jeg vil også her reflektere over, hvilke metoder der viste sig mest frugtbare og hvilken type resultater, de forskellige metoder bidrog med.

Interview

Før den egentlige observation mødtes jeg med lærerne til et interview. Formålet med disse interviews var, at danne mig et billede af, hvordan de er som lærere. Bland andet ønskede jeg en indsigt i, hvilke overbevisninger og værdier de havde om matematik og om det at undervise. Naturligvis ville jeg også gerne vide noget om, hvilke holdninger og tanker de – med egne ord – havde om det at forberede sig.

Interview har den fordel, at læreren fortæller, hvilke holdninger han har. Det er muligt at stille uddybende spørgsmål, således at jeg sikrer mig at jeg forstår hvad læreren mener. Observationsmetoden er meget direkte, og jeg kan som observatør under interviewet forholde mig objektivt til de udtrykte meninger og holdninger. Metoden giver meget data, og potentielt er denne data pålidelig.

Lærerne var på forhånd informeret om, hvad formålet med mit speciale er, og dette gav naturligvis lærerne en mulighed for at fokusere netop på dette aspekt i deres besvarelser. At lærerne frivilligt bruger deres tid på at hjælpe bør dog ses som en indikator på, at de ikke bevidst ønsker at påvirke observationen. På trods af dette kan det ske, at en lærer ubevidst kommer til det, fordi han vil forsøge at „imponere“ observatøren.

Ulempen ved at bruge interview er derfor, at man kan risikere, at læreren tillægger sin forberedelse eller undervisning egenskaber, som ikke svarer til virkeligheden. Dette er specielt en fare, når man undersøger et område som forberedelse. Lærerne forbereder sig sædvanligvis alene og bliver sjældent eksplicit stillet til regnskab for deres forberedelse. Læreren vil muligvis have en tilbøjelighed til at blande nogle aspekter ind, om hvordan de gerne ville forberede sig. Måske er lærerne ikke klar over, at de i virkeligheden ikke forbereder sig på denne måde.

Endvidere er der stor sandsynlighed for, at læreren udelader noget, fordi han ikke finder det interessant, og dermed ikke tror observatøren har en interesse i det. Noget kan også blive udeladt, fordi læreren simpelthen ikke selv er opmærksom på det. Dette er igen specielt en risiko ved arbejde som forberedelse, da læreren gennem erfaring kan have tillagt sig ubevidste rutiner og arbejdsmetoder, som han ved virker for ham.

Jeg var derfor på forhånd indstillet på risikoen for, at interviewet ville tegne et for pænt og utopisk billede af lærerens arbejde.

Under interviewet tog jeg noter, samtidig med at interviewet blev optaget på diktafon. Alene det, at observatøren tager noter, kan medvirke til, at lærerens besvarelser ændres. Hvis læreren ser, at observatøren noterer ekstra meget efter et specifikt svar, kan læreren måske opfatte dette negativt og begynde at forklare yderligere for at få observatøren til at ændre det nedskrevne.

Forberedelses-observation

Der var i selve observationen to hovedelementer, jeg ønskede at observere: selve forberedelsen og modulet, hvor den forberedte undervisning blev afholdt for eleverne. Under de to observationer benyttede jeg forskellige værktøjer og forskellige metoder til at observere.

Når man vil observere forberedelse, er det første åbenlyse problem, at tanker ikke direkte lader sig observere. Man er derfor nødt til at træffe nogle valg, som kan gøre lærerens tanker tilgængelige. Ligegyldigt hvilke valg man træffer, vil der være fordele og ulemper forbundet med det.

Det er ikke givet, at læreren giver tilladelse til, at observatøren er tilstede under selve forberedelsen. Man vil i den situation være nødsaget til at tolke forberedelsen ud fra de noter og dokumenter, som læreren har fremstillet under forberedelsen, samt stille spørgsmål til læreren omkring forberedelsen. Denne type observation vil skjule information for observatøren. De tildelte noter vil muligvis være renskrevne og – for at lette observatørens arbejde – mere udførlige, end de ellers havde været. Derudover er eneste kilde, til at forstå hvilke tanker der ligger bag de udfærdigede noter, at spørge læreren. Læreren er muligvis ikke selv klar over, hvilke ressourcer der har været årsag til de enkelte dele af dokumenterne.

At observatøren er tilstede under forberedelsen skaber dog en kunstig og opstillet situation for læreren. Ud over det åbenlyse faktum at observatørens tilstedeværelse vil gøre situationen uvant, vil mange praktiske omstændigheder spille ind og medvirke til, at forberedelsen bliver forskellig fra, hvordan læreren normalt forbereder sig. De forberedelser, jeg observerede, blev flyttet til skolen for at gøre observationen mulig. Nogle lærere kan have et sted, hvor de altid forbereder sig, og hvor de føler sig mest produktive. Dette kan være et sted, hvor de har adgang til bøger, lommeregnere og andre ressourcer, som de normalt benytter i forbindelse med deres forberedelse. Derudover havde forberedelsen en klar tidsmæssig afgrænsning og blev koncentreret til én time.

Fordelen ved at være tilstede er imidlertid, at observatøren får en bedre mulighed for at forstå de endelige noter, idet observatøren kender det første udkast til noterne og samtidig har et indblik i kronologien i forberedelsen. Når observatøren således er tilstede, er der flere muligheder til at opnå forståelse for lærerens tanker bag forberedelsen. Den umiddelbart mest oplagte mulighed er at udspørge læreren om hvad han tænker, og stille spørgsmål til de ting han gør i løbet af forberedelsen, og fx spørge om en begrundelse for at hun slår op i et eksamenssæt, eller hvorfor hun regner en bestemt opgave. Jeg vurderede, at denne tilgang ville gøre situationen endnu mere uvant, og fjerne den yderligere fra hvad normalen er. Endvidere ville disse afbrydelser ødelægge det flow, der er i forberedelsen. Da et formål med observationen var at få et realistisk indblik i lærerens forberedelse, valgte jeg en anden tilgang.

Observatøren har ved sin tilstedeværelse mulighed for at bemærke, hvad læreren, bevidst eller ubevidst, foretager sig under forberedelsen. Jeg valgte at tage noter under forberedelsen. Her prøvede jeg at observere så mange af lærerens handlinger som muligt. Da læreren var færdig med forberedelsen, kunne jeg stille spørgsmål til de ting, jeg havde bemærket. Såsom hvilke bøger han slog op i, hvilke opgaver han regnede, og hvilke ændringer i forberedelsen han foretog. Det korte interview omkring forberedelsen optog jeg vha. diktafon.

Ved at videofilme forberedelsen får man i udgangspunktet en helt objektiv observation. Ud fra optagelsen kan man gøre sig kvantitative observationer i forhold til tid, og hvilke ressourcer der bliver brugt, og hvor ofte de bliver brugt. Derudover giver videooptagelse mulighed for at genkalde sig forberedelsen senere.

Videooptagelse kan også bruges alene. Fordelen ved dette kan være, at observatøren ikke påvirker forberedelsen med sin tilstedeværelse. Ulempen er dog, at observatøren mister muligheden for at stille spørgsmål umiddelbart bagefter. Hvis observatøren ønsker at stille spørgsmål, vil det derfor blive, når han har set videoen igennem. Spørgsmålet vil derfor blive stillet på et tidspunkt, hvor læreren ikke har situationen frisk i hukommelsen.

Jeg fik en kopi af de noter, som læreren fremstillede i løbet af forberedelsen. Ud over at de var en del af forberedelsen og gav indblik i de tanker, læreren havde haft, var de også en støtte under observationen af undervisningen.

Undervisnings-observation

Jeg fik mulighed for at observere den undervisning, der hørte til forberedelsen. Igen er der mange overvejelser at gøre sig, og hvert valg har sine fordele og ulemper. Da formålet stadig var at lave en realistisk observation af et „normalt" undervisningsmodul, valgte jeg at forholde mig så anonymt og neutralt som muligt. Dette betød blandt andet, at jeg under hele modulet blev siddende samme sted, og dermed ikke kunne følge detaljeret med i, hvad de enkelte elever lavede, og ikke mindst hvad læreren svarede på, når de snakkede med elever på tomandshånd.

Et videokamera kunne have opfanget nogle detaljer både i lærerens undervisning og i elevernes arbejde, men jeg vurderede, at et kamera ville ændre den normale undervisning for meget i forhold til betydningen af de førnævnte detaljer.

Jeg var fra starten klar over, at det ville ligge uden for specialets område at beskæftige sig med, hvad eleverne lærte i modulerne, og hvordan de oplevede lærerens undervisning. Af den grund vurderede jeg, at der ikke ville være yderligere information at hente ved at interviewe eleverne.

Ved at indsamle kopier af elevernes noter og skriftlige afleveringer kunne jeg muligvis få et svagt indblik i, hvorledes eleverne brugte lærerens dokumenter som del af deres ressourcer. Jeg vurderede dog, at dette kun ville have perifer interesse for mit speciale, og jeg undlod derfor at gøre det.

Under modulet havde jeg som sagt både mine egne og lærerens noter fra forberedelsen til min rådighed. I løbet af hele modulet tog jeg noter. Nogle af disse noter omhandlede lærerens undervisning, mens andre var kronologiske og fungerede som en slags tidsobservation. Endvidere optog jeg modulet vha. diktafon, for at opfange detaljer som jeg ikke ville få med i mine noter, samt til at understøtte min hukommelse når jeg bearbejdede observationen.

Data

Jeg vil i dette afsnit forsøge at strukturere og overskueliggøre den data, jeg indsamlede, og som ligger til grund for min observation.

Anna

Forberedelse

- 2 × Video-optagelse.
- 2 × interview omkring forberedelse.
- Annas håndskrevne noter.
- Arbejdsark med grafer.
- Kladde til skriftlig aflevering.

Undervisning

- 2 × observation vha. diktafon og noter

Andet

- Initielt interview.
- Kopi fra lærebogen.
- Arbejdsark udleveret ugen før den observerede periode.
- Skriftlig aflevering udarbejdet under forberedelsen.

Birgit

Forberedelse

- En observation af forberedelse (uden video).
- Interview omkring den observerede forberedelse.
- Interview før undervisning.
- Birgits håndskrevne noter til tre af de fire moduler.
- 4 $\times$ arbejdsark.

Undervisning

- 4 $\times$ observation vha. diktafon og håndskrevne noter

Andet

- Initielt interview.
- Kopi fra anden lærebog.

Christian

Forberedelse

- Christians håndskrevne noter
- Interview før undervisning.

Undervisning

- 4$\times$ observation vha. diktafon og håndskrevne noter
- Et interview efter et undervisningsmodul.

Andet

- Initielt interview.
- Kopi fra lærebogen.
- Guidelines for IB: Mathematics HL [IBO, 2006]

4 Observation

Som udgangspunkt for dette speciale valgte jeg at observere tre lærere og ud fra denne observation se på enkelte situationer. Med dette udgangspunkt er det klart, at jeg ikke havde nogen forventning om, at mine observationer ville give et repræsentativt indblik i danske gymnasielæreres forberedelse. Jeg observerede med det formål at finde situationer, som jeg kunne skabe cases omkring. Observationen bestod af lærerene Anna, Birgit og Christian, som alle er lærere på samme gymnasium. De sagde alle frivilligt ja til at deltage i projektet. Da deres involvering indebar, at de skulle bruge ekstra tid på at snakke med mig både før og efter undervisning, mener jeg, at det bør tolkes som, at læreren har en interesse i at fremme matematikundervisningen.

Gymnasiet, som de tre lærere er tilknyttet, er et stort gymnasium i København. På dette gymnasium inddeles dagen i 4 moduler á hver 100 minutter.

Kronologisk forløb observationen således, at jeg først observerede Anna i to på hinanden følgende moduler. Derefter fulgte jeg Birgit og Christian i en periode på tre uger, således at jeg for hver af dem observerede 4 moduler. Inden jeg gik i gang med observationerne, lavede jeg et initielt interview med hver lærer. Ud fra dette interview dannede jeg mig et billede af, hvordan læreren er, hvilke overbevisninger læreren har og hvordan læreren med egne ord ser på forberedelse og undervisning. Spørgsmålene i interviewet inddelte sig naturligt i kategorierne: læreren, klassen, matematik, forberedelse og undervisning.

Jeg vil først beskrive de tre lærere, og derefter for hver lærer beskrive observationen af dem. Jeg vil ikke beskrive hver observation i detaljer, men fremhæve de interessante aspekter. Jeg vil yderligere beskrive, hvordan jeg gjorde observationen mulig, og hvilke observationsmetoder jeg benyttede.

4.1 Lærerne

Jeg vil i dette afsnit beskrive de tre lærere. Beskrivelsen er primært bygget på det initielle interview, men samtidig beskriver den det indtryk, jeg fik af læreren over hele observationsperioden.

Lærer Anna

Læreren er en 32-årig kvinde, der har undervist i matematik i 6 år. Interviewet gav indtryk af Anna som en meget engageret lærer, der ud over at undervise har et deltidsjob, hvor hun arbejder med at forberede og udruste de elever, der skal til matematik olympiade. Derudover afholder hun aften-forelæsninger, hvor enhver inviteres til at høre om et matematisk emne præsenteret på en tilgængelig og populær måde. Dette, mener jeg, bør tolkes som en stor interesse for det at videregive matematik, og som at læreren er villig til at gøre en ekstra indsats. Hun sagde under interviewet, at hun „elsker matematik!“, og hun ønsker at medvirke til, at hendes tilhørere, om end kun kortvarigt, oplever samme fascination af matematikken, som hun selv har.

Under interviewet var det tydeligt, at én af Annas overbevisninger er, „at differentieret undervisning er umagen værd“. Dette kom blandt andet til udtryk ved, at hun, ugen inden jeg observerede, havde fremstillet arbejdsark omhandlende *tangent og monotoni*, som skulle bruges til gruppearbejde. Grupperne var sat sammen af Anna, og arbejdsarkene til de enkelte grupper var forskellige. Arbejdsarkene omhandlede naturligvis samme emne. Det vil sige, at efter at have løst opgaverne på arket vil alle grupperne have gennemgået samme mængde teori, og have stiftet bekendtskab med de samme begreber og definitioner. Forskellen på arkene var, hvor megen information de indeholdt, og hvor åbne spørgsmålene var. Eksempelvis sluttede opgave 1, på de arbejdsark der indeholdt meget information med, at eleverne skulle formulere en sætning om sammenhængen mellem differentialkvotient og en funktions monotoniforhold. Eleverne med de åbne arbejdsark blev yderligere bedt om at bevise den sætning.

Denne brug af undervisningdifferentiering gør ikke, at eleverne med de åbne arbejdsark lærer mere. Anna beskrev det således: *„Alle skal kunne det samme, men de gode grupper har selv fundet ud af det og har set flere nuancer i sammenhængen.“*

Klassen Den klasse, som Anna underviste, mens jeg observerede, var en 2.g klasse med 29 elever. Deres studievalg, betød at de havde matematik på A-niveau. Klassen var generelt interesserede i matematik og var villige til at gøre en indsats for at lære det. Elevernes evner var efter Annas udsagn jævnt fordelt, således at klassen indeholdt både stærke og svage elever.

De observerede moduler var hhv. 3. og 4. modul, hvilket ifølge Anna betød, at de kunne være ukoncentrerede. Anna prøvede dog så vidt muligt ikke at tage for stort hensyn til dette, men ønskede at gennemføre „normal“ undervisning alligevel.

Forberedelse Anna forbereder sig primært derhjemme, men bruger enkelte gange mellemtimer på skolen til at forberede sig. Hun forbereder sig mest alene og diskuterer kun sjældent hendes forberedelse og undervisning med de andre lærere. Samarbejde med andre lærere blev mest brugt til administrative opgaver. Hendes egen forberedelsestid bliver mest brugt til decideret undervisnings-forberedelse samt at opdatere Lektio[3].

Undervisning Anna føler, at hun har frihed til at undervise på den måde, hun har lyst til. Hverken skolens ledelse eller kollegaer har forventninger eller krav til, hvordan hun tilrettelægger sin undervisning, så længe hun blot overholder kravene fra læreplanen [Undervisningsministeriet, 2007]. Selvom hun således har stor frihed mht. undervisning og dermed også med hensyn til forberedelse, er der dog begrænsninger, som Anna føler sig nødsaget til at tage med i sin forberedelse. Skolen har et lærebogssystem [Tolnø et al., 2005b], som alle matematiklærere på dette gymnasium bruger. Dermed har læreren ingen valgfrihed mht. lærebog. De fysiske rammer på skolen, såsom størrelse og indretning af klasseværelser og gange, er en begrænsning, i forhold til hvilke undervisningsformer Anna føler hun har mulighed for at gøre brug af.

Anna gav udtryk for, at lærebogen og den tilhørende opgavebog var udmærkede, men at hun ikke fulgte lærebogen „slavisk“. Hun brugte nogle gange eksempler og opgaver fra bøgerne. Hvis opgaverne eller eksemplerne ikke passede til, hvad hun mente klassen skulle fokusere på lige nu, modificerede hun dem til at passe, eller hun konstruerede selv nye opgaver.

[3]Lektio er et webbaseret værktøj, som tillader læreren at kommunikere skema og skemaændringer til eleverne.

Gangene på skolen er meget smalle og uden borde, så hvis eleverne skal regne i grupper og gerne sidde lidt spredt, er Anna nødt til at sende dem til et studieområde. Anna har erfaring med, at denne klasse har svært ved at holde koncentrationen, hvis de får frihed til at arbejde selv uden en lærer i nærheden. Klasseværelserne er meget små, hvilket gør det svært for læreren at bevæge sig rundt for at give individuel hjælp, og samtidig gør det lydniveauet i klassen højere. Dette har nogle gange indflydelse på, hvilke undervisningsformer hun vælger at bruge. Selvom hun i interviewet gav udtryk for, at hun mener, at gruppearbejde er en god arbejdsform for eleverne, brugte hun det ikke så ofte, som hun gerne ville, fordi de fysiske forhold ikke tillod det. Hvis hun havde mulighed for det, sørgede hun for at reservere et ekstra lokale, så hun kunne sende nogle grupper derind.

I klasselokalet er der små tavler langs væggen. De lærere jeg observerede, så forskellige muligheder i disse. Anna brugte dem på den måde, at hun delte klassen op i såkaldte „matrixgrupper", hvor eleverne i hver gruppe sætter sig ind i forskellige beviser. Derefter blandes grupperne, og hver elev skal så forklare sit bevis til de øvrige elever i gruppen. Til denne arbejdsform mente Anna, at de små tavler var et fantastisk redskab, idet eleverne vha. dem kunne „forelæse" for hinanden.

Anna mente, at hun gjorde brug af mange forskellige arbejdsformer, og hun mente ikke, at der i hendes undervisning er en fast form. Dog indgår gruppearbejde som oftest i en eller anden udstrækning. Enkelte gange bruges hele modulet til gruppearbejde. Dette er gerne med et arbejdsark forberedt af læreren. Andre gange er det korte 10 minutters intervaller, hvor eleverne løser opgaver sammen med dem, de sidder i nærheden af. Anna giver udtryk for, at hun helst ikke bruger for lang tid af gangen på at undervise ved tavlen, og langt de fleste moduler foregår som en vekslen mellem tavleundervisning og „pararbejde". Nogle emner, mener Anna, kræver, at hun bruger fx 40 minutter på tavlegennemgang. Hun giver samtidig udtryk for, at hun kan mærke på eleverne, at det er „grænsen" for, hvor lang tid de kan holde fokus på tavle-undervisning.

Lektier Den type lektier, som læreren giver eleverne, kan være af meget forskellig type. Det kan være at læse et afsnit i lærebogen eller løse nogle opgaver.

Lektierne kan også være af mere abstrakt art, fx at eleven skal have sat sig så meget ind i et emne, at vedkommende kan løse opgaver uden at bruge hjælpemidler. Oftest er lektien en kunnen, eksempelvis: „I skal kunne definere: Hvad er en potensfunktion" eller „I skal kunne finde foreskriften for en potensfunktion, hvis I kender to punkter" – uden hjælpemidler.

Anna ser, efter eget udsagn, i stor udstrækning opgaver som et pædagogisk værktøj, og hun mener ikke, at der er noget konstruktivt at hente i at gennemgå opgaver, som eleverne har regnet hjemme. Klassen har en skriftlig aflevering cirka hveranden uge. Anna bruger lang tid på at rette disse opgaver, men hun mener, det er nødvendigt, da eleverne i forbindelse med disse opgaver lærer at „formulere sig matematisk korrekt".

Lærer Birgit

Birgit er en kvindelig lærer med 7 års undervisningserfaring. Hun har kun været ansat ved dette gymnasium et halvt år. Hun har bifag i fysik og underviser i begge fag. Birgit gjorde i det initielle interview opmærksom på, at den forberedelse, jeg ville observere, sandsynligvis ville blive lavet i sidste øjeblik, og at der ville være meget lidt struktur i både undervisning og forberedelse. Dette skyldtes, at hun havde meget lidt overskud, da hun var gravid, og efter eget udsagn meget træt.

Klassen Klassen er en 1.g-klasse med matematik på B-niveau. Birgit mener, at størstedelen af klassen har valgt studieretningen på grund af andre fag end matematikken. Dermed bliver matematik et nødvendigt onde. Dette giver sig primært udslag i elevernes matematiske evner og ambitionsniveau. Skønt eleverne ikke er videre interesserede i matematik, har de dog forholdsvist højt aktivitetsniveau og er rimeligt engagerede i timerne. I klassen er der en gruppe dygtige elever og en stor gruppe elever der ligger omkring „dumpegrænsen". Elevernes faglige niveau er altså ikke jævnt fordelt.

Forberedelse Birgit forbereder sig normalt forholdsvist kort tid før undervisningen, fx aftenen inden eller i løbet af formiddagen. Hun forbereder sig en halv til en hel time pr. modul. Hun giver udtryk for, at denne forberedelse typisk munder ud i et A4-ark med forholdsvist detaljerede noter. Dette noteark medbringer hun til undervisningen.

Da Birgit for nylig har skiftet til dette gymnasium, har hun også for nylig skiftet til dette lærebogssystem. Hun giver udtryk for, at hun ikke er blevet fortrolig med dette lærebogssystem og dets måde at præsentere matematikken på. Dette påvirker hendes forberedelse meget.

Under interviewet bliver det tydeligt, at Birgit mener, at det er meget vigtigt at eleverne oplever, hvorledes matematik kan bruges som redskab i andre fag. Da fysik er hendes bifag, er det primært relationen mellem fysik og matematik, hun mener er interessant. Hun giver udtryk for, at hun godt kan lide at have samme klasse i både fysik og matematik og i løbet af et undervisningsmodul referere til forsøg, sætninger og begreber fra det andet fag.

Birgit bruger meget af sin forberedelsestid på at rette elevernes skriftlige afleveringer. Ofte mere tid end der er afsat til det. Dog mener hun, som Anna, at disse opgaver er nødvendige, da eleverne med disse afleveringer „lærer noget, som de ikke lærer i timerne“.

Undervisning Birgit føler, at hun kan undervise, som hun helst vil. Dog mener hun ikke, at dette gymnasium har stor nok fokus på brugen af IT-værktøjer. Hun mener ikke, at TI-89 er let at bruge for eleverne, og så hellere at eleverne havde bærebare computere med fx TI-interactive. Dette ville integrere CAS-værktøjet bedre. Som det er nu, mener hun, at eleverne har svært ved at se sammenhængen mellem hvad der sker på lommeregneren og de begreber, de sidder og arbejder med.

Hun føler sig som sagt ikke fortrolig med dette lærebogssystem og giver udtryk for, at hun ofte veksler mellem denne lærebog, og den hun underviste efter før [Nielsen og Fogh, 2005]. Hun begrunder dette med, at det to systemer griber begreberne meget forskelligt an, således at den ene er meget algebraisk bygget op, mens den anden fokuserer mere på intuition, geometri og visualiseringer. Specielt mener hun at, intuition er vigtig for denne klasse, da den indeholder så mange svage elever.

Til trods for, at hun ikke er fortrolig med lærebogen eller enig med dens tilgang, siger hun, at hun sjældent bruger læreplanen og begrunder dette med, at „typisk så dækker lærebogen læreplanen. Så det er nemt bare at bruge grundbogen, for så har man dækket kravene fra læreplanen.“

Birgit bruger oftest arbejdsformerne: tavlegennemgang, hvor hun forelæser ved tavlen og derfra styrer en klassedialog, og pararbejde, hvor eleverne arbejder med opgaver alene eller i par. Hendes undervisning vil typisk veksle mellem tavlegennemgang og pararbejde.

Lektier Birgit siger i interviewet, at det er hendes overbevisning, at det er elevens eget ansvar at lave lektier, og at det er spild af tid at hun bruger tid på at kontrollere det. Alligevel begynder hun altid timen med at trække en elev til tavlen for at gennemgå de opgaver, de har haft som lektie. Oven i købet trækker hun lod om, hvem der skal til tavlen, da de som regel ikke selv melder sig til at løse en opgave ved tavlen.

Lærer Christian

Christian er en 51-årig mandlig lærer med 22 års undervisningserfaring. Han har bifag i engelsk og datalogi. Kombinationen af engelsk og matematik gør, at Christian er et oplagt valg til at undervise IB-klasser[4]. Interviewet gav indtryk af Christian som en lærer med et forholdsvist konservativt syn på undervisning, og en lærer der primært nyder at undervise elever på et fagligt højt niveau.

Klassen Klassen er en IB klasse, hvor eleverne har valgt matematik på højt niveau.

IB er et program som udbydes af IBO[5]. IBO opstiller internationale krav og standarder for undervisningen og fremstiller ligeledes curriculum og eksamensopgaver for programmet. IBO udgiver en guideline, som fokuserer meget på curriculum

[4] International Baccalaureate

[5] International Baccalaureate Organisation (www.ibo.org)

og ikke på undervisningsformer eller kompetencer. Matematikundervisningen og hertilhørende pensum og eksamen er altså underlagt dette internationale program. Dette giver læreren specifikke krav og begrænsninger at arbejde under. Således er det besluttet, at IB-programmet benytter TI-84 lommeregneren i stedet for TI-89, som ellers er standard for de øvrige matematikhold på gymnasiet. Evaluering for IB-klasser er endvidere udelukkende skriftligt.

At klassen er under IB-programmet gør således Christians arbejde med denne klasse specielt. For det første er de formelle begrænsninger og krav en faktor, som han skal have med i sine overvejelser, når han forbereder sig. For det andet har han, selvom han måtte ønske det, efter eget udsagn ikke mulighed for at samarbejde og drøfte problemstillinger med de øvrige matematiklærere.

Forberedelse Ud fra interviewet mærker man tydeligt, at Christians overbevisning er, at teorien er det væsentlige i matematik. Eksempler og anvendelser bliver nærmest udelukkende redskaber til at lokke elever til at interessere sig for teorien. Specielt i denne højniveau-klasse ynder han at præsentere teorien først og derefter give eksempler. I klasser på lavere niveau præsenterer han eksempler først, dels fordi eleverne ikke har interessen for matematikken, men primært fordi disse elever ikke har evnen til at forstå de abstraktioner, som teorien indeholder. Christian siger om denne måde at præsentere matematik, at det er lidt mere „børnehave-agtigt“.

IBO udgiver eller anbefaler ikke en lærebog, men lærebogssystemer kan få et prædikat, der indikerer, at de er „suitable for IB“. Dette prædikat vil indikere for læreren, at han ved at følge bogen vil overholde de krav, IBO har. Bogen dækker både 2.g og 3.g. Christian giver udtryk for, at hans forberedelse er meget styret af bogen, og de guidelines som IBO har udstukket. Overordnet set starter han 2.g med at fastlægge et pensum og danne sig et overblik over 2.g og 3.g. Ifølge dette overblik skal hvert modul dække 6-8 sider i bogen. Christian nævner, at denne forberedelsesform naturligvis ikke giver megen frihed til at tage et valgfrit emne op. Til gengæld giver det læreren sikkerhed for, at han når det, han skal.

Normalt foregår Christians forberedelse ved at han læser de sider igennem, som han har tænkt sig at undervise efter. Ud fra disse sider laver han noter til modulet.

Han regner ofte nogle af opgaverne, der hører til disse sider. Enkelte gange laver han arbejdsark.

Undervisning Christians moduler følger en klassisk opbygning, hvor der først er opsamling på sidste modul. Derefter præsentation af nyt stof, og til sidst får eleverne mulighed for at arbejde med det nye emne. Naturligvis er der afvigelser, men de fleste variationer sker inden for disse rammer.

Christian gør hovedsageligt brug af de to arbejdsformer: tavlegennemgang og par/enkelt-arbejde. I et normalt modul fylder tavlegennemgang ca. 60%.

Lektier Christian mener, at det bør være op til eleverne at lave lektier, specielt på dette højniveau-hold. Derfor tester han, om eleverne har lavet deres lektier ved at spørge, om der har været opgaver, som de har haft problemer med. Hvis dette er tilfældet, gennemgåes disse ved tavlen. Ellers går Christian blot videre med undervisningen. Da det er elevernes eget ansvar at være forberedte, giver Christian udtryk for, at han ikke „gider bruge krudt på elever, der ikke har forberedt sig“.

Da IB er mere skriftligt end et dansk system, vælger Christian at give eleverne flere prøver og tests end en normal gymnasieklasse.

4.2 Matematisk baggrund

Efter at have beskrevet mit indtryk af de tre lærere, vil jeg i dette afsnit behandle de matematiske emner som lærerne underviste i den observerede periode. Jeg vil ikke give en fuldstændig behandling af emnerne, men fremhæve aspekter der er relevante i forhold til gymnasiematematik og i forhold til dette speciale.

De tre emner som blev undervist i perioden var:

Anna Optimering

Birgit Lineære sammenhænge

Christian Polynomiers division

Optimering

Anna underviste i den observerede periode i optimering. Dette er et emne der bygger på andre emner så som differentialregning, ligningsopstilling, ligningsløsning og funktionsundersøgelse. Dette gør umiddelbart emnet til en naturlig afslutning på den introduktion der i gymnasiet gives til differentialregning. Mange lærebogssystemer, deriblandt [Tolnø et al., 2005b] som blev benyttet på gymnasiet, har denne tilgang til emnet. Optimering bliver i gymnasielærebøger primært præsenteret ved hjælp af eksempler, således begynder optimeringsafsnittet i Tolnø et al. [2005b]:

> *„Verbet 'optimere' betyder noget i retningen af 'gøre bedst'. I matematik benyttes ordet optimering især om praktiske problemer, hvor man ønsker at gøre en størrelse minimal, fx udgifterne, eller maksimal, fx overskuddet.“* [Tolnø et al., 2005b, p. 37]

Herefter fortsætter bogen med et optimeringsproblem som tidligere er blevet behandlet, men postulerer at „denne gang vil vi benytte differentialregning til at løse problemet“. Optimering bliver således et meget opgavefokuseret og anvendelsesorienteret.

Grundlag for optimering En elev udbygger hele tiden sin matematiske viden ved at tilføje og udbygge allerede eksisterende begreber. Således også med optimering, og som sagt ligger specielt funktionsundersøgelse til grund for emnet optimering.

I gymnasiet indføres differentialkvotienten med definitionen:

> Funktionen f siges at være differentiabel i a, hvis differenskvotienten
> $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
> har en grænseværdi for $x \to a$. I så fald, kaldes denne grænseværdi for f's differentialkvotient i a, og skrives
> $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Som oftest vil denne definition have sin motivation i at finde en funktions væksthastighed i et givet punkt. Umiddelbart efter definitionen, defineres tangenten til grafen, hvor hældningskoefficienten i et givent punkt $(x_0, f(x_0))$ er lig grafens differentialkvotient i dette punkt $f'(x_0)$. Således skabes koblingen mellem differentialkvotienten og hældningen af tangenten. Eleverne kan nu lave en kobling mellem fortegnet for f' og monotoniforholdene for f.

> For en differentiabel funktion f defineret i et åbent interval I gælder:
>
> - f er voksende[6] i I, hvis og kun hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$.
> - f er aftagende i I, hvis og kun hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in I$.
> - f er konstant i I, hvis og kun hvis $f'(x) = 0$ for alle $x \in I$.

Denne sætning vises ved hjælp af blandt andet middelværdisætningen, således er beviset for at $f'(x) \geq 0$ medfører at f er voksende i I.

> **Bevis:** Lad $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$ være givet. Jf. middelværdisætningen findes et tal $x \in]x_1, x_2[$ således at
> $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x)$$
> Da $x_2 - x_1 > 0$ og $f'(x) \geq 0$ følger det at $f(x_2) > f(x_1)$, hvilket netop vil sige at f er voksende.

[6]Med voksende hhv. aftagende menes der, tilsyneladende implicit, *strengt* voksende hhv. aftagende

Denne sætning indeholder grundlaget for emnet „funktionsundersøgelse“, hvilket i gymnasiet omfatter at bestemme en funktions monotoniforhold og ekstremumspunkter. Når elever i gymnasiet arbejder med funktionsundersøgelse i gymnasiet, er det som oftest implicit givet at funktionen er kontinuert og i øvrigt defineret på hele intervallet, og i praksis vil dette ikke være en del af opgaven hvis en elev bliver bedt om at lave en funktionsundersøgelse af f.

Efter at eleverne har lært teorien om funktionsundersøgelse indføres optimering, gennem eksempler, som en anvendelse af den tillærte viden. Opgaverne er som regel geometriske, således at de handler om at optimere et areal, en omkreds eller et volumen Dette valg træffes sandsynligvis fordi lærebogsskribenter antager at eleverne har god forståelse for geometriske figurer, og dermed vil dette aspekt ikke forvirre eleverne yderligere mens de arbejder med optimeringsdelen af opgaven.

En typisk optimeringsopgave vil fx være:

> En metalæske med kvadratisk bund og uden låg må koste 48 kr. Siderne koster 3 kr. pr. cm^2, mens bunden koster 4 kr. pr cm^2. Hvad er det størst mulige rumfang af æsken, man kan få for 48 kr.? [Tolnø et al., 2005b, p.37]

Løsningen af denne opgave vil kræve en opstilling af ligningen for den samlede pris samt formlen for beregning af volumenet af en kasse (sidelængden kaldes x, højden h og volumen V):

Pris for 4 sider: $4 \cdot x \cdot h \cdot 3 = 12xh$

Pris for bunden: $x^2 \cdot 4$

Samlet pris: $12xh + 4x^2$

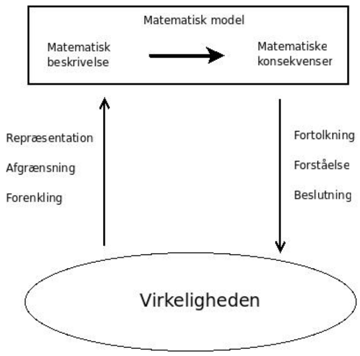
Volumenet: $V = x^2 \cdot h$

For at løse disse to ligninger med to ubekendte, isoleres en uafhængig variabel (fx h), således at eleven får sammenhængen:

$V = 4x - \frac{x^3}{3}$

Først nu indgår selve funktionsundersøgelsen, og eleven kan slutte at kassens volumen maksimeres ved sidelængden $x = 2$.

Selvom optimering altså tjener som anvendelse af funktionsanalyse, fremgår det dog af ovenstående opgave at det et helt centralt element i optimering er modelleringsprocessen, altså at skifte mellem den matematiske og den virkelige verden. Figur 9 illustrerer en modificeret udgave af modelleringsprocessen som den er at finde hos Poulsen [1997]. Modelleringsprocessen består først i en oversættelse fra



Figur 9: Modelleringsprocessen

virkeligheden til den matematiske model. Denne oversættelse indbærer afgrænsning, forenkling og en måde at opstille en repræsentation af virkeligheden. Inden for den matematiske model kan eleven udnytte matematiske teorier og værktøjer, i forbindelse med optimering omhandler disse teorier ligningsløsning og specielt funktionsundersøgelse. Derefter skal eleven tolke de fundne matematiske resultater, således at de bliver til konsekvenser og anvendelser i den virkelige verden.

I eksemplet ovenfor er det en del af oversættelsen til den matematiske model, at eleven gør sig klart at det er uden betydning at det er en *metal*æske, men vigtigt at bunden er kvadratisk. Da matematiske opgaver som regel ikke indeholder særligt mange unødvendige oplysninger, er opstillingen af repræsentationen oftest en større opgave en forenklingen af virkeligheden.

Som sagt vil optimering ofte indgå som opsamling på funktionsundersøgelse, og mange, både lærere og lærebøger griber emnet an ud fra denne overbevisning. En alternativ tilgang til emnet vil være at lade optimering være motivationen for funktionsundersøgelse, og dermed indgangen til begrebet differentialkvotient. På denne måde ville eleverne se en umiddelbar anvendelse og et direkte formål ved at arbejde med funktionsundersøgelse og differentialkvotient. Ofte vil matematiske begreber indføres med et løfte om at meningen og begrundelsen for at indføre begrebet ligger ude i horisonten [Winsløw, 2007]. Ved at lade optimering være indgangen til funktionsundersøgelse, vil dette ikke i lige så høj grad være tilfældet.

Lineære sammenhænge

Birgit introducerede i den observerede periode, begrebet „lineære sammenhænge". Dette er et meget bredt emne, og har fra et didaktisk synspunkt fået stor opmærksomhed. Variabelsammenhænge, og specielt lineære sammenhænge er et meget centralt emne, og mange efterfølgende begreber og emner i gymnasiet bygger på dette begreb. Helt oplagt bygger det generelle funktionsbegreb og regression direkte oven på begrebet.

Den traditionelle tilgang til variabelsammenhænge i gymnasiet, bliver i Laursen [2008] beskrevet således at først introduceres variabelsammenhænge vha. ligninger, derefter udledes karakteristiske egenskaber. Laursen foreslår en tilgang hvor eleverne ud fra de karakteristiske egenskaber udleder ligningerne. I tilfældet med lineære sammenhænge er „de karakteristiske egenskaber" som Laursen fremhæver, at både x-værdien og y-værdien varierer additivt, i forhold til fx eksponentielle sammenhænge hvor x-værdien varierer additivt mens y-værdien varierer multiplikativt. Da additiv variation er lettere at forholde sig til for eleverne synes det således oplagt at indføre begrebet „sammenhæng" ved hjælp af lineære sammenhænge. Endvidere har lineære sammenhænge den fordel, at de fleste elever har behandlet begrebet i folkeskolen, dog uden at bruge ordet „linære sammenhæng", men i stedet ved at arbejde med rette linier. De lineære sammenhænge og rette linier synes derfor at være oplagt indgang til sammenhænge og funktionsbegrebet.

Af samme grund starter fx Nielsen og Fogh [2005] afsnittet om lineære sammenhænge med at drage denne kobling ved hjælp af en definition:

> Ved en lineær sammenhæng, forstås en sammenhæng, hvor grafen er en ret linie eller dele af en ret linie. [p. 51]

Umiddelbart herefter opstilles en førstegradsligning, og sammenhængen mellem denne og den rette linie udtrykkes ved hjælp af en sætning:

Sætning 4.2: En ret linie, der ikke er parallel med y-aksen, har en ligning af typen $y = ax + b$. Konstanten a er grafens hældning og b er afskæringen på y-aksen.

Sætningen bevises ved et geometrisk bevis som primært benytter formler og egenskaber for trekanter. Denne tætte kobling mellem det grafiske og det symbolske skaber potentielt en mulighed for at eleven får en god intuition omkring emnet. Således kan eleven få en forståelse for betydningen af både størrelse og fortegn af a.

Ud fra geometriske forklaringer og beviser vises også sætningen der beskriver sammenhængen mellem to punkter og hældningen for den rette linie gennem dem.

Den tætte kobling mellem lineære sammenhænge og funktionsbegrebet, gør at mange elever bygger funktionsbegrebet og forståelsen heraf ud fra lineære sammenhænge. Mange elever har på et tidspunkt i deres skolegang hørt forklaringen om, at en funktion er en „maskine“, hvor man putter et tal ind, og så spytter maskinen et tal ud, og hvis man gentager med samme tal, vil man få samme resultat ud. Hvis denne forståelse yderligere bliver underbygget med at det er noget lineært der sker inde i maskinen, vil eleven risikere at tillægge det „at være“ en funktion egenskaber, så som at funktioner er kontinuerte, eller en funktion skal angives ved en algebraisk formel. Dette kan betyde at en elev fx ikke kan forestille sig en funktion der har værdien 10 for alle rationelle funktionsargumenter, og værdien 3 for alle irrationelle argumenter.

Dette er en kendt misconception, og altså en risiko som læreren bør have med i sine overvejelser når funktionsbegrebet skal indføres.

Polynomiers division

Christian gennemgik i den observerede periode et forløb om „Polynomiers division“. Emnet bliver i gymnasiet introduceret som en procedure, der bygges ud fra en analogi til division med hele tal. Eksempelvis divideres 2136 med 11 så man får resultatet $194 + \frac{2}{11}$. Ud fra dette eksempel defineres begreberne *dividend*, *divisor*, *kvotient* og *rest*. Derefter gives et eksempel på hvordan man ved hjælp af samme metode og med samme begreber, kan udføre division af to polynomier.

I dette afsnit vil jeg give en kort beskrivelse af polynomiumsbegrebet, idet dette begreb var mere relevant i forhold til dette speciale end selve divisionsproceduren.

Polynomier introduceres i lærebøger i forbindelse med indførelsen af sammenhænge og funktioner. Således indføres først lineære sammenhænge, derefter andengradspolynomier og herefter abstraheres begrebet til det generelle n'te gradspolynomium. Selvom begrebet indføres abstrakt, er det dog i praksis primært første-, anden- og tredjegradspolynomier eleverne vil komme til at arbejde med på gymnasialt niveau.

Grafer At kunne repræsentere matematiske begreber ved hjælp af forskellige registre[7], samt at kunne lave konversionen mellem to registre, er en vigtig og nærmest uvurderlig kunnen for at opnå forståelse omkring et matematisk begreb. Dette skyldes at hvert register indeholder forskellige muligheder og begrænsninger. Samtidig er elevernes evne til at lave disse konversioner en indikator for hvor dyb elevens forståelse for begrebet er.

I forbindelse med polynomier vil jeg specielt fremhæve det grafiske og det symbolske register, hvor grafen for polynomiet tilhører det grafiske register, mens opskrivningen af polynomiet tilhører det symbolske register. Ved at betragte disse to registre, og specielt konversionen mellem dem, vil eleven kunne opnå en intuition omkring grafens udseende i relation til polynomiets koefficienter og rødder.

Eksempelvis vil et andengradspolynomium $P(x) = ax^2 + bx + c$ ved konversion til det grafiske register afbilde en parabel. Koefficienterne giver en fortolkning af grafens udseende. Således siger den velkendte „smileregel“, at fortegnet for a udtrykker om $P(x)$ går mod plus eller minus uendelig for x gående mod uendelig. Ligeledes kan både fortegn og størrelse på de øvrige koefficienter sige noget om blandt andet parabelens toppunkt og skæring med y-aksen. Fortolkningerne kan umiddelbart opdages af eleverne, men uden at læreren institutionaliserer disse opdagelser, vil reglerne blot blive regler som eleverne ukritisk memoriserer. Således beskriver Even og Tirosh [1995] at selv lærere blot memoriserer „smilereglen“, og

[7] Et register defineres som et system af repræsentationer, hvor der kan udøves matematiske processer. [Laursen, 2008, p. 12]

ikke er i stand til at argumentere hvorfor det forholder sig sådan at grenene på parabelen peger nedad når a er negativ[p. 11].

På samme måde siger koefficienterne i et trediegradspolynomium noget om grafens udseende. Eksempelvis giver fortegnet til koefficienten for trediegrads-leddet en tolkning af om grafen aftager fra uendelig til minus uendelig, eller omvendt.

I forbindelse med registre defineres en „operation“ som en proces der forgår i samme register, således vil en operation fx være en faktorisering af et tredjegradspolynomium. Hvis et tredjegradspolynomium har rødderne α, β og γ vil operationen altså være omskrivningen:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

Dermed har det faktoriserede tredjegradspolynomium, ved konversion til det grafiske register, en sammenhæng med skæringen mellem grafen og x-aksen. Og antallet af dobbeltrødder og komplekse rødder lader sig direkte aflæse af antallet af grafens skæringer med x-aksen. Sammenhængen mellem skæringen med x-aksen og faktoriseringen af et polynomium er blandt andet beskrevet i sætningen (som kaldes „factor-theorem“ i IB-klassen):

> Førstegradspolynomiet $x - k$ er divisor i et polynomium $f(x)$ hvis og kun hvis $f(k) = 0$

Denne sammenhæng mellem skæringer og faktoriseringer, er en motivationerne for at beskæftige sig med polynomiers division, og specielt de tilfælde hvor divisoren er et førstegradspolynomium.

4.3 Lærer Anna

Jeg observerede Annas forberedelse og undervisning af to moduler. Hun flyttede sin forberedelse til skolen så jeg kunne være tilstede imens. Jeg valgte at videofilme Annas forberedelse mens jeg tog noter. Jeg fik endvidere udleveret de noter som hun producerede i løbet af forberedelsen, og umiddelbart efter hun var færdig interviewede jeg hende for at få uddybet noterne og få indblik i hvilke tanker hun havde gjort sig mens hun forberedte sig og udarbejdede noterne. Selve forberedelsen foregik altså i stilhed for at gøre observationen så tæt på en normal forberedelse som muligt, og for ikke at ødelægge det flow der er under forberedelsen.

Kameraet blev stillet således at det udelukkende filmede hendes hænder. På den måde kunne jeg dokumentere hvilke ressourcer hun brugte og samtidig se hvad hun skrev ned, og i hvilken rækkefølge. Noterne jeg tog i løbet af forberedelsen skulle primært danne grundlag for de spørgsmål jeg havde mulighed for at stille under det korte interview bagefter.

Observationen Anna forudså i det initielle interview at den uge som jeg skulle observere ville komme til at indeholde meget opgaveregning. Emnet for denne uge var *optimering* og var afslutningen på et forløb om monotoniforhold og ekstremumsbestemmelse. Eleverne burde kende teorien, og emnet ville tjene som repetition og øvelse i funktionsundersøgelse. Anna udtrykte det således at eleverne har „brug for at bruge noget af al den teori de har lært. Nu skal det indarbejdes ordentligt og de skal have lidt sværere opgaver“.

Anna forventede således at der ikke ville være særlig meget tavleundervisning, men at undervisningen hovedsageligt ville bestå af opgaveregning, både i grupper og individuelt. Af denne grund ville forberedelsen sandsynligvis primært bestå i at danne sig et overblik over de opgavetyper der findes inden for optimering og finde gode eksempler. Da Anna som sagt meget gerne bruger niveaudifferentieret undervisning, regnede hun med at forberedelsen ville munde ud i arbejdsark af forskellig sværhedsgrad, således at de stærkere elever får arbejdsark med mindre ledende spørgsmål end spørgsmålene på de arbejdsark som er udarbejdet til de svagere elever.

Første forberedelse

Anna følger en fast form hver gang hun forbereder sig. Alle hendes forberedelsesnoter er i en notesbog. Hun har en notesbog til hvert hold hun underviser, og hun medbringer notesbogen til timerne. Ud over notesbogen laver hun nogle gange noter på et A4-ark, men dette er mest kladder til arbejdsark, og disse bliver smidt ud når arbejdsarket er fremstillet. Notesbogen udgør dermed det primære dokument til hvert modul. Denne struktur gør at notesbogen kunne gøres til en del af Annas mængde af ressourcer næste år, når hun skulle undervise i samme emne. Det var imidlertid ikke tilfældet. Kun hvis Anna havde to klasser, der var nået til samme emne samtidig, ville hun nogle gange tage notesbogen med som ressource.

Notesbogen, og strukturen heri, betyder at hun let kan se hvilke noter hun lavede sidste gang hun forberedte sig. Hendes forberedelse starter således på samme måde hver gang, ved at hun læser sidste moduls noter igennem. I slutningen af hver forberedelse laver hun et lille afsnit i noterne, der hedder „Næste gang“, dermed ved hun hver gang hun starter med at forberede sig, hvad hun havde forestillet sig skulle være opfølgningen på det hun forberedte sidst. Det betyder at første del af hendes forberedelse flyder let.

Som sagt er det en del af Annas overbevisning omkring lektier, at hun lader elevernes lektier være en kunnen, derfor var lektien til dette modul ikke specifikke opgaver, men „at kunne differentiere $\ln x$ og a^x“. Eleverne fik sidst præsenteret e og den naturlige logaritme, og hun vil starte undervisningen med at repetere disse begreber og derefter teste om eleverne har lavet lektier. Dette vil hun gøre ved at lade eleverne differentiere en række funktioner, uden hjælpemidler. Specielt vil hun lade dem differentiere e^x, og for eleverne fremhæve den smukke egenskab, at $(e^x)' = e^x$.

På næste side i noterne skriver hun overskriften: „Overblik over differentialregning“. Hun vil, som opsamling på emnet om differentialregning, lave en liste, med underpunkter, som giver eleverne et overblik over hvad de på nuværende tidspunkt bør vide om differentialregning. For at konstruere dette overblik konsulterer hun gamle eksamenssæt. Ud fra disse eksamenssæt bestemmer hun hvilke opgavetyper eleverne vil kunne støde på til eksamen, og dette ligger til grund for overblikket.

De tre overordnede punkter bliver:

A: Bestemme differentialkvotient

B: Tangent

C: Monotoni

Til trods for at Anna, i det initielle interview giver udtryk for at hun har tillid til at bogen [Tolnø et al., 2005b] følger de krav der er til pensum, konsulterer hun først og fremmest de gamle eksamenssæt, og det er nærmest udelukkende på denne baggrund at overblikket bliver konstrueret.

I et eksamenssæt til matematik B-niveau findes fx. opgaven:

> En funktion f er bestemt ved
>
> $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
>
> Det oplyses, at grafen for f har to tangenter med hældningskoefficient 11. Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for hver af disse tangenter.

Ud fra denne opgave noterer Anna punktet „tangent med hældning a“ under „B: Tangent“. Anna planlægger et eksempel på denne opgavetype, som hun vil gennemgå på tavlen, for „den type har de ikke set før“. Første underpunkt under punkt B, er at kunne bestemme ligningen for tangenten til grafen i et bestemt punkt. At løse denne type opgave indebærer både at differentiere funktionen og finde hældningen for tangenten. Anna vurderer at eleverne godt kan løse denne type opgaver. Rent matematisk er der altså intet der hindrer at eleverne ved at bruge den viden de i forvejen har, kunne løse en opgave af typen hvor man givet en tangenthældning, skal bestemme et koordinatsæt for denne tangents røring med grafen. Denne opgave vil oplagt indeholde et adidaktisk potentiale, da eleven ved at sammensætte de allerede etablerede skemaer, kan lave en assimilation, og derved tilføje denne nye opgavetype til deres skema om tangenter. Ved at gennemgå et eksempel med opgavetypen, gøres hele situationen didaktisk, og opgaven mister umiddelbart sit adidaktiske potentiale.

Elevernes lektie bliver at lave noter til dette overblik, så de udelukkende ved hjælp af disse noter kan løse den type opgaver som overblikket nævner.

Anna bruger herefter resten af tiden på at konstruere opgaver som knytter sig til punkt B og C. Hun refererer jævnligt til de gamle eksamenssæt og til opgaverne i arbejdsbogen [Tolnø et al., 2005a]. De fleste opgaver bliver dog ikke brugt i deres eksakte form, men bliver modificeret. Hun løser ikke opgaverne, men skaber sig et overblik over hver opgave ved enten at tegne en hurtig skitse, eller indtegne grafen på sin TI-89. Slutteligt noterer hun at emnet for næste gang er „Graf for f og f'“ samt „optimering“.

Mens hun har konstrueret opgaver har hun samtidig lavet kladden til elevernes næste skriftlige aflevering. Dermed sikrer hun sig at der er sammenhæng mellem den skriftlige aflevering og klasseundervisningen. Hun laver den skriftlige aflevering sådan at den bør kunne løses udelukkende ved hjælp af de noter som eleven har lavet til overblikket. Dette vil hun præcisere for eleverne og opfordre dem til at teste deres noter, ved udelukkende at bruge dem som hjælp når de løser den skriftlige aflevering.

Anna har, ud over min tilstedeværelse, været alene om denne forberedelse. Hun har hverken før eller efter forberedelsen drøftet aspekter heraf med andre matematiklærere.

Til denne forberedelse har Anna ud over notesbog, kuglepen, kaffe og kladdepapir, gjort brug af grundbogen, arbejdsbogen, TI-89 og gamle eksamenssæt. Disse har udgjort de materielle komponenter i Annas mængde af ressourcer De materielle komponenter af det skabte dokument, er de 5 A5 sider i hendes notesbog samt kladden til elevernes skriftlige aflevering.

Det skabte dokument består af flere matematiske komponenter. Først vil Anna via en definition vise sammenhængen mellem den naturlige logaritme og e. Derudover vil hun skabe et overblik over differentialregning. Dette overblik indeholder ingen beviser eller definitioner, men er en samling af procedurer og metoder til at løse specifikke opgavetyper.

De didaktiske komponenter af dokumentet indholder Annas overbevisninger om hvordan eleverne bedst får præsenteret en opsamling på et emne. Derudover er de didaktiske komponenter også de rent praktiske ting, så som at Anna ikke har tænkt sig at udarbejde et arbejdsark, men i stedet vil skrive alle de opgaver som eleverne skal regne i løbet af timen, op på tavlen. Dette har fx betydning for hvor godt eleverne husker de specifikke opgaver, og specielt kræver det at eleverne skriver de opgaver ned som de ikke når at regne i løbet af timen, hvis de ønsker at løse dem senere. Ligeledes kommer Annas overbevisning om lektier, til udtryk i at lektien er at konstruere noter som kan hjælpe dem til at løse en mængde opgavetyper.

Første undervisning

Anna har som sagt sin notesbog med til timen, og har den liggende bordet. Som planlagt bruger hun de første 20 minutter til at repetere, hvilket dels blev gjort ved at eleverne selv løste opgaver, og dels ved at Anna gennem lærerstyret klassedialog minder eleverne om begreber de kender i forvejen. Herefter brugte Anna de næste 20 minutter på ordret at opskrive og gennemgå den trepunktsliste, med underpunkter, som hun havde fremstillet under forberedelsen. Her benytter hun dokumentet som blev skabt under forberedelsen. Hun pointerer flere gange at lektien vil blive at lave noter som kan bruges til at løse denne type opgaver, og varsler at deres næste skriftlige aflevering udelukkende vil omhandle disse tre punkter, og dermed „bør den kunne løses udelukkende ved hjælp af noterne, hvis man har lavet gode noter.“ Denne meget løse beskrivelse af lektierne, stiller store krav til den didaktiske kontrakt og til de fælles forventninger som elever og lærer har omkring disse lektier. Der er risiko for at eleverne ikke laver noterne, fordi de ved det ikke vil blive eksplicit kontrolleret hvorvidt de har lavet dem. Samtidig vil eleverne opleve at der ikke er nogen konsekvens ved ikke at lave lektierne hvis de fx kan løse den skriftlige aflevering uden at have lavet noter.

De resterende 60 minutter af modulet bruger eleverne til at regne opgaver. Anna opskriver alle de opgaver hun havde konstrueret under forberedelsen, med ordene „Jeg skrive flere op end i kan nå at regne“. I alt opskrives ti opgaver, fem for hvert af underpunkterne B og C. Eleverne opfordres til at skifte mellem de to typer. Umiddelbart var indtrykket at eleverne kun løste én eller to opgaver på de 60 minutter. Over halvdelen af tiden blev brugt på adidaktisk arbejde, i den forstand at eleverne arbejdede selvstændigt uden lærerens indblanding. Alligevel tog det didaktiske miljø som Anna havde skabt, mere form af repetition og træning i allerede kendte begreber og teknikker, end i elevernes udforskning af et åbent didaktiske miljø.

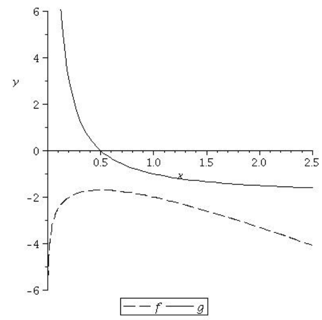
Anden forberedelse

Anden forberedelse flyttede Anna til skolen, så jeg kunne overvære og videofilme hende mens hun forberedte sig. Anna havde valgt at sidde ved en computer, og lade denne indgå i hendes ressourcer under denne forberedelse. Dette valg er naturligvis truffet fordi hun inden hun begynder sin forberedelse har et overblik over hvad hendes forberedelse vil indeholde.

Anna starter sin forberedelse på sædvanlig måde, ved at finde sin notesbog frem. Hun bladrer tilbage og ser at hun under sin sidste forberedelse planlagde at dette modul blandt andet skulle indeholde punkterne „Grafer for f og f'" og „Optimering".

Punktet „Grafer for f og f'" knytter sig til at Anna ønsker at eleverne får en intuitiv forståelse af hvordan den afledte opfører sig. Dette knytter sig igen til Annas matematiske overbevisning. Hun laver et arbejdsark hvorpå der er fire koordinatsystemer, hver af dem har afbildet en graf for f og grafen for f'. Opgaven er tænkt til at eleverne skal løse den i pararbejde, og altså gerne skulle indgå i en matematisk dialog mellem to elever. Denne situation er adidaktisk, idet læreren ikke er involveret, men dog kan tilkaldes til spørgsmål. Umiddelbart er målet med opgaven er at skabe en intuitiv forståelse af hvordan grafen for f' opfører sig, givet en graf for f. Anna har ingen intention om at denne adidaktiske situation skal afføde ny viden hos eleven, den skal blot minde eleven om karakteristika hos en afledet funktion.

Det arbejdsark (se appendix A.1) som Anna konstruerer ud fra hendes mængde af ressourcer, er et dokument for hende. De materielle komponenter af de ressourcer hun bruger til at skabe dokumentet er hendes TI-89 lommeregner og computeren. Under forberedelsen var det dog tydeligt at lommeregneren var et langt mere brugbart instrument[8] for Anna end computeren er. Således arbejder Anna med graferne på lommeregneren, og først når hun har fundet grafer der ser tilfredsstillende ud, bruges TI-interactive til at tegne graferne, og derefter importeres billederne til et word-dokument. For at skabe dokumentet bruger Anna sin viden om emnet og samtidig skaber hun grafer som understreger de karakteristika, for grafen for den afledte funktion, som hun ønsker eleverne skal se. Dette er primært en del af de matematiske komponenter i Annas ressourcer De didaktiske komponenter af hendes ressourcer knytter sig til hendes overbevisning om hvordan eleverne lærer bedst. Samtidig er de med i hendes overvejelser om hvordan hun placerer de fire grafer på arbejdsarket. Hendes intention med opgaven er at eleverne opstiller en hypotese: at den ene er graf for f og den anden er graf for f'. Eleverne skal primært be- eller afkræfte hypotesen ved at se på at i de x-værdier hvor $f'(x) = 0$ skal grafen for f have en vandret tangent. Hun ønsker at eleverne både bekræfter deres hypotese og samtidig argumenterer for at den omvendte situation ikke kunne være sand. De første tre opgaver kan umiddelbart løses på denne måde. Sidste opgave (figur 10) kræver at eleven kigger på yderligere karakteristika ved graferne for at konkludere hvilken der er grafen for f, *og* at det ikke kan forholde sig omvendt. For at slutte



Figur 10: Opgave 4: Grafen for $f(x) = \ln x - 2x$ og grafen for f' (kaldet g)

at f på figur 10 ikke kan være den afledte af g skal eleverne fx se på to forskellige x-værdier og sammenligne hældningen for g for de to værdier. Sammenlignes fx hældingen af g i hhv. $x_1 = 0,5$ og $x_2 = 2$, ser man at ved x_1 har tangenten større

[8]Her henvises til begrebet „instrument“ i forhold til „artefakt“ fra idéen om instrumental genesis.

negativ hældning end ved x_2. Hvis det havde forholdt sig sådan at f var den afledte af g skulle der altså gælde at $f(x_1) < f(x_2)$, hvilket ikke er tilfældet.

Optimering Derefter vil hun introducere emnet „optimering“ for eleverne. Annas syn på dette emne kommer til udtryk i hendes kommentar under forberedelsen: „Og så skal de have om optimering, og der får de simpelthen en masse optimeringsopgaver.“ Dette syn er som sagt normalt at finde hos lærere og lærebøger, og således også hos Tolnø et al. [2005b]. Afsnittet om optimering indholder primært eksempler og opgaver, samt en meget omhyggelig „kogebogsopskrift“, som gennem 11 punkter leder eleverne gennem en optimeringsopgave (se appendix A.2).

Anna bruger derfor resten af forberedelsen på at sætte sig ind i denne vejledning, samt at forberede et eksempel som hun vil gennemgå sammen med klassen. Hun vil gennemgå eksemplet ud fra vejledningen, så eleverne ser hvordan vejledningen skal bruges. Anna mener at mange elever er glade for disse kogebogsopskrifter, idet de er sikre på at finde det rigtige svar blot de kan følge hvert trin i vejledningen. Der er på den måde en risiko for en jourdain-effekt bygget ind i sådan en vejledning, idet eleven uden at forstå sammenhængen kan følge 11 trin og slutte et resultat som eleven kun retfærdiggør ud fra den autoritet vejledningen har. Ofte står konklusions-formuleringen direkte i vejledningen, så eleven heller ikke kan lave fejl i denne.

Anna giver udtryk for at specielt de svagere elever har glæde af disse vejledninger. Dette skyldes sandsynligvis at der som sagt ikke er brug for en dybere forståelse af de benyttede begreber, men snarere en blind tillid til at vejledningen er sikker hver gang.

Mens Anne løser eksemplet i bogen, gør hun noter og bemærker hvilke trin i eksemplet hhv. vejledningen eleverne sandsynligvis vil have størst problemer med. Dermed gør hun dette eksempel til et dokument. Efter denne forberedelse indeholder det langt mere information for Anna end det gjorde før. Endvidere indgår der nu didaktiske og yderligere matematiske komponenter i hvert trin i eksemplet.

Slutteligt i forberedelsen finder Anna seks optimeringsopgaver som eleverne skal løse i timen, så de får prøvet at bruge opskriften. Som hun normalt gør når hun finder opgaver, vurderer hun sværhedsgraden og markerer hver opgave med én eller to stjerner. Hun vil lade det være op til eleverne at vælge en sværhedsgrad der passer til deres niveau. Sværhedsgraden bør naturligvis være i forhold til den tilsigtede viden. I forbindelse med optimering er den tilsigtede viden som sagt ikke kun funktionsundersøgelse og ligningsløsning, men også modelleringsprocessen. Forskellen mellem en let og en svær opgave ligger dermed både i hvor svært det er at opstille den matematiske repræsentation af opgaven og i hvor svært det er arbejde med den matematiske model.

Anden undervisning

Anna udleverer arbejdsarkene med de fire grafer, og eleverne får et kvarter til at arbejde i par med opgaverne. Som Anna havde planlagt og forudset, argumenterede eleverne primært ud fra de x-værdier hvori den ene graf havde vandret tangent. Enkelte elever argumenterede dog ud fra antallet af vandrette tangenter. Således sluttede de på graf 1 (se appendix A.1) at: „Den med to buler er f', for den anden har tre buler“. Dette er udtryk for en misconception, som dog udspringer af den korrekte forståelse for at den afledte af et n'te grads polynomium, har grad $n-1$.

De fleste elever har efter de 15 minutter, løst de fire opgaver og Anna vælger at gennemgå deres svar på tavlen. Eleverne har problemer med den sidste opgave, og så snart de erfarer at de ikke kan løse den med samme metode som de første tre opgaver, kommer spørgsmålet: „Kan vi få sådan en opgave til eksamen?“. Anna svarer „Det kan jeg ikke forestille mig, men den er god for forståelsen“. Næsten alle eleverne opgiver herefter at følge med i gennemgangen af opgaven. Anna kan fokusere, og til dels motivere, eleverne ved at sige „det her skal I kunne til eksamen“. Samtidig kan hun også fjerne motivationen ved at sige at de ikke kan risikere at blive evalueret i denne type opgaver.

Optimering Efter pausen skrives ordet optimering på tavlen, og hun snakker kort med eleverne om hvad det vil sige at optimere – konklusionen er at det vil sige at gøre noget bedre.

Derefter går hun direkte i gang med at bruge kogebogsopskriften med ordene:

„Nu skal vi have et eksempel, og i bogen der er en 'kogebogsopskrift', så nu skriver jeg et eksempel på tavlen, og så følger vi sammen kogebogen, og så laver i selv et par opgaver bagefter". Det eksempel som Anna har forberedt er det samme som bogen bruger til at vise hvordan vejledningen benyttes. Det vil sige at Annas gennemgang bliver med de samme resultater som står i bogen, hvilket gør det overflødigt at bede eleverne komme med svar, idet de alle sidder med deres bog slået op på vejledningen. Anna går hurtigt hen over de første tre trin i vejledningen, og fokuserer primært på den del af vejledningen som omhandler funktionsundersøgelse. De første tre trin er vejledning i at opstille den matematiske model. Da eleverne senere får tid til at løse de planlagte opgaver, viser det sig at eleverne har store problemer med dette aspekt af opgaverne.

Fra forberedelse til modul

Under forberedelsen arbejder Anna alene, det vil sige at G_f er en singelton kun bestående af Anna. Dermed skal Anna inden for dette ES kun selv interagere med den matematiske viden O_f og har ikke brug for at kommunikere med andre. Derfor inddrager hun heller ikke artefakter A_f med kommunikation for øje. Hun inddrager A_f for at kunne tilgå O_f. Hun vil under forberedelsen naturligvis have undervisningsmodulet (G_u, O_u, A_u) i tankerne. I dette ES vil G_u være større, og indholde både Anna og elever som sammen skal interagere med O_u. Dermed vil hun i undervisningen få brug for artefakter til kommunikation. Da der er overlap mellem A_f og A_u, idet fx lommeregner og lærebog indgår i begge mængder, bruger Anna således samme redskab i to forskellige ES, men med helt forskelligt formål. „Kogebogsopskriften" i forbindelse med optimering er et eksempel på dette. Vejledningen forstået som den trykte side i lærebogen er en del af A_f, mens det er klart at hvad den „indeholder" er en del af O_f. Under forberedelsen, indgik den altså i A_f, og Anna bruger den til at forudse hvilke problemer eleverne vil have i forbindelse med denne vejledning. Disse forventninger er udtryk for Annas pædagogisk faglige viden, som er en del af Annas personlige O_f, og situationen er et udtryk for samspillet mellem O_f og A_f, således indeholder artefakten en del af O_f imens O_f påvirker artefakten. I løbet af undervisningen indgår vejledningen i A_u

men her er formålet at skabe kommunikation inden for G_u omkring O_u.

Under forberedelsen arbejder Anna med den abstrakte forståelse af organisationen. Hun interagerer med hele emnet omkring monotoni, differentialregning og optimering. Selvom det således er det abstrakte emne hun arbejder med, er hun naturligvis begrænset af sin faglige viden. Som observatør kan jeg ikke umiddelbart se hvor denne begrænsning går, og min eneste mulighed for at observere hvad Annas personlige opfattelse af O_f er, er ved at observere samspillet mellem G_f og relationen mellem A_f og O_f. Den trepunktsliste som Anna opstiller er et udtryk for hvad Anna mener er vigtigt, på dette niveau, i forhold til differentialregning i gymnasiet. Da listen naturligvis også udspringer af Annas PCK, er den ikke et udtryk for hvad hun mener er vigtigt i forhold til differentialregning generelt. Anna udvælger således differentialkvotient, tangent og monotoni som det vigtigste eleverne skal kunne på nuværende tidspunkt. I O_f og Annas faglige viden om differentialregning ligger naturligvis også fx analysens fundamentalsætning og relationen til kontinuitet og grænseværdi. Anna vurderer at disse begreber ikke bør være en del af O_u i det kommende modul. Denne beslutning træffer hun ud fra hendes PCK og gamle eksamenssæt. O_f virker således sammen med A_f til at skabe en afgrænsning af O_u. Da et matematisk begreb skal bygges ud fra en række underliggende komponenter, og ikke blot kan præsenteres i sin fulde form, er en sådan afgrænsning naturligvis vigtig.

4.4 Lærer Birgit

Jeg observerede Birgits undervisning i fire moduler. Jeg fik til alle fire moduler udleveret de noter Birgit havde udarbejdet under forberedelsen. Jeg lavede et længere interview med Birgit omkring forberedelsen af første modul. Forberedelsen af andet modul overværede jeg – dog uden at videofilme den. Til tredje modul lavede jeg kun et kort interview med Birgit omkring hendes tanker om modulet, da hun på baggrund af undervisningen i andet modul, ikke havde lavet decideret forberedelse til dette modul, og havde dermed ikke havde udarbejdet noter. Inden fjerde modul interviewede jeg Birgit og fik udleveret de noter hun havde lavet under forberedelsen.

Observationen Birgit skal til at starte et nyt emne i den periode jeg observerede. Klassen er lige blevet færdige med trigonometri, og skal til at have om sammenhænge og funktioner. Jeg vil altså komme til at observere Birgits introduktion til funktioner og sammenhænge. Birgit kalder dette emne for „det mest centrale emne i matematik overhovedet.“

Første forberedelse

Birgit udarbejder i løbet af hver forberedelse et A4-ark med hendes noter. Hun giver selv udtryk for at hun gerne ville gøre brug af en notesbog i stedet for dette løsbladsystem, således at hun gemte de udarbejdede noter. Som det er nu bliver noterne smidt ud efter undervisningen, og dermed indgår de ikke længere i Birgits ressourcer når de har været brugt én gang. Birgit tager notesarket med til modulet, både som støtte for hendes undervisning, men også for at give eleverne en „sikkerhed“ for at hun har forberedt sig.

Hun vil i dette modul introducere begrebet „variabelsammenhænge“. Hun vil blot kort præsentere dette som „sammenhængen mellem to (eller flere) variable“, og derefter gå direkte i gang med at definere begreber for eleverne. Hun vil definere en variabel som „en størrelse der varierer“ og lade det være op til eleverne at give eksempler på variable størrelser. Derefter vil hun definere begrebet „konstant“ og ud fra de eksempler som eleverne gav på de variable størrelser, diskutere hvad konstante størrelser er.

Denne del af Birgits noter er meget eksplicit, og det fremgår tydeligt at hun har gjort sig didaktiske overvejelser omkring hvordan man indfører disse begreber. En del af de didaktiske komponenter i skabelsen af disse noter er Birgits overbevisning om at elever er mere motiverede hvis de får et ejerskab over matematikken. Dette håber Birgit at opnå ved at lade eksemplerne være elevernes egne. Derudover ved hun af erfaring at disse begreber, og specielt „konstant“ er noget som elever har svært ved at forholde sig til. Dette er en erfaring Birgit har gjort sig ved observation af niveau -1 i figur 1, og som hun gør brug af nu mens hun arbejder i niveau +1.

Efter at have defineret disse to begreber vil hun indføre begreberne afhængig og uafhængig variabel. Dette vil hun igen gøre ved hjælp af elevernes egne eksempler. Hun vil fokusere på at navnene for disse to begreber kan være misvisende, idet der ikke altid er en kausal sammenhæng mellem de to variable.

Birgit har, i overensstemmelse med hendes overbevisning om at det er en hjælp for eleverne at de ser koblingen mellem matematik og de andre naturvidenskabelige fag, en forventning om at eleverne vil genbruge eksempler fra naturfag.

Efter at begreberne er defineret, vil hun præsentere en sætning for eleverne. Hun vil præsentere den udgave af sætningen som står i hendes „gamle lærebog“[Nielsen og Fogh, 2005]. Eleverne får udleveret kopi fra denne, men først i løbet af dette modul. Eleverne har således ikke haft muligheden for at forberede sig på sætningen hvis de skulle have haft lyst til det. Sætningen er:

> En ret linie, der ikke er parallel med y-aksen, har en ligning af typen $y = ax + b$. Konstanten a er grafens hældning, og b er afskæringen på y-aksen. [Nielsen og Fogh, 2005, p. 52]

Denne formulering adskiller sig ikke væsentligt fra den eleverne har i deres lærebog. Dette viser meget tydeligt at Birgits gamle bog er et dokument som hun kender og som indholder brugsskemaer på en måde som den nye bog slet ikke gør.

Birgit vil spørge eleverne om hvad de ved om rette linier, og som opsamling på denne „brainstorm“ vil hun præsentere denne sætning. Igen vil hun her bruge elvernes egne ord for de forskellige begreber. Da dagens emne ligger tæt op ad emner de har haft i folke skolen, har Birgit en forventning til at „succesraten vil blive høj idag, fordi eleverne oplever at det faktisk er noget de godt kan“.

Funktionsbegrebet Birgit vil med udgangspunkt i den lineære sammenhæng introducere funktionsbegrebet, og altså lade de første eksempler på funktioner være lineære afbildninger. Hun har i sine noter tegnet den klassiske funktionsmaskine, med en indgang hvor man putter et x ned i, et håndsving og en udgang hvor maskine spytter et $f(x)$ ud. Hun vil specielt fokusere på to typer af opgaver som hører sig til funktionsbegrebet.

- Hvordan man, givet en funktion f og en x-værdi, beregner $f(x)$
- Hvordan man, givet en funktion f og en værdi for $f(x)$ beregner x

Efter at have givet eksempler og beregnet en opgave af hver type, vil hun lade eleverne arbejde i par om at løse opgaver af samme type.

Første undervisning

Birgit starter, som planlagt, timen med at nævne at dagens emne er „variabelsammenhænge“. Derefter vælger hun dog at gå bort fra den plan hun havde lagt under forberedelsen. Hun lader eleverne beskrive et forsøg de havde lavet i naturvidenskabeligt grundforløb. Forsøget handlede om at varme vand op og tage tid mens man målte temperaturen. Efter at eleverne har beskrevet hvad de gjorde i dette forsøg, siger Birgit: „Det her er faktisk et eksempel på en variabelsammenhæng. Er der nogen der kan fortælle mig hvad de to variable er i dette forsøg?“. I en vis forstand er der tale om en jourdain-effekt [Winsløw, 2007, p. 148], idet eleverne umiddelbart talte med, og virkede som om de forstod eksemplet. Dog mener jeg ikke at eleverne fik ejerskab over matematikken gennem dette eksempel, og de færreste elever virkede som om eksemplet tydeliggjorde for dem hvad en variabelsammenhæng er.

Selvom hun havde gjort sine noter meget eksplicitte til netop denne del af undervisningen, fordi hun af erfaring vidste at det er svære begreber, vælger hun alligevel at ændre hendes undervisning når hun kommer til at arbejde i den didaktiske situation (niveau 0) i stedet for under forberedelsen (niveau +1). Dette skyldes sandsynligvis at hun på dette niveau (0) bliver direkte konfronteret med elevernes reaktioner (niveau -1). Under forberedelsen havde hun også niveau -1 i tankerne, men dette eksempel viser tydeligt at læreren primært bliver påvirket af de omkringliggende niveauer, og kun sekundært af de øvrige niveauer.

Efter at have forklaret afhængig og uafhængig variabel ud fra naturfagsforsøget, vender hun tilbage til den oprindelig forberedelse, og spørger om eleverne kan nævne et eksempel på „anden størrelse der kan variere". Følgende dialog viser en vis uoverensstemmelse i den didaktiske kontrakt:

Elev: Mængde?

Birgit: Ja, et antal. Et antal af et eller andet, kan variere. Kan du komme med et eksempel?

Elev: Øhm.. Det er jo svært. Det tror jeg ikke. Det kan vel være alt muligt.

Birgit: Ja.

Elev: Jeg ved ikke.. det kommer jo an på hvad det er. [...] Antal kartofler fx.

Birgit: Ja, hvad kunne være et eksempel hvor antal kartofler var den uafhængige variabel? Hvad kunne så være den afhængige variabel?

Elev: Vandet?

Birgit: I en gryde fx??

Elev: Jeg ved det ikke, jeg var der ikke sidst.

Birgit har i sin forberedelse tænkt at lade eleverne komme med eksempler. På denne baggrund vil hendes forventning, jf. den implicitte didaktiske kontrakt, være at svaret på hendes første spørgsmål bør være en hel situation, med både afhængig og uafhængig variabel. Eleven som derimod ikke kender Birgits agenda, og dermed har en anden opfattelse af den didaktiske kontrakt, mener at have svaret på spørgsmålet med „Mængde", idet dette er en størrelse der kan variere. Derfor er eleven ikke klar til at stå yderligere til regnskab for sit svar, og trækker sig til sidst ud af dialogen.

Kommentaren „Jeg var der ikke sidst" henviser til naturfagstimen. Og eleven oplever altså ikke, som det var Birgits mål, at se en glæde over at der er forbindelse mellem de forskellige fag. Snarere oplever eleven en frustration over at de enkelte fag bliver forudsætninger for at kunne følge med i andre fag. I dette tilfælde kommer lærerens to overbevisninger: at bruge elevernes egne eksempler og at se koblingen mellem matematik og naturfag til at kollidere, og resultatet bliver forvirring hos eleverne.

Eksemplet med kartofler er på ingen måde elevens eget eksempel i den forstand at de føler ejerskab over matematikken der bliver brugt. Alligevel vælger Birgit at arbejde videre med dette kartoffel-eksempel, men for at kunne indføre begrebet konstant, ændrer hun eksemplet til at omhandle massefylden af kartofler, og får i den forbindelse nævnt både kartoffelsort og vækstforhold. Resultatet er at eleverne slet ikke følger med, hvilket bliver tydelig ved elevspørgsmålet: „Er det her noget vi skal tage notater til, eller er det lidt ud af en tangent?“ Eleverne opfatter således snarere eksemplet som en avanceret anvendelse, frem for en eksemplificering af begreberne.

Lineære funktioner Da Birgit senere har indført funktionsbegrebet vælger hun at lave en opgave som hun ikke havde planlagt under forberedelsen:

> Skriv to lineære funktioner op, og giv dem til sidemanden som så skal skitsere dem på ternet papir.

Øvelsen tager 12 minutter. De fleste af eleverne kender begrebet om rette linier og foreskriften for disse, fra folkeskolen. For mange ligger det dog langt væk, og specielt har de ikke særligt god intuition omkring begreberne. Jeg mener at denne opgave, på dette tidspunkt i forløbet, indholder et forholdsvist stort adidaktisk potentiale. Eleverne har mulighed for selvstændigt at udforske det didaktiske miljø opstillet af læreren. Eleverne vil eksempelvis kunne opdage egenskaber og karakteristika så som betydningen af a og b i forskriften $y = ax+b$, samt hvilken betydning fortegnet har for disse. Endvidere vil opdagelser som „to linier, hvis foreskrifter har samme a-værdi, er parallelle“ styrke elevernes intuition om begrebet.

Efter de 12 minutter bliver der dog ikke lavet en fælles opsamling, og hverken opdagelser eller problemer med opgaven bliver diskuteret på klassen. Dermed bliver elevernes viden ikke institutionaliseret. Eleverne har været i en handlingssituation og evt. formulerings- og valideringssituationer i løbet af øvelsen. Men for at stadfæste den indvundne viden har læreren brug for at institutionalisere den nye viden. [Winsløw, 2007, p. 139]

I stedet får eleverne med det samme en „sværere“ opgave:

> Tegn grafen for følgende lineære funktion: $h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{5}{2}$

Denne opgave får eleverne også ca 10 minutter til at løse til trods for at ikke indeholder andre aspekter af lineære sammenhænge end graferne de lige har arbejdet med. Opgaven syntes nærmere at flytte fokus fra lineære sammenhænge til brøker, og navngivningen af både funktion og variabel tyder på at opgaven primært har til formål at skabe sammenhæng til noget eleverne vil se i naturfag. De fleste elever i klassen havde allerede da opgaven blev skrevet på tavlen givet fortabt, og kun få fik derfor tegnet grafen. Igen undlader Birgit helt at samle op på denne opgave. Dette er tilsyneladende en del af den didaktiske kontrakt mellem lærer og elever i denne klasse, da eleverne ikke bliver irriterede over ikke at få kontrolleret deres arbejde, og samtidig ved de at der ikke er nogen konsekvens ved ikke at have arbejdet seriøst på opgaven.

Anden forberedelse

Jeg fik mulighed for at overvære Birgits anden forberedelse. Forberedelsen foregik på skolen, og Birgit vælger at sidde ved sin bærbare computer under forberedelsen. Birgit overordnede plan for dette modul er, at gennemgå sætning 4.8 [Nielsen og Fogh, 2005, p. 54]:

> Linien gennem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, med $x_1 \neq x_2$ har hældning
> $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Derudover vil hun i gang med at introducere begrebet regression. Birgit mener at regression følger naturligt efter at have introduceret rette linier.

Med disse to hovedpunkter i tankerne tænder Birgit computeren og giver sig til at søge på internettet efter opgaver. Det hun leder efter er opgaver som er typiske for hvad eleverne vil kunne støde på til eksamenen. Søgningen leder hende til gamle eksamenssæt, og hun bruger 20 minutter på at kigge disse igennem. Da hun har disse eksamenssæt digitalt, har hun mulighed for at overføre dem til et arbejdsark. Hun udvælger fra disse eksamenssæt to opgaver som hun sætter op på et arbejdsark under overskriften „Typiske eksamensopgaver med lineære funktioner“ (se appendix A.3). Hun lader hver af disse repræsentere en *type* opgaver, som eleverne kan støde på til eksamenen. Første type knytter sig til sætning 4.8, hvor man ud fra to givne punkter skal bestemme a og b for ligningen hørende til. Anden type opgave knytter sig til regression, hvor man givet et datasæt, skal bestemme a og b. Der er således en opgave til hvert hovedpunkt i Birgits agenda. Hun tilføjer i sine noter til dette arbejdsark: „Kort om type 1 – Fokus på type 2“.

Birgit vil både indføre regression over et datasæt ved hjælp af millimeterpapir og ved hjælp af TI-89. Derfor bruger hun den sidste del af hendes forberedelse på at undersøge, og omhyggeligt nedskrive, hvordan man taster og udfører regression på TI-89 lommeregneren. Birgit vil guide eleverne igennem denne proces ved at skrive op på tavlen hvad de skal taste på deres egen lommeregner. Hun vil ikke bruge viewscreen, en projekter som tillader eleverne at se Birgits skærm, da hun ikke har sat sig ind i hvordan det virker.

Hun forudser at dette modul vil indeholde mange lommeregnertekniske problemer, og potentielt vil der blive meget kaos under „indtastnings-opskriften“

Anden undervisning

Birgit starter timen med at skrive sætning 4.8 op på tavlen. Under forberedelsen gav Birgit udtryk for at hun i forbindelse med opgaver om at beregne hældning ud fra to punkter, havde erfaring for at eleverne ville have problemer med det lommeregnertekniske, dvs. at sætte parenteserne rigtigt når man indtaster koordinaterne til punkterne. Hun vil derfor forklare om hvordan man indtaster for at tage disse problemer i opløbet. Hun pointerede endvidere under forberedelsen at det primære i denne type opgaver er at identificere hvad x_1, x_2, y_1 og y_2 er.

Efter at have skrevet sætningen op på tavlen, giver hun eleverne et eksempel som de i par skal løse. Opgaven er:

> Givet punkterne: $A(-3, 2)$ og $B(5, -3)$. Bestem en foreskrift for den

rette linie gennem disse punkter.

Straks efter at have skrevet opgaven op, skriver hun på tavlen: $b = y_1 - ax_1$. Derefter får eleverne 12 minutter til at løse denne opgave. Opgaven indeholder intet adidaktisk potentiale, og da både formlen for at finde a og b står på tavlen, er opgaven blot at identificere koordinaterne for punkterne, og løse de to regnestykker:

$$a = \frac{-3-2}{5+3} = \frac{-5}{8}$$
$$b = 2 - \left(\frac{-5}{8}\right) \cdot (-3) = \frac{1}{8}$$

Specielt opgaven med at finde a er en opgave af typen „enten kan man let, eller også kan man ikke", derfor er 12 minutter umiddelbart for lang tid at give til at løse denne opgave. Langt de fleste problemer med denne opgave var enten problemer med at sætte parenteser på lommeregneren, eller forvirring over at -3 indgår i begge punkter. Disse to problemer svarer til hvad Birgit forudså under forberedelsen. Opgaven og problemerne i forbindelse med den, knytter sig mere til lærerens pædagogiske viden frem for den faglige eller den pædagogisk faglige. Selvom hun således er opmærksom på at problemerne kan opstå, vælger hun alligevel et eksempel hvor -3 indgår i begge punkter. Endvidere vælger hun først at nævne problematikken omkring parenteserne lige inden hun gennemgår opgaven på tavlen, dvs. *efter* eleverne har arbejdet med at løse opgaven. Disse problemer havde kun ladet sig løse ved at fokusere på pædagogiske aspekter.

Regression Læreren udleverer arbejdsarket med de to typeopgaver på, med ordene „det er de to typer i kan støde på til eksamenen". Hun gennemgår som planlagt type 1 ganske kort, og lader derefter en elev læse opgaven, af type 2, op. Da der kun er 25 minutter tilbage af timen, gennemgår Birgit hurtigt proceduren til at løse denne type opgaver, og sætter eleverne til at løse opgaven fra arbejdsarket ved hjælp af millimeterpapir. Da Birgit gerne vil vise eleverne at de vil komme frem til mange forskellige svar når de udfører regression på denne manuelle måde, laver hun et skema på tavlen med felterne: navn, a og b. Hun vil så have forskellige elever til at skrive deres løsninger op på tavlen.

Dette skema når hun dog ikke at bruge, idet eleverne har rigtig svært ved denne opgave. Eleverne bruger langt over halvdelen af den tid de har til rådighed til opgaven, på at finde ud af hvordan koordinatsystemet skal laves på millimeterpapiret. Da timen slutter, er de fleste elever ikke nået til selve regressionen, men har kun lavet koordinatsystemet, og er i gang med at afsætte punkter. Birgit slutter timen med at sige at hun næste modul vil tegne samme skema, og vil have det udfyldt med elevernes svar.

Tredje undervisning

Da andet undervisningsmodul slutter på den måde det gør, og da Birgit havde forberedt langt mere end hun nåede i modulet, laver hun ikke yderligere forberedelse til tredje modul. I stedet har hun, som hun selv udtrykker det: „bare en idé om hvad der skal ske". Denne idé indbærer at samle op på opgaven fra sidst, ved hjælp af skemaet, og derefter vise eleverne hvordan man udfører lineær regression ved hjælp af TI-89.

Det viser sig at der ikke er nogen af eleverne der har løst opgaven fra sidste modul, og Birgit giver derfor eleverne tid til at løse opgaven. Mens eleverne arbejder går Birgit rundt mellem dem, og på baggrund af deres resultater, udvælger hun fem elever til at skrive deres svar i skemaet på tavlen.

Birgit præsenterer herefter hvordan opgaven løses ved hjælp af lommeregneren. Dette gøres som planlagt ved at skrive en „taste-manual" op på tavlen, med ordene: „Det skal følges trin for trin, ellers går det fuldstændig i kage, og det bliver en rigtig dårlig oplevelse for os alle sammen". Det foregår i en ret kaotisk stemning, og det tager lang tid at indtaste datasættet. For at nå at blive færdig med eksemplet beder hun eleverne om at blive 5 minutter efter modulet er slut. Timen slutter derfor med sætningen „Det aller aller sidste vi når, er at trykke 'enter', og så ser vi at den giver os a og b". Derefter pakker eleverne deres ting sammen, og timen er slut.

Selvom Birgit ikke har skabt nye noter til dette modul, har hun dog skabt et nyt dokument idet hun har modificeret hendes personlige brugsskemaer omkring dokumentet til sidste modul. Således vil dokumentet nu indeholde de erfaringer hun gjorde sig i løbet af sidste modul.

Fra forberedelse til modul

Under forberedelsen har gør Birgit brug af en meget stor mængde ressourcer Således indeholder A_f blandt andet to lærebøger, lommeregner og bærbar computer. Birgit bruger alle ressourcerne til at interagere med O_f. Specielt gør hun brug af den bærbare computer, og i forbindelse med regression, bruger hun fx både Excel, TI-interactive og et lignende program kaldet Graph.

Tredje modul slutter med at eleverne kun lige når at se at lommeregneren kan udføre den lineære regression og give a og b. Birgit starter fjerde modul med at lave en kort opsummering af regression på lommeregneren. Derefter indfører hun både Excel og Graph til at udføre regressionen. Birgit ser disse redskaber som yderst brugbare og forstår selv at udnytte dem. I forhold til en given opgave kan Birgit se fordele og ulemper, samt hvilke muligheder de forskellige redskaber giver. Derfor ønsker hun at gøre disse værktøjer til en del af A_u, for at eleverne også kan nyde disse muligheder. Elevernes har imidlertid oplevelsen af at være i gang med at lære regression. De kan ikke se fordelene ved de mange forskellige værktøjer, dermed kommer de til at opfatte værktøjerne som en del af O_u, altså som noget der hører under begrebet, men ligger *ud over* hvad de ellers lærer om regression.

Et givet ES kan i sig selv indeholde en mængde undersystemer, både ES der forløber samtidig, og nogle der følger hinanden. Eksempelvis kan man betragte opgaven, omkring afbildningen af lineære funktioner, som et ES: (G_o, O_o, A_o). I dette ES vil G_o udgøres af de to elever der vælger at arbejde sammen. O_o er afgrænset til den delmængde af emnet som omhandler den grafiske fremstilling af lineære funktioner. Artefakterne er få, og da opgaven skulle løses uden både bog og lommeregner, består A_o kun af ternet papir og blyant. G_o er speciel idet de to elever i en vis forstand ikke arbejder sammen, men dog begge indgår i gruppen under en didaktisk mini-kontrakt, som sikrer at eleverne udveksler „rimelige“ opgaver. Eksempelvis gives kun lineære funktioner med heltallige koefficienter, idet en opgave som „Skitser $y = \pi x + \sqrt{e}$“ ikke vil give yderligere forståelse for O_o end fx „Skitser $y = 3x + 2$“.

4.5 Lærer Christian

Jeg observerede Christians undervisning af 4 moduler. Jeg overværede ikke forberedelsen af nogle af disse, men inden hvert modul, mødtes jeg med Christian, og blev sat ind i hvilken forberedelse han havde lavet. Jeg fik udleveret de noter han havde udarbejdet under sin forberedelse. Endvidere fik jeg lov at interviewe Christian umiddelbart efter et modul.

Observationen Klassen er som sagt en IB-klasse og ifølge Christian betyder det at han har faste krav til pensum. Christian gav udtryk for at han derfor bruger han meget tid på den overordnede forberedelse og planlægning (niveau +2 i figur 1). Den overordnede plan han har lagt for klassen indebærer at hvert modul skal dække 6-8 sider i bogen, og af den grund bliver pensum gennemgået i et langt højere tempo end i de to andre klasser jeg observerede. Således nåede denne klasse, på de fire observerede moduler, at

- Afslutte et kort introducerende forløb om komplekse tal.
- Gennemgå et forløb om polynomiers division.
- Starte på et forløb om binomialkoefficienter.

Samtidig betyder denne overordnede forberedelse, ifølge Christian, at den specifikke forberedelse (niveau +1) bliver lettere at gå til. Som sagt forbereder Christian sig normalt ved at læse de 6-8 sider igennem, og ud fra disse lave lidt noter så han ved hvilke pointer han vil fremhæve, samt hvilke opgaver eleverne skal regne.

Christians forberedelse og undervisning

Christians overbevisning om teori Christians syn på at teori er vigtigere end eksempler, og at han har videregivet dette til eleverne, kommer til udtryk fx i en situation hvor en elev løser en opgave ved tavlen. Modulet omhandler komplekse tal, og eleverne har arbejdet med at finde den komplekst konjugerede samt at regne med komplekse tal. Opgaven er at bestemme x og y givet at

$$(x + 2i)(y - i) = -4 - 7i$$

Allerede fra starten laver eleven en regnefejl, og omskriver dette til:

$$xy + 2yi + yi^2 + xi = -4 - 7i$$

Eleven fortsætter med at omskrive, og opstiller til sidst ligningerne:

$$xy - y = -4$$
$$2y + x = -7$$

Herefter stopper han med ordene „så gad jeg ikke regne videre, men det er bare at løse den“. Regnefejlen rettes ikke, sandsynligvis fordi den ikke bliver opdaget, men at den ikke bliver det, skyldes at det hverken for Christian eller de øvrige elever er det væsentlige i opgaven. Dette viser at det er en del af den didaktiske kontrakt mellem Christian og eleverne i denne klasse, at det er vigtigere at have forstået teorien og principperne bag en opgave, end at løse den. Det forstærkes yderligere af at Christian accepterer dette, og hverken opfordrer eleven til at fortsætte, eller selv løser opgaven færdigt.

Tredjegradspolynomier. Christian havde i elevernes sidste skriftlige aflevering, givet dem en opgave hvor de for fire givne grafer for andengradspolynomier skulle forklare hvad man ud fra grafen kunne slutte om determinanten D og koefficienterne a, b og c. Eleverne havde haft store problemer med denne opgave, primært fordi de var usikre på hvad Christian gerne ville have dem til at svare. Dette er et tydeligt eksempel på en effekt af den didaktiske kontrakt. Eleverne bliver usikre fordi de er vant til, og forventer, at der er et specifikt svar som Christian ønsker til hver opgave. Samtidig gav Christian udtryk for at han var skuffet over at de fleste kun havde forsøgt at beskrive D og a. Han sagde at „Det kan man også på C-niveau, man bør kunne forvente mere på et HighLevel-hold“.

Til modulet om polynomiers division er der i bogen et afsnit om tredjegradpolynomier, som indeholder en opgave af samme type som ovenstående. Opgaven er markeret som „Investiagtion 2“ (se appendix A.4), og ligger op til at eleverne selv skal udforske og opdage karakteristika ved tredjegradspolynomier – på samme måde som de skulle forklare karakteristika ved andengradspolynomierne i deres skriftlige aflevering. Selvom eleverne var forvirrede, og læreren skuffet, over opgaven med andengradspolynomier, vælger Christian at eleverne skal lave denne opgave.

Opgaven går ud på at undersøge fire typer tredjegradspolynomier, alle faktoriseret på forskellige måde. Eksempelvis er type 1:

> *Type 1:*
>
> $$P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma), \quad a \neq 0$$
>
> Eksperiment with type 1 graphs of cubics. Clearly state the effect of changing a (in size and sign). What is the geometrical significance of α, β and γ?

Bogen opfordrer til at eleverne benytter lommeregneren til at undersøge polynomiet. Opgaven har et virkeligt stort adidaktisk potentiale, og ved at sidde og manipulere med polynomiet får eleven en intuition omkring hvilken betydning det har for grafen at ændre på a, α, β og γ. Endvidere får de en forståelse for sammenhængen mellem den enkelte faktorisering og tredjegradspolynomiet skrevet på dets „normale“ form: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, og de vil se hvilke fordele der er i at have et tredjegradspolynomium faktoriseret på en bestemt måde.

Alt dette ligger i det didaktiske miljø. Dette er i første omgang skabt af bogen, og devolutionen vil kunne foregå udelukkende ud fra bogen. I handlingssituationen vil eleven vha. lommeregneren interagere med matematikken, og selvstændigt vil eleven kunne formulere og validere hypoteser, således kan både handlingssituation, samt formulerings *og* valideringssituationen blive adidaktisk. Slutteligt bør læreren institutionalisere det tilsigtede viden, således at de resultater som eleverne mener at have valideret, bliver stadfæstet af lærerens autoritet.

Christian har tænkt sig at give eleverne ca. 15 minutter til at arbejde denne Investigation 2, hvilket umiddelbart virker som ret kort tid hvis alle fire typer skal undersøges grundigt. Da selv emnet om polynomiers division dog kommer til at tage mere tid end beregnet, vælger Christian i løbet af timen at droppe denne øvelse. Dette kan der være flere grunde til, den primære årsag er sandsynligvis at Christian vælger at prioritere selve emnet om polynomiers division. Dette kan igen knyttes til Christians overbevisning om at teori er det væsentligste, og naturligvis er det godt at eleverne har en intuition omkring de begreber der indgår, men denne intuition kommer i anden række.

Selvom opgaven ikke bliver prioriteret i timen, vælger Christian at lave den som hjemmeopgave. Han planlægger efter timen at dele klassen i to, således at den ene halvdel sætter sig ind i type 1 og 2, mens den anden undersøger type 3 og 4. Næste modul skal eleverne sætte sig sammen i par, en fra hver halvdel af klassen, og forklare de opdagelser for hinanden. Christian har god erfaring med denne type lektier, idet eleverne så ved at de bliver stillet til regnskab for om de har lavet lektier. Det viser sig også at være tilfældet, alle eleverne har sat sig ind i de to typer, og umiddelbart er eleverne kommet frem til fornuftige opdagelser. Christian vælger at institutionalisere deres opdagelser vha. grafer på lommeregneren.

Fra forberedelse til modul

Da Christian specielt kan lide at undervise dygtige elever, vil han også forsøge at lade O_u være udtryk for det fulde matematiske område. Når Christian under forberedelsen arbejder med O_f, er hans fokus således på at gøre O_u så fyldestgørende som muligt, uden at fjerne aspekter for at tilpasse denne viden til G_u.

Under forberedelsen arbejder Christian primært med lærebogen som eneste artefakt. Naturligvis benyttes også papir, kuglepen, computer og enkelte gange lommeregner, men lærebogen er et dokument som Christian bruger, og tager med i mængden af ressourcer hver gang han forbereder sig. Således vil han også lade eleverne interagere med O_u direkte gennem bogen, således at denne også i undervisningen bliver en primær artefakt. Tavlen er den vigtigste del af A_u i forhold til kommunikationen indbyrdes i G_u, men tavlens formål er at videreformidle hvad der er at finde i bogen. Dermed bliver elevernes adgang til O_u, igennem bogen. Dette kommer tydeligt til udtryk ved at Christian vælger at lade eleverne læse „Investigation 2“, og lader dem tilgå O_u (i dette tilfælde delmængden $O_{u(3.gradspol.)}$) uden at orkestrere samspillet mellem A_u og O_u yderligere.

5 Metodekonklusion

Jeg vil i dette afsnit konkludere på de erfaringer jeg gjorde mig omkring det at observere. Jeg vil beskrive hvilke fordele og ulemper de enkelte observationsmetoder indebar, samt hvor brugbare metoderne var i forhold til observation af forberedelse.

Jeg havde ikke på forhånd en forventning til hvad jeg ville observere, derfor ønskede jeg at afprøve mange observationsmetoder. Jeg ville derefter kunne vurdere hvilke metoder der var frugtbare i forhold til at observere forberedelse. Samtidig ville jeg også se om der var metoder som understøttede hinanden, således at to metoder gav information som metoderne ikke ville give hver for sig.

Videooptagelse Jeg observerede først Anna, og jeg fik lov til at videofilme hende. Bortset fra at jeg vælger hvordan jeg vil placere kameraet, og dermed er medbestemmende i hvad der kommer med på optagelsen, er denne videooptagelse objektiv. Nogle af de optagede episoder indeholder i sig selv ingen information, men information skal jeg skabe i min tolkning af optagelsen.

Jeg kan derimod gøre mig kvantitative observationer på baggrund af optagelsen. Disse observationer kan give et indblik i hvor lang tid af forberedelsen der bruges på fx at gennemregne opgaver, samt hvordan opgaverne blev gennemregnet. Således så jeg at Anna i løbet af første forberedelse brugte 25 minutter på at regne de opgaver hun ville give til klassen. Ud af de 25 minutter brugte hun 7 minutter på at tegne skitser og grafer til en opgave. På baggrund af hendes løsning af opgaven valgte hun opgaven fra, idet den flyttede fokus væk fra det hun gerne ville have eleverne skulle være opmærksomme på i første modul.

Videooptagelsen gjorde det også klart hvor meget af forberedelsestiden Anna brugte på at læse gamle eksamenssæt igennem, og ud fra dem skabe fx overblik og opgaver til klassen.

Man kan argumentere for at jeg også kunne have gjort mange af disse kvantitative observationer uden brug af videooptagelsen, ved blot at lave meget udførlige noter. Mange gange er det dog sådan at vi første gang ikke bemærker små aspekter af episoder som vi selv finder naturlige. Disse lader sig først afsløre ved at gennemgå episoderne igen.

Kvalitativt var videooptagelsen i sig selv ikke særlig stærk. Som sagt indholder en optagelse i sig selv ingen information, og man kan derfor ikke direkte tolke noget om lærerens hensigt eller overbevisning ud fra en episode på videooptagelsen. Det vil derfor indebære for stor risiko for fejltolkninger at lade videooptagelsen stå alene. Eksempelvis observerede jeg at Anna under forberedelsen skiftede til en rød kuglepen – hvilket kunne tolkes som en handling for at fremhæve en del af hendes noter som særlig vigtig, men viste sig blot at være udtryk for at den blå kuglepen var løbet tør.

Forberedelsesbservation Ud over videooptagelsen, tog jeg noter under forberedelsen. Disse noter var, modsat videooptagelsen, subjektive idet jeg kun skrev ned hvad jeg så og hvordan jeg så det. Disse fungerede primært som grundlag for den korte snak jeg havde med læreren efter forberedelsen. Blot at være til stede under forberedelsen, gav ikke yderligere information i forhold til videooptagelsen. Det vigtige ved at være til stede under forberedelsen var at jeg dermed kunne observere hvilke handlinger og aktiviteter jeg ville stille yderligere spørgsmål til under det efterfølgende interview.

Interview Det første initielle interview gav mig et indtryk af lærerne. Dette indtryk var min tolkning af lærernes svar, og dermed også subjektivt. Interviewet gav meget data, og som nævnt i afsnit 3 er denne data potentielt pålidelig. Lærerene svarede villigt på spørgsmålene, og det virkede ikke som om de bevidst talte usandt eller prøvede at imponere ved at tillægge deres forberedelse egenskaber som ikke svarer til virkeligheden.

Dette indtryk og dermed det initelle interview var essentielt for at jeg kunne forholde mig til de reaktioner og handlinger jeg observerede hos lærerne.

Interview om forberedelse Jeg interviewede lærerne omkring deres forberedelse, både når jeg havde set denne, og når jeg kun fik udleveret deres udarbejdede noter. Interviewet var vigtigt i begge situationer, da noterne ofte var i stikordsform, og eksempelvis sætningen „Grafer for f og f'“ giver i sig selv ikke noget indblik i hvad læreren vil under dette punkt.

I de situationer hvor jeg ikke observerede forberedelsen var noterne også vigtige, som udgangspunkt for lærerens egen beskrivelse af forberedelsen.

Noter Jeg fik udleveret de noter som læreren udarbejdede under forberedelsen. Disse noter var lærerens endelige dokumenter, og til de noter som jeg havde set blive til, havde jeg under forberedelsen havde set mængden af ressourcer Under interviewet bagefter havde jeg også fået et indblik i hvilke brugsskemaer læreren knyttede til dokumentet. Disse noter var således særligt interessante, idet jeg kunne observere lærerens brug af et dokument, og tolke lærerens handlinger ud fra disse.

Skønt jeg ikke havde observeret alle noters tilblivelse, og dermed ikke havde set ressourcerne for alle dokumenterne, havde jeg interviewet læreren om hver note, og således fået et indblik i hvilke tanker læreren havde omkring noterne.

Både de noter jeg havde observeret tilblivelsen af og dem jeg ikke havde, var endvidere brugbare som reference under selve undervisningsobservationen, idet jeg kunne se hvilke formuleringer og definitioner læreren brugte ordret ud fra noterne, og hvad læreren formulerede i løbet af modulet. Derudover gav disse noter mig muligheden for at bemærke hvornår kronologien i undervisningen blev holdt i overensstemmelse med forberedelsen, og hvornår den blev modificeret. Lærerens noter var altså min primære kilde til at bemærke ændringer i forhold til den planlagte forberedelse, samt hvilke episoder der fik ham til at foretage disse ændringer.

Undervisningsobservation Undervisningsobservationen blev holdt så neutralt som muligt, hvilket betød at jeg opholdt mig samme sted hele modulet, og i øvrigt ikke interagerede med hverken lærer eller elever.

Jeg observerede som sagt undervisningen fordi mit speciale ikke skulle handle om forberedelsen som isoleret aktivitet, men jeg i stedet ønskede at se på samspillet mellem forberedelse og undervisning. Observationen gav meget data som beskriver hvordan eleverne responderer på undervisningen, og hvordan læreren reagerer på elevernes svar. Det som dog var vigtigst ved observationen var at se hvordan læreren gjorde brug af forberedelsen og de udviklede dokumenter. Derudover var det også interessant at se hvordan læreren modificerede forberedelsen i løbet af interaktionen med eleverne.

Under observationen var den vigtigste datakilde de noter jeg tog. Jeg optog også de observerede moduler på diktafon. Denne optagelse gav ikke yderligere information i forhold til noterne. Dog kunne optagelsen bruges til at gengive citater fra undervisningen, som i særlig grad beskrev en episode.

Efterfølgende tanker Da jeg efterfølgende skulle behandle den indsamlede data, oplevede jeg at der var yderligere information jeg gerne ville have haft. Derfor havde det været meget brugbart at have haft mulighed for at observere lærerne igen. På den måde kunne ville jeg ud fra den første observation, opstille en hypotese, som ville ligge til grund for de senere observationer. Jeg kunne således have observeret med denne hypotese for øje, og have fokuseret på de mest relevante aspekter af samspillet mellem forberedelse og undervisning, og samtidig undladt de observationsmetoder og data som gav forholdsvist lidt information.

Under interviewet der fulgte efter en overværet forberedelse, stillede jeg ikke direkte spørgsmål til hvilke didaktiske overvejelser læreren havde gjort sig. Dette var et bevidst valg for ikke at komme til at påvirke læreren i retning mod et didaktisk handlemåde. Det betyder dog at det kun var de didaktiske overvejelser som læreren eksplicit gav udtryk for, som jeg med sikkerhed ved at læreren havde i tankerne under forberedelsen. Øvrige didaktiske overvejelser og brug af teorier har jeg været nødt til at tolke ud fra min observation og mit kendskab til lærerens overbevisning.

For at gøre observationen mulig foretog læreren nogle valg som betød at forberedelsen fraveg fra hvordan den normalt forløber. Disse fravigelser er potentielle fejlkilder i forhold til min observation. Således blev forberedelsen afholdt på skolen, begrænset til én time og jeg observerede kun lærerens handlinger i denne ene time. Alle de observerede lærere gav udtryk for at de som regel havde gjort sig tanker, inden de satte sig til at lave den egentlige forberedelse. Disse tanker og overvejelser lader sig naturligvis ikke observere, dog havde man sandsynligvis kunnet mindske effekten af denne fejlkilde ved at holde et kort interview, hvor læreren kunne beskrive hvilke tanker han havde gjort sig inden forberedelsen.

6 Konklusion

Min observation gav mig et kort indblik i hvordan en gymnasielærer forbereder sig. Selvom jeg kun observerede tre lærere, fik jeg indtryk af hvilke ressourcer og hjælpemidler lærerne ligger til grund for deres undervisning.

Jeg observerede at lærerne var meget fokuserede på elevernes eksamen. Selv lærerne som gav udtryk for at de ønskede at eleverne fik en dybere forståelse for matematikken, tilrettelagde meget af deres undervisning med henblik på hvad eleverne skal kunne til eksamenen. Specielt havde de fokus på den skriftlige eksamen, og i løbet af forberedelsen var de gamle eksamenssæt grundlag for lærerens valg af opgaver så vel som fokusområder. Dette kom også til udtryk i løbet af undervisningen, hvor læreren ofte motiverede eleverne ved at nævne at et emne eller en opgave var eksamensrelevant.

Af samme grund brugte lærerne meget af deres forberedelse på at finde opgave*typer*. De ønskede at finde forskellige typer af opgaver som de, vha. gamle eksamenssæt, kunne se ville blive relevante for eleverne i eksamenssituationen. Når de forskellige typer var identificeret, ville de finde eller konstruere opgaver som trænede elevernes evne til at løse denne opgavetype. Dette blev som oftest gjort ved at give en række opgaver som langsomt steg i sværhedsgrad. Sværhedsgraden var som oftest ikke set i forhold til temaet i opgavetyperne, men i forhold til indgående faktorer, som eksempelvis skift fra hele tal til rationelle tal.

Lærernes dokumenter Alle de tre observerede lærere udarbejdede noter under forberedelsen, der var dog stor forskel på hvilken type noter de udviklede, og hvordan de efterfølgende gjorde brug af dem. Én lærer brugte lærebogen som primært dokument, og denne var forbundet med brugsskemaer. Lærerens noter fra forberedelsen indholdt kun oplysninger om hvilke opgaver eleverne skulle regne i løbet af timen. Nogle af lærerne havde istedet noterne som deres primære dokument. Dermed havde lærerne knyttet personlige brugsskemaer til disse noter, og disse brugsskemaer blev taget i brug under modulet.

Adidaktiske situationer Min observation viste at lærerne gerne afsatte tid i løbet af undervisningen til at eleverne kunne regne opgaver, enten alene eller i par. Opgaverne blev præsenteret af læreren, og eleverne arbejdede selvstændigt, uden lærerens indgriben, med at løse opgaverne. I den forstand var det adidaktiske situationer. Til trods for dette var det adidaktiske *potentiale* i disse opgavesessioner ikke særligt stort. Opgaverne havde som sagt primært til formål at udruste eleverne til eksamenen ved at træne opgavetyper. Lærerne mente at opgaverne var gode til at eleverne fik „teorien ind på rygradden". Hvorvidt dette var tilfældet, bliver målt ved hvor godt eleverne klarer den bestemte opgavetype til eksamenen, så på den måde er det vigtige blot at „metoden til løsning af opgavetypen kom ind på rygraden".

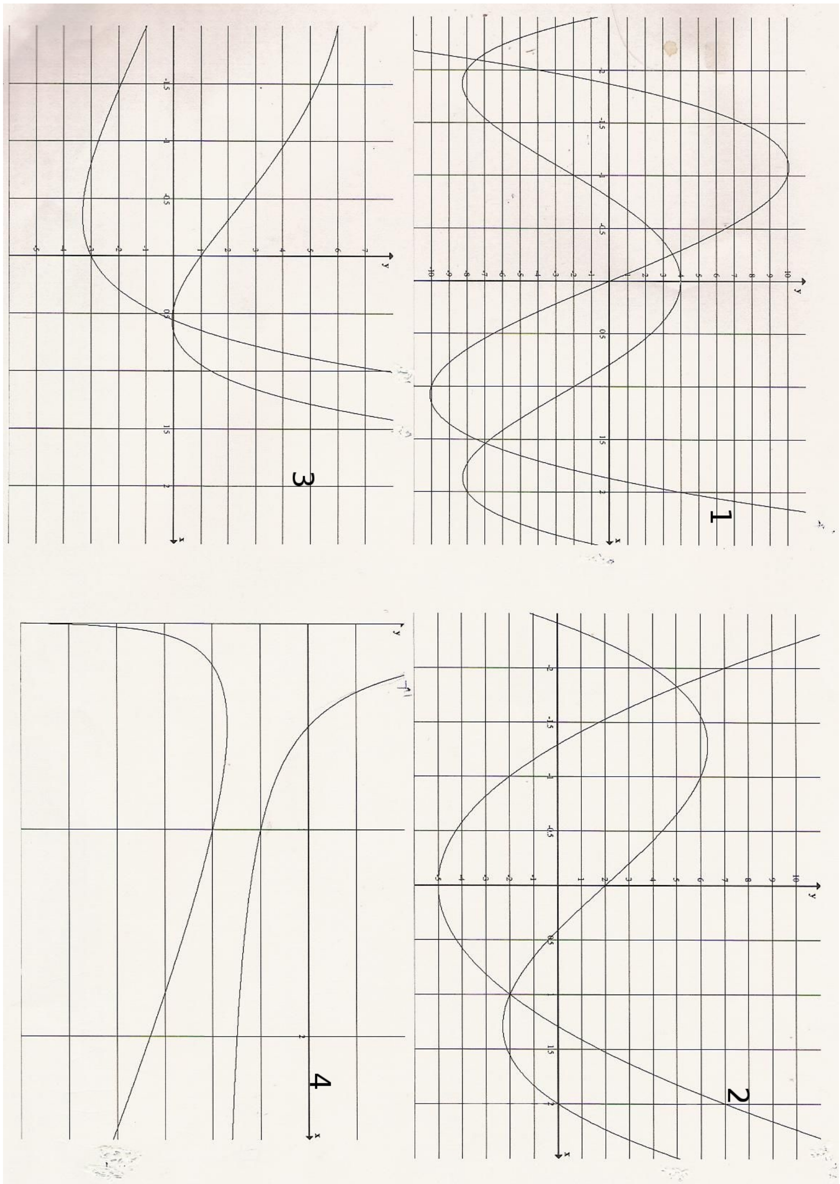
Ofte var det ikke et mål at opgaverne indeholdt et adidaktisk potentiale, således at eleverne selvstændigt havde mulighed for at udforske det didaktiske miljø. Jeg mener at grunden til dette er, at situationer med stort adidaktisk potentiale er tidskrævende. Med et stort fokus på eksamen kan det virke mere oplagt blot at springe direkte til institutionaliseringen, for derefter at lade eleverne træne deres evne til at regne opgaver, frem for at lade dem komme frem til matematikken ved selv at formulere og validere hypoteser.

Jeg observerede flere eksempler hvor opgaver med adidaktisk potentiale blev nedprioriteret. Eksempelvis lavede Birgit den uplanlagte opgave omkring lineære funktioner, som har et oplagt adidaktisk potentiale. Men idet hun vælger at lade være med at følge op på elevernes opdagelser, er der stor risiko for at disse opdagelser blot forsvinder og ikke bliver en del af elevernes viden. Endvidere oplevede jeg hvordan Christian havde planlagt at lade eleverne lave „Investigation 2", men pga. tidspres i stedet brugte tiden på at træne opgaver om polynomiers division.

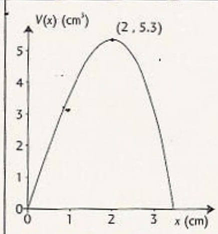
Ved at fokusere på forberedelse, og være bevidste om det samspil der er mellem forberedelse og undervisning, har vi mulighed for at få en forståelse for lærerens overvejelser og handlinger i undervisningssituationen. Denne forståelse vil forme arbejdet med matematikdidaktikken, påvirke vores syn på undervisning og i sidste ende sikre at eleverne får „noget" ud af matematikundervisningen.

A Bilag

A.1 Arbejdsark med grafer



A.2 Kogebogsopskrift til optimering

Handling	Eksempel 20
1. Alle variable identificeres og navngives.	x, h, V
2. Den afhængige variabel identificeres. Det vil altid være den størrelse, der skal optimeres.	V
3. Sammenhænge mellem de øvrige variable opstilles.	Samlet pris = 48 kr., dvs. $12xh + 4x^2 = 48$.
4. Den uafhængige variabel vælges.	Både h og x kan bruges. Vi valgte x.
5. De andre variable udtrykkes ved den valgte uafhængige variabel.	h isoleres i ligningen $12xh + 4x^2 = 48$, dvs. $h = \frac{12 - x^2}{3x}$.
6. Begrænsninger på den uafhængige variable bestemmes.	$0 < x < \sqrt{12}$
7. Den afhængige variabel udtrykkes ved de øvrige variable.	$V = x^2 \cdot h$
8. De fundne sammenhænge (se punkt 5) indsættes, så kun den valgte uafhængige variabel indgår.	$V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{3x} = 4x - \frac{x^3}{3}$
9. Funktionen differentieres, og differentialkvotienten sættes lig 0. Ligningen løses.	$V'(x) = 0$ løses. Løsning: $x = 2$
10. Grafen for funktionen tegnes, så man kan se, om der er tale om maksimum eller minimum. (Alternativt kan man undersøge fortegnsvariationen for differentialkvotienten.)	
11. Konklusion. Den optimale værdi af de variable beregnes.	Rumfanget er maksimalt for $x = 2$, dvs. siden skal være 2 cm. Dette svarer til højden 1,3 cm. Det maksimale rumfang er 5,3 cm³.

A.3 Arbejdsark til Birgits anden forberedelse

Typiske eksamensopgaver med lineære funktioner

Type 1 To punkter oplyses - beregn *a* og *b* ud fra dem og besvar spørgsmål ud fra det.

Opgave 2

SLANGEVOGN MED SLANGE

Længden af slangen (meter)	25	50
Pris for slangevogn med slange (kr.)	418,50	539,50

Tabellen viser sammenhængen mellem prisen for en slangevogn med slange og længden af slangen. Det antages, at denne sammenhæng kan beskrives ved

$$y = ax + b,$$

hvor x er længden af slangen (målt i meter), og y er prisen (i kr.) for slangevogn med slange.

a) Bestem tallene a og b.

b) Giv en fortolkning af tallene a og b.

Type 2 En hel tabel oplyses - lav en regression[1] over HELE tabellen og besvar spørgsmål ud fra det.

Opgave 6 I de senere år er nye frysere blevet forbedret, så de forbruger stadig mindre el. Tabellen viser det typiske årlige elforbrug for frysere for årene 1988-2000.

År	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
Årligt elforbrug (kWh)	635	605	573	541	512	483	454

Det oplyses, at det årlige elforbrug med god tilnærmelse kan beskrives ved en lineær model

$$f(x) = ax + b,$$

hvor x er antal år efter 1988, og $f(x)$ er det årlige elforbrug, målt i kWh.

a) Bestem tallene a og b.
Hvad fortæller tallet a om udviklingen i fryseres elforbrug?

b) Hvornår vil det typiske årlige elforbrug for frysere være 300 kWh, hvis denne udvikling fortsætter?

Kilde: Energistyrelsen, www.ens.dk

[1] Brug stat-list på TI-89 eller lav en tendenslinje i excel eller lav en linreg i TI-interactive.

A.4 Investigation 2

INVESTIGATION 2 **CUBIC GRAPHING**

GRAPHING PACKAGE

Possible types to consider are:

Type 1: $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma), \;\; a \neq 0$

Type 2: $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)^2, \;\; a \neq 0$

Type 3: $P(x) = (x-\alpha)(ax^2+bx+c), \Delta = b^2 - 4ac < 0, \;\; a \neq 0$

Type 4: $P(x) = a(x-\alpha)^3, \;\; a \neq 0$

What to do: (Use transformations of **Chapter 6** wherever possible)

1. Experiment with *Type 1* graphs of cubics. Clearly state the effect of changing a (in size and sign). What is the geometrical significance of α, β and γ?
2. Experiment with *Type 2* graphs of cubics. What is the geometrical significance of the squared factor?
3. Experiment with *Type 3* graphs of cubics. What is the geometric significance of α and the quadratic factor which has imaginary zeros?
4. Experiment with *Type 4* graphs of cubics. What is the geometric significance of α? Do not forget to consider $a > 0$ and $a < 0$.

Litteratur

Bromme, R. (1994).
Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge.
Didactics of mathematics as a scientific disipline, side 73-88.

Coulange, L. (2005).
The teaching of setting up equations: Teacher's activity and knowledge.
Proceedings of CERME 4.

Dinham, S. M. (2002).
Use of multiple methods in research on college teachers.
Teacher thinking, beliefs and knowledge in higher education, side 321-334.

Even, R. og Tirosh, D. (1995).
Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teachers presentations of the subject matter.
Educational studies of mathematics, 29:1-20.

Gueudet, G. og Trouche, L. (2009).
Towards new documentation systems for mathematics teachers?
To appear in Educational Studies of Mathematics.

Hersant, M. og Perrin-Glorian, M.-J. (2005).
Caracterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations.
Educational studies of mathematics, side 113-151.

IBO (2006).
Diploma programme: Mathematics hl.

Laursen, N. N. (2008).
Variabelsammenhænge i gymnasiets matematikundervisning.
Mona, 4:7-21.

Margolinas, C., Coulange, L. og Bessot, A. (2005).
What can the teacher learn in the classroom?
Educational studies in mathematics, side 205-234.

Nielsen, K. E. og Fogh, E. (2005).
Vejen til matematik C.
HAX.

Poulsen, E. T. (1997).
Matematiske modeller.
Elementærafdelingen nr. 24.

Sfard, A. (1991).
On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.
Educational Studies of Mathematics, 22:1-36.

Shulman, L. S. (1985).
Those who understand: Knowledge growth in teaching.
Educational Researcher, side 4-14.

Stigler, J. W. og Hiebert, J. (1999).
The teaching gap.
The free press.

Tolnø, J., Schomacker, G. og Clausen, F. (2005a).
Gyldendals Gymnasiematematik B1 – Arbejdsbog.
Gyldendal.

Tolnø, J., Schomacker, G. og Clausen, F. (2005b).
Gyldendals Gymnasiematematik B1 – Grundbog.
Gyldendal.

Undervisningsministeriet (2007).
Læseplan for a-niveau matematik i gymnasiet.
`us.uvm.dk/gymnasie//laereplan_pdf/stx/stx_matematik_a.pdf`.

Winsløw, C. (2007).
Didaktiske elementer.
Biofolia.

Winsløw, C. (2008).
Comparing theoretical frameworks in didactics of mathematics: The GOA-model.
To appear in proceedings for CERME 6.